



**HAL**  
open science

# Neutralité du Net : une étude en cas de compétition entre fournisseurs d'accès Internet

François Boussion

► **To cite this version:**

François Boussion. Neutralité du Net : une étude en cas de compétition entre fournisseurs d'accès Internet. Informatique et théorie des jeux [cs.GT]. 2011. dumas-00636152

**HAL Id: dumas-00636152**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00636152>**

Submitted on 26 Oct 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ENS CACHAN, CAMPUS DE KER LANN  
UNIVERSITÉ DE RENNES I  
ENSEIRB-MATMECA

MASTER RECHERCHE EN INFORMATIQUE  
IRISA

---

**Neutralité du Net : une étude en cas de  
compétition entre fournisseurs d'accès  
Internet**

---

François Boussion<sup>1</sup>

*Maître de Stage :*  
Bruno Tuffin<sup>2</sup>

Equipe DIONYSOS  
IRISA / INRIA RENNES BRETAGNE ATLANTIQUE  
Université de Rennes I

2 Juin 2011

---

1. francois.boussion@ens-cachan.fr  
2. bruno.tuffin@inria.fr

## Résumé

La neutralité du Net, qui garantie à chacun un accès à tout Internet sans discrimination (de contenu, de diffuseur, de récepteur, de protocole), est un enjeu majeur pour l'avenir. Ce principe, fondateur du net, est aujourd'hui remis en question par les fournisseurs d'accès, qui considèrent injuste de payer seuls l'entretien et l'investissement des infrastructures pour des diffuseurs gourmands en bande passante, Youtube par exemple.

A l'aide d'un modèle économique nous allons étudier l'impact pour l'utilisateur, les diffuseurs de contenu et les fournisseurs d'accès internet, de la neutralité (ou non) du net.

Dans ce rapport, nous allons développer un modèle économique représentant le réseau Internet. En nous appuyant sur la théorie des jeux et ce modèle nous étudierons quels sont les impacts d'un réseau neutre vs un réseau non-neutre.

**Mots clés :** Neutralité du Net, Modèles économiques de réseau, Competition de Bertrand, Théorie des jeux

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Problématique et contexte</b>	<b>7</b>
2.1	Neutralité du Net : définition(s) . . . . .	7
2.2	Neutralité du Net : la situation actuelle . . . . .	8
2.2.1	Une loi sur la neutralité du net ? . . . . .	8
2.2.2	La neutralité : un principe pas toujours respecté . . . . .	8
2.3	Enjeux : innovation et investissements . . . . .	9
2.4	Problématique . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Travaux antérieurs</b>	<b>11</b>
3.1	Neutralité du Net . . . . .	11
3.2	Modèle sans compétition . . . . .	11
3.2.1	Acteurs . . . . .	11
3.2.2	Interactions . . . . .	12
3.2.3	Résultats . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Modélisation : compétition entre fournisseurs</b>	<b>14</b>
4.1	Acteurs et prix d'accès . . . . .	14
4.2	Demande et répartition . . . . .	15
4.3	Principe de Wardrop - Compétition de Bertrand . . . . .	16
4.4	$\alpha$ -Extension . . . . .	16
4.5	Utilités . . . . .	19
4.5.1	Fournisseurs d'accès Internet . . . . .	19
4.5.2	Diffuseur de contenu . . . . .	20
4.6	Utilisateurs . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Étude du réseau</b>	<b>21</b>
5.1	Un jeu à 4 niveaux . . . . .	21
5.2	Niveau 1 : choix des utilisateurs . . . . .	22
5.3	Niveau 2 : prix d'accès au contenu . . . . .	22
5.4	Niveau 3 : prix d'accès aux fournisseurs . . . . .	24
5.4.1	Propriétés . . . . .	26
5.4.2	Meilleures réponses . . . . .	26
5.5	Niveau 4 : prix entre fournisseurs et diffuseur de contenu . . . . .	31
5.5.1	Choix des prix par le CP . . . . .	32
5.5.2	Choix des prix par les ISPs . . . . .	32
5.5.3	Choix des prix par le régulateur . . . . .	33
5.6	Neutralité vs non-neutralité . . . . .	33

<b>6 Travaux futurs et conclusion</b>	<b>34</b>
6.1 Fin de stage . . . . .	34
6.2 Travaux futurs . . . . .	34
6.2.1 Non linéarité de la demande . . . . .	34
6.2.2 Congestion du réseau . . . . .	35
6.3 Modélisation de l'innovation et de l'investissement . . . . .	35
6.4 Conclusion . . . . .	35
<b>Bibliographie</b>	<b>36</b>

## Table des figures

1	Modélisation d'un réseau sans compétition . . . . .	12
2	Modélisation d'un réseau avec compétition . . . . .	15
3	Prix $p_1$ , payé par les utilisateurs au diffuseur . . . . .	23
4	Utilité $U_1$ . . . . .	24
5	Prix $p_A$ et $p_B$ , payés par les utilisateurs aux fournisseurs . . . . .	24
6	Courbe de Meilleures Réponses, $q_A < q_B$ . . . . .	29
7	Courbe de Meilleures Réponses, $q_A > q_B$ . . . . .	30
8	Courbe de Meilleures Réponses, $q_A = q_B$ . . . . .	30
9	Prix $q_A$ et $q_B$ , entre fournisseurs et diffuseur . . . . .	31

# 1 Introduction

La conservation, ou non, de la neutralité du Net est un sujet d'actualité. Ce principe, qui stipule que les données transmises sur le réseau le sont de manière équitable, sans discrimination est aujourd'hui, et de plus en plus remis en question. C'est un principe fondateur d'Internet, qui est globalement respecté, bien qu'aucune loi n'oblige aujourd'hui de le conserver.

Dans les pays européens, ainsi qu'aux États-Unis, ce sujet est aujourd'hui âprement débattu. Des consultations ont été lancées pour permettre de répondre aux questions suivantes. Doit-on légiférer sur la neutralité du Net ? Si oui, qu'entend-on exactement par neutralité du Net ? La qualité du réseau sera-t-elle améliorée ? Ces questions sont au cœur des débats et leurs réponses sont un enjeu capital pour l'avenir d'Internet.

Parmi les opposants à la conservation de cette neutralité, se trouvent les fournisseurs d'accès internet (FAI). Ils arguent qu'ils ne peuvent supporter seuls les investissements pour les réseaux du futur. Ils aimeraient en particulier faire payer les diffuseurs de contenu pour l'usage du réseau afin de continuer à garantir une qualité de service suffisante et à améliorer celle-ci.

Parmi les conservateurs de la neutralité du Net, on trouve diffuseurs de contenus. Leur vision est différente de celles des FAIs : ils ne veulent pas payer pour cet usage, car jugent que ce n'est pas leur rôle. Leur argument principal est qu'un réseau non-neutre aurait pour effet de stopper l'innovation. Ils expliquent que des entreprises telles Facebook ou Google n'auraient pas pu connaître un développement aussi rapide et d'une telle ampleur si elles avaient dû payer pour l'usage des réseaux.

Les associations de consommateur sont principalement pour une conservation de la neutralité du Net, elles aussi. Ainsi, La Quadrature du Net explique que la conservation de ce principe garantie la liberté d'expression et de communication tout en permettant l'innovation sur le réseau [8].

Notre travail consistera dans un premier temps à modéliser le réseau. Nous identifierons les acteurs qui jouent un rôle dans cette remise en question de la neutralité du net. Les différentes interactions entre ces acteurs seront mises en avant. Comme tout modèle, il ne pourra pas représenter exactement la réalité, mais devra s'en approcher pour que les résultats obtenus soient utilisables.

Dans un second temps, nous étudierons le modèle réalisé. À cette fin, nous trouverons des valeurs objectives, chargées de représenter le gain potentiel de chaque acteur. Nous nous appuierons sur la théorie des jeux pour réaliser cette étude.

Pour terminer nous comparerons le réseau neutre et le réseau non-neutre afin d'observer qui sont les gagnants et les perdants dans chacune des si-

tuations ; situations qui permettront de valider ou d'invalider les arguments de chacune des parties. Nous observerons également le bien-être global du réseau et les conséquences positives et négatives ressenties par l'utilisateur dans chacune des situations.



## 2 Problématique et contexte

La neutralité du Net est un enjeu majeur aujourd'hui. Ce principe, qui figure parmi les principes fondateurs d'Internet, exclut toute discrimination des données transmises sur le réseau : elles sont transmises de manière équitable.

Dans un premier temps nous définirons correctement le terme de neutralité de Net. Nous verrons en effet que tout le monde ne s'accorde pas sur une unique définition. Nous décrirons ensuite la situation actuelle, nous verrons qu'il existe des cas où ce principe n'est pas totalement respecté. Ensuite, nous verrons les tenants et les aboutissants d'un réseau neutre/non-neutre. Enfin nous expliquerons la problématique à laquelle nous nous sommes intéressés dans ce stage.

### 2.1 Neutralité du Net : définition(s)

S'il est simple d'accès, ce principe pose tout de même des questions : peut-on réguler le trafic en cas de congestion ? Une architecture comme *DiffServ*<sup>1</sup> est-elle autorisée ? Peut-on stopper l'envoi de données violant les droits d'auteur ? Peut-on stopper les données violant tout simplement les lois du pays ? Si quasiment tout le monde s'entend sur le « oui » comme réponse à la première question, cela n'est pas si simple pour les autres questions.

Les FAIs voudraient en effet avoir un contrôle sur les données circulant sur leur réseau, empêchant la circulation de données violant les droits d'auteur, bridant les sites trop gourmands en bande passante. Les diffuseurs de contenu et les utilisateurs adoptent globalement le même point de vue. La différenciation du trafic peut être autorisée mais elle doit être cadré pour éviter les débordements. Enfin, pour eux, tout le trafic doit être transmis.

Comme il existe ainsi une multitude de définitions, nous dirons qu'un réseau est :

- **faiblement neutre** : si il interdit la discrimination entre utilisateurs ;
- **fortement neutre** : si il interdit la différenciation de service.

Dans le premier cas, deux utilisateurs distincts ont accès de la même manière à Internet : les FAIs ne peuvent pas brider selon l'utilisateur. Dans le second cas, on a de plus l'interdiction d'architectures comme *DiffServ*. Cela signifie que toutes les données sont transmises de la même manière, que la requête concerne une application de streaming ou une simple requête web.

Dans cette étude, nous entendrons par neutralité du Net, la définition

---

1. *DiffServ* est une architecture réseau qui spécifie un mécanisme pour classer et contrôler le trafic. Souvent utilisé pour envoyer prioritairement le trafic dont la latence doit être courte, tel la Voix sur IP ou les vidéos en *streaming*, par opposition au trafic non critique tel le transfert de fichier, le trafic web.

suivante, proposée en 2009 par Benjamin Bayart.

**Définition 1** *Un réseau est dit neutre si la transmission des données se fait :*

- *sans examination du contenu par les opérateurs ;*
- *sans prise en compte de la source ou de la destination des données ;*
- *sans privilégier un protocole de communication ;*
- *sans en altérer le contenu.*

D'après cette définition, les réponses aux questions posées sont les suivantes : on autorise la régulation du trafic en cas de congestion, *DiffServ* est autorisée, mais aucune donnée transmise sur le réseau n'est stoppée - l'examen de celles-ci étant interdite, on ne sait pas ce qui circule donc on ne peut pas l'arrêter. Notre réseau est faiblement neutre, car on ne peut pas prendre en compte la source ou la destination des données. Notre réseau n'est pas fortement neutre, on peut faire de la différenciation de service.

## **2.2 Neutralité du Net : la situation actuelle**

Comme nous allons le voir, il n'y a pas de normes sur la neutralité du net. Ce principe est globalement respecté, bien que de nombreux pays n'aient pas de loi sur le sujet. Il est cependant quelque fois mis à mal par les FAIs, principalement.

### **2.2.1 Une loi sur la neutralité du net ?**

En France, il n'existe actuellement pas de loi pour faire appliquer le neutralité du net. Concrètement, ce principe est globalement respecté, bien que non défini. Un rapport parlementaire a été déposé en avril [9] et une proposition de loi devrait être déposée à la rentrée prochaine. Dans celle-ci sera, entre autres, défini la neutralité du net, et réservera l'appellation « Internet » aux seuls réseaux respectant celle-ci.

En Europe, ou aux États-Unis, des consultations ont été lancées ces dernières années pour analyser les avantages d'un réseau neutre ou non. Actuellement, peu de pays ont adopté une loi sur la neutralité, mais beaucoup de projets de loi sont à l'étude.

### **2.2.2 La neutralité : un principe pas toujours respecté**

Concrètement, il existe de nombreux cas où la neutralité n'est pas respectée. Ainsi en 2008, aux États-Unis, le fournisseur Comcast a bloqué toutes les données transmises *via* le pair-à-pair. Condamné par la FCC - *Federal*

*Communications Commission* - le régulateur des communications au États-Unis, le jugement a finalement été invalidé par la cour suprême. Ceci remet en cause notre définition de la neutralité car le contenu n'est pas transmis à destination : il est détruit, ce qui va encore plus loin que le point 4 de notre définition 1, qui interdit l'altération du contenu.

En France, bien que jamais réellement prouvé, de nombreux utilisateurs ont observé que certains sites, tel Youtube, avait des débits lents sur certains opérateurs. Il semblerait que ces opérateurs bloquent, ou tout du moins, brident le trafic vidéo<sup>1</sup>.

### 2.3 Enjeux : innovation et investissements

Les acteurs du réseau, principalement les FAIs, remettent aujourd'hui ce principe en question. Leur point de vue est le suivant : leurs investissements dans le réseau, disent-ils, et surtout les investissements futurs ne peuvent pas être réalisés par les fournisseurs seuls. Certains diffuseurs, Youtube par exemple, utilisent une part importante de la bande passante sans pour autant payer une contrepartie. Seul le fournisseur qui les héberge reçoit une contrepartie financière. Les FAIs voudraient aujourd'hui que les diffuseurs, tout du moins ceux dont le trafic émis est important, paient pour l'utilisation du réseau, faute de pouvoir assurer la pérennité du réseau.

De l'autre côté, les diffuseurs arguent qu'un réseau non-neutre, dans lequel ils auraient à payer pour l'utilisation du réseau serait un frein complet à l'innovation. Une entreprise telle Facebook, ou Google n'aurait pas pu voir le jour disent-ils.

La validité de ces arguments doit être vérifié : à travers notre étude, nous essaierons de répondre à ces questions et voir dans les différents cas si ces arguments s'avèrent être corrects.

D'autres arguments pour la conservation de la neutralité du Net sont du ressort des droits fondamentaux d'accès à l'information. Si Internet n'était pas neutre, cela pourrait empêcher l'accès équitable à l'information. Ainsi l'article 11 de la déclaration des droits de l'homme et du citoyen stipule [13] :

*La libre communication des pensées et des opinions est un des droits les plus précieux de l'homme : tout citoyen peut donc parler, écrire, imprimer librement, sauf à répondre de l'abus de cette liberté dans les cas déterminés par la loi.*

Les défenseurs arguent que la libre communication des pensées et des opinions se fait aujourd'hui énormément via Internet. Empêcher l'accès à

---

1. [www.korben.info](http://www.korben.info)

certaines données reviendrait à ne pas respecter la DDHC.

## 2.4 Problématique

Dans notre étude, nous ne pourrions nous intéresser à tous les aspects de la neutralité du Net. Aussi nous nous intéresserons à l'argument des fournisseurs qui voudraient faire payer l'usage de leur réseau aux diffuseurs. Nous nous intéresserons à la question suivante :

« Quels sont les conséquences d'une taxe des Fournisseurs d'Accès Internet aux diffuseurs de contenu pour l'utilisation du réseau ? »

Cette problématique remet en cause la neutralité du net, puisque le contenu peut être discriminé selon la source. En particulier, un diffuseur refusant de payer à un fournisseur se verrait interdire la circulation de son trafic sur le réseau de celui-ci. Ceci remet en cause le point 2 de notre définition [? ], qui interdit la discrimination selon la source.

Nous étudierons un réseau neutre et un réseau non-neutre afin d'observer qui est(ont) le(s) gagnant(s) et le(s) perdant(s) dans chacun des cas, de manière objective.

La partie suivante présente la modélisation que nous avons choisie pour le réseau, nous verrons ensuite l'étude réalisée ainsi que les résultats actuels. Dans la dernière partie nous présentons les poursuites envisagées à cette étude.

## 3 Travaux antérieurs

Dans cette partie nous allons dans un premier temps présenter les papiers en relation avec la neutralité du Net, puis nous étudierons le modèle de réseau qui a inspiré notre représentation.

### 3.1 Neutralité du Net

Plusieurs papiers étudient la neutralité du Net. La plupart sont qualitatifs et restent du domaine politique et législatif. Ainsi dans [10] les deux auteurs présentent un point de vue économique selon lequel réguler Internet empêche la compétition alors qu'ils pensent que la compétition améliore la qualité du réseau.

D'un point de vue scientifique, dans [5] est modélisé un réseau avec deux diffuseurs, qui ne sont pas forcément en compétition sur le même domaine, et un fournisseur d'accès. Les auteurs concluent qu'abandonner la neutralité du Net augmenterait le gain du fournisseur, diminuerait celui des diffuseurs et augmenterait ou diminuerait celui des utilisateurs, selon les situations. Dans [14] un modèle est étudié avec une infinité de diffuseurs en compétition, et deux fournisseurs. Les auteurs concluent qu'une régulation pourrait diminuer la qualité d'Internet car les petits fournisseurs ne pourraient pas réaliser d'investissement sur leur réseau.

### 3.2 Modèle sans compétition

Pour réaliser notre modèle, nous nous sommes inspirés du modèle réalisé dans [2]. Nous allons dans un premier temps étudier ce modèle, les interactions qui y sont étudiés et ce que nous avons modifié pour tenir compte des aspects compétitifs entre fournisseurs d'accès.

#### 3.2.1 Acteurs

Afin de modéliser le réseau les auteurs ont décidé de distinguer les trois grandes familles. Chaque famille d'acteur est représenté par une entité :

- un fournisseur d'accès, *Internet Service Provider* : ISP  $A$  ;
- un diffuseur de contenu, *Content Provider* : CP 1 ;
- des utilisateurs, considérés comme une entité : *End-users*.

Les utilisateurs se connectent au fournisseur d'accès. Celui-ci leur permet d'accéder aux données du CP 1. Les principaux acteurs du net sont ainsi représentés. Nous allons voir quels sont les choix d'interaction entre ces acteurs, via les paiements notamment, ont été réalisés.

### 3.2.2 Interactions

Afin d'accéder aux données, les utilisateurs paient deux prix :

- $p_A$  prix d'accès d'un utilisateur à  $A$  ;
- $p_1$  prix d'accès d'un utilisateur à 1.

Ce choix se justifie par le fait qu'il faille accéder d'abord à Internet, puis aux données. Le choix de faire payer l'accès aux données permet d'être plus général. En effet il suffit de mettre ce prix à zéro pour que les utilisateurs aient accès gratuitement aux données.

De plus dans ce réseau est modélisé une contrepartie, pour l'utilisation du réseau par le diffuseur. Le prix payé par le diffuseur au fournisseur est le suivant :

- $q_A$  paiement du CP à  $A$ .

Dans l'optique de représenter un réseau général tous les prix ont été modélisés. Ils peuvent être nuls ou négatifs. Le schéma général est représenté en Figure 1.

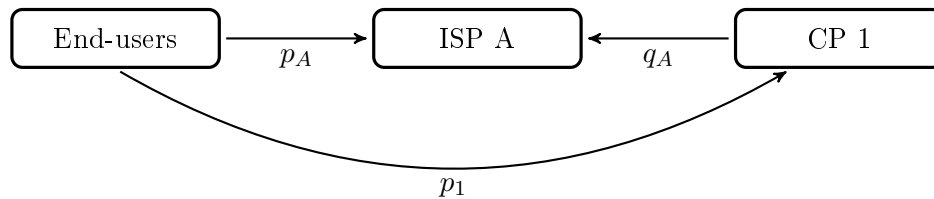


FIGURE 1 – Modélisation d'un réseau sans compétition

Dans ce modèle la demande pour les données est représenté par la fonction de demande suivante :

$$D = D_0 - pd$$

$D_0$  représente la demande maximum pour les données. Même si elles étaient gratuites, elles ont un seuil maximum.  $p = p_1 + p_A$ , c'est le prix total que vont payer les utilisateurs : plus ce prix est important, plus la demande est faible.  $d$  est le coefficient, positif, de la courbe.

### 3.2.3 Résultats

Dans ce papier était comparé la compétition face à la collaboration entre le diffuseur et le fournisseur. La conclusion était que la collaboration rapportait plus à ces deux entités. Dans un second temps était ajouté des revenus via la publicité. Cette fois encore, la collaboration entre le fournisseur et le diffuseur leur permettait d'obtenir un gain supérieur.

## 4 Modélisation : compétition entre fournisseurs

Un des arguments avancé par les FAIs est le suivant : s'il est vrai que les diffuseurs de contenu sont souvent en situation de monopôle, tel le cas de Google ou facebook, la situation est différente pour les FAIs. Celles-ci sont très souvent en situation de concurrence, ce qui n'est pas représenté par le modèle ci-dessus.

Afin de vérifier cet argument, nous avons développé un modèle un peu plus général, dans lequel les FAIs seront effectivement en situation de concurrence.

Notre modèle va donc prendre compte des arguments avancés par les FAIs. Nous verrons à partir de notre modèle si ils sont effectivement valides ou non.

### 4.1 Acteurs et prix d'accès

Dans ce modèle nous considérons quatre acteurs : les utilisateurs, collectivement considérés comme une entité, deux fournisseurs d'accès internet, désignés par  $A$  et  $B$ <sup>1</sup>, et un diffuseur de contenu ( $CP = Content Provider$ ), désigné par  $1$ <sup>2</sup>.

Le choix de ne pas distinguer les fournisseurs autrement que par les prix vient du fait qu'en pratique, les offres entre les concurrents sont sensiblement les mêmes et ne varient que très peu d'un fournisseur à l'autre : la principale concurrence qu'ils se font est réalisée par les prix.

Les interactions entre eux vont principalement se faire par les prix. D'abord ceux payés par les utilisateurs aux FAIs :

- $p_A$  prix d'accès d'un utilisateur à  $A$  ;
- $p_B$  prix d'accès d'un utilisateur à  $B$ .

Nous modélisons également le prix payé par les utilisateurs au diffuseur de contenu. Celui-ci peut être nul si le diffuseur décide de laisser l'accès libre aux données :

- $p_1$  prix d'accès d'un utilisateur à  $1$ .

Enfin, viennent s'ajouter les paiements entre le diffuseurs et les fournisseurs :

- $q_A$  paiement du CP à  $A$  ;

---

1. Le fournisseur d'accès à Internet  $A$  (resp.  $B$ ) sera sera indifféremment désigné par fournisseur  $A$  (resp.  $B$ ), fournisseur d'accès  $A$  (resp.  $B$ ), fournisseur d'accès Internet  $A$ (resp.  $B$ ), ISP  $A$  (resp. ISP  $B$ ) ou  $A$  (resp.  $B$ ).

2. Le diffuseur de contenu sera indifféremment appelé diffuseur, diffuseur de contenu, CP (*Content Provider*), CP 1 ou 1.



–  $q_B$  paiement du CP à  $B$ .

On note que les prix  $p_A$ ,  $q_A$ ,  $p_B$  et  $q_B$  peuvent être négatifs. Si  $p_A < 0$  cela signifie que c'est le fournisseur  $A$  qui reverse de l'argent aux utilisateurs. De même si  $q_A < 0$ , c'est dans ce cas  $A$  qui verse de l'argent au CP, au titre des droit d'auteurs par exemple.

Ce modèle est représenté dans la Figure 2.

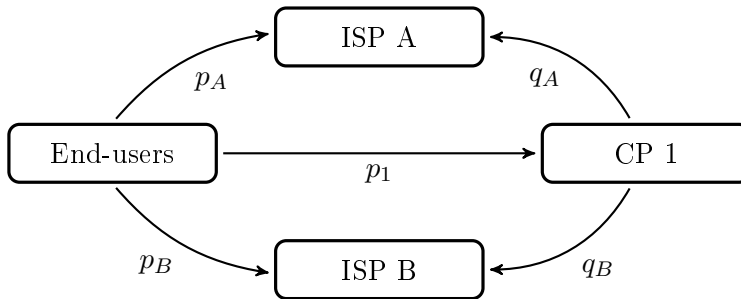


FIGURE 2 – Modélisation d'un réseau avec compétition

## 4.2 Demande et répartition

La demande totale est modélisée par la fonction :  $D = D_0 - \bar{p}d$  qui dépend du prix perçu  $\bar{p}$  par l'utilisateur. Ce prix perçu va être ce qu'il en coûte totalement à l'utilisateur, incluant : le prix d'accès à un fournisseur, le prix d'accès au diffuseur de contenu.  $d$  est un coefficient positif, qui guide la pente de la courbe.  $D_0$  est la demande de base, lorsque le prix d'accès aux données voulues est nul.

La demande totale va se décomposer entre  $A$  et  $B$  :

$$D = D_A + D_B.$$

On suppose que la répartition de la demande est déterminé selon le principe de Wardrop. On définit les *prix perçus* pour les utilisateurs qui utilisent respectivement  $A$  et  $B$  par :

$$\bar{p}_A = p_A + p_1$$

$$\bar{p}_B = p_B + p_1$$

### 4.3 Principe de Wardrop - Compétition de Bertrand

Selon le principe de Wardrop, les utilisateurs se connectent au réseau le moins cher pour eux, en terme de prix perçu. Ainsi, si  $\bar{p}_A > \bar{p}_B$ , un utilisateur connecté à  $A$  souhaitera changer. À l'équilibre, on aura donc :  $D_A = 0$ . Identiquement, si  $\bar{p}_A < \bar{p}_B$ , à l'équilibre on a  $D_B = 0$ .

On a donc les équations suivantes :

$$\bar{p}_A > \bar{p}_B \Rightarrow D_A = 0 \quad (1)$$

$$\bar{p}_B > \bar{p}_A \Rightarrow D_B = 0 \quad (2)$$

Soit :

$$\bar{p} = \min(\bar{p}_A, \bar{p}_B) \quad (3)$$

$\bar{p}$  est le prix perçu via tout opérateur ayant une demande strictement positive.

À prix fixés, l'ensemble des équations définissant l'équilibre de Wardrop pour la demande des utilisateurs est :

$$\begin{cases} \bar{p}_A = p_A + p_1 \\ \bar{p}_B = p_B + p_1 \\ \bar{p} = \min(\bar{p}_A, \bar{p}_B) \\ \bar{p}_A > \bar{p}_B \Rightarrow D_A = 0 \\ \bar{p}_B > \bar{p}_A \Rightarrow D_B = 0 \\ D = D_0 - \bar{p}d \end{cases}$$

### 4.4 $\alpha$ -Extension

**Définition :** Nous allons définir deux fonctions  $\alpha_A(p_A, p_B)$  et  $\alpha_B(p_A, p_B)$  qui vont nous servir à modéliser la répartition entre  $A$  et  $B$  de la demande. Ces deux fonctions sont définies de la façon suivante :

$$\alpha_A(p_A, p_B) = \begin{cases} 1 & \text{si } p_A < p_B \\ x & \text{si } p_A = p_B \\ 0 & \text{si } p_A > p_B \end{cases}$$

$$\alpha_B(p_A, p_B) = \begin{cases} 0 & \text{si } p_A < p_B \\ (1 - x) & \text{si } p_A = p_B \\ 1 & \text{si } p_A > p_B \end{cases}$$

Avec  $x \in [0, 1]$ .  $x$  est la répartition lorsque le prix perçu est le même via les deux fournisseurs ( $\bar{p}_A = \bar{p}_B \Rightarrow p_A = p_B$ ). Une proportion  $x$  de consommateurs choisira  $A$  et  $1 - x$  choisira  $B$ . Ceci s'explique par une différence de réputation par exemple.

Pour simplifier les notations, on écrira :  $\alpha_A$ , resp.  $\alpha_B$ , au lieu de  $\alpha_A(p_A, p_B)$ , resp.  $\alpha_B(p_A, p_B)$

**Répartition** Si  $p_A < p_B$  (resp.  $p_A > p_B$ ), on a  $\bar{p}_A < \bar{p}_B$  (resp.  $\bar{p}_A > \bar{p}_B$ ). D'après (2) (resp. (1)), tous les consommateurs vont se diriger vers  $A$  (resp.  $B$ ), ce qui est retranscrit par  $\alpha_A = 1$  et  $\alpha_B = 0$  (resp.  $\alpha_A = 0$  et  $\alpha_B = 1$ ).

**Propriété**

$$\forall p_A, p_B \text{ on a } \begin{cases} \alpha_A, \alpha_B \in [0, 1] \\ \text{et } \alpha_A + \alpha_B = 1. \end{cases}$$

**Demande** Grâce à cette répartition, la demande globale, ainsi que les demandes, via chaque fournisseurs vont pouvoir être réécrites de la manière suivante :

$$\begin{aligned} D_A &= \alpha_A(D_0 - (p_A + p_1)d) \\ D_B &= \alpha_B(D_0 - (p_B + p_1)d) \end{aligned}$$

**Remarque 1 :  $D_A + D_B = D$**  Avec ces nouvelles notations, on peut vérifier que la demande  $D$  est toujours la somme des demandes en  $A$  et en  $B$ . On vérifie que  $D_A + D_B = D$  :

$$\begin{aligned} D_A + D_B &= \alpha_A(D_0 - (p_A + p_1)d) + \alpha_B(D_0 - (p_B + p_1)d) \\ &= (\alpha_A + \alpha_B)(D_0 - p_1d) - \alpha_A p_A d - \alpha_B p_B d \\ &= D_0 - p_1d - (\alpha_A p_A + \alpha_B p_B)d \\ &= D_0 - \left( p_1 + (\alpha_A p_A + \alpha_B p_B) \right) d \end{aligned}$$

On distingue 3 cas, en fonction de  $p_A <, =, > p_B$  :

- Cas  $p_A < p_B$

$$\begin{aligned} \text{Si } p_A < p_B &\Rightarrow \alpha_A = 1 \text{ et } \alpha_B = 0 \\ &\Rightarrow (\alpha_A p_A + \alpha_B p_B) = p_A \\ &\Rightarrow D_A + D_B = D_0 - (p_1 + p_A)d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, si } p_A < p_B &\Rightarrow \bar{p}_A = p_A + p_1 < \bar{p}_B = p_B + p_1 \\ &\Rightarrow \bar{p} = \min(\bar{p}_A, \bar{p}_B) = \bar{p}_A \\ &\Rightarrow D = D_0 - \bar{p}d = D_0 - \bar{p}_A d \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D = D_A + D_B$$

- Cas  $p_A > p_B$

$$\begin{aligned} \text{Si } p_A > p_B &\Rightarrow \alpha_A = 0 \text{ et } \alpha_B = 1 \\ &\Rightarrow (\alpha_A p_A + \alpha_B p_B) = p_B \\ &\Rightarrow D_A + D_B = D_0 - (p_1 + p_B)d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, si } p_A > p_B &\Rightarrow \bar{p}_A = p_A + p_1 > \bar{p}_B = p_B + p_1 \\ &\Rightarrow \bar{p} = \min(\bar{p}_A, \bar{p}_B) = \bar{p}_B \\ &\Rightarrow D = D_0 - \bar{p}d = D_0 - \bar{p}_B d \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D = D_A + D_B$$

- Cas  $p_A = p_B$

$$\begin{aligned} \text{Si } p_A = p_B = P &\Rightarrow \alpha_A = x \text{ et } \alpha_B = 1 - x \\ &\Rightarrow (\alpha_A p_A + \alpha_B p_B) = xP + (1 - x)P = P \\ &\Rightarrow D_A + D_B = D_0 - (p_1 + P)d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, si } p_A = p_B &\Rightarrow \bar{p}_A = p_A + p_1 = \bar{p}_B = P + p_1 \\ &\Rightarrow \bar{p} = \min(\bar{p}_A, \bar{p}_B) = P + p_1 \\ &\Rightarrow D = D_0 - \bar{p}d = D_0 - (P + p_1)d \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D = D_A + D_B$$

$$\implies \forall p_A, p_B \quad D = D_A + D_B$$

La demande est bien répartie entre A et B.

**Remarque 2 :**  $\mathbf{D_A = \alpha_A D}$  et  $\mathbf{D_B = \alpha_B D}$  Ceci va permettre de constater que  $\alpha_A$  et  $\alpha_B$  ont une fonction de répartition la demande. On a :  $D_A = \alpha_A(D_0 - (p_A + p_1)d)$  et  $D_B = \alpha_B(D_0 - (p_B + p_1)d)$ .

- Cas  $p_A < p_B$

$$\begin{aligned} \text{Si } p_A < p_B &\Rightarrow \alpha_B = 0 \\ &\Rightarrow D_B = 0 = \alpha_B D \\ \text{De plus si } p_A < p_B &\Rightarrow \alpha_A = 1 \\ &\Rightarrow D_A = D_0 - (p_A + p_1)d \\ &\Rightarrow D_A = D = \alpha_A D \end{aligned}$$

- Cas  $p_A > p_B$

$$\begin{aligned} \text{Si } p_B < p_A &\Rightarrow \alpha_A = 0 \\ &\Rightarrow D_A = 0 = \alpha_A D \\ \text{De plus si } p_B < p_A &\Rightarrow \alpha_B = 1 \\ &\Rightarrow D_B = D_0 - (p_B + p_1)d \\ &\Rightarrow D_B = D = \alpha_B D \end{aligned}$$

– Cas  $p_A = p_B$

$$D = D_0 - \bar{p}d = D_0 - (p_A + p_1)d = D_0 - (p_B + p_1)d$$

$$D_A = \alpha_A(D_0 - (p_A + p_1)d) = \alpha_A D$$

$$D_B = \alpha_B(D_0 - (p_B + p_1)d) = \alpha_B D$$

$$\implies \forall p_A, p_B \quad D_A = \alpha_A D \text{ et } D_B = \alpha_B D$$

Les termes  $\alpha_A$  et  $\alpha_B$  permettent donc de représenter la répartition de la demande  $D$  entre  $A$  et  $B$ .

## 4.5 Utilités

Afin de représenter objectivement les gains et pertes de chaque acteur du réseau, nous allons écrire les fonctions d'utilité de chaque acteur. Celles-ci représenteront ce que la modification des prix, ainsi que de la demande, leur fait gagner ou perdre.

### 4.5.1 Fournisseurs d'accès Internet

L'utilité du fournisseur d'accès  $A$  est le produit du revenu gagné pour chaque connexion à son réseau par le nombre d'utilisateur s'y connectant. Elle est donc définie de la manière suivante :

$$U_A = D_A(p_A + q_A) = \alpha_A(D_0 - (p_A + p_1)d)(p_A + q_A). \quad (4)$$

Le gain du fournisseur  $A$  est égal à la demande des utilisateurs pour ce fournisseur, que l'on multiplie par le prix qu'il escompte gagner par utilisateur utilisant son réseau, soit  $p_A$ , prix payé par l'utilisateur directement au fournisseur, plus  $q_A$ , prix payé par le CP, prix potentiellement négatif. Plus la demande est forte, plus le fournisseur aura un gain important (à condition que  $p_A + q_A > 0$ ).

De même pour le fournisseur  $B$  la fonction d'utilité est la suivante :

$$U_B = D_B(p_B + q_B) = \alpha_B(D_0 - (p_B + p_1)d)(p_B + q_B). \quad (5)$$

Ces deux utilités représentent le gain des deux fournisseurs. Elles permettent de mesurer de ce que leur apporte le réseau. L'objectif des fournisseurs sera de maximiser celles-ci.

### 4.5.2 Diffuseur de contenu

L'utilité du diffuseur du contenu est égale à la somme des revenus gagnés via  $A$  et  $B$ .

Via  $A$ , ce revenu est égal à :  $D_A(p_1 - q_A)$ , qui correspond à la demande via  $A$  multiplié par le prix qu'il escompte gagner par utilisateur. Ce prix est égal à ce que lui paye directement l'utilisateur,  $p_1$ , auquel on retire ce qu'il paye à  $A$  (ou ajoute dans le cas où  $q_A < 0$ ).

On a donc :

$$\begin{aligned} U_1 &= D_A(p_1 - q_A) + D_B(p_1 - q_B) & (6) \\ \Rightarrow U_1 &= \alpha_A(D_0 - (p_A + p_1)d)(p_1 - q_A) + \alpha_B(D_0 - (p_B + p_1)d)(p_1 - q_B) & (7) \end{aligned}$$

L'utilité  $U_1$  est symétrique en  $A$  et  $B$ . Celle-ci représente le gain apporté par le réseau au diffuseur. Il voudra maximiser celle-ci.

### 4.6 Utilisateurs

Les utilisateurs n'ont pas d'utilité propre. Chacun n'étant pas près à mettre le même prix pour le même service, nous ne définirons pas d'utilité.

Cependant, maximiser leur gain reviendra à maximiser la demande global  $D$ . En effet, plus celle-ci sera importante, plus le nombre d'utilisateurs se connectant au réseau sera important. On remarque que ceci revient au même que de diminuer le prix perçu  $\bar{p}$ , la demande et le prix perçu étant directement corrélés via la fonction  $D = D_0 - \bar{p}d$ .

Grâce au réseau ainsi modélisé et aux utilités que nous avons mises en avant, nous allons maintenant pouvoir étudier notre réseau afin de vérifier la validité des arguments avancés par les fournisseurs.

## 5 Étude du réseau

Notre étude se déroule de la manière suivante. Nous commençons par bien identifier les différents stades de notre étude : quels prix sont décidés à quels moments et pourquoi ; puis nous étudions ces différents stades.

### 5.1 Un jeu à 4 niveaux

Il y a cinq variables sur lesquels les ISPs  $A$  et  $B$ , ainsi que le CP 1 peuvent jouer : les *side payments*  $q_A$  et  $q_B$  et les tarifications payées par l'utilisateur  $p_A$ ,  $p_B$  et  $p_1$ .

Les prix  $p_A$ ,  $p_B$  sont fixés en même temps (compétition), et de même pour  $q_A$  et  $q_B$ .

Les différents prix ne sont pas pour autant fixés au même moment : les couples  $p_A, p_B$  et  $q_A, q_B$  vont être décidés à des instants différents, ce ne sont pas les mêmes rapports qui sont mis en jeu.  $p_A, p_B$  sont les paiements directs des utilisateurs aux fournisseurs, alors que  $q_A, q_B$  sont les paiements « à côté », entre les fournisseurs et le diffuseur de contenu.

Le prix  $p_1$  représente le rapport entre le diffuseur et les consommateurs. Ils peuvent évoluer rapidement et sont donc décidés à court terme. Les prix  $p_A, p_B$  représentent donc les rapports entre fournisseurs et consommateurs. Ces prix aussi peuvent changer rapidement, donc décidés à court terme. Les prix  $q_A, q_B$  représentent donc les rapports entre fournisseurs et diffuseur. Ceux-ci sont décidés sur du plus long terme car les contrats entre entreprises demandent des négociations qui ne se font pas instantanément et les contrats en découlant engagent souvent sur du long terme.

Les décisions vont donc se faire dans l'ordre suivant :

1. *Side-payments* :  $q_A$  et  $q_B$  sont décidés. Il y a trois possibilités : ces prix sont décidés par les ISPs, par le CP, ou par un régulateur. L'acteur décidant va anticiper les prix  $p_A, p_B$  et  $p_1$  afin d'obtenir un gain maximal pour lui, ou un bien-être du réseau maximum.
2. Prix d'accès au fournisseur :  $p_A$  et  $p_B$  fixés en anticipant  $p_1$ .
3. Prix d'accès au diffuseur :  $p_1$
4. Choix des utilisateurs pour le fournisseur  $A$  ou  $B$ .

Nous trouvons ici notre jeu à quatre niveaux, qui vont permettre de décider des cinq prix. Les prix  $p_A$  et  $p_B$  vont être déterminés par une compétition entre  $A$  et  $B$ . Il en est de même pour  $q_A$  et  $q_B$ .  $p_1$  sera lui déterminé par une optimisation du CP.

Nous allons résoudre ce jeu, qui possède au maximum deux acteurs intervenant par niveau.

Pour déterminer les prix, les fournisseurs ainsi que le diffuseur de contenu vont utiliser la « backward induction », c'est-à-dire qu'ils vont anticiper ce que feront les joueurs des étapes suivantes, afin d'optimiser les prix. Pour déterminer  $p_A$  et  $p_B$ , les ISPs vont simuler l'étape suivante, déterminer quel sera le prix optimal  $p_1^*(p_A, p_B)$  dans le jeu sur les prix d'accès au diffuseur. Ceci leur permettra de fixer les prix d'équilibre  $p_A^*$  et  $p_B^*$  qui maximisent leurs utilités, en utilisant l'optimisation. Pour déterminer  $q_A^*$  et  $q_B^*$ , le même stratagème va être utilisé. C'est d'abord  $p_1^*(p_A, p_B, q_A, q_B)$  qui sera évalué, en simulant le comportement du CP, puis  $p_A^*(q_A, q_B)$  et  $p_B^*(q_A, q_B)$  calculés par les ISPs, et enfin  $q_A^*$  et  $q_B^*$  par le régulateur, les ISPs ou le CP. En utilisant ce dernier équilibre on obtiendra tous les prix d'équilibre.

On comprend ici le terme de « backward induction » : pour des prix  $q_A$  et  $q_B$ , les meilleures réponses  $p_1$ ,  $p_A$  et  $p_B$  sont calculés. On se base sur celles-ci pour que  $q_A$  et  $q_B$  rapportent un gain maximal. Les mêmes calculs sont effectués aux niveaux inférieurs.

## 5.2 Niveau 1 : choix des utilisateurs

Le niveau 1 est celui des choix des utilisateurs. Cette étude a déjà été réalisée au paragraphe 4.3.

Pour rappel, nous avons à faire à une compétition de Bertrand : les utilisateurs vont tous choisir le fournisseur pour lequel le prix est le moins cher. Rappelons ici le jeu d'équation qui caractérise l'équilibre de Wardrop :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{p}_A = p_A + p_1 \\ \bar{p}_B = p_B + p_1 \\ \bar{p} = \min(\bar{p}_A, \bar{p}_B) \\ \bar{p}_A > \bar{p}_B \Rightarrow D_A = 0 \\ \bar{p}_B > \bar{p}_A \Rightarrow D_B = 0 \\ D = D_0 - \bar{p}d \end{array} \right.$$

## 5.3 Niveau 2 : prix d'accès au contenu

Le prix qui est fixé à l'échelle de temps la plus basse est le prix  $p_1$ , payé par l'utilisateur au diffuseur (voir Figure 3).



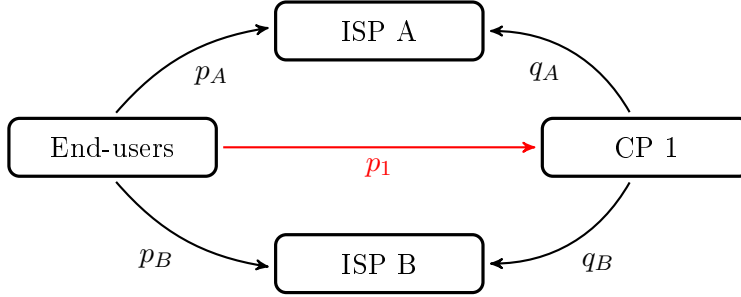


FIGURE 3 – Prix  $p_1$ , payé par les utilisateurs au diffuseur

Ce prix est déterminé par le CP, dont l'utilité est la suivante :

$$U_1 = \alpha_A(D_0 - (p_A + p_1)d)(p_1 - q_A) + \alpha_B(D_0 - (p_B + p_1)d)(p_1 - q_B)$$

Pour maximiser le gain, on va donc chercher le maximum de la fonction  $U_1$  (voir Figure 4), soit l'équation :  $\frac{\partial U_1}{\partial p_1}(p_1^*) = 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial p_1} &= \alpha_A \left( D_0 - (p_A + p_1)d - d(p_1 - q_A) \right) + \alpha_B \left( D_0 - (p_B + p_1)d - d(p_1 - q_B) \right) \\ &= \alpha_A \left( D_0 - (p_A + 2p_1 - q_A)d \right) + \alpha_B \left( D_0 - (p_B + 2p_1 - q_B)d \right) \\ &= (\alpha_A + \alpha_B)(D_0 - 2p_1d) + \alpha_A(q_A - p_A)d + \alpha_B(q_B - p_B)d \\ &= D_0 - 2dp_1 + \alpha_A(q_A - p_A)d + \alpha_B(q_B - p_B)d \end{aligned}$$

On doit donc résoudre :

$$D_0 - 2dp_1^* + \alpha_A(q_A - p_A)d + \alpha_B(q_B - p_B)d = 0$$

Ce qui donne :

$$p_1^* = \frac{1}{2} \left( \frac{D_0}{d} + \alpha_A(q_A - p_A) + \alpha_B(q_B - p_B) \right)$$

Ce prix  $p_1^*$  est logiquement symétrique entre  $A$  et  $B$ , chacune des deux parties ayant le même rôle sur le réseau.

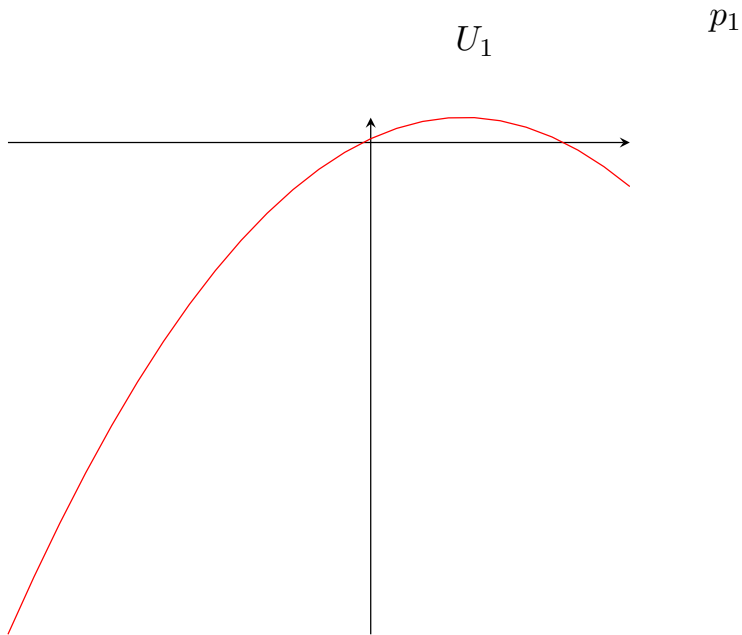


FIGURE 4 – Utilité  $U_1$

#### 5.4 Niveau 3 : prix d'accès aux fournisseurs

Une fois ce prix  $p_1$  fixé, les fournisseurs vont fixer les prix  $p_A$  et  $p_B$  qu'ils vont faire payer aux utilisateurs (voir Figure 5).

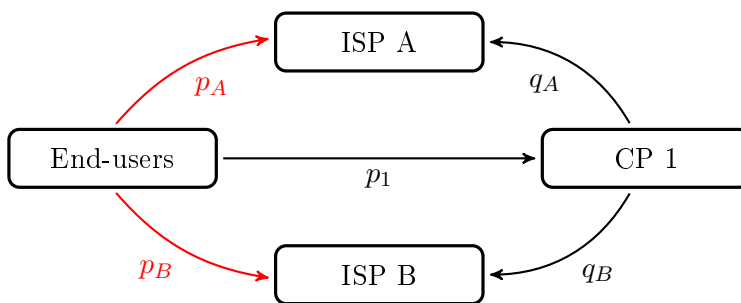


FIGURE 5 – Prix  $p_A$  et  $p_B$ , payés par les utilisateurs aux fournisseurs

Nous allons d'abord étudier la stratégie optimal de  $A$ , et appliquerons le résultat à  $B$ . Les deux fournisseurs jouant le même rôle.

$A$  va donc anticiper le prix  $p_1$ . En se servant de ce dernier, on peut donc réécrire l'utilité de  $A$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
U_A(p_A, p_B) &= \alpha_A \left( D_0 - (p_A + p_1^*)d \right) (p_A + q_A) \\
&= \alpha_A \left( D_0 - \left( p_A + \frac{1}{2} \left( \frac{D_0}{d} + \alpha_A(q_A - p_A) + \alpha_B(q_B - p_B) \right) \right) d \right) (p_A + q_A) \\
&= \alpha_A \left( \frac{D_0}{2} - \left( \left( 1 - \frac{\alpha_A}{2} \right) p_A + \frac{\alpha_A}{2} q_A + \frac{\alpha_B}{2} (q_B - p_B) \right) d \right) (p_A + q_A) \\
&= \frac{\alpha_A}{2} \left( D_0 - \left( (2 - \alpha_A) p_A + \alpha_A q_A + \alpha_B (q_B - p_B) \right) d \right) (p_A + q_A) \\
&= \frac{\alpha_A}{2} \left( D_0 - \left( p_A + \alpha_A q_A + \alpha_B (q_B + p_A - p_B) \right) d \right) (p_A + q_A)
\end{aligned}$$

On va réécrire cette fonction pour une meilleure lisibilité :

- Si  $p_A > p_B$ , on a  $\alpha_A = 0 \Rightarrow U_A(p_A, p_B) = 0$ .
- Si  $p_A < p_B$ , on a  $\alpha_A = 1$  et  $\alpha_B = 0$   
 $\Rightarrow U_A(p_A, p_B) = \frac{1}{2} [D_0 - (p_A + q_A)d] (p_A + q_A)$ .
- Si  $p_A = p_B$ , on ne sait rien de plus sur  $\alpha_A$  et  $\alpha_B$ . On va cependant réécrire  $U_A$  en fonction uniquement de  $p_A$ .

$$U_A(p_A, p_B) = \frac{\alpha_A}{2} \left( D_0 - \left( p_A + \alpha_A q_A + \alpha_B q_B \right) d \right) (p_A + q_A)$$

La fonction d'utilité  $U_A$  est donc :

$$U_A(p_A, p_B) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( D_0 - (p_A + q_A)d \right) (p_A + q_A) & \text{si } p_A < p_B \\ \frac{\alpha_A}{2} \left( D_0 - \left( p_A + \alpha_A q_A + \alpha_B q_B \right) d \right) (p_A + q_A) & \text{si } p_A = p_B \\ 0 & \text{si } p_A > p_B \end{cases}$$

De la même manière, la fonction d'utilité  $U_B$  est maintenant :

$$U_B(p_A, p_B) = \begin{cases} 0 & \text{si } p_A < p_B \\ \frac{\alpha_B}{2} \left( D_0 - \left( p_B + \alpha_B q_B + \alpha_A q_A \right) d \right) (p_B + q_B) & \text{si } p_A = p_B \\ \frac{1}{2} \left( D_0 - (p_B + q_B)d \right) (p_B + q_B) & \text{si } p_A > p_B \end{cases}$$

### 5.4.1 Propriétés

Pour obtenir un gain, le fournisseur  $A$  (resp.  $B$ ) désire que son utilité  $U_A = D_A(p_A + q_A)$  (resp.  $U_B$ ) soit positive. Comme la demande  $D$  est positive : cela n'a pas de sens d'avoir une demande négative ;  $D_A = \alpha_A D$  doit l'être aussi (resp  $D_B$ ). On a donc  $D_A \geq 0$  et  $(p_A + q_A) \geq 0$  (resp.  $D_B \geq 0$  et  $(p_B + q_B) \geq 0$ )

$$U_A \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} p_A \geq -q_A \\ \text{et} \\ p_A \leq \frac{D_0}{d} - q_A \end{cases}$$

$$U_B \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} p_B \geq -q_B \\ \text{et} \\ p_B \leq \frac{D_0}{d} - q_B \end{cases}$$

On a donc

$$p_A \in [-q_A; \frac{D_0}{d} - q_A]$$

$$p_B \in [-q_B; \frac{D_0}{d} - q_B]$$

Ces bornes vont délimiter l'intervalle d'étude des réponses, on sait qu'en dehors de ces intervalles, les fournisseurs auront un gain négatif.

### 5.4.2 Meilleures réponses

On appelle meilleure réponse la stratégie qui maximise l'utilité d'un participant, étant donné les stratégies adverses.

Dans notre cas, on va donc calculer les deux fonctions  $p_A^*(p_B)$ , fonction de meilleure réponse de  $A$  à  $p_B$ , et  $p_B^*(p_A)$ , fonction de meilleure réponse de  $B$  à  $p_A$ .

À  $p_B$  fixé,  $\in [-q_A; \frac{D_0}{d} - q_A]$ , on va donc chercher à maximiser  $U_A(p_A)$ , définie sur  $[-q_A; \frac{D_0}{d} - q_A]$  :

$$U_A(p_A) = \begin{cases} \frac{1}{2} (D_0 - (p_A + q_A)d)(p_A + q_A) & \text{si } p_A < p_B \\ \frac{\alpha_A}{2} (D_0 - (p_A + \alpha_A q_A + \alpha_B q_B)d)(p_A + q_A) & \text{si } p_A = p_B \\ 0 & \text{si } p_A > p_B \end{cases}$$

On va donc chercher le maximum local de  $U_A$  sur chacune la première partie pour en déduire le maximum global  $U_A$ , en le comparant à la valeur en  $p_B$ .

**Analyse de  $p_A < p_B$  :** Soit  $U_{A_1}(p_A) = \frac{1}{2}(D_0 - (p_A + q_A)d)(p_A + q_A)$ , qui correspond à la  $U_A|_{p_A < p_B}$ .

$$\begin{aligned} U'_{A_1} &= \frac{\partial U_{A_1}}{\partial p_A} \\ &= \frac{1}{2}(-d * (p_A + q_A) + (D_0 - (p_A + q_A)d)) \\ &= \frac{1}{2}D_0 - (p_A + q_A)d \end{aligned}$$

Le maximum est atteint lorsque  $U'_{A_1} = 0$ , soit pour  $p_A = \frac{D_0}{2d} - q_A$  :

$$\max(U_{A_1} = U_{A_1}(\frac{D_0}{2d} - q_A) = \frac{1}{8} \frac{D_0^2}{d}.$$

On a donc :

- Si  $\frac{D_0}{2d} - q_A < p_B$ ,

$$\begin{aligned} \max_{p_A < p_B}(U_A) &= U_A(\frac{D_0}{2d} - q_A) \\ &= \frac{1}{8} \frac{D_0^2}{d} \end{aligned}$$

- Si  $\frac{D_0}{2d} - q_A \geq p_B$ ,

$$\begin{aligned} \max_{p_A < p_B}(U_A) &= U_A(p_B - \epsilon) \\ &= \frac{1}{2}(D_0 - ((p_B - \epsilon) + q_A)d)((p_B - \epsilon) + q_A) \end{aligned}$$

car  $U_A$  est croissante sur  $[-\infty, p_B[$  (car  $U_{A_1}$  l'est sur  $[-\infty, \frac{D_0}{2d} - q_A]$ ).

On introduit ici  $\epsilon$ . Celui-ci représente la plus petite unité de prix sur lequel peuvent jouer les fournisseurs. En effet le domaine de définition des prix n'est pas réellement continu : c'est un ensemble discret dont chaque prix est séparé par  $\epsilon$ .

On a :

$$\max_{p_A < p_B} = \begin{cases} \frac{1}{2}(D_0 - ((p_B - \epsilon) + q_A)d)((p_B - \epsilon) + q_A) & \text{si } p_B \leq \frac{D_0}{2d} - q_A & \text{en } p_B - \epsilon \\ \frac{1}{8} \frac{D_0^2}{d} & \text{si } p_B > \frac{D_0}{2d} - q_A & \text{en } \frac{D_0}{2d} - q_A \end{cases}$$

Ce résultat va nous permettre de calculer le maximum de  $U_A$ .

Si  $p_B > \frac{D_0}{2d} - q_A$  : on a,

$$U_A\left(\frac{D_0}{2d} - q_A\right) > \lim_{p_A^- \rightarrow p_B} (U_A(p_A))$$

car  $U_A$  est une fonction quadratique sur  $[-q_A, p_B[$ , donc le maximum est atteint en  $\frac{D_0}{2d} - q_A$ .

Or d'après (4),  $U_A(p_A) = \alpha_A D(p_A + q_A)$ , soit  $U_A(p_A) = D(p_A + q_A)$  car  $\alpha_A = 1$  sur  $[-q_A, p_B[$ . Donc

$$\lim_{p_A^- \rightarrow p_B} (U_A(p_A)) = \lim_{p_A^- \rightarrow p_B} (D(p_A + q_A)) = D(p_B + q_A).$$

Or  $U_A(p_B) = \alpha_A D(p_B + q_A)$  avec  $\alpha_A \leq 1$ .

$$\begin{aligned} U_A(p_B) &\leq D(p_B + q_A) \\ \Rightarrow U_A(p_B) &\leq \lim_{p_A^- \rightarrow p_B} (U_A(p_A)) \\ \Rightarrow U_A(p_B) &< U_A\left(\frac{D_0}{2d} - q_A\right) \end{aligned}$$

La meilleure réponse à  $p_B$ , si  $p_B > \frac{D_0}{2d} - q_A$  est donc  $\frac{D_0}{2d} - q_A$

Si  $p_B \leq \frac{D_0}{2d} - q_A$  :

$$\begin{aligned} U_A(p_B^-) &= \frac{1}{2}(D_0 - (p_B + q_A)d)(p_B + q_A) \\ U_A(p_B) &= \frac{\alpha_A}{2}\left(D_0 - (p_B + \alpha_A q_A + \alpha_B q_B)d\right)(p_B + q_A) \end{aligned}$$

$$U_A(p_B^-) - U_A(p_B) = \left((1 - \alpha_A)D_0 - ((1 - \alpha_A^2)q_A - \alpha_A \alpha_B q_B)d\right)(p_B + q_A)$$

Or  $p_B + q_A \geq 0$  car  $p_B \in [-q_A; \frac{D_0}{d} - q_A]$ . D'où :

$$\begin{aligned} U_A(p_B^-) - U_A(p_B) \geq 0 &\Leftrightarrow (1 - \alpha_A)D_0 - ((1 - \alpha_A^2)q_A - \alpha_A \alpha_B q_B)d \geq (1 - \alpha_A)p_B d \\ &\Leftrightarrow \frac{D_0}{d} - (1 + \alpha_A)q_A - \alpha_A q_B \geq p_B \text{ car } \alpha_B = 1 - \alpha_A \end{aligned}$$

La meilleure réponse à  $p_B$ , si  $p_B \leq \frac{D_0}{d} - q_A$  est donc :

$$\begin{aligned} - p_B - \epsilon &\text{ si } p_B < \frac{D_0}{d} - (1 + \alpha_A)q_A - \alpha_A q_B, \\ - p_B &\text{ si } p_B \geq \frac{D_0}{d} - (1 + \alpha_A)q_A - \alpha_A q_B \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction de meilleure réponse  $p_A^*(p_B)$ , définie sur  $[-q_A, \frac{D_0}{d} - q_A]$ , est la suivante :

$$p_A^*(p_B) = \begin{cases} \frac{D_0}{2d} - q_A & \text{si } p_B > \frac{D_0}{2d} - q_A \\ p_B & \text{si } \frac{D_0}{2d} - q_A \geq p_B \geq \frac{D_0}{d} - (1 + \alpha_A)q_A - \alpha_A q_B \\ p_B - \epsilon & \text{si } p_B > -q_A + \epsilon \\ -q_A & \text{si } p_B = -q_A. \end{cases}$$

De la même manière, on obtient  $p_B^*$ , définie sur  $[-q_B, \frac{D_0}{d} - q_B]$

$$p_B^*(p_A) = \begin{cases} \frac{D_0}{2d} - q_B & \text{si } p_A > \frac{D_0}{2d} - q_B \\ p_A & \text{si } \frac{D_0}{2d} - q_B \geq p_A \geq \frac{D_0}{d} - (1 + \alpha_B)q_B - \alpha_B q_A \\ p_A - \epsilon & \text{si } p_A > -q_B + \epsilon \\ -q_B & \text{si } p_A = -q_B \end{cases}$$

On distingue trois cas, selon que  $q_A < q_B$  (Figure 6),  $q_A > q_B$  (Figure 7), ou  $q_A = q_B$  (Figure 8),

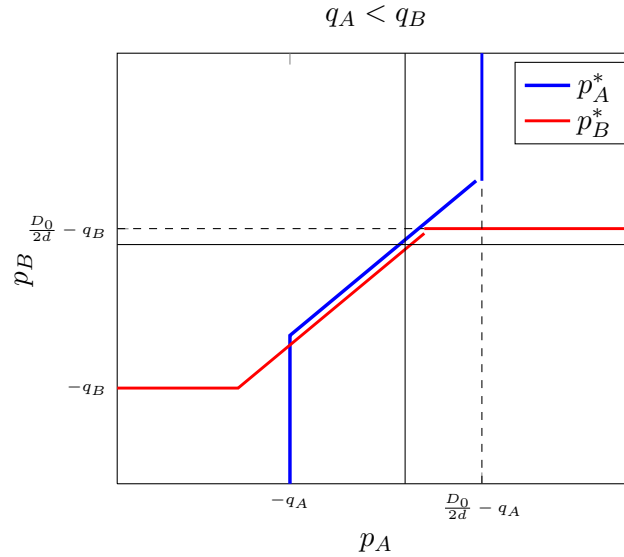


FIGURE 6 – Courbe de Meilleures Réponses,  $q_A < q_B$

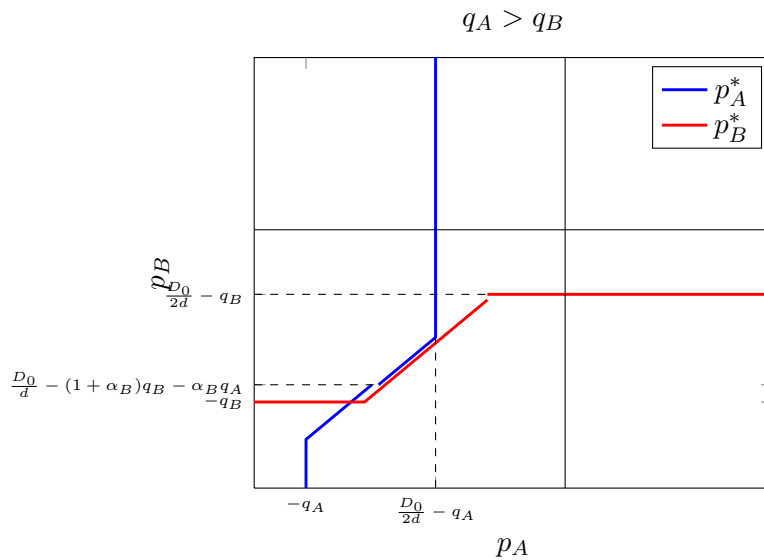


FIGURE 7 – Courbe de Meilleures Réponses,  $q_A > q_B$

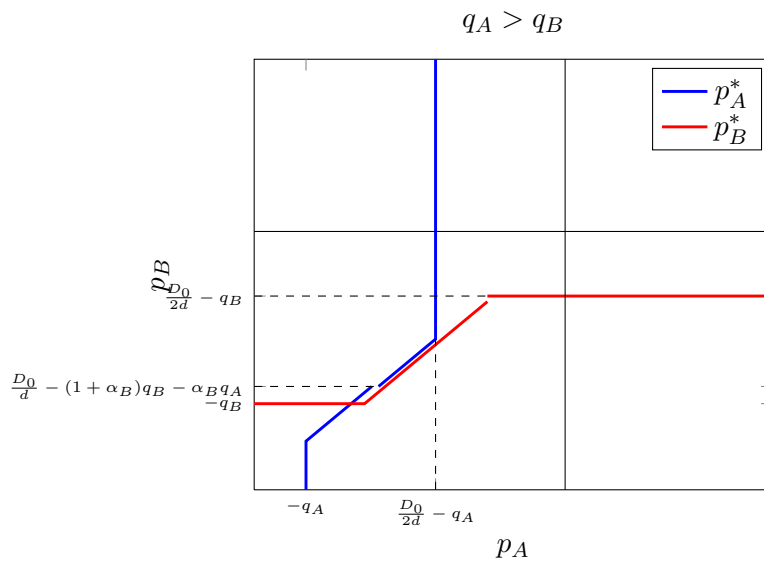


FIGURE 8 – Courbe de Meilleures Réponses,  $q_A = q_B$

**Équilibres de Nash** On rappelle qu'un équilibre de Nash est une situation où aucun des acteurs n'a intérêt à changer de stratégie : si l'un d'entre eux faisait ceci, il verrait alors son gain diminuer. Nous allons donc chercher s'il existe un équilibre de Nash dans ce jeu.



Si les courbes de meilleure réponse se croisent, on a alors, à ce point  $(p_{A,eq}, p_{B,eq})$ , un équilibre de Nash. En effet, on a alors  $p_A^*(p_{B,eq}) = p_{A,eq}$  et  $p_B^*(p_{A,eq}) = p_{B,eq}$ . Aucune des deux parties n'a intérêt à changer de stratégie, nous sommes alors en présence d'un équilibre de Nash.

Dans ces trois figures, on voit que les courbes ne se croisent qu'une fois, pour chacun des trois cas. Nous avons donc un unique équilibre de Nash, aux points suivants :

- si  $q_A < q_B$ , l'équilibre a lieu en :  $(-q_A, -q_A - \epsilon)$  (Figure 6) ;
- Si  $q_A = q_B$ , l'équilibre a lieu en :  $(-q_A, -q_A)$  (Figure 8) ;
- Si  $q_A > q_B$ , l'équilibre a lieu en :  $(-q_B - \epsilon, -q_B)$  (Figure 7).

On peut démontrer que dans chacune des trois situations, l'équilibre est toujours unique et qu'il est toujours égal aux points précédents.

Cela signifie que chacun des deux fournisseurs va faire diminuer son prix au maximum, quitte à reverser de l'argent aux utilisateurs. Ce prix va diminuer jusqu'à ce qui l'atteigne une utilité nulle pour l'une des deux parties. Si  $q_A \neq q_B$ , le fournisseur ayant la plus grande marge de manœuvre est celui qui fait payer le prix le plus fort au diffuseur. Celui-ci aura juste à placer un prix légèrement inférieur à  $-q_A$  ou  $-q_B$ , et sera sûr de remporter tout le marché. si  $q_A = q_B$  vont faire diminuer leur prix jusqu'à  $-q_A$ , et auront tous les deux une utilité nulle.

## 5.5 Niveau 4 : prix entre fournisseurs et diffuseur de contenu

Ce niveau, est le dernier de notre jeu. C'est le niveau où sont décidés les prix  $q_A$  et  $q_B$  qui représentent les paiements entre le diffuseur et les fournisseurs d'accès (voir Figure 9).

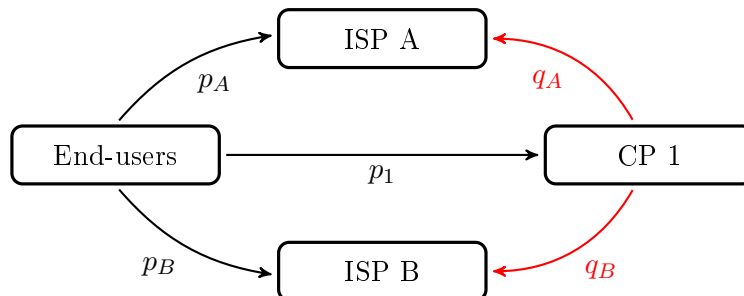


FIGURE 9 – Prix  $q_A$  et  $q_B$ , entre fournisseurs et diffuseur

À l'aide des prix  $p_1^*, p_A^*, p_B^*$ , on va pouvoir déterminer  $q_A^*$  et  $q_B^*$ . Commençons par réécrire les utilités de  $A$ ,  $B$ , et  $1$ , dans les 3 cas qui nous intéressent.

	$q_A < q_B$	$q_A = q_B$	$q_A > q_B$
$U_A$	0	0	$\frac{1}{2} \left( D_0 - (q_A - q_B - \epsilon)d \right) (q_A - q_B + \epsilon)$
$U_B$	$\frac{1}{2} \left( D_0 - (q_B - q_A + \epsilon)d \right) (q_B - q_A - \epsilon)$	0	0
$U_1$	$-q_B D_0 - q_B(q_A + \epsilon)$	$\frac{1}{4} \frac{D_0^2}{d}$	$-q_A D_0 - q_A(q_B + \epsilon)$

Ces prix peuvent être déterminées par trois entités différentes :

- le CP, qui va maximiser son utilité
- les ISPs, qui vont chercher à maximiser leurs utilités, via un nouveau jeu
- le régulateur, qui va chercher à maximiser le « *social welfare* ».

Dans les deux premiers cas, le réseau n'est pas neutre, puisque que ce sont des entités du réseau qui choisissent les prix  $q_A$  et  $q_B$ . Dans le troisième cas, on a un réseau neutre : c'est le régulateur qui décide des prix payés entre le CP et les ISPs, la règle est la même pour tous.

Cette partie n'a pas encore été étudiée mais nous avons des idées quant aux résultats.

### 5.5.1 Choix des prix par le CP

Si les prix sont décidés par le CP, il va chercher à maximiser son gain, qui est égal à :

$$U_1(q_A, q_B) = \begin{cases} -q_B D_0 - q_B(q_A + \epsilon) & \text{si } q_A < q_B \\ \frac{1}{4} \frac{D_0^2}{d} & \text{si } q_A = q_B \\ -q_A D_0 - q_A(q_B + \epsilon) & \text{si } q_A > q_B \end{cases}$$

Le gain maximum semble être atteint lorsque  $q_A = q_B$  mais ceci reste encore à démontrer.

### 5.5.2 Choix des prix par les ISPs

Si ce sont les ISPs qui choisissent les prix, elles vont avoir tendance à faire payer un maximum le CP. Le jeu n'est jamais stable :

$$q_A \rightarrow -\infty$$

$$q_B \rightarrow -\infty.$$

Cela signifie que chacun des deux ISPs va avoir tendance à diminuer un peu le prix qu'il fait payer aux utilisateurs et augmenter d'autant ce qu'il fait payer au CP. L'autre agira de même, c'est pour ça que nos résultats tendent vers l'infini. Notons qu'au final même si l'on a des prix infinis, chacune des entités ne paiera ni ne recevra une quantité infinie d'argent, car ce sera compenser par ce qu'elle paie à l'autre partie.

### 5.5.3 Choix des prix par le régulateur

Pour le régulateur, il faut d'abord commencer par choisir une fonction qui caractérise le bien-être du réseau. Ce peut être la somme des utilités des acteurs du réseau, ou une pondération de celles-ci.

Mon idée serait plutôt que le régulateur cherche à maximiser la demande. En effet si la demande est maximum, cela signifie qu'un nombre important de personnes peuvent se connecter ce qui est bénéfique pour la société. La demande dépendant directement du prix payé par les utilisateurs, cela revient au même de minimiser le prix payé.

## 5.6 Neutralité vs non-neutralité

Mon idée sur le sujet, qui ne se base sur aucun résultat scientifique, est que le réseau doit au moins être réguler. En effet, si on laisse les ISPs décider par elles-même les prix  $q_A$  et  $q_B$ , on n'obtient pas d'équilibre et tout le monde est perdant.

Pour ce qui est de la justification de l'existence des prix  $q_A$  et  $q_B$ , peu importe le décideur, je n'ai pas encore d'idée. Il est possible que ceux-ci soient dans l'intérêt de chacun des acteurs du réseau mais cela reste encore à vérifier.

## 6 Travaux futurs et conclusion

Dans cette partie nous allons voir le travail qu'il reste à effectuer dans le temps qu'il reste pour ce stage. Puis nous verrons les travaux qui peuvent suivre celui-ci.

### 6.1 Fin de stage

Dans le mois qui suit, je dois terminer cette étude. En particulier je dois terminer le niveau 4 du jeu, ainsi que prouver tous ces futurs résultats. Je dois également trouver une fonction d'utilité pour le régulateur. Elle devra représenter le bien-être du réseau ou des utilisateurs.

Dans un second temps, je pense modifier l'ordre de décision des prix :

1. *Side-payments* :  $q_A$  et  $q_B$  toujours décidés en premier
2. Prix d'accès au diffuseur :  $p_1$
3. Prix d'accès au fournisseur :  $p_A$  et  $p_B$
4. Choix des utilisateurs pour le fournisseur  $A$  ou  $B$ .

Cette modification entre les étapes 2 et 3 permettraient de voir si cela a un impact sur le réseau. Les échelles de temps de décision de  $p_1$ ,  $p_A$  et  $p_B$  sont sensiblement les mêmes. Voir le deuxième cas serait donc intéressant pour permettre une comparaison.

### 6.2 Travaux futurs

Ce modèle étant simplifié, il devra être enrichi pour être plus proche de la réalité. Les différents points suivants seront à améliorer : une demande non linéaire, ajouter de la congestion dans le réseau et enfin modéliser de l'innovation et de l'investissement.

#### 6.2.1 Non linéarité de la demande

Dans notre modélisation, la demande est linéaire vis à vis du prix d'accès total au contenu - prix payé au fournisseur ainsi qu'au diffuseur. Nous savons que ce n'est pas réaliste et qu'un modèle avec une demande non linéaire serait plus réaliste. Il conviendra de trouver comment modéliser cette demande, en nous aidant de publications ayant déjà étudié le sujet, afin d'être plus près de la réalité.

### 6.2.2 Congestion du réseau

Actuellement notre réseau ne représente pas l'éventuelle congestion. Cependant nous sommes bien conscients que si tous les utilisateurs choisissent le même fournisseur, celui-ci sera congestionné et la connexion plus lente. Celle-ci se modélise grâce notamment au prix perçu  $\bar{p}$ . Celui-ci doit inclure la congestion : en tant qu'utilisateur le prix que j'accepte de payer dépend évidemment de la qualité de service pour laquelle je paie.

### 6.3 Modélisation de l'innovation et de l'investissement

Enfin notre réseau ne modélise pas l'apport innovant des diffuseurs ni l'investissement réalisé par les fournisseurs. Ceci devra être ajouté à notre étude : notre jeu n'aura plus quatre niveaux mais six ; les deux nouveaux représentant l'investissement et l'innovation.

### 6.4 Conclusion

Dans ce stage nous avons étudié un aspect de la neutralité du Net remis en question par les fournisseurs d'accès à Internet. Nous avons d'abord modélisé ce réseau, en identifiant clairement les acteurs ayant un rôle ainsi que les différentes interactions entre eux. Nous avons étudié ensuite ce modèle, grâce à un jeu à quatre niveaux : à chaque niveau les acteurs effectuent un choix qui est optimal.

Ceci ne nous permet pas de conclure clairement pour le moment. C'est l'objet de l'étude qu'il faudra réaliser dans le mois suivant. De plus, le modèle actuel peut être modifié pour être encore plus proche de la réalité, ce qui peut faire l'objet de stages futurs ou d'une thèse. Il conviendra notamment de modéliser l'investissement et l'innovation qui sont des enjeux majeurs de l'Internet de demain.

## Bibliographie

- [1] Eitan Altman, Chadj Barkat, Pierr Bernhard, Eric Fleury, Philippe Jacquet, Arnaud Legout, Corinne Touati, Bruno Tuffin, and Sulan Wong. Réponse à la consultation sur la neutralité du net. 2010.
- [2] Eitan Altman, Pierre Bernhard, George Kesidis, Julio Rojas-Mora, and Sulan Wong. A study of non-neutral networks with usage-based prices. Technical report, 6872, INRIA, 2010.
- [3] Zakaria Babutzidze. Price competition on networked duopolistic markets. April 2011.
- [4] Benjamin Bayart. Table ronde politique : Neutralité du net, liberté d'expression sur internet... le paquet télécom et la loi hadopi. 2009.
- [5] Hsing Kenneth Cheng, Subhajyoti Bandyopdhay, and Hong Guo. The debate on net neutrality, a policy perspective. June 2008.
- [6] Nicolas Curien. *Économie des réseaux*. La découverte, 2000.
- [7] Autorité de régulation des communications électroniques et des postes. Neutralité de l'internet et des réseaux - propositions et recommandations. Septembre 2010.
- [8] La Quadrature du Net. Garantir la neutralité du net. Avril 2010.
- [9] Corinne Erhel and Laure De La Raudière. Rapport d'information sur la neutralité du net et des réseaux. *Assemblée Nationale*, 2011.
- [10] Robert Hahn and Scott Wallsten. The economics of net neutrality. *The Berkeley Economic Press Economists*, 2006.
- [11] Todd R. Kaplan and David Wettstein. The possibility of mixed-strategy equilibria with constant-returns-to-scale technology under bertrand competition. *Spanish Economic Review*, 200.
- [12] Patrick Maillé and Bruno Tuffin. Price war in heterogeneous wireless networks. March 2010.
- [13] Assemblée nationale constituante. Déclaration des droits de l'homme et du citoyen. 1789.
- [14] P. Njoroge, A. Ozdaglar, N. Stier-Moses, and G. Weintraub. Investment in two sided markets and the net neutrality debate. July 2010.
- [15] Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein. *A Course in Game theory*. MIT Press, 1994.

- [16] Tim Wu. Network neutrality, broadband discrimination. *Journal of Telecommunications and High Technology*, 2003.