



HAL
open science

Modélisation des écoulements à surface libre : étude du ruissellement des eaux de pluie

Marie Rousseau

► **To cite this version:**

Marie Rousseau. Modélisation des écoulements à surface libre : étude du ruissellement des eaux de pluie. Analyse numérique [math.NA]. 2008. dumas-00494243

HAL Id: dumas-00494243

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00494243v1>

Submitted on 22 Jun 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Géosciences pour une Terre durable

brgm

Modélisation des écoulements

à surface libre :

étude du ruissellement des eaux de pluie.

**Stage de Master 2 : Ingénierie Mathématique
option Calcul Scientifique.**

Avril-Septembre 2008

Auteur : Marie ROUSSEAU

Maîtres de stage : Olivier CERDAN

Fabrice DUPROS

UNIVERSITÉ DE NANTES



9 septembre 2008

Remerciements

Ce stage entrant dans le cadre d'un projet ANR, METHODE (Modélisation de l'Écoulement sur une Topographies avec des Hétérogénéités Orientées et des Différences d'Echelle) regroupant plusieurs laboratoires (MAPMO, INRA d'Orléans, BRGM, CERMICS, INRIA, ...), j'ai pu y rencontrer différentes personnes.

Avant de commencer ce rapport je tiens donc à remercier les personnes m'ayant accompagnée au quotidien et ayant contribué à faire de ce stage un moment agréable :

- Olivier Cerdan et Fabrice Dupros mes responsables de stage, qui m'ont permis de faire ce stage, pour leur sympathie, leurs conseils et leurs explications.

- Olivier Delestre, membre du MAPMO, pour sa disponibilité, ses conseils et suggestions, sa gentillesse et toute l'aide spontanée qu'il a pu me porter presque quotidiennement.

- Frédéric Darboux, membre de l'INRA d'Orléans, pour ses conseils, sa disponibilité, sa gentillesse.

- François James et Stéphane Cordier membres du MAPMO, pour leur sympathie, leur disponibilité et leurs conseils.

- Marie-Odile Bristeau, membre de l'INRIA, pour sa gentillesse, ses conseils et sa disponibilité.

- Michel Esteves qui a eu la gentillesse de nous transmettre ses données.

Table des matières

1	Présentation de l'entreprise	4
2	Introduction	5
3	Modélisation des écoulements a surface libre en milieu "peu profonds"	7
3.1	Système de Saint-Venant	7
3.2	Résolution numérique à l'ordre 1 et en une dimension d'espace . . .	9
3.2.1	Schéma volumes finis pour le système de Saint-Venant sans terme source	9
3.2.2	Schéma "well balanced" pour la prise en compte de la topographie	12
3.2.3	Schéma avec splitting pour la prise en en compte des termes de pluie et d'infiltration	14
3.3	Présentation du modèle d'infiltration	15
3.3.1	Le modèle de Green et Ampt	15
3.3.2	Couplage avec le ruissellement	16
3.4	Extension à l'ordre deux	18
3.4.1	Précision du second ordre en espace	18
3.4.2	Précision du second ordre en temps	19
3.4.3	Prise en compte des frottements	20
3.4.4	Algorithme	22
4	Différents cas test à l'ordre deux en une dimension d'espace	23
4.1	Test sans terme source	23
4.2	Prise en compte de la topographie	24
4.3	Prise en compte de la topographie, la pluie et des frottements	25
4.4	Prise en compte de la pluie, des frottements et du processus d'infiltration	26
5	Extension du code en deux dimensions d'espace	28
5.1	Système de Saint-Venant en deux dimensions	28
5.2	Test sans terme source	30
5.3	Tests prenant en compte la topographie	32
5.3.1	Préservation de l'état d'équilibre au repos	32
5.3.2	Tests prenant en compte la topographie	33
5.3.3	Tests avec prise en compte de la topographie et des frottements	42
5.3.4	Tests avec topographie, frottements et terme source pluie. . .	49
5.3.5	Tests prenant en compte la topographie, la pluie et le processus d'infiltration	50
5.3.6	Cas tests réels	52
6	Discussion et conclusion	56

1 Présentation de l'entreprise

Le BRGM, Bureau de Recherches Géologiques et Minières, est un Etablissement Public à caractère Industriel et Commercial (EPIC). Créé en 1959, il est sous la tutelle de trois ministères : le ministère chargé de la recherche, le ministère chargé de l'industrie, et le ministère chargé de l'environnement.

La raison d'être du BRGM est de comprendre les phénomènes géologiques, de développer des méthodologies et des nouvelles techniques, de produire et diffuser des données pertinentes et de qualité afin de mettre à disposition les outils nécessaires aux politiques publiques de gestion du sol et du sous-sol et des ressources, de prévention des risques naturels et des pollutions, et d'aménagement du territoire.

Le BRGM a quatre missions. Une mission de Recherche et développement technologique et innovation, elle vise au progrès des connaissances des Sciences de la Terre et à la mise au point et la validation de modèles et de procédés, d'instruments et de logiciels. Une mission d'Appui aux politiques publiques et d'information des citoyens, elle regroupe l'ensemble des actions d'observation et d'expertise en appui aux politiques publiques effectuées pour le compte de l'Etat, d'établissements publics (agences d'objectifs) ou de collectivités locales. Une mission de coopération internationale et d'aide au développement qui est l'extension naturelle de son rôle de recherche et d'expertise en Géosciences dont la Terre est son terrain de jeu. La dernière mission est celle de prévention et surveillance des anciens sites miniers métropolitains, elle regroupe la gestion opérationnelle technique des installations et dispositifs de sécurité transférés à l'Etat sur les anciens sites miniers.

Le BRGM peut se découper en huit domaines thématiques que sont les Ressources Minérales, l'Eau, l'Aménagement et Risques Naturels géologiques, les Sites et sols pollués, la Métrologie de l'environnement, la Cartographie et les connaissances géologiques, la Géothermie et le stockage géologique du CO₂, et ce qui nous intéresse plus particulièrement, les Systèmes d'Information numérique. Dans le cadre de sa mission d'appui aux politiques publiques et à la collectivité, le BRGM recueille, exploite et diffuse les informations sur le sol et le sous-sol national auprès des collectivités, des aménageurs, des décideurs, de la communauté scientifique et du grand public. La structuration et l'organisation de ces données, ainsi que leur mise à disposition, s'appuient sur les systèmes d'information numérique tel le portail d'accès multithématique InfoTerre. Le domaine des Systèmes d'Information numérique peut se découper encore en quatre services que sont l'Infrastructure et l'exploitation, l'Informatique de gestion, le service d'Analyse et Développement, et enfin service de Calcul, 3D et réalité virtuelle dans lequel mon stage s'est déroulé.

2 Introduction

Le ruissellement sur les sols cultivés pose des problèmes de conservation des ressources environnementales (diminution des épaisseurs de sol par érosion, pertes en nutriments, baisse de la qualité des eaux). Les épisodes ruisselants, phénomènes discontinus dans le temps et dans l'espace, sont aussi responsables de coulées boueuses pouvant affecter les biens et les personnes. Pour améliorer l'aménagement des bassins versants, il est important de prédire correctement la localisation des écoulements de surface.

Afin de diminuer les effets du ruissellement il est possible de réaménager les sols pour intercepter les écoulements, comme par exemple en installant des bandes enherbées ou encore en alternant surface infiltrante-surface ruisselante. Il est donc important de comprendre et prédire l'effet de la morphologie de la surface (topographie, fossés, sillons) sur les directions d'écoulement et donc de recourir à la modélisation et à la simulation de ce phénomène.

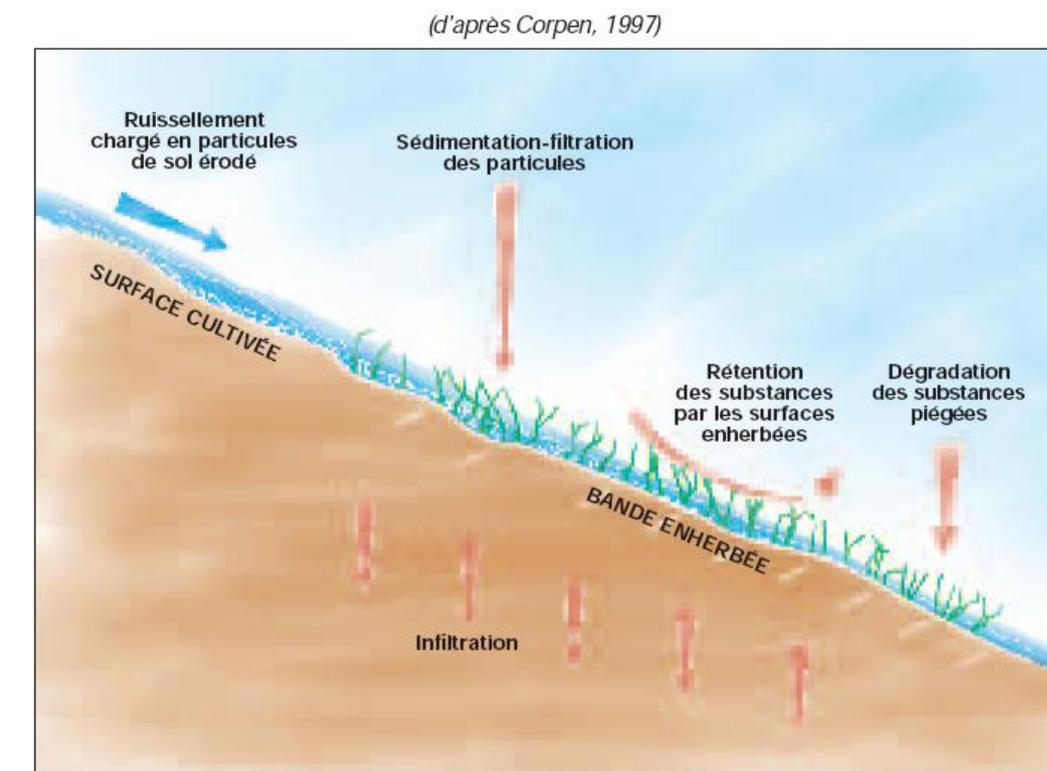


FIG. 1 – Illustration du ruissellement

Les équations de Barré de Saint Venant sont un bon modèle pour décrire l'écoulement en eau peu profonde, mais ces équations n'admettent pas de solution analytique dans le cas général. On est alors contraint d'approcher la solution par des méthodes numériques. De nombreuses études ont été menées sur l'approximation de ces équations. Certains simplifient ces dernières en négligeant certains termes et aboutissent à l'équation de l'onde cinématique qu'ils résolvent par la méthode des différences finies. On peut se demander si cette façon de faire ne va pas amplifier les erreurs numériques. D'autres utilisent le schéma de Mac-Cormack (Esteves et al., 2000).

Ce schéma a l'inconvénient de présenter des instabilités numériques et de ne pas conserver la positivité de la hauteur d'eau h . Les auteurs utilisant ce schéma sont contraints de le modifier pour atténuer ces problèmes.

Ce stage est mené en collaboration avec le MAPMO (Mathématiques et Applications, Physique Mathématique d'Orléans), son objectif est d'améliorer un code de calcul de ruissellement de l'eau, basé sur les équations de Saint-Venant qui tiennent compte du processus d'infiltration régi par le modèle de Green-Ampt. On se proposera d'ajouter les frottements et de réaliser une montée à l'ordre deux du code déjà établi à l'ordre un. On approchera le système de Saint-Venant par un schéma en volumes finis, dit schéma "well-balanced". Pour la montée en ordre on se propose d'utiliser un opérateur de reconstruction en couplant les opérateurs minmod et ENO. Cette reconstruction a l'avantage de conserver la positivité de la hauteur d'eau h et de préserver la stabilité.

Dans la première partie de ce rapport on décrira le système de Saint-Venant, le modèle de Green-Ampt et la méthode de résolution numérique choisie. Dans une deuxième partie on présentera quelques tests effectués en une dimension d'espace à l'ordre deux. Puis dans la dernière partie on étendra le système de Saint-Venant en deux dimensions d'espace et on exposera les résultats des cas tests réalisés qui permettent de valider le code à l'ordre deux.

3 Modélisation des écoulements a surface libre en milieu "peu profonds"

Pour modéliser les écoulements à surface libre en eau peu profonde, on utilise les équations du système de Saint-Venant, aussi appelées en anglais "Shallow Water Equations".

C'est en 1871, dans un rapport de l'Académie des sciences sur les équations de Navier-Stokes que, Adhémar Barré de Saint-Venant, ingénieur des Ponts et Chaussées, publie pour la première fois ces équations. Elles sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes à l'aide de quelques hypothèses simplificatrices.

Ce système permet donc la modélisation des fluides à surface libre en milieux peu profonds et grâce à son efficacité numérique largement reconnues, il est aujourd'hui très utilisé pour la simulation de nombreux phénomènes d'actualité (pollution environnementale, catastrophes naturelles, évolution climatique...). Il est clair qu'à l'énoncé de ces thématiques, il paraît très peu probable de réaliser des expérimentations en grandeurs réelles. On comprend donc pourquoi la résolution numérique de ces équations ont subi ces dernières années un tel enthousiasme.

Pour approcher ces équations, on utilisera un schema volumes finis équilibré, dit "well balanced". Ce schéma est en effet nécessaire pour conserver, entre autre, la positivité de la hauteur d'eau (propriété de stabilité du systeme continu). De plus pour prendre en compte le processus d'infiltration, on rajoutera un terme source au second membre du système de Saint-Venant. Pour cela on utilisera le modèle d'infiltration de Green-Ampt et on traitera ce terme a part, pour ensuite le coupler au systeme via un splitting.

3.1 Système de Saint-Venant

Le système de Navier-Stoke en deux dimensions avec hypothèse hydrostatique est le suivant :

équation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

équations de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -g \frac{\partial Z_s}{\partial x} + \nu \Delta(U) + F_x$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = -g \frac{\partial Z_s}{\partial y} + \nu \Delta(V) + F_y$$

ou Z_s est la topographie du sol, (U, V, W) les composantes du vecteur vitesse \vec{u} et F_x, F_y les termes sources.

La principale opération donnant les équations de Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes est une moyenne sur la verticale; toutefois l'existence de termes non linéaires oblige à quelques hypothèses et approximations (Hervouet, 2003, Viollet et al, 2003).

Tout d'abord, comme pour les équations de Navier-Stokes, supposons que la pression est hydrostatique, i.e que l'accélération due à la pression équilibre la gravité. Cette hypothèse est surtout nécessaire pour traduire la pression comme une hauteur d'eau. On suppose également que la profondeur d'eau est très inférieure à la grandeur caractéristique horizontale du domaine d'étude.

Ensuite, supposons que la vitesse verticale est négligeable et n'aura pas d'équation. Cette hypothèse conforte l'hypothèse d'hydrostaticité qui exige que les accélérations verticales soient négligeables.

On suppose aussi qu'il n'y a pas de transfert de masse d'eau à travers le fond et la surface, et qu'une particule d'eau située sur une de ces deux interfaces y restera.

Une fois ces quelques hypothèses établies, les équations de Navier-Stokes (à masse volumique constante et avec pression hydrostatique) vont être moyennées sur la verticale, par intégration depuis le fond jusqu'à la surface. Deux nouvelles variables vont alors apparaître :

$$u = \frac{1}{h} \int_{Z_f}^{Z_s} U dz \text{ et } v = \frac{1}{h} \int_{Z_f}^{Z_s} V dz$$

où Z_s est la cote de la surface libre, Z_f celle du fond et où (U, V, W) sont les composantes du vecteur vitesse \vec{u} du fluide.

L'équation de continuité devient :

$$\int_{Z_f}^{Z_s} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial dz} \right) dz = 0$$

Ensuite en utilisant la règle de Leibnitz, on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(h\vec{u}) = 0$$

L'équation de quantité de mouvement va être elle aussi moyennée, et en appliquant les hypothèses : d'hydrostaticité, de non variation de la masse volumique suivant la verticale, on obtient après plusieurs calculs :

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(gh^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = -gh \frac{\partial Z_s}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(gh^2/2)}{\partial y} + \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} = -gh \frac{\partial Z_s}{\partial y}$$

où g est la gravité.

Dans sa version monodimensionnelle homogène suivante, ce système décrit l'écoulement de l'eau dans un canal rectangulaire à fond horizontal par l'intermédiaire de la hauteur d'eau $h(t, x) \geq 0$ et de la vitesse moyenne $u(t, x) \in \mathbb{R}$:

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

Ensuite, il nous est possible de rajouter des termes source afin de prendre en compte certains paramètres comme l'infiltration, la pluie, la topographie, les frottements, l'érosion... Dans ce travail, nous traiterons du système de Saint-Venant avec topographie, frottements, pluie et infiltration. Le système peut donc s'exprimer de la manière suivante :

$$(2) \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = S \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) + gh \frac{\partial z}{\partial x} = -ghS_f \\ t \geq 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

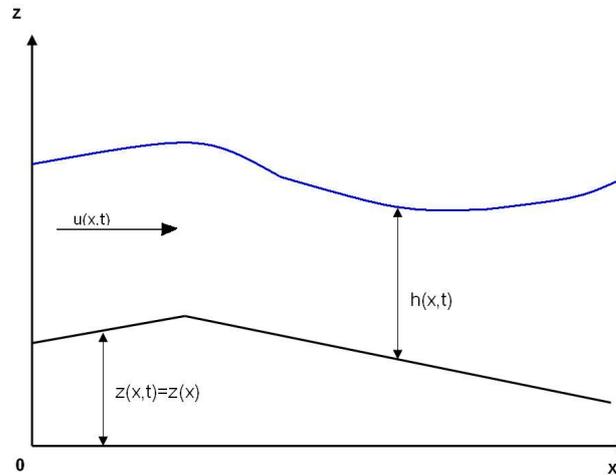
où $z(x) \in \mathbb{R}$ est la topographie du sol que l'on suppose constante par rapport au temps (nous ne tenons pas compte de l'érosion), et S le terme source est égal à : $S = P - T^{inf}$ où P est le taux de pluie et T^{inf} le taux d'infiltration déterminé par le modèle d'infiltration choisi.

$S_f = \frac{Fu|u|}{8gh}$, où F est le facteur de friction de Darcy-Weisbach, il peut-être déterminé par un calibrage ou par des tables, ce facteur dépend de la nature du sol.

$S_f = \frac{u|u|}{K^2h^{4/3}}$, où K est le facteur de friction de Manning.

3.2 Résolution numérique à l'ordre 1 et en une dimension d'espace

3.2.1 Schéma volumes finis pour le système de Saint-Venant sans terme source



On cherche donc à approcher les solutions du système de Saint-Venant homogène :

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = 0 \\ t > 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On peut réécrire ce système sous la forme suivante, dite conservative :

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0 \quad (3)$$

avec :

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ q^2/h + gh^2/2 \end{pmatrix}$$

où $q(t,x)$ est le débit (ou la quantité de mouvement).

On a un système hyperbolique de loi de conservation, ce qui nous pousse à utiliser la méthode des volumes finis qui s'adapte bien à ce genre de systèmes. En effet, la méthode des volumes finis, développée à l'origine pour la résolution numérique des équations d'Euler, est d'autant plus efficace qu'elle est intrinsèquement conservative et adaptée au caractère discontinu des solutions. Pour cela, on doit donc décomposer le domaine d'espace en cellules sur lesquelles on intégrera le système.

Chaque cellule C_i est de la forme

$$C_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[, i \in \mathbb{Z}$$

centrée en

$$x_i = \frac{x_{i-1/2} + x_{i+1/2}}{2}$$

Chaque cellule a donc une taille $dx = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} > 0$. De même on se donne un pas de temps dt et la suite d'instants discrets :

$$t^n = ndt, n \geq 0.$$

Après avoir décomposer le domaine en cellules, on intègre le système sur chaque cellule et sur un pas de temps :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\partial_t U + \partial_x F(U)) dx dt = 0$$

On obtient :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [U(t^{n+1}, x) - U(t^n, x)] dx = - \int_{t^n}^{t^{n+1}} [F(U(t, x_{i+1/2})) - F(U(t, x_{i-1/2}))] dt$$

Avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} U_i^n &= \frac{1}{dx} \int_{C_i} U(t_n, x) dx \\ \mathcal{F}(U_i^n, U_{i+1}^n) &= \frac{1}{dt} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(t, x_{i+1/2})) dt \\ \mathcal{F}(U_{i-1}^n, U_i^n) &= \frac{1}{dt} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(t, x_{i-1/2})) dt \end{aligned}$$

On aboutit au schéma explicite à trois points suivant :

$$U_i^{n+1} - U_i^n + \frac{dt}{dx} (\mathcal{F}(U_i^n, U_{i+1}^n) - \mathcal{F}(U_{i-1}^n, U_i^n)) = 0. \quad (4)$$

On a U_i^n qui est l'approximation de $U(x_i, t^n)$, la solution obtenue est donc constante sur chaque cellule (par morceaux) et discontinue aux frontières de ces dernières. On obtient bien un algorithme conservatif car le flux entrant dans une cellule est égal au flux sortant de la cellule voisine.

$\mathcal{F}(U_i^n, U_{i+1}^n)$ (respectivement $\mathcal{F}(U_{i-1}^n, U_i^n)$) représente le flux numérique à l'interface entre les cellules C_i et C_{i+1} (respectivement C_{i-1} et C_i).

Tout le travail d'une methode de volumes finis consiste à donner une approximation de ces flux, dans ce travail on s'intéressera au flux de Rusanov ainsi qu'au flux HLL (pour Harten, Lax et Van Leer).

De plus afin d'obtenir un schéma stable, il nous faudra considérer des pas de temps suffisamment petits pour pouvoir préserver la condition CFL (Courant-Friedrichs-Lewy).

Remarque :

Comme on a :

$$\partial_x F(U) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u^2 + gh & 2u \end{pmatrix}}_{A(U)} \begin{pmatrix} \partial_x h \\ \partial_x q \end{pmatrix} = A(U) \cdot \partial_x U$$

On peut réécrire le système (3) :

$$\partial_t U + A(U) \partial_x U = 0$$

Les valeurs propres du système sont donc :

$$\lambda_1(U) = u - \sqrt{gh} \text{ et } \lambda_2(U) = u + \sqrt{gh}.$$

En effet,

$$\det(A(U) - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda u + u^2 - gh = (\lambda - u)^2 - gh$$

En posant $c = \sqrt{gh}$ la vitesse critique, on a (en supposant $h > 0$)

$$\lambda_1(U) = u - c \leq \lambda_2(U) = u + c$$

Ces valeurs propres (aussi appelées vitesses caractéristiques), permettent de caractériser les écoulements et seront nécessaires pour les conditions limites en cas de bord liquide. On obtient trois possibilités :

- $u < c$: écoulement fluvial, les ondes vont plus vite que le courant.

- $u > c$: écoulement torrentiel, les ondes vont moins vite que le courant.

- $u = c$: écoulement critique.

Les conditions aux limites changent donc en fonction du régime de l'écoulement, ce phénomène est très important en modélisation numérique.

Expression du flux de Rusanov

Le flux de Rusanov, qui est une amélioration du flux de Lax-Friedrichs, est donné par :

$$\mathcal{F}(U_G, U_D) = \frac{F(U_G) + F(U_D)}{2} - \max_{k=1,2} (|\lambda_k(U_G)|, |\lambda_k(U_D)|) \frac{U_D - U_G}{2}$$

où les λ_k sont les valeurs propres de la matrice jacobienne :

$$\frac{\partial F}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - u^2 & 2u \end{pmatrix}$$

et,

$$\lambda_1(U) = u - \sqrt{gh}$$

$$\lambda_2(U) = u + \sqrt{gh}$$

La condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) est alors :

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} (|\lambda_1(U_i^n), |\lambda_2(U_i^n)|) \cdot \frac{dt}{dx} \leq \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Expression du flux HLL

Le flux HLL est de la forme suivante :

$$\mathcal{F}(U_G, U_D) = \begin{cases} F(U_G) & \text{si } 0 \leq c_1 \\ \frac{c_2 F(U_G) - c_1 F(U_D)}{c_2 - c_1} + \frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1} \cdot (U_D - U_G), & \text{si } c_1 < 0 < c_2 \\ F(U_D) & \text{si } 0 \geq c_2 \end{cases}$$

où c_1 et c_2 sont deux paramètres tels que :

$$c_1 \leq \lambda_k(U) \leq c_2$$

Dans ce travail, nous prendrons :

$$c_1 = \inf_{U=U_G, U_D} (\inf_{j \in \{1,2\}} \lambda_j(U)) \quad \text{et} \quad c_2 = \sup_{U=U_G, U_D} (\sup_{j \in \{1,2\}} \lambda_j(U))$$

3.2.2 Schéma "well balanced" pour la prise en compte de la topographie

Nous allons ici nous intéresser au système de Saint-Venant avec le terme source topographie :

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = T, \quad T = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Du fait de la présence d'un terme source topographie, le système possède maintenant des états stationnaires plus complexes. En effet, nous avons :

$$\frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} (u^2/2 + g(h+z)) = 0$$

Pour résoudre un tel système, on aurait pu utiliser un schéma avec splitting, mais pour les raisons qui suivent nous avons opté pour un schéma dit "well balanced" (Greenberg Leroux, 1996).

Afin de préserver les équilibres du système, et tout particulièrement les équilibres au repos, de récents travaux ont été effectués. Cette préservation n'est pas évidente mais tout autant primordiale, elle assure la crédibilité des résultats et l'exactitude en cas de faible amplitude. Dans la suite, nous nous intéresserons à la méthode de "reconstruction hydrostatique" (Bouchut, 2004, Audusse, 2004).

La reconstruction hydrostatique consiste à décentrer le terme source aux interfaces. Elle repose sur l'idée suivante : les écoulements proches de l'équilibre ($h + Z = cte, u = 0$) sont presque hydrostatiques, c'est-à-dire caractérisés par la relation $u \ll \sqrt{gh}$. On doit donc avoir à la limite un équilibre entre le terme source topographie et la quantité de mouvement, c'est-à-dire l'égalité suivante :

$$\partial_x \left(\frac{gh^2}{2} \right) = - \frac{\partial z hg}{\partial x}$$

En intégrant cette égalité sur une cellule du domaine, on obtient l'approximation suivante du terme source topographie :

$$- \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial z h g}{\partial x} dx = \frac{g}{2} (h_{i+1/2-}^{*2} - h_{i-1/2+}^{*2}) \quad (6)$$

où les $h_{i-1/2+}^*$ et $h_{i+1/2-}^*$ sont les hauteurs d'eau reconstruites de part et d'autre des interfaces de la manière suivante :

$$h_{i+1/2-}^* = h_i + z_i - z_{i+1/2}^*, \quad h_{i+1/2+}^* = h_{i+1} + z_{i+1} - z_{i+1/2}^*$$

Il nous reste encore à définir les valeurs $z_{i+1/2}^*$ de la topographie aux interfaces. Nous prendrons

$$z_{i+1/2}^* = \max(z_i, z_{i+1})$$

Pour finir, afin de préserver la positivité de la hauteur d'eau, nous prendrons les parties positives des hauteurs reconstruites

$$h_{i+1/2\pm}^* = \max(h_{i+1/2\pm}^*, 0) \quad (7)$$

Une fois cette reconstruction faite, nous considérons la discrétisation du terme source topographie (6) et construisons les flux $F_{i+1/2}^n = \mathcal{F}(U_i^n, U_{i+1}^{n+1})$ à partir des valeurs reconstruites aux interfaces (7).

On aboutit donc au schéma suivant :

$$U_i^{n+1} - U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (\mathcal{F}(U_{i+1/2-}^n, U_{i+1/2+}^n) - \mathcal{F}(U_{i-1/2-}^n, U_{i-1/2+}^n)) = T_i$$

avec

$$U_{i+1/2-} = \begin{pmatrix} h_{i+1/2-} \\ h_{i+1/2-} u_i \end{pmatrix}, \quad U_{i+1/2+} = \begin{pmatrix} h_{i+1/2+} \\ h_{i+1/2+} u_{i+1} \end{pmatrix}$$

et

$$T_i = T_{i+1/2-} + T_{i-1/2+} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} h_{i+1/2-}^2 - \frac{g}{2} h_i^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} h_i^2 - \frac{g}{2} h_{i-1/2+}^2 \end{pmatrix}$$

Ce schéma volumes finis basé sur la reconstruction hydrostatique est donc tel qu'il préserve les états d'équilibre mais aussi la positivité de la hauteur d'eau, c'est un schéma équilibré, plus souvent appelé "well balanced scheme".

Remarque :

La préservation de la positivité de la hauteur d'eau découle de

$$0 \leq \min(h_{i-1/2+}^*, h_{i+1/2-}^*) \leq \max(h_{i-1/2+}^*, h_{i+1/2-}^*) \leq h_i$$

De plus, la préservation des états stationnaires provient du fait que

$$h_i + z_i = h_{i+1} + z_{i+1} \Rightarrow h_{i+1/2-}^* = h_{i+1/2+}^*$$

3.2.3 Schéma avec splitting pour la prise en compte des termes de pluie et d'infiltration

Le système de Saint-Venant (2) avec prise en compte du terme source S pluie-infiltration, se réécrit

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = S$$

ou encore, en posant les opérateurs A et B suivants :

$$A = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad B : U \mapsto S$$

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + A(U) - B(U) = \frac{\partial U}{\partial t} + (A - B)(u) = 0, \\ U(t=0) = U_0 \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -(A - B)(U) \quad (9)$$

On sait que pour A et B opérateurs différentiels (constant entre t^n et t^{n+1}), la solution formelle de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (A + B)u$$

est

$$u(t + dt) = e^{dt(A+B)}u(t)$$

En l'occurrence, ici nous avons

$$U(t) = \exp(-(A - B)t)U_0$$

et

$$U(t + dt) = \exp(-(A - B)(t + dt))U_0 = \exp(-(A - B)dt)U$$

On décompose (9)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -AU \quad (*), \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial t} = BU \quad (**)$$

Comme A et B ne commutent pas, on ne peut pas utiliser la méthode avec splitting standard. On va donc résoudre d'abord (*) sur un demi pas de temps puis (**) sur un pas de temps et de nouveau (*) sur un demi pas de temps.

C'est le splitting de Strang qui est d'ordre 2 et qui correspond à la solution formelle

$$\bar{U}(t + dt) = \exp(-\frac{dt}{2}A) \cdot \exp(\frac{dt}{2}B) \cdot \exp(-\frac{dt}{2}A) \cdot U(t)$$

Avec U_0 comme condition initiale, le splitting de Strang revient à résoudre successivement :

-sur un demi pas de temps $\frac{\partial U}{\partial t} - S = 0$ avec U_0 comme condition initiale, on obtient U^*

-sur un pas de temps $\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0$ avec U^* comme condition initiale, on obtient U^{**}

-sur un demi pas de temps $\frac{\partial U}{\partial t} - S = 0$ avec U^{**} comme condition initiale

3.3 Présentation du modèle d'infiltration

On peut décomposer un sol non saturé en trois phases distinctes : solide, liquide et gazeuse. La phase solide représente l'accumulation d'un ensemble de grains minéraux et organiques, de tailles différentes qui laissent entre eux des vides que l'on appelle pores. Ces derniers peuvent être occupés par l'eau (c'est la phase liquide) et par l'air (c'est la phase gazeuse). L'ensemble des pores représente la porosité d'un sol.

L'infiltration est le processus qui décrit l'entrée de l'eau dans le sol lorsque celui-ci est alimenté en eau par précipitation ou bien par irrigation.

L'eau infiltrée pénètre dans le sol sous l'action de la gravité et de la différence de pression entre la surface et le front d'humectation situé en profondeur et va remplir les pores disponibles. Nous allons nous intéresser ici à la vitesse à laquelle l'eau s'infiltré dans le sol, c'est-à-dire à la vitesse d'infiltration. Cette vitesse n'est pas constante mais dépend de la capacité d'infiltration (ou infiltrabilité) d'un sol. Tout le problème est de définir l'infiltrabilité d'un sol. De nombreuses études ont été menées à ce sujet et on a vu naître différents modèles pour calculer l'évolution de l'infiltrabilité à la surface du sol lors d'un épisode pluvieux. On distingue deux familles de modèles : les modèles empiriques (Kustiakov (1932), Horton (1933), Holton (1961)) et les modèles physiques (Richards(1931), Green et Ampt (1911), Philip (1957) et d'autres). Le modèle de Richards, qui est basé sur la loi de Darcy, est le plus à même de décrire correctement le processus. Mais ce modèle nécessite énormément de temps de calcul puisqu'il faut déterminer la vitesse d'infiltration en chaque noeud du maillage sur la verticale.

On se propose alors d'utiliser le modèle de Green et Ampt qui présente un compromis intéressant entre la simplicité et la capacité à reproduire la réalité.

3.3.1 Le modèle de Green et Ampt

Tout d'abord, définissons quelques variables et paramètres qui sont nécessaires au modèle d'infiltration de Green et Ampt :

- Le taux (ou la vitesse) d'infiltration $i(t)$, c'est le flux d'eau pénétrant dans le sol en surface au temps t , il est généralement exprimé en m/s .
- L'infiltration cumulative $I(t)$, c'est le volume total d'eau infiltrée au temps t et il est exprimé en m . Elle est égale à l'intégrale de $i(t)$ entre le temps initial t_0 et t .
- Le taux de précipitation P (en m), c'est le taux d'eau de pluie arrivant à la surface du sol.
- La conductivité hydraulique à saturation K_s (en m/s), c'est un paramètre essentiel de l'équation de Green et Ampt. Il représente la valeur limite du taux d'infiltration si le sol est saturé. Il donne une idée de la perméabilité d'un sol. La perméabilité d'un sol augmente avec K_s .
- La charge de pression au front d'humectation ψ (en m) est la valeur des forces de succion qui agissent au niveau du front d'humectation. Plus ψ est élevé, plus le sol a une grande capacité d'infiltration.

- θ_i et θ_s représentent respectivement la teneur en eau (l'humidité) initiale du sol et la teneur en eau à saturation (en m^3/m^3). Une augmentation de θ_s accroît la capacité d'infiltration du sol.

L'expression de Green et Ampt repose sur la loi de Darcy qui exprime le flux q dans le sol de la manière suivante :

$$q = f_c(t) = K_s \left(\frac{dH}{dz} + 1 \right)$$

où H est la charge hydraulique totale [m], z la profondeur à partir de la surface du sol [m] et $f_c(t)$ la capacité d'infiltration. On approche la dérivée par une différence finie :

$$f_c(t) = K_s \left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{z_2 - z_1} + 1 \right)$$

en prenant :

$z_1 = 0$ (à la surface), $z_2 = Z_f$ avec Z_f la profondeur atteint par le front d'humectation, ψ_1 la pression à la surface due à une hauteur d'eau h et ψ_2 la pression au front d'humectation. En supposant $\psi_1 = 0$ et l'infiltration cumulative $I(t) = Z_f * \Delta\theta$ ($\Delta\theta = \theta_s - \theta_i$) on obtient l'équation de Green et Ampt :

$$f_c(t) = K_s \left(1 + \frac{\psi \Delta\theta}{I(t)} \right)$$

3.3.2 Couplage avec le ruissellement

Une fois la capacité d'infiltration définie, la vitesse d'infiltration lors d'un épisode pluvieux d'intensité P se présente comme suit :

- si $P \leq f_c(t)$, on est en phase non saturée du sol, toute la pluie s'infiltré et $i(t) = P$ et $I(t) = Pt$.

- si $P > f_c(t)$, on passe en phase saturée du sol, une partie seulement de la pluie s'infiltré l'autre partie va rester en surface et ruisseler. Dans ce cas

$$i(t) = \frac{dI}{dt}(t) = f_c(t) = K_s \left(1 + \frac{\psi \Delta\theta}{I(t)} \right)$$

On remarque que dans le second cas $i(t)$ dépend de $I(t)$. Il faudra donc calculer $I(t)$ en résolvant l'équation différentielle :

$$\frac{dI}{dt}(t) = K_s \left(1 + \frac{\psi \Delta\theta}{I(t)} \right)$$

On se propose d'appliquer ce modèle sur chaque cellule du maillage. On suppose que les paramètres sont constants sur une cellule mais hétérogènes sur l'ensemble du domaine c'est-à-dire qu'ils varient en fonction de l'espace. De même on suppose que le taux de pluie est constant sur une cellule et sur un pas de temps mais varie en fonction du temps et de l'espace. Comme on l'a vu précédemment à propos du splitting, il faut résoudre sur chaque cellule et sur $[t^n, t^{n+1/2}]$ l'équation suivante :

$$\frac{dh}{dt}(t) = P(t) - i(t)$$

On résout cette équation en intégrant sur une cellule et sur le demi-pas de temps :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1/2}} \frac{dh}{dt}(t) dt dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1/2}} (P(t) - i(t)) dt dx,$$

On obtient :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (h^{n+1/2}(x) - h^n(x)) dx = P_i^n \cdot dx \cdot \frac{dt}{2} - (I(t^{n+1/2}) - I(t^n)) dx$$

puis en divisant par dx il vient :

$$h_i^{n+1/2} = h_i^n + P_i^n * \frac{dt}{2} - (I(t^{n+1/2}) - I(t^n)).$$

L'hétérogénéité des paramètres d'infiltration et de la pluie va poser des problèmes au modèle de Green et Ampt. En effet avec le ruissellement, l'apport en eau sur une cellule ne vient pas seulement de la pluie, il peut aussi venir de l'écoulement venant d'une autre cellule. La quantité d'eau disponible à l'infiltration sur une cellule au temps t^n est alors :

$$W_i^n = P_i(t^n) + h_i^n / (dt/2)$$

et c'est maintenant W qu'il faudra comparer avec l'infiltrabilité. Il reste à déterminer $I(t^{n+1/2}) - I(t^n)$. Deux cas se présentent :

- si $W \leq f_c(t)$, toute l'eau disponible sur la cellule s'infiltré et

$$I_i^{n+1/2} = I_i(t^n) + P_i^n * dt/2 + h_i^n$$

- si $W > f_c(t)$, la cellule devient saturée et on a :

$$\frac{dI}{dt}(t) = K_s \left(1 + \frac{\psi \Delta \theta}{I(t)}\right)$$

en réarrangeant les termes on obtient :

$$\frac{I(t)}{(I(t) + \psi \Delta \theta)} \frac{dI}{dt}(t) = K_s$$

en intégrant les deux membres sur $[t^n, t^{n+1/2}]$ il vient :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1/2}} \frac{I(t)}{(I(t) + \psi \Delta \theta)} \frac{dI}{dt}(t) = \int_{I^n}^{I^{n+1/2}} \frac{I}{(I + \psi \Delta \theta)} dI = \int_{t^n}^{t^{n+1/2}} K_s dt,$$

donc :

$$I^{n+1/2} - \psi \Delta \theta \ln(I^{n+1/2} + \psi \Delta \theta) - I^n + \psi \Delta \theta \ln(I^n + \psi \Delta \theta) = K_s \frac{dt}{2}$$

D'où :

$$I^{n+1/2} - I^n = K_s \frac{dt}{2} + \psi \Delta \theta \ln\left(\frac{I^{n+1/2} + \psi \Delta \theta}{I^n + \psi \Delta \theta}\right)$$

On obtient une équation non-linéaire que l'on résoudra par une méthode numérique itérative (méthode du point fixe, méthode de Newton, ...)

3.4 Extension à l'ordre deux

3.4.1 Précision du second ordre en espace

Dans le but d'améliorer la précision des résultats, des schémas d'ordre deux en espace et en temps ont été développés. La méthode utilisée ici est une méthode de reconstruction d'ordre deux via un opérateur de reconstruction. Il est nécessaire que cette montée en ordre préserve les états d'équilibre ainsi que la positivité de la hauteur d'eau. Pour cela il nous a fallu reconstruire les variables h (dont on veut préserver la positivité) et $h+z$ (liée à l'équilibre), puis d'en déduire une reconstruction de la topographie z du fond. En effet, un autre choix conduirait à la négation d'un des points requis dans le cas d'une interface sec/mouillé (Audusse, 2004). Une fois cette reconstruction de montée en ordre effectuée, on procède comme pour l'ordre un en faisant une reconstruction hydrostatique (expliquée précédemment).

De plus il est nécessaire que le schéma d'ordre deux obtenu soit consistant avec notre système de Saint-Venant. Pour les termes de flux cela ne pose pas de problème, mais ce n'est pas le cas pour les termes sources. Pour préserver la consistance du schéma il nous faut donc rajouter un terme source centré sur la cellule :

$$S_{ci}^n = g \frac{h_{i-1/2}^n + h_{i+1/2}^n}{2} (z_{i-1/2}^n - z_{i+1/2}^n)$$

Dans ce travail nous avons utilisé trois opérateurs de reconstruction : MUSCL, ENO ainsi que ENO modifiée.

Reconstruction MUSCL

Soit une fonction scalaire $U \in \mathbb{R}$, la reconstruction minmod du second ordre est définie comme suit :

$$U_{i-1/2+} = U_i - \frac{\Delta x_i}{2} DU_i, \quad U_{i+1/2-} = U_i + \frac{\Delta x_i}{2} DU_i$$

avec

$$DU_i = \text{minmod}\left(\frac{U_i - U_{i-1}}{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)/2}, \frac{U_{i+1} - U_i}{(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})/2}\right)$$

et l'opérateur minmod suivant

$$\text{minmod}(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & \text{si } x, y \geq 0 \\ \max(x, y) & \text{si } x, y \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette reconstruction est conservative car $\frac{U_{i-1/2+} + U_{i+1/2-}}{2} = U_i$, très stable mais engendre une perte de précision. D'où la possibilité d'utiliser un autre opérateur.

Reconstruction ENO (Essentially Non Oscillatory)

Pour remédier à la perte de précision de la reconstruction MUSCL, on peut non seulement assurer le second ordre de précision pour le terme $U_{i+1/2\pm}$ mais aussi pour la dérivée discrète DU_i . C'est ce que fait la reconstruction ENO.

Soit U une fonction scalaire

$$U_{i-1/2+} = U_i - \frac{\Delta x}{2} D_{eno} U_i, \quad U_{i+1/2-} = U_i + \frac{\Delta x}{2} D_{eno} U_i$$

avec

$$D_{eno} U_i = \min\left(\frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} D^2 U_{i-1/2}, \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} D^2 U_{i+1/2}\right)$$

et

$$D^2 U_{i+1/2} = \min\left(\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{\Delta x^2}, \frac{U_{i+2} - 2U_{i+1} + U_i}{\Delta x^2}\right)$$

Mais en contre partie de la précision, on perd le principe du maximum qui est nécessaire pour avoir la positivité de la hauteur d'eau.

Pour éviter ce problème on peut donc regrouper les deux reconstructions ci-dessus en considérant la reconstruction ENO modifiée définie comme suit :

$$D_{enom} U_i = \min\left(D_{eno} U_i, 2D_{mm} U_i\right)$$

où $D_{mm} U_i$ est la pente de la reconstruction MUSCL vue précédemment.

Pour plus de sécurité le coefficient 2 peut-être réduit (par exemple nous prenons souvent 1,8).

Avec ce nouvel opérateur on retrouve le principe du maximum mais non sans une légère perte de précision au niveau des extréma locaux.

Dans le code on va donc appliquer une de ces trois reconstructions aux variables h_i , u_i et $h_i + z_i$, on obtiendra alors de nouvelles variables reconstruites $h_{i-1/2+}$, $h_{i+1/2-}$, $u_{i-1/2+}$, $u_{i+1/2-}$, $z_{i-1/2+}$, $z_{i+1/2-}$ (les z étant déduites des deux autres). Ces reconstructions vérifient bien les relations de conservation

$$\frac{h_{i-1/2+} + h_{i+1/2-}}{2} = h_i$$

et

$$\frac{h_{i-1/2+} u_{i-1/2+} + h_{i+1/2-} u_{i+1/2-}}{2} = h_i u_i$$

3.4.2 Précision du second ordre en temps

Enfin pour obtenir un schéma d'ordre deux en temps, on utilise la méthode de Heun (de prédiction-correction) qui est une méthode de Runge-Kutta du second ordre.

Ecrivons le schéma d'ordre deux en espace sous la forme

$$U^{n+1} = U^n + dt\Phi(U^n)$$

où $U = (U_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et $\Phi(U_i^n) = \frac{dt}{dx}(F_{i+1/2} - F_{i-1/2})$. Φ est un opérateur non linéaire. Le schéma du second ordre en temps est donc

$$\begin{aligned} \hat{U}^{n+1} &= U^n + dt\Phi(U^n) \\ \hat{U}^{n+2} &= \hat{U}^{n+1} + dt\Phi(\hat{U}^{n+1}) \\ U^{n+1} &= \frac{U^n + \hat{U}^{n+2}}{2} \end{aligned}$$

3.4.3 Prise en compte des frottements

Considérons maintenant le système de Saint-Venant avec topographie et une force extérieure f .

$\forall t > 0, x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2 + gh^2/2) + gh \frac{\partial z(x)}{\partial x} = hf \end{cases}$$

Dans ce travail on s'intéresse aux lois de frottement de Darcy-Weisbach ainsi que de Manning, c'est-à-dire

$$\text{pour la loi de Manning} \quad \frac{u|u|}{K^2 h^{4/3}}$$

$$\text{pour la loi de Darcy-Weisbach} \quad f = -gS_f = -\frac{Fu|u|}{8h}$$

avec F le facteur de friction de Darcy-Weisbach, K celui de Manning, tous deux dépendants du sol et qui peuvent être déterminés par des tables.

Pour traiter les frottements on a tout d'abord appliqué la méthode de la topographie apparente. On peut obtenir la force f sous la forme :

$$f(t, x) = g(h, u)$$

on a donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2/2 + g(h + z)) = f$$

Les états d'équilibre sont donc modifiés et vérifient

$$\begin{cases} u = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(u^2/2 + g(h + z)) = f \end{cases}$$

Dans un premier temps nous avons intégré les frottements dans la topographie et ainsi résolu le système de Saint-Venant avec ce nouveau terme source topographie :

$$g.z(x) + B$$

avec

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -f$$

Ainsi on obtient un terme B qui ne dépend que du temps mais en discrétisant le temps on peut rendre constante la valeur sur un intervalle de temps. On prend alors

$$\frac{\partial B^n}{\partial x} = -f^n$$

et on résout le système de Saint-Venant avec la nouvelle topographie $g.z(x) + B^n$ sur chaque intervalle de temps. On fait donc la reconstruction d'ordre deux choisie avec ce nouveau terme source topographie et on procède comme précédemment.

Cette méthode est très récente et permet de mieux traiter les états d'équilibre mais elle pose problème au niveau des interfaces sec/mouillé.

Dans le code nous avons donc appliqué une autre méthode pour traiter le terme de frottement, méthode antérieure mais qui s'avère être beaucoup moins coûteuse au niveau du temps de calcul, plus efficace au niveau des interfaces sec/mouillé et qui évite ainsi les pics de vitesse.

Comme le terme de frottements apparait seulement dans l'équation de quantité de mouvement, nous allons le traiter de manière semi-implicite (Bristeau, 2001).

En prenant en considération la topographie et les frottements, nous pouvons écrire le système sous la forme suivante (avec pour les frottements la loi de Darcy-Weisbach) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = B(U)$$

où

$$F(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \end{pmatrix} \text{ et } B(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial Z}{\partial x} - F \frac{|u|}{8} \end{pmatrix}.$$

On a donc en insérant dans l'équation (4) la variable q :

$$q_i^n - \frac{dt}{dx} (\mathcal{F}(U_{i+1/2-}^n, U_{i+1/2+}^n) - \mathcal{F}(U_{i-1/2-}^n, U_{i-1/2+}^n)) = q_i^{n+1} + g \cdot dt \cdot F \frac{|q_i^n| q_i^{n+1}}{8gh_i^n (h_i^{n+1})}$$

$$q_i^{n+1} + g \cdot dt \cdot F \frac{|q_i^n| q_i^{n+1}}{8gh_i^n (h_i^{n+1})} = \hat{q}_i^{n+1}$$

D'où,

$$q_i^{n+1} = \frac{\hat{q}_i^{n+1}}{1 + F \cdot dt \frac{|q_i^n|}{8h_i^n h_i^{n+1}}}$$

ou encore

$$q_i^{n+1} = \frac{\hat{q}_i^{n+1}}{1 + F \cdot dt \frac{|u_i^n|}{8h_i^{n+1}}}$$

Ceci est donc à appliquer à chaque pas de Saint-Venant, après chaque calcul de débit.

Et avec la loi de Manning on obtient alors l'expression suivante :

$$q_i^{n+1} = \frac{\hat{q}_i^{n+1}}{1 + g \cdot dt \frac{|u_i^n|}{K^2 (h_i^{n+1})^{\frac{4}{3}}}}$$

3.4.4 Algorithme

Une fois le découpage du domaine en cellules et les conditions initiales établies, le code en ordre deux suivra donc ces grandes lignes :

Boucle sur le temps $i = 1, N$

- sur un demi pas de temps : pluie-infiltration (splitting de Strang)
- sur un pas de temps : reconstruction d'ordre deux (au choix : minmod, ENO, ENO modifiée)

nouvelles variables : $h_{i-1/2+}, h_{i+1/2-}, u_{i-1/2+}, u_{i+1/2-}, z_{i-1/2+}, z_{i+1/2-}$

- reconstruction hydrostatique aux interfaces droite et gauche
- calcul des flux aux interfaces
- récupération de la hauteur et de la vitesse grâce au calcul du flux (ne pas oublier de rajouter le terme source centré pour ne pas perdre la consistence du schéma volumes finis). On récupère les variables h_s et u_s .
- ajout du terme de frottement en semi-implicite.

$$qs(i) = \frac{hs(i)us(i)}{1 + F.dt \frac{u(i)}{8hs(i)}}$$

\Rightarrow hs(i) et us(i)

- sur un pas de temps avec les variables $hs(i), us(i)$ et $z(i)$: reconstruction d'ordre deux (au choix : MUSCL, ENO, ENO modifiée)

nouvelles variables : $hs_{i-1/2+}, hs_{i+1/2-}, us_{i-1/2+}, us_{i+1/2-}, zs_{i-1/2+}, zs_{i+1/2-}$

- reconstruction hydrostatique aux interfaces droite et gauche
- calcul des flux aux interfaces
- récupération de la hauteur et de la vitesse grâce au calcul du flux (ne pas oublier de rajouter le terme source centré pour ne pas perdre la consistence du schéma volumes finis). On récupère les variables $hsai$ et $usai$.
- ajout du terme de frottement en semi-implicite.

$$qsa(i) = \frac{hsa(i)usa(i)}{1 + F.dt \frac{us(i)}{8hsa(i)}}$$

\Rightarrow hsa(i) et usa(i)

- méthode de Heun pour l'ordre deux en temps : moyenne des $hsa(i), h(i)$ et $usa(i), u(i)$.

- sur un demi pas de temps : pluie-infiltration (splitting de Strang)

$$\implies h_i^{n+1}, \text{ et } u_i^{n+1}$$

4 Différents cas test à l'ordre deux en une dimension d'espace

4.1 Test sans terme source

Nous avons tout d'abord testé le code sans ajouter de terme source, ceci permet de tester le comportement des flux et ainsi de vérifier leur bonne programmation. Pour cette sous-partie nous avons utilisé le flux HLL ainsi que celui de Rusanov, les résultats obtenus étaient comparables.

Le premier test est la rupture de barrage en une dimension d'espace. Pour cela nous devons imposer une vitesse initiale nulle et une hauteur d'eau initiale de telle sorte à créer un barrage. Dans cet exemple nous nous sommes placés sur l'intervalle $[0, 10]$ et avons pris comme hauteur d'eau initiale :

$$h(x) = \begin{cases} 4, & \forall x \leq 5 \\ 2, & \text{sinon} \end{cases}$$

Ici nous avons donc créé une rupture de barrage sur fond mouillé, ce qui correspond à une retenue d'eau où à l'instant $t = 0$ le barrage disparaît instantanément. Ce test s'apparente à un problème de Riemann, les résultats obtenus (fig.2) étant similaires, ceci prouve le bon comportement des flux.

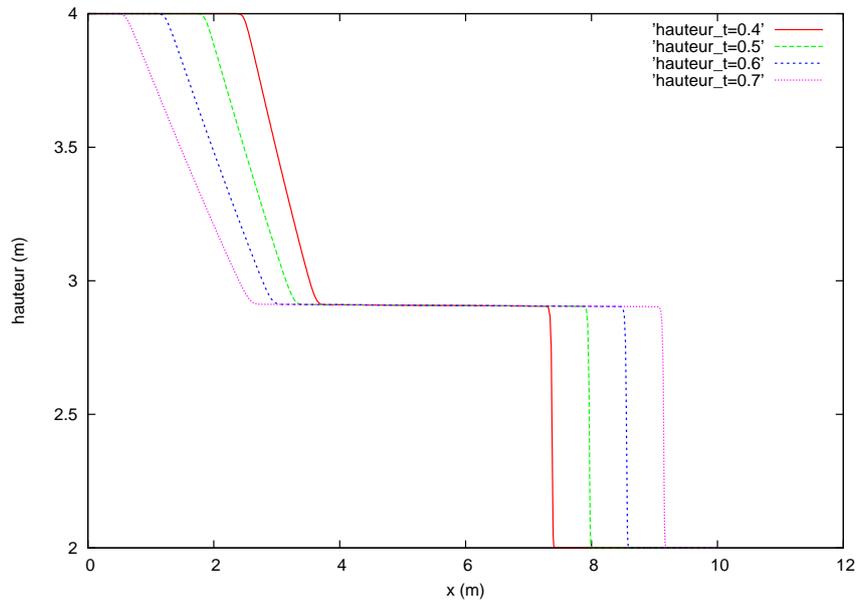


FIG. 2 – hauteur d'eau à différents instants

Sur la figure ci-dessus nous pouvons bien voir la détente puis le choc en fonction du temps. Le même test a été réalisé sur fond sec et les résultats étaient similaires.

4.2 Prise en compte de la topographie

Dans un deuxième temps nous avons voulu tester que le code préservait bien les états d'équilibre au repos (lac au repos). Pour cela nous avons donc imposé une topographie parabolique ($z(x) = (x - 1)^2$) et une hauteur d'eau initiale égale à 0.25 m.

On obtient bien ce qui était attendu, c'est-à-dire la non variation de la hauteur d'eau au cours du temps.

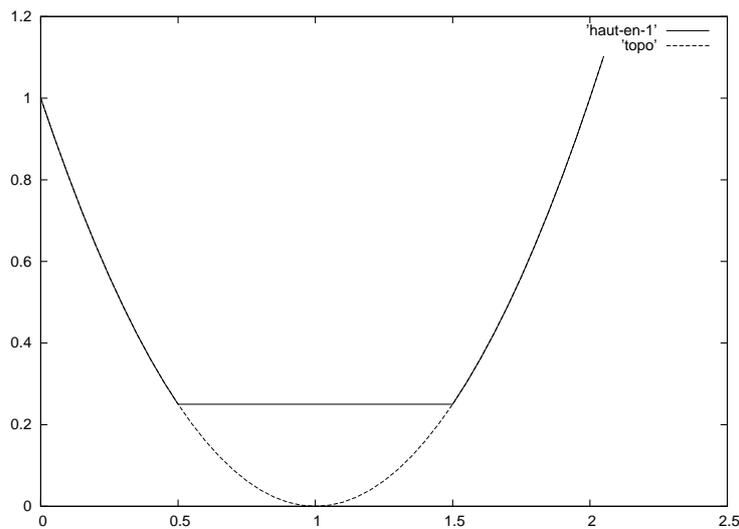


FIG. 3 – Equilibre au repos

Afin de mieux se rendre compte de la stabilité du schéma nous avons tracé, grâce au code, la hauteur d'eau au milieu de la parabole pour vérifier qu'elle restait bien constante (fig.4). Nous avons aussi calculé la norme de l'erreur L2 de la hauteur d'eau (fig.5), celle-ci restant bien nulle en fonction du temps nous pouvons donc en déduire que le schéma "well balanced" préserve les états d'équilibre au repos.

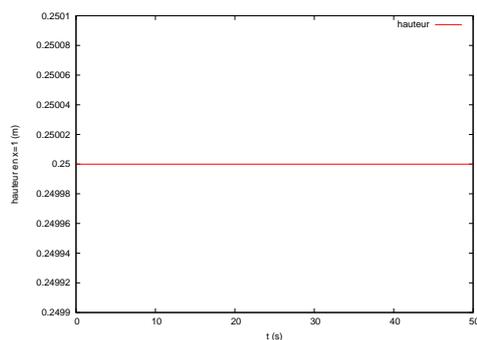


FIG. 4 – hauteur au milieu de la parabole

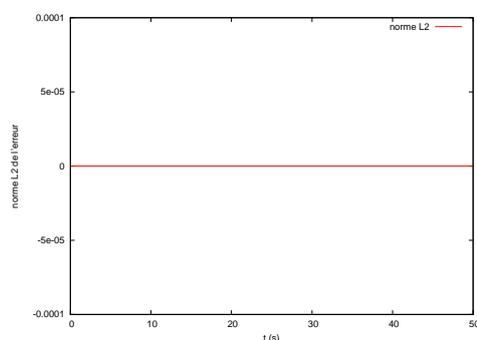


FIG. 5 – Norme L2 de l'erreur

4.3 Prise en compte de la topographie, la pluie et des frottements

Une fois testés les flux et le schéma, nous avons voulu vérifier le bon fonctionnement du processus de pluie.

Pour cela, dans un premier temps, nous avons appliqué de la pluie sur une droite inclinée (de pente 5%) entre l'instant $t = 0$ s et $t = 230$ s. La durée de la simulation est de 300 s, nous avons pris un taux de pluie égal à 0,055 m/h et nous l'avons appliqué seulement sur l'intervalle $[0,2 ; 3,95]$ afin de créer des interfaces sec/mouillé. Avec le code on calcule le flux à l'exutoire ($q=h.u$) et en le traçant on s'aperçoit que l'ordre deux fait apparaître un pic et du bruit autour de la zone où le flux devrait se stabiliser. Pour atténuer ces instabilités il nous faut donc prendre en compte le terme de frottements, c'est ce que nous avons fait en prenant un coefficient de friction pour la loi de Darcy égal à 0,2, on peut voir la représentation de ces deux flux sur la figure 6. On voit que le flux à l'exutoire, avec le terme de frottement, se comporte correctement. En effet il augmente pour se stabiliser autour de $6,10^{-5}$ qui est approximativement la valeur attendue ($\text{flux}=\text{pluie}\times\text{longueur}=0,055/3600\times 3,75\approx 5,73\times 10^{-5}$), et après on peut voir la zone d'assèchement.

De plus, on peut remarquer le retard que prend le flux quand on ajoute les frottements, retard qui est tout à fait normal vu que les frottements ralentissent l'avancée de l'eau.

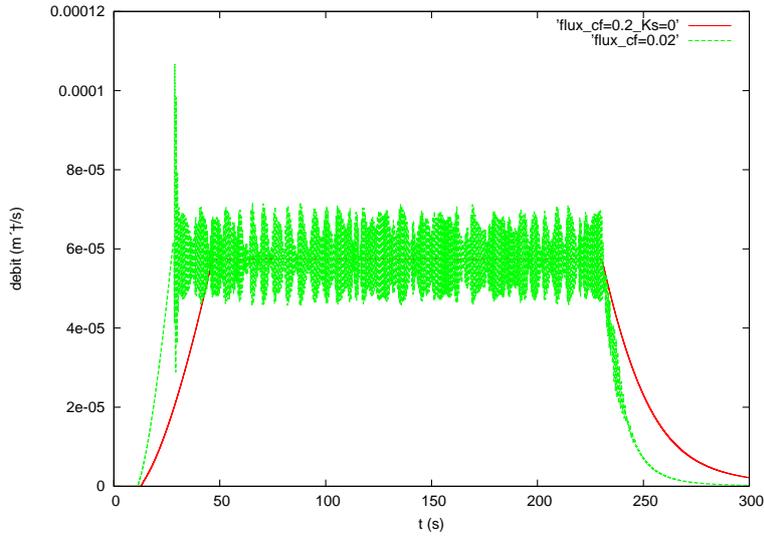


FIG. 6 – flux à l'exutoire, avec et sans frottements

4.4 Prise en compte de la pluie, des frottements et du processus d'infiltration

Ici nous reprenons le même exemple que précédemment, c'est-à-dire un taux de pluie égal à 0.055 m/h entre les instants $t = 0$ s et $t = 230$ s, sur une droite de pente 5%, avec un coefficient de friction pour la loi de Darcy-Weisbach égal à 0,2. La durée de simulation est là encore de 300 s mais cette fois-ci on prend en considération le processus d'infiltration.

On va alors calculer le flux à l'exutoire pour différents paramètres d'infiltration ainsi que le volume d'eau de pluie, le volume d'eau infiltrée et le volume d'eau ruisselée.

	flux 1	flux 2	flux 3	flux 4	flux 5
K_s (cm/h)	0	0,06	0,1	0,15	0,6
Ψ (cm)	3	23,9	3	21,85	16,7
Θ_i	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15
Θ_s	0,5	0,43	0,5	0,398	0,5

Pour le test avec $K_s=0$, cela correspond à une surface imperméable et en effet on peut lire dans le tableau (fig.8) que le volume d'eau infiltré est nul et que tout ruisselle. De plus on peut voir sur la figure 7 que le flux à l'exutoire a bien l'allure attendue avec là encore la stabilisation autour de $6 \cdot 10^{-5}$ et la zone de dessèchement.

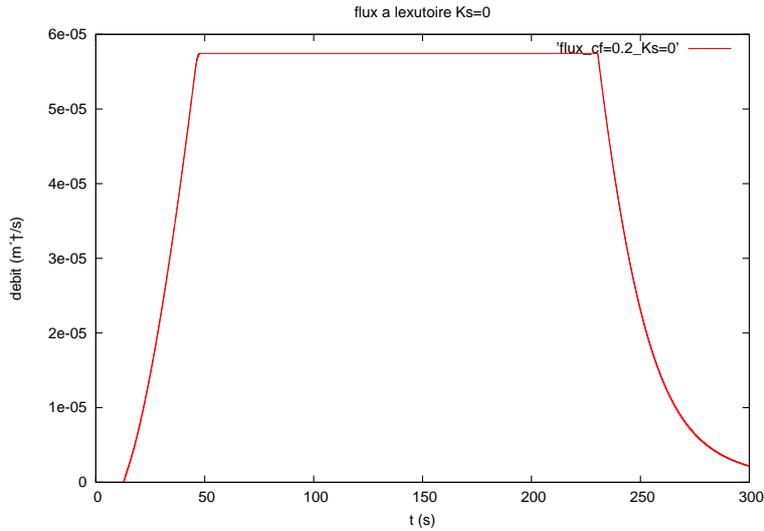


FIG. 7 – Flux à l'exutoire, pour $K_s=0$

en mm^2	flux 1	flux 2	flux 3	flux 4	flux 5
volume pluie	12637,83	12637,83	12637,83	12637,83	12637,83
volume infiltré	0	8507,60	4756,04	11217,85	12637,83
volume ruisselé	12637,83	4130,23	7881,79	1419,98	0
vol inf+ vol ruis	12637,83	12637,83	12637,83	12637,83	12637,83
vol inf+ vol ruis	12226,60	12637,83	12637,83	12637,83	12637,83

FIG. 8 – Résultat des différents volumes calculés pour le flux HLL avec reconstruction ENO modifiée (en rouge sont rajoutées les valeurs obtenues avec l'ordre un).

Pour les simulations faites avec le flux HLL et différents paramètres d'infiltration, on s'aperçoit qu'il n'y a pas de perte d'eau entre le volume de pluie initial et le volume final calculé (vol. inf+ vol. ruis) (voir fig.8). Il n'y a donc pas ou très peu de diffusion numérique contrairement aux tests effectués avec le code à l'ordre 1 où on pouvait remarquer une perte d'eau plus ou moins importante selon le flux choisi. Le test a été effectué dans les mêmes conditions avec le flux de Rusanov qui est un peu plus diffusif, mais on peut constater que là encore la perte d'eau reste minimale (voir fig.9). Le passage à l'ordre deux a donc bien permis ici d'améliorer la précision des résultats.

Sur la figure 10, on peut aussi voir l'allure du flux à l'exutoire calculé avec le flux HLL et pour les différents paramètres d'infiltration. On peut remarquer le retard que prend le flux à l'exutoire, retard qui est dû à l'infiltration, mais aussi l'assèchement dont la rapidité augmente inversement au volume ruisselé.

en mm^2	flux 1	flux 2	flux 3	flux 4	flux 5
volume pluie	12637,83	12637,83	12637,83	12637,83	12637,83
volume infiltré	0	8507,59	4756,03	11217,85	12637,83
volume ruisselé	12636,97	4129,91	7881,22	1419,91	0
vol inf+ vol ruis	12636,97	12637,51	12637,25	12637,77	12637,83
vol inf+ vol ruis	11812,90	12348,20	12108,60	12524,10	12637,83

FIG. 9 – Résultat des différents volumes calculés pour le flux de Rusanov avec reconstruction ENO modifiée (en rouge sont rajoutées les valeurs obtenues à l'ordre un).

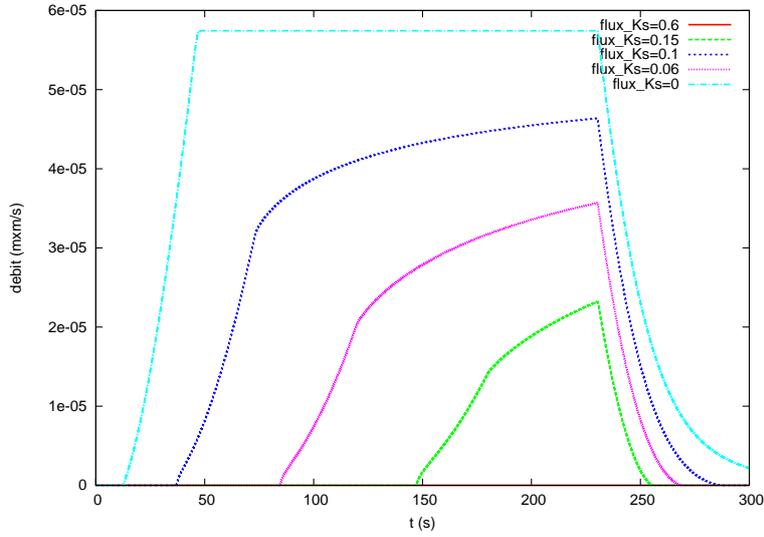


FIG. 10 – Débit instantané à l'exutoire, pour le flux HLL et pour différents Ks

5 Extension du code en deux dimensions d'espace

5.1 Système de Saint-Venant en deux dimensions

Le système de Saint-Venant (2)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div } F(U) = B(U)$$

où

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} hu & hv \\ hu^2 + \frac{g}{2}h^2 & huv \\ huv & hv^2 + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix}, \quad \text{et } B(U) = \begin{pmatrix} P - T^{inf} \\ -gh \frac{\partial z}{\partial x} \\ -gh \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Comme pour la dimension un, $h(x, y)$ représente la hauteur d'eau au point (x, y) , u et v sont les composantes du vecteur vitesse, $z(x, y)$ est la topographie au point (x, y) , $P(x, y, t)$ est le taux de pluie au point (x, y) et à l'instant t et $T^{inf}(x, y, t)$ le taux d'infiltration.

En ajoutant le terme de frottement de Darcy-Weisbach, le système devient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = \tilde{B}(U) \quad (12)$$

où

$$F(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{g}{2}h^2 \\ huv \end{pmatrix}, \quad G(U) = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix}, \quad \text{et } \tilde{B}(U) = \begin{pmatrix} P - T^{inf} \\ -gh\frac{\partial z}{\partial x} - ghS_{f_u} \\ -gh\frac{\partial z}{\partial y} - ghS_{f_v} \end{pmatrix}$$

avec

$$S_{f_u} = \frac{F|u|u}{8gh}, \quad \text{et } S_{f_v} = \frac{F|v|v}{8gh}$$

et F le facteur de friction de Darcy-Weisbach.

La résolution du système (12) se fera par analogie avec le système en une dimension. En effet, tout comme précédemment nous allons utiliser un schéma volumes finis, ce qui implique la décomposition du domaine en cellules $C_{i,j}$ de la forme :

$$C_{i,j} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{i-1/2}, y_{i+1/2}]$$

centrée au point (x_i, y_i) où

$$x_i = \frac{x_{i-1/2} + x_{i+1/2}}{2}, \quad \text{et } y_i = \frac{y_{i-1/2} + y_{i+1/2}}{2}$$

Chaque cellule a donc une aire égale à $dx_i dy_i$, où $dx_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} \geq 0$ et $dy_i = y_{i+1/2} - y_{i-1/2} \geq 0$.

De même on se donne un pas de temps dt et une suite d'instants discrets :

$$t^n = n.dt, \quad n \geq 0$$

Après avoir décomposé le domaine, comme en une dimension, on intègre le système (12) sur chaque cellule et sur un pas de temps. On aboutit alors, pour le système homogène, au schéma volumes finis suivant :

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{dt}{dx_i} (\mathcal{F}(U_{i,j}^n, U_{i+1,j}^n) - \mathcal{F}(U_{i-1,j}^n, U_{i,j}^n)) - \frac{dt}{dy_i} (\mathcal{G}(U_{i,j}^n, U_{i,j+1}^n) - \mathcal{G}(U_{i,j-1}^n, U_{i,j}^n)) = 0$$

$-\mathcal{F}(U_{i,j}^n, U_{i+1,j}^n)$ (respectivement $\mathcal{F}(U_{i-1,j}^n, U_{i,j}^n)$) représente le flux numérique à l'interface entre les cellules $C_{i,j}$ et $C_{i+1,j}$ (respectivement $C_{i-1,j}$ et $C_{i,j}$).

$-\mathcal{G}(U_{i,j}^n, U_{i,j+1}^n) = G_{i,j+1/2}$ (respectivement $\mathcal{G}(U_{i,j-1}^n, U_{i,j}^n)$) représente le flux numérique à l'interface entre les cellules $C_{i,j}$ et $C_{i,j+1}$ (respectivement $C_{i,j-1}$ et $C_{i,j}$).

Pour l'ajout du terme source topographie, on procède comme en une dimension, on obtient un schéma "well balanced" en faisant une reconstruction hydrostatique aux interfaces. On a alors le schéma suivant :

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{dt}{dx_i} (\mathcal{F}(U_{i+1/2-,j}^n, U_{i+1/2+,j}^n) - \mathcal{F}(U_{i-1/2-,j}^n, U_{i-1/2+,j}^n)) - \frac{dt}{dy_i} (\mathcal{G}(U_{i,j+1/2-}^n, U_{i,j+1/2+}^n) - \mathcal{G}(U_{i,j-1/2-}^n, U_{i,j-1/2+}^n))$$

Pour le rajout des paramètres de pluie et d'infiltration, on opte ici aussi pour un schéma avec splitting (avec le splitting de Strang qui est d'ordre deux), enfin on rajoute le terme de frottements de manière semi-implicite.

On a donc un schéma d'ordre un, pour la montée en ordre il nous faut faire une reconstruction d'ordre deux. Pour cela, de même qu'en une dimension, on utilise un opérateur de reconstruction (MUSCL, ENO ou ENO modifiée) et on reconstruit les variables h , $z + h$ pour ensuite en déduire z , cette reconstruction doit bien sûr se faire dans les deux directions. On préserve ainsi la positivité de la hauteur d'eau et les états d'équilibre. Enfin, pour conserver la consistance du schéma il nous faudra rajouter le terme source centré sur la cellule.

5.2 Test sans terme source

Tout d'abord, comme en dimension un, nous avons testé le bon comportement du splitting dimensionnel ainsi que le calcul des flux. Pour cela nous avons testé une rupture de barrage cylindrique sur fond mouillé. Ceci consiste à imposer une hauteur d'eau égale à 10 m sur un cercle, ce qui représente un cylindre d'eau de hauteur 10m et d'imposer sur le reste du domaine une hauteur égale à 1 m. On s'est placé sur un domaine carré de dimension $[40,40]$. A l'instant $t=0$ s le barrage s'efface instantanément. On calcule la hauteur d'eau à l'instant $t=0,7$ s, on obtient pour le flux HLL et la reconstruction ENO modifiée la hauteur d'eau (fig.11). La figure 12 représente une coupe de la hauteur d'eau. On peut constater que la symétrie radiale de la solution numérique calculée est respectée, ce qui montre le bon comportement de notre schéma.

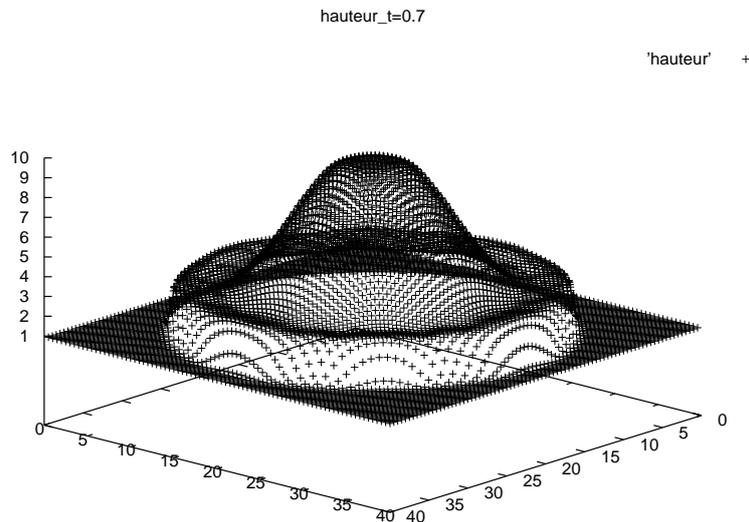


FIG. 11 – hauteur d'eau à l'instant $t=0,7$ s

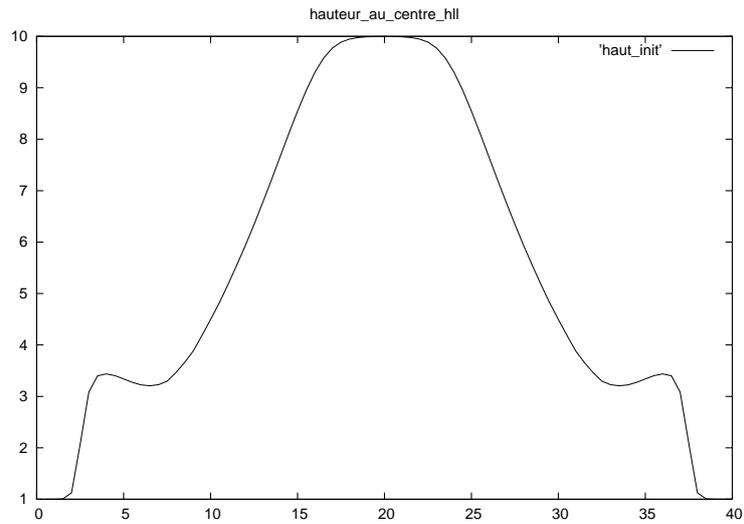


FIG. 12 – coupe de la hauteur d'eau à l'instant $t=0,7$ s

De plus pour voir si le schéma se comportait bien en rajoutant un terme source de topographie nous avons refait le même test mais cette fois-ci en prenant une topographie plate avec une bosse au milieu du domaine. On peut remarquer que le profil de la hauteur n'a pas changé (fig.13) mais qu'au niveau de la bosse la hauteur est un peu moins élevée. Le schéma semble rester correct avec l'ajout d'une topographie.

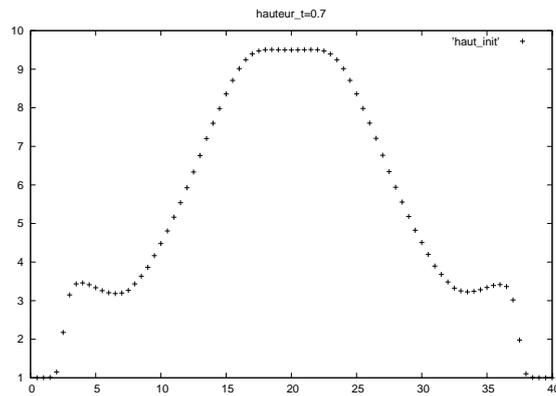


FIG. 13 – coupe de la hauteur d'eau à l'instant $t=0,7$ s

5.3 Tests prenant en compte la topographie

5.3.1 Préservation de l'état d'équilibre au repos

De même que pour la dimension un, il nous a fallu vérifier que le schéma préservait bien les états d'équilibre au repos.

Nous nous sommes donc placés dans une parabole, comme sur la figure, et avons imposé une hauteur de 0.25 m. Nous avons alors calculé avec le code la hauteur d'eau au point (2;2), centre de la parabole, ainsi que la norme L2 de l'erreur en fonction du temps. La hauteur d'eau reste bien constante à 0.25 m et la norme à 0, on peut donc en déduire la conservation de l'état d'équilibre de notre schéma "well balanced".

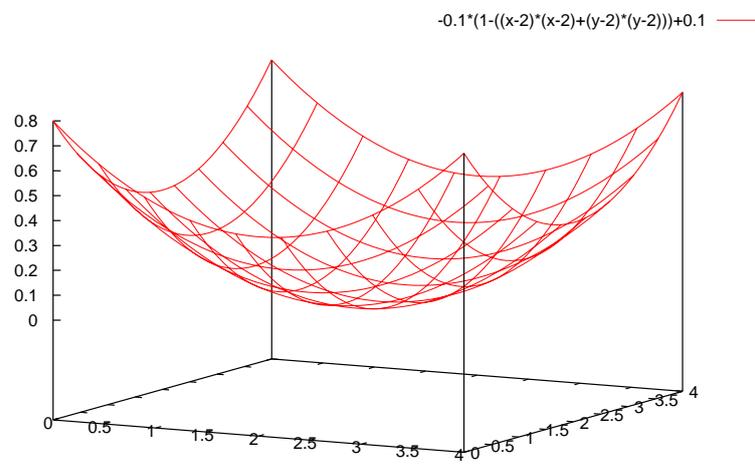


FIG. 14 – Topographie initiale

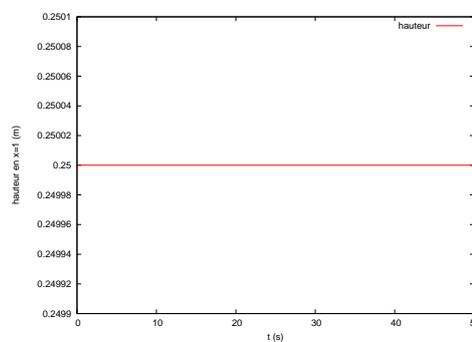


FIG. 15 – Hauteur d'eau au milieu de la parabole

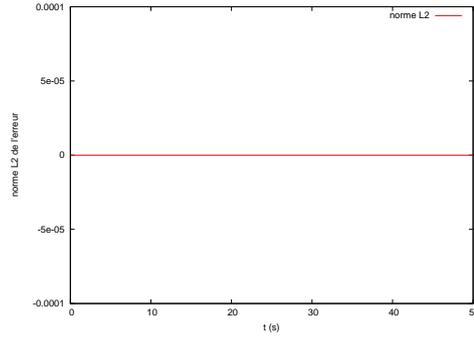


FIG. 16 – Norme L2 de l’erreur faite sur la hauteur d’eau

Dans le reste de ce rapport nous prendrons désormais le flux HLL. En effet celui-ci étant moins diffusif il permet de meilleurs résultats.

5.3.2 Tests prenant en compte la topographie

Cas test de Greenspan Carrier

Le cas test suivant est un recouvrement-découvrement développé par Greenspan et Carrier en 1957, il admet une solution analytique (Carrier Greenspan, 1958, Marche, 2005). Sa topographie est une plage de pente α où on observe la montée d’une vague après une dépression du niveau de la mer.

Les conditions initiales sont représentées sur la figure 17.

Afin de résoudre le problème il nous faut redéfinir des variables adimensionnées. Soit l la longueur du domaine selon l’axe des x . On pose :

$$x^* = x/l, \quad \xi^* = \xi/(\alpha l), \quad u^* = u/\sqrt{g\alpha l}, \quad t^* = t/\sqrt{l/g\alpha}, \quad c^* = \sqrt{\xi^* - x^*}$$

Ici ξ représente la hauteur $\xi(x) = h + z$.

On utilise donc dans le système de Saint-Venant ces nouvelles variables adimensionnées, avec aussi $\sigma^* = 4c^*$ et $\lambda^* = 2(u^* + c^*)$. Comme condition initiale à $t^* = 0$ on prend le système suivant :

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \xi^* = e \left(1 - \frac{5}{2} \frac{a^3}{(a^2 + \sigma^{*2})^{3/2}} + \frac{3}{2} \frac{a^5}{(a^2 + \sigma^{*2})^{5/2}} \right) \\ x^* = -\frac{\sigma^{*2}}{16} + \xi^* \\ u^* = 0 \end{array} \right.$$

où $a = \frac{3}{2}(1 + 0,9e)^{1/2}$. a et e sont deux paramètres qui caractérisent la dépression.

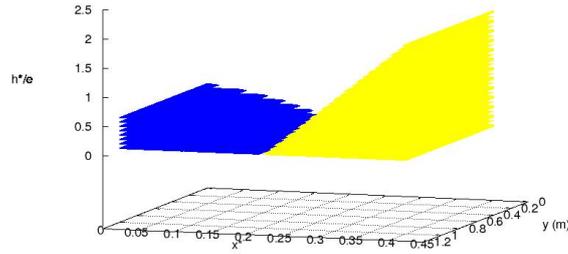


FIG. 17 – Condition initiale

Afin de résoudre le système de Saint-Venant et d'obtenir la solution analytique, Greenspan et Carrier utilisent une "hodograph transformation".

$$(**) \left\{ \begin{array}{l} u^* = \frac{8e}{a} \Im m \left(\frac{1}{((1-i\lambda)^2 + \sigma^2)^{3/2}} - \frac{3}{4} \frac{1-i\lambda}{((1-i\lambda)^2 + \sigma^2)^{5/2}} \right) \\ \xi^* = \frac{-u^{*2}}{2} + e \Re e \left(1 - 2 \frac{5/4 - i\lambda}{((1-i\lambda)^2 + \sigma^2)^{3/2}} + \frac{3}{2} \frac{(1-i\lambda)^2}{((1-i\lambda)^2 + \sigma^2)^{5/2}} \right) \\ x^* = -\frac{\sigma^2 a^2}{16} + \xi^* \\ t^* = 0.5a\lambda - u^* \end{array} \right.$$

Ces deux systèmes nous donnent la solution analytique ainsi que la condition initiale sous forme implicite, il nous faudra donc utiliser une méthode itérative pour les résoudre.

Pour les simulations nous avons pris une longueur l égale à 20 m et $e=0,1$, la condition de bord pour $x=0$ est donnée en résolvant (**).

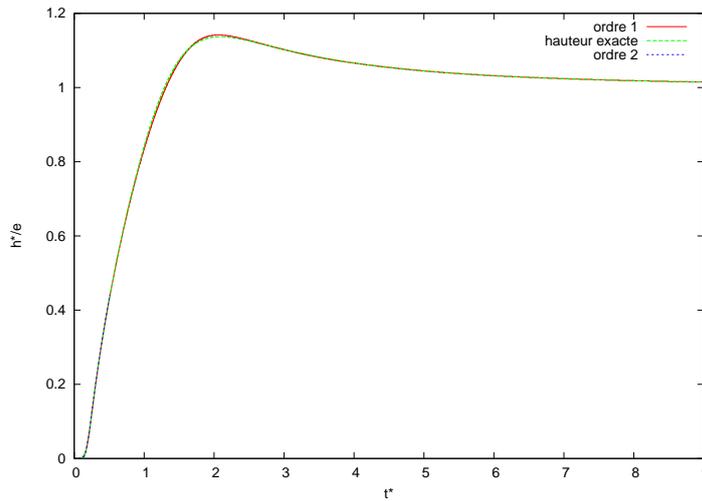


FIG. 18 – Comparaison entre hauteur d'eau numérique (ordre 1 et 2) et hauteur d'eau exacte en fonction de t^* , au point $x^* = 0.02$, pour $dx^* = 0.002$, $dt^* = 0.001$

On peut remarquer que l'ordre deux colle légèrement mieux à la solution exacte que l'ordre un (fig.18).

Nous avons aussi regardé les hauteurs numériques à différents instants t^* (fig.19).

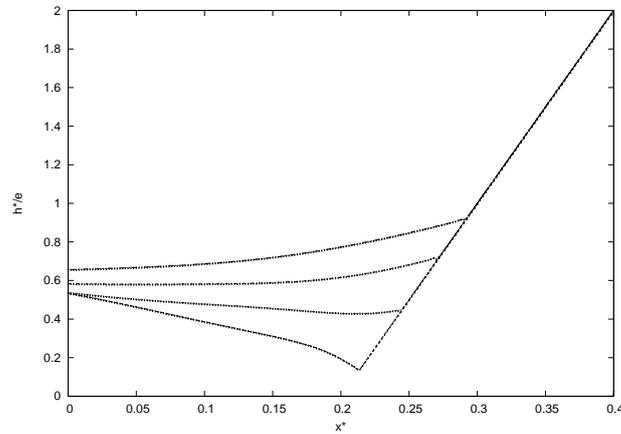


FIG. 19 – Comparaison entre hauteur d'eau numérique à l'ordre 2 (avec des points) et hauteur d'eau exacte (avec des lignes) en fonction de x^* , pour $t^* = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$

En observant la variation de la hauteur d'eau on s'aperçoit que l'ordre un perd de la précision avec l'augmentation de cette dernière (fig.20).

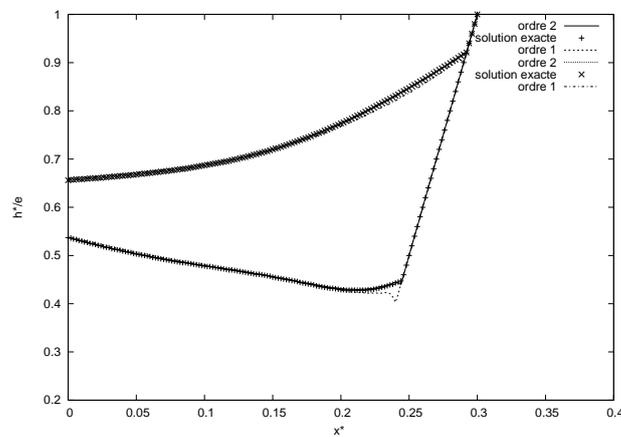


FIG. 20 – Comparaison entre hauteur d'eau numérique (ordre 1 et 2) et hauteur d'eau exacte en fonction de x^* , $t^* = 0.5, 0.9$

Nous avons alors comparé les normes des erreurs L2 pour les deux ordres, on constate bien la meilleure précision du second ordre et la diffusion numérique qui est plus importante à l'ordre un. Comme à l'instant $t^* = 1$ l'erreur commise semble être plus élevée, nous avons regardé l'erreur L2 à cet instant et raffiné le maillage pour pouvoir tracer le log de la norme L2 de l'erreur en fonction du log du pas d'espace et ainsi observer la convergence des schémas. On obtient de bons résultats pour ce cas test, l'erreur à l'ordre un au voisinage du temps $t^* = 1$ (moment où l'eau atteint la partie sèche de la plage : interface sec/mouillée) est corrigée en passant à l'ordre deux (fig. 21).

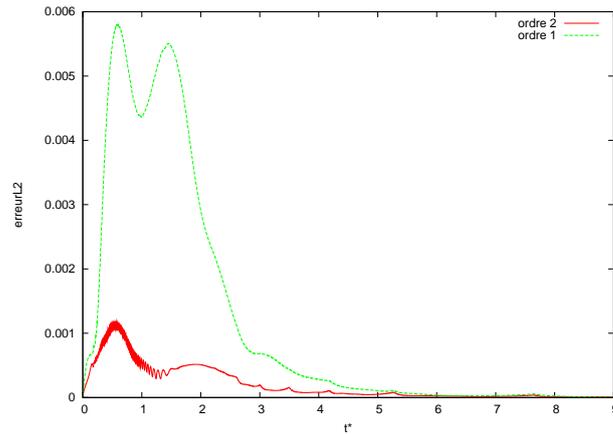


FIG. 21 – Comparaison de la norme L2 des erreurs en fonction de t^*

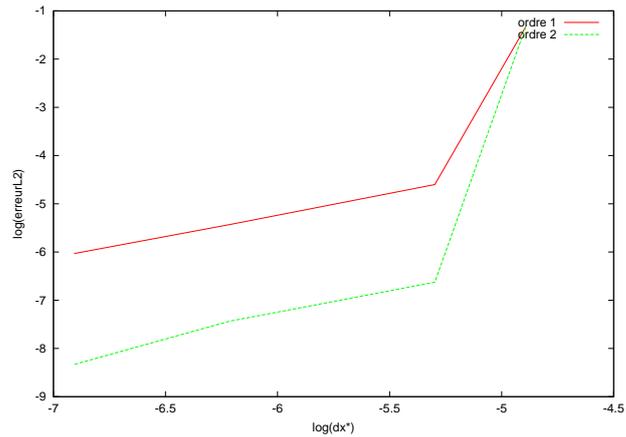


FIG. 22 – Comparaison du log de la norme L2 de l'erreur faite sur la hauteur en fonction du log du pas d'espace

Cas test de Thacker

Nous avons ici implémenté deux cas test de Thacker (Marche, 2005) qui prennent en compte la topographie.

Nous nous plaçons dans un bassin en forme de paraboloïde dont l'équation vérifie, pour tout x, y appartenant à $[-2, 2][[-2, 2]$:

$$z(x, y) = -H_0 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{A^2} \right)$$

où H_0 est la hauteur d'eau au point central pour une élévation nulle et A est la distance du point central au point de la rive pour une élévation nulle.

Nous prenons ici $H_0 = 0.1$ et $A = 1$.

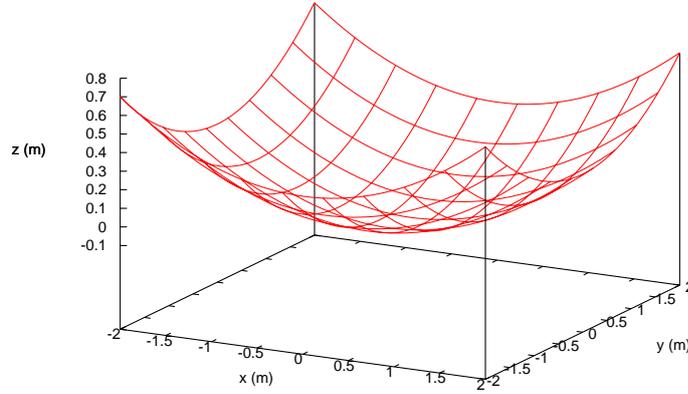


FIG. 23 – Topographie de la parabole de révolution

Exemple I :

On se place donc dans la parabole de révolution, à l'intérieur oscille une hauteur d'eau autour d'une position d'équilibre.

Ce test admet une solution analytique qui est donnée par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} h(r, t) = H_0 \left(\frac{\sqrt{1-D^2}}{1-D \cos(wt)} - 1 - \frac{r^2}{A^2} \left(\frac{1-D^2}{(1-D \cos(wt))^2} - 1 \right) \right) \\ u = \frac{1}{1-D \cos(wt)} (0.5wx D \sin(wt)) \\ v = \frac{1}{1-D \cos(wt)} (0.5wy D \sin(wt)) \\ r = x^2 + y^2 \end{array} \right.$$

la fréquence w est : $w = \sqrt{\frac{8gH_0}{A^2}}$.

et D est : $D = \frac{A^2 - R_0^2}{A^2 + R_0^2}$.

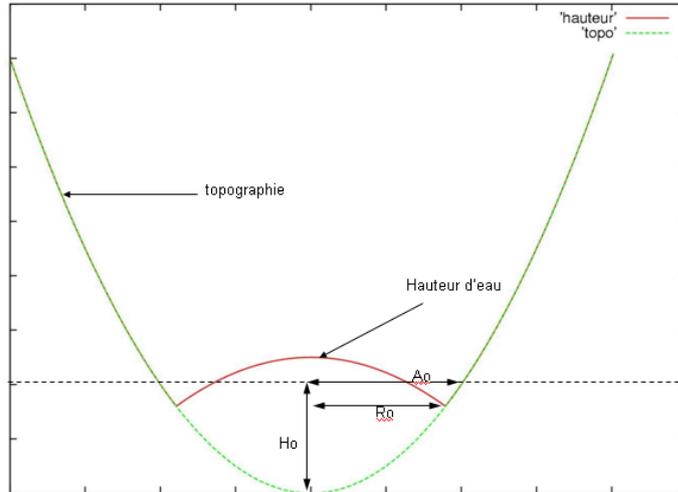


FIG. 24 – condition initiale

Pour faire les simulations nous avons pris comme conditions initiales le système ci-dessus au temps $t=0$ avec $A=1$, $R_0 = 0.8$ et $H_0 = 0.1$ (fig.24). Normalement sans prise en compte des frottements, on devrait avoir une hauteur d'eau qui oscille à l'infini. A l'ordre un on peut constater un amortissement important des oscillations, ceci étant dû à la diffusion numérique du schéma d'ordre un (fig.25).

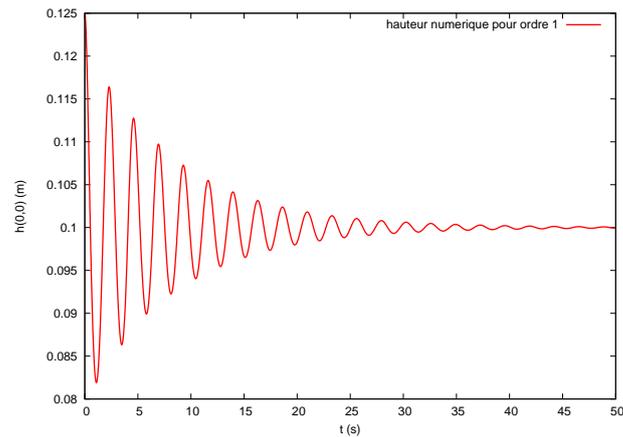


FIG. 25 – Hauteur numérique au milieu de la parabole à l'ordre 1, pour $dt=0.002, dx=dy=0.02$

On peut aussi constater que la montée en ordre deux a bien amélioré le résultat car la perte d'amplitude des oscillations est beaucoup moins élevée (fig.26). Le schéma à l'ordre deux est bien moins diffusif.

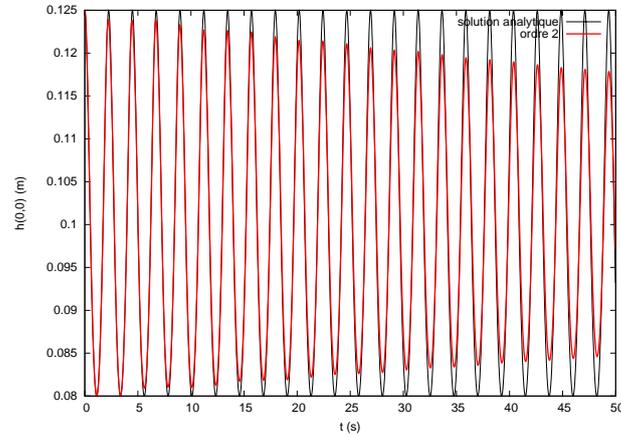


FIG. 26 – Hauteur numérique au milieu de la parabole à l'ordre 2, pour $dt=0.002, dx=dy=0.02$

Pour essayer de comparer la diffusion numérique due à l'ordre un avec le rajout d'un terme de frottement, nous avons refait le test à l'ordre deux pour le flux HLL avec différents coefficients de frottement pour la loi de Manning. Nous obtenons la meilleure similitude pour un coefficient de friction égal à 0,045 (fig.27) :

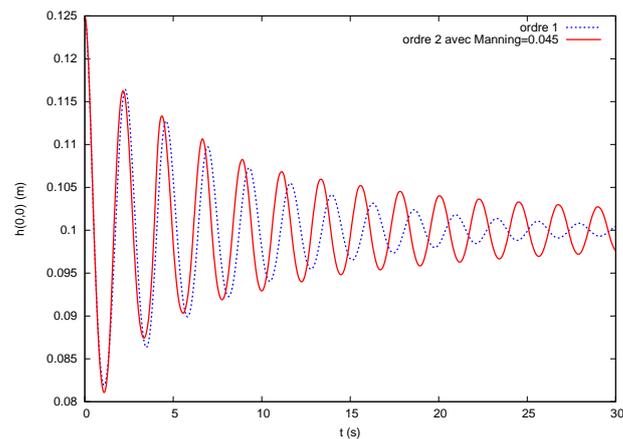


FIG. 27 – Hauteur numérique au milieu de la parabole à l'ordre 2, pour $dt=0.002, dx=dy=0.02$

Exemple II :

Ce deuxième test de Thacker est celui de la solution plane, il est assez difficile pour le modèle numérique car il implique des procédures sec/mouillé sur une configuration initiale non symétrique radialement. La solution exacte est donnée par :

$$\begin{cases} h(x, y, t) = \frac{\eta H_0}{A^2} (2x \cos(\omega t) + 2y \sin(\omega t) - \eta) \\ u = -\eta \omega \sin(\omega t) \\ v = \eta \omega \cos(\omega t) \end{cases}$$

où $\omega = \sqrt{\frac{2gH_0}{A}}$. Pour les tests numériques nous avons pris comme valeurs, $A = 1$, $H_0 = 0.1m$, $\eta = 0.5m$.

Comme solution initiale pour la hauteur et la vitesse nous prenons la valeur de cette solution exacte évaluée en $t = 0$.

La solution obtenue est telle que le déplacement de l'eau est un cercle dans le plan (x,y) dont le centre tourne en orbite autour du centre du bassin tandis que la surface reste plane avec une pente constante à tout instant.

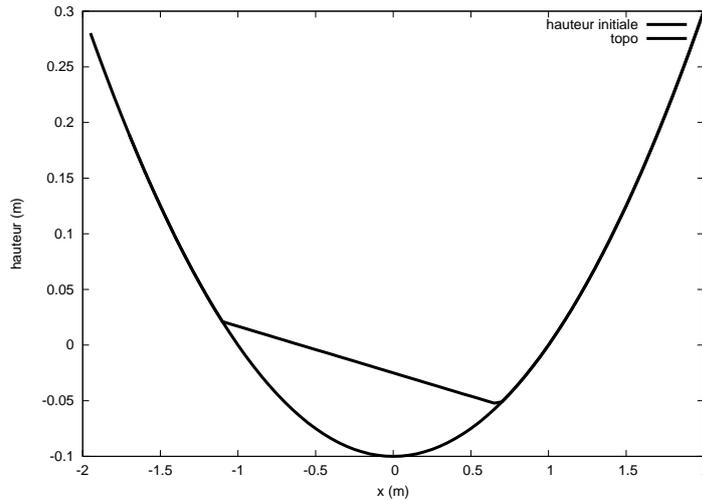


FIG. 28 – Coupe de la hauteur d'eau initiale

Et au bout de deux périodes on obtient :

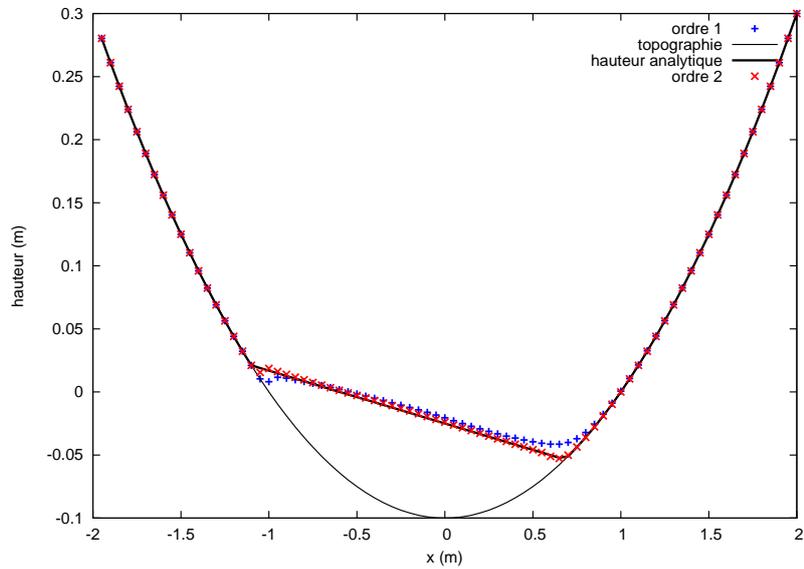
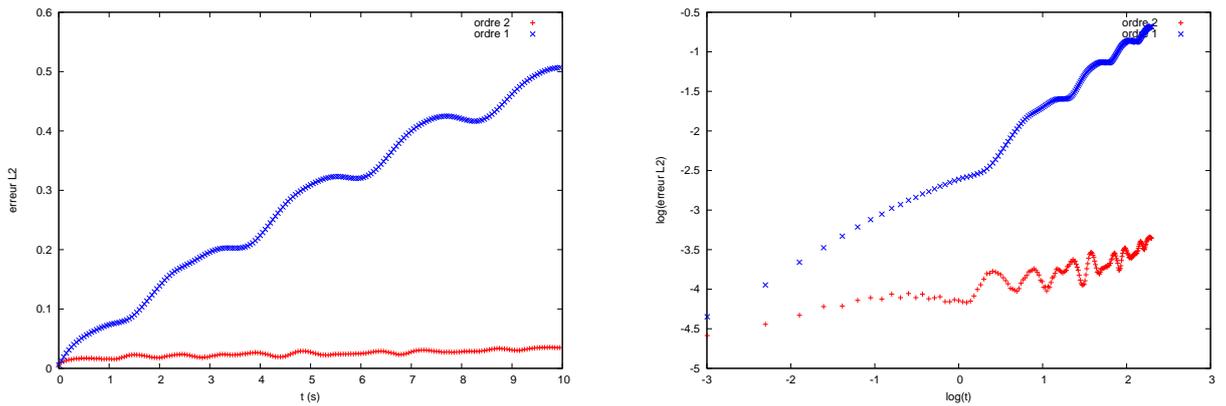


FIG. 29 – Comparaison des hauteurs d'eau à l'instant $t=2T$, $dx = dy = 5.10^{-2}$ et $dt= 5.10^{-3}$.

On peut voir que l'ordre un diffuse plus que l'ordre deux au niveau des interfaces sec/mouillé, au bord du parabolöide, et qu'ainsi il est moins précis. Pour mieux se rendre compte de ce phénomène de diffusion au cours du temps, on a tracé les graphes de comparaison des normes L2 de l'erreur commise sur la hauteur d'eau.



A gauche : Norme L2 de l'erreur relative sur la hauteur d'eau en fonction du temps

A droite : Log de la norme L2 de l'erreur relative sur la hauteur d'eau en fonction du log du temps

En raffinant le maillage on obtient de meilleurs résultats et on peut remarquer que l'ordre deux est bien plus précis que l'ordre un (fig.30).

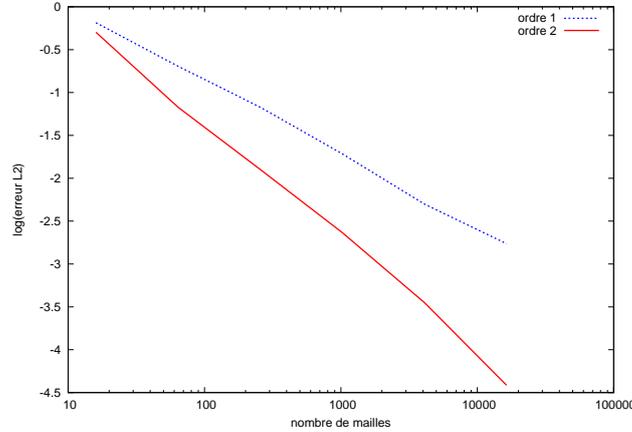


FIG. 30 – Log de l'erreur L2 sur la hauteur d'eau en fonction du nombre de mailles

Le schéma le plus précis étant celui dont la valeur absolue de la pente est la plus élevée, on a donc bien le schéma à l'ordre deux qui est plus précis qu'à l'ordre un et comme on l'a vu précédemment moins diffusif.

5.3.3 Tests avec prise en compte de la topographie et des frottements

Dans cette sous-partie nous allons tester deux cas test avec solution analytique en deux dimensions qui prennent en considération les frottements.

Ces tests figurent dans un rapport d'analyse numérique de I. MacDonald où il met en place une méthode pour construire des problèmes avec solution analytique pour les états d'équilibre du système de Saint-Venant (MacDonald et al, 1995).

La méthode pour créer de telles solutions est une 'méthode inverse' : on choisit le profil de la hauteur d'eau et on en déduit la topographie du domaine.

En effet, si on impose le profil de la hauteur d'eau $h(x,y)$, en supposant que le débit est constant ainsi que la surface mouillée, on obtient l'expression de la topographie en fonction de la hauteur d'eau. Dans ces deux tests, nous prendrons comme loi de frottement celle de Manning.

Exemple I :

Pour le premier exemple nous nous plaçons dans un canal rectangulaire de 1 km de long sur 10 m de large. Le flux à l'entrée comme à la sortie est torrentiel et la hauteur d'eau en sortie est de 0,741599 m.

La valeur du débit constant est de $20 \text{ m}^3/s$.

Le coefficient de frottement de Manning est ici égal à 0,0218 et la pente de la topographie, c'est-à-dire $-\frac{\partial z}{\partial x} = S_0(x)$ est donnée par :

$$S_0(x) = \left(1 - \frac{4}{g\hat{h}(x)^3}\right)\hat{h}'(x) + \frac{4n^2}{\hat{h}(x)^{10/3}},$$

où

$$\hat{h}(x) = \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \left(1 - \frac{1}{5} \exp\left(-36\left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right)^2\right)\right)$$

et

$$\hat{h}'(x) = \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \frac{9}{625} \left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right) \exp\left(-36\left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

La topographie ainsi obtenue est donnée figure 31.

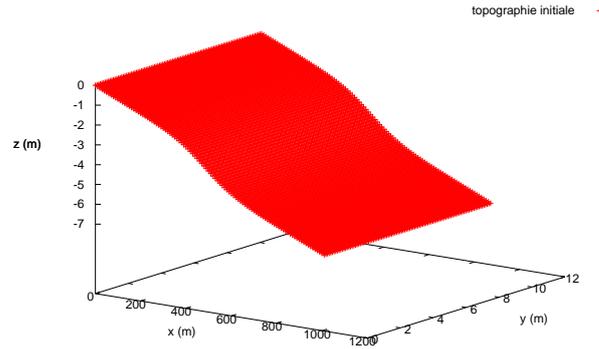


FIG. 31 – Topographie initiale calculée à partir de la hauteur d'eau

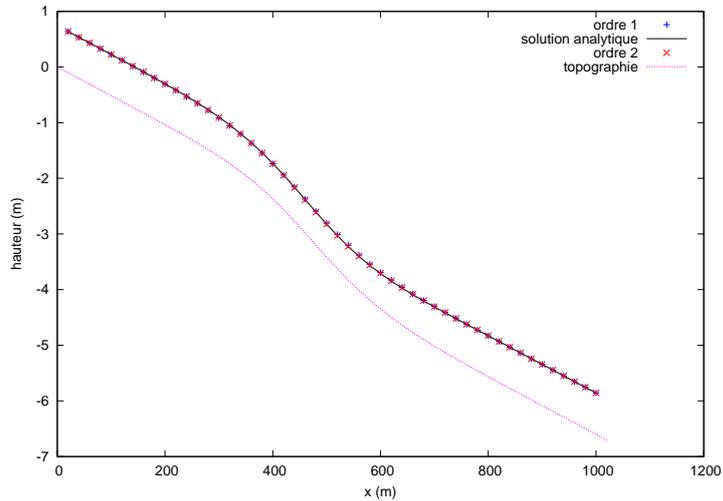


FIG. 32 – Comparaison des hauteurs d'eau à l'équilibre, à $t=6000s$, pour $dt=0.1$ et 500 mailles

On peut voir que la solution numérique de la hauteur d'eau colle bien à la solution exacte (fig.32).

Pour mieux voir la différence entre les deux ordres, regardons la norme L2 de l'erreur relative commise sur la hauteur d'eau au cours du temps (fig.33).

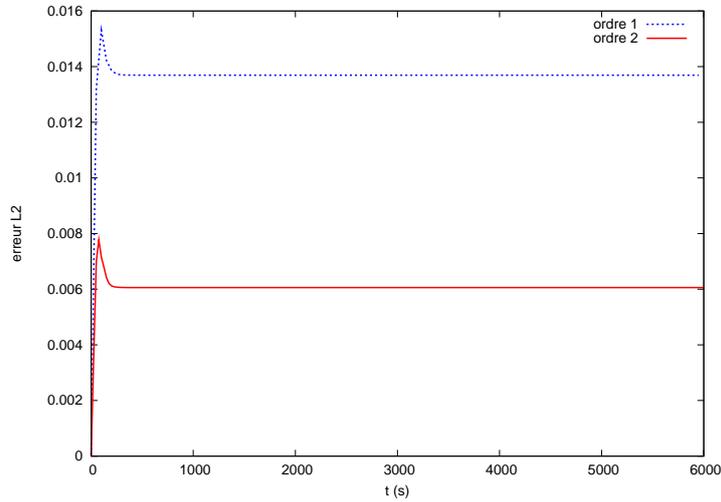
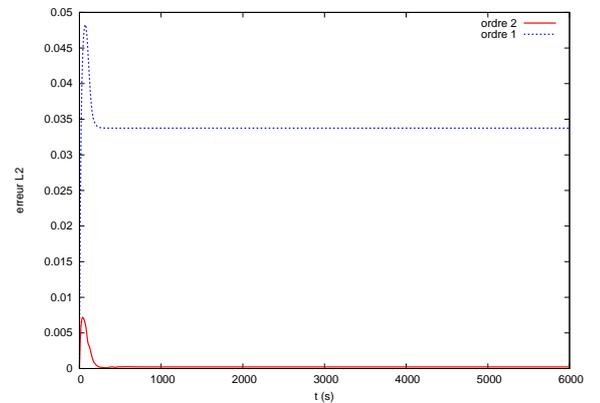
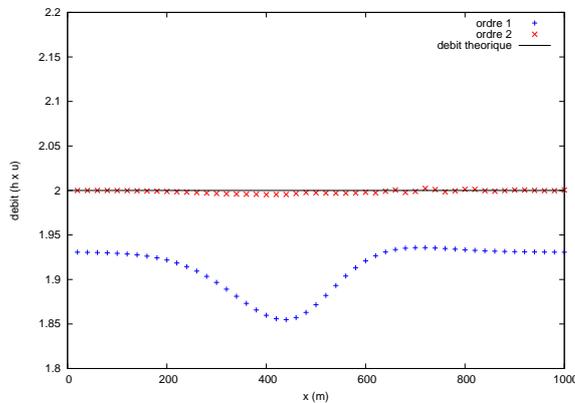


FIG. 33 – Norme L2 des erreurs faites sur la hauteur d'eau, pour $dt=0.1$ et 500 mailles

De plus, dans cette série de cas test analytiques, d'après les hypothèses initiales, nous devrions obtenir un débit constant tout le long du domaine.

Observons donc le débit calculé à un temps $t=6000$ s en fonction de l'axe des x (l'état d'équilibre y est bien atteint), nous le prenons au milieu du canal (i.e pour $y=5$ m).

Le débit théorique est égal à $2 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.



A gauche : Conservation du débit, à $t=6000$ s, pour $dt=0.1$ et 500 mailles

A droite : Norme L2 de l'erreur relative faite sur le débit, à $t=6000$ s, pour $dt=0.1$ et 500 mailles

Dans le but d'améliorer encore plus la justesse du résultat on peut raffiner le maillage, on obtient la comparaison des erreurs entre l'ordre un et l'ordre deux :

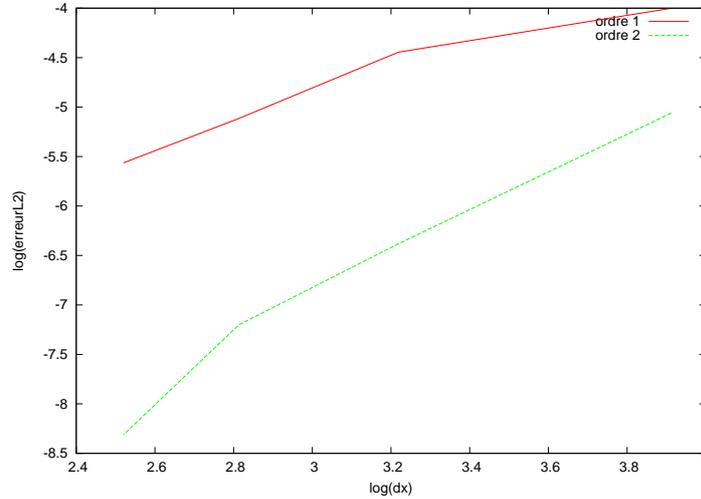


FIG. 34 – Log de l'erreur L2 sur la hauteur d'eau en fonction du log du pas d'espace dx

Nous obtenons donc le schéma à l'ordre deux qui est bien plus précis et moins diffusif qu'à l'ordre un.

Exemple II :

Dans cet exemple, nous allons pouvoir tester le code dans le cas d'un changement de régime.

Ici nous nous plaçons dans un canal rectangulaire d'un kilomètre de long et 10 m de largeur.

La valeur du débit constant est de $20 \text{ m}^3/\text{s}$.

Nous imposons en entrée un débit torrentiel et une hauteur d'eau égale à 0,543853 m et en sortie un débit fluvial ainsi qu'une hauteur de 1,334899 m. La fonction définissant la hauteur d'eau change de régime via un saut hydraulique à mi-chemin.

Nous allons donc pouvoir observer comment réagit le code sur un tel changement. Le coefficient de frottement de Manning est ici égal à 0,0218 et la pente de la topographie, c'est-à-dire $S_0(x) = -\frac{\partial z}{\partial x}$ est donnée par :

$$S_0(x) = \left(1 - \frac{4}{g\hat{h}(x)^3}\right)\hat{h}'(x) + \frac{4n^2}{\hat{h}(x)^{10/3}},$$

où

$$\hat{h}(x) = \begin{cases} \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \left(\frac{9}{10} - \frac{1}{6} \exp\left(\frac{-x}{1000}\right)\right) & 0 \leq x \leq 500 \\ \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \left(1 + \sum_{k=1}^3 a_k \exp\left(-20k\left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{4}{5} \exp\left(\frac{x}{1000} - 1\right)\right) & 500 < x \leq 1000, \end{cases}$$

$$\hat{h}'(x) = \begin{cases} \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \frac{1}{1500} \exp\left(\frac{-x}{250}\right) & 0 \leq x \leq 500 \\ \left(\frac{4}{g}\right)^{1/3} \left(-\frac{1}{50} \sum_{k=1}^3 k a_k \exp\left(-20k\left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{1250} \exp\left(\frac{x}{1000} - 1\right)\right) & 500 < x \leq 1000, \end{cases}$$

avec $a_1 = -0.348427$, $a_2 = 0.552264$, $a_3 = -0.555580$.

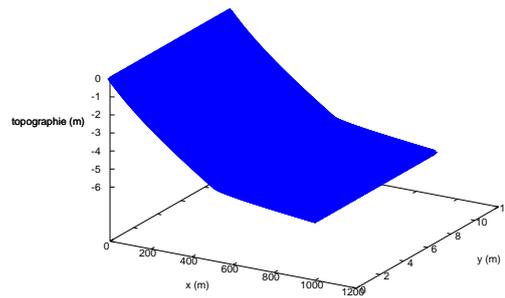


FIG. 35 – Topographie initiale calculée à partir de la hauteur d'eau

La hauteur d'eau à l'état d'équilibre a la forme suivante :

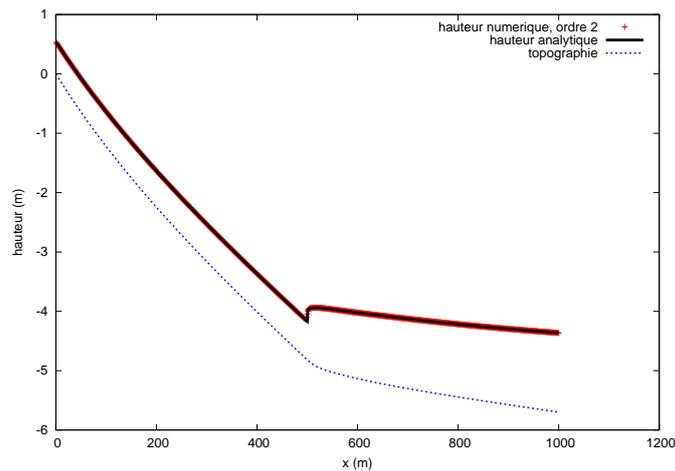


FIG. 36 – Hauteurs d'eau numérique et analytique pour $t=1600s$, à $y=5m$, et pour $dx=dy=1$ et $dt=0.02$

Pour bien voir la différence entre l'ordre un et l'ordre deux on a juste regardé ce qui se passait au niveau du ressaut. On voit clairement que l'ordre deux se rapproche plus de la solution analytique (fig.37) alors que l'ordre un se décolle. Pour mieux comparer, on a tracé la courbe de la norme L2 de l'erreur relative faite sur la hauteur d'eau au cours du temps (fig.38), on voit nettement que l'erreur commise à l'ordre deux est inférieure à celle commise à l'ordre un.

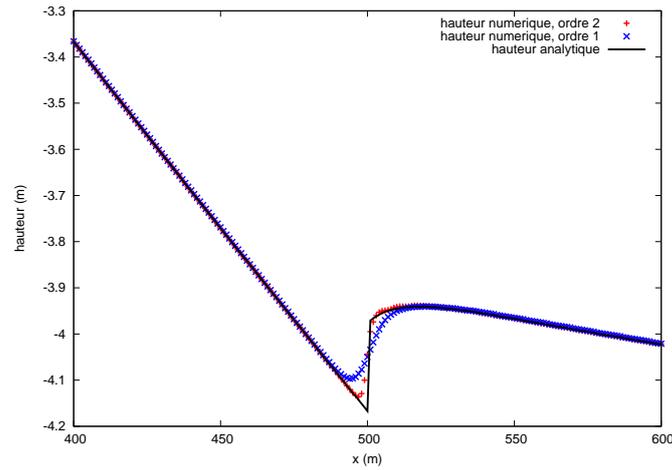


FIG. 37 – Hauteurs d'eau numériques et analytique pour $t=1600s$, à $y=5m$, et pour $dx=dy=1$ et $dt=0.02$

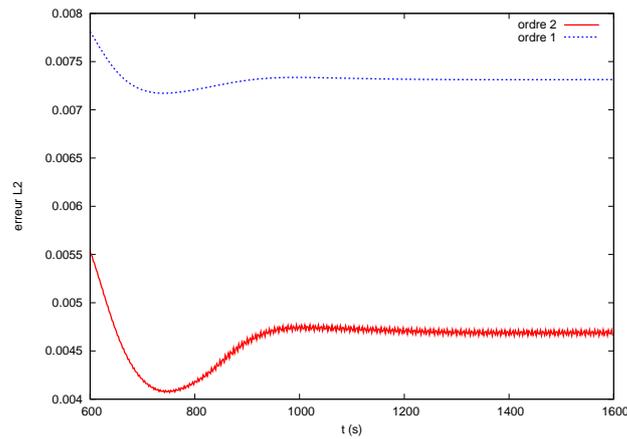


FIG. 38 – Norme L2 de l'erreur faite sur la hauteur d'eau au cours du temps, en $y=5m$, pour $dx=dy=1$ et $dt=0.02$

De même que pour l'exemple précédent, par les hypothèses faites nous devrions obtenir un débit constant à l'équilibre. Nous avons donc calculé le débit en fonction de x ($h \times \sqrt{u^2 + v^2}$) pour un y constant (au milieu du domaine) une fois l'état d'équilibre atteint (fig.39 et fig.40).

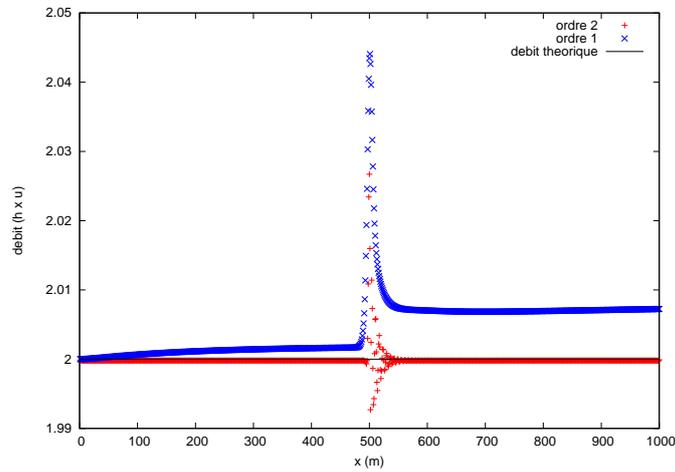


FIG. 39 – Débit à l'équilibre calculé en $y=5$ m, pour $dx=dy=1$ et $dt=0.02$

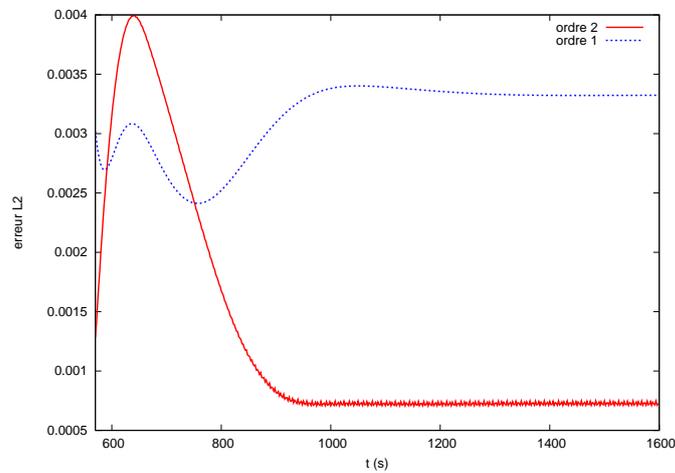


FIG. 40 – Norme L2 de l'erreur relative faite sur le débit au cours du temps, pour $dx=dy=1$ et $dt=0.02$

Ici encore l'ordre deux se révèle bien plus précis et stable que l'ordre un.

5.3.4 Tests avec topographie, frottements et terme source pluie.

Nous allons maintenant rajouter le terme source pluie et regarder le comportement du schéma avec splitting.

Nous nous plaçons sur un domaine $[0, 4] \times [0, 1]$, ceci pourrait s'apparenter à une petite parcelle, nous prenons comme topographie une pente d'environ 5%.

Nous faisons pleuvoir sur l'ensemble du domaine avec une intensité de $0,055 \text{ m/h}$ entre les instants $t=10 \text{ s}$ et $t=230 \text{ s}$, la durée de simulation est de 300 s .

Ici nous prenons la loi de Darcy-Weisbach comme loi de frottement.

En faisant varier le coefficient de frottement on obtient différents flux à l'exutoire, comme le montre le graphe ci-dessous :

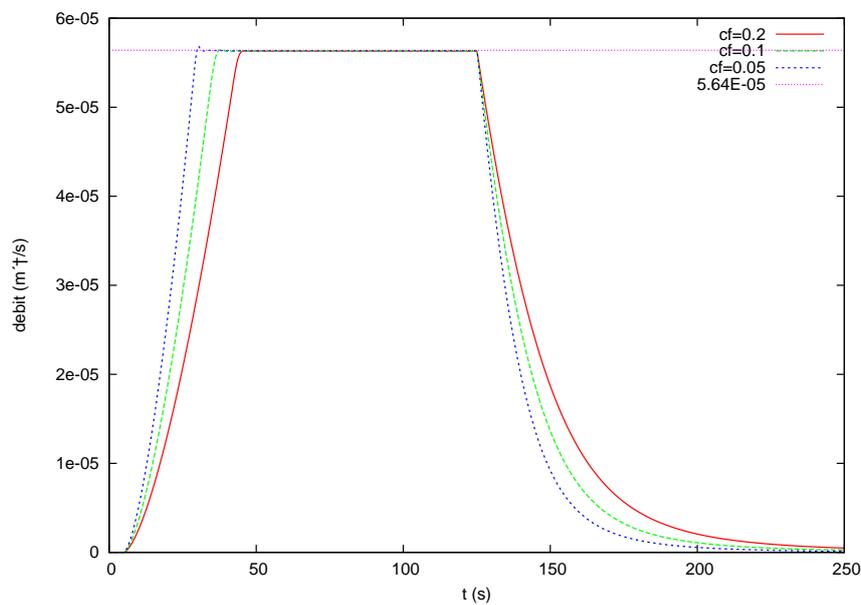


FIG. 41 – Comparaison des flux à l'exutoire pour différents coefficients de frottements

On remarque que l'augmentation du coefficient de frottement retarde l'arrivée du plateau et ralentit la durée d'assèchement. Ceci correspond bien à la réalité car plus il y aura de frottements plus l'eau va mettre du temps à s'écouler et donc plus le volume d'eau infiltrée sera élevé.

5.3.5 Tests prenant en compte la topographie, la pluie et le processus d'infiltration

Exemple I :

Dans cette sous partie nous allons tester le code avec la prise en considération du processus d'infiltration. Comme nous ne connaissons pas de solutions analytiques avec les équations d'infiltration nous ne pourrons pas tirer de conclusions sur les résultats obtenus. Mais nous pourrons tout de même regarder le bon (ou mauvais) comportement du schéma et comparer l'ordre un avec l'ordre deux.

Nous faisons donc pleuvoir sur un domaine $([0, 4] \times [0, 1])$ de pente 5%. Le taux de pluie est égale à $0,055 \text{ m/h}$ entre l'instant $t = 10 \text{ s}$ et $t = 230 \text{ s}$, la durée de simulation est de 300s. On récupère l'eau à l'exutoire et on compare le volume d'eau infiltré+le volume d'eau ruisselé avec le volume de pluie.

Nous avons pris $dx = dy = 5.10^{-2}$ et $dt = 1.10^{-2}$.

Les histogrammes ci-dessous représentent le bilan des pertes d'eau en fonction de la perméabilité du sol pour quatre configurations différentes : ordre un et deux sans frottement, ordre un et deux avec frottements.

Pour les valeurs des coefficients nécessaires au modèle d'infiltration voir tableau page 26.

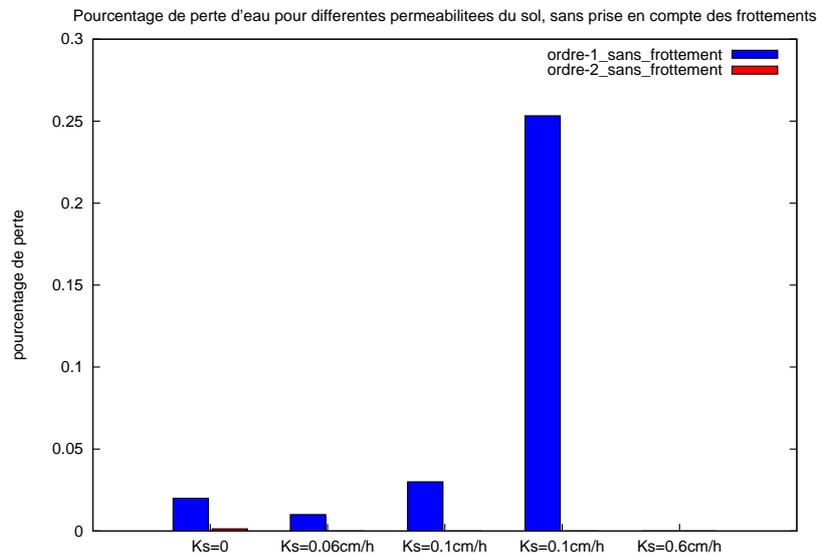


FIG. 42 – Bilan des pertes d'eau pour différents Ks, sans prise en compte des frottements

On peut constater d'une part que le schéma à l'ordre deux est moins diffusif qu'à l'ordre un, il conserve mieux les volumes. Et d'autre part il semble beaucoup mieux se comporter qu'à l'ordre un avec le rajout du terme de frottements.

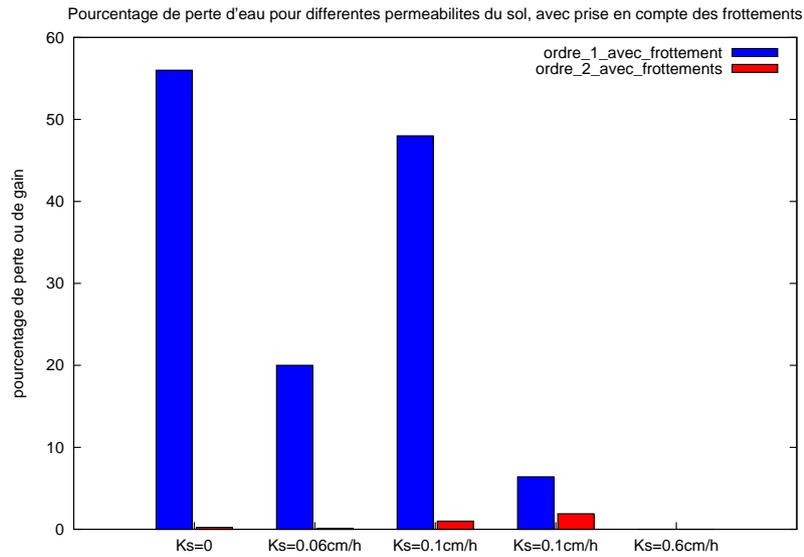


FIG. 43 – Bilan des pertes d'eau pour différents Ks, avec prise en compte des frottements

Exemple II :

Maintenant nous allons refaire une simulation mais cette fois-ci sur la topographie d'une parcelle réelle avec un coefficient de frottement non uniforme sur tout le domaine.

Nous allons nous intéresser à l'importance de la répartition des coefficients de frottements sur le ruissellement.

Nous reprenons ici le même taux de pluie ($=0,055 \text{ m/h}$), entre les instants $t = 10 \text{ s}$ et $t = 230 \text{ s}$ et la durée de simulation est de 700 s.

La parcelle mesure 15 mètres de long par 5 mètres de large.

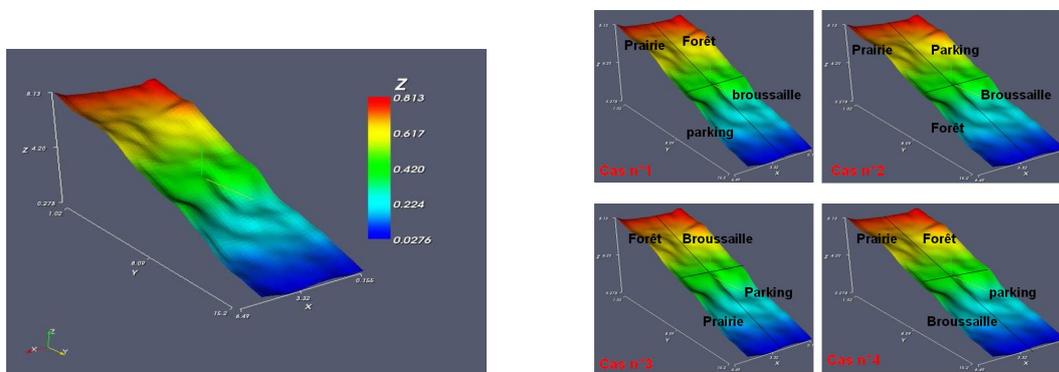


FIG. 44 – Répartition des coefficients de frottement

On récupère le flux à l'exutoire, la courbe ci-dessous (fig.45) représente le débit cumulé en fonction du temps pour les différentes dispositions des coefficients de frottement.

On peut voir tout d'abord que les volumes sont conservés à l'ordre deux, le débit théorique étant égal au volume de pluie ruisselé total (ici on suppose le sol imperméable) alors qu'à l'ordre un on n'a pas conservation des volumes. En effet l'ajout d'un terme de frottement à l'ordre un rend le schéma non conservatif, d'où la nécessité de passer à l'ordre deux pour pouvoir prendre en compte le terme de friction.

De plus on constate que le débit le plus lent est celui qui représente le cas où les plus forts coefficients sont mis en bas de la pente. On pourrait le représenter de la manière suivante : sur un terrain en pente, la présence d'une végétation dense (=fort coefficient de frottement) ralentit plus le ruissellement quand celle-ci se situe en bas de la pente que quand elle se trouve en haut. Ce genre de simulations pourrait être utile par exemple pour des aménagements de terrain et dans ce cas le passage à l'ordre deux est donc nécessaire.

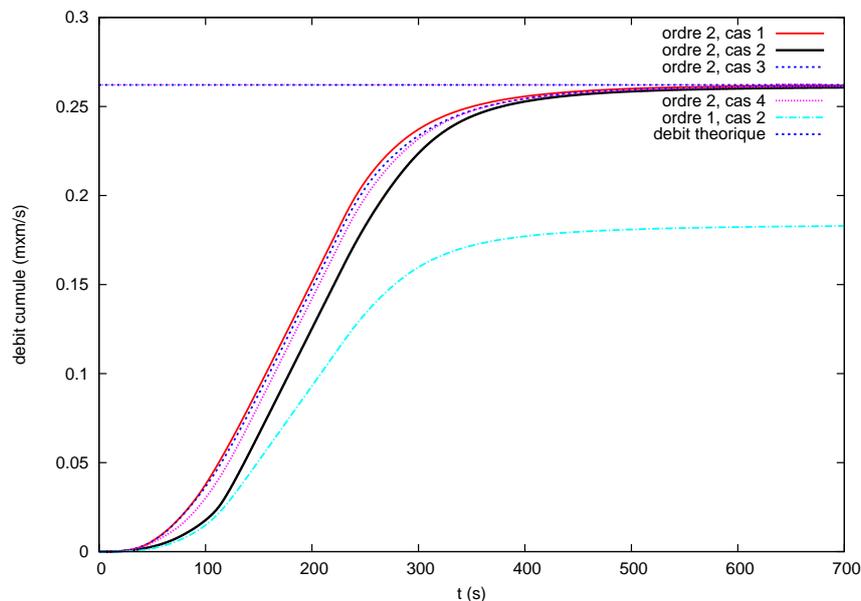


FIG. 45 – Flux cumulé à l'exutoire pour différentes dispositions

5.3.6 Cas tests réels

Pour finir, nous avons pu utiliser le code sur des événements pluvieux réels. En effet une expérience a été menée au Niger sur la parcelle précédente (fig.44), expérience qui a permis de mesurer les débits d'eau à l'exutoire de la parcelle lors de différents épisodes pluvieux.

Michel Esteves a eu la gentillesse de nous communiquer les données portant sur ces expériences (topographie et dimensions de la parcelle, coefficient de frottement du sol, paramètres d'infiltration, débits de pluie, débits mesurés à l'exutoire...).

Grâce à ces mesures nous avons pu comparer les résultats obtenus par notre code à l'ordre deux (avec prise en compte de l'infiltration et des frottements), par le code à l'ordre un (sans frottement) et les résultats observés.

La loi de frottement utilisée ici est celle de Darcy-Weisbach, le coefficient était donné et égal à 0,25. Pour la variable d'infiltration K_s (conductivité hydraulique à saturation) nous avons procédé à un calibrage afin de trouver la valeur qui coïncidait le mieux avec les résultats observés.

K_s (m/h)	$\Psi(m)$	θ_s	coefficient de friction
6.10^{-8}	1,3795	0,296	0,25

FIG. 46 – Paramètres d'infiltration et de frottements

Afin de réaliser ces comparaisons nous avons donc tracé les courbes représentant les débits instantanés à l'exutoire (page 54).

De plus, nous avons utilisé le critère de Nash qui est, en hydrologie, un critère permettant de mesurer l'écart entre les valeurs simulées à l'aide du modèle et les valeurs mesurées.

Il est défini par la formule suivante :

$$Nash = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T (Q_t^s - Q_t^m)^2}{\sum_{t=1}^T (Q_t^m - \bar{Q}^m)^2}$$

Q_t^s le débit simulé à l'instant t

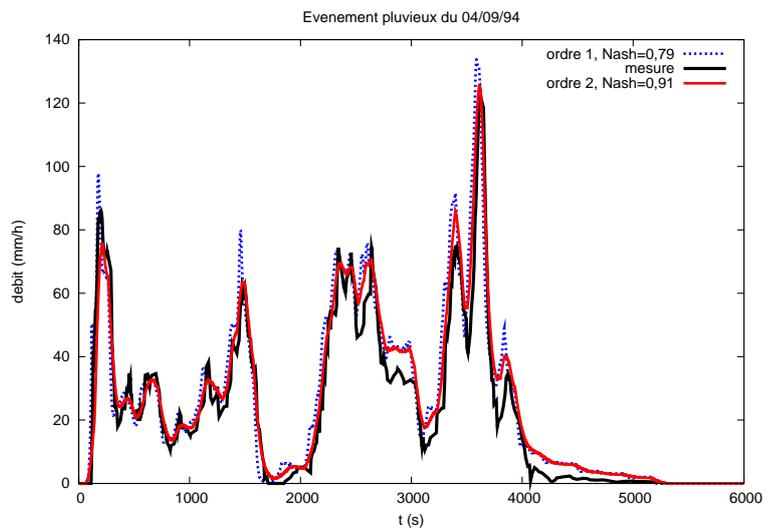
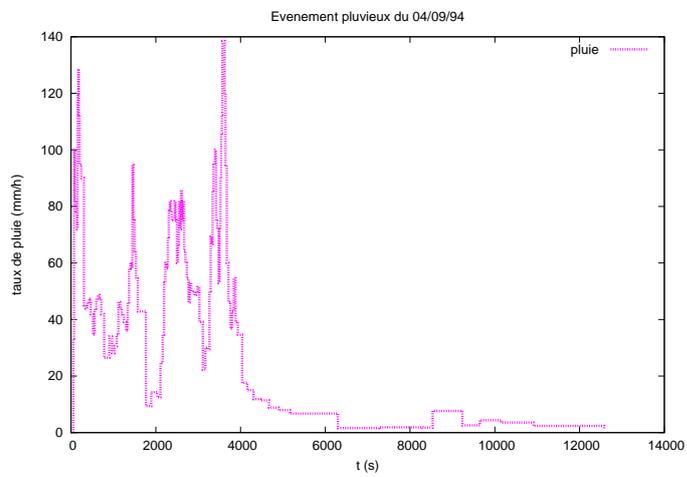
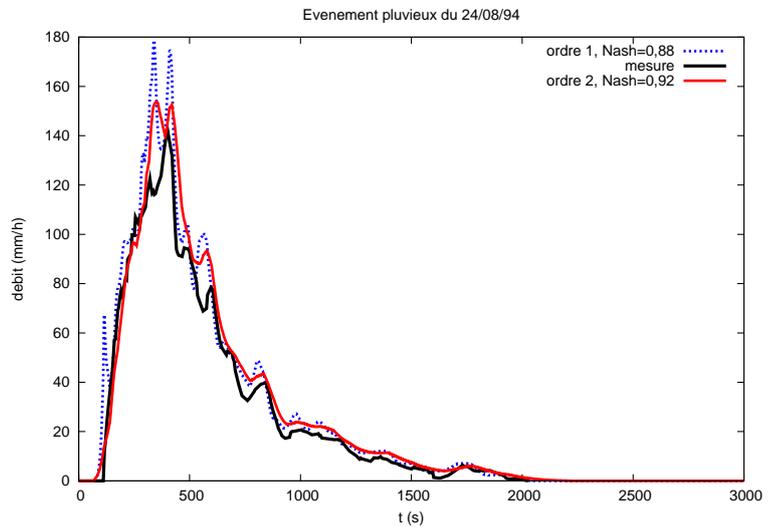
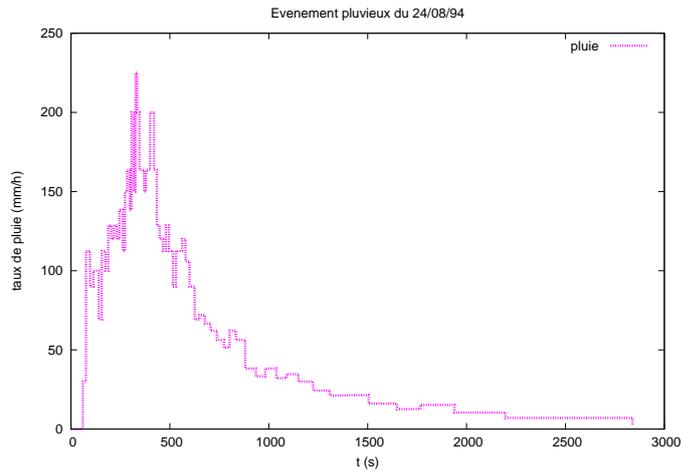
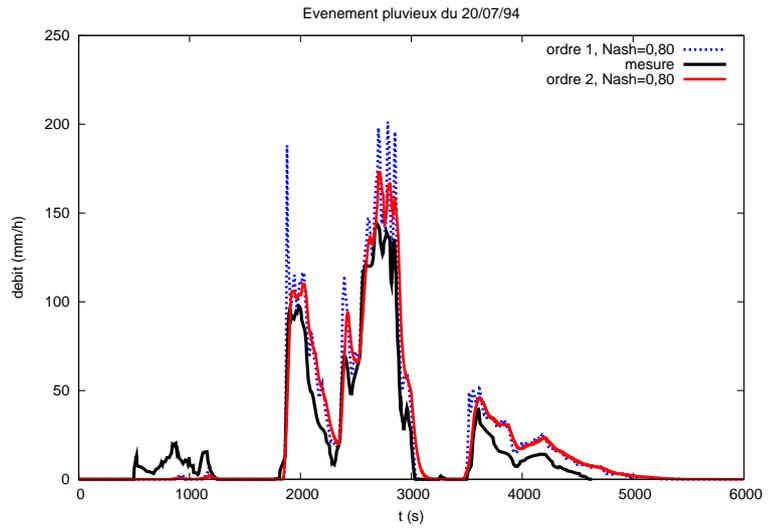
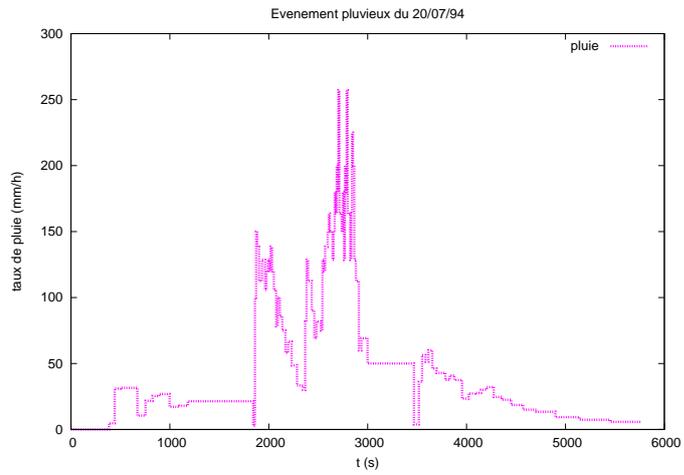
Q_t^m le débit mesuré à l'instant t

\bar{Q}^m la moyenne des débits mesurés.

Le critère de Nash prend donc ses valeurs entre $-\infty$ et 1, un Nash égal à 1 signifiant un ajustement parfait entre les valeurs simulées et les valeurs mesurées.

Date de l'évènement			Ordre un	Ordre deux
Taux de pluie moyen (mm/h), total (mm/h)				
20/07/94	90,41	9403,06	0,80	0,80
21/07/94	48,11	5773,30	0,47	0,43
10/08/94	40,16	963,85	0,35	0,65
20/08/94	29,00	1305,18	0,78	0,84
24/08/94	65,62	6024,35	0,88	0,92
25/08/94	59,29	2905,34	0,77	0,82
04/09/94	55,86	6982,83	0,79	0,91
08/09/94	144,56	4625,78	0,51	0,66
16/09/94	28,21	564,28	0,38	0,25

FIG. 47 – Nombre de Nash pour chacun des évènements pluvieux en fonction de l'ordre du schéma.



Les courbes précédentes (page 54) représentent les débits instantanés à l'exutoire en fonction du temps pour trois des événements pluvieux simulés. Les autres événements se trouvent en annexe (Annexe A).

On peut y voir que même si le nombre de Nash est peu différent pour les deux ordres, l'ordre deux paraît mieux représenter les débits observés. De plus, on peut aussi remarquer les pics numériques à l'ordre un au niveau des interfaces sec/mouillé (comme au début de l'évènement du 24 août), ces instabilités disparaissant au passage de l'ordre deux.

L'ordre deux semble sous-estimer les débits en début de simulation et les surestimer par la suite. Mais ceci étant lié aux coefficients d'infiltration, de frottement, constantes empiriques, il est difficile de savoir si on se place dans les bonnes conditions.

Par exemple pour l'évènement du 20 juillet, le pic observé au début n'apparaît pas dans la simulation. La diminution du coefficient d'infiltration K_s permet de le visualiser mais ceci engendre par la suite une trop forte estimation des débits (fig.48). On peut alors penser que le coefficient d'infiltration serait variable au cours du temps, ce qui pourrait être du à un phénomène d'hydrophobicité au début de la pluie, phénomène qui se produit en cas de sol très sec. Une autre hypothèse serait que le modèle d'infiltration choisi, Green-Ampt, ne serait pas le mieux adapté pour reproduire l'infiltration sur ce genre de sol.

A ce niveau il paraît difficile d'établir une conclusion, la différence entre les deux ordres n'étant pas assez évidente.

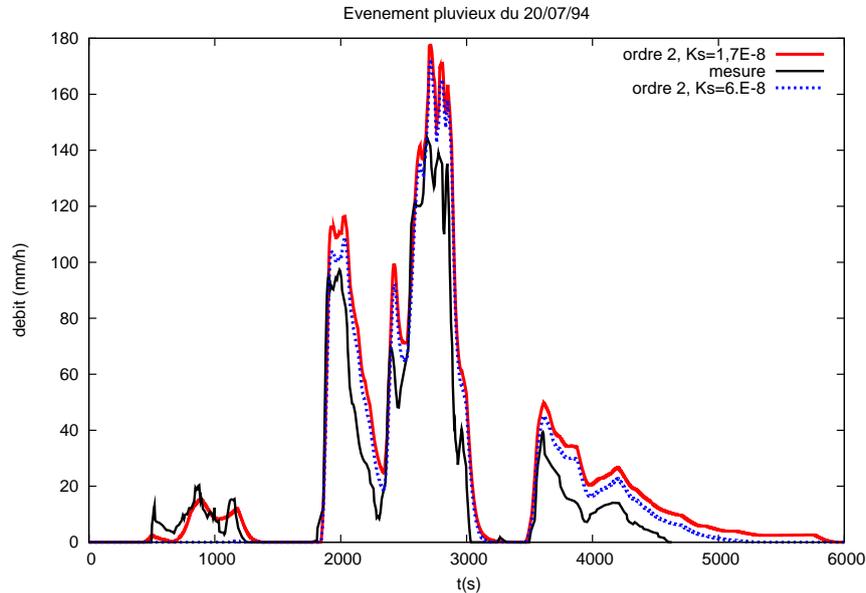


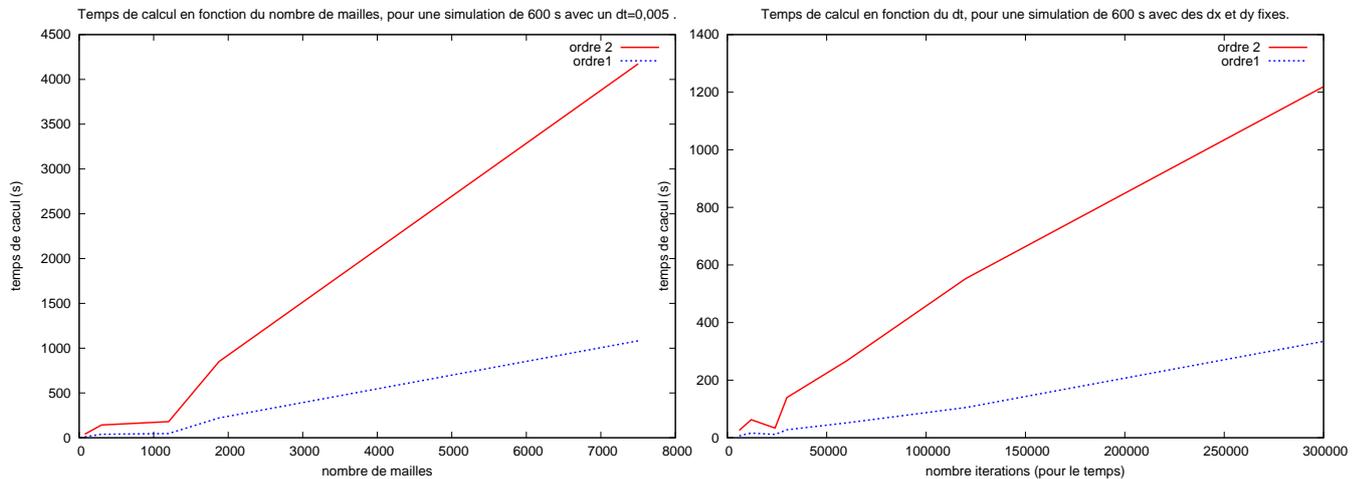
FIG. 48 – Comparaison de l'ordre 2 pour deux K_s différents

6 Discussion et conclusion

Nous avons donc vu que pour pouvoir prendre en considération le terme de friction il est nécessaire de passer à l'ordre deux, sans quoi nous perdons la conservation des volumes.

Mais dans les résultats précédents on a pu constater que pour certains cas l'ordre un sans frottement était plus proche ou équivalent des observations que l'ordre deux. On peut penser que pour les situations où les frottements n'ont pas, ou peu d'influence sur le ruissellement, l'ordre un s'avère suffisant, d'autant plus qu'il est largement moins coûteux en temps de calcul.

Les courbes suivantes représentent le temps de calcul en fonction, soit du nombre de mailles (à un pas de temps fixé), soit en fonction du nombre d'itérations (à un nombre de mailles fixe). Il est calculé pour une simulation faisant intervenir le processus d'infiltration, les frottements et la pluie pour chacun des ordres.



On voit donc que l'ordre deux s'avère être largement plus onéreux en temps de calcul que l'ordre un. Son coût provenant de toutes les reconstructions liées à l'ordre qu'on doit exercer à la fois sur les trois variables (u , h , z) et dans les deux directions d'espace.

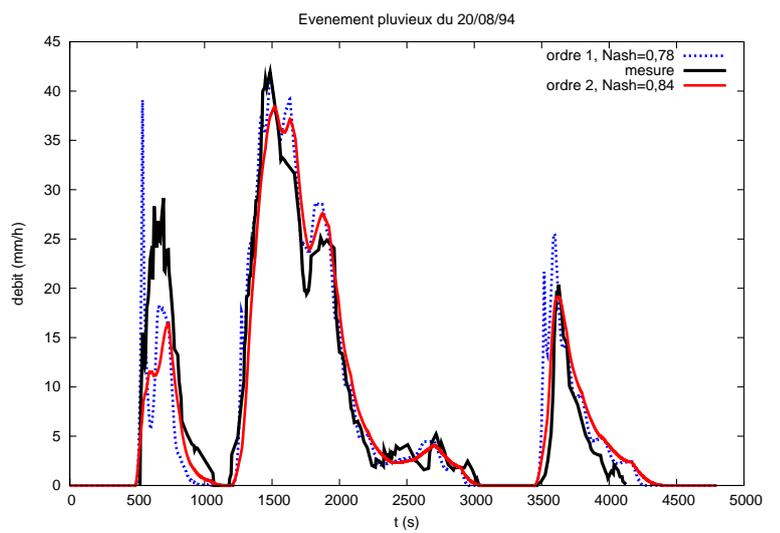
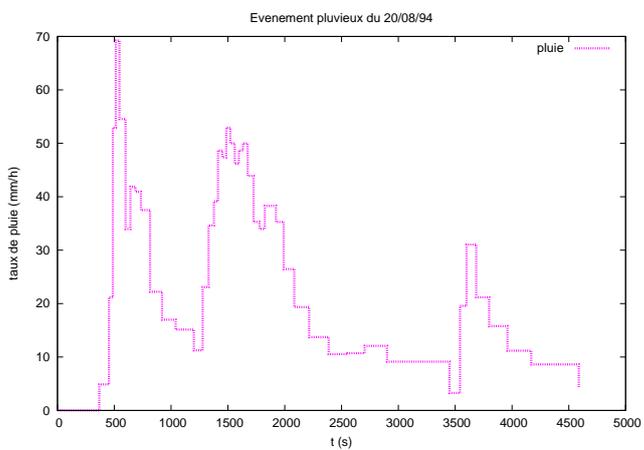
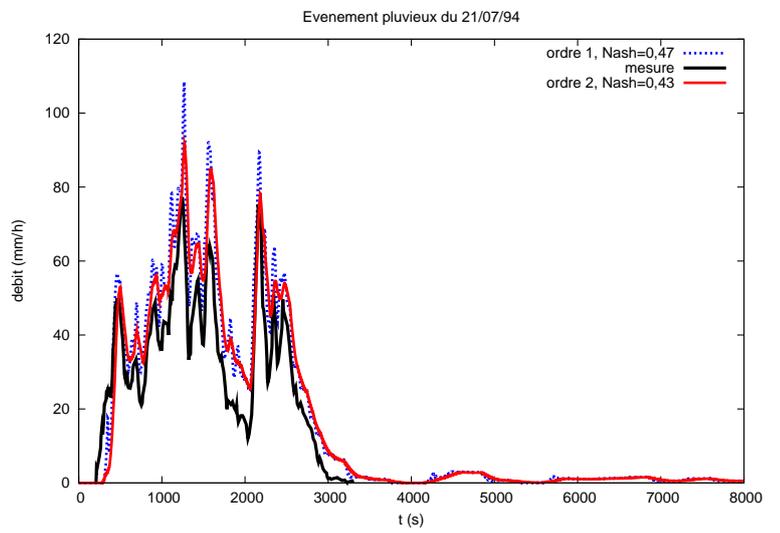
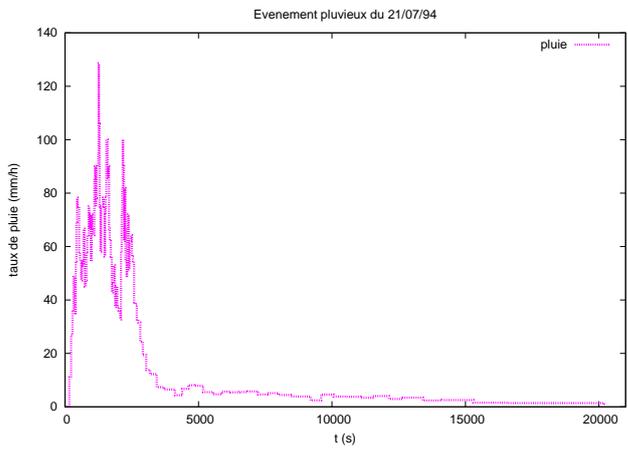
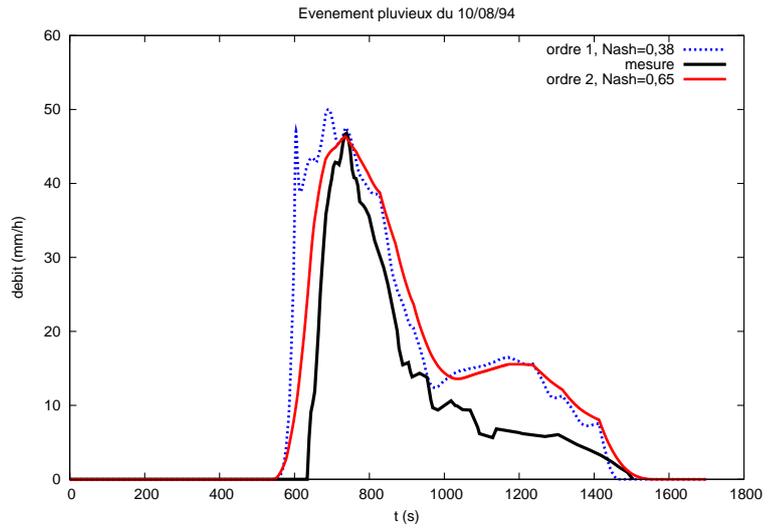
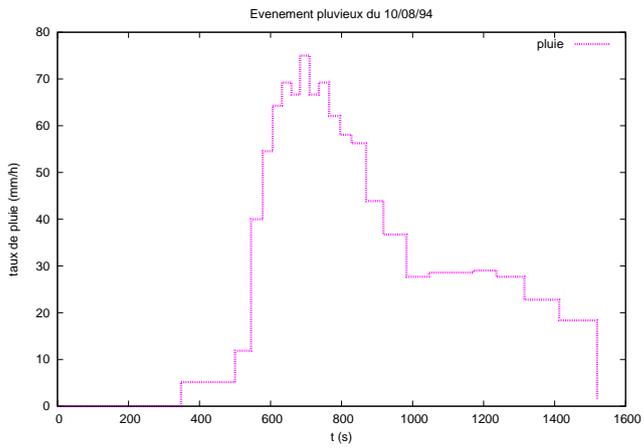
Comme dans les simulations réelles nous prenons un coefficient de frottement uniforme sur le domaine, il serait donc intéressant de tester une parcelle avec des coefficients variables en espace et plus élevés. Ce sont les perspectives pour la fin de ce stage, se placer dans un cas où les frottements auront des répercussions sur le ruissellement et donc où l'ordre deux se révélera être nécessaire.

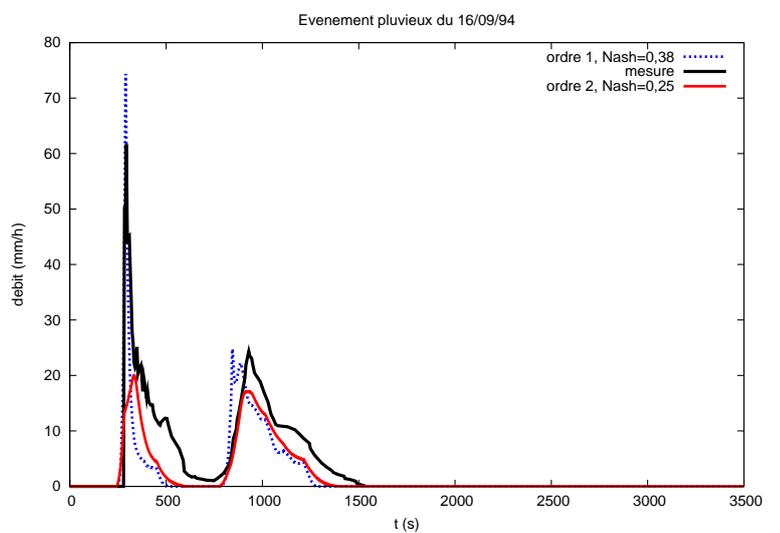
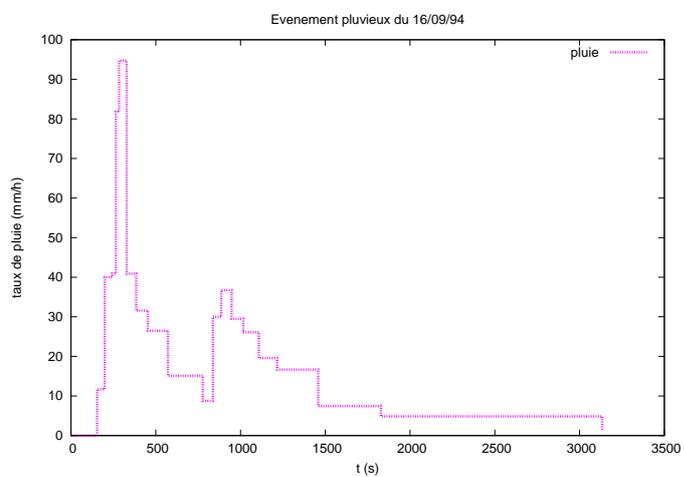
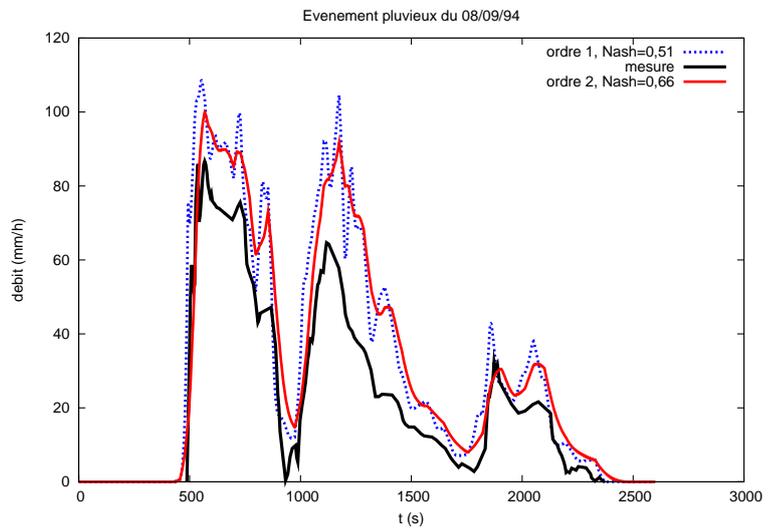
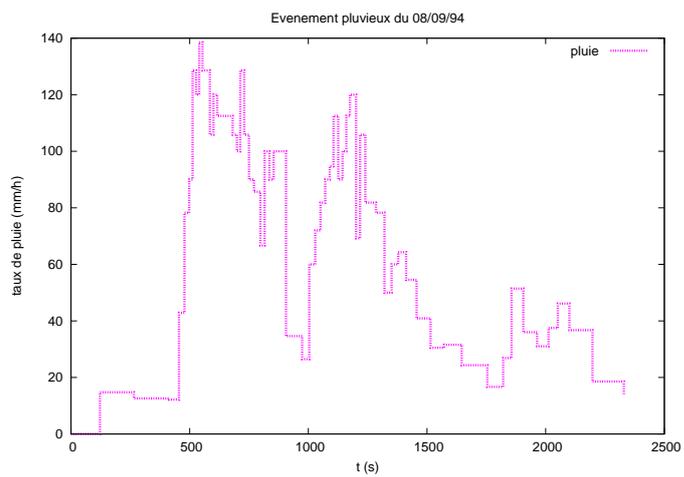
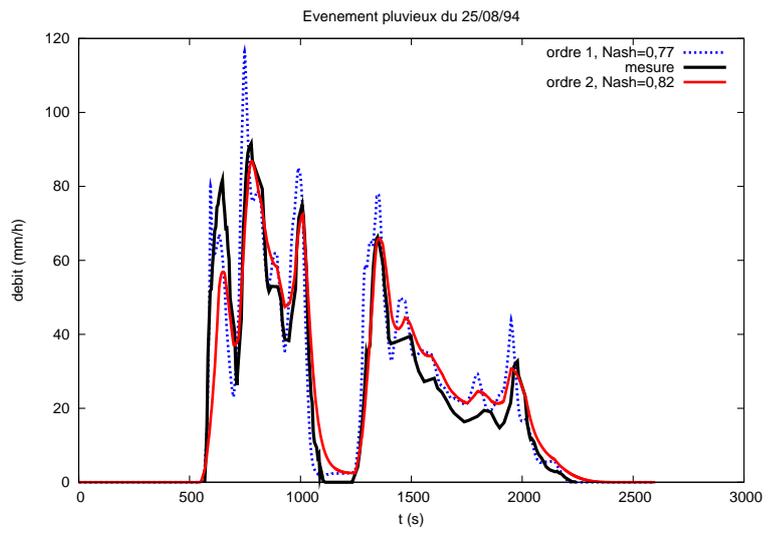
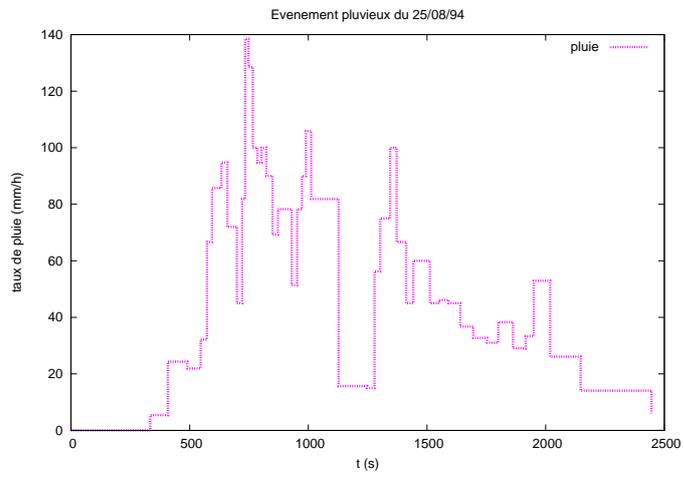
Ce stage de fin d'étude m'a permis de participer à un projet dans lequel j'ai pu travailler et échanger avec des personnes aux profils variés. C'était une expérience très enrichissante durant laquelle j'ai pu me familiariser avec l'hydrologie et acquérir des compétences en modélisation.

REFERENCES

- J.M. Hervouet, *Hydrodynamique des écoulements à surface libre, modélisation numérique avec la méthode des éléments finis*, Presse des Ponts et Chaussées, (2003).
- P.L. Viollet, J.P. Chabard, P. Esposito, D. Laurence, *Mécanique des fluides appliquée*, Presse des Ponts et Chaussées, (2003).
- J.M. Greenberg, A.Y. LeRoux, *A well balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations*, SIAM Journal on Numerical Analysis Vol.33 N°1, (1996).
- F. Bouchut, *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws, and well-balanced schemes for sources*, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser, (2004).
- E. Audusse, *Modélisation hyperbolique et analyse numérique pour les écoulements en eaux peu profondes*, Thèse, Université Paris VI, (2004).
- W.H. Green et G.A. Ampt, *Studies on soil physics : 1, The flow of air and water through soils*, J. Agric. Sci. 4, (1911), 1-24.
- M.O. Bristeau, B. Coussin, *Boundary conditions for the shallow water equations solved by kinetic schemes*, INRIA report RR-4282, (2001).
- Carrier GF, Greenspan HP, *Water waves of finite amplitude on a sloping beach*, J. Fluid Mech. 1958 ; 4 :97-109
- F. Marche, *Theoretical and Numerical Study of Shallow Water Models. Applications to Nearshore Hydrodynamics*, Thèse, Mathématiques Appliquées de Bordeaux, (2005).
- I. MacDonald, M.J. Baines, N.K. Nichols, P.G. Samuels, *Steady open channel test problems with analytic solutions*, Numerical Analysis Report 3/95, Department of Mathematics, University of Reading, (1995).
- M. Esteves et al., *Overland flow and infiltration modelling for small plots during unsteady rain : numerical results versus observed values*, Journal of Hydrology 228, (2000), 265-282.

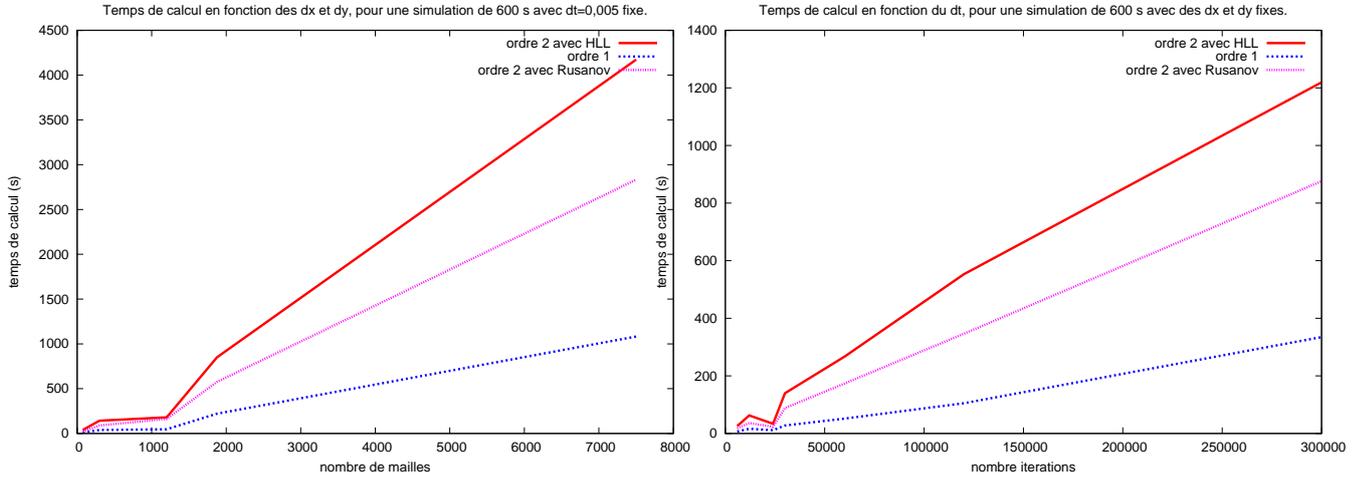
ANNEXE A





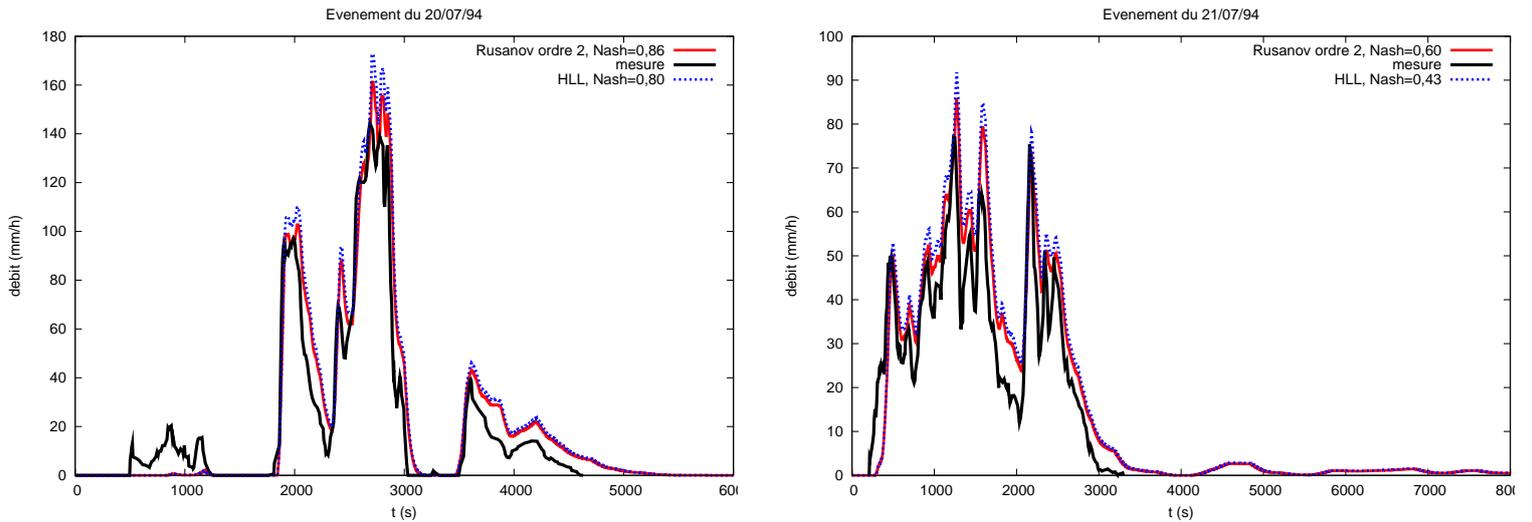
ANNEXE B

Les mêmes simulations, d'évènements pluvieux réels sur la parcelle au Niger, ont été refaites avec le flux de Rusanov, flux moins précis mais qui possède l'avantage d'être plus simple et donc de gagner en temps de calcul.

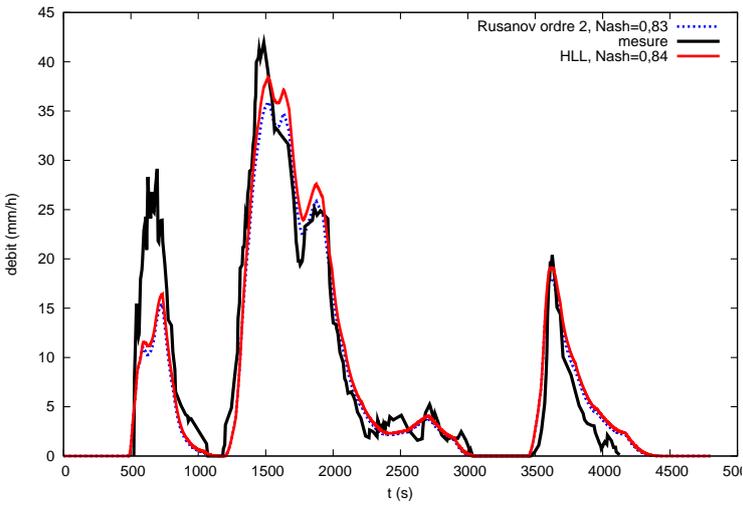


Sur les résultats qui suivent, on peut constater qu'on obtient de meilleurs nombres de Nash avec le flux de Rusanov. En effet, comme dans les simulations on semblait noter une tendance à surévaluer les débits, la diffusion numérique de ce flux engendre une diminution des débits, d'où de meilleurs résultats.

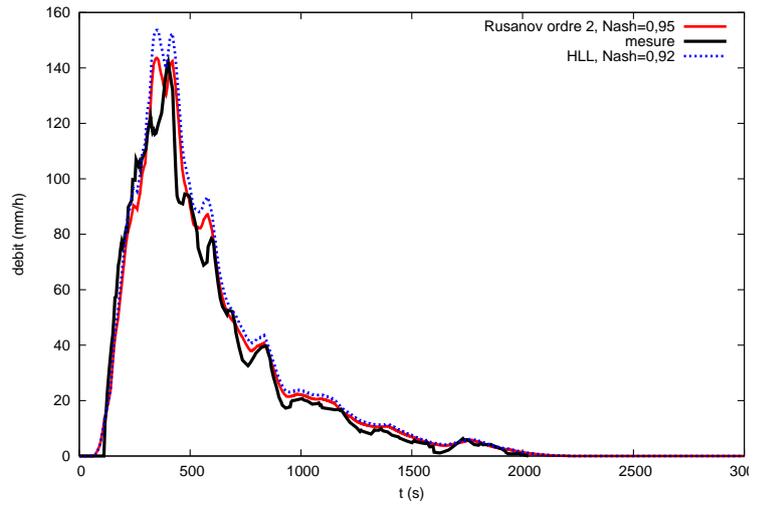
Courbes des débits instantanés (mm/h) à l'exutoire au cours du temps :



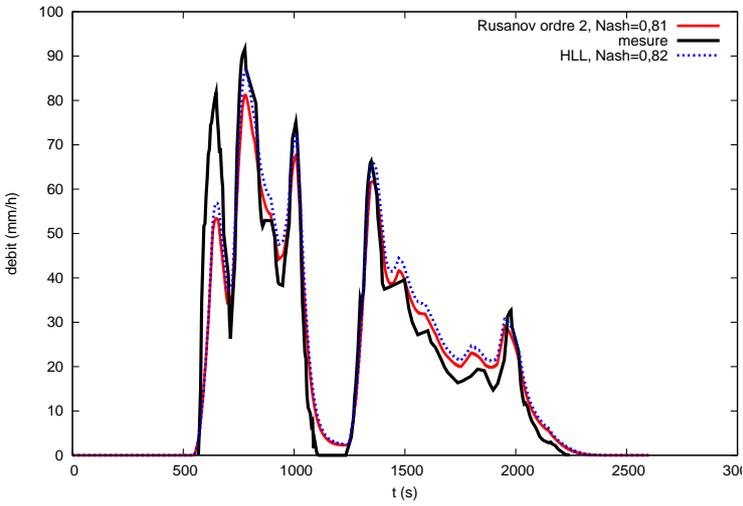
Evenement du 20/08/94



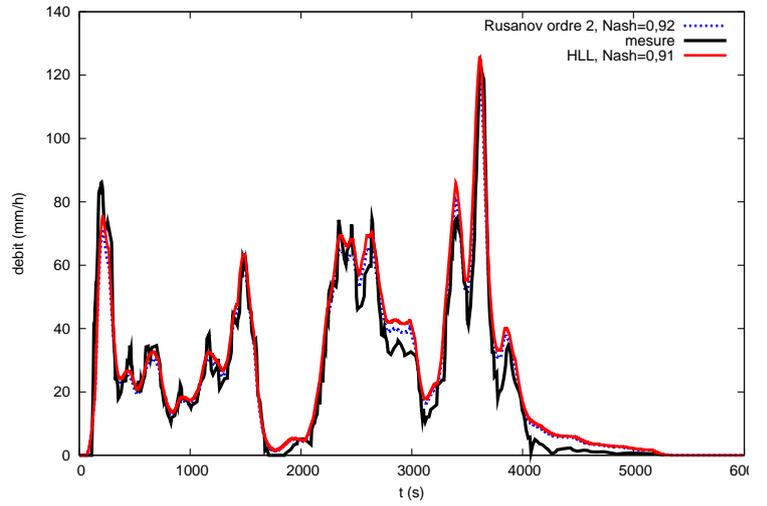
Evenement du 24/08/94



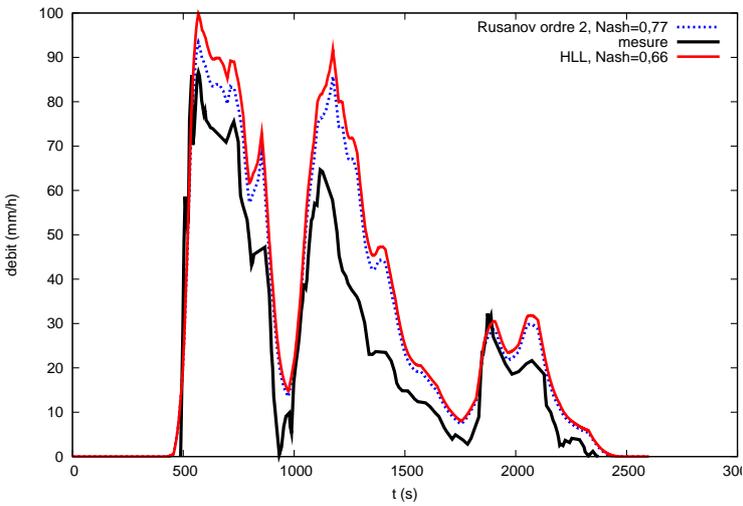
Evenement du 25/08/94



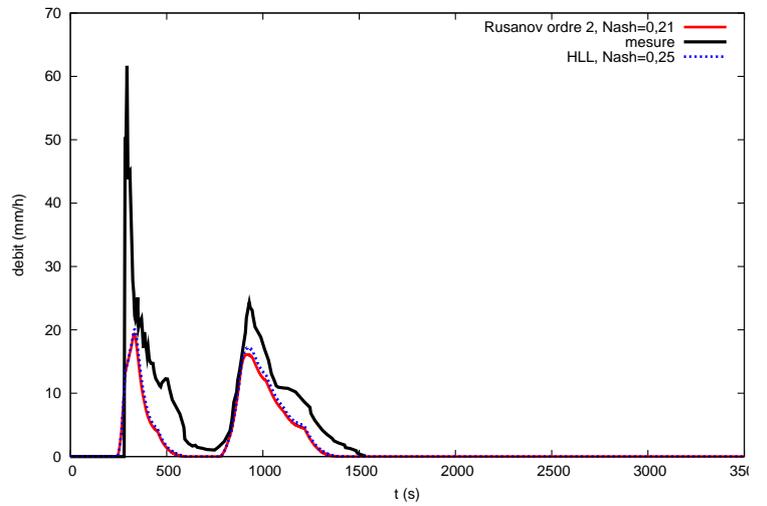
Evenement du 04/09/94



Evenement du 08/09/94



Evenement du 16/09/94



Le tableau suivant (fig. 49) représente le bilan sur les évènements pluvieux testés, il montre la comparaison entre les résultats obtenus à l'ordre un avec le flux HLL, l'ordre deux avec le flux HLL, l'ordre deux avec le flux de Rusanov et ceux obtenus par Michel Esteves.

Ruiss représente la lame d'eau ruisselée totale, Qmax est le débit maximal, Tp le temps pour lequel on obtient le débit maximal et Tb le temps du début du ruissellement.

	Date	Pluie en mm (CR%)	configuration	ruiss (mm)	Q max (mm/h)	Tp (s)	Tb (s)	Nash
2	20-juil-94	51,5 (56,23%)	Observé	29	144,5	2686	493	
			Ordre 1 (HLL)	37,5	201,34	2787	817	0,8
			Ordre 2 (HLL)	36,7	172,77	2713	816	0,8
			Ordre 2 (Rusanov)	34,25	161,27	2712	817	0,86
			Mc Cormack	32,6	173,8	2713	405	0,854
3	21-juil-94	59,45 (44,73%)	Observé	26,59	77	1234	214	
			Ordre 1 (HLL)	36,51	108,45	1267	280	0,47
			Ordre 2 (HLL)	35,59	91,78	1273	280	0,43
			Ordre 2 (Rusanov)	33,26	85,82	1273	280	0,61
			Mc Cormack	30	77	1273	201	0,661
5	20-août-94	22,00 (43,45%)	Observé	9,56	41,95	1486	526	
			Ordre 1 (HLL)	9,85	41,37	1488	473	0,78
			Ordre 2 (HLL)	9,54	38,39	1521	473	0,84
			Ordre 2 (Rusanov)	8,92	35,92	1521	473	0,83
			Mc Cormack	7,3	42	1486	455	0,625
7	24-août-94	31,00 (60,1%)	Observé	18,63	142,17	401	116	
			Ordre 1 (HLL)	21,65	178,75	339,5	62	0,88
			Ordre 2 (HLL)	21,18	153,64	351,5	62	0,92
			Ordre 2 (Rusanov)	19,77	143,59	348,5	62	0,95
			Mc Cormack	20,9	175,8	354	61	0,883
8	25-août-94	24,00 (59%)	Observé	14,15	91,61	778	573	
			Ordre 1 (HLL)	15,5	116,42	748	543	0,77
			Ordre 2 (HLL)	15,12	86,79	780	543	0,82
			Ordre 2 (Rusanov)	14,13	81,25	780	543	0,81
			Mc Cormack	14,3	100,1	775	482	0,88
9	04-sept-94	62,00 (60,73%)	Observé	37,65	123,46	3621	121	
			Ordre 1 (HLL)	43,81	133,69	3587,5	59	0,79
			Ordre 2 (HLL)	42,66	125,66	3611,5	59	0,91
			Ordre 2 (Rusanov)	39,86	117,45	3611,5	59	0,92
			Mc Cormack	35,2	128,5	3611	56	0,928
10	08-sept-94	31,00 (48,71%)	Observé	15,1	86,67	568	498	
			Ordre 1 (HLL)	22,3	108,55	554	413,5	0,51
			Ordre 2 (HLL)	21,75	99,92	568	413,5	0,66
			Ordre 2 (Rusanov)	20,32	93,43	568	413,5	0,77
			Mc Cormack	20,5	120,5	567	414	0,46
12	16-sept-94	9,5 (35,7%)	Observé	3,39	61,66	294	284	
			Ordre 1 (HLL)	1,99	74,37	290	244	0,38
			Ordre 2 (HLL)	1,86	20,06	334	244	0,25
			Ordre 2 (Rusanov)	1,74	19,37	331	243	0,21
			Mc Cormack	2,7	52,6	160	313	0,662

FIG. 49 – Bilan sur les différents évènements