



**HAL**  
open science

## Les supergroupes quantiques et leurs twists

Loïc Poulain d'Andecy

► **To cite this version:**

Loïc Poulain d'Andecy. Les supergroupes quantiques et leurs twists. Physique mathématique [math-ph]. 2009. dumas-00448866

**HAL Id: dumas-00448866**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00448866>**

Submitted on 20 Jan 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE  
AIX-MARSEILLE II  
U.F.R Sciences de Luminy

Rapport de stage de Master 2

---

# LES SUPERGROUPES QUANTIQUES ET LEURS TWISTS

---

Loïc POULAIN D'ANDECY

*Master 2 : Physique Théorique, Physique Mathématique, Physique des Particules et Astrophysique*

sous la direction de :  
Oleg OGIEVETSKY

*Centre de Physique Théorique, CNRS Luminy, F-13288 Marseille Cedex 9*

## Remerciements

Je tiens à remercier le Centre de Physique Théorique pour son accueil tout au long de ce stage, et en particulier toutes les personnes avec qui j'ai pu être en contact durant ces trois mois.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Oleg Ogievetsky pour m'avoir proposé ce stage et pour m'avoir si bien encadré. Je le remercie pour sa grande disponibilité, pour avoir très souvent remédié à mon ignorance et pour toutes les questions intéressantes qu'il m'a posées.

Je remercie Denis, Greg et Manue ainsi que Jean-Ga et Thibault pour la bonne humeur et les rigolades.

Enfin, mes pensées vont vers Wendy qui m'a supporté, soutenu et qui continue de le faire.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Groupes quantiques : Motivation, définitions et exemples</b>	<b>7</b>
2.1	Motivation et définitions . . . . .	8
2.1.1	Algèbres de Hopf quasi-triangulaires . . . . .	11
2.2	Exemples . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Superalgèbres de Lie</b>	<b>16</b>
<b>4</b>	<b>Généralités sur les twists d'algèbres de Hopf</b>	<b>19</b>
4.1	Au niveau universel . . . . .	19
4.2	Au niveau numérique . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Les déformations de <math>\mathfrak{gl}(1 1)</math> et leurs twists</b>	<b>26</b>
5.1	Déformations standards de $U(\mathfrak{gl}(1 1)) : U_\alpha(\mathfrak{gl}(1 1))$ et $U_q(\mathfrak{gl}(1 1))$ . . . . .	26
5.1.1	Théorie des représentations de $U_\alpha(\mathfrak{gl}(1 1))$ et de $U_q(\mathfrak{gl}(1 1))$ . . . . .	28
5.2	Twists vers les déformations non-standards de $U(\mathfrak{gl}(1 1))$ . . . . .	31
5.3	Twist vers $U_{q,r}^I(\mathfrak{gl}(1 1))$ . . . . .	32
5.4	Twist vers $U_q^{II}(\mathfrak{gl}(1 1))$ . . . . .	35
5.4.1	Twists numériques . . . . .	35
5.4.2	Recherche d'un twist universel . . . . .	39
5.4.3	Etude de l'algèbre obtenue par la méthode FRT . . . . .	39
5.4.4	Retour vers le twist universel . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Bilan et perspectives</b>	<b>43</b>
<b>A</b>	<b>Annexes : Matrices de <math>A</math> et <math>B</math> dans la base qui respecte la parité</b>	<b>45</b>

# 1 Introduction

Dans la physique telle que nous la connaissons et que nous l'étudions à ce jour, les symétries semblent être partout. Dans tous les domaines, nous sommes amenés à rencontrer des symétries discrètes, des symétries continues, des symétries de jauge, voire même des supersymétries. De plus, bon nombre de théories et de modèles reposent sur des principes de symétrie. La question naturelle, plutôt métaphysique, et à laquelle nous ne prétendons absolument pas connaître la réponse, est alors de savoir si toutes ces symétries existent de manière intrinsèque dans la nature, ou si c'est notre façon de regarder, puis de modéliser le monde qui nous entoure qui nous pousse à les considérer. Est-ce que la Nature a été faite de manière symétrique, indépendamment de notre présence pour l'observer ? Peut-on affirmer que les symétries seraient toujours là, si nous n'étions pas présents pour les regarder, ou proviennent-elles seulement de la nécessité de formaliser une réalité d'une grande complexité ? Nous ne pouvons (et ne voulons) pas essayer de répondre à ces questions qui nous mèneraient inexorablement vers des terrains glissants. Tout juste pouvons-nous remarquer que au cours de l'Histoire de la Physique, la notion de symétrie a toujours été présente, mais s'est grandement développée ce dernier siècle, donnant lieu à des constructions d'un haut degré de technicité. Il est loin le temps où Platon expliquait tout à partir des 5 polyèdres réguliers : les solides platoniciens dont 4 représentaient les 4 éléments (cube = Terre, tétraèdre = Feu, octaèdre = Air et icosaèdre = Eau) et le cinquième (dodécaèdre) représentait l'Univers. Une façon d'approcher des réponses aux questions ci-dessus est de poursuivre l'étude des symétries en physique, ce qui consiste à développer des outils pour formaliser et comprendre ce que peut être une symétrie et ensuite essayer de les utiliser pour étudier des phénomènes physiques.

La contre-partie théorique des symétries est l'étude de certaines structures algébriques. Cela commence avec les groupes finis, ou discrets, lorsque l'on veut comprendre les propriétés des cristaux et de la matière, puis cela continue avec les groupes continus dits groupes de Lie et leurs algèbres associées, les algèbres de Lie. Ceux-là interviennent dans la physique (quantique) des atomes, dans la classification des particules (la "voie octuple" de Gell-Mann), dans les interactions fondamentales, dans l'étude de notre univers et bien d'autres choses encore. Enfin, lorsque l'on continue le voyage, on arrive aux groupes quantiques.

Une première amorce d'étude des groupes quantiques est de remarquer que les symétries décrites précédemment peuvent se placer dans un cadre conceptuel commun, celui des algèbres de Hopf. Ce cadre conceptuel semble être très bien adapté pour représenter les symétries qui apparaissent en physique. Il est donc intéressant de chercher des algèbres de Hopf qui sont différentes de celles provenant des groupes et algèbres de Lie (c'est-à-dire qui ne sont ni commutatives, ni cocommutatives). Une grande classe intéressante regroupe les déformations des algèbres universelles enveloppantes des (super-)algèbres de Lie, et elles sont maintenant utilisées par exemple comme principe de symétrie pour faire de la physique atomique ([1]), de la gravité quantique ([2]) mais interviennent également en théorie conforme des champs ([10],[9]). Puis comme tout groupe quantique, elles sont intimement reliées à une équation fameuse, l'équation dite de Yang-Baxter.

Historiquement, c'est cette approche qui a été suivie pour aboutir aux groupes quantiques, et elle provient directement de la physique. Le point de départ était la recherche de solutions d'une équation, aujourd'hui célèbre, l'équation de Yang-Baxter, qui apparaît dans trop de domaines différents pour ne pas avoir un sens profond. Elle est reliée aux modèles statistiques, et plus généralement à la physique

en 2 dimensions ([10]), au groupe des tresses, aux noeuds et leurs invariants ([19],[17]), aux systèmes intégrables ([17]), et elle apparaît même dans les groupes finis tels que les groupes de Coxeter, les groupes alternés et leurs extensions ([25]). Il s'avère que elle exprime une forme de symétrie de certains systèmes, et cette symétrie se trouve formalisée au moyen des groupes quantiques. Cette équation a été formulée indépendamment par Yang et par Baxter. Dans les deux cas, elle est une condition que doivent vérifier les quantités basiques du système de telle sorte que le modèle soit résoluble. Dans le cas de Yang, cette équation apparaît comme condition de factorisabilité de la matrice  $S$  (la matrice de diffusion) dans un modèle de particules relativistes à 1 + 1 dimensions (voir pour un résumé [10]). La factorisabilité signifie que tout évènement peut se décomposer en séquence d'évènements n'impliquant que deux particules. L'équation de Yang-Baxter peut être représentée graphiquement :

$$\sum_{p_i} \text{Diagram 1} = \sum_{p_i} \text{Diagram 2}$$

où il faut voir l'axe vertical comme l'axe temporel, et l'axe horizontal comme l'axe spatial. Chaque ligne représente une particule, et chaque intersection un évènement. En terme de la matrice  $S$ , qui est défini par :  $S(|A_i(\theta_1), A_j(\theta_2)\rangle_{in}) = \sum_{k,l} S_{ij}^{kl}(\theta_{12})|A_k(\theta_2), A_l(\theta_1)\rangle_{out}$ , avec  $(\theta_{12} = \theta_2 - \theta_1)$ , l'équation de Yang-Baxter, qui est la condition de factorisabilité de la matrice  $S$ , est :

$$\sum_{p_1, p_2, p_3} S_{i_1 i_2}^{p_1 p_2}(\theta_{12}) S_{p_2 i_3}^{p_3 j_3}(\theta_{13}) S_{p_1 p_3}^{j_1 j_2}(\theta_{23}) = \sum_{p_1, p_2, p_3} S_{i_2 i_3}^{p_2 p_3}(\theta_{23}) S_{i_1 p_1}^{j_1 p_1}(\theta_{13}) S_{p_1 p_3}^{j_2 j_3}(\theta_{12}),$$

ce qui peut aussi s'écrire comme une équation ayant lieu dans le produit tensoriel de 3 espaces, chacun pour une particule,  $S$  est une matrice qui agit sur 2 espaces et l'équation devient alors :

$$S_{12}(\theta_{12}) S_{13}(\theta_{13}) S_{23}(\theta_{23}) = S_{23}(\theta_{23}) S_{13}(\theta_{13}) S_{12}(\theta_{12}),$$

où la notation  $S_{12}$  signifie que  $S$  agit sur les espaces 1 et 2 et ne touche pas l'espace 3, et ainsi de suite pour  $S_{13}$  et  $S_{23}$ . Notons que l'équation de Yang-Baxter est une équation matricielle.

Pour Baxter, l'équation apparut dans les systèmes statistiques à 2 dimensions (spatiales), dits *vertex models*. Dans ces modèles, il y a un réseau (par exemple rectangulaire), et en chaque sommet, l'énergie dépend de l'état des 4 arêtes qui s'y joignent, les états étant labellés par un indice discret (par exemple deux états : spin up ou spin down). La matrice  $\hat{R}$  aura comme entrées les différents poids de Boltzmann associés à chaque possibilité pour un sommet, et ce de la manière décrite dans la figure ci-dessous. On voit que naturellement,  $\hat{R}$  agit sur le produit tensoriel de 2 espaces. Ici, l'équation de Yang-Baxter pour la matrice  $\hat{R}$  est une condition qui permettra de diagonaliser la matrice de transfert

, et ainsi de calculer la fonction de partition du système (voir [17] pour plus de détails).

$$\hat{R}_{ij}^{kl} = \begin{array}{ccc} & & k \\ & & | \\ i & \text{---} & l \\ & & | \\ & & j \end{array}$$

Nous avons dit que la symétrie cachée derrière l'équation de Yang-Baxter était encapsulée dans les groupes quantiques, qui sont en fait des "machines" à produire des solutions de l'équation de Yang-Baxter. Cette équation relie donc la théorie des groupes quantiques à la physique statistique, aux systèmes intégrables, mais également à la théorie des noeuds et leurs invariants.

Dès lors, il est intéressant de connaître la structure de l'espace des solutions de cette équation. En dimension 2, les matrices  $R$  satisfaisant l'équation de Yang-Baxter sont classifiées ([6], [28], [24], [12]). Elles sont dites de type  $GL(2)$  lorsque leur spectre est  $\{q, q, q, -q^{-1}\}$ , et de type  $GL(1|1)$  lorsque leur spectre est  $\{q, q, -q^{-1}, -q^{-1}\}$  où  $q$  est un nombre complexe tel que  $q^2 \neq -1$ . On demande de plus que elles soient semi-simples, inversibles et possédant un inverse gaucher (pour la définition de l'inverse gaucher voir [23]).

Les matrices de type  $GL(2)$  sont la matrice standard de type  $GL(2)$  qui contient 2 paramètres et la matrice appelée Jordanienne qui contient 1 paramètre. Or, il existe une transformation qui permet d'obtenir une matrice  $R$  à partir d'une autre, cette transformation s'appelle un twist, et c'est une relation d'équivalence dans l'espace des matrices  $R$ . Il est connu que à un twist près toutes les matrices de type  $GL(2)$  sont équivalentes à la matrice standard avec un seul paramètre qui est le paramètre essentiel  $q$  intervenant dans le spectre ([22]) (un twist ne change pas le spectre). En ce qui concerne les matrices de type  $GL(1|1)$ , il y a aussi la matrice standard de type  $GL(1|1)$  qui a 2 paramètres et 2 matrices non-standards à 1 seul paramètre. La question naturelle est donc de savoir si la classification à un twist près simplifie la liste de la même manière que dans le cas de  $GL(2)$ . C'est l'objet de ce travail de déterminer si à un twist près, les matrices  $R$  de type  $GL(1|1)$  sont équivalentes à la matrice standard (de type  $GL(1|1)$ ) à un paramètre, et ainsi de terminer la classification des matrices  $R$  en dimension 2, en tenant compte des twists.

Dans les 2 premières sections, nous présentons les deux outils qui nous seront utiles, qui sont les groupes quantiques et les superalgèbres de Lie (lorsque on les mélange, cela donne des supergroupes quantiques). Nous nous attarderons un peu plus sur les groupes quantiques, pour présenter les motivations qui mènent aux définitions. En fait les groupes quantiques sont des objets mathématiques construits dans le but d'étudier les symétries physiques.

Ensuite, nous expliquerons précisément ce que sont les twists, et ce au niveau numérique des matrices  $R$ , et au niveau universel des algèbres de Hopf. Cette section sert de base à notre travail car elle contient les résultats généraux que nous utilisons par la suite. Ce sont des résultats connus, admis dans la plupart des papiers concernant les twists, mais au vu du rôle fondamental que ils jouent dans ce

travail, nous traiterons leurs preuves en détail. Nous donnons la preuve du théorème fondamental des twists au niveau universel, et présenterons les équations que l'on devra résoudre aux niveaux numérique et universel. Dans les deux cas (numérique et universel), nous vérifierons que les twists induisent bien une relation d'équivalence dans l'espace des matrices  $R$ , et dans celui des algèbres de Hopf.

Enfin, la dernière section regroupe le coeur de ce travail, ainsi que les résultats nouveaux obtenus. Nous y présentons en détail la déformation standard de  $U(\mathfrak{gl}(1|1))$  qui sera le point de départ des twists. Nous calculons son centre, et montrons que elle est finie sur son centre. Puis, nous étudions sa théorie des représentations dans deux cas légèrement différents, et comparons avec les résultats bien connus de  $U_q(\mathfrak{gl}(2))$ . Ensuite nous rappelons les 2 matrices  $R$  non-standards de type  $GL(1|1)$  (on se base sur [24]) que nous voulons obtenir par des twists. Les algèbres de Hopf correspondant à ces matrices par la construction FRT ont été construites dans [8].

Pour la première matrice  $\hat{R}^I$ , nous proposons un twist universel, ce qui nous donne en particulier immédiatement un twist numérique, et construisons ainsi explicitement une déformation non-standard  $U_{q,r}^I(\mathfrak{gl}(1|1))$ . Nous vérifions que nous retrouvons bien la superalgèbre de Hopf obtenue par la méthode FRT, et en particulier que la structure d'algèbre obtenue par la méthode FRT est isomorphe à la structure d'algèbre standard.

Pour la deuxième matrice  $\hat{R}^{II}$ , la situation est plus compliquée, alors nous présentons tout d'abord l'étude numérique, avec deux approches différentes. Nous donnons pour chacune un twist numérique, ce qui finit de répondre à la question initiale sur l'existence des twists, le résultat final étant le théorème (5.6). Puis, nous faisons l'étude universelle dans laquelle nous étudions en détail l'algèbre obtenue par la méthode FRT. Nous montrons que elle aussi est finie sur son centre, nous étudions sa théorie des représentations, et montrons que elle n'est pas rigoureusement isomorphe à l'algèbre standard. Néanmoins, nous exhibons un changement de base, défini seulement lorsque un certain élément de l'algèbre est inversible, qui permet d'obtenir la structure standard. Nous pouvons ainsi calculer le coproduit dans cette nouvelle base, et en déduire des informations sur le twist universel, qui reste à découvrir.

## 2 Groupes quantiques : Motivation, définitions et exemples

L'objet ici n'est bien entendu pas de donner une présentation détaillée du vaste sujet que sont les groupes quantiques (des expositions très complètes sont dans [3], [20], [19], voir aussi [23] et [7] et pour les liens avec la physique [10]). Nous souhaitons seulement donner la définition d'une algèbre de Hopf. C'est la structure de ce que nous avons coutume d'appeler un groupe quantique, et que nous utiliserons par la suite. Par contre, nous allons nous attarder quelque peu sur les motivations que l'on trouve en physique théorique pour définir et ensuite étudier de tels objets, ce que l'on ne trouve pas vraiment dans les ouvrages consacrés aux groupes quantiques.

Notre approche sera la suivante : nous savons bien maintenant que l'étude des symétries en physique a mené aux notions algébriques de groupes finis ou discrets (pour les symétries discrètes), puis aux groupes continus, dits groupes de Lie, ainsi que aux algèbres de Lie (symétries continues, symétrie de jauge), et à l'étude de leurs représentations. Une question naturelle est alors de se demander quelle est la structure algébrique générale pouvant implémenter la notion de symétrie en physique, question qui va nous mener tout naturellement dans l'univers des groupes quantiques.



## 2.1 Motivation et définitions

Prenons comme objet de base une algèbre associative  $A$  (par exemple : algèbre de groupe fini ou discret, algèbre universelle enveloppante d'une algèbre de Lie etc...). La question est alors de savoir quelles sont les propriétés que l'on va demander pour que cette algèbre puisse servir de symétrie dans des théories physiques. Lorsque l'on regarde les propriétés que l'on utilise (plus ou moins implicitement) dans les théories physiques modernes, on aboutit aux trois notions suivantes qui sont ensuite axiomatisées dans les algèbres de Hopf :

- la possibilité de prendre les produits tensoriels de représentations.
- l'existence d'une représentation triviale.
- pour chaque représentation, l'existence d'une représentation duale (ou contragrédiente).

Les exemples "classiques" d'algèbres où l'on peut faire tout cela sont les suivants. Premièrement, soit  $G$  un groupe fini. L'algèbre de groupe  $\mathbb{C}[G]$  est l'ensemble des combinaisons linéaires formelles d'éléments de  $G$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . Ensuite, soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. L'algèbre universelle enveloppante de  $\mathfrak{g}$ , notée  $U(\mathfrak{g})$ , est l'ensemble des polynômes en les générateurs de  $\mathfrak{g}$ . Ce sont les deux exemples "classiques" d'algèbres de Hopf.

Avant toute chose, rappelons que une algèbre associative unitale  $A$  sur  $\mathbb{C}$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, muni en plus d'une loi de composition interne, la multiplication, tel que cette loi soit associative, distributive sur l'addition, et admette un élément neutre. Pour mieux visualiser, et aussi pour mieux retenir, les définitions inhérentes aux axiomes des algèbres de Hopf, il est d'usage de les représenter par des diagrammes. Ces diagrammes représenteront par des flèches les applications, et la définition sera vérifiée si ces diagrammes commutent, c'est-à-dire que l'existence de deux trajets dans le diagramme ayant le même point de départ, et le même point d'arrivée, donnera une égalité entre les applications correspondant à ces trajets. Comme illustration, la définition d'algèbre se reformule ainsi en terme de diagrammes :

**Définition 2.1.** Une algèbre  $A$  sur  $\mathbb{C}$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, avec deux applications linéaires : la multiplication  $m : A \otimes A \rightarrow A$ , et l'unité  $\iota : \mathbb{C} \rightarrow A$  telles que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C} \otimes A & \xrightarrow{\iota \otimes id} & A \otimes A \\
 \searrow \cong & & \downarrow m \\
 & & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{id \otimes \iota} & A \otimes A \\
 \searrow \cong & & \downarrow m \\
 & & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes id} & A \otimes A \\
 \downarrow id \otimes m & & \downarrow m \\
 A \otimes A & \xrightarrow{m} & A
 \end{array}$$

L'unité signifie que il y a un élément neutre pour la multiplication, noté 1, et elle est donnée explicitement par :  $\iota(1) = 1$  (on a donc  $\iota(\lambda) = \lambda \cdot 1 \in A$ , pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ ). Le diagramme de droite représente l'associativité de  $m$ , et en termes d'applications s'écrit :  $m(m \otimes id) = m(id \otimes m)$ . Usuellement, on noterait plutôt  $m(a_1 \otimes a_2) = a_1 \cdot a_2$ , et donc  $a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3) = (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3$ .

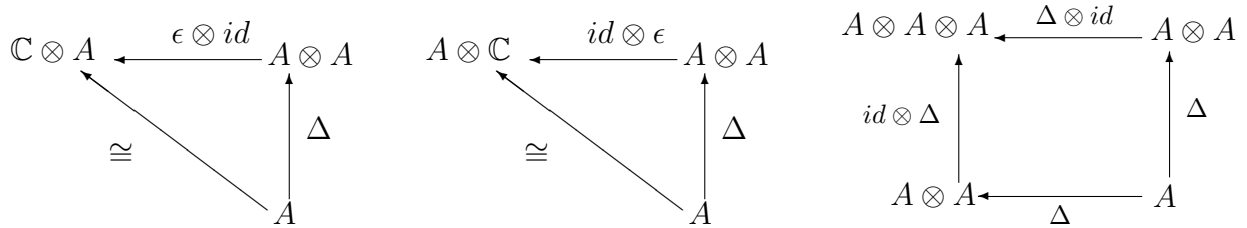
Un morphisme d'algèbres de  $A$  vers  $B$  est une application linéaire  $f$  de  $A$  vers  $B$  qui respecte la multiplication et l'unité dans le sens où :

- $f(a_1 \cdot a_2) = f(a_1) \cdot f(a_2)$  où la multiplication à gauche est celle de  $A$  et la multiplication à droite est celle de  $B$ .

- $f(1_A) = 1_B$ .

Maintenant en formalisant la possibilité de prendre le produit tensoriel de 2 représentations, et l'existence d'une représentation triviale, on aboutit à la notion de bigèbre. Soient  $V_1$  et  $V_2$ , 2 représentations de  $A$ , il est clair que  $V_1 \otimes V_2$  est une représentation de  $A \otimes A$ , mais pour que elle devienne une représentation de  $A$ , il faut une application de  $A$  dans  $A \otimes A$ , qui soit un morphisme d'algèbres. Elle est appelée la comultiplication et est notée  $\Delta$ . L'existence d'une représentation triviale demande l'existence d'un morphisme de  $A$  vers  $\mathbb{C}$ , appelé la coïunité et noté  $\epsilon$ . On peut vérifier que imposer que  $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$  soit isomorphe en tant que espace de représentation de  $A$  à  $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ , et que pour toute représentation  $\rho$ , on ait  $\rho \otimes \epsilon = \epsilon \otimes \rho = \rho$ , amène à la définition suivante :

**Définition 2.2.** Une bigèbre (associative, unitale, coassociative et coïunitale)  $A$  est une algèbre (associative et unitale) munie de 2 morphismes d'algèbres : la comultiplication  $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$  et la coïunité  $\epsilon : A \rightarrow \mathbb{C}$ , telles que les diagrammes suivants commutent :



On voit ici l'intérêt des diagrammes, car ce sont exactement les trois diagrammes représentant les axiomes d'une algèbre, mais avec les flèches inversées et la comultiplication (resp. la coïunité) remplaçant la multiplication (resp. l'unité). Si on veut écrire ces axiomes en termes d'égalités d'applications, on a alors  $\forall x \in A : (\epsilon \otimes id)(\Delta x) = (id \otimes \epsilon)(\Delta x) = x$ , et  $(\Delta \otimes id)(\Delta x) = (id \otimes \Delta)(\Delta x)$ , cette dernière étant appelée la condition de coassociativité.

**Remarque :** Un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel muni d'une application  $\Delta$  et d'une application  $\epsilon$  vérifiant les conditions décrites par les 3 diagrammes ci-dessus est appelé une cogèbre. Un morphisme de cogèbre est naturellement défini comme une application linéaire  $f$  telle que  $\Delta(f(x)) = (f \otimes f)\Delta(x)$ . Ainsi, une bigèbre est à la fois une algèbre et une cogèbre de telle sorte que les 2 notions soient compatibles, ce qui est défini par le fait que la comultiplication et la coïunité soient des morphismes d'algèbre. Ceci est équivalent à dire que la multiplication  $m$  et l'unité  $\iota$  sont des morphismes de cogèbre. On peut exprimer le fait que  $\Delta$  et  $\epsilon$  soient des morphismes d'algèbre par la commutativité des diagrammes ci-dessus, et en renversant les flèches, en remplaçant la comultiplication (resp. la coïunité) par la multiplication (resp. l'unité) et inversement on obtient les diagrammes signifiant que  $m$  et  $\iota$  sont des morphismes de cogèbre. On note  $\sigma_{23}$  le "flip" qui échange les copies 2 et 3 de  $A$ .

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes A & \xleftarrow{\Delta} & A \\
\uparrow (m \otimes m)\sigma_{23} & & \uparrow m \\
A \otimes A \otimes A \otimes A & \xleftarrow{\Delta \otimes \Delta} & A \otimes A
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathbb{C} & \xleftarrow{\epsilon} & A \\
\uparrow m_{\mathbb{C}} & & \uparrow m \\
\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} & \xleftarrow{\epsilon \otimes \epsilon} & A \otimes A
\end{array}$$

Une bigèbre est une notion auto-duale, dans le sens où chaque fois que l'on peut définir un dual (c'est le cas en dimension finie par exemple), il possède une structure de bigèbre.

En ce qui concerne l'existence d'une représentation duale, soit  $V$  une représentation, et soit  $V^*$  l'espace dual, on cherche à définir la représentation "duale" sur  $V^*$  telle que les propriétés naturelles suivantes soient vérifiées :

- que l'application naturelle :  $V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{C}$  soit un morphisme de représentation de  $A$ .
- que  $(V \otimes W)^* = W^* \otimes V^*$  en tant que représentation de  $A$ .

Si on note  $S : A \rightarrow A$  l'application définie par  $\langle x.f, v \rangle := \langle f, S(x).v \rangle$  pour  $v \in V$  et  $f \in V^*$ , alors on peut vérifier que les conditions ci-dessus mènent à la définition suivante :

**Définition 2.3.** Une algèbre de Hopf est une bigèbre  $(A, m, \iota, \Delta, \epsilon)$ , munie d'une application linéaire inversible  $S : A \rightarrow A$  telle que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes A & \xrightarrow{S \otimes id} & A \otimes A \\
\Delta \nearrow & & \searrow m \\
A & \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C} \xrightarrow{\iota} & A
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
A \otimes A & \xrightarrow{id \otimes S} & A \otimes A \\
\Delta \nearrow & & \searrow m \\
A & \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C} \xrightarrow{\iota} & A
\end{array}$$

La définition implique que  $S$  est un anti-automorphisme d'algèbre et de cogèbre. En conclusion, axiomatiser la notion de symétrie physique revient à introduire la structure algébrique d'algèbre de Hopf qui est la donnée de  $(A, m, \iota, \Delta, \epsilon, S)$  vérifiant les propriétés des définitions ci-dessus. C'est une notion auto-duale.

**Notation :** Lorsque l'on travaille dans une algèbre de Hopf au niveau universel, il est commode d'utiliser la notation de Sweedler pour le coproduit de  $A$ . Pour  $x \in A$ , nous écrirons  $\Delta x = x_1 \otimes x_2$  où nous omettons la sommation. Par exemple, dans cette sommation, la condition de coassociativité du coproduit s'écrit donc  $x_{11} \otimes x_{12} \otimes x_2 = x_1 \otimes x_{21} \otimes x_{22}$  et on note  $(\Delta \otimes id)(\Delta(x)) = (id \otimes \Delta)(\Delta(x)) = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$ . De même, les conditions de coïunité s'écrivent  $\epsilon(x_1)x_2 = x = x_1\epsilon(x_2)$ , et enfin les conditions sur l'antipode s'écrivent  $S(x_1)x_2 = x_1S(x_2) = \epsilon(x)1$ .

**Remarque :** A partir d'une algèbre de Hopf  $A$ , on peut obtenir trois algèbres de Hopf reliées à  $A$  qui sont :

- $A_{op}$  où la multiplication  $m$  est changée en  $m_{op}$  avec  $m_{op}(x \otimes y) = m(y \otimes x)(= y.x)$ .
- $A^{op}$  où la comultiplication  $\Delta$  est changée en  $\Delta^{op}$  avec  $\Delta^{op}x = x_2 \otimes x_1$  si  $\Delta x = x_1 \otimes x_2$ .
- $A_{op}^{op}$  où  $m$  et  $\Delta$  sont changées respectivement en  $m_{op}$  et  $\Delta^{op}$ .

On peut vérifier que  $\epsilon_{op} = \epsilon^{op} = \epsilon$ ,  $S_{op} = S^{op} = S^{-1}$  et  $S_{op}^{op} = S$ . Une algèbre de Hopf est dite commutative si  $m_{op} = m$  et cocommutative si  $\Delta^{op} = \Delta$ .

### 2.1.1 Algèbres de Hopf quasi-triangulaires

Nous donnons la définition d'une classe d'algèbres de Hopf particulièrement intéressantes pour la physique, car elles génèrent des solutions de la fameuse équation de Yang-Baxter :

**Définition 2.4.** Une algèbre de Hopf  $(A, m, \iota, \Delta, \epsilon, S)$  est dite quasi-triangulaire lorsque il existe un élément  $R \in A \otimes A$  inversible tel que :

- $R\Delta(x) = \Delta^{op}(x)R$  pour tout  $x \in A$ ,
- $(\Delta \otimes id)(R) = R_{13}R_{23}$  et  $(id \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}$ ,

où l'on a noté  $R_{12} := a \otimes b \otimes 1$ ,  $R_{13} = a \otimes 1 \otimes b$  et  $R_{23} = 1 \otimes a \otimes b$  avec  $R = a \otimes b$  en notation de Sweedler (ici la notation de Sweedler signifie seulement que l'on omet la sommation).

L'élément  $R$  est appelé la matrice  $R$  universelle.

L'algèbre de Hopf est dite presque cocommutative si l'élément  $R$  ne vérifie que la première condition. En quelque sorte,  $R$  mesure la non-cocommutativité de  $A$ .

**Remarque :** Au niveau conceptuel, cette notion répond à la question suivante. Supposons que pour toute représentation  $V_1$  et  $V_2$  de  $A$ , on ait un isomorphisme  $\beta_{V_1, V_2}$  entre  $V_1 \otimes V_2$  et  $V_2 \otimes V_1$  (en tant que représentation de  $A$ ). Alors quelles sont les conditions sur  $A$  telles que les diagrammes suivants soient commutatifs, pour  $f_1 \in Hom_A(V_1, W_1)$  et  $f_2 \in Hom_A(V_2, W_2)$  ? :

$$\begin{array}{ccccc}
 V_1 \otimes V_2 & \xrightarrow{\beta_{V_1, V_2}} & V_2 \otimes V_1 & (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 & \xrightarrow{id \otimes \beta_{V_2, V_3}} & V_1 \otimes V_3 \otimes V_2 & V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) & \xrightarrow{\beta_{V_1, V_2} \otimes id} & V_2 \otimes V_1 \otimes V_3 \\
 f_1 \otimes f_2 \downarrow & & \downarrow f_2 \otimes f_1 & \searrow \beta_{V_1 \otimes V_2, V_3} & \downarrow \beta_{V_1, V_3} \otimes id & & \searrow \beta_{V_1, V_2 \otimes V_3} & & \downarrow id \otimes \beta_{V_1, V_3} \\
 W_1 \otimes W_2 & \xrightarrow{\beta_{W_1, W_2}} & W_2 \otimes W_1 & & V_3 \otimes (V_1 \otimes V_2) & & & & (V_2 \otimes V_3) \otimes V_1
 \end{array}$$

La presque-cocommutativité correspond au diagramme carré, et la quasi-triangularité répond aux trois diagrammes.

Un nombre important d'applications en physique (modèles statistiques, modèle à N corps à une dimension, diffusion quantique inverse, invariants de noeuds..) provient de la propriété suivante :

**Proposition 2.1.** Soit une algèbre de Hopf quasi-triangulaire. La matrice  $R$  universelle vérifie l'équation suivante, dite équation de Yang-Baxter :

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

**Preuve :** Soit  $\sigma_{12}$  le flip sur les espaces 1 et 2 :  $\sigma_{12}(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \dots) = x_2 \otimes x_1 \otimes x_3 \dots$ . D'après la propriété de quasi-triangularité, on a  $(\Delta \otimes id)(R) = R_{13}R_{23}$ , et en appliquant  $\sigma_{12}$  là-dessus, on a aussi  $(\Delta^{op} \otimes id)(R) = R_{23}R_{13}$ . En utilisant ces 2 égalités et la presque cocommutativité, il vient que :

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{12}(\Delta \otimes id)(R) = (\Delta^{op} \otimes id)(R)R_{12} = R_{23}R_{13}R_{12},$$

ce qui prouve la proposition.  $\square$

## 2.2 Exemples

Il est temps maintenant de considérer des exemples. Dans un premier temps, regardons comment le concept "classique" de symétrie de type groupe ou algèbre de Lie s'inscrit bien dans le cadre conceptuel que l'on vient de développer.

Soit donc  $\mathbb{C}[G]$  l'algèbre d'un groupe fini, qui est associative et unitale (l'élément unité de l'algèbre étant celui du groupe). L'action usuelle d'un groupe sur le produit tensoriel de deux représentations  $(V_1, \rho_1)$  et  $(V_2, \rho_2)$  est :

$$\rho(g)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(g)v_1 \otimes \rho_2(g)v_2.$$

Cette action correspond en fait au coproduit :  $\Delta_0 g = g \otimes g$ , on peut facilement vérifier que il vérifie les axiomes d'un coproduit. Or, une fois que l'on connaît le coproduit sur les générateurs, on peut calculer la co-unité et ensuite l'antipode sur les générateurs, d'après les axiomes des algèbres de Hopf. Par linéarité, on étend ensuite tout cela à l'algèbre toute entière. Ainsi, en utilisant la notation de Sweedler, on doit avoir  $g = \epsilon(g_1)g_2 = \epsilon(g)g$  ce qui donne  $\epsilon(g) = 1$ . Puis on doit avoir  $\epsilon(g).1 = 1 = S(g_1)g_2 = S(g)g$  donc  $S(g) = g^{-1}$ . En conclusion, la structure "classique" d'algèbre de Hopf sur  $\mathbb{C}[G]$  est donnée par :

$$\forall g \in G : \quad \Delta_0(g) = g \otimes g, \quad \epsilon(g) = 1, \quad S(g) = g^{-1}.$$

Ensuite, soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. L'action usuelle sur le produit tensoriel de représentations est :  $\rho(T)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(T)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \rho_2(T)v_2$ . Ceci correspond à une structure d'algèbre de Hopf "classique" sur l'algèbre universelle enveloppante  $U(\mathfrak{g})$ , qui est associative et unitale, donnée par le coproduit  $\Delta_0(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T$ . De la même manière que dans l'exemple précédent, on doit avoir  $T = \epsilon(T_1)T_2 = \epsilon(1)T + \epsilon(T)$ . Comme  $\epsilon(1) = 1$ , on doit avoir  $\epsilon(T) = 0$ . Ensuite,  $\epsilon(T).1 = 0 = S(T_1)T_2 = S(1)T + S(T)$ , et comme  $S(1) = 1$ , alors  $S(T) = -T$ . Ainsi, la structure d'algèbre de Hopf "classique" sur  $U(\mathfrak{g})$  est :

$$\forall T \in \mathfrak{g} : \quad \Delta_0(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T, \quad \epsilon(T) = 0, \quad S(T) = -T.$$

Par exemple, c'est la structure que l'on utilise en théorie des champs lorsque l'on calcule la variation d'un champs comme :

$$\delta F(x) = \delta_{indices} F(x) + \delta_{espace-temps} F(x).$$

On peut raisonnablement se demander pourquoi on utilise ceci, et s'il n'y a pas d'autres possibilités : c'est un point d'entrée des groupes quantiques en théorie des champs (voir [26], et [27]).

Lorsque l'on cherche des structures d'algèbres de Hopf sur  $\mathbb{C}[G]$  et sur  $U(\mathfrak{g})$ , on peut chercher à déformer la structure classique. Cela mène à la théorie des déformations (voir [23]). On peut montrer que il n'y a pas de déformation non-triviale pour  $\mathbb{C}[G]$ , mais également que il n'y pas de déformation non-triviale de la structure d'algèbre de  $U(\mathfrak{g})$  pour  $\mathfrak{g}$  semi-simple. On cherche alors à déformer la structure de bigèbre, c'est-à-dire le coproduit. En particulier, cela correspond à chercher d'autres façons de calculer la variation de champs que celle ci-dessus. Cette approche mène à une classe d'exemples de structures d'algèbres de Hopf, que l'on appelle groupes quantiques, mais qui sont aussi souvent nommées dans la littérature par "algèbre universelle enveloppante quantique" (QUEA). Elles sont aussi obtenues par les twists associés aux triplets de Belavin-Drinfeld ([13]), mais il existe des groupes quantiques associés à des matrices  $R$  qui n'appartiennent pas à cette classe (voir par exemple dans [5]).

Ainsi, pour tout  $\mathfrak{g}$  algèbre de Lie complexe semi-simple de dimension finie, il existe une structure standard d'algèbre de Hopf, appelée l'algèbre de Drinfeld-Jimbo notée  $U_q(\mathfrak{g})$  ([4], [16]). Soit  $(a_{ij})$  la

matrice de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , soit  $d_i = \frac{(\gamma_i, \gamma_i)}{2}$ , où les  $\gamma_i$  forment le système de racines simples associé à  $(a_{ij})$ . Soit  $\alpha$  le paramètre de déformation infinitésimale, et posons  $q = e^\alpha$ . Alors  $U_q(\mathfrak{g})$  est engendrée par  $E_i, F_i, H_i$   $i = 1 \dots l$ , où  $l = \text{rang}(\mathfrak{g})$  est la dimension d'une algèbre de Cartan, et la structure d'algèbre est donnée par :

$$[H_i, H_j] = 0, \quad [H_i, E_j] = a_{ij}E_j, \quad [H_i, F_j] = -a_{ij}F_j, \quad [E_i, F_j] = \delta_{ij} \frac{e^{\alpha d_i H_i} - e^{-\alpha d_i H_i}}{q^{d_i} - q^{-d_i}},$$

ainsi que par les relations de Serre quantiques :

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q^{d_i}} (E_i)^k E_j (E_i)^{1-a_{ij}-k} = 0, \quad (i \neq j),$$

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q^{d_i}} (F_i)^k F_j (F_i)^{1-a_{ij}-k} = 0, \quad (i \neq j),$$

où  $\begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_q$  est le  $q$ -coefficient binomial défini à l'aide de la  $q$ -factorielle  $[n]_q$  par :

$$\begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[1-a_{ij}]_q}{[k]_q [1-a_{ij}-k]_q}, \quad \text{où } [n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}.$$

La structure d'algèbre de Hopf est ensuite donnée par (notons que, de même que dans les exemples simples précédents, la coïunité et l'antipode se retrouvent aisément à partir du coproduit et des axiomes d'une algèbre de Hopf) :

$$\Delta(H_i) = \Delta_0(H_i) = H_i \otimes 1 + 1 \otimes H_i, \quad \Delta(E_i) = E_i \otimes e^{\alpha d_i H_i} + 1 \otimes E_i, \quad \Delta(F_i) = F_i \otimes 1 + e^{-\alpha d_i H_i} \otimes F_i,$$

$$\epsilon(H_i) = \epsilon(E_i) = \epsilon(F_i) = 0, \quad S(H_i) = -H_i, \quad S(E_i) = -E_i e^{-\alpha d_i H_i}, \quad s(F_i) = -e^{\alpha d_i H_i} F_i.$$

Souvent, on pose  $K_i = e^{\alpha d_i H_i}$  et on réexprime tout en fonction de  $K_i$  et  $K_i^{-1} = e^{-\alpha d_i H_i}$ . Ainsi, on peut vérifier que le coproduit, la coïunité et l'antipode des  $H_i$  et les relations de commutation  $[H_i, E_i]$  et  $[H_i, F_i]$  deviennent en terme des  $K_i, K_i^{-1}$  :

$$K_j^{\pm 1} E_i = q^{\pm a_{ij} d_j} E_i K_j^{\pm 1}, \quad K_j^{\pm 1} F_i = q^{\mp a_{ij} d_j} F_i K_j^{\pm 1}, \quad \Delta(K_i^{\pm 1}) = K_i^{\pm 1} \otimes K_i^{\pm 1}, \quad \epsilon(K_i^{\pm 1}) = 1, \quad S(K_i^{\pm 1}) = K_i^{\mp 1}.$$

Cette algèbre de Hopf est "quasi-triangulaire" (on met des guillemets car la matrice  $R$  appartient en fait à une certaine complétion de l'algèbre de Hopf), et on connaît explicitement l'expression de la matrice  $R$  universelle.

Dans le cas qui nous tient à coeur ici,  $\mathfrak{gl}(1|1)$ , nous utiliserons une déformation standard proche de celle de Drinfeld-Jimbo. Tout comme la déformation de Drinfeld-Jimbo, elle respecte la  $\mathbb{Z}$ -graduation. Ici, la  $\mathbb{Z}$ -graduation naturelle est donnée par  $gr(H_i) = 0$ ,  $gr(E_i) = +1$ ,  $gr(F_i) = -1$  et  $gr(X \otimes Y) = gr(X) + gr(Y)$ .

Dans le cas le plus simple pour les algèbres de Lie simples qui est  $\mathfrak{sl}(2)$ ,  $U_q(\mathfrak{sl}(2))$  est engendrée par  $H, E, F$  avec :

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = \frac{e^{\alpha H} - e^{-\alpha H}}{e^\alpha - e^{-\alpha}},$$

$$\begin{aligned}\Delta(H) &= H \otimes 1 + 1 \otimes H, & \Delta(E) &= E \otimes e^{\alpha H} + 1 \otimes E, & \Delta(F) &= F \otimes 1 + e^{-\alpha H} \otimes F, \\ \epsilon(E) &= \epsilon(F) = \epsilon(H) = 0, & S(H) &= -H, & S(E) &= -e^{-\alpha H} E, & S(F) &= -F e^{\alpha H}.\end{aligned}$$

La matrice  $R$  dans la représentation fondamentale où  $E \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $F \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $H \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  est la célèbre matrice suivante (où  $q = e^\alpha$ ) :

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}.$$

Les algèbres universelles enveloppantes quantiques sont une grande classe d'algèbres de Hopf intéressantes. Elles font partie de ce que l'on appelle groupes quantiques, avec une autre grande classe d'algèbres de Hopf, qui proviennent du point de vue dual à celui-ci. Ce sont les déformations des groupes matriciels classiques. Plus exactement, ce sont les déformations des algèbres de fonctions polynômiales sur les groupes classiques. Prenons comme exemple l'algèbre des fonctions polynômiales sur  $SL_2(\mathbb{C})$ , notée  $F(SL_2(\mathbb{C}))$ . Si on écrit  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  avec  $ad - bc = 1$ , alors  $a, b, c, d$  peuvent être vues comme des fonctions sur  $SL_2(\mathbb{C})$ , et elles génèrent l'algèbre des fonctions polynômiales sur  $SL_2(\mathbb{C})$ . Dans le cas classique usuel, elles commutent entre elles et on a ainsi :

$$F(SL_2(\mathbb{C})) = \mathbb{C}[a, b, c, d] / \{ad - bc = 1\}.$$

La structure d'algèbre de Hopf "classique" est donnée par :

$$\Delta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \otimes a + b \otimes c & a \otimes b + b \otimes d \\ c \otimes a + d \otimes c & c \otimes b + d \otimes d \end{pmatrix}, \quad \epsilon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

où la notation compacte utilisée signifie  $\Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c$ ,  $\Delta(b) = a \otimes b + b \otimes d$  etc...

Pour déformer l'algèbre des fonctions polynômiales sur un groupe de Lie, la stratégie est de permettre aux entrées matricielles (ici  $a, b, c, d$ ) de ne plus commuter entre elles. On déforme ainsi la structure d'algèbre. Par exemple, la déformation standard de  $F(SL_2(\mathbb{C}))$  est engendrée par  $a, b, c, d$  vérifiant :

$$ac = q^{-1}ca, \quad bd = q^{-1}db, \quad ab = q^{-1}ba, \quad cd = q^{-1}dc, \quad bc = cb, \quad ad = da - (q - q^{-1})bc, \quad (1)$$

ainsi que :

$$ad - q^{-1}bc = 1.$$

Le coproduit et la coïunité des générateurs sont inchangés et l'antipode devient :

$$S \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -q^{-1}b \\ -q^{-1}c & a \end{pmatrix}.$$

Elle est notée  $F_q(SL_2(\mathbb{C}))$  et il s'avère que pour  $q$  générique, c'est l'algèbre de Hopf duale à  $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ . Ainsi, pour tout groupe de Lie complexe simple  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , on peut définir  $F_q(G)$  comme

l'algèbre de Hopf duale à  $U_q(\mathfrak{g})$ . Notons également que lorsque l'on connaît une déformation  $\tilde{F}_q(G)$ , alors par un calcul direct (mais qui est en général très laborieux), on peut obtenir l'algèbre duale qui est une déformation  $\tilde{U}_q(\mathfrak{g})$ .

**Remarque :** On peut obtenir et donner une interprétation des déformations  $F_q(G)$  de la manière suivante, qui fait appel aux espaces quantiques : dans le cas classique, un groupe matriciel agit sur

l'espace des vecteurs  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  où les  $x_i$  commutent entre eux. On peut alors généraliser ceci en posant

des relations de commutation non-triviales entre les  $x_i$ , et en cherchant quelles relations de commutation doivent vérifier les entrées d'une matrice  $n \times n$  pour conserver ces relations entre les  $x_i$ . Par exemple, les relations (1) sont obtenues lorsque l'on considère le "plan quantique" engendré par deux coordonnées  $x, y$  vérifiant  $xy = q^{-1}yx$ . Concrètement, on cherche les conditions sur  $a, b, c, d$  pour que :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \otimes x + b \otimes y \\ c \otimes x + d \otimes y \end{pmatrix},$$

vérifient  $x'y' = q^{-1}y'x'$ , et de même pour l'action à gauche sur les covecteurs.

Pour finir, nous avons vu que les groupes quantiques sont en particulier des "machines" à fabriquer des solutions de l'équation de Yang-Baxter :  $R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$ . En effet, en tant que algèbres de Hopf quasi-triangulaires, ils possèdent un élément qui vérifient cette équation. On l'appelle la matrice  $R$  universelle. Donc, dans chacune de leurs représentations, cet élément est envoyé à une matrice numérique vérifiant l'équation de Yang-Baxter quantique. C'est un des rôles des groupes quantiques et de leurs représentations.

Il s'avère qu'il est possible de renverser l'ordre des choses, c'est-à-dire que l'on peut construire une algèbre de Hopf à partir d'une matrice numérique vérifiant l'équation de Yang-Baxter. Et ce par un procédé dû à Faddeev, Reshetikhin et Takhtajan, appelé ainsi construction FRT ([7]). En fait, pour  $R$  une matrice  $n^2 \times n^2$  solution de l'équation de Yang-Baxter quantique, l'algèbre de Hopf associée à  $R$  (la  $R$ -version de  $GL(n)$ ) est engendrée par les  $t_{ij}$  vérifiant les relations :

$$RT_1T_2 = T_2T_1R, \quad \text{où } T_1 = T \otimes 1, \quad T_2 = 1 \otimes T, \quad \text{avec } T = (t_{ij})_{i,j=1,\dots,n}.$$

La structure de bigèbre est donnée par :

$$\Delta(t_{ij}) = \sum_{k=1}^n t_{ik} \otimes t_{kj}, \quad \epsilon(t_{ij}) = \delta_{ij}.$$

Par exemple, la déformation  $F_q(SL_2(\mathbb{C}))$  décrite plus haut provient de la construction FRT à partir de la matrice (en redéfinissant le paramètre de déformation  $q$ ) :

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}.$$



Une généralisation de ce procédé à un couple de matrices  $(\hat{R}, \hat{F})$  compatibles dans un certain sens a été développé par Isaev, Ogievetsky et Pyatov ([14],[15]). Nous utiliserons dans le cas des supergroupes quantiques le terme méthode FRT, alors que en réalité, c'est un cas particulier de paires  $(\hat{R}, \hat{F})$  compatibles, où  $\hat{F}$  est la matrice de super-permutation :

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

### 3 Superalgèbres de Lie

Nous souhaitons ici présenter la notion de superalgèbre de Lie, qui généralise en fait la notion d'algèbre de Lie. Nous nous bornerons à donner les définitions, les propriétés basiques et quelques exemples (pour plus de détails voir [18]).

Soit  $V$  un espace vectoriel tel que  $V = V_0 \oplus V_1$ . Un élément homogène est un élément qui est dans  $V_0$  ou dans  $V_1$ , bien sûr tout élément de  $V$  se décompose en somme de deux éléments homogènes. Nous définissons la "parité" d'un élément  $x$  homogène comme :

$$|x| = i \quad \Leftrightarrow \quad x \in V_i.$$

**Définition 3.1.** Une superalgèbre de Lie sur un corps  $\mathbb{K}$  (prenons  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $V = V_0 \oplus V_1$  muni d'une opération, que nous appellerons crochet (ou supercrochet) de Lie, notée  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$  telle que :

- $[V_i, V_j] \subset V_{(i+j) \bmod 2} \quad \forall i, j \in \{0, 1\}$ .
- $[\cdot, \cdot]$  est bilinéaire.
- $[\cdot, \cdot]$  vérifie pour tout élément homogène  $a, b \in V$ , on a :  $[a, b] = -(-1)^{|a||b|}[b, a]$  ("super-antisymétrie").
- $[\cdot, \cdot]$  vérifie l'identité de superJacobi :

$$\forall a, b, c \in V \text{ homogènes} : \text{ on a } (-1)^{|a||c|}[a, [b, c]] + (-1)^{|b||a|}[b, [c, a]] + (-1)^{|c||b|}[c, [a, b]] = 0.$$

Il existe également la notion de superalgèbre :

**Définition 3.2.** Une superalgèbre sur un corps  $\mathbb{K}$  (prenons  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $V = V_0 \oplus V_1$  muni de plus d'une loi interne notée "." (la multiplication) bilinéaire, associative, ayant un élément neutre telle que :

$$V_i \cdot V_j \subset V_{(i+j) \bmod 2} \quad \forall i, j \in \{0, 1\}.$$

Une superalgèbre est en fait une algèbre  $\mathbb{Z}_2$ -graduée, ce qui signifie que en plus d'être une algèbre, il y a la décomposition en somme de deux sous-espaces  $V_0$  et  $V_1$ , et la multiplication respecte cette décomposition.

Un exemple de superalgèbre est l'algèbre des formes différentielles sur une variété :  $V_0$  est le sous-espace des formes de degré pair et  $V_1$  le sous-espace des formes de degré impair. C'est un exemple de

ce que l'on appelle une superalgèbre "supercommutative" dans le sens où :  $ab = (-1)^{|a||b|}ba$  pour  $a$  et  $b$  homogènes.

On peut en fait définir les algèbres  $\mathbb{Z}$ -graduées en prenant comme décomposition dans la définition ci-dessus  $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ . À partir d'une algèbre  $\mathbb{Z}$ -graduée, on peut facilement vérifier que la construction suivante donne une  $\mathbb{Z}_2$ -gradation :  $V_0 = \bigoplus_{n \text{ pair}} V_n$  et  $V_1 = \bigoplus_{n \text{ impair}} V_n$ . L'exemple ci-dessus provient d'une construction de la sorte.

En fait, des exemples de superalgèbres de Lie proviennent des superalgèbres associatives, de même que des algèbres de Lie proviennent d'algèbres associatives, par la propriété suivante :

**Propriété 3.3.** *Soit  $A = A_0 \oplus A_1$  une superalgèbre associative. Alors on peut munir  $A$  d'une structure de superalgèbre de Lie en définissant le supercrochet ou "supercommutateur" suivant : pour  $a$  et  $b$  homogènes (on l'étend ensuite par linéarité) :*

$$[a, b] = ab - (-1)^{|a||b|}ba.$$

**Preuve :** Les trois premières propriétés des superalgèbres de Lie sont immédiatement vérifiées, et un petit calcul suffit pour vérifier l'identité de superJacobi.  $\square$

**Remarques :**

- Nous appellerons  $A_0$  la partie paire, ou partie "bosonique", tandis que  $A_1$  sera la partie impaire, ou partie "fermionique". En effet, d'après la propriété ci-dessus, le supercrochet de deux bosons, et celui d'un boson avec un fermion est un commutateur :  $ab - ba$ , tandis que le supercrochet de deux fermions est un anticommutateur :  $ab + ba$  ; comme il faut.
- Pour une superalgèbre de Lie  $L = L_0 \oplus L_1$ ,  $L_0$  est une sous-algèbre de Lie, car le supercrochet restreint à  $L_0$  est en fait un crochet de Lie (car  $|a| = 0$  pour  $a \in L_0$ ).  $L_1$  est un espace vectoriel qui est un espace de représentation de  $L_0$ , par l'action  $a.x = [a, x] \in L_1$  pour  $a \in L_0$  et  $x \in L_1$ .

Soit  $L$  une superalgèbre de Lie. La superalgèbre universelle enveloppante est définie de façon analogue au cas des algèbres de Lie. On considère l'algèbre tensorielle  $T(L)$  de  $L$  dans laquelle on omettra le symbole  $\otimes$ . Elle est munie d'une  $\mathbb{Z}_2$ -gradation induite par celle de  $L$  : la parité d'un élément de  $T(L)$  est donnée par :

$$|X_1 X_2 \dots X_n| = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_n| \text{ mod}(2).$$

Cette  $\mathbb{Z}_2$ -gradation munit  $T(L)$  d'une structure de superalgèbre associative. Soit  $I$  l'idéal de  $T(L)$  engendré par les éléments de la forme  $[a, b] - ab + (-1)^{|a||b|}ba$ , où  $a$  et  $b$  sont homogènes. Alors, la superalgèbre universelle enveloppante  $U(L)$  est le quotient  $T(L)/I$ . D'un point de vue plus intuitif  $U(L)$  est une superalgèbre engendrée par les générateurs de  $L$ , avec la  $\mathbb{Z}_2$ -gradation induite et les relations définissantes entre les générateurs sont celles de  $L$  (les supercrochets) sauf que le supercrochet  $[a, b]$  est remplacé par  $ab - (-1)^{|a||b|}ba$ , où la multiplication est la multiplication (formelle) de  $T(L)$ .  $U(L)$  est donc définie par ses générateurs et des relations :  $ab = (-1)^{|a||b|}ba + [a, b]$ , où l'on connaît  $[a, b]$  d'après la structure de superalgèbre de Lie de  $L$ .

Elle vérifie de plus le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt :

**Théorème 3.4.** Soit  $L = L_0 \oplus L_1$  une superalgèbre de Lie. Soit  $X_1, \dots, X_n$  une base de  $L_0$  et  $\xi_1, \dots, \xi_m$  une base de  $L_1$ . Alors une base (de l'espace vectoriel)  $U(L)$  est formée par les éléments :

$$X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n} \xi_1^{\lambda_1} \dots \xi_m^{\lambda_m}, \quad \text{où } k_i \geq 0 \text{ et } \lambda_i \in \{0, 1\}.$$

De manière analogue au cas des algèbres de Lie, la propriété de Poincaré-Birkhoff-Witt dit que lorsque l'on choisit un ordre dans les générateurs de  $L_0$  et un ordre dans les générateurs de  $L_1$ , alors on peut réordonner dans  $U(L)$  tout monôme en combinaisons linéaires de monômes ordonnés. Ici, on intègre le fait que dans  $U(L)$ ,  $\xi^2 \in L_0$  pour  $\xi \in L_1$ . En effet, par définition, dans le quotient de  $T(L)$  par  $I$ , on a  $\xi^2 = \frac{1}{2}[\xi, \xi]$  et  $[\xi, \xi] \in L_0$  par définition d'une superalgèbre de Lie.

Enfin, listons les particularités qui interviennent lorsque l'on considère des produits tensoriels de superalgèbres. Pour simplifier, regardons  $A \otimes A$  où  $A$  est une superalgèbre. Alors la multiplication ici est définie par :

$$(X_1 \otimes X_2)(Y_1 \otimes Y_2) = (-1)^{|X_2||Y_1|} X_1 Y_1 \otimes X_2 Y_2.$$

Cela se généralise pour des produits tensoriels d'ordre supérieur, par exemple :

$$(X_1 \otimes X_2 \otimes X_3)(Y_1 \otimes Y_2 \otimes Y_3) = (-1)^{|X_3||Y_1|} (-1)^{|X_2||Y_1|} (-1)^{|X_3||Y_2|} X_1 Y_1 \otimes X_2 Y_2 \otimes X_3 Y_3.$$

De manière générale, la règle mnémotechnique est que un signe apparait chaque fois que un élément impair "traverse" un autre élément impair.

Dans une représentation  $V = V_0 \oplus V_1$  d'une superalgèbre, la permutation (ou le "flip") qui agit sur  $V \otimes V$  devient une "super-permutation" :

$$P(e_i \otimes e_j) = (-1)^{|e_i||e_j|} e_j \otimes e_i.$$

Il y a des signes aussi dans l'action d'un élément du produit tensoriel  $A \otimes A$  sur  $V \otimes V$  :

$$(X \otimes Y)(e_i \otimes e_j) = (-1)^{|Y||e_i|} X(e_i) \otimes Y(e_j).$$

**Un exemple :**  $\mathfrak{gl}(n|m)$ . Soit  $V$  un espace vectoriel  $\mathbb{Z}_2$ -gradué de dimension  $(n|m)$ , c'est-à-dire  $V = V_0 \oplus V_1$  avec  $\dim(V_0) = n$  et  $\dim(V_1) = m$ . Alors, on peut définir une structure de superalgèbre sur  $End(V)$  en prenant  $End(V) = End(V)_0 \oplus End(V)_1$  avec :

$$\begin{aligned} End(V)_0 &= \{f \in End(V) | f(V_0) \subset V_0 \text{ et } f(V_1) \subset V_1\}, \\ End(V)_1 &= \{f \in End(V) | f(V_0) \subset V_1 \text{ et } f(V_1) \subset V_0\}. \end{aligned}$$

Il est clair que la composition des endomorphismes respecte cette  $\mathbb{Z}_2$ -graduation.

Le supercrochet  $[f, g] = fg - (-1)^{|f||g|} gf$  munit  $End(V)$  d'une structure de superalgèbre de Lie, qui est notée  $\mathfrak{gl}(n|m)$ .

Dans une base qui respecte la décomposition de  $V$ , c'est-à-dire une base d'éléments homogènes (une base de  $V_0$  accolée à une base de  $V_1$ ), la forme d'un élément de  $End(V)$  est :

$$\begin{pmatrix} A & X \\ Y & B \end{pmatrix}, \quad \text{où } A, X, Y, B \text{ sont respectivement des blocs } n \times n, m \times n, n \times m \text{ et } m \times m.$$

Dans cette base, les parties paire et impaire de  $End(V)$  sont explicitement :

$$End(V)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right\},$$

$$End(V)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

L'exemple le plus simple est  $\mathfrak{gl}(1|1)$ , dont une base est :

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule facilement ici le supercrochet qui est donné par :

$$[h_1, h_2] = 0, \quad [h_1, X^+] = X^+, \quad [h_2, X^+] = -X^+, \quad [h_1, X^-] = -X^-, \quad [h_2, X^-] = X^-,$$

$$\{X^+, X^+\} = 0, \quad \{X^-, X^-\} = 0, \quad \{X^+, X^-\} = h_1 + h_2.$$

Une représentation d'une superalgèbre  $A = A_0 \oplus A_1$  sera un morphisme  $\rho$  d'algèbres de  $A$  vers  $End(V)$  où  $V = V_0 \oplus V_1$  tel que  $\rho(A_0) \subset End(V)_0$  et  $\rho(A_1) \subset End(V)_1$ .

Une représentation d'une superalgèbre de Lie  $L = L_0 \oplus L_1$  sera un morphisme  $\rho$  d'algèbres de Lie de  $L$  vers  $\mathfrak{gl}(n|m)$  tel que  $\rho(L_0) \subset \mathfrak{gl}(n|m)_0$  et  $\rho(L_1) \subset \mathfrak{gl}(n|m)_1$ .

## 4 Généralités sur les twists d'algèbres de Hopf

Soit  $(A, m, \iota, \Delta, \epsilon, S)$  une algèbre de Hopf et soit  $F$  un élément inversible de  $A \otimes A$ .

Posons  $\tilde{\Delta}(x) = F\Delta(x)F^{-1}$ .  $\tilde{\Delta}$  est toujours un morphisme (car  $\Delta$  l'est) mais en général, il n'est pas un coproduit, car la condition de coassociativité n'est pas vérifiée pour tout  $F$ . La question est alors de trouver des conditions sur l'élément  $F$  telles que  $\tilde{\Delta}$  soit un nouveau coproduit. On aura ainsi un moyen de construire de nouvelles algèbres de Hopf à partir d'une existante. On appellera ceci un twist d'algèbre de Hopf.

### 4.1 Au niveau universel

Rappelons que la condition de coassociativité s'écrit  $(\tilde{\Delta} \otimes id)(\tilde{\Delta}) = (id \otimes \tilde{\Delta})(\tilde{\Delta})$ . On calcule alors :

$$\begin{aligned} (\tilde{\Delta} \otimes id)(\tilde{\Delta}(x)) &= F_{12}(\Delta \otimes id)(F\Delta(x)F^{-1})F_{12}^{-1} \\ &= F_{12}(\Delta \otimes id)(F)(\Delta \otimes id)(\Delta(x))(\Delta \otimes id)(F^{-1})F_{12}^{-1}, \end{aligned}$$

de même, on a :

$$(id \otimes \tilde{\Delta})(\tilde{\Delta}(x)) = F_{23}(id \otimes \Delta)(F)(id \otimes \Delta)(\Delta(x))(id \otimes \Delta)(F^{-1})F_{23}^{-1}.$$

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour la coassociativité de  $\tilde{\Delta}$  est :

$$\begin{aligned} &(\Delta \otimes id)(F^{-1})F_{12}^{-1}F_{23}(id \otimes \Delta)(F).(id \otimes \Delta)(\Delta(x)).(id \otimes \Delta)(F^{-1})F_{23}^{-1}F_{12}(\Delta \otimes id)(F) \\ &= (\Delta \otimes id)(\Delta(x)) = (id \otimes \Delta)(\Delta(x)), \end{aligned}$$

ou encore en notant  $X = (\Delta \otimes id)(F^{-1})F_{12}^{-1}F_{23}(id \otimes \Delta)(F) \in A \otimes A \otimes A$  :

$$X(id \otimes \Delta)(\Delta(x))X^{-1} = (id \otimes \Delta)(\Delta(x)).$$

Ainsi  $X$  doit commuter avec  $(id \otimes \Delta)(\Delta(x))$  pour tout  $x \in A$ .

C'est le cas lorsque  $X$  est égal à  $1 \otimes 1 \otimes 1$ , donc une condition suffisante à la coassociativité de  $\tilde{\Delta}$  est

$$X = 1 \quad \Leftrightarrow \quad F_{23}(id \otimes \Delta)(F) = F_{12}(\Delta \otimes id)(F). \quad (2)$$

Elle est appelée condition de cocycle. C'est le début du théorème sur les twists, qui est le théorème fondamental pour la suite de notre travail :

**Théorème 4.1.** *Soit une algèbre de Hopf  $(A, m, \iota, \Delta, \epsilon, S)$  et un élément  $F$  de  $A \otimes A$  inversible tel que*

$$F_{23}(id \otimes \Delta)(F) = F_{12}(\Delta \otimes id)(F) \quad \text{et} \quad (\epsilon \otimes id)(F) = (id \otimes \epsilon)(F) = 1. \quad (3)$$

(i) *Posons  $v = m(id \otimes S)(F)$ , alors  $(\tilde{A}, m, \iota, \tilde{\Delta}, \epsilon, \tilde{S})$  où  $\tilde{A}$  coïncide avec  $A$  en tant que espace vectoriel, avec  $\tilde{\Delta}(x) = F\Delta(x)F^{-1}$  et  $\tilde{S}(x) = vS(x)v^{-1}$ , est une algèbre de Hopf. On dit que c'est le twist de  $A$  par  $F$ .*

(ii) *Si de plus  $A$  est quasi-triangulaire avec une matrice universelle  $R$ , alors  $\tilde{A}$  est quasi-triangulaire avec la matrice universelle  $\tilde{R} = F_{21}RF^{-1}$ .*

**Preuve :** On a vu que en vertu des hypothèses (3), la nouvelle comultiplication  $\tilde{\Delta}$  est coassociative. Il reste à vérifier les axiomes pour la coïunité et pour l'antipode.

$$\begin{aligned} (\epsilon \otimes id)(\tilde{\Delta}(x)) &= (\epsilon \otimes id)(F)(\epsilon \otimes id)(\Delta(x))(\epsilon \otimes id)(F^{-1}) \\ &= (\epsilon \otimes id)(\Delta(x)) && \text{d'après (3),} \\ &= x && \text{car } A \text{ est une algèbre de Hopf.} \end{aligned}$$

Il en est de même pour  $(id \otimes \epsilon)(\tilde{\Delta}(x))$ .

Posons  $F = a \otimes b$  et  $F^{-1} = c \otimes d$  : on utilise la notation de Sweedler qui sous-entend la sommation. On a alors  $v = m(id \otimes S)(F) = aS(b)$ , et on vérifiera plus bas que  $v^{-1} = S(c)d$ . On doit prouver que  $m(\tilde{S} \otimes id)(\tilde{\Delta}x) = \epsilon(x).1$ , et on a :

$$\begin{aligned} m(\tilde{S} \otimes id)(\tilde{\Delta}x) &= m(\tilde{S} \otimes id)(ax_1c \otimes bx_2d) \\ &= m(vS(ax_1c)v^{-1} \otimes bx_2d) \\ &= aS(b)S(c)S(x_1)S(a)S(c)dbx_2d \quad \text{car } S \text{ est un anti-automorphisme,} \\ &= aS(b)S(c)S(x_1)x_2d \quad \text{car } ac = db = 1, \\ &= aS(b)S(c)\epsilon(x)d \quad \text{d'après les axiomes pour } S, \\ &= vv^{-1}\epsilon(x) = \epsilon(x).1. \end{aligned}$$

On prouve  $m(id \otimes \tilde{S})(\tilde{\Delta}x) = \epsilon(x).1$  de la même façon.

En ce qui concerne la quasi-triangularité de  $\tilde{A}$ , notons tout d'abord que  $\tilde{\Delta}^{op} = F_{21}\Delta^{op}F_{21}^{-1}$ , et on a donc :

$$\tilde{R}\tilde{\Delta} = F_{21}RF^{-1}F\Delta F^{-1} = F_{21}\Delta^{op}RF^{-1} = F_{21}\Delta^{op}F_{21}^{-1}F_{21}RF^{-1} = \tilde{\Delta}^{op}\tilde{R}.$$

Ainsi,  $\tilde{A}$  est presque commutative et il reste à montrer que  $(\tilde{\Delta} \otimes id)(\tilde{R}) = \tilde{R}_{13}\tilde{R}_{23}$  et  $(id \otimes \tilde{\Delta})(\tilde{R}) = \tilde{R}_{13}\tilde{R}_{12}$ . Notons, avec la sommation sous-entendue (notation de Sweedler),  $R = s \otimes t$ ,  $F = a \otimes b$ ,  $F^{-1} = c \otimes d$  et  $\Delta(x) = x_1 \otimes x_2$ . Nous allons utiliser les propriétés suivantes :

- (i)  $(\Delta \otimes id)(R) = R_{13}R_{23}$  et  $(id \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}$ ,
- (ii)  $R\Delta = \Delta^{op}R \Leftrightarrow sx_1 \otimes tx_2 = x_2s \otimes x_1t$ ,
- (iii)  $F_{12}(\Delta \otimes id)(F) = F_{23}(id \otimes \Delta)(F) \Leftrightarrow aa'_1 \otimes ba'_2 \otimes b' = a' \otimes ab'_1 \otimes bb'_2 \Leftrightarrow a'_1 \otimes a'_2 \otimes b' = ca' \otimes dab'_1 \otimes bb'_2$ .

Tout d'abord, vérifions comme promis que  $v^{-1} = S(c)d$ . On applique  $S \otimes id \otimes S$  à la dernière version de (iii), et on multiplie le tout. Le terme de gauche devient :

$$S(a'_1)a'_2S(b') = \epsilon(a')S(b') = 1 \quad \text{car } \epsilon(a') \in \mathbb{C}, \epsilon(a')b' = 1 \Leftrightarrow (\epsilon \otimes id)(F) = 1 \text{ et } S(1) = 1.$$

Le terme de droite est, en utilisant les mêmes propriétés :

$$S(a')S(c)dab'_1S(b'_2)S(b) = S(a')S(c)da\epsilon(b')S(b) = S(c)daS(b).$$

Donc  $S(c)d$  est bien l'inverse à gauche de  $v$ . On prouve de même que il est inverse à droite (cette fois, on utilise  $(id \otimes \epsilon)(F) = 1$ ). Pour la quasi-triangularité, on calcule :

$$\begin{aligned} (\tilde{\Delta} \otimes id)(\tilde{R}) &= (\tilde{\Delta} \otimes id)(F_{21})(\tilde{\Delta} \otimes id)(R)(\tilde{\Delta} \otimes id)(F^{-1}) \\ &= F_{12}(\Delta \otimes id)(F_{21})(\Delta \otimes id)(R)(\Delta \otimes id)(F^{-1})F_{12}^{-1} \\ &\stackrel{(i)}{=} F_{12}(\Delta \otimes id)(F_{21})R_{13}.R_{23}(\Delta \otimes id)(F^{-1})F_{12}^{-1} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} R_{23}(\Delta \otimes id)(F^{-1})F_{12}^{-1} &\stackrel{(iii)}{=} R_{23}(id \otimes \Delta)(F^{-1})F_{23}^{-1} \\ &\stackrel{(ii)}{=} (id \otimes \Delta^{op})(F^{-1})R_{23}F_{23}^{-1} \\ &= (c \otimes d_2 \otimes d_1).R_{23}F_{23}^{-1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_{12}(\Delta \otimes id)(F_{21})R_{13} &= (ab'_1 \otimes bb'_2 \otimes a').(s \otimes 1 \otimes t) \\ &\stackrel{(iii)}{=} (ba'_2 \otimes b' \otimes aa'_1).(s \otimes 1 \otimes t) \\ &\stackrel{(ii)}{=} bsa'_1 \otimes b' \otimes ata'_2 \\ &= F_{31}R_{13}.(a'_1 \otimes b' \otimes a'_2) \\ &\stackrel{(iii)}{=} F_{31}R_{13}.(ca' \otimes bb'_2 \otimes dab'_1) = F_{31}R_{13}F_{13}^{-1}(a' \otimes bb'_2 \otimes ab'_1). \end{aligned}$$

En réunissant les deux calculs ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} (\tilde{\Delta} \otimes id)(\tilde{R}) &= F_{31}R_{13}F_{13}^{-1}.(a'c \otimes bb'_2d_2 \otimes ab'_1d_1).R_{23}F_{23}^{-1} \\ &= F_{31}R_{13}F_{13}^{-1}.(1 \otimes b \otimes a).R_{23}F_{23}^{-1} \\ &= F_{31}R_{13}F_{13}^{-1}F_{32}R_{23}F_{23}^{-1} = \tilde{R}_{13}\tilde{R}_{23}. \end{aligned}$$

L'égalité  $(id \otimes \tilde{\Delta})(\tilde{R}) = \tilde{R}_{13}\tilde{R}_{12}$  se démontre de façon tout a fait similaire.  $\square$

Nous allons maintenant donner la propriété qui justifie le fait de vouloir classifer les matrices  $R$  à un twist près :

**Proposition 4.2.** *Dans l'espace des algèbres de Hopf, les twists induisent une relation d'équivalence.*

**Preuve :**

- (*réflexivité*) Il est évident que toute algèbre de Hopf  $A$  est équivalente à elle-même par un twist :  $F = 1 \otimes 1$ .
- (*symétrie*) Soient  $A$  et  $\tilde{A}$  le twist de  $A$  par  $F$ . Montrons que  $A$  est le twist de  $\tilde{A}$  par  $F^{-1}$ . Vérifions que  $F^{-1}$  est un twist dans  $\tilde{A}$  :

$$F_{12}^{-1}(\tilde{\Delta} \otimes id)(F^{-1}) = F_{12}^{-1}F_{12}(\Delta \otimes id)(F^{-1})F_{12}^{-1} = (F_{12}(\Delta \otimes id)(F))^{-1},$$

de même

$$F_{23}^{-1}(id \otimes \tilde{\Delta})(F^{-1}) = (F_{23}(id \otimes \Delta)(F))^{-1},$$

ce qui montre que  $F^{-1}$  est un twist de  $\tilde{A}$  vers  $\tilde{\tilde{A}}$ . De plus,

$$\tilde{\tilde{\Delta}}(x) = F^{-1}\tilde{\Delta}(x)F = F^{-1}F\Delta(x)F^{-1}F = \Delta(x),$$

ce qui finit de montrer que  $\tilde{\tilde{A}} = A$ .

- (*transitivité*) Soient  $A$ ,  $A'$  le twist de  $A$  par  $F$  et  $A''$  le twist de  $A'$  par  $F'$ . Montrons que  $G = F'F$  est un twist de  $A$  vers  $A''$ . On a

$$\begin{aligned} G_{12}(\Delta \otimes id)(G) &= F'_{12}F_{12}(\Delta \otimes id)(F')(\Delta \otimes id)(F) \\ &= F'_{12}F_{12}(\Delta \otimes id)(F')F_{12}^{-1}F_{12}(\Delta \otimes id)(F) \\ &= F'_{12}(\Delta' \otimes id)(F')F_{12}(\Delta \otimes id)(F) \\ &= F'_{23}(id \otimes \Delta')(F')F_{23}(id \otimes \Delta)(F) \\ &= F'_{23}F_{23}(id \otimes \Delta)(F')(id \otimes \Delta)(F) \\ &= G_{23}(id \otimes \Delta)(G). \end{aligned}$$

De plus,  $G\Delta(x)G^{-1} = \Delta''(x)$ .  $\square$

### Remarques :

- Dans la condition  $(\epsilon \otimes id)(F) = (id \otimes \epsilon)(F) = 1$  du théorème, on peut remplacer 1 par un élément central de  $A$ . Le choix de 1 permet de garder la même co-unité dans l'algèbre twistée.
- Lorsque l'on impose de plus que  $(\Delta \otimes id)(F) = F_{13}F_{23}$  et  $(id \otimes \Delta)(F) = F_{13}F_{12}$ , on appellera ce cas particulier une *paire  $(R, F)$  compatible*, c'est un cas particulier très intéressant, il donne lieu à toute une construction d'algèbre matricielle quantique ([14], [15]). La condition de twist devient ici :

$$F_{12}F_{13}F_{23} = F_{23}F_{13}F_{12},$$

c'est-à-dire l'équation de Yang-Baxter. Par contre, les twists par une paire  $(R, F)$  compatible n'induisent pas une relation d'équivalence (la transitivité n'est pas assurée). Le cas général sera appelé un *twist généralisé* ou seulement twist.

- Dans le cas d'une algèbre de Hopf  $A$  quasi-triangulaire, la matrice  $R$  vérifie les conditions de twist. Ce twist envoie  $\Delta$  à  $\Delta^{op}$ , et  $R$  à  $R_{21}$ , ce qui montre que  $A^{op}$  est un twist de  $A$  par  $R$ .

## 4.2 Au niveau numérique

Nous voulons analyser la situation au niveau numérique, c'est-à-dire dans une représentation quelconque de  $A$ . En fait, connaissant une algèbre de Hopf quasi-triangulaire, nous nous plaçons dans une

représentation, nous prenons la matrice  $R$  numérique. Nous allons donner des équations que doivent vérifier un élément  $F$  pour être susceptible d'être un twist.

Soit  $(\rho, V)$  une représentation de l'algèbre de Hopf quasi-triangulaire  $(A, \mu, \iota, \Delta, \epsilon, S, R)$ . Par abus de notation, nous continuerons à noter  $X = \rho(X)$  pour  $X \in A^{\otimes n}$ . Nous noterons de plus  $\hat{X} = PX$  pour  $X \in A \otimes A$  où  $P(e_i \otimes e_j) = e_j \otimes e_i$ . Remarquons que  $P^2 = 1$ .

Rappelons que l'on note, pour  $X = x_1 \otimes x_2$ ,  $X_{ij}$  l'élément  $1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes x_1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes x_2 \otimes 1 \cdots \otimes 1$ , où  $x_1$  est en  $i^{\text{ème}}$  position, et  $x_2$  est en  $j^{\text{ème}}$  position. La généralisation de ces notations aux éléments de  $A^{\otimes n}$  est évidente. On notera aussi  $\hat{X}_{ij} = P_{ij}X_{ij}$ .

Au niveau numérique, on a  $X_{21} = PXP$ . Ainsi, au niveau numérique, l'élément  $\tilde{R} = F_{21}RF^{-1} = PFPRF^{-1}$  et donc  $\hat{\tilde{R}} = FPRF^{-1} = F\hat{R}F^{-1}$ .

Soit  $F$  une matrice numérique inversible qui agit sur  $V \otimes V$ . Posons  $A_{123}$  et  $B_{123}$  qui agissent sur  $V^{\otimes 3}$ . Nous voulons que  $A$  et  $B$  soient susceptibles de représenter respectivement  $(\Delta \otimes id)(F)$  et  $(id \otimes \Delta)(F)$ . De cette manière la condition de cocycle (2) (qui est suffisante pour la coassociativité) devient :

$$F_{12}A_{123} = F_{23}B_{123}. \quad (4)$$

$A$  et  $B$  sont reliés au coproduit de  $F$  et donc à la matrice  $R$ . Cherchons des relations que doivent vérifier  $A, B$  et  $R$  si  $A$  et  $B$  veulent être des candidats (au niveau numérique) pour représenter  $(\Delta \otimes id)(F)$  et  $(id \otimes \Delta)(F)$ . On a :

$$\begin{aligned} R_{12}(\Delta \otimes id)(F) &= (\Delta^{op} \otimes id)(F)R_{12} \\ \Leftrightarrow R_{12}A_{123} &= A_{213}R_{12} \\ \Leftrightarrow P_{12}R_{12}A_{123} &= P_{12}A_{213}R_{12}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne finalement

$$\hat{R}_{12}A_{123} = A_{123}\hat{R}_{12}. \quad (5)$$

De même, on a

$$\begin{aligned} R_{23}(id \otimes \Delta)(F) &= (id \otimes \Delta^{op})(F)R_{23} \\ \Leftrightarrow R_{23}B_{123} &= B_{132}R_{23} \\ \Leftrightarrow P_{23}R_{23}B_{123} &= P_{23}B_{132}R_{23}, \end{aligned}$$

et on obtient donc

$$\hat{R}_{23}B_{123} = B_{123}\hat{R}_{23}. \quad (6)$$

Supposons maintenant que l'on a trouvé (numériquement)  $F$ ,  $A$  et  $B$  vérifiant les conditions (4),(5) et (6), et regardons si  $\hat{\tilde{R}} = F\hat{R}F^{-1}$  vérifie bien l'équation de Yang-Baxter :

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{R}}_{12}\hat{\tilde{R}}_{23}\hat{\tilde{R}}_{12} &= F_{12}\hat{R}_{12}\underbrace{F_{12}^{-1}F_{23}}_{A_{123}B_{123}^{-1}}\hat{R}_{23}\underbrace{F_{23}^{-1}F_{12}}_{B_{123}A_{123}^{-1}}\hat{R}_{12}F_{12}^{-1} \\ &\stackrel{(5),(6)}{=} F_{12}A_{123}\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}B_{123}^{-1}B_{123}\hat{R}_{12}A_{123}^{-1}\hat{F}_{12}^{-1} \\ &= F_{12}A_{123} \cdot \hat{R}_{12}\hat{R}_{23}\hat{R}_{12} \cdot A_{123}^{-1}\hat{F}_{12}^{-1}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\hat{R}_{23}\hat{R}_{12}\hat{R}_{23} &= F_{23}\hat{R}_{23}\underbrace{F_{23}^{-1}F_{12}}_{B_{123}A_{123}^{-1}}\hat{R}_{12}\underbrace{F_{12}^{-1}F_{23}}_{A_{123}B_{123}^{-1}}\hat{R}_{23}F_{23}^{-1} \\
&\stackrel{(5),(6)}{=} F_{23}B_{123}\hat{R}_{23}\hat{R}_{12}A_{123}^{-1}A_{123}\hat{R}_{23}B_{123}^{-1}F_{23}^{-1} \\
&= F_{23}B_{123} \cdot \hat{R}_{23}\hat{R}_{12}\hat{R}_{23} \cdot B_{123}^{-1}F_{23}^{-1},
\end{aligned}$$

et en utilisant le fait que  $\hat{R}$  vérifie Yang-Baxter et la relation (4), on trouve que ces 2 expressions sont égales.

En conclusion, si on a trouvé  $F$ ,  $A$  et  $B$  vérifiant les conditions (4),(5) et (6), alors on sait que la matrice numérique  $F\hat{R}F^{-1}$  vérifie l'équation de Yang-Baxter. Donc si les matrices  $A$  et  $B$  sont bien les images dans la représentation respectivement de  $(\Delta \otimes id)(F)$  et de  $(id \otimes \Delta)(F)$ , alors on a trouvé un "twist numérique" de l'algèbre de Hopf  $(A, \mu, \iota, \Delta, \epsilon, S, R)$  vers une algèbre de Hopf  $(\tilde{A}, \mu, \iota, \tilde{\Delta}, \epsilon, \tilde{S}, \tilde{R})$  (nous dirons souvent de  $R$  vers  $\tilde{R}$ ).

**Remarque :** On peut vérifier que en posant  $\hat{F} = PF$ ,  $\tilde{R} = \hat{F}\hat{R}\hat{F}^{-1}$ ,  $\hat{A} = P_{23}P_{13}A$  et  $\hat{B} = P_{12}P_{13}B$ , les équations (4), (5) et (6) deviennent :

$$\hat{F}_{23}\hat{A}_{123} = \hat{F}_{12}\hat{B}_{123}, \quad \hat{R}_{23}\hat{A}_{123} = \hat{A}_{123}\hat{R}_{12}, \quad \hat{R}_{12}\hat{B}_{123} = \hat{B}_{123}\hat{R}_{23}, \quad (7)$$

et  $\tilde{R}$  vérifie l'équation de Yang-Baxter. Résoudre les équations "avec chapeau" ou "sans chapeau" est équivalent (cela correspond à obtenir  $\hat{R}$  ou  $\tilde{R}_{21}$ ).

De même que dans le cas universel, les twists numériques induisent une relation d'équivalence dans l'espace des solutions de l'équation de Yang-Baxter, ce qui justifie de les classifier à un twist près.

**Proposition 4.3.** *Dans l'espace des matrices solutions de l'équation de Yang-Baxter, les twists numériques définis par les relations (4),(5) et (6), induisent une relation d'équivalence.*

**Preuve :** Nous utiliserons la version "avec chapeau" de la remarque.

- (réflexivité)  $F = id$ , et  $A = B = id$  est un twist qui envoie  $R$  à  $R$ .
- (symétrie) Soient  $\hat{R}$ ,  $\tilde{R} = \hat{F}\hat{R}\hat{F}^{-1}$  et  $(\hat{F}, \hat{A}, \hat{B})$  qui envoie  $\hat{R}$  à  $\tilde{R}$ . Alors, montrons que  $(\hat{G}, \hat{C}, \hat{D}) = (\hat{F}^{-1}, \hat{F}_{23}\hat{B}_{123}^{-1}\hat{F}_{12}^{-1}, \hat{F}_{12}\hat{A}_{123}^{-1}\hat{F}_{23}^{-1})$  est un twist numérique de  $\tilde{R}$  vers  $\hat{R}$ . On a évidemment  $\hat{R} = \hat{G}\tilde{R}\hat{G}^{-1}$ . De plus, on vérifie (7) pour  $(\hat{G}, \hat{C}, \hat{D})$  en utilisant (7) pour  $(\hat{F}, \hat{A}, \hat{B})$  :

$$\hat{G}_{23}\hat{C}_{123} = \hat{F}_{23}^{-1}\hat{F}_{23}\hat{B}_{123}^{-1}\hat{F}_{12}^{-1} = \hat{A}_{123}^{-1}\hat{F}_{23}^{-1} = \hat{F}_{12}^{-1}\hat{D}_{123} = \hat{G}_{12}\hat{D}_{123},$$

$$\tilde{R}_{23}\hat{C}_{123} = \hat{F}_{23}\hat{R}_{23}\hat{B}_{123}^{-1}\hat{F}_{12}^{-1} = \hat{F}_{23}\hat{B}_{123}^{-1}\hat{R}_{12}\hat{F}_{12}^{-1} = \hat{C}_{123}\tilde{R}_{12},$$

$$\tilde{R}_{12}\hat{D}_{123} = \hat{F}_{12}\hat{R}_{12}\hat{A}_{123}^{-1}\hat{F}_{23}^{-1} = \hat{F}_{12}\hat{A}_{123}^{-1}\hat{R}_{23}\hat{F}_{23}^{-1} = \hat{D}_{123}\tilde{R}_{23}.$$

- (transitivité) Soient  $(\hat{F}, \hat{A}, \hat{B})$  un twist numérique de  $\hat{R}$  vers  $\hat{R}'$ , et  $(\hat{G}, \hat{C}, \hat{D})$  un twist numérique de  $\hat{R}'$  vers  $\hat{R}''$ . Alors, on va montrer que :

$$(\hat{H}, \hat{X}, \hat{Y}) = (\hat{G}\hat{F}, \hat{F}_{23}^{-1}\hat{C}_{123}\hat{R}'_{23}\hat{R}'_{12}\hat{R}'_{23}\hat{F}_{23}\hat{A}_{123}, \hat{F}_{12}\hat{D}_{123}\hat{R}'_{12}\hat{R}'_{23}\hat{R}'_{12}\hat{F}_{12}\hat{B}_{123})$$

est un twist de  $\hat{R}$  vers  $\hat{R}''$ . Il est clair que  $\hat{R}'' = \hat{G}\hat{R}\hat{G}^{-1}$ . Vérifions (7), traitons la première équation en détail :

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{23}\hat{X}_{123} &= \hat{R}_{23}\hat{F}_{23}^{-1}\hat{C}_{123}\hat{R}'_{23}\hat{R}'_{12}\hat{R}'_{23}\hat{F}_{23}\hat{A}_{123} \\
&= \hat{F}_{23}^{-1}\hat{R}'_{23}\hat{C}_{123}\hat{R}'_{23}\hat{R}'_{12}\hat{R}'_{23}\hat{F}_{23}\hat{A}_{123} \\
&= \hat{F}_{23}^{-1}\hat{C}_{123}\hat{R}'_{12}\hat{R}'_{23}\hat{R}'_{12}\hat{R}'_{23}\hat{F}_{23}\hat{A}_{123} \\
&= \hat{F}_{23}^{-1}\hat{C}_{123}\hat{R}'_{23}\hat{R}'_{12}\hat{R}'_{23}\hat{F}_{23}\hat{A}_{123} \\
&= \hat{F}_{23}^{-1}\hat{C}_{123}\hat{R}'_{23}\hat{R}'_{12}\hat{R}'_{23}\hat{F}_{23}\hat{R}_{23}\hat{A}_{123} \\
&= \hat{F}_{23}^{-1}\hat{C}_{123}\hat{R}'_{23}\hat{R}'_{12}\hat{R}'_{23}\hat{F}_{23}\hat{A}_{123}\hat{R}_{12} \\
&= \hat{X}_{123}\hat{R}_{12}.
\end{aligned}$$

Ce sont exactement les mêmes étapes qui permettent de vérifier que  $\hat{R}_{12}\hat{Y}_{123} = \hat{Y}_{123}\hat{R}_{23}$ . Enfin, on a également :

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{23}\hat{X}_{123} &= G_{23}\hat{C}_{123}\hat{R}'_{23}\hat{R}'_{12}\hat{R}'_{23}\hat{F}_{23}\hat{A}_{123} \\
&= G_{12}\hat{D}_{123}\hat{R}'_{12}\hat{R}'_{23}\hat{R}'_{12}\hat{F}_{12}\hat{B}_{123} \\
&= \hat{H}_{12}\hat{Y}_{123},
\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration.  $\square$

Le problème qui nous intéresse est le suivant : nous connaissons une algèbre de Hopf ("standard") et sa  $R$ -matrice  $R$ , et nous connaissons également une  $R$ -matrice  $\tilde{R}$  numérique qui correspond à une autre algèbre de Hopf ("non-standard"). Nous cherchons un twist de l'algèbre "standard" vers la "non-standard", ou encore de  $R$  vers  $\tilde{R}$ . Pour cela, nous devons chercher s'il existe des éléments  $F$ ,  $A$ ,  $B$  vérifiant  $\hat{\tilde{R}} = F\hat{R}F^{-1}$ , et les équations (4),(5) et (6). S'il n'existe pas d'éléments vérifiant ces équations, alors on est certain de plus que le twist universel n'existe pas, car s'il existait, il donnerait au niveau numérique des éléments vérifiant ces équations. Par contre, si ces éléments existent, alors on a déjà un twist numérique et, en plus, on *peut penser* que le twist universel existe, mais il n'y a pas de théorème prouvant ceci. En particulier, à partir des matrices numériques  $F$ ,  $A$  et  $B$ , on ne peut pas être sûr que il existe un élément universel  $\mathbf{F}$ , tel que  $(\Delta \otimes id)(\mathbf{F})$  soit représenté par  $A$  et  $(id \otimes \Delta)(\mathbf{F})$  par  $B$ .

**Remarque :** Comme cas particulier, il y a le twist lorsque l'on impose en plus  $A_{123} = F_{13}F_{23}$  et  $B_{123} = F_{13}F_{12}$ . Ainsi, les équations numériques deviennent :

$$F_{12}F_{13}F_{23} = F_{23}F_{13}F_{12}, \quad R_{12}F_{13}F_{23} = F_{23}F_{13}R_{12}, \quad \text{et} \quad R_{23}F_{13}F_{12} = F_{23}F_{13}R_{23}.$$

"Avec chapeau", cela devient :

$$\hat{F}_{23}\hat{F}_{12}\hat{F}_{23} = \hat{F}_{12}\hat{F}_{23}\hat{F}_{12}, \quad \hat{R}_{12}\hat{F}_{23}\hat{F}_{12} = \hat{F}_{23}\hat{F}_{12}\hat{R}_{23} \quad \hat{R}_{23}\hat{F}_{12}\hat{F}_{23} = \hat{F}_{12}\hat{F}_{23}\hat{R}_{12}.$$

Nous appellerons ceci une paire  $(\hat{R}, \hat{F})$  compatible. L'intérêt du twist par une paire  $(\hat{R}, \hat{F})$  compatible est que les équations sont beaucoup plus simples. Par exemple, supposons (ce qui sera notre cas) que nous sommes dans une représentation de dimension 2. Alors  $R$  et  $F$  sont des matrices  $4 \times 4$  et il y a donc 16 inconnues dans le système (les éléments de  $F$ ). Or les 16 équations linéaires  $\hat{\tilde{R}}F = F\hat{R}$  réduisent encore le nombre d'inconnues. Ensuite, on a un système fait d'équations quadratiques et cubiques, mais avec peu d'inconnues.

Tandis que dans le cas d'un twist généralisé, il y a toujours 16 inconnues dans  $F$ , mais il y a maintenant 64 inconnues dans  $A$  et 64 dans  $B$ . Heureusement, les équations (5) et (6) sont linéaires et

réduisent le nombre de ces 128 inconnues. Malgré tout, lorsque l'on arrive à (4), c'est un système de 64 équations quadratiques avec en général bien plus de 16 inconnues.

Effectivement, l'expérience montre que il est plus facile de traiter le cas des paires  $(\hat{R}, \hat{F})$  compatibles, seulement en général, si twist il y a, il n'est pas forcément de cette forme, et on doit donc se tourner vers les twists généralisés. En fait, c'est ce qui va se passer dans notre cas.

## 5 Les déformations de $\mathfrak{gl}(1|1)$ et leurs twists

### 5.1 Déformations standards de $U(\mathfrak{gl}(1|1))$ : $U_\alpha(\mathfrak{gl}(1|1))$ et $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$

L'algèbre enveloppante universelle de  $\mathfrak{gl}(1|1)$  notée  $U(\mathfrak{gl}(1|1))$  est engendrée par  $X^+$ ,  $X^-$ ,  $H$  et  $I$  vérifiant :

$$[H, X^\pm] = \pm 2X^\pm, \quad [I, H] = 0, \quad [I, X^\pm] = 0, \quad \{X^+, X^-\} = I, \quad \{X^+, X^+\} = \{X^-, X^-\} = 0.$$

De même que pour toutes les algèbres et super-algèbres de Lie, la structure non-déformée d'algèbre de Hopf de  $U(\mathfrak{gl}(1|1))$  est la suivante :

$$\forall Y \in \{H, I, X^+, X^-\} : \quad \Delta_0(Y) = Y \otimes 1 + 1 \otimes Y, \quad \epsilon_0(Y) = 0, \quad S_0(Y) = -Y.$$

Cette algèbre admet une  $\mathbb{Z}$ -graduation qui est définie par :

$$gr(H) = gr(I) = 0, \quad gr(X^+) = 1, \quad gr(X^-) = -1,$$

et la parité d'un élément dans  $U(\mathfrak{gl}(1|1))$ , qui définit ainsi la  $\mathbb{Z}_2$ -graduation, ou "super-graduation", est :

$$|Y| = (-1)^{gr(Y)}.$$

Ainsi,  $X^+$  et  $X^-$  sont les générateurs impairs ou "fermioniques", et  $H$  et  $I$  sont les générateurs pairs ou "bosoniques".

La déformation standard de  $U(\mathfrak{gl}(1|1))$  qui, en plus de respecter la super-graduation, respecte aussi la  $\mathbb{Z}$ -graduation sera notée  $U_\alpha(\mathfrak{gl}(1|1))$  et est définie par :

$$\Delta(H) = \Delta_0(H), \quad \Delta(I) = \Delta_0(I), \quad \Delta(X^+) = X^+ \otimes e^{\alpha I} + 1 \otimes X^+, \quad \Delta(X^-) = X^- \otimes 1 + e^{-\alpha I} \otimes X^-,$$

$$\begin{aligned} [H, X^\pm] &= \pm 2X^\pm, \quad [I, H] = 0, \quad [I, X^\pm] = 0, \\ \{X^+, X^+\} &= 0, \quad \{X^-, X^-\} = 0, \quad \{X^+, X^-\} = \frac{e^{\alpha I} - e^{-\alpha I}}{q - q^{-1}}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\epsilon(X^\pm) = 0, \quad \epsilon(H) = \epsilon(I) = 0, \quad S(H) = -H, \quad S(I) = -I, \quad S(X^+) = -X^+ e^{-\alpha I}, \quad S(X^-) = -e^{\alpha I} X^-.$$

On a posé  $q = e^\alpha$ . On peut vérifier que  $U_\alpha(\mathfrak{gl}(1|1))$  est "quasi-triangulaire" avec la  $R$ -matrice universelle (qui appartient en fait à une certaine complétion) :

$$R = e^{\frac{\alpha}{2}(H \otimes I + I \otimes H)} (1 \otimes 1 - (q - q^{-1}) X^+ \otimes X^-).$$

Dans la représentation fondamentale (on vérifie que ces matrices satisfont (8)), les générateurs sont représentés par :

$$H \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X^+ \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^- \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et la matrice numérique  $\hat{R}$  dans cette représentation est, sachant que ici  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  :

$$\hat{R} = PR = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

On utilise souvent aussi la version de (8) dans laquelle  $e^{\alpha I}$  est remplacé par un nouveau générateur  $K$ , auquel on adjoint formellement un inverse noté  $K^{-1}$ . En posant  $q = e^\alpha$ , toute référence au paramètre infinitésimal  $\alpha$  a disparu. Ainsi, nous noterons  $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$  l'algèbre de Hopf engendrée par  $K, H, X^+, X^-$  avec la structure qui se déduit aisément de (8) en prenant  $K = e^{\alpha I}$  ( $K$  est central,  $\Delta(K) = K \otimes K$ ,  $\epsilon(K) = 1$ ,  $S(K) = K^{-1}$ ). Montrons seulement le calcul pour le coproduit :

$$\begin{aligned} \Delta(K) = \Delta(e^{\alpha I}) &= \Delta\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha I)^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \Delta(I)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n (I \otimes 1 + 1 \otimes I)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I^k \otimes I^{n-k} \quad (m = n - k) \\ &= \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{(\alpha I)^k}{k!} \otimes \frac{(\alpha I)^m}{m!} \\ &= e^{\alpha I} \otimes e^{\alpha I} = K \otimes K. \end{aligned}$$

Il existe en fait une déformation standard plus générale de  $U(\mathfrak{gl}(1|1))$ , avec 2 paramètres. Comme illustration du sujet qui nous occupe, on peut l'obtenir au moyen d'un twist simple. En effet, il est facile de vérifier que l'élément  $F$  suivant vérifie bien les conditions de twist qui sont, rappelons-le,  $F_{12}(\Delta \otimes id)(F) = F_{23}(id \otimes \Delta)(F)$  et  $(\epsilon \otimes id)(F) = (id \otimes \epsilon)(F) = 1$  :

$$F = e^{\frac{\beta}{2} I \otimes H}.$$

Ainsi, on obtient une nouvelle algèbre de Hopf, notée  $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}(1|1))$ , et on peut calculer la nouvelle  $R$ -matrice universelle  $\tilde{R} = F_{21} R F^{-1}$  :

$$\tilde{R} = e^{\frac{\alpha}{2}(H \otimes I + I \otimes H)} e^{\frac{\beta}{2}(H \otimes I - I \otimes H)} (1 \otimes 1 - (q - q^{-1})e^{-\beta I} X^+ \otimes e^{\beta I} X^-).$$

En posant  $p = e^\beta$ , la nouvelle matrice numérique  $\hat{R}$  dans la représentation fondamentale devient :

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^{-1} & 0 \\ 0 & p & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Le twist ne modifie que le coproduit, qui devient dans cette nouvelle algèbre de Hopf :

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(H) &= H \otimes 1 + 1 \otimes H, & \tilde{\Delta}(I) &= I \otimes 1 + 1 \otimes I, \\ \tilde{\Delta}(X^+) &= X^+ \otimes e^{\alpha I} + e^{\beta I} \otimes X^+, & \tilde{\Delta}(X^-) &= X^- \otimes e^{-\beta I} + e^{-\alpha I} \otimes X^-. \end{aligned}$$

### 5.1.1 Théorie des représentations de $U_\alpha(\mathfrak{gl}(1|1))$ et de $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$

Nous allons étudier la théorie des représentations de l'algèbre  $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$  et de  $U_\alpha(\mathfrak{gl}(1|1))$ . Nous l'utiliserons un peu plus loin, mais c'est un résultat intéressant en soi pour mieux comprendre la structure de ces algèbres. Par représentations nous entendons représentations d'algèbre et non représentations d'algèbre graduée. On sait que dans le cas de  $\mathfrak{gl}(2)$ , les deux versions ne sont pas isomorphes car elles ne donnent pas la même théorie des représentations (voir [20] ou [23]). Nous étudions la situation générique, c'est-à-dire où  $\alpha$  (respectivement  $q$ ) est indéterminé : ce n'est pas un nombre fixé.

Il est très intéressant de connaître la structure du centre de  $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$ , ce qui donnera les opérateurs de Casimir dans les représentations irréductibles. Par souci de simplicité, nous utiliserons la base suivante :

$$I \text{ où } K, \quad H_1, \quad X^+, \quad X^-, \quad \text{où on a pris } H_1 = \frac{1}{2}(H + I) \text{ par rapport à (8).}$$

Les relations impliquant  $H_1$  sont  $[H_1, X^\pm] = \pm X^\pm$  et  $[H_1, I] = 0$ , et dans la représentation fondamentale, on a simplement  $H_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Nous avons donc :

**Proposition 5.1.** *Le centre de  $U_\alpha(\mathfrak{gl}(1|1))$  est engendré par les 2 éléments suivants :*

$$Z_1 = I, \quad Z_2 = X^+ X^- - \frac{e^{\alpha I} - e^{-\alpha I}}{q - q^{-1}} H_1.$$

*Le centre de  $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$  est engendré par les 2 éléments suivants :*

$$Z_1 = K, \quad Z_2 = X^+ X^- - \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} H_1.$$

**Preuve :** Il est facile de vérifier que ces deux éléments sont centraux. De plus prenons un élément quelconque de  $U_\alpha(\mathfrak{gl}(1|1))$ , qui par la propriété de Poincaré-Birkhoff-Witt peut s'écrire :

$$\sum_{i,j,k,l} c_{ijkl} I^i H_1^j (X^+)^k (X^-)^l = \sum_{i,j} c_{ij}^{(0)} I^i H_1^j + \sum_{i,j} c_{ij}^{(1)} I^i H_1^j X^+ + \sum_{i,j} c_{ij}^{(2)} I^i H_1^j X^- + \sum_{i,j} c_{ij}^{(3)} I^i H_1^j X^+ X^-.$$

On voit de suite que pour commuter avec  $H_1$ , on doit avoir  $c_{ij}^{(1)} = c_{ij}^{(2)} = 0$ . Mais de plus,  $I = Z_1$  et  $X^+X^-$  s'exprime en fonction de  $Z_2$  et  $H_1$ , donc la question qui reste est de savoir s'il y a une fonction polynômiale (non-triviale) de  $H_1$  qui est centrale. Or, pour toute fonction  $f(H_1)$ , on a  $f(H_1)X^+ = X^+f(H_1 + 1)$  et un polynôme ne peut jamais vérifier  $f(H_1) = f(H_1 + 1)$ . Ainsi, le centre est bien  $\langle Z_1, Z_2 \rangle$ . Le résultat est le même pour  $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$ .  $\square$

Dans une représentation irréductible, les Casimirs  $Z_1$  et  $Z_2$  sont représentés par des matrices proportionnelles à l'identité (lemme de Schur) et sont donc chacun déterminé par un nombre complexe. Notons  $c_1$  (respectivement  $c_2$ ) la valeur de  $Z_1$  (respectivement  $Z_2$ ). Par abus de notation, nous continuerons à noter  $I$ , (ou  $K$ ),  $H_1$ ,  $X^+$ ,  $X^-$  les matrices représentant ces éléments dans une représentation.

Supposons que  $c_1 \neq 0$ . Notons  $\rho$  cette représentation irréductible et  $U^{c_1c_2}$  le quotient de  $U_\alpha(\mathfrak{gl}(1|1))$  par les relations  $Z_1 = c_1$  et  $Z_2 = c_2$ .  $\rho$  devient donc une représentation irréductible de  $U^{c_1c_2}$ . Or, tout élément de  $U^{c_1c_2}$  peut s'écrire comme :

$$a_1 + a_2X^+ + a_3X^- + a_4X^+X^-, \quad \text{où } a_i \in \mathbb{C},$$

car dans  $U^{c_1c_2}$ ,  $I = c_1$  et  $H_1 = \frac{q-q^{-1}}{e^{\alpha c_1} - e^{-\alpha c_1}}(X^+X^- - c_2)$  car  $c_1 \neq 0$ .

D'après le théorème de Burnside (par exemple [11]) : *Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie supérieure à 1 sur un corps algébriquement clos. Si  $\mathfrak{A}$  est une algèbre de matrices sur  $V$  irréductible (pas de sous-espaces invariants non-triviaux), alors  $\mathfrak{A}$  contient  $Mat(V)$* , cela signifie que les représentations irréductibles sont au plus de dimension 2, car sinon cela contredirait que la dimension sur le centre est 4. Il faut donc séparer le cas où  $c_1$  est nul où le théorème de Burnside ne s'applique pas.

*cas 1 :  $c_1 \neq 0$ .* On sait que la représentation est de dimension au plus 2, et de plus,  $(X^+)^2 = 0$  mais  $X^+ \neq 0$  car  $\{X^+, X^-\} = \frac{e^{\alpha c_1} - e^{-\alpha c_1}}{q - q^{-1}} \neq 0$ . Donc la représentation doit être de dimension 2. Plaçons-nous dans une base où  $X^+$  est sous la forme normalisée suivante. Les conditions précédentes impliquent un seul choix possible pour  $X^+$  et ensuite pour  $X^-$  :

$$X^+ \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^- \mapsto \frac{e^{\alpha c_1} - e^{-\alpha c_1}}{q - q^{-1}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Connaissant  $X^+$ ,  $X^-$ , on connaît donc  $X^+X^-$ , et on peut vérifier que, prenant :

$$H_1 \mapsto \frac{q - q^{-1}}{e^{\alpha c_1} - e^{-\alpha c_1}}(X^+X^- - c_2),$$

alors toutes les relations sont vérifiées pour tout  $c_2$ .

*cas 2 :  $c_1 = 0$ .* Ici, on a  $Z_2 = X^+X^- = c_2$ , mais par ailleurs  $\{X^+, X^-\} = \frac{e^{\alpha c_1} - e^{-\alpha c_1}}{q - q^{-1}} = 0$  et donc  $(X^+X^-)^2 = X^+X^-X^+X^- = -X^+X^+X^-X^- = 0$ . Ainsi,  $c_2^2 = 0$  et donc  $c_2 = 0$ . Ainsi, on a maintenant  $(X^+)^2 = (X^-)^2 = X^+X^- = X^-X^+ = 0$ . En se plaçant dans la base où  $X^+$  est sous la forme canonique de Jordan (c'est-à-dire constitué sur la diagonale soit de blocs  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , soit de 0, soit de blocs  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et de 0), il est facile de voir que, pour être irréductible, la représentation doit être de dimension 1,  $X^+ \mapsto 0$ ,  $X^- \mapsto 0$ ,  $I \mapsto 0$  et  $H_1$  arbitraire.

Ainsi, on aboutit au résultat final suivant :

**Proposition 5.2.** *Les représentations irréductibles de  $U_\alpha(\mathfrak{gl}(1|1))$  sont de deux types :*

- *des représentations de dimension 2 labellées par 2 nombres complexes  $c_1$ , et  $c_2$  avec  $c_1 \neq 0$  et  $c_2$  arbitraires. En posant  $\mu_1 = \frac{e^{\alpha c_1} - e^{-\alpha c_1}}{q - q^{-1}}$ , les générateurs sont donnés par :*

$$X^+ \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^- \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I \mapsto \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, \quad H_1 \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{c_2}{\mu_1} + 1 & 0 \\ 0 & -\frac{c_2}{\mu_1} \end{pmatrix}.$$

- *des représentations de dimension 1, labellées par un nombre complexe  $c$ , où les générateurs sont donnés par :*

$$X^+ \mapsto 0, \quad X^- \mapsto 0, \quad I \mapsto 0, \quad H_1 \mapsto c.$$

Maintenant, tournons-nous vers  $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$ . Notons  $k_1$  la valeur du Casimir  $K$  et conservons  $c_2$  pour le deuxième Casimir. Cette fois-ci,  $k_1 \neq 0$  car par définition  $K$  est inversible. On peut faire la même séparation que précédemment, mais cette fois-ci il y a deux valeurs de  $k_1$  qui annule  $\{X^+, X^-\} = \frac{k_1 - k_1^{-1}}{q - q^{-1}}$  qui sont  $k_1 = \pm 1$ . De la même manière que plus haut, on prouve le résultat suivant :

**Proposition 5.3.** *Les représentations irréductibles de  $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$  sont de deux types :*

- *des représentations de dimension 2 labellées par 2 nombres complexes  $k_1$  et  $c_2$  avec  $k_1 \neq 0, \pm 1$  et  $c_2$  arbitraires. En posant  $\mu_1 = \frac{k_1 - k_1^{-1}}{q - q^{-1}}$ , les générateurs sont donnés par :*

$$X^+ \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^- \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K \mapsto \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix}, \quad H_1 \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{c_2}{\mu_1} + 1 & 0 \\ 0 & -\frac{c_2}{\mu_1} \end{pmatrix}.$$

- *des représentations de dimension 1, labellées par deux nombres complexes  $k_1$  et  $c$ , où  $k_1 \in \{-1, 1\}$  et  $c$  arbitraires, et où les générateurs sont donnés par :*

$$X^+ \mapsto 0, \quad X^- \mapsto 0, \quad K \mapsto k_1, \quad H_1 \mapsto c.$$

### Remarques

- On voit tout de suite que les théories des représentations de  $U_\alpha(\mathfrak{gl}(1|1))$  et de  $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$  sont différentes.
- De manière quelque peu surprenante, il ne se produit plus ici le même phénomène que pour  $\mathfrak{gl}(2)$  (voir [23]). En effet, dans ce cas chaque représentation de  $U_\alpha(\mathfrak{gl}(2))$  se dédouble pour  $U_q(\mathfrak{gl}(2))$  : un signe  $\pm 1$  entre en jeu. Ici, ce n'est plus le cas, et ce en raison de la relation d'anticommution. Pour simplifier, regardons  $U_q(\mathfrak{sl}(2))$  qui est engendrée par  $E, F, K$  vérifiant  $[E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$ ,  $KE = q^2EK$ ,  $KF = q^{-2}FK$ .  $U_\alpha(\mathfrak{sl}(2))$  est engendré par  $E, F, H$ , vérifiant  $[E, F] = \frac{e^{\alpha H} - e^{-\alpha H}}{q - q^{-1}}$ ,  $[H, E] = 2E$ ,  $[H, F] = -2F$ , le lien entre les deux étant  $K = e^{\alpha H}$ . On peut montrer que pour  $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ , les représentations irréductibles sont de la forme  $V(\sigma, j) = \langle e_j^m, m = j, j - 1, \dots, -j \rangle$ , avec  $\sigma = \pm 1$  et l'action des générateurs est donnée par :

$$K(\sigma, j)e_j^m = \sigma q^{2m}e_j^m, \quad E(\sigma, j)e_j^m = e_j^{m+1}, \quad F(\sigma, j)e_j^m = \sigma(j + m)_q(j - m + 1)_q e_j^{m-1}.$$

Ce que l'on souligne dans ce résultat, c'est la présence de  $\sigma = \pm 1$ , qui n'est pas là si on considère  $U_\alpha(\mathfrak{sl}(2))$ . Prenons une représentation irréductible de dimension 2 de  $U_q(\mathfrak{sl}(2))$  (resp.  $U_\alpha(\mathfrak{sl}(2))$ ).

On peut montrer que l'on peut choisir une base telle que  $K$  (resp.  $H$ ) soit diagonale et  $E$  soit strictement triangulaire supérieure, et on obtient alors la forme suivante des générateurs :

$$E \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K \mapsto \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & kq^{-2} \end{pmatrix}, \quad (\text{resp. } H \mapsto \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h-2 \end{pmatrix}), \quad F \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix},$$

et il reste seulement à vérifier  $[E, F] = \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}$  (resp.  $[E, F] = \frac{e^{\alpha H} - e^{-\alpha H}}{q-q^{-1}}$ ). Ici, cela nous donne les équations suivantes :

$$\begin{cases} x(q - q^{-1}) = k - k^{-1} \\ -x(q - q^{-1}) = kq^{-2} - k^{-1}q^2 \end{cases}, \quad \text{resp.} \quad \begin{cases} x(q - q^{-1}) = q^h - q^{-h} \\ -x(q - q^{-1}) = q^h q^{-2} - q^{-h} q^2 \end{cases},$$

et donc on voit bien que l'on a dans le premier cas  $k = \pm q$ , et  $x = \pm 1$ , et dans le second cas  $h = 1$ , et  $x = 1$ , ce qui explique le signe  $\sigma$ . Pour  $\mathfrak{gl}(1|1)$ , on reproduit le même raisonnement avec :

$$X^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad (\text{resp. } I = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}), \quad X^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix},$$

et la relation  $\{X^+, X^-\} = \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}$  (resp.  $\{X^+, X^-\} = \frac{e^{\alpha I} - e^{-\alpha I}}{q-q^{-1}}$ ) donne :

$$\begin{cases} x(q - q^{-1}) = k - k^{-1} \\ x(q - q^{-1}) = k - k^{-1} \end{cases}, \quad \text{resp.} \quad \begin{cases} x(q - q^{-1}) = q^h - q^{-h} \\ x(q - q^{-1}) = q^h - q^{-h} \end{cases},$$

ce qui nous permet seulement d'exprimer  $x$  en fonction de  $k$  (resp.  $h$ ) (lorsque l'on n'est pas dans un cas pathologique  $k = \pm 1$ , resp.  $h = 0$ ). La présence d'un anti-commutateur, (et aussi d'un élément central dans la relation d'anti-commutation ( $I$  ou  $K$ )) fait que là où il y avait deux équations pour  $\mathfrak{sl}(2)$ , il n'y en a plus que une pour  $\mathfrak{gl}(1|1)$ , et le signe  $\sigma$  disparaît. Comme résultat, il y a absence de doublage des représentations entre  $U_\alpha(\mathfrak{gl}(1|1))$  et  $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$ .

## 5.2 Twists vers les déformations non-standards de $U(\mathfrak{gl}(1|1))$

Nous savons que il existe des  $R$ -matrices (numériques) de type  $GL(1|1)$  qui ne peuvent pas être obtenues à partir de la standard par les opérations suivantes : pour une matrice  $\hat{R}$  agissant sur  $V \otimes V$ , la transposition, l'inversion, les changements de base de  $V \otimes V$  induits par ceux de  $V$  (donc pas les changements de base arbitraires de  $V \otimes V$ ), l'opération  $\hat{R} \mapsto \hat{R}_{21}$  et la multiplication scalaire  $\hat{R} \mapsto c\hat{R}$ . Les matrices de type  $GL(1|1)$  (rappelons que l'on demande que elles soient semi-simples, que elles possèdent un inverse et un inverse gaucher) sont, aux opérations précédentes près, la matrice (10) et les matrices suivantes (voir [24]) :

$$\hat{R}^I(\epsilon) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & \epsilon q^{-1} & 0 \\ 0 & \epsilon q & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\hat{R}^{II} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q - q^{-1} + 2 & 0 & 0 & q - q^{-1} \\ 0 & q - q^{-1} & q + q^{-1} & 0 \\ 0 & q + q^{-1} & q - q^{-1} & 0 \\ q - q^{-1} & 0 & 0 & q - q^{-1} - 2 \end{pmatrix}, \quad (12)$$



où  $\epsilon^2 = 1$  et  $r \neq 0$ .  $\hat{R}^I(\epsilon)$  est en fait une matrice à un paramètre, le  $r$  en haut à droite est complètement libre : en fait on peut lui donner n'importe quelle valeur par un changement de base diagonal de  $V$ . Il est commode de garder quand même le  $r$  non-fixé pour le twist et également pour pouvoir prendre la limite  $r \rightarrow 0$ . De plus,  $\hat{R}^I(\epsilon)$  pour  $\epsilon = 1$  et  $\epsilon = -1$  sont reliées de la manière suivante :

$$\hat{R}^t(q, \epsilon) = (\pi \otimes \pi)(\hat{R}(-q^{-1}, -\epsilon))_{21}(\pi^{-1} \otimes \pi^{-1}), \quad \text{où } \pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Le changement de base  $\pi$  de  $V$  envoie la partie paire à la partie impaire :  $V_0 \oplus V_1 \xrightarrow{\pi} V_1 \oplus V_0$ . Ainsi,  $\hat{R}^I$  pour  $\epsilon = 1$  et pour  $\epsilon = -1$  proviennent de la même matrice universelle, mais prise dans des représentations différentes de dimension 2. Ces 2 représentations ne sont pas isomorphes si on ne considère que des changements de base qui respectent la parité :  $\pi$  envoie  $V$  à  $\Pi V$ , où  $\Pi$  est le foncteur de changement de parité.

L'objectif de cette section est dans un premier temps d'affiner la classification ci-dessus en regardant si ces matrices  $R$  "différentes" appartiennent à la même classe d'équivalence à un twist (numérique) près. Si c'est le cas, alors on pourra aller plus loin : ces deux nouvelles matrices sont reliées à des déformations non-standards de  $U(\mathfrak{gl}(1|1))$ , que l'on notera respectivement  $U_{q,r}^I(\mathfrak{gl}(1|1))$  et  $U_q^{II}(\mathfrak{gl}(1|1))$ . La question qui se posera alors est de savoir si on peut obtenir ces déformations à partir de la standard par un twist universel.

Avec une étude numérique (voir section précédente), on peut constater que il n'existe pas de paire  $(\hat{R}, \hat{F})$  compatible permettant d'obtenir ces déformations. Par contre, on peut trouver des twists généralisés numériques, ce qui laisse donc la possibilité d'en trouver au niveau universel.

### 5.3 Twist vers $U_{q,r}^I(\mathfrak{gl}(1|1))$

On décide de poser comme Ansatz pour le twist que dans la limite où  $q$  tend vers 1 et  $r$  tend vers 0, il doit être égal à l'identité (car  $\hat{R}^I$  et  $\hat{R}$  standard tendent toutes 2 vers  $P$ ), et que il dépend analytiquement des paramètres. Comme l'identité est un élément pair, le twist doit être pair aussi. Dans ce cas, l'étude numérique révèle que il y a un grand nombre de twists pairs possibles. En toute généralité, nous écrivons un élément de l'algèbre universelle qui respecte la parité comme :

$$f_0 1 \otimes 1 + f_1 X^+ \otimes X^+ + f_2 X^- \otimes X^- + f_3 X^+ X^- \otimes X^+ X^- + f_4 X^+ \otimes X^- + f_5 X^- \otimes X^+ + f_6 X^+ X^- \otimes 1 + f_7 1 \otimes X^+ X^-,$$

où les  $f_i$  sont des fonctions des variables qui commutent  $H \otimes 1$ ,  $1 \otimes H$ ,  $I \otimes 1$  et  $1 \otimes I$  à valeurs dans  $U_\alpha(\mathfrak{gl}(1|1)) \otimes U_\alpha(\mathfrak{gl}(1|1))$ . Il faut donc trouver des conditions sur les  $f_i$  telles que les conditions de twist soient vérifiées. Rappelons que des conditions suffisantes (voire section sur les twists) sont l'équation de cocycle  $F_{12}(\Delta \otimes id)(F) = F_{23}(id \otimes \Delta)(F)$  qui a lieu dans  $U_\alpha(\mathfrak{gl}(1|1)) \otimes U_\alpha(\mathfrak{gl}(1|1)) \otimes U_\alpha(\mathfrak{gl}(1|1))$  et la condition  $(\epsilon \otimes id)(F) = (id \otimes \epsilon)(F) = 1$  qui est un choix de normalisation permettant de garder la même co-unité dans la nouvelle algèbre de Hopf.

Ici, l'objet n'est absolument pas d'établir une classification des éléments vérifiant ces conditions, mais d'en trouver un permettant d'obtenir l'algèbre déformée (non-standard)  $U_{q,r}^I(\mathfrak{gl}(1|1))$  correspondant à la matrice (11)  $\hat{R}^I$ . Il est donc naturel et plus économe d'en utiliser un le plus simple possible. Il s'avère que il en existe un (en fait plusieurs) tel que  $f_i = 0$  pour  $i \neq 0, 1$ . Nous proposons donc :

**Proposition 5.4.** *La déformation de  $U(\mathfrak{gl}(1|1))$  ayant une structure d'algèbre de Hopf quasi-triangulaire de matrice  $R$ -universelle qui est représentée par  $\hat{R}^I$  dans la représentation fondamentale peut être obtenue par le twist universel suivant :*

$$F = e^{-\frac{\alpha}{2}H \otimes I} (1 \otimes 1 + \frac{r}{q+q^{-1}} X^+ \otimes e^{\alpha I} X^+).$$

**Preuve :** Il est facile de vérifier que cet élément vérifie les conditions de twist, il est représenté par la matrice numérique suivante, et donne par la formule  $\tilde{R} = F_{21} R F^{-1}$  une nouvelle  $R$ -matrice numérique :

$$F = \begin{pmatrix} q^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 & -q^{\frac{1}{2}} \frac{r}{q+q^{-1}} \\ 0 & q^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & q^{-1} & 0 \\ 0 & q & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}.$$

Cette nouvelle matrice est exactement  $\hat{R}^I$  (11).  $\square$

Nous avons donc atteint un premier objectif, qui est d'exhiber un twist de la déformation standard de  $U(\mathfrak{gl}(1|1))$  vers une autre déformation (non-isomorphe bien entendue), qui correspond à une des deux solutions non-standards de type  $GL(1|1)$  de l'équation de Yang-Baxter.

**Remarque :** Cette matrice  $\hat{R}^I$  (11) n'est pas de type glace, en raison du coefficient en haut à droite. Rappelons que être de type glace pour une matrice  $R$  signifie que elle envoie  $e_i \otimes e_j$  à une combinaison linéaire de  $e_k \otimes e_l$  où  $\{k, l\}$  est égal à  $\{i, j\}$  en tant que ensemble. Pour les matrices  $2^2 \times 2^2$ , cela signifie que elle doit être de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Le nombre d'étoiles explique le nom de *six vertex models* donné aux modèles statistiques construits à partir d'une matrice de cette forme. L'Ansatz de la glace au niveau universel s'exprime par le fait que  $R$  universel doit être un élément de degré 0 par rapport à la  $\mathbb{Z}^l$ -graduation avec  $l$  le rang de l'algèbre de Lie, ce qui est le cas pour la déformation standard (rappelons que la graduation dans le carré tensoriel est donnée par  $gr(Y \otimes Z) = gr(Y) + gr(Z)$ ). Par contre, si l'on relaxe l'hypothèse de la glace en demandant seulement que la  $\mathbb{Z}_2$ -graduation (super-graduation) soit respectée, alors une matrice peut être de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & * \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ * & 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

ce qui est le cas de  $\hat{R}^I$  et  $\hat{R}^{II}$ . Les matrices de cette forme donnent les *eight vertex models*. Cela nous informe que au niveau universel,  $X^+ \otimes X^+$  ou  $X^- \otimes X^-$  doivent apparaître dans le twist car ce sont

les seuls éléments dans le carré tensoriel qui sont pairs, mais qui ne sont pas de degré 0 par rapport à la  $\mathbb{Z}$ -graduation. Ainsi, notre choix de twist est réellement le plus simple possible ; il en existe un autre dont la simplicité est équivalente en choisissant  $X^- \otimes X^-$  qui donne simplement au niveau numérique  $R^t$ .

Nous avons donc tous les ingrédients pour construire explicitement  $U_{q,r}^I(\mathfrak{gl}(1|1))$ . C'est le twist de  $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$  par  $F$ . Sa structure d'algèbre de Hopf quasi-triangulaire est, en vertu du théorème sur les twists (4.1),  $\Delta^I(x) = F\Delta(x)F^{-1}$ ,  $S(x)^I = vS(x)v^{-1}$  où  $v = m(id \otimes S)(F)$  et  $R^I = F_{21}RF^{-1}$ . Rappelons que la structure d'algèbre reste inchangée par un twist. Ce qui nous donne explicitement :

$$\begin{aligned} \Delta^I(I) &= I \otimes 1 + 1 \otimes I, \quad \Delta^I(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H - \frac{4r}{q+q^{-1}}X^+ \otimes X^+, \quad \Delta^I(X^+) = X^+ \otimes 1 + 1 \otimes X^+, \\ \Delta^I(X^-) &= X^- \otimes K + K^{-1} \otimes X^- + \frac{r}{q^2-q^{-2}}(K^{-1}X^+ \otimes (K - K^{-1}) - (K - K^{-1}) \otimes KX^+). \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} S^I(X^+) &= -X^+, \quad S^I(X^-) = -X^-, \quad S^I(H) = -H, \quad S^I(I) = -I. \\ R^I &= e^{\alpha H \otimes I}(1 \otimes 1 - X^+ \otimes (1 + K^{-2})X^+ - (q - q^{-1})X^+ \otimes K^{-1}X^-), \end{aligned}$$

où l'on a noté  $K = e^{\alpha I}$ . Cet élément est central car  $I$  l'est, et de type groupe :  $\Delta(K) = \Delta^I(K) = K \otimes K$ .

Maintenant, dans un souci de cohérence, nous allons vérifier que l'algèbre de Hopf  $U_{q,r}^I(\mathfrak{gl}(1|1))$  obtenue est isomorphe à celle que l'on obtient lorsque l'on applique la méthode de Faddeev-Reshetikhin-Takhtajan (FRT) à la matrice  $R^I (= P\hat{R}^I)$ . Rappelons que cette méthode permet, à partir d'une matrice numérique de type  $GL(1|1)$  vérifiant l'équation de Yang-Baxter  $R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$ , d'obtenir un  $q$ -analogue de l'algèbre de Hopf  $Fun(GL(1|1))$  des fonctions sur  $GL(1|1)$ . Ensuite, on obtient un  $q$ -analogue de  $U(\mathfrak{gl}(1|1))$  en prenant l'algèbre de Hopf duale à celle obtenue précédemment. Dans le cas d'une superalgèbre de Lie, on applique plutôt une généralisation de la méthode FRT, qui consiste à utiliser une paire  $(\hat{R}, \hat{F})$  compatible ([14], [15]), et à prendre ici  $\hat{F} = P$  la super-permutation (on retrouve la méthode FRT "classique" en prenant  $\hat{F}$  comme la permutation classique).

Par exemple, lorsque l'on applique ce formalisme à la matrice  $R$  standard de type  $GL(1|1)$  (9), on retrouve bien la déformation standard de  $U(\mathfrak{gl}(1|1))$  (donnée en (8)). Une étude complète des résultats que l'on obtient pour les 3 matrices de type  $GL(1|1)$  (10), (11) et (12) se trouve dans [8]. On constate d'ailleurs que la méthode  $FRT$  est directe, mais que les calculs peuvent être techniques et couteux lors du processus de dualisation.

Dans le cas qui nous intéresse ici, pour la matrice  $\hat{R}^I$  (11), le résultat est le suivant (à partir de l'article [8], nous avons remplacé  $q$  par  $q^2$  et  $r$  par  $\frac{r}{q}$  afin d'avoir la même matrice  $R$  de départ que (11)) : La déformation de  $U(\mathfrak{gl}(1|1))$  obtenue est notée  $\hat{U}_{1,2}$  et est engendrée par  $D, A, B$  et  $C$ , vérifiant :

$$[A, D] = 0, \quad [A, B] = -[D, B] = B, \quad [A, C] = -[D, C] = -C - \frac{2rq}{q^4 - 1}(K^2 - q^2)B, \quad \text{où } K = e^{\alpha(D+A)},$$

$$\{B, B\} = 0, \quad \{C, C\} = \frac{-2rq^2}{(q^4 - 1)(q^2 - 1)}(K^2 - 1)(K^2 - q^2), \quad \{B, C\} = \frac{K^2 - 1}{q^2 - 1}.$$

Le coproduit des générateurs est donné par :

$$\Delta(D) = 1 \otimes D + D \otimes 1 - \frac{2rq}{q^2 + 1}B \otimes B, \quad \Delta(A) = 1 \otimes A + A \otimes 1 + \frac{2rq}{q^2 + 1}B \otimes B,$$

$$\Delta(B) = 1 \otimes B + B \otimes 1, \quad \Delta(C) = 1 \otimes C + C \otimes K^2 - \frac{rq}{q^2 - 1} B \otimes (K^2 - 1).$$

**Proposition 5.5.**  $U_{q,r}^I(\mathfrak{gl}(1|1))$  est isomorphe à  $U_{1,2}$  en tant que superalgèbres de Hopf avec l'isomorphisme suivant :

$$I \mapsto D + A, \quad H \mapsto D - A, \quad X^+ \mapsto B, \quad X^- \mapsto qK^{-1}\left(C + \frac{rq}{q^4 - 1}(K^2 - q^2)B\right).$$

**Preuve :** Il faut prouver que les générateurs  $I, H, X^+$  et  $X^-$  vérifient la structure d'algèbre de Hopf de  $U_{q,r}^I(\mathfrak{gl}(1|1))$ . C'est-à-dire que ils doivent vérifier la structure d'algèbre (8) et leur coproduit doit être (13). C'est un calcul direct, qui est un peu lourd seulement pour vérifier le coproduit de  $X^-$ .  $\square$

## 5.4 Twist vers $U_q^{II}(\mathfrak{gl}(1|1))$

Il s'avère que la recherche d'un twist dans ce cas est plus délicate. Il se produit des choses surprenantes que nous allons analyser en détail. Nous allons ainsi bien séparer l'approche numérique de la recherche du twist universel.

### 5.4.1 Twists numériques

Nous avons essayé de raffiner au mieux la recherche d'un twist numérique. Rappelons que un twist numérique "généralisé" sera la donnée d'une matrice  $4 \times 4$   $F$ , et de deux matrice  $8 \times 8$   $A$  et  $B$  vérifiant (voir la section sur les twists : on utilise la version "avec chapeau") :

$$\hat{R}^{II} = \hat{F}\hat{R}\hat{F}^{-1}, \quad \hat{F}_{23}\hat{A}_{123} = \hat{F}_{12}\hat{B}_{123}, \quad \hat{R}_{23}\hat{A}_{123} = \hat{A}_{123}\hat{R}_{12}, \quad \hat{R}_{12}\hat{B}_{123} = \hat{B}_{123}\hat{R}_{23}, \quad (14)$$

où  $\hat{R}$  est la matrice  $R$  standard (9). Comme précédemment, nous cherchons tout d'abord un twist pair, c'est-à-dire que  $F$  (resp.  $A$  et  $B$ ) doit être de la forme :

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & * \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ * & 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & * & 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 & * \\ * & 0 & 0 & * & 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 & * \\ * & 0 & 0 & * & 0 & * & * & 0 \\ * & 0 & 0 & * & 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Pour affiner un peu, nous introduisons des équations en plus qui viennent de la remarque suivante. En toute généralité, un élément pair au niveau universel s'écrit comme :

$$f_0 1 \otimes 1 + f_1 X^+ \otimes X^+ + f_2 X^- \otimes X^- + f_3 X^+ X^- \otimes X^+ X^- + f_4 X^+ \otimes X^- + f_5 X^- \otimes X^+ + f_6 X^+ X^- \otimes 1 + f_7 1 \otimes X^+ X^-,$$

où  $f_i$  sont des fonctions de  $H \otimes 1, 1 \otimes H, I \otimes 1$  (ou  $K \otimes 1$ ) et  $1 \otimes I$  (ou  $1 \otimes K$ ). Alors, on peut calculer  $(\Delta \otimes id)(F)$  et  $(id \otimes \Delta)(F)$  en utilisant cette expression qui est la plus générale possible. Ensuite, on regarde au niveau numérique les résultats obtenus, et on constate que dans les matrices  $8 \times 8$  obtenues, il y a des égalités entre certains coefficients. Cela signifie que pour que les matrices  $A$

et  $B$  puissent représenter respectivement  $(\Delta \otimes id)(F)$  et  $(id \otimes \Delta)(F)$  avec  $F$  pair, il y a des conditions sur les coefficients, ce qui nous donne quelques équations à ajouter à (14).

Ainsi, une solution générale pour  $F$  à une constante multiplicative près de (14) est :

$$F = \begin{pmatrix} -(1+q)^2 x(qx+y) & 0 & 0 & \frac{-1+q}{1+q} \\ 0 & y & x+q^2x+qy & 0 \\ 0 & 2qx+y & (-1+q^2)x+qy & 0 \\ (-1+q^2)x(qx+y) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

où  $x \neq 0$  et  $y$  sont des paramètres libres tant que  $F$ ,  $A$  et  $B$  restent inversibles ( $qx+y \neq 0$ ). Les matrices  $A$  et  $B$  correspondant à  $F$  sont données en annexe. Elles sont assez compliquées, mais l'information que l'on tire de cette étude est principalement la présence des dénominateurs dans  $A$  et  $B$  de la forme  $(1+q^2)$ . Ils ne sont pas dans  $F$ , et ne sont donc pas seulement des constantes dans le twist universel. Cela semble indiquer la présence de polynômes en  $K = e^{\alpha I}$  dans des dénominateurs, ce qui sera corroboré plus bas dans la recherche du twist universel. En tout cas, on peut déjà s'attendre à ce que le twist ne ressemble pas du tout au twist permettant d'obtenir  $U_{q,r}^I(\mathfrak{gl}(1|1))$ .

Avant de passer à l'étude universelle, nous allons présenter une deuxième approche numérique, qui part de la constatation suivante : les trois matrices de type  $GL(1|1)$  non-standards qui sont  $R_{q,r,\epsilon}^I$  pour  $\epsilon = 1$  et  $\epsilon = -1$ , ainsi que  $R_q^{II}$ , peuvent être uniformément décrites par une même formule dans laquelle seul un paramètre varie. Le prix à payer est que elles ne respectent plus la parité, comme dans (11) et (12). Il est prouvé dans [24] que la matrice suivante est une solution semi-simple, ayant un inverse et un inverse gaucher, de type  $GL(1|1)$  de l'équation de Yang-Baxter :

$$\hat{R}_{q,\omega,\gamma}^{(16)} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & -q^{-1} & 0 & 1/\gamma \\ \gamma/\omega & 0 & -q^{-1} & \omega/\gamma \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \quad (16)$$

où  $\gamma$  est un nombre arbitraire non-nul, et  $\omega = q^{-2}, 1, q^2$ . Les 3 valeurs de  $\omega$  correspondent aux 3 différentes matrices dans (11) et (12) par les changements de base suivants :

$$\hat{R}_{q,\omega=q^2,\gamma}^{(16)} T \otimes T = T \otimes T \hat{R}_{q,\epsilon=1}^I, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma q^{-1} & -\gamma q^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$\hat{R}_{q,\omega=q^{-2},\gamma}^{(16)} T \otimes T = T \otimes T (\hat{R}_{q,\epsilon=1}^I)_{21}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma q & -\gamma q \end{pmatrix}.$$

$$\hat{R}_{q,\omega=1,\gamma}^{(16)} T \otimes T = T \otimes T \hat{R}_q^{II}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ \gamma & -\gamma\tau \end{pmatrix}, \quad \text{où } \tau^2 = \frac{q-1}{q+1}.$$

On a déjà vu que  $(\hat{R}_{q,\epsilon=1}^I)_{21}$  était relié à  $\hat{R}_{q,\epsilon=-1}^I$ .

On peut donc chercher un twist numérique de  $\hat{R}_{q,\omega=q^2,\gamma}^{(16)}$  vers  $\hat{R}_{q,\omega=1,\gamma'}^{(16)}$ , cela correspondra à un twist de  $U_{q,r}^I(\mathfrak{gl}(1|1))$  vers  $U_q^{II}(\mathfrak{gl}(1|1))$ . De plus, les matrices (16) apparaissent dans [28] lors de la recherche

de solutions de l'équation de Yang-Baxter, lorsque l'on relâche un peu l'hypothèse de la glace (voir remarque plus haut). Ces matrices sont appelées de type "givre", elles obéissent à l'Ansatz du givre, qui correspond à la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

On voit donc que dans l'Ansatz du givre, la description de toutes les matrices non-standards de type  $GL(1|1)$  est harmonieuse. Il est donc raisonnable de penser que le givre a un sens profond, mais pour l'instant nous ne connaissons pas sa contre-partie universelle. Néanmoins, la question naturelle est alors de se demander s'il existe un twist à la fois pair et de type givre qui envoie  $\hat{R}_{q,\omega=q^2,\gamma}^{(16)}$  vers  $\hat{R}_{q,\omega=1,\gamma}^{(16)}$ .

Nous allons répondre à cette question, mais nous avons fait l'étude pour un twist de  $\hat{R}_{q,\omega=1,\gamma}^{(16)}$  vers  $\hat{R}_{q,\omega=q^2,\gamma}^{(16)}$ , ce qui est équivalent bien entendu (il suffira de prendre l'inverse). Pour répondre à cette question, il faut tout d'abord comprendre ce que cela signifie d'être pair dans la base du givre de  $\hat{R}_{q,\omega=1,\gamma}^{(16)}$  et dans celle de  $\hat{R}_{q,\omega=q^2,\gamma}^{(16)}$ . Pour cela, rappelons que dans le cas d'une base qui respecte la parité (cela signifie que l'on a  $V = V_0 \oplus V_1$  et la base est constituée d'une base de  $V_0$  et d'une base de  $V_1$ ), la parité d'un élément est mesurée par la matrice :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dans le sens où les vecteurs pairs (resp. impairs) sont les  $v$  tels que  $\pi v = v$  (resp.  $\pi v = -v$ ). Pour les matrices, les matrices paires (resp. impaires) sont celles telles que  $\pi X \pi^{-1} = X$  (resp.  $\pi X \pi^{-1} = -X$ ). Il faut savoir alors que devient  $\pi$  dans la base "givrée" de  $\hat{R}_{q,\omega=1,\gamma}^{(16)}$ , et dans la base "givrée" de  $\hat{R}_{q,\omega=q^2,\gamma}^{(16)}$  à l'aide des changements de base ci-dessus. Notons que l'on peut fixer le  $\gamma$  de  $\hat{R}_{q,\omega=1,\gamma}^{(16)}$  à 1 par exemple, mais du coup on doit laisser libre le  $\gamma$  de  $\hat{R}_{q,\omega=q^2,\gamma}^{(16)}$ . Les matrices de parité deviennent respectivement :

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{-1}q \\ \gamma q^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

La condition que  $\hat{F}$  soit pair dans la base de  $\hat{R}_{q,\omega=1,\gamma}^{(16)}$  ( $\pi_1 \hat{F} \pi_1^{-1} = \hat{F}$ ) et givré donne pour  $\hat{F}$  la forme suivante :

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ z_5 & z_4 & z_3 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & z_1 \end{pmatrix}.$$

Il faut donc prendre un  $\hat{F}$  de cette forme, pour chercher une solution de (14). Il se passe ici quelque chose de remarquable lorsque l'on résout l'équation  $\hat{R}_{q,\omega=q^2,\gamma}^{(16)} = \hat{F} \hat{R}_{q,\omega=1,\gamma=1}^{(16)} \hat{F}^{-1}$  : le  $\gamma$  que l'on avait laissé libre dans  $\hat{R}_{q,\omega=q^2,\gamma}^{(16)}$  est complètement fixé par cette équation, et doit prendre la valeur  $\gamma = q$ . Ceci fait que naturellement, au vu de  $\pi_1$  et  $\pi_2$ , la parité est une notion qui coïncide dans les bases givrées de  $\hat{R}_{q,\omega=q^2,\gamma}^{(16)}$  et de  $\hat{R}_{q,\omega=1,\gamma}^{(16)}$ .

Finalement, la réponse est que un twist givré et pair existe, et nous en donnons un le plus simple possible :

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & -\frac{(-1+q)q(1+q)}{1+q^2} \\ -\frac{(-1+q)q(1+q)}{1+q^2} & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Nous pouvons donner cette fois-ci  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  sans avoir recours à une annexe et sans décourager le lecteur de les regarder. En effet, on a vu (section sur les twists numériques) que un cas particulier de twist numérique était lorsque  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  et  $\hat{F}$  vérifie :  $\hat{A} = \hat{F}_{12}\hat{F}_{23}$  et  $\hat{B} = \hat{F}_{23}\hat{F}_{12}$  (nous avons appelé cette situation une paire  $(\hat{R}, \hat{F})$  compatible). Nous allons donc seulement donner la différence avec le cas d'une paire compatible, ce qui prend ici une forme simple remarquable :

$$\hat{A} - \hat{F}_{12}\hat{F}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q^5 & 0 & q^4 & 0 & q^4 & 0 & -q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q^3 & 0 & q^2 & 0 & q^2 & 0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} - \hat{F}_{23}\hat{F}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q^5 & 0 & q^4 & 0 & q^4 & 0 & -q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q^5 & 0 & q^2 & 0 & q^4 & 0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En conclusion de notre étude numérique, nous avons dans un premier temps trouvé un twist numérique de la matrice  $R$  standard vers  $\hat{R}^{II}$ , ce qui avec les sections précédentes répond à la question de la classification des matrices  $4 \times 4$  de type  $GL(1|1)$  à un twist près (on rappelle que les twists induisent bien une relation d'équivalence) :

**Théorème 5.6.** *A un twist près, les matrices  $4 \times 4$  solutions de l'équation de Yang-Baxter de type  $GL(1|1)$  (c'est-à-dire qui sont semi-simples, ayant un inverse et un inverse gaucher, et de spectre  $\{q, q, -q^{-1}, -q^{-1}\}$ ) sont toutes obtenues avec une solution, qui est la matrice standard à 1 paramètre essentiel (9) :*

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}.$$

De plus, nous avons également montré que dans le cadre de l'Ansatz du givre, les matrices non-standard de type  $GL(1|1)$  sont reliées par un twist, qui en plus d'être pair est également de type givre lui aussi. Sous cette forme-là, le twist  $\hat{F}$  et les matrices  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  sont donnés assez simplement.

### 5.4.2 Recherche d'un twist universel

Rappelons :

$$\hat{R}^{II} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q - q^{-1} + 2 & 0 & 0 & q - q^{-1} \\ 0 & q - q^{-1} & q + q^{-1} & 0 \\ 0 & q + q^{-1} & q - q^{-1} & 0 \\ q - q^{-1} & 0 & 0 & q - q^{-1} - 2 \end{pmatrix}.$$

On peut commencer la recherche d'un twist universel en posant comme avant :

$$F = f_0 1 \otimes 1 + f_1 X^+ \otimes X^+ + f_2 X^- \otimes X^- + f_3 X^+ X^- \otimes X^+ X^- + f_4 X^+ \otimes X^- + f_5 X^- \otimes X^+ + f_6 X^+ X^- \otimes 1 + f_7 1 \otimes X^+ X^-,$$

et en essayant de résoudre pour ce  $F$  complètement général la condition de twist (rappelons-la encore une fois :  $F_{12}(\Delta \otimes id)(F) = F_{23}(id \otimes \Delta)(F)$ ). Il faut commencer par faire des Ansatzes (annuler certains  $f_i$ ) au début vraiment forts, puis en les affaiblissant peu à peu. Ici, il faut remarquer que au vu de la forme de  $\hat{R}^{II}$ , il doit obligatoirement avoir  $f_1 \neq 0$  et  $f_2 \neq 0$ , en raison des coefficients non-nuls  $\hat{R}_1^4$  et  $\hat{R}_4^1$ .

En fait, nous l'avons fait en considérant que les  $f_i$  étaient des fonctions de  $K(=e^{\alpha I})$  "gentilles", en l'occurrence de la forme  $f_i = K^{x_i} \otimes K^{y_i}$ , mais aussi  $f_i = K^{x_i} \otimes K^{y_i} + K^{x'_i} \otimes K^{y'_i}$ . Sous cette forme-là, il y a une infinité de twist permettant d'obtenir la première déformation non-standard dont on a parlé avant. Seulement, nous n'en avons pas trouvé un seul ayant un terme en  $X^+ \otimes X^+$  et  $X^- \otimes X^-$  ( $f_1 \neq 0$  et  $f_2 \neq 0$ ).

Il est vraisemblable au vu de l'étude numérique précédente que les coefficients  $f_i$  ne sont peut-être pas des fonctions polynômiales en  $K$ , mais des fonctions plus compliquées impliquant sûrement des dénominateurs. On va donc essayer d'obtenir des informations sur le twist de la manière suivante. On a vu pour la déformation précédente que avec la méthode FRT on pouvait obtenir, à partir de la matrice  $\hat{R}^{II}$ , la structure d'algèbre de Hopf de  $U_q^{II}(\mathfrak{gl}(1|1))$ . On pourra donc connaître le coproduit que l'on doit obtenir par le twist, c'est-à-dire par la formule  $\Delta^{II} = F \Delta F^{-1}$ , où  $\Delta$  est le coproduit standard. C'est clair que cela nous donnera des restrictions sur  $F$  si l'on connaît  $\Delta^{II}$ .

### 5.4.3 Etude de l'algèbre obtenue par la méthode FRT

Le calcul par la méthode FRT a été effectué dans [8], et on donne ici le résultat et on notera l'algèbre de Hopf obtenue de cette manière  $U_{1,1}$  et elle correspond à la matrice que nous notons  $\hat{R}^{II}$ . L'algèbre  $U_{1,1}$  est engendrée par  $A, D, B$ , et  $C$  vérifiant :

$$[A, D] = 0, \quad \{B, B\} = \{C, C\} = -\frac{1}{2} \left( \frac{K^2 - 1}{q^2 - 1} - \frac{K^{-2} - 1}{q^{-2} - 1} \right), \quad \{B, C\} = \frac{1}{2} \left( \frac{K^2 - 1}{q^2 - 1} + \frac{K^{-2} - 1}{q^{-2} - 1} \right).$$

$$[A, B] = -[D, B] = \frac{1}{2} B + \frac{1}{4} (q^{-2} K^2 + q^2 K^{-2}) B + \frac{1}{4} (q^{-2} K^2 - q^2 K^{-2}) C,$$



$$[A, C] = -[D, C] = -\frac{1}{2}C - \frac{1}{4}(q^{-2}K^2 + q^2K^{-2})C - \frac{1}{4}(q^{-2}K^2 - q^2K^{-2})B.$$

où l'on a posé  $K = e^{\alpha(A+D)}$  qui est central car  $A + D$  l'est. Nous allons immédiatement faire un changement de base pour simplifier ceci :

**Proposition 5.7.** *En posant :*

$$X = q^{-1}K(B + C) + (B - C), \quad \text{et} \quad Y = (B + C) - qK^{-1}(B - C).$$

$U_{1,1}$  est engendré par  $A, D, X$  et  $Y$  vérifiant :

$$\begin{aligned} [A, D] = 0, \quad [A, X] = -[D, X] = xX, \quad [A, Y] = -[D, Y] = -xY, \\ \{X, X\} = \{Y, Y\} = 0, \quad \{X, Y\} = 4\frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}, \end{aligned} \quad (18)$$

où  $x = \frac{1}{2}(qK^{-1} + q^{-1}K)$ .

**Preuve :** Calcul direct. Il faut remarquer que :

$$\begin{aligned} [A, B+C] = -[D, B+C] = \frac{1}{2}(1+q^2K^{-2})(B-C), \quad [A, B-C] = -[D, B-C] = \frac{1}{2}(1+q^{-2}K^2)(B+C), \\ \{B+C, B-C\} = 0, \quad \{B+C, B+C\} = 2\frac{K^{-2}-1}{q^{-2}-1}, \quad \{B-C, B-C\} = -2\frac{K^2-1}{q^2-1}. \end{aligned}$$

Le résultat suit aisément.  $\square$

Le changement de base ci-dessus est parfaitement inversible. A partir de maintenant, nous considérerons que l'algèbre  $U_{1,1}$  est définie par (18).

Mais ce que l'on veut, c'est trouver un changement de base tel que dans la nouvelle base, la structure d'algèbre soit la même que la structure de la déformation standard. En effet, on sait que un twist ne modifie pas la structure d'algèbre, et donc pour que l'on puisse tirer quelque chose de  $U_{1,1}$ , il faut d'abord changer la base. On a le changement de base suivant évident en posant :

$$\tilde{K} = K, \quad H_1 = \frac{1}{x}A, \quad X^+ = \frac{1}{2}X, \quad X^- = \frac{1}{2}Y,$$

alors la structure de l'algèbre standard est vérifiée :

$$[\tilde{K}, H_1] = [\tilde{K}, X^\pm] = 0, \quad [H_1, X^\pm] = \pm X^\pm, \quad \{X^+, X^+\} = \{X^-, X^-\} = 0, \quad \{X^+, X^-\} = \frac{\tilde{K} - \tilde{K}^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

En raison de  $\tilde{K} = K$ , nous pouvons omettre le tilde. Remarquons que il y a un problème avec le changement de base ci-dessus : il fait intervenir un dénominateur  $x = \frac{1}{2}(qK^{-1} + q^{-1}K)$ , ce qui signifie que cet élément doit être inversible pour que il soit valable. Donc en fait, le résultat est que la sous-algèbre de la localisation de  $U_{1,1}$  par rapport à  $x$  engendrée par  $A/x, K, X$  et  $Y$  est isomorphe en tant que algèbre à l'algèbre standard. Cela serait un soulagement de pouvoir se passer d'un tel dénominateur ( $x$ ), nous allons prouver que l'on ne peut pas..

Tout d'abord étudions le centre de l'algèbre  $U_{1,1}$ , cela nous servira plusieurs fois :

**Proposition 5.8.** *Le centre de  $U_{1,1}$  est engendré par les 2 éléments suivants :*

$$Z = \langle K, \quad 4 \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} A - xXY \rangle.$$

**Preuve :** De même que dans le cas du centre de l'algèbre standard, il faut vérifier, à l'aide de (18), que ces deux éléments sont centraux, ce qui est presque immédiat, puis que tout le centre est obtenu avec ces deux là, ce qui revient à constater que il n'y a pas de fonctions polynômiales en  $A$  centrales.  $\square$

On va expliquer pourquoi on ne peut pas éviter les dénominateurs. Un élément bosonique (pair) quelconque de l'algèbre s'écrit :

$$\sum_i \alpha_i A^i + \beta,$$

où  $\alpha_i, \beta \in Z$  car  $D$  et  $XY$  qui engendrent avec  $A$  la partie bosonique (paire) se réécrivent en fonction d'éléments centraux et de  $A$ . Alors, soit :

$$X^+ = \mu X + \nu Y,$$

un élément fermionique quelconque, avec  $\mu$  et  $\nu$  éléments bosoniques quelconques (polynômes en  $A$  à coefficients dans  $Z$ ). Soit  $H_1$  un élément bosonique quelconque à addition par un élément central près :

$$H_1 = \sum_i \alpha_i A^i.$$

Nous cherchons en toute généralité à avoir  $[H_1, X^+] = X^+$ . On a :

$$A^n X = A^{n-1} X A + A^{n-1} x X = A^{n-1} X (A + x) = \dots = X (A + x)^n, \quad \text{et de même} \quad A^n Y = Y (A - x)^n.$$

donc un terme en  $A^n$  dans  $H_1$  implique un terme en  $\mu X A^{n-1}$  et un terme en  $\nu Y A^{n-1}$  dans  $[H_1, X^+]$ . Or ces termes ne sont pas dans  $X^+$  si  $n > 1$ , donc il vient que  $\alpha_n = 0$  si  $n > 1$  et donc  $H_1 = \alpha A$  et ainsi :

$$[H_1, X^+] = \alpha \mu x X - \alpha \nu x Y = \mu X + \nu Y, \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{x}, & \nu = 0 \\ \alpha = -\frac{1}{x}, & \mu = 0 \end{cases}$$

Ce qui montre que le dénominateur dans le changement de base ne peut pas être évité, on en revient donc au changement de base présenté plus haut.

La question se pose alors si la structure d'algèbre obtenue par la méthode FRT est rigoureusement isomorphe à la structure d'algèbre standard. Une possibilité de réponse est d'étudier la théorie des représentations de  $U_{1,1}$ , car si l'on trouve une représentation dans laquelle  $x = \frac{1}{2}(qK^{-1} + q^{-1}K)$  est dégénéré, alors l'isomorphisme sera impossible.

Étudions les représentations de  $U_{1,1}$ . On peut reproduire exactement le même raisonnement que dans le cas standard, excepté ici la présence de  $x$  dans  $A$ . On peut noter que  $\frac{1}{2}(qk_1^{-1} + q^{-1}k_1) = 0$  quand  $k_1 = iq$  ou  $k_1 = -iq$ , et pour ces valeurs là,  $A$  est central. On obtient la théorie des représentations suivante :

**Proposition 5.9.** *Les représentations irréductibles de  $U_{1,1}$  sont de deux types :*

- des représentations de dimension 2 labellées par 2 nombres complexes  $k_1$ , et  $c_2$  avec  $k_1 \neq 0, \pm 1$  et  $c_2$  arbitraires. En posant  $\mu_1 = 4 \frac{k_1 - k_1^{-1}}{q - q^{-1}}$ , les générateurs sont donnés par :

$$X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K \mapsto \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix}, \quad A \mapsto \begin{pmatrix} \frac{c_2}{\mu_1} + x & 0 \\ 0 & \frac{c_2}{\mu_1} \end{pmatrix}.$$

- des représentations de dimension 1, labellées par deux nombres complexes  $k_1$  et  $c$ , où  $k_1 \in \{-1, 1\}$  et  $c$  arbitraires, et où les générateurs sont donnés par :

$$X \mapsto 0, \quad Y \mapsto 0, \quad K \mapsto k_1, \quad A \mapsto c.$$

Il y a donc des représentations irréductibles dans lesquelles  $x = \frac{1}{2}(qk_1^{-1} + q^{-1}k_1)$  s'annule et donc  $U_{1,1}$  n'est pas exactement isomorphe à  $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$  en tant que algèbre, et ceci doit sans doute se refléter dans le twist universel.

Par contre, on a vu que il y a essentiellement un changement de base qui nous permet d'obtenir la structure d'algèbre standard, et c'est cette base qui nous intéresse car un twist ne change pas la structure d'algèbre. Dans cette nouvelle base de  $U_{1,1}$ , on peut calculer le coproduit des générateurs.

Pour cela, on part du coproduit obtenu par la méthode FRT qui est en terme de  $K, A, B, C$  (ici, nous signalons que nous avons dû corriger une petite faute dans [8]) :

$$\Delta K = K \otimes K, \quad \Delta A = 1 \otimes A + A \otimes 1 + \frac{1}{4}(q - q^{-1})((B - C) \otimes q^{-1}K(B + C) + (B + C) \otimes qK^{-1}(B - C)),$$

$$\Delta B = 1 \otimes B + \frac{1}{2}(B + C) \otimes K^{-1} + \frac{1}{2}(B - C) \otimes K, \quad \Delta C = 1 \otimes C + \frac{1}{2}(B + C) \otimes K^{-1} - \frac{1}{2}(B - C) \otimes K.$$

ce qui donne :

$$\Delta(B + C) = 1 \otimes (B + C) + (B + C) \otimes K^{-1}, \quad \Delta(B - C) = 1 \otimes (B - C) + (B - C) \otimes K.$$

En utilisant les formules  $(B + C) = \frac{1}{2}(qK^{-1}X + Y)$  et  $(B - C) = \frac{1}{2}(X - q^{-1}KY)$ , et  $X^+ = \frac{1}{2}X$ ,  $X^- = \frac{1}{2}Y$ , et  $H_1 = \frac{2A}{qK^{-1} + q^{-1}K}$ , on peut calculer :

**Proposition 5.10.** *Le coproduit de l'algèbre  $U_{1,1}$  donné en terme des générateurs  $K, H_1, X^+$  et  $X^-$  vérifiant la structure d'algèbre standard est :*

$$\Delta^H(K) = K \otimes K,$$

$$\Delta^H(X^+) = \frac{1}{2}((K + 1) \otimes X^+ + X^+ \otimes (K + 1) + (K - 1) \otimes q^{-1}KX^- + q^{-1}KX^- \otimes (1 - K)),$$

$$\Delta^H(X^-) = \frac{1}{2}((1 + K^{-1}) \otimes X^- + X^- \otimes (1 + K^{-1}) + (1 - K^{-1}) \otimes qK^{-1}X^+ + qK^{-1}X^+ \otimes (K^{-1} - 1)),$$

$$\Delta^H(H_1) = \frac{1}{qK^{-1} \otimes K^{-1} + q^{-1}K \otimes K}(1 \otimes (qK^{-1} + q^{-1}K)H_1 + (qK^{-1} + q^{-1}K)H_1 \otimes 1 + \frac{1}{2}(q - q^{-1})((X^+ - q^{-1}KX^-) \otimes (X^+ + q^{-1}KX^-) + (qK^{-1}X^+ + X^-) \otimes (qK^{-1}X^+ - X^-)).$$

Il est clair que les formules ci-dessus sont un peu brutales, mais néanmoins, elles donnent le coproduit que l'on devrait obtenir lorsque l'on fait le twist universel par la formule  $\Delta^H F = F \Delta$ .

#### 5.4.4 Retour vers le twist universel

D'après l'étude que l'on a faite dans les sections précédentes, on peut se replonger dans la recherche du twist universel. Rappelons que nous n'avons pas été capables d'en trouver un en faisant des Ansatzes simplificatrices. Alors, maintenant nous ne voulons plus perdre de généralités.

Commençons par exploiter la connaissance du centre de l'algèbre standard  $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$ . On sait que il est engendré par  $K$  et  $Z_2 = X^+X^- - \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}H_1$ . Ainsi, on peut maintenant écrire :

$$F = f_0 1 \otimes 1 + f_1 X^+ \otimes X^+ + f_2 X^- \otimes X^- + f_3 X^+ X^- \otimes X^+ X^- + f_4 X^+ \otimes X^- + f_5 X^- \otimes X^+ + f_6 X^+ X^- \otimes 1 + f_7 1 \otimes X^+ X^-,$$

où les  $f_i$  sont des fonctions de  $K \otimes 1, 1 \otimes K, Z_2 \otimes 1$  (à la place de  $H_1 \otimes 1$ ) et  $1 \otimes Z_2$  (à la place de  $1 \otimes H_1$ ). La nouveauté est que les  $f_i$  sont des éléments centraux, ce qui est bien pratique lorsque l'on résout des équations (on peut toujours les placer à gauche par exemple).

Puis l'étude de l'algèbre FRT précédente nous donne le coproduit que l'on devrait obtenir par la formule  $\Delta^{II}(x)F = F\Delta(x)$ , c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} \Delta^{II}(H_1).F = F.(H_1 \otimes 1 + 1 \otimes H_1), \\ \Delta^{II}(X^+).F = F.(X^+ \otimes K + 1 \otimes X^+), \\ \Delta^{II}(X^-).F = F.(X^- \otimes 1 + K^{-1} \otimes X^-), \end{cases}$$

on va avoir des conditions intéressantes sur  $F$ . Par exemple, on peut vérifier que en écrivant :

$$F(X^- \otimes 1 + K^{-1} \otimes X^-) = \frac{1}{2}((1+K^{-1}) \otimes X^- + X^- \otimes (K+K^{-2}) + (1-K^{-1}) \otimes qK^{-1}X^+ + qK^{-1}X^+ \otimes (K-K^{-2}))F,$$

et en regardant le terme en  $(1 \otimes X^-)$  et  $(X^- \otimes 1)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}(-f_1(1+K^{-1}) \otimes \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}} + f_0qK^{-1} \otimes (K^{-1}-1)), \\ 0 &= \frac{1}{2}(f_1 \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}} \otimes (1+K^{-1}) + f_0(1-K^{-1}) \otimes qK^{-1}). \end{aligned}$$

ce qui donne dans les deux cas :

$$f_1 = -q(q-q^{-1})f_0 \frac{K^{-1}}{1+K^{-1}} \otimes \frac{K^{-1}}{1+K^{-1}}$$

Ainsi, on connaît  $f_1$  en fonction de  $f_0$  et on constate la présence attendue de dénominateurs. Il faut ensuite regarder les autres équations (un peu plus compliquée), pour en déduire d'autres conditions sur les  $f_i$ , et il restera ensuite à résoudre  $F_{12}(\Delta \otimes id)(F) = F_{23}(id \otimes \Delta)(F)$ . En conclusion, le champs d'investigation pour le twist universel se resserre de plus en plus, il reste à trouver son expression exacte.

## 6 Bilan et perspectives

La question initiale que l'on s'est posée concernait la classification des solutions  $4 \times 4$  de l'équation de Yang-Baxter. Ces solutions étaient rangées par classe d'équivalence selon les transformations usuelles,

qui sont la multiplication par un scalaire, la transposition, l'inversion, la permutation, les redéfinitions des paramètres et les changements de base dans l'espace  $V$  (les matrices  $R$  agissent sur  $V \otimes V$ ). Dans ces conditions-là, il y a 5 (classes de) matrices distinctes, qui sont semi-simples, inversibles et ayant un inverse gaucher, dont 2 de type  $GL(2)$  et 3 de type  $GL(1|1)$  ([24]). Dans le but de "ranger" un peu plus ces matrices, on peut considérer un autre type de transformation, que l'on appelle les twists, qui proviennent de la théorie des groupes quantiques. Que ce soit au niveau numérique ou universel, ils induisent une relation d'équivalence, ce qui donne un sens au fait de classifier les matrices  $R$  par classe d'équivalence à un twist près. Au début de ce travail, il était déjà connu que à un twist près, les solutions de type  $GL(2)$  étaient toutes équivalentes à une matrice avec un paramètre essentiel (la matrice standard).

Nous avons montré maintenant que il en est de même pour les 3 matrices de type  $GL(1|1)$ . Ainsi, en prenant en compte la possibilité de faire des twists, la classification des solutions de l'équation de Yang-Baxter en dimension 2 est donnée par :

$$\begin{aligned}
- \text{ La matrice } \hat{R} \text{ standard de type } GL(2) : \hat{R}^{GL(2)} &= \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}. \\
- \text{ La matrice } \hat{R} \text{ standard de type } GL(1|1) : \hat{R}^{GL(1|1)} &= \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On voit donc ici que les twists relient entre elles les matrices d'un même type. La question qui vient alors naturellement est : qu'en est-il en dimension 3 ? La classification (sans les twists) pour les matrices de type  $GL(3)$  a été obtenue dans [5], elle est assez complexe et cela serait intéressant de la connaître à un twist près, ce qui mettrait sans doute un peu plus d'ordre. Notons que il a déjà été prouvé que 2 de ces matrices de type  $GL(3)$  sont reliées par un twist ([21]), la matrice standard de Drinfeld-Jimbo et la matrice dite de Fronsdal-Galindo.

Par ailleurs, on connaît maintenant des twists numériques entre les matrices de type  $GL(1|1)$ , c'est donc une forte indication de l'existence de twists universels d'algèbres de Hopf qui relierait les déformations de  $U(\mathfrak{gl}(1|1))$  correspondant à chacune de ces matrices. Nous avons trouvé le twist universel correspondant au premier twist numérique, et nous avons obtenu des informations sur le deuxième, notamment en étudiant l'algèbre obtenue par la méthode FRT à partir de la deuxième matrice non-standard (en particulier son centre, ses représentations et ses changements de base vers l'algèbre standard). Pour le twist universel que nous avons obtenu, on peut noter que il n'est pas "triangulaire" dans le sens où  $F_{21} \neq F^{-1}$ . De plus ce twist est très différent des twists associés aux triplets de Belavin-Drinfeld (voir [13]).

La connaissance du twist universel nous permet de connaître un twist numérique dans toutes les représentations, et pas seulement la fondamentale. Ce twist est également valable pour toutes les super-algèbres de Lie  $\mathfrak{g}$  qui contiennent  $\mathfrak{gl}(1|1)$ , telle que  $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$  soit une sous-algèbre de Hopf de  $U_q(\mathfrak{g})$ , et donnent lieu ainsi à toute une classe de nouveaux twists numériques reliant des matrices  $R$ . Il peut également servir à la construction explicite, à partir de la méthode de la diffusion quantique inverse, de nouveaux modèles intégrables correspondant aux matrices  $R$  twistées dans différentes représentations irréductibles.

La continuité immédiate de ce travail est évidemment, dans un premiers temps, de finir la recherche du deuxième twist universel. Puis, à partir des twists universels que l'on a obtenus pour  $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$ , essayer de comprendre comment les généraliser pour d'autres superalgèbres de Lie, par exemple  $\mathfrak{gl}(n|m)$ . On obtiendrait de nouveaux twists, et notamment des twists numériques dans chaque représentation irréductible, que l'on pourrait ainsi utiliser pour les applications précitées. Il permettrait également peut-être de relier entre elles des matrices  $R$  connues, et donnerait alors des informations sur les classifications à un twist près de ces matrices.

## A Annexes : Matrices de $A$ et $B$ dans la base qui respecte la parité

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & qa_1 & 0 \\ 0 & d_2 & a_5 & 0 & a_2 & 0 & 0 & -qa_1 \\ 0 & a_5 & d_3 & 0 & qa_2 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 & -qa_2 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & qa_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & -qa_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ qa_4 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -qa_4 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où l'on a posé :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{-1+q}{(1+q)(1+q^2)x} \\ a_2 = -\frac{(1+q)^2x+2y}{1+q^2} \\ a_3 = \frac{-(1+q-q^2+q^3)x+(-1+q-q^2)y}{(q+q^3)x} \\ a_4 = \frac{(-1+q)(1+q)(qx+y)((1+q)^2x+y)}{q+q^3} \\ a_5 = \frac{(x+qx+y)^2}{(1+q^2)x} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} d_1 = -\frac{(qx+y)((1+q)^2x+y)}{qx} \\ d_2 = -\frac{(1+q)^2(-1+q+q^3)x^2+(1+q+q^2)(-1+2q+q^2)xy+q^2y^2}{(q+q^3)x} \\ d_3 = -\frac{q(1+q)^2(1-q+q^2)x^2+(1+3q+q^3+q^4)xy+y^2}{(q+q^3)x} \\ d_4 = \frac{y-(1+q)((-1+q^2)x+qy)}{q} \end{array} \right.$$

$$B = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & q^{-1}b_1 & 0 \\ 0 & D_2 & b_2 & 0 & b_3 & 0 & 0 & -q^{-1}b_1 \\ 0 & b_4 & D_3 & 0 & q^{-1}b_4 & 0 & 0 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 & D_4 & 0 & -q^{-1}b_4 & b_6 & 0 \\ 0 & b_3 & q^{-1}b_2 & 0 & D_5 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-1}b_2 & 0 & -y & b_2 & 0 \\ q^{-1}b_5 & 0 & 0 & b_6 & 0 & b_4 & D_7 & 0 \\ 0 & -q^{-1}b_5 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où l'on a posé :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = \frac{(-1+q)q}{(1+q)(1+q^2)x} \\ b_2 = -\frac{(1+q+q^3+q^4)x+(1-q+q^2+q^3)y}{1+q^2} \\ b_3 = \frac{(x+qx+y)(q(1+q)x+y)}{(1+q^2)x} \\ b_4 = -\frac{q(2qx+y)}{(1+q^2)x} \\ b_5 = \frac{(-1+q)(1+q)(qx+y)((1+q)^2x+y)}{(1+q^2)} \\ b_6 = \frac{(-1+q)(x+qx+y)}{(1+q^2)x} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} D_1 = -\frac{(qx+y)((1+q)^2x+y)}{qx} \\ D_2 = -\frac{q(1+q)^2x^2+(1+3q+q^2+q^3)xy+y^2}{(q+q^3)x} \\ D_3 = -\frac{(1+q-q^2)x+(1-q)y}{qx} \\ D_4 = \frac{(1+q-q^2+q^3)x+(1-q)y}{(q+q^3)x} \\ D_5 = -\frac{(q+q^2)^2x^2+(1+q+3q^2+q^3)xy+qy^2}{(1+q^2)x} \\ D_7 = \frac{1+q+q^2-q^3}{(1+q^2)x} - \frac{(-1+q)qy}{(1+q^2)x} \end{array} \right.$$

On voit apparaître partout le dénominateur  $(1+q^2)$ . Or ce dénominateur ne peut pas provenir d'un coefficient constant dans le twist car il n'est pas présent dans  $F$ . Par contre dans  $a_1$  et  $b_1$ , il y a de plus le dénominateur  $(1+q)$ , mais lui est déjà dans  $F$ , et placé exactement au bon endroit dans le sens suivant : Il apparait dans  $F$  à l'endroit qui est déterminé par le terme en  $X^- \otimes X^-$ , et dans  $A$  (resp.  $B$ ) aux endroits déterminés par  $(\Delta \otimes id)(X^- \otimes X^-)$  (resp.  $(id \otimes \Delta)(X^- \otimes X^-)$ ). Lui est donc probablement simplement un coefficient fixe dans le twist universel.

## Références

- [1] Bonatsos D., Daskaloyannis C., Kolokotronis P. and Lenis, D., *Quantum algebras in nuclear structure*. (1995) arXiv :nucl-th/9512017v1.
- [2] Buffenoir E., Noui K. and Roche Ph., *Hamiltonian quantization of Chern-Simons theory with  $SL(2, \mathbb{C})$  group*. Class. Quant. Grav. **19** (2002) 4953.
- [3] Chari V. and Pressley A., **A guide to quantum groups**. (1995) Cambridge University Press, ISBN : 978-0521558846.
- [4] Drinfeld V. G., *Quantum groups*, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians (A.M. Gleason, ed.) Amer. Math. Soc.(1986) 798.
- [5] Ewen H. and Ogievetsky O., *Classification of the  $GL(3)$  quantum matrix groups*. (1994) q-alg/9412009

- [6] Ewen H., Ogievetsky O. and Wess J., *Quantum matrices in two dimensions*. Lett. Math. Phys. **22** (1991), no. 4, 297-305.
- [7] Faddeev L. D., Reshetikhin N. Yu. and Takhtajan, L. A., *Quantization of Lie groups and Lie algebras*. Algebra i Analiz, **1** :1 (1989), 178-206.
- [8] Frappat L., Hussin V. and Rideau G., *Classification of the quantum deformation of the superalgebra  $GL(1/1)$* . Journal of Physics A : General Physics **31** (1997) 4049, q-alg/9705024.
- [9] Fuchs J., **Affine Lie algebras and quantum groups : an introduction, with applications in conformal field theory**. Cambridge University Press (1995) ISBN : 978-0521484121.
- [10] Gomez C., Ruiz-Altaba M. and Sierra G., **Quantum groups in two-dimensional physics**. (1996) Cambridge University Press, ISBN : 978-0521460651.
- [11] Halperin I. and Rosenthal P., *Burnside's theorem on algebras of matrices*. Amer. Math. Monthly **87** (1980) 810.
- [12] Hietarinta J., *Solving the two-dimensional constant quantum Yang-Baxter equation*. J. Math. Phys. **34** no. 5 (1993), 1725-1756.
- [13] Isaev A. P. and Ogievetsky O. V., *On quantization of  $r$ -matrices for Belavin-Drinfeld triples*. Phys. Atomic Nuclei **64**, no. 12 (2001) 2126-2130.
- [14] Isaev A.P., Ogievetsky O.V. and Pyatov P.N., *On quantum matrix algebras satisfying the Cayley-Hamilton-Newton identities*. J. Phys. A : Math. Gen. **32** (1999) L115-L121. ArXiv : math.QA/9809170
- [15] Isaev A.P., Ogievetsky O.V. and Pyatov P.N., *Cayley-Hamilton-Newton identities and quasitriangular Hopf algebras*. In Proc. of International Workshop "Supersymmetries and Quantum Symmetries", July 27-31, 1999. Eds. E.Ivanov, S.Krivonos and A.Pashnev, JINR, Dubna E2-2000-82, np. 397-405. ArXiv : math.QA/9912197.
- [16] Jimbo M., *A  $q$ -analogue of  $U(g)$  and the Yang-Baxter equation*, Lett.Math. Phys. **10** (1985) 63.
- [17] Jones V. F. R., *Knots, braids and statistical mechanics*. in "Integrable systems and quantum groups" World Scientific Publishing (1992), ISBN : 978-9810210076.
- [18] Kac V. G., *Lie superalgebras*. Advances in Math. **26** no. 1 (1977) 8-96.
- [19] Kassel C., **Quantum groups**. (1995) Springer, ISBN : 978-0387943701.
- [20] Klimyk A. and Schmüdgen K., **Quantum groups and their representations**. (1998) Springer, ISBN : 978-3540634522.
- [21] Kulish P. P. and Mudrov A. I., *Universal  $R$ -matrix for esoteric quantum groups*. Lett. Math. Phys. **47** (1999) 139-148.
- [22] Ogievetsky O., *Hopf structures on the Borel subalgebra of  $SL(2)$* , Suppl. Rendiconti Circolo Matematici di Palermo, Serie II Numero 37 (1994) p. 185.
- [23] Ogievetsky O., *Uses of quantum spaces*, Contemp. Math. **294** (2002) 161-232.
- [24] Ogievetsky O. and Popov T.,  *$R$ -matrices in rime*. ArXiv : 0704.1947 [math.QA]
- [25] Ogievetsky O. and Poulain d'Andecy L., *Alternating subgroups of Coxeter groups and their spinor extensions*. Preprint CPT-P095-2008.



- [26] Ogievetsky O., Schmidke W. B., Wess J. and Zumino B., *Six generator  $q$ -deformed Lorentz algebra*, Lett. Math. Phys. **23** (1991) 233.
- [27] Ogievetsky O., Schmidke W. B., Wess J. and Zumino B.,  *$q$ -Deformed Poincaré algebra*, Commun. Math. Phys. **150** (1992) 495.
- [28] Ogievetsky O. and Wess J., *Relations between  $GL(p,q)(2)$ 's*, Z. Phys. **C50** (1991) 123.