



**HAL**  
open science

# Modélisation numérique de l'érosion dans les écoulements superficiels

Marie Martin

► **To cite this version:**

Marie Martin. Modélisation numérique de l'érosion dans les écoulements superficiels. Analyse numérique [math.NA]. 2009. dumas-00645955

**HAL Id: dumas-00645955**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00645955v1>**

Submitted on 3 Dec 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Stage Master 2 : Ingénierie Mathématique  
Option Calcul Scientifique

Modélisation numérique de l'érosion  
dans les écoulements superficiels

Auteur : **MARTIN Marie**

Encadrants : O. Cerdan  
P. Sochala

Avril-Septembre 2009

## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon tuteur Olivier Cerdan pour m'avoir permis d'effectuer ce stage au sein du BRGM. Ses précisions, ses conseils et sa sympathie ont rendu ce stage enrichissant. Mes remerciements vont également à Pierre Sochala pour ses explications, ses suggestions, sa patience et sa gentillesse.

Je remercie également mes professeurs Yves Coudière et Christophe Berthon pour l'intérêt particulier qu'ils ont porté à ce stage et pour leurs contributions en proposant un schéma de relaxation.

Enfin je remercie tous ceux qui ont contribué à faire de ce stage un moment agréable. Je pense ici en particulier aux membres du BRGM Olivier Brivois et Etienne Delvallée ainsi qu'aux membres du MAPMO, les discussions lors des réunions METHODE du jeudi matin furent enrichissantes et détendues. Je suis particulièrement reconnaissante à Frédéric Darboux pour les essais expérimentaux menés à l'INRA. Le manque de temps ne m'a pas permis d'exploiter les résultats de ces essais.

# Table des matières

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>                                 | <b>3</b>  |
| 1.1      | Présentation du BRGM . . . . .                      | 3         |
| 1.2      | Présentation de l'érosion . . . . .                 | 4         |
| 1.2.1    | Description de l'érosion . . . . .                  | 4         |
| 1.2.2    | Processus de l'érosion . . . . .                    | 5         |
| 1.2.3    | Facteurs de l'érosion . . . . .                     | 7         |
| 1.2.4    | Schéma récapitulatif du problème général . . . . .  | 8         |
| 1.3      | Equations de Saint-Venant . . . . .                 | 8         |
| 1.4      | Objectifs du stage . . . . .                        | 9         |
| <b>2</b> | <b>Choix des modèles d'érosion</b>                  | <b>10</b> |
| 2.1      | Modèles couplés Saint-Venant - Exner . . . . .      | 10        |
| 2.2      | Lois de fermetures . . . . .                        | 12        |
| 2.2.1    | Lois de transport . . . . .                         | 13        |
| 2.2.2    | Lois d'arrachement et de dépôt . . . . .            | 14        |
| <b>3</b> | <b>Schémas numériques</b>                           | <b>17</b> |
| 3.1      | Discrétisation du système de Saint-Venant . . . . . | 17        |
| 3.2      | Discrétisation de l'équation d'Exner . . . . .      | 19        |
| 3.3      | Couplage . . . . .                                  | 19        |
| <b>4</b> | <b>Cas-test</b>                                     | <b>21</b> |
| 4.1      | Validation avec solution analytique . . . . .       | 21        |
| 4.2      | Dune arasée . . . . .                               | 24        |
| 4.3      | Formation d'une ravine . . . . .                    | 29        |
| <b>5</b> | <b>Conclusion</b>                                   | <b>32</b> |
| <b>A</b> | <b>Schéma de relaxation</b>                         | <b>33</b> |
| <b>B</b> | <b>Compléments Bibliographiques</b>                 | <b>36</b> |
|          | <b>Références</b>                                   | <b>40</b> |

# 1 Introduction

## 1.1 Présentation du BRGM

Le BRGM (Bureau de Recherches Géologiques et Minières) est l'établissement public de référence dans le domaine des applications des sciences de la terre pour gérer les ressources et les risques du sol et du sous-sol. Créé en 1959, c'est un établissement Public à Caractère Industriel et Commercial (EPIC) placé sous la double tutelle du ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche et du ministère de l'Ecologie, de l'Energie, du Développement durable et de l'Aménagement du territoire. Les deux objectifs majeurs du BRGM sont :

- comprendre les phénomènes géologiques en développant des méthodologies et des techniques nouvelles,
- mettre à disposition des pouvoirs publics des outils nécessaires à la gestion du sol, du sous-sol et des ressources naturels.

Le BRGM a pour mission la recherche scientifique, l'appui aux politiques publiques, la coopération internationale.

La *recherche scientifique* se déploie dans trois domaines :

- la connaissance géologique, la compréhension par l'observation et la modélisation des processus liés au sol et au sous-sol,
- les développements au service des politiques publiques,
- les transferts vers l'industrie.

L'*appui aux politiques publiques* regroupe l'ensemble des actions d'expertise, de surveillance et d'études menées en soutien des politiques publiques. Cette mission s'exprime en cinq types d'actions : l'observation du sol et du sous-sol, la capitalisation et la diffusion de la connaissance, les études méthodologiques, la fourniture d'une expertise publique indépendante et la formation et le transfert de savoir.

Pour la *coopération internationale*, le BRGM apporte son savoir-faire et son expertise en particulier pour les « infrastructures géologiques », la cartographie, les risques naturels, les ressources minérales et les eaux souterraines. Le BRGM pour cette mission a plusieurs axes d'intervention : la contribution à la politique de coopération française, l'appui aux politiques de l'Union européenne, de la Banque Mondiale et des autres acteurs multilatéraux, le soutien aux politiques publiques des États, les prestations aux entreprises dans les domaines de l'environnement, des mines et de l'énergie et la participation aux travaux d'instances géologiques internationales.

Les études au sein du BRGM se répartissent selon les dix domaines thématiques suivant : la géologie, les ressources minérales, la géothermie, l'eau, l'après-mine, les sites et sols pollués et la gestion des déchets, les systèmes d'information, les risques naturels, le stockage géologique du  $CO_2$  et la métrologie. J'ai effectué mon stage dans le service RNSC (Risques Naturels et Stockage du  $CO_2$ ) dont le but est d'anticiper et de prévenir ces risques : séismes, éruptions volcaniques, impacts des changements climatiques, effondrements, glissements de terrain, érosion et/ou submersion côtières, retraits-gonflements des argiles, impacts liés au stockage du  $CO_2$ . Pour étudier les mécanismes de ces aléas géologiques, il est conçu et mis en oeuvre plusieurs outils : systèmes de surveillance, modèles prédictifs, cartographies des aléas, bases de données, outils d'évaluation des risques. L'une des missions est de fournir aux décideurs des moyens de diagnostic et d'aide à la décision pour l'aménagement des zones urbaines et du littoral, sur la base d'évaluations de vulnérabilité et d'élaboration de scénarios de risques.

## 1.2 Présentation de l'érosion

### 1.2.1 Description de l'érosion

Le ruissellement et l'érosion des sols posent de multiples problèmes en termes de risques naturels (coulées boueuses), de préservation de la qualité des eaux (potabilité) et des écosystèmes aquatiques (turbidité, pollutions chimiques) et de conservation des ressources agronomiques (diminution des épaisseurs de sol, pertes en nutriments). Dans la pratique, il n'est pas envisageable de supprimer tous les éléments à l'origine du ruissellement. Ainsi, les stratégies de lutte contre le ruissellement et l'érosion s'attachent à intercepter les transferts à l'intérieur des bassins versants en faisant par exemple alterner les surfaces ruisselantes et les surfaces infiltrantes le long des chemins d'écoulement. Ces propositions d'aménagement nécessitent une bonne connaissance des chemins d'écoulement. Au sein d'un bassin versant plusieurs éléments contrôlent les directions de transfert : la topographie, les sillons agricoles au sein des parcelles, les limites de parcelles, les fossés et le réseau hydrographique. S'il est clair que le réseau d'écoulement résulte de l'interaction entre ces différents processus d'échelles spatiales très différentes, les modalités d'interaction restent en grande partie à explorer et permettront de mieux prédire le ruissellement et l'érosion.

L'érosion est un ensemble de phénomènes qui façonnent le relief terrestre et dont les facteurs sont le climat, la topographie, la physique et la chimie de la surface, la couverture végétale, la nature de ces végétaux, l'histoire tectonique et enfin l'action de l'homme. Il existe cinq types d'érosion : l'*érosion hydraulique* (figure 5) est engendrée par le ruissellement d'eau dû à la pluie, l'*érosion glaciaire* (figure 1) provient du mouvement des glaciers, l'*érosion éolienne* (figure 2) façonne par exemple les dunes des déserts grâce au transport du sable par le vent, l'*érosion marine* (figure 3) s'exerce sur les littoraux par l'action des vagues, des courants et de la houle et enfin l'*érosion anthropique* (figure 4) résulte de l'action de l'homme sur le relief. Ce dernier type d'érosion provient des cultures, des différentes constructions et de la modification du milieu naturel telle que la déforestation ou le contrôle des cours d'eau.



FIGURE 1 – Chaîne de montagnes suisse



FIGURE 2 – Dune rose au Niger

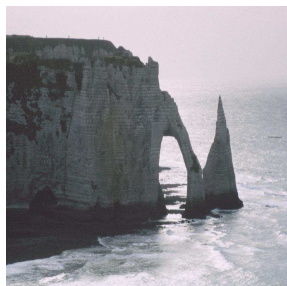


FIGURE 3 – Falaises d'Étretat



FIGURE 4 – Déforestation de la forêt amazonienne

Nous nous intéressons dans ce stage à l'érosion hydraulique des sols à l'échelle de la parcelle ou du bassin versant (figures 5 et 6). L'érosion désigne désormais l'érosion hydraulique qui constitue un facteur de risques naturels comme le montre les figures 7 et 8.



FIGURE 5 – Parcelle agricole



FIGURE 6 – Bassin versant



FIGURE 7 – Coulée de boue en Belgique



FIGURE 8 – Ravine observée en Normandie

L'érosion agit à différents rythmes suivant qu'elle soit faible ou forte. Une faible érosion peut sur des temps très longs lisser des montagnes, creuser des vallées. Alors qu'une forte érosion peut transformer un paysage de façon quasi instantanée ou au moins très rapidement avec des phénomènes naturels violents tel qu'une avalanche, des coulées de boues ou un tsunami. L'érosion comporte trois phases étroitement liées : l'arrachement ou détachement, le transport des sédiments et le dépôt. Les paragraphes suivants présentent les principes de base de l'érosion hydraulique en définissant notamment les trois phases citées précédemment et les paramètres qui influent sur ces phases.

### 1.2.2 Processus de l'érosion

On définit dans cette section les paramètres et les processus de l'érosion et notamment ses trois phases caractéristiques.

#### • Le détachement des sédiments

Le *détachement* ou l'*arrachement* des sédiments peut être provoqué par la goutte de pluie *via* l'effet splash, le ruissellement, le vent, la houle ou les outils de labours. Ici nous nous intéressons au détachement par ruissellement et par effet splash.

On peut d'ores et déjà remarquer que généralement le détachement est spatialisé. Si on prend par exemple un cours d'eau, sur l'amont l'arrachement sera principalement le fait de l'effet splash alors que plus en aval il sera provoqué par l'écoulement de l'eau. Cette spatialisation de l'érosion vient de la hauteur d'eau. En effet, pour que la pluie érode le sol il faut que la hauteur d'eau soit suffisamment faible pour que les gouttes de pluie atteignent le sol. De la même manière, sur

une parcelle le détachement est principalement provoqué par l'effet splash. Dans les prochains paragraphes on explique notamment ces deux types d'arrachement.

L'*arrachement par le ruissellement* vient du fait que le mouvement du fluide entraîne les sédiments du fond. En effet, le ruissellement représente le déplacement de l'eau à la surface du sol. Il dépend notamment de plusieurs facteurs qui sont la force tractrice, l'érodibilité du sol, l'érosivité du fluide, la taille des sédiments. Il se produit lorsque l'eau sur une pente ne s'infiltré pas complètement dans le sol ou n'est pas interceptée par des obstacles naturels. Le ruissellement est souvent accru si l'infiltration est diminuée par la compaction, la formation d'une croûte ou le gel.

L'*effet splash* est provoqué par la pluie. Il joue un rôle important dans les processus hydrologiques et érosifs. L'impact des gouttes de pluie a pour effet de briser les agrégats (sorte de motte ou de tas de sédiments) et de disperser les particules du sol. Cet arrachement déplace des particules de sol qui peuvent reformer de nouveaux agrégats. Les particules ainsi décomposées sont détachées et éjectées par l'impact des gouttes de pluie. Cet effet a lieu principalement lorsque la hauteur d'eau est faible car il faut que les gouttes d'eau atteignent le sol. Il dépend de plusieurs facteurs et notamment des gouttes de pluie, de l'érosivité de l'eau, de la taille des sédiments et de leurs facultés à se disperser c'est-à-dire l'érodibilité du sol. Il dépend aussi de l'intensité de la pluie c'est-à-dire que des pluies plus fortes, dissipant plus d'énergie, seront nécessaires pour déplacer les plus grosses particules de sol.



FIGURE 9 – impact d'une goutte de pluie

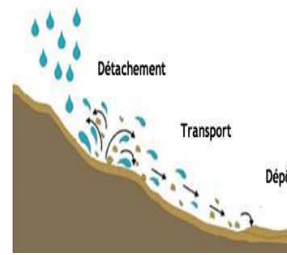


FIGURE 10 – l'érosion par l'effet splash

### • Le transport des sédiments

La plupart des modèles de description et de quantification de l'érosion des sols par l'eau sont issus de l'hydraulique fluviale. On peut néanmoins noter que l'effet splash lors de l'impact des gouttes de pluies détache les sédiments mais les transporte également. Nous nous intéressons ici au transport des sédiments par ruissellement. Dans des conditions de faibles pentes et de faibles vitesses du fluide, on différencie deux modes de transport solide suivant la taille des particules : le charriage pour les sédiments de tailles importantes et la suspension pour les fines particules de sol.

Dans un *transport par charriage*, l'effet des forces hydrodynamiques exercées par l'écoulement se traduit sur les particules sédimentaires par un mouvement de roulement, ou de glissement sur le fond du cours d'eau, ou encore de saltation, c'est-à-dire de succession de petits sauts au cours desquels les particules se séparent du lit durant de très courtes périodes. Dans un *transport par suspension*, les particules fines peuvent être maintenues dans le corps de l'écoulement sur de longues distances, sans reprendre contact avec le lit, notamment sous l'effet des fluctuations verticales de la vitesse. La séparation entre charriage et suspension dépend de la taille des particules, mais aussi de l'écoulement : une particule charriée dans un écoulement peut être en suspension dans un autre.



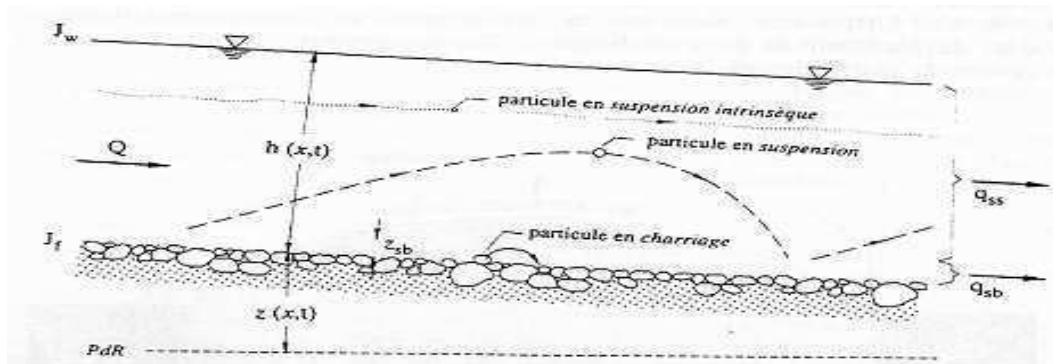


FIGURE 11 – Schéma des modes de transport, d’après Graf et Altinakar [IAC97].

- **Le dépôt des sédiments**

Le dépôt des sédiments consiste à la chute des sédiments qui ont été entraînés par l’écoulement et qui retombent pour faire à nouveau partie du sol. En réalité, il est plus difficile de prédire le dépôt des matériaux transportés par un cours d’eau que l’arrachement du lit. Néanmoins, le processus de dépôt a un impact tout aussi important sur la topographie du sol. En effet, le sol érodé, déposé au bas des pentes, peut empêcher ou retarder l’émergence de la semence, enterrer les jeunes pousses et nécessiter un deuxième semis dans les endroits affectés. Les sédiments peuvent se déposer sur les propriétés en aval et occasionner des dommages aux routes [AWM<sup>+</sup>89].

### 1.2.3 Facteurs de l’érosion

On indique ici plusieurs facteurs qui peuvent influencer l’érosion : la force tractrice, l’érosivité de l’eau, l’érodibilité du sol et la cohésivité des matériaux le composant.

La *force tractrice* est un paramètre de choix dans l’étude du transport du fond, elle s’exerce sur le fond parallèlement à la ligne de charge de la rivière du fait de la poussée hydrostatique. Elle représente la force émise par l’écoulement sur le fond. La force tractrice critique,  $\tau_C$ , est la force seuil de mise en mouvement des sédiments.

L’*érodibilité* traduit la capacité de la résistance d’un sol face à l’érosion. Elle dépend de la nature du sol, de la longueur de la pente et de la densité du couvert végétal. Effectivement, le risque d’érosion augmente lorsque le sol n’a qu’un faible couvert végétal ou de résidus. Les résidus et la végétation protègent le sol de l’impact des gouttes de pluie et de l’éclaboussement, ils tendent à ralentir la vitesse de l’eau de ruissellement et permettent une meilleure infiltration.

L’*érosivité* correspond à l’agressivité de l’eau sur la surface du sol. On parle d’érosivité essentiellement pour l’effet splash. L’agressivité des pluies dépend principalement de leurs énergies cinétiques, qui résultent elles-mêmes de la distribution du diamètre des gouttes et de leurs vitesses d’impacts. Ces grandeurs sont étroitement corrélées à l’intensité de la précipitation. L’influence du facteur climatique sur l’érosion hydrique ne se réduit cependant pas uniquement à l’énergie cinétique des précipitations, puisque leurs historiques conditionnent l’humidité du sol qui peut modifier considérablement les pertes en terres occasionnées par une averse [SMM07].

La *cohésivité* est la propriété que possède une matière à conserver sa stabilité par le jeu des forces intérieures. Ainsi, des matériaux *cohésifs* sont aptes à se lier entre eux et à rester stable comme c’est le cas pour les argiles.

### 1.2.4 Schéma récapitulatif du problème général

Le schéma récapitulatif de la figure 12 regroupe les interactions entre les différents processus intervenant dans l'érosion. Les flèches en pointillés correspondent aux phénomènes non pris en compte dans cette étude.

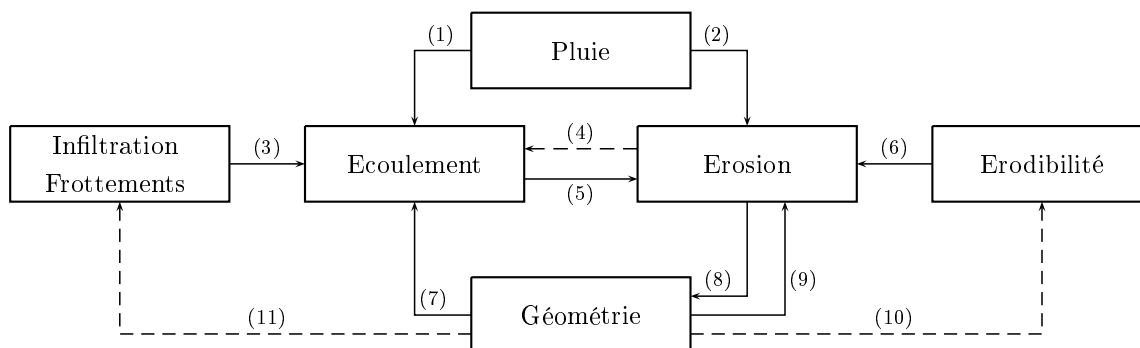


FIGURE 12 – Interactions des processus à l'origine de l'érosion.

La pluie agit sur l'écoulement (1) par un terme source dans Saint-Venant et sur l'érosion (2) *via* l'effet splash. Les paramètres de frottement et d'infiltration (3) influencent l'écoulement qui est plus ou moins influencé par la présence de la phase solide (4). Le (5) est l'action de l'écoulement sur la phase solide. Le (6) représente l'influence du paramètre d'érodibilité du matériau sur le transport solide, l'arrachement et le dépôt. L'érosion change la géométrie (8) ce qui entraîne une modification de l'écoulement (7) et une modification de la quantité de matériaux transportés (9). Parfois cette transformation dans la géométrie change le type de matériau érodé ce qui provoque une modification des paramètres de frottement et d'infiltration (10) ainsi que l'érodibilité du matériau (11). Ces processus dépendent de la nature des couches de sédiments qui constituent le fond de l'écoulement et de la durée du phénomène étudié.

### 1.3 Equations de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant, ou équations en eaux peu profondes (shallow water equations en anglais), publiées en 1871 sont d'une grande importance en hydraulique maritime et fluviale. Elles sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes que nous rappelons :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(u) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\sigma) + g + F, \end{cases}$$

où les inconnues sont la pression  $p$  et la vitesse  $u$ . Le passage du système de Navier-Stokes à celui de Saint-Venant nécessite des hypothèses, des approximations et des règles de calcul. Tout d'abord lorsque la pente du fond est faible (typiquement moins de 10%), il est pertinent de négliger la vitesse verticale devant les composantes horizontales. Ensuite les équations de Saint-Venant sont obtenues en supposant que la pression est hydrostatique et en effectuant une moyenne, en utilisant le théorème de Liebniz, suivant la verticale des deux composantes horizontales des équations de

Navier–Stokes. Ainsi, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(q) = P - I, \\ \partial_t q + \operatorname{div}\left(\frac{q^2}{h}\right) + gh\nabla h = -gh(\nabla z_f + S_f), \end{cases}$$

où les inconnues sont la hauteur d'eau  $h$  et le débit  $q$ . Les termes sources sont l'intensité de la pluie  $P$ , l'infiltration  $I$ , les frottements  $S_f$  et la topographie  $z_f$ .

Le passage aux équations de Saint–Venant suppose également l'imperméabilité du fond qui n'est pas respectée dans notre cas car on souhaite prendre en compte la pluie et l'infiltration, ce qui ajoute le terme  $-(P - I)\frac{q}{h^2}$  dans l'équation de conservation de la quantité de mouvements. Ce terme n'est quasiment jamais pris en compte, nous l'omettons donc également dans les modèles présentés.

## 1.4 Objectifs du stage

L'érosion est un processus complexe faisant intervenir de nombreux facteurs et mettant en jeu plusieurs paramètres. Avant de choisir un modèle une étude bibliographique sur les différentes façons de modéliser l'érosion s'avère nécessaire.

Le développement de méthodes numériques précises, stables et robustes est primordial pour disposer de logiciels capables de représenter correctement la physique. En effet, le système des équations de Saint–Venant est un problème hyperbolique approché par de nombreuses méthodes numériques comme les volumes finis, les schémas de relaxation et les méthodes de Galerkin Discontinus. Des travaux précédents au BRGM ont permis la constitution d'un code, implémenté par *Delestre* [DCJD08] [DJ09] nommé FULLSWOF, utilisant la méthode des volumes finis avec reconstruction hydrostatique proposée par *Audusse* [Aud04] et un flux numérique à l'ordre 2. Ce code prend en compte la pluie, l'infiltration et les frottements. Le second objectif de ce stage est de poursuivre le développement de ce code en intégrant les effets de l'érosion.

Ainsi, la section 2 présente les modèles que nous avons identifiés et des lois de fermetures nécessaires aux modèles. La partie suivante de ce rapport présente les différentes méthodes numériques utilisées pour résoudre le système de Saint–Venant, ainsi que celle pour l'équation liée à l'érosion et enfin le couplage qui les relie. Ce rapport se poursuit par la présentation de cas-test qui ont pour objectifs de valider et de tester l'implémentation.

## 2 Choix des modèles d'érosion

Cette deuxième partie synthétise les travaux bibliographiques effectués dans le cadre de ce stage. Nous présentons d'abord le modèle couplé que nous proposons de résoudre ainsi que ses variantes possibles qui peuvent prendre en compte la concentration des sédiments (en résolvant une équation supplémentaire), l'influence des sédiments sur les écoulements à forte concentration sédimentaire ainsi que les effets de la turbulence. Nous détaillons ensuite les lois de fermetures nécessaires à la résolution de l'équation d'Exner.

### 2.1 Modèles couplés Saint–Venant - Exner

La modélisation de l'érosion repose sur l'équation d'Exner qui traduit la conservation de la masse des sédiments :

$$(1 - \phi)\partial_t z_f + \operatorname{div}(q_e) = 0,$$

où  $z_f$  est la hauteur du fond,  $\phi$  représente la porosité du sol qui est la fraction de vide dans le sol et  $q_e$  désigne le débit sédimentaire. Cette équation modélise l'évolution du fond et peut être naturellement couplée aux équations de Saint–Venant. En effet, l'érosion influence l'écoulement superficiel par le terme source topographique  $\nabla z_f$  tandis que l'écoulement superficiel intervient dans l'érosion par la détermination du débit de sédiments qui dépend de la hauteur d'eau et/ou de la vitesse de l'écoulement. Le système couplé que nous étudions s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(q) = P - I & \text{sur } \Omega \times [0, T], \\ \partial_t q + \operatorname{div} \frac{q^2}{h} + gh\nabla h = -gh(\nabla z_f + S_f) & \text{sur } \Omega \times [0, T], \\ (1 - \phi)\partial_t z_f + \operatorname{div}(q_e(q, h)) = 0 & \text{sur } \Omega \times [0, T], \end{cases}$$

où  $\Omega$  représente la surface du fond. Ce système doit être complété par des conditions initiales et aux limites qui seront précisées pour chaque cas test. Une loi supplémentaire reliant le débit sédimentaire est nécessaire pour fermer le modèle. Ce type de loi est présenté dans le paragraphe 2.2. Il est possible de différencier le transport par charriage  $q_c$  du transport en suspension  $q_s$ . Cette modélisation bicouche nécessite la résolution d'une équation supplémentaire pour connaître la concentration des sédiments dans l'écoulement. Le système d'équations s'écrit alors

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(q) = P - I & \text{sur } \Omega \times [0, T], \\ \partial_t q + \operatorname{div} \frac{q^2}{h} + gh\nabla h = -gh(\nabla z_f + S_f) & \text{sur } \Omega \times [0, T], \\ (1 - \phi)\partial_t z_f + \operatorname{div}(q_c + q_s(c)) = 0 & \text{sur } \Omega \times [0, T], \\ \partial_t c + \operatorname{div}(Uc) = \frac{1}{h}(A - D) & \text{sur } \Omega \times [0, T]. \end{cases}$$

où  $c$  est la concentration sédimentaire moyenne du fluide,  $A$  et  $D$  représentent respectivement l'arrachement et le dépôt qui se manifestent entre la couche de sédiments et l'écoulement. Comme pour le débit total  $q_e$ , les débits  $q_c$  et  $q_s$  ainsi que les quantités  $A$  et  $D$  dépendent des caractéristiques physiques du sol (érodibilité et cohésion par exemple) et des variables hydrodynamiques (hauteur et vitesse). Quelques-unes de ces lois sont présentées dans la partie dédiée aux lois de fermetures.

Les figures 13 et 14 illustrent les deux modèles décrits précédemment. Le second modèle suppose que les échanges de sédiments ne s'effectuent pas directement entre le fond et l'écoulement ; la double flèche de la figure 14 représente ces échanges qu'il est possible d'envisager.

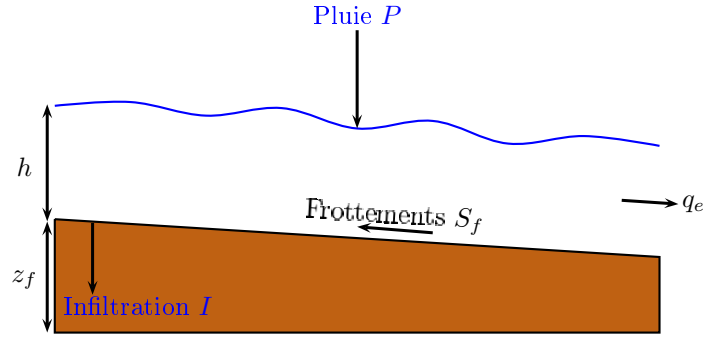


FIGURE 13 – Modèle Saint-Venant - Exner

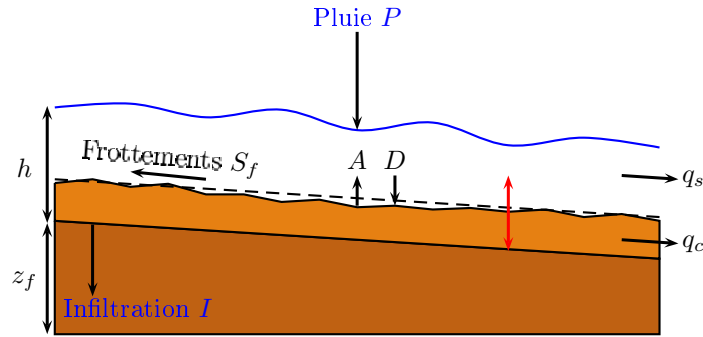


FIGURE 14 – Modèle Saint-Venant - Exner bicouche

Nous avons supposé que les sédiments n'influençaient pas directement l'écoulement, ce qui est valable si la concentration volumique des sédiments dans le fluide est inférieure à 10% (*Graf*[Gra99]). Cette hypothèse justifie l'absence de termes sources dans les équations de Saint-Venant comme ceux proposés par *Simpson et Castellort* [SC06] pour la conservation de la masse :

$$\frac{A - D}{1 - \phi},$$

et pour la conservation de la quantité de mouvements :

$$\epsilon \Delta(hU) - \frac{(\rho_s - \rho_e)}{2\rho} gh^2 \nabla c - \frac{(\rho_0 - \rho)(A - D)U}{\rho(1 - \phi)},$$

où  $\epsilon$  est le coefficient de viscosité turbulente,  $\rho_s$  et  $\rho_e$  sont respectivement la densité des sédiments et de l'eau,  $\rho$  est la densité du fluide composé des sédiments et de l'eau ( $\rho = \rho_e(1 - c)$ ,  $c$  est la concentration) et  $\rho_0$  est la densité du fond saturé en sédiments ( $\rho_0 = \rho_e\phi + \rho_s(1 - \phi)$ ). Cette hypothèse selon laquelle l'effet des sédiments est faible sur l'écoulement sous-entend aussi l'égalité entre la vitesse de l'écoulement et celle des sédiments dans l'équation de concentration. *Villaret et Hervouet* [VH06] utilisent un champ convecteur différent de la vitesse de l'écoulement :

$$U_{conv} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_{z_f}^{z_s} ucdz}{\int_{z_f}^{z_s} cdz}.$$

Ce champ convecteur est évalué en supposant un profil logarithmique sur les vitesses et un profil de Rouse sur les concentrations. Nous avons également omis les termes représentant les effets de la turbulence qui peuvent être pris en compte au niveau de l'écoulement par le terme  $div(\gamma_t \nabla u)$  dans l'équation de la conservation de la quantité de mouvements et au niveau du transport de sédiments par le terme  $div(\gamma_t \nabla c)$  dans l'équation de concentration. Il est clair que l'écoulement peut être représenté par un modèle différent. En effet, il est possible d'utiliser un modèle plus simple comme l'onde cinématique (*Lane et al* [LSS]) ou plus complet comme les équations de Navier–Stokes, ce qui fût fait par *Benès et al* [BTHB06]. Dans le modèle bicouche, on peut distinguer l'arrachement par le ruissellement de l'arrachement par l'effet splash comme le fait *Nord*[Nor06]. On peut noter également l'existence de modèles atypiques comme celui utilisé par *Abd-el-Malek et Helal* [eMH09] qui ajoute une équation de transport de la température (afin d'étudier le lac Mariut en Egypte).

Le tableau, non exhaustif, suivant récapitule le travail bibliographique effectué : pour chaque modèle sont indiqués le nom des auteurs, les termes sources éventuellement ajoutés et la référence de l'article.

| modèle                       | Auteurs                               | terme(s) source(s)<br>supplémentaires | REF                   |
|------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------|
| SV<br>+<br>Exner             | F. Benkhaldoun S. Sahmim M. Seaïd     | *                                     | [BSS]                 |
|                              | M.J. Castro diaz et al                |                                       | [CDFNF08]             |
|                              | B. Dewals et al                       |                                       | [DEA <sup>+</sup> 08] |
|                              | L. Schippa S. Pavan                   |                                       | [SP09]                |
|                              | P.K. Stansby et al                    | $div(\gamma_t \nabla u)$              | [SHA <sup>+</sup> 09] |
|                              | P. Roos S. Hulscher H. De Vriend      |                                       | [RHdV08]              |
|                              | X. Liu B. J. Landry M. H. Garcia      | *                                     | [LLG08]               |
|                              | D. M. Kelly N. Dodd                   | *                                     | [KD09]                |
|                              | O. Devauchelle et al                  |                                       | [DJLZ08]              |
| SV<br>+<br>Exner<br>bicouche | J. Bennett                            | $div(\gamma_t \nabla c)$              | [Ben74]               |
|                              | S. Fagherazzi T. Sun                  |                                       | [FS03]                |
|                              | D. Pritchard A.J. Hogg                |                                       | [PH03]                |
|                              | P. Gomi, P. Sergeant, B. Zhang        | $div(\gamma_t \nabla c)$              | [GPZ04]               |
|                              | G. Simpson S. Castelltort             | termes sources cités                  | [SC06]                |
|                              | C. Villaret J.-M. Hervouet            | $U_{conv}, div(\gamma_t \nabla c)$    | [VH06]                |
|                              | G. Nord                               | effet splash                          | [Nor06]               |
|                              | M. Gopal Naik, E.P. Rao et T.I. Eldho | effet splash                          | [NRE09]               |

\* on a oté des modèles l'infiltration, la pluie et les frottements.

## 2.2 Lois de fermetures

Pour résoudre les différents modèles présentés dans la section précédente, on a besoin de lois de fermetures. On expose tout d'abord les lois de transport sédimentaire c'est-à-dire les lois pour  $q_e$ ,  $q_c$  et  $q_s$ . Ensuite nous indiquons les lois d'arrachement et de dépôt. Ces lois étant bien souvent empiriques, on s'attache à donner les contextes physiques d'applications des lois exposées. Etant donné le nombre important de lois de fermetures qui existent, cette liste est non exhaustive.

### 2.2.1 Lois de transport

On peut d'ores et déjà indiquer que les lois ont bien souvent un seuil, à partir duquel les processus d'érosion et de transport débutent. Autrement dit, la mise en mouvement des sédiments ne se fait que sous certaines conditions liées à la vitesse du fluide ou à la contrainte du fond.

#### • Lois avec seuil

Cette première formule avec seuil pour le transport total des sédiments est assez générale. Elle nécessite la connaissance de la contrainte de cisaillement au fond  $\tau_b$  ainsi que de la contrainte critique  $\tau_c$  qui se calcule à partir de la contrainte de Shields  $\tau_c^*$

$$\tau_b \stackrel{\text{def}}{=} \rho u^2, \quad \tau_c = \rho_e (s - 1) g d^3 \tau_c^* \quad \text{et} \quad \tau_c^* \stackrel{\text{def}}{=} 0.05 (\rho_s - \rho_e) g d$$

où  $\rho_e$  et  $\rho_s$  sont les masses volumiques de l'eau et des sédiments,  $g$  est l'accélération de la gravité,  $d$  est le diamètre des sédiments et  $s$  est la pente. La contrainte adimensionnée de Shields  $\tau_c^*$  a été établie pour des pentes faibles (inférieures à 2%) dans des conditions particulières d'écoulement et de granulométrie (*Castro Diaz et al* [CDFNF08]).

$$q_e = \begin{cases} \lambda \left( \frac{\tau_b}{\tau_c} - 1 \right)^n & \text{si } \tau_b > \tau_c, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il existe de nombreuses lois pour choisir les paramètres  $\lambda$ ,  $n$  et  $\tau_c$  comme celle de *Du Boys* (1879), de *Meyer-Peter-Muller* (1948), de *Van Rijn* (1984), de *Luque et Van Beek* (1879) et de *Nielsen* (1992)

#### • Lois sans seuil

Les lois sans seuil supposent que l'érosion commence dès que le fluide se met en mouvement. On a tout d'abord une loi proposée par *Dewals et al* [DEA<sup>+</sup>08], qui dépend de la hauteur  $h$  du fluide, de sa vitesse  $U$ , et d'une constante  $\alpha$  qui est un coefficient de proportionnalité déterminé par les conditions limites ou conditions du fond

$$q_e = \alpha h U.$$

Cette loi est utilisée pour une application sur un aménagement hydroélectrique en Inde comprenant un barrage et sa retenue d'eau et un bassin versant à caractère montagneux. Il s'intéresse en particulier au désensableur prévu pour limiter l'abrasion de la turbine par les matériaux solides.

La loi de *Grass* dépend de la vitesse  $U$  d'un coefficient  $A_g$ , qui est un paramètre incluant la taille des grains et la viscosité cinématique, et d'un exposant  $m$  qui est compris entre 0 et 3

$$q_e = A_g |U|^m U.$$

Les coefficients  $A_g$  et  $m$  peuvent être choisis pour retrouver certaines des lois évoquées précédemment (*Meyer-Peter Muller*, *Nielsen*, *Van Rijn* et *Luque et Van Beek*) pour lesquelles on aura pris soin d'annuler le seuil. La loi proposée par *de Vriend et al* [RHdV08] pour des sédiments non cohésifs est

$$q_e = \beta |U|^3 \left( \frac{U}{|U|} + \lambda \nabla z_f \right).$$

En prenant  $\lambda = 0$  et en utilisant  $\beta = \frac{\alpha h}{|U|U}$  et  $\beta = A_g|U|^{m-2}$ , nous retrouvons les lois de *Dewals* et *Grass*.

La loi proposée par *Begin et al* [BMS81], reprise par *Schipa et Pavan*[SP09] trouve ses applications dans les ruisseaux et dans les variations rapides du flux. Elle s'exprime en fonction d'un paramètre expérimental  $k$  et du coefficient de frottement  $S_f$  (déterminé par exemple par la relation de *Chézy* ou *Manning-Strickler*)

$$q_e = kS_f.$$

### • Différence entre charriage et suspension

Certains comme *Van Rijn* [Rij84a] [Rij84b] ou *Einstein* [Ein50] choisissent de différencier le transport de sédiments par charriage  $q_c$  de celui par suspension  $q_s$ . Ce type de lois s'utilise donc pour le modèle bicouche.

*Van Rijn* [Rij84a] décrit une loi de charriage par deux paramètres adimensionnels : le diamètre adimensionnel  $d_*$  et un paramètre de transport  $T$  dépendant de la vitesse de cisaillement ( $u^*$ ) qui est la variation de la déformation au cours du temps et de la vitesse critique de cisaillement ( $u_c^*$ ). Il a établi cette formule en procédant à des expérimentations sur le terrain avec des particules de 0.2 et 2mm. La relation de *Van Rijn* s'écrit

$$q_c = 0.053 \frac{T^{2.1}}{d_*^{0.3}} \sqrt{(s-1)gd^3} \quad \text{avec} \quad T = \frac{(u^*)^2 - (u_c^*)^2}{(u_c^*)^2},$$

où  $s - 1$  est la densité relative des particules. Le débit des sédiments en suspension est

$$q_s = \int_{z_f}^{z_s} cudz.$$

Pour obtenir la concentration  $c$ , on résout une équation de transport ou on utilise le profil de Rouse. La vitesse horizontale  $u$  est donnée par un profil logarithmique.

### 2.2.2 Lois d'arrachement et de dépôt

Certains modèles requièrent des lois représentant les échanges entre le fond et l'eau pour l'arrachement A et d'autres pour le dépôt D.

#### • Lois d'arrachement

Les lois d'arrachement représentent le taux de sédiments qui se détachent du sol. Les lois d'arrachement proposées par *Simpson et Castelltort* [SC06] diffèrent suivant la nature des sédiments, pour les matériaux cohésifs

$$A = \begin{cases} \beta \left( \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{u_c} - 1 \right)^\gamma & \text{si } \sqrt{u^2 + v^2} \geq u_c, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $\beta$  est le coefficient d'entraînement,  $u_c$  la vitesse seuil d'entraînement et  $\gamma$  un exposant qui vaut approximativement 1 à 2 et pour les matériaux non cohésifs

$$A = \begin{cases} \frac{160(1-p)d(\theta - \theta_c)U_\infty}{R^{0.8}\theta^C h} & \text{si } \theta \geq \theta_c, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $\theta$  représente le paramètre de Shields,  $\theta^C$  la valeur critique d'entraînement et  $U_\infty$  la vitesse à la surface libre.



- **Lois de dépôt**

La loi utilisée par *Krone* s'écrit

$$D = \begin{cases} c\omega \left(1 - \frac{\tau_{max}}{\tau_c}\right) & \text{si } \tau_{max} \neq \tau_c, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $c$  est la concentration de matière en suspension,  $\tau_{max}$  la valeur de cisaillement maximale et la tension critique  $\tau_c$ . Cette loi ainsi que la suivante dépendent d'un paramètre  $\omega$  qui est la vitesse de chute d'une particule en eau calme.

La loi proposée par *Simpson et Castellort*[SC06] sert notamment à modéliser l'érosion engendrée par la rupture d'un barrage

$$D = \omega(1 - C_a)^m C_a,$$

où  $C_a$  est un paramètre qui représente la concentration volumétrique sédimentaire près du lit.

- **Lois pour le taux d'arrachement/dépôt en simultané**

Le second modèle peut aussi être fermé par les lois proposées par *Foster et al*[FFN+95]. Pour les taux d'arrachement/dépôt dus à l'écoulement les lois s'écrivent

$$AD_{f_e} = \begin{cases} \kappa_r(\tau - \tau_{sol}) \left(1 - \frac{q_s}{T_c}\right) (1 - \epsilon) & \text{si } q_s \leq T_c, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases},$$

$$AD_{c_e} = \begin{cases} \kappa_r(\tau - \tau_{sol}) \left(1 - \frac{q_s}{T_c}\right) \epsilon & \text{si } q_s \leq T_c, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases},$$

où  $AD_{f_e}$  est le taux d'arrachement/dépôt du fond et  $AD_{c_e}$  est le taux d'arrachement/dépôt de la couche non cohésive. Les paramètres de ces lois sont la capacité de transport sédimentaire de l'écoulement  $T_c$  et l'érodibilité du sol  $\kappa_r$ . Les variables  $\tau$  et  $\tau_{sol}$  représentent les contraintes de cisaillements et  $q_s$  est le débit solide unitaire qui correspond au produit du débit liquide unitaire dans la direction de l'écoulement par la concentration sédimentaire en suspension. Ces lois ainsi que les deux premières de la section suivante ont pour application une étude sur une parcelle.

- **Lois pour le taux d'arrachement dû à l'effet splash**

L'effet splash est dû à la chute de gouttes de pluie sur le sol qui éjectent les sédiments à l'endroit de l'impact. Cela explique que les lois proposées sont des lois d'arrachement par la pluie et non d'arrachement/dépôt. On expose ici les lois utilisées par *Li*(1979)[Li79] avec  $A_{f_p}$  le taux d'arrachement du fond et  $A_{c_p}$  le taux d'arrachement de la couche non cohésive

$$A_{f_p} = \alpha R^p \left(1 - \frac{h}{z_m}\right) (1 - \epsilon),$$

$$A_{c_p} = \alpha_d R^p \left(1 - \frac{h}{z_m}\right) \epsilon.$$

Les paramètres de ces lois sont le coefficient d'érodibilité de la matrice de sol dû au splash  $\alpha$ , le coefficient d'érodibilité de la couche non cohésive dû au splash  $\alpha_d$ , la profondeur maximale de pénétration de la pluie dans l'écoulement  $z_m$ , l'intensité de la pluie  $R$ , le pourcentage de la maille recouverte par la couche de sédiments non cohésifs  $\epsilon$  et un exposant  $p$ .

Pour l'impact de la pluie, une seconde loi, proposée par *Sharda et Singh(1994)* [SS94] reprise par *Wicks et Bathurst(1996)*[WB96] est :

$$A = \omega F_W C_F k_r I^2 (2.96 S_0^{0.79} + 0.56),$$

où  $\omega$  est un coefficient de calibration,  $F_W$  un facteur correctif de la hauteur de l'eau,  $C_F$  un facteur de gestion des ressources,  $k_r$  un facteur d'érodibilité du sol,  $I$  l'intensité de la pluie et  $S_0$  la pente du lit. Cette loi n'est pas pour un modèle bicouche donc il n'y a ici pas de modèle qui correspond, il faudrait pour cela définir un modèle 1bis qui tiendrait compte de l'effet splash. Cette loi a été reprise par *Naik et al*[NRE09] pour une étude sur un bassin versant de l'Inde.

### 3 Schémas numériques

Cette partie est consacrée à la présentation des schémas numériques utilisés. La première section rappelle les méthodes de résolution des équations de Saint–Venant. La deuxième section présente la discrétisation de l'équation d'Exner. Une méthode de splitting est choisie pour coupler ces équations. L'équation de Saint–Venant est d'abord résolue, la hauteur d'eau  $h$  et le débit  $q$  issus de ce calcul permettent de déterminer le débit sédimentaire nécessaire à la résolution de l'équation d'Exner.

#### 3.1 Discrétisation du système de Saint–Venant

Nous présentons ici brièvement la discrétisation du système de Saint–Venant implémentée dans le code de calcul utilisé pendant ce stage. Nous indiquons simplement les flux numériques et les schémas d'intégration en temps disponibles mais détaillons la reconstruction hydrostatique qui permet de garantir les états d'équilibres au repos définis par

$$h + z_f = C \quad \text{et} \quad q = 0.$$

Ce système est résolu avec des termes sources liés à la pluie  $P$ , à l'infiltration de l'eau  $I$  dans le sol et aux frottements  $S_f$  :

$$\partial_t W + \partial_x F(W) = T,$$

$$\text{où } W \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}, \quad F(W) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix} \text{ et } T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} P - I \\ -gh\nabla z_f - ghS_f \end{pmatrix}.$$

Les flux numériques d'ordre 1 disponibles sont le flux de Rusanov et le flux HLL qui sont utilisés avec le schéma d'Euler explicite. Les flux numériques d'ordre 2 sont les flux MUSCL, ENO et ENO modifié qui sont utilisés avec le schéma de Heun (schéma de Runge–Kutta d'ordre 2).

On pose  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$  qui représente la parcelle que l'on souhaite étudier et  $G_b$  une grille cartésienne de  $\Omega$ . On discrétise ce domaine  $\Omega$  en cellule  $\tau_{i,j}$  de taille  $dx \times dy$  en utilisant les notations suivantes :

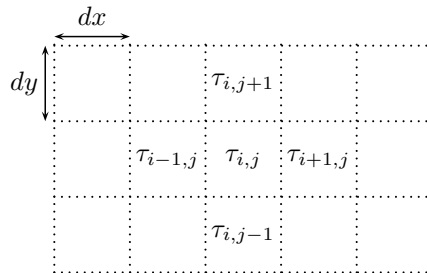


FIGURE 15 – Notations utilisées

Il est intéressant de préserver certains états stationnaires (comme les flaques d'eau) du système de Saint–Venant dans le cadre de nos applications. La *reconstruction hydrostatique* permet de préserver les états d'équilibres au repos définis au niveau discret par

$$h_{i,j}^{n+1} + z_{f,i,j} = C \quad \text{et} \quad q_{i,j}^n = 0.$$

Cette technique consiste à introduire une nouvelle hauteur d'eau qui est définie de la façon suivante entre les cellules  $\tau_{i,j}$  et  $\tau_{i+1,j}$  :

$$\tilde{h}_{i+\frac{1}{2},j} = h_{i,j} + z_{f,i,j} - \max(z_{f,i,j}, z_{f,i+1,j}).$$

Pour garantir la positivité de la hauteur d'eau, on prend la partie positive de cette variable

$$h_{i+\frac{1}{2},j}^* = \max(0, \tilde{h}_{i+\frac{1}{2},j}).$$

Le débit est également modifié de la façon suivante

$$q_{i+1,j}^* = q_{i+\frac{1}{2},j} \frac{h_{i+1,j}}{h_{i,j}}.$$

En utilisant ces nouvelles variables il est nécessaire d'introduire le terme source discret suivant pour obtenir un schéma équilibré

$$D = \left( \begin{array}{c} 0 \\ \frac{g}{2}(h_{i+\frac{1}{2},j}^{*2} - h_{i,j}^{*2})n_{i,j} \end{array} \right)$$

Le schéma discret avec reconstruction hydrostatique s'écrit finalement dans le cadre de l'ordre 1 :

$$W_{i,j}^{n+1} = W_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{|\tau_{i,j}|} (\mathcal{F}(W_{i,j}^n, W_{i+1,j}^n) - \mathcal{F}(W_{i-1,j}^n, W_{i,j}^n) - D)$$

où  $\mathcal{F}$  est le flux numérique. Les conditions limites sont imposées sur des cellules fictives si on est à la frontière du domaine d'étude comme le montre la figure 16

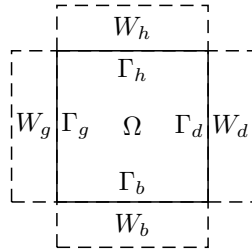


FIGURE 16 – Notations pour les conditions de bords.

Plusieurs conditions limites peuvent être imposées, par exemple sur le bord gauche

– une sortie libre est considérée en imposant

$$W_g = \begin{pmatrix} h_{1,j} \\ q_{1,j} \end{pmatrix},$$

– un mur ou flux nul est considéré en imposant

$$W_g = \begin{pmatrix} h_{1,j} \\ -q_{1,j} \end{pmatrix}.$$

### 3.2 Discrétisation de l'équation d'Exner

L'équation d'Exner avec un sol de porosité nulle s'écrit :

$$\partial_t z_f + \text{div}(q_e) = 0.$$

On intègre l'équation d'Exner sur chaque cellule  $\tau_{i,j}$  :

$$\forall \tau_{i,j} \in G_{\mathfrak{h}}, \quad \int_{\tau_{i,j}} \frac{\partial z_f}{\partial t} + \int_{\tau_{i,j}} \text{div}(q_e) = 0.$$

En supposant que la topographie  $z_f$  est suffisamment régulière et d'après le théorème de la divergence on obtient :

$$\forall \tau_{i,j} \in G_{\mathfrak{h}}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau_{i,j}} z_f + \int_{\partial\tau_{i,j}} q_e \cdot n_{i,j} = 0.$$

où  $n_{i,j}$  est la normale unitaire sortante à la cellule  $\tau_{i,j}$ . Il n'est pas possible de remplacer directement  $z_f$  par  $z_{f,h}$  dans cette équation car  $z_{f,h}$  n'est pas univaluée sur les interfaces. Nous introduisons dans l'intégrale de bord un flux numérique  $\hat{q}_e$  et écrivons au niveau discret :

$$\forall \tau_{i,j} \in G_{\mathfrak{h}}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau_{i,j}} z_{f,h} + \int_{\partial\tau_{i,j}} \hat{q}_e \cdot n_{i,j} = 0.$$

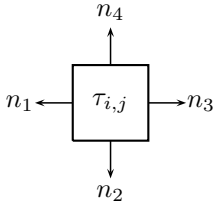
En utilisant un schéma d'Euler explicite et en décomposant l'intégrale de bord on obtient :

$$z_{f,h,i,j}^{n+1} = z_{f,h,i,j}^n - \frac{\Delta t}{|\tau_{i,j}|} \sum_{k=1}^4 l_k \hat{q}_{e_k} \cdot n_k,$$

où

$$z_{f,h,i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tau_{i,j}} z_{f,h}.$$

La  $k$ -ème arête avec  $1 \leq k \leq 4$  de la cellule  $\tau_{i,j}$  a pour normale extérieure unitaire  $n_k$  et longueur  $l_k$ . Pour la suite, on choisit les conventions suivantes :



$$n_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, n_2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, n_3 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, n_4 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$l_1 = l_3 = dy \text{ et } l_2 = l_4 = dx.$$

Pour le flux numérique de  $\hat{q}_e$  on a utilisé le flux upwind :

$$\hat{q}_{e_k} = \begin{cases} q_e^{(in)} \cdot n_k & \text{si } u \cdot n_k \geq 0, \\ q_e^{(ext)} \cdot n_k & \text{si } u \cdot n_k < 0. \end{cases}$$

### 3.3 Couplage

L'organisation générale du code est présentée dans l'algorithme ci-après. Les éléments ajoutés au programme initial lors de ce stage sont écrits en gras. On précise ici les choix disponibles pour ce programme. Pour les frottements on a le choix entre les lois de Manning et de Darcy–Weisbach, pour la loi d'érosion on peut choisir entre la loi à seuil, celle de Dawson, celle de Dewals et celle de Grass. Pour les flux numériques, on a le choix entre les flux de Rusanov et HLL pour les équations de Saint–Venant et les flux upwind et centré pour l'équation d'Exner. On précise que dans cet algorithme le pas de temps est recalculé à chaque itération pour respecter la condition de CFL de Saint–Venant.

---

**Algorithme 1** Résolution du système couplé Saint–Venant - Exner

---

*Entrées:*

CI :  $h^0, U^0$  et  $z_f^0$

CL :  $W_g, W_d, W_b$  et  $W_h$

Loi de frottements

**Loi d'érosion**

Flux numérique  $\mathcal{F}$  pour équations Saint–Venant

**Flux numérique  $\hat{q}_e$  pour équation d'Exner**

*Tant que*  $tps \leq T = tps_{total}$  *Faire*

  Calcul de  $dt$

  Résolution du système de Saint–Venant

**Résolution de l'équation d'Exner**

**Visualisation des résultats**

$tps \leftarrow tps + dt$

*Fin tant que*

*Sorties:*  $h^T, U^T$  et  $z_f^T$

---

On s'est ici basé sur l'algorithme existant qu'on a complété. On utilise ici les mêmes pas de temps et d'espace pour Saint–Venant et pour Exner, mais on pourrait choisir des pas de temps différents sans difficulté supplémentaire. Il est important de noter que ce choix de prendre les mêmes pas de temps et d'espace nous assure généralement de vérifier la CFL pour l'équation d'Exner. En effet, cette condition dépend du choix de la loi de débit solide  $q_e$  et en particulier souvent du paramètre d'érodibilité. Par exemple, pour  $q_e = k_r U$  la condition de CFL pour l'équation d'Exner est respectée pour :

$$k_r \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

On rappelle que la condition de CFL pour le système de Saint–Venant est :

$$\sup(|u - \sqrt{gh}|, |u + \sqrt{gh}|) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2}.$$

Or, on choisit généralement :  $k_r \ll 2 \sup(|u - \sqrt{gh}|, |u + \sqrt{gh}|)$ .

## 4 Cas-test

On présente dans cette partie les différentes simulations réalisées. Pour commencer, un cas test analytique nous a permis de valider l'implémentation de l'équation d'Exner et de comparer le schéma de splitting présenté à la section précédente avec un schéma de relaxation détaillé dans l'annexe A. Le cas test suivant concerne l'arasement d'une dune dans le cas d'un écoulement unidirectionnel. Le troisième cas simule la création d'une ravine pour un écoulement bidimensionnel.

### 4.1 Validation avec solution analytique

Ce premier cas test proposé par *Kubatko et al* [KWD06] possède une solution analytique et permet de vérifier l'implémentation de l'équation d'Exner indépendamment de la résolution des équations de Saint-Venant. Il s'agit de l'évolution d'une dune initialement symétrique, submergée par l'eau, subissant un écoulement permanent unidirectionnel. Le domaine d'étude  $\Omega$  et la durée finale de simulation sont

$$\Omega = [-10, 10] \quad \text{et} \quad T = 5s.$$

La topographie initiale est donnée par la fonction

$$\forall x \in \Omega, \quad z_f(x, t = 0) = 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right).$$

La solution analytique obtenue par la méthode des caractéristiques est

$$z_f(x, t) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{10} \left(x - \frac{t}{(3 - z_f)^2}\right)\right),$$

ce qui permet d'obtenir une expression analytique du débit sédimentaire

$$q_e = \frac{1}{3 - z_f}.$$

La surface libre est supposée constante

$$h + z_f = 3.$$

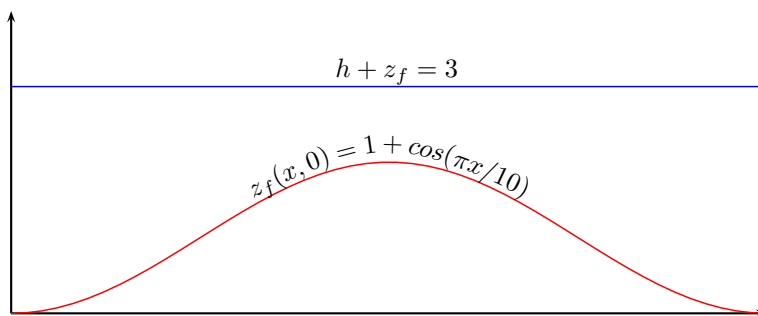


FIGURE 17 – schéma de la situation initiale

La solution analytique étant définie implicitement, nous avons utilisé la méthode du point fixe pour la déterminer (la méthode de Newton Raphson est inutilisable car la dérivée s'annule). Les graphiques de la figure 18 montrent la topographie initiale et la topographie aux temps  $t = 2, 5s$  et  $t = 4, 5s$ . L'écart entre la solution analytique et la solution numérique augmente au cours du temps.

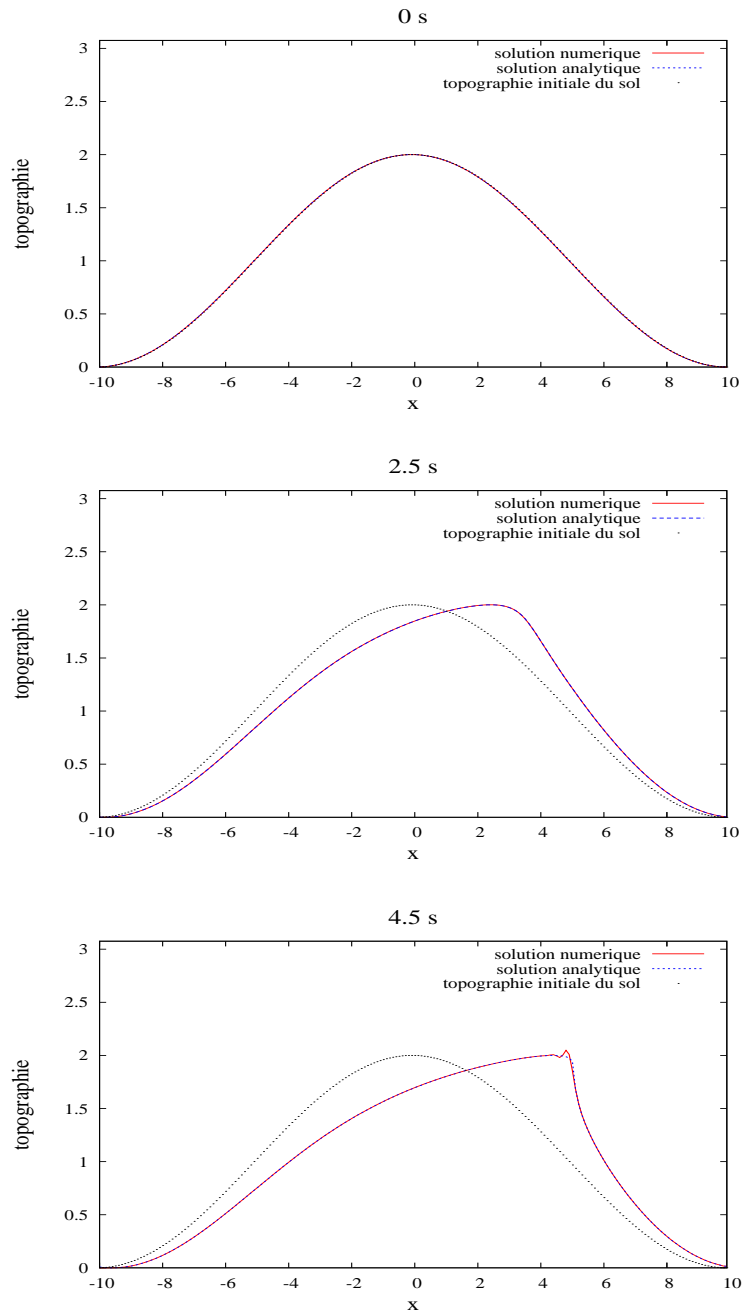


FIGURE 18 – Cas test analytique à 0s, 2.5s et 4.5s.

L'ordre de convergence du schéma a été vérifié en traçant l'erreur  $L^2(\Omega)$  entre la solution analytique et la solution approchée au temps final en fonction du pas d'espace  $dh$  (avec  $dh = dx = dy$ ) :

$$e_{L^2(\Omega)} = \|z_f(\cdot, T) - z_{f,h}(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Le graphique de la figure 19 représente le logarithme de l'erreur en fonction du logarithme du pas d'espace  $dh$  en rouge, et la droite de pente  $-1$  en vert. La courbe d'erreur obtenue confirme que le schéma utilisé est bien d'ordre 1.



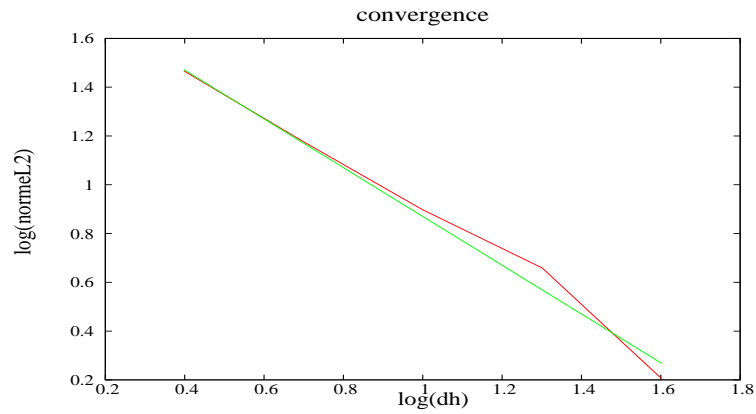


FIGURE 19 – Erreur obtenue par rapport à la solution analytique

Pour ce cas test, nous avons également comparé la méthode de splitting au schéma de relaxation présenté en annexe dont les paramètres sont  $a$ ,  $b$  et le pas de temps  $dt$  :

$$a = 0.25, \quad b = 1 \quad \text{et} \quad dt = 0.01s.$$

Le choix du paramètre  $a$  n'a pas d'importance car il n'intervient que dans la résolution des équations de Saint-Venant qui ne sont pas résolues ici. Le graphique de la figure 20 montre le déplacement de la dune obtenue avec le schéma de relaxation à  $t = 4,5s$ . La solution obtenue numériquement est proche de la solution analytique.

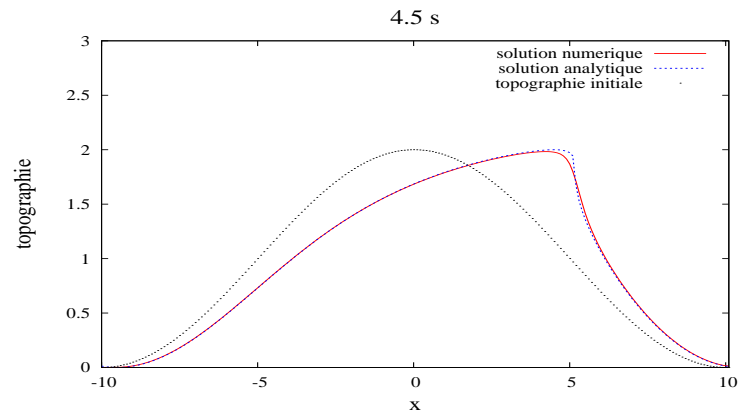


FIGURE 20 – Cas test analytique au bout de 4.5s

Le graphe de la figure 21 montre les courbes d'erreurs en fonction de  $b$  aux temps  $t = 4.5s$ . Pour la courbe d'erreur on a pris la valeur absolue de la solution analytique moins la solution trouvée numériquement.

$$e = |z_f - z_{f,h}|$$

On visualise clairement sur ce graphique que plus  $b$  est petit, plus la solution donnée par le schéma de relaxation est bonne. On rappelle que dans les hypothèses de la méthode de relaxation on a supposé que  $b$  est bien plus grand que 1 pour forcer l'ordre des valeurs propres, ce qui a pour objectif de préserver la condition CFL. On peut également observer sur ce graphique que la méthode de splitting donne des résultats comparables.

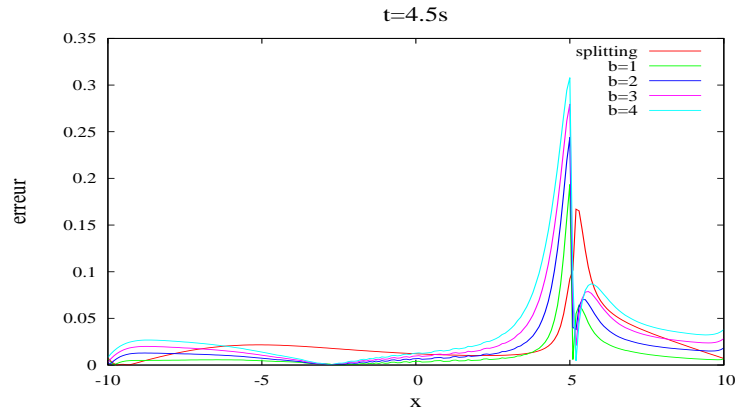


FIGURE 21 – Comparaison des méthodes de résolution à 4.5s

Compte tenu des résultats il serait intéressant, lorsque la méthode de relaxation prendra en compte les termes sources, de comparer ces deux méthodes sur d'autres cas test. On se limitera donc pour le moment à utiliser la méthode de splitting.

## 4.2 Dune arasée

Ce deuxième cas test consiste à observer l'évolution d'une dune positionnée sur un plan incliné. L'objectif est de tester le schéma de couplage dans une configuration simple. Bien qu'il présente un caractère monodimensionnel nous avons réalisé ce cas test en considérant une topographie bidimensionnelle. Le domaine d'étude  $\Omega$  et la durée finale de simulation sont

$$\Omega = [-10, 10] \times [-1.5, 1.5] \quad \text{et} \quad T = 3000s.$$

La dune est représentée par la fonction suivante

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = 0.85 + \frac{1}{6} \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right),$$

qui subit une rotation produisant une pente d'environ 2% :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad z_f(x, y, t = 0) = x \sin\left(\frac{-\pi}{150}\right) + f(x, y) \cos\left(\frac{-\pi}{150}\right).$$

Cette topographie initiale est représentée sur les figures 22 et 23.

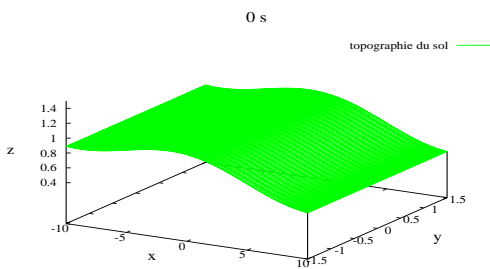


FIGURE 22 – Topographie initiale.

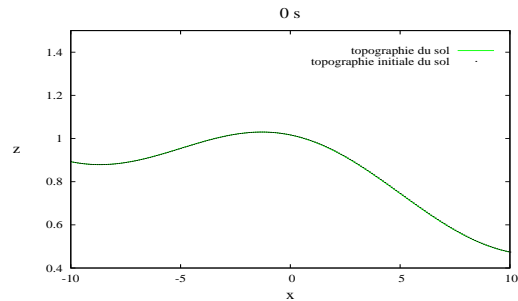


FIGURE 23 – Coupe longitudinale.

La hauteur d'eau, la vitesse hydraulique et le débit sédimentaire sont initialement nulle,

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad h(x, y, 0) = 0, \quad U(x, y, 0) = 0, \quad \text{et} \quad q_e(x, y, 0) = 0.$$

Une hauteur d'eau  $h_g$  est imposée progressivement sur le bord gauche du domaine  $\Omega$  :

$$\forall (x, y) \in \Gamma_g, \quad h_g(x, y, t) = \begin{cases} (1.3 - z_f(x, y, t)) \frac{t}{20}, & \text{si } t < 20, \\ 1.3 - z_f(x, y, t) & \text{si } t \geq 20. \end{cases}$$

Sur ce bord la vitesse dans la direction de l'écoulement vérifie la conservation de l'invariant de Riemann  $u - 2\sqrt{gh}$  et la vitesse transversale est nulle :

$$\forall (x, y) \in \Gamma_g, \quad u_g(x, y, t) - 2\sqrt{gh_g(x, y, t)} = u(x, y, t) - 2\sqrt{gh(x, y, t)} \quad \text{et} \quad v_g(x, y, t) = 0.$$

Des conditions d'imperméabilités sont imposées sur les bords haut et bas du domaine et une sortie libre est imposée sur le bord droit du domaine. Le débit sédimentaire vérifie une loi linéaire en la vitesse lorsque le seuil  $u_c$  est dépassé :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad q_e(u) = k_r(|u| - u_c)^+.$$

où  $k_r = 1 \text{ cm}$  est le coefficient d'érodibilité et  $u_c = 0.6 \text{ m.s}^{-1}$  est la vitesse seuil.

La figure 24 montre que l'érosion se produit dans le même sens que celui de l'écoulement. En effet, les quarts de plan  $\mathcal{P}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y), q_e \cdot n > 0 \text{ et } u < 0\}$  et  $\mathcal{P}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y), q_e \cdot n < 0 \text{ et } u > 0\}$  ne font pas partie de l'ensemble admissible de la loi choisie.

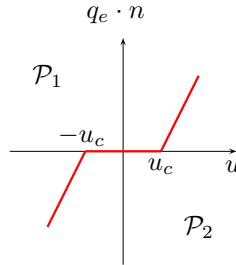


FIGURE 24 – Lois d'érosion avec seuil

Comme cette loi d'érosion dépend exclusivement de la vitesse, les conditions aux limites concernant l'équation d'Exner proviennent de celles imposées dans le système de Saint-Venant. Nous précisons qu'il n'y a ni pluie ni infiltration et les frottements sont modélisés par la loi de Darcy-Weisbach avec un coefficient unitaire. Le pas d'espace est similaire dans les deux directions et vaut  $10 \text{ cm}$ . Pour la résolution des écoulements superficiels, la méthode d'ordre 1 avec le flux de Rusanov est choisie.

#### • Résultats avec les paramètres initiaux

La figure 25 représente la topographie à deux instants de la simulation. A  $t = 160 \text{ s}$ , nous observons clairement du détachement sur l'intervalle  $[-5, 5]$  et du dépôt sur l'intervalle  $[5, 10]$ . A  $t = 2000 \text{ s}$ , l'état stationnaire est atteint puisque la topographie est devenue un plan incliné.

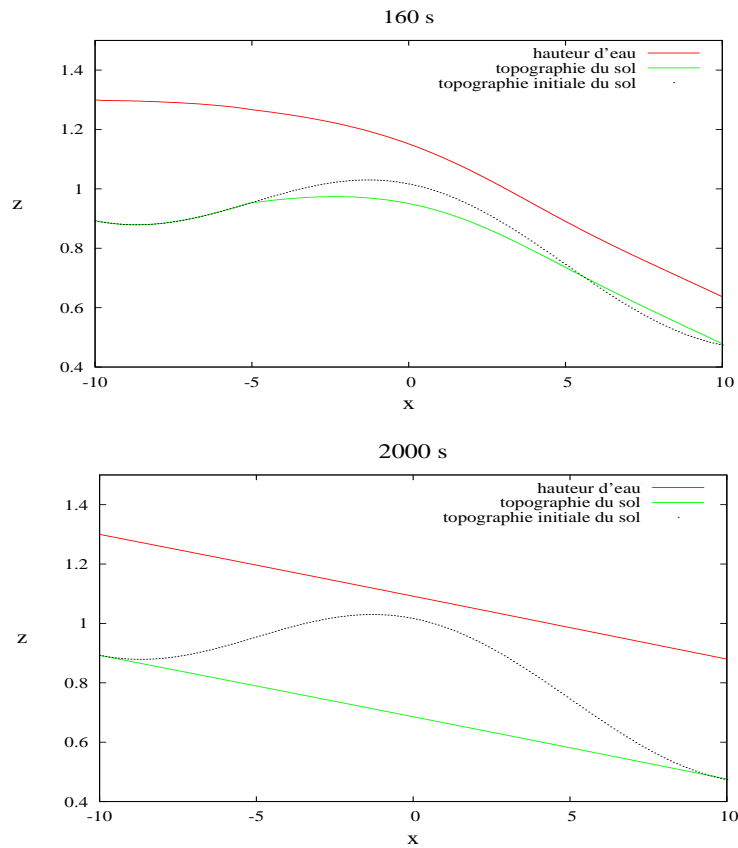


FIGURE 25 – Etat de la dune à  $t = 160s$  et  $t = 2000s$ .

On observe sur le graphique 26 une augmentation progressive du débit hydraulique lors du passage de la dune et ensuite on peut visualiser le débit uniforme après l'arasement totale de la dune. L'augmentation de ce débit s'explique par une augmentation de la hauteur (cf figure 25) et une augmentation de la vitesse. A partir de 2000s le débit est constant puisque l'état stationnaire est atteint.

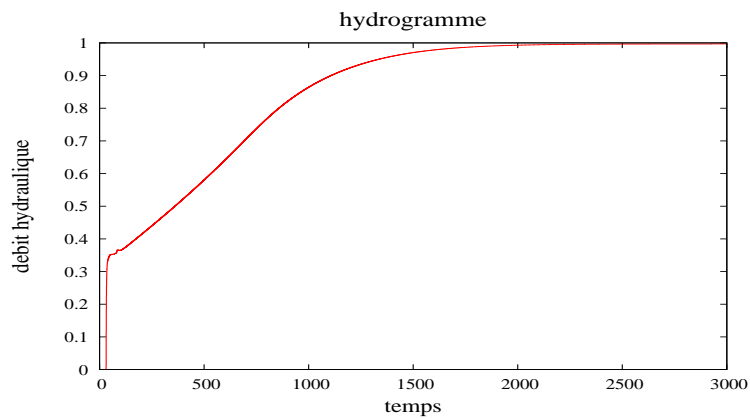


FIGURE 26 – Hydrogramme

On voit clairement sur le graphique de la figure 27 que le sol continue de s'éroder de façon uniforme même lorsque la dune a complètement disparu. Sur ce sédimentogramme on voit que le débit de sédiments à l'exutoire augmente de manière assez régulière jusqu'à environ 800s puis diminue et se stabilise à un débit constant à partir de 2000s. L'allure de la courbe est due au choix des paramètres, on a donc dans la suite de ce rapport fait varier ces paramètres afin d'observer leurs influences sur le débit de sédiments à l'exutoire. Lorsque le régime stationnaire est atteint, la

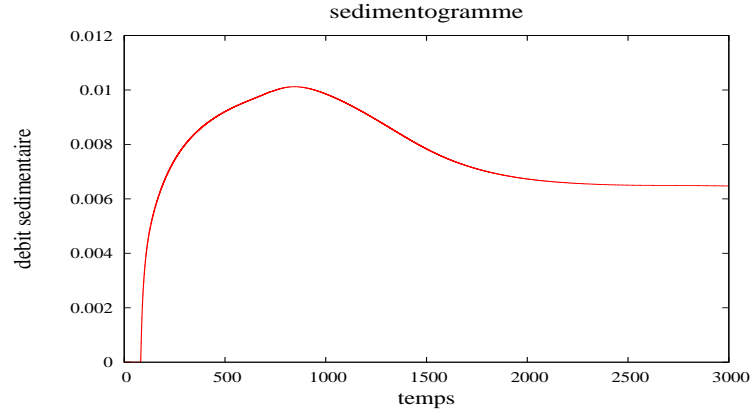


FIGURE 27 – Sédimentogramme

hauteur et la vitesse sont constantes de sorte que le débit hydraulique et le débit sédimentaire soient uniformes suivant la direction de l'écoulement comme le montrent l'hydrogramme de la figure 26 et le sédimentogramme de la figure 27. La concentration de sédiments est définie comme le rapport entre ces débits

$$c = \frac{q_e}{q}$$

Le graphique de la figure 28 permet de visualiser cette concentration au cours du temps et permet de vérifier que le seuil de 10% n'est jamais dépassé à l'exutoire. Comme on l'a précisé dans la première partie le dépassement de ce seuil imposerait d'ajouter un terme source pour la masse sédimentaire dans l'équation de conservation de la masse du système de Saint-Venant. Nous observons clairement sur ce graphique, par une croissance suivie d'une décroissance de la courbe, le passage de la dune à l'exutoire. Nous pouvons également observer que la concentration atteint une valeur maximale de 1.8% qui est largement inférieure au seuil de 10%.

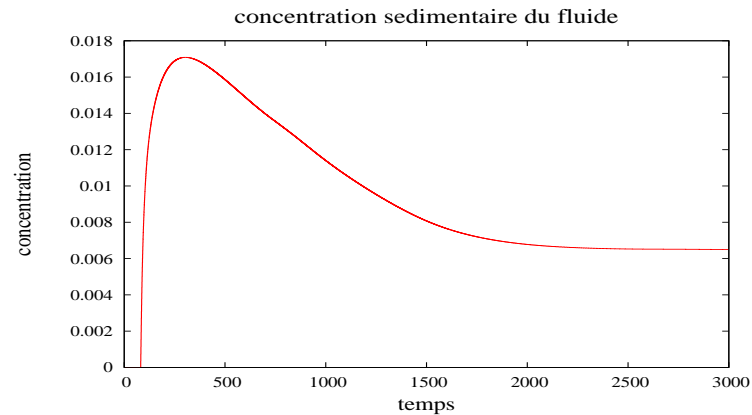


FIGURE 28 – Concentration sédimentaire à l'exutoire

- **Influence des paramètres  $k_r$  et  $u_c$**

Nous nous intéressons à présent à la sensibilité des paramètres  $k_r$  et  $u_c$  de la loi d'érosion sur le sédimentogramme. Le graphique de la figure 29 permet de visualiser le sédimentogramme avec différents  $k_r$ . Ainsi, pour  $k_r = 5cm$  nous pouvons voir clairement le passage de la dune pour. De plus pour ce  $k_r$  l'établissement du régime stationnaire se fait beaucoup plus rapidement, ce qui revient à dire que plus  $k_r$  est grand plus la dune s'érodera rapidement et plus vite on atteindra le régime stationnaire. En d'autres termes, plus la résistance du sol sera faible c'est-à-dire plus l'érodibilité de ce sol sera forte plus il y aura d'érosion.

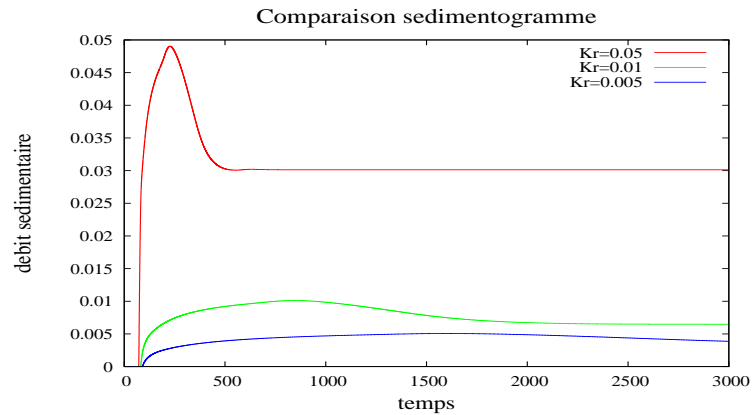


FIGURE 29 – Influence de  $k_r$  sur le sédimentogramme

De même on fait varier le paramètre de la valeur seuil  $u_c$  afin d'observer l'effet produit. Pour cela on a fixé  $k_r$  à  $1cm$ . Pour la valeur seuil d'érosion, inversement à  $k_r$ , plus cette valeur est petite plus il y aura d'érosion. Tout en sachant que si cette valeur seuil est plus grande que la vitesse à chaque instant en chaque endroit, alors il n'y aura pas d'érosion. Par exemple ici si on prend  $u_c = 0.8m.s^{-1}$  alors il n'y aura aucune érosion. Il faut remarquer qu'une érosion trop forte trop rapidement produira une concentration sédimentaire supérieure au seuil de 10%. En d'autres termes, si on choisit  $k_r = 5cm$  et  $u_c = 0.4m.s^{-1}$  alors on dépasse cette valeur ce qui impose de changer de modèle.

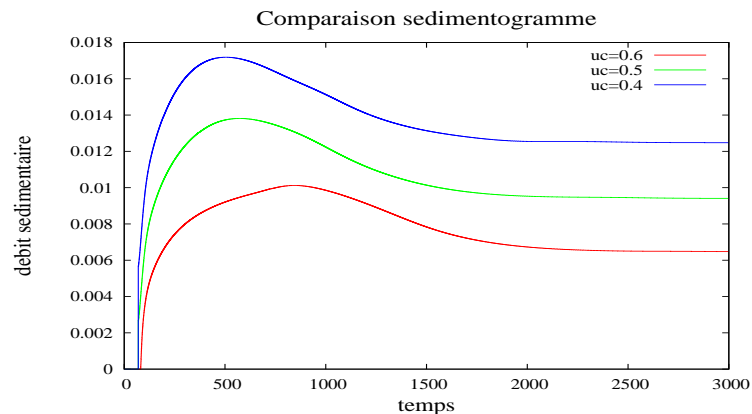


FIGURE 30 – Influence de  $u_c$  sur le sédimentogramme

- **Validation du code**

Ensuite nous avons refait ce cas test dans les trois autres directions, c'est-à-dire que la pente et l'écoulement iront du bord droit au bord gauche puis du bord bas au bord haut et enfin du bord haut au bord bas. On prendra les mêmes paramètres pour l'érosion et l'écoulement et on mettra les conditions adéquates pour la parcelle. Les graphiques d'évolution de la dune sont visuellement similaires à une rotation près donc pour vérifier que les résultats sont bien identiques on compare les sédimentogrammes.

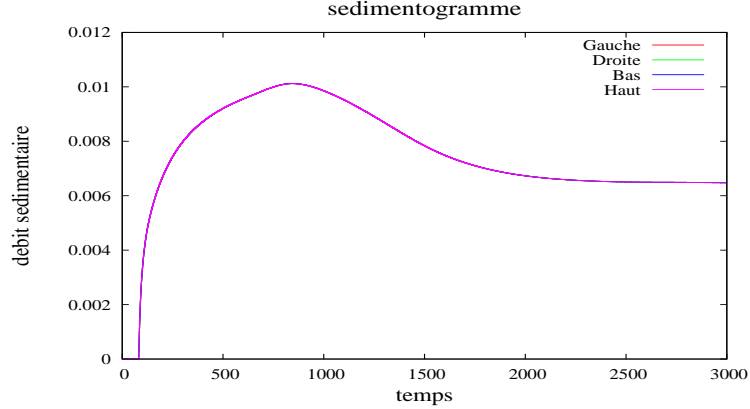


FIGURE 31 – Comparaison des sédimentogrammes

Les quatre courbes sont parfaitement superposées ce qui confirme que pour un même cas test quelque soit sa direction l'érosion sera bien identique. Après cette visualisation on peut conclure que l'implémentation donnant les mêmes résultats suivant que l'érosion se fasse dans le sens de  $x$  ou dans celui de  $y$ , alors le code peut gérer une topographie de dimension deux. Le cas-test suivant aura pour objectifs l'observation de l'érosion avec une topographie qui subira de l'érosion à la fois dans le sens de  $x$  et à la fois dans le sens de  $y$ .

### 4.3 Formation d'une ravine

Ce cas-test bidimensionnel a pour objectif de simuler la formation d'une ravine. On s'est donc attaché à trouver une topographie permettant d'obtenir des vitesses significatives suivant les directions  $x$  et  $y$ . Le domaine d'étude  $\Omega$  et la durée de simulation sont

$$\Omega = [-2.5, 2.5] \times [-2.5, 2.5] \quad \text{et} \quad T = 1000s.$$

On reprend les mêmes notations pour le domaine que précédemment. La topographie est obtenue avec la fonction suivante

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = 1 + \left( -\frac{(y-10)^4(y+10)^4}{10^8} + 2 \right) \left( \frac{\text{atan}(-x) + \text{atan}(10)}{15} \right),$$

qui subit une rotation produisant une pente d'environ 1% :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad z_f(x, y) = x \sin\left(\frac{-\pi}{300}\right) + f(x, y) \cos\left(\frac{-\pi}{300}\right).$$

La figure 32 montre la topographie initiale de ce cas test.

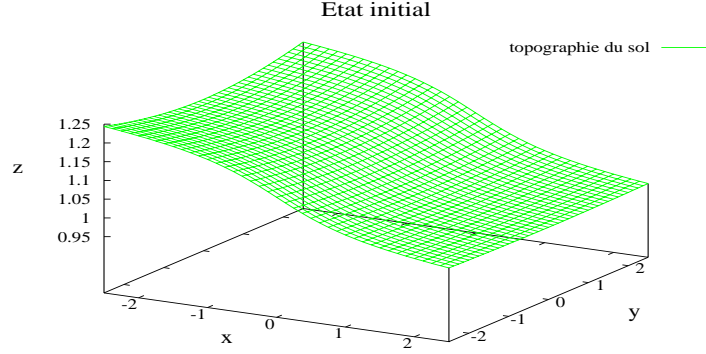


FIGURE 32 – Topographie initiale

La hauteur d'eau, la vitesse hydraulique et le débit sédimentaire sont initialement nulle,

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad h(x, y, 0) = 0, \quad U(x, y, 0) = 0, \quad \text{et} \quad q_e(x, y, 0) = 0.$$

Une hauteur d'eau  $h_g$  est imposée progressivement sur le bord gauche du domaine  $\Omega$ ,

$$\forall (x, y) \in \Gamma_g, \quad h_g(x, y, t) = \begin{cases} (1.28 - z_f(x, y, t)) \frac{t}{20} & \text{si } t < 20, \\ 1.28 - z_f(x, y, t) & \text{si } t \geq 20. \end{cases}$$

Sur ce bord la vitesse dans la direction de l'écoulement vérifie la conservation de l'invariant de Riemann  $u - 2\sqrt{gh}$  et la vitesse transversale est nulle,

$$\forall (x, y) \in \Gamma_g, \quad u_g(x, y, t) - 2\sqrt{gh_g(x, y, t)} = u(x, y, t) - 2\sqrt{gh(x, y, t)} \quad \text{et} \quad v_g(x, y, t) = 0.$$

Des conditions d'imperméabilités sont imposées sur les bords haut et bas du domaine et une sortie libre est imposée sur le bord droit du domaine. De même que sur le cas test précédent, le débit sédimentaire vérifie une loi linéaire en la vitesse lorsque le seuil  $u_c$  est dépassé :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad q_e(U) = \begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 \end{pmatrix} \frac{k_r}{\|U\|_2^2} (\|U\|_2 - u_c)^+,$$

où  $k_r = 1mm$  est le coefficient d'érodibilité et  $u_c = 0.48m.s^{-1}$  est la vitesse seuil. Lorsqu'une des deux composantes du vecteur vitesse s'annule nous retrouvons la loi choisie dans le cas test précédent. Les choix pour la résolution du système de Saint-Venant sont les mêmes que pour le cas test précédent, le pas d'espace est similaire dans les deux directions et vaut  $2.5cm$ .

On observe clairement sur les graphiques de la figure 33 que l'érosion s'effectue dans les deux sens c'est-à-dire que les vitesses suivant  $x$  et suivant  $y$  sont significatives. On peut également remarquer sur ces graphiques la zone de détachement dans le demi-plan  $[-2.5, 0] \times [-2.5, 2.5]$  et la zone de dépôt dans le demi-plan  $[0, 2.5] \times [-2.5, 2.5]$ . En effet, la coulée de sédiments représente le dépôt et la transformation de la rigole en ravine représente le détachement.



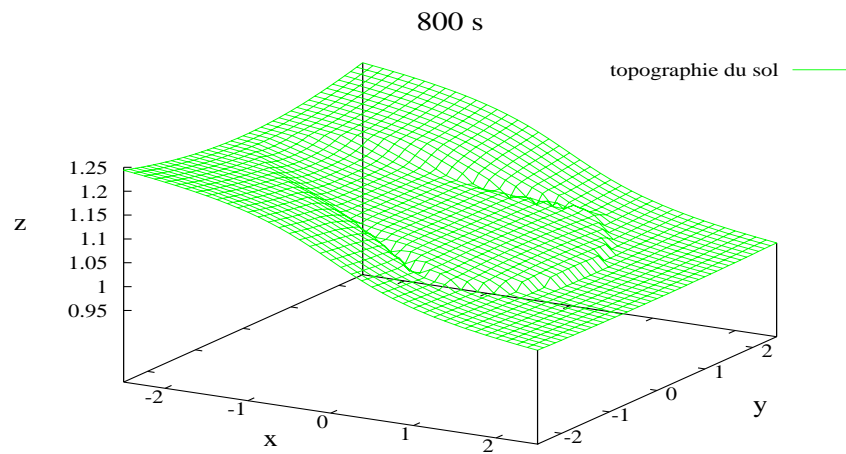
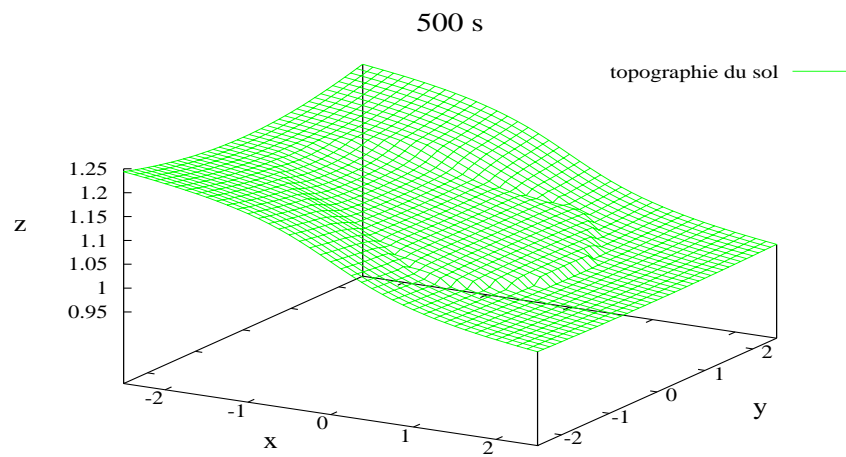
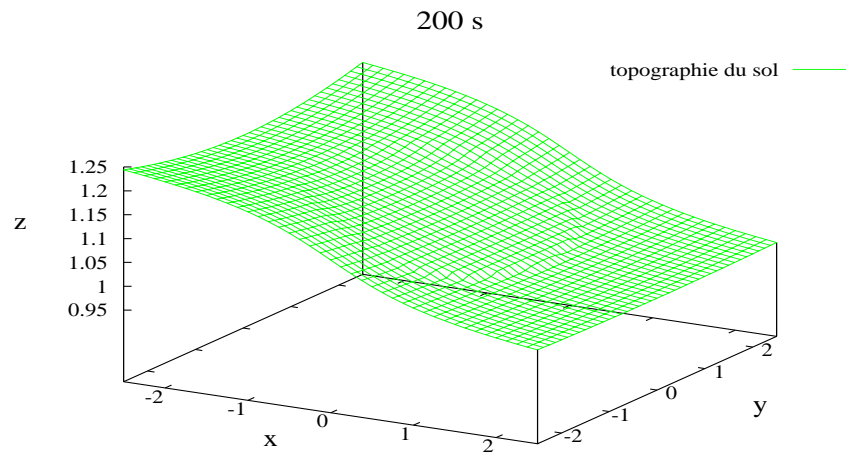


FIGURE 33 – Etat de la dune à  $t = 200s$ ,  $t = 500s$  et  $t = 800s$

## 5 Conclusion

La partie bibliographique de ce stage a permis de se familiariser avec les processus et les paramètres de l'érosion en étudiant les lois de débits solides existantes. Il reste cependant un travail important pour comprendre les différences entre ces lois et la sensibilité des dits paramètres sur l'érosion.

La partie numérique a plusieurs améliorations envisageables. On peut penser tout d'abord à un schéma d'ordre 2 pour résoudre l'équation d'Exner puisqu'un tel schéma est déjà implémenté pour les équations de Saint-Venant. Ensuite, une amélioration que l'on a déjà évoquée lors du couplage serait de prendre un pas de temps plus grand pour la résolution de l'équation d'Exner par rapport à celui pris pour la résolution des équations de Saint-Venant. La résolution de l'équation d'Exner dans le dernier cas test entraîne une augmentation d'environ 50% du temps CPU.

Une autre voie d'amélioration éventuelle serait sur la gestion de topographies irrégulières. Nous avons remarqué que lorsque la topographie devient moins régulière la simulation devient instable numériquement ce qui pose problème pour la modélisation de ravine avec bords abrupts par exemple. Le dernier point porte sur le schéma de relaxation qui donne des résultats prometteurs sur le premier cas-test. Il serait intéressant de comparer les résultats obtenus pour les deux autres cas-test avec la méthode de splitting à ceux obtenus avec un tel schéma qui doit être complété pour prendre en compte les termes sources.

## A Schéma de relaxation

Nous avons ici développé la méthode de résolution du schéma de relaxation. On rappelle le système que l'on cherche à résoudre qui est composé des équations de Saint-Venant et de l'équation d'Exner.

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu = 0, \\ \partial_t hu + \partial_x (hu^2 + p(h)) = -gh (\partial_x z), \\ (1 - \phi) \partial_t z + \partial_x (q_e) = 0. \end{cases}$$

On a pris ici  $\phi = 0$ ,  $q_e$  le débit de sédiments et  $p(h) = g \frac{h^2}{2}$ .

On souhaite maintenant passer au modèle de relaxation pour cela on introduit  $\pi$  et  $Q$  des variables de relaxation de telle sorte que :

$$\pi^{eq} = p(h) \quad \text{et} \quad Q^{eq} = q_e.$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu = 0, \\ \partial_t hu + \partial_x (hu^2 + \pi) + gh (\partial_x z) = 0, \\ \partial_t \pi + u \partial_x \pi + \frac{a^2}{h} \partial_x u = 0, \\ \partial_t z + \partial_x Q = 0, \\ \partial_t Q + \left( \frac{b^2}{h^2} - u^2 \right) \partial_x z + 2u \partial_x Q = 0. \end{cases}$$

Un des intérêts de relaxer  $q_e$  est que le schéma résultant sera totalement indépendant du choix du flux  $q_e$ .

### Algèbre du modèle de relaxation

On se place en variables primitives :

$$w^T = \left( h \quad u \quad \pi \quad z \quad Q \right) \quad \partial_t w + A(w) \partial_x w = 0$$

avec

$$A(w) = \begin{pmatrix} u & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{h} & g & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{h} & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b^2}{h^2} - u^2 & 2u \end{pmatrix}$$

Pour résoudre ce système on s'intéresse aux valeurs propres, vecteurs propres et invariants de Riemann de cette matrice. Les valeurs propres de cette matrice sont :  $u$ ,  $u \pm \frac{a}{h}$  et  $u \pm \frac{b}{h}$ . On rappelle que si  $r$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$  alors les invariants de Riemann  $\phi$  sont définis tels que :  $\nabla \phi \cdot r = 0$ .

– Pour la valeur propre  $\lambda = u$  on associe le vecteur propre

$$r^T = \left( 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)$$

les invariants de Riemann sont donc  $u$ ,  $\pi$ ,  $z$ ,  $Q$ .

– Pour  $\lambda = u + \delta \frac{a}{h}$  avec  $\delta = \pm 1$  on a

$$r^T = \begin{pmatrix} 1 & \delta \frac{a}{h^2} & \frac{a^2}{h^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et les invariants de Riemann sont :  $\pi - \delta au$ ,  $\pi + \frac{a^2}{h}$ ,  $z$ ,  $Q$ .

– Pour  $\lambda = u + \delta \frac{b}{h}$  avec  $\delta = \pm 1$  on a

$$r^T = \begin{pmatrix} 1 & \delta \frac{b}{h^2} & \frac{a^2}{h^2} & -\frac{a^2 - b^2}{gh^3} & -\frac{a^2 - b^2}{gh^3} (u + \delta \frac{b}{h}) \end{pmatrix}$$

et les invariants de Riemann sont :  $z - \frac{a^2 - b^2}{gh^2}$ ,  $u + \frac{\delta b}{h}$ ,  $\pi + a^2/h$ ,  $\frac{a^2 - b^2}{gh^2} \left( u + \frac{\delta b}{h} \right) - Q$ .

Avec  $a \neq b$  le système est hyperbolique et tous les champs sont linéairement dégénérés. Pour résoudre le problème de Riemann, il faut une relation d'ordre entre les valeurs propres. On a :

$$u - \frac{a}{h} < u < u + \frac{a}{h} \quad \text{et} \quad u - \frac{b}{h} < u < u + \frac{b}{h}.$$

Pour simplifier, on va forcer  $b \gg 1$  assez grand pour assurer :

$$u - \frac{b}{h} < u - \frac{a}{h} \quad \text{et} \quad u + \frac{a}{h} < u + \frac{b}{h}.$$

Ceci n'est pas restrictif et la seule contrainte est :  $a \neq b$ .

On va donc résoudre le problème de Riemann suivant :

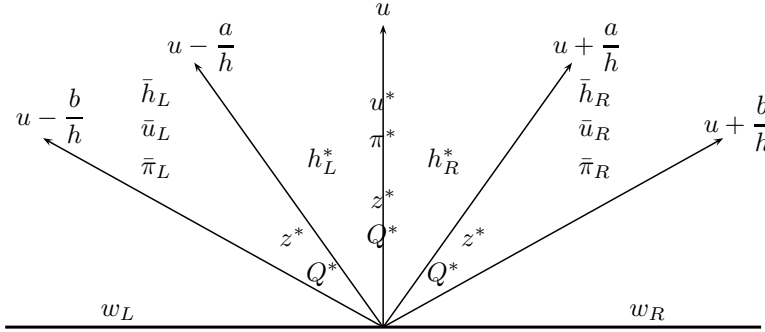


FIGURE 34 – Quantités mises en jeu à chaque interface.

Le problème de Riemann est résolu par la continuité des invariants. Ainsi, pour les deux valeurs propre  $u - \frac{a}{h}$  et  $u + \frac{a}{h}$ , les deux premiers invariants  $\pi - \delta au$  et  $\pi + \frac{a^2}{h}$  permettent de trouver une relation pour calculer  $\pi^*$ ,  $u^*$  et les inverses de  $h_L^*$  et  $h_R^*$

$$\pi^* = \frac{\bar{\pi}_L + \bar{\pi}_R}{2} - \frac{a}{2} (\bar{u}_R - \bar{u}_L), \quad u^* = \frac{\bar{u}_R + \bar{u}_L}{2} - \frac{1}{2a} (\bar{\pi}_R - \bar{\pi}_L),$$

$$\frac{1}{h_L^*} = \frac{1}{h_L} - \frac{1}{a^2} (\pi^* - \bar{\pi}_L) \quad \text{et} \quad \frac{1}{h_R^*} = \frac{1}{h_R} - \frac{1}{a^2} (\pi^* - \bar{\pi}_R).$$

De même, on utilise les propriétés des invariants de Riemann et la continuité pour calculer les autres variables

$$z^* = \frac{\left( u_R + \frac{b}{h_R} \right) z_R - \left( u_L - \frac{b}{h_L} \right) z_L}{\left( u_R + \frac{b}{h_R} \right) - \left( u_L - \frac{b}{h_L} \right)} - \frac{1}{\left( u_R + \frac{b}{h_R} \right) - \left( u_L - \frac{b}{h_L} \right)} (Q_R - Q_L),$$

$$Q^* = \frac{\left(u_R + \frac{b}{h_R}\right) Q_L - \left(u_L - \frac{b}{h_L}\right) Q_R}{\left(u_R + \frac{b}{h_R}\right) - \left(u_L - \frac{b}{h_L}\right)} - \frac{\left(u_R + \frac{b}{h_R}\right) \left(u_L - \frac{b}{h_L}\right)}{\left(u_R + \frac{b}{h_R}\right) - \left(u_L - \frac{b}{h_L}\right)} (Q_R - Q_L),$$

$$\frac{1}{h_L} = \left( \frac{1}{h_L^2} - \frac{2g}{a^2 - b^2} (z_L - z^*) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{h_R} = \left( \frac{1}{h_R^2} - \frac{2g}{a^2 - b^2} (z_R - z^*) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{u}_L = u_L + b \left( \frac{1}{h_L} - \frac{1}{h_L} \right), \quad \bar{u}_R = u_R - b \left( \frac{1}{h_R} - \frac{1}{h_R} \right),$$

$$\bar{\pi}_L = \pi_L + a^2 \left( \frac{1}{h_L} - \frac{1}{h_L} \right) \quad \text{et} \quad \bar{\pi}_R = \pi_R + a^2 \left( \frac{1}{h_R} - \frac{1}{h_R} \right),$$

où  $\left(u_R + \frac{b}{h_R}\right) - \left(u_L - \frac{b}{h_L}\right) \neq 0$  et  $b$  assez grand et  $b^2 - a^2 > 0$ .

On voit clairement ici qu'il faut traiter indépendamment les cas où la hauteur d'eau sera nulle. Maintenant que l'on a défini les relations entre les variables nécessaires, on utilise ce solveur de Riemann pour construire notre solution. On pose ici :  $w^T = \left( h \quad hu \quad z \right)$ .

On considère un maillage :

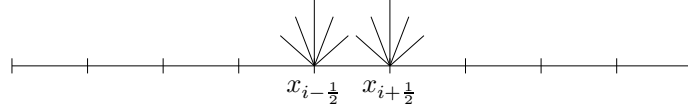


FIGURE 35 – définition du maillage.

Sur chaque interface de ce maillage, on pose le solveur de Riemann que l'on vient de trouver en remplaçant :

$$\begin{array}{llll} h_L = h_i & h_R = h_{i+1} & \pi_L = p(h_i) & \pi_R = p(h_{i+1}) \\ u_L = u_i & u_R = u_{i+1} & Q_L = q_{e_i} & Q_R = q_{e_{i+1}} \\ z_L = z_i & z_R = z_{i+1} & & \end{array}$$

Sous la condition CFL :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} (u_i^n \pm \frac{b}{h_i^n}) \leq \frac{1}{2},$$

on obtient alors une juxtaposition de problèmes de Riemann sans interaction. On note  $w^n(x, t)$  cette suite de problèmes de Riemann. Le schéma numérique est obtenu en projetant cette solution  $w^n$  sur la fonction constante par morceaux :

$$w_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} w^n(x, t^n + \Delta t) dx.$$

Il est essentiel de noter que l'on ne retrouvera pas un bilan de flux pour l'équation en  $(hu)$  puisque cette équation est non conservative. Pour les équations conservatives  $h$  et  $z$ , on a :

$$h_i^{n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((hu)_{i+1/2} - (hu)_{i-1/2}),$$

$$z_i^{n+1} = z_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_{i+1/2} - Q_{i-1/2}).$$

Pour le calcul de  $hu$  on s'aidera des figures 34 et 35.

## B Compléments Bibliographiques

L'érosion est une dégradation naturelle du relief du sol. Ce processus est composé d'un ensemble de phénomènes qui interagissent. Cet ensemble est assez complexe et les possibilités de modélisation limitées font que l'élaboration d'un modèle est toujours une simplification. Durant l'étude nous avons fait de nombreuses simplifications. Ainsi pour modéliser l'érosion on a considéré une fonction pour le débit sédimentaire  $q_e$  et tout ce qui était arraché dans une cellule se redéposait dans la cellule suivante. Malgré une étude bibliographique nous n'avons pu aller plus en profondeur dans l'implémentation. Cette annexe a pour but de développer quelques phénomènes ou paramètres de l'érosion qu'il aurait été intéressant d'implémenter. Cette partie se veut explicative, descriptive mais surtout pas exhaustive. Elle commence par une partie description qui définit les liens entre les différentes notions qui seront détaillées ensuite.

### Description de l'érosion hydrique

Les mouvements de l'eau à travers et à la surface du sol sont par définition la condition sine qua none de l'érosion hydrique de la couverture pédologique. Les mouvements de l'eau entraînent le détachement des sédiments, c'est la première phase de l'érosion qui en comporte trois : le détachement, le transport et le dépôt des sédiments. Lors de pluies les sédiments arrachés sont projetés, éjectés un peu plus loin suivant l'intensité de l'impact des gouttes, c'est l'effet splash. Lors de ruissellement les sédiments détachés sont transportés dans l'écoulement pour être redéposer plus ou moins loin. La distance parcourue dépendra de plusieurs paramètres tels que la capacité de transport du fluide. A ces trois grandes phases de l'érosion plusieurs phénomènes ou paramètres vont découler et donc interagir comme le détachement net ou le redétachement qui est le détachement de sédiments qui ont déjà été transportés et ont donc la faculté de se détacher avec moins de contrainte. La facilité ou non à se détacher est appelée l'érodibilité du sol mais comme on vient de le décrire ce paramètre n'est pas constant, il peut varier au cours du temps et surtout des sédiments. Ainsi, une humidité du sol importante abaissera ce paramètre d'érodibilité.

**Le détachement** est la phase la plus importante de l'érosion. En effet, elle débute le processus d'érosion et surtout sans le détachement il n'y a pas d'érosion. De plus, cette phase dépend de beaucoup de paramètres. Suivant la hauteur d'eau et la position topographique on distingue les cas où le détachement est plutôt gouverné par la force tractrice de l'eau (ruissellement) et les cas où le ruissellement est causé directement par l'énergie cinétique des gouttes (splash).

**Le ruissellement** désigne en hydrologie le phénomène d'écoulement des eaux à la surface des sols. Il s'oppose au phénomène d'infiltration. Le ruissellement est un des moteurs de l'érosion : l'eau qui s'écoule entraîne avec elle des particules plus ou moins grosses en fonction de la quantité d'eau en mouvement et de la pente, ce qui peut avoir un effet abrasif sur le terrain soumis au ruissellement. Le ruissellement est également un phénomène pris en compte lors de l'aménagement urbain, car la généralisation des sols imperméabilisés (routes, stationnement automobile, zones bâties, etc.) augmente le ruissellement aux dépens de l'infiltration, ce qui peut conduire à des crues violentes et augmente les risques de saturation des collecteurs d'eau et d'inondation en aval. Concrètement la formule qui est souvent utilisée est :

$$D = K(\tau - \tau_c),$$

où  $K$  est le coefficient d'érodibilité,  $\tau_c$  la contrainte critique et  $\tau$  la contrainte pariétale ou contrainte du fond (généralement  $\tau \stackrel{\text{def}}{=} \rho u^2$ ). On retrouve dans cette contrainte les paramètres évoqués précédemment qui sont la grosseur des particules c'est-à-dire leur masse volumique et les effets de la

penne sont atteints avec la vitesse  $u$ . Cette formule est citée par *Klik et al* [KSNB95], *Foster et al* [FFN<sup>+</sup>95] et *Ascough et al* [ABNF95].

**Le splash** est le nom utilisé pour désigner le fait que la pluie en tombant sur le sol va l'éroder. On s'intéresse ici au ruissellement consécutif au splash, ce phénomène fait intervenir un certain nombre de paramètres comme l'intensité de la pluie ou l'énergie cinétique ou encore la couverture végétale.

La couverture végétale basse ou haute, c'est-à-dire près du sol ou plus haut, aura pour effet dans un premier temps d'atténuer l'effet de la pluie. En effet, la pluie sera amortie par ces végétaux. Dans certains cas et notamment ceux d'une couverture basse le processus de splash pourra être même complètement inhiber. La pluie étant complètement arrêtée par cette couverture et ce juste avant le sol. Dans le cas d'une couverture haute la pluie sera dans un premier temps arrêtée et s'accumulera sur cette couverture (qui peut être par exemple une feuille d'arbre). Cette accumulation d'eau provoquera parfois une érosion plus forte que la pluie elle-même. En d'autres termes, si on imagine que l'eau s'accumule sur une feuille, elle sera rapidement drainée et l'eau tombera par goutte plus grosse sur un espace réduit.

Une formule assez souvent citée pour modéliser le ruissellement dû au splash, et notamment par *Lane et al* [LSS], *Tran et al* [TRDS01], *Wischmeier* [Wis76] ou encore *Foster* [Fos90] est :

$$A = RKLSCP,$$

où  $R$  est l'érosivité de la pluie c'est-à-dire l'agressivité de la pluie sur le sol,  $K$  est l'érodibilité du sol,  $L$  et  $S$  sont les facteurs de longueur et de gradient de la pente,  $C$  représente l'effet de la couverture végétale et  $P$  est un facteur de soutien. *Lane et al* [LSS] ont exprimé une fonction plus générale :

$$A = f(I, S, C, Sol),$$

où  $I$  est l'intensité de la pluie et  $Sol$  représente les paramètres du sol tel que l'érodibilité. Ce modèle au niveau des éléments pris en compte a parfois été largement simplifié et limité à :

- la seule intensité de la pluie  $I$  [LSS] :

$$A = aI^2,$$

- ou encore à l'érodibilité du sol  $K$  et à l'énergie totale  $E_t$  :

$$A = KE_t 10^{-3}.$$

L'énergie totale se décompose en deux énergies, l'énergie dû à la pluie qui tombe directement sur le sol et l'énergie dû à la pluie qui avant de tomber est drainée par la couverture végétale [LVNM08]. Le modèle suivant est de même une simplification. On y retrouve l'énergie cinétique  $E$  d'une goutte de pluie mais aussi les propriétés du sol avec la contrainte de cisaillement  $\tau$  [MZZC08] :

$$A = a + b \frac{E}{\tau},$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes.

Finalement, le ruissellement dû au splash dépend en premier de la pluie et de son intensité, son érosivité ou encore de l'énergie cinétique des gouttes, puis des propriétés du sol avec l'érodibilité, la longueur ou le gradient de la pente et enfin de la couverture végétale.

**Le détachement net** est le taux de sédiments qui seront réellement transportés dans une autre cellule. En fait, l'écoulement admet une certaine capacité de transport  $T_c$  et lorsque la charge des sédiments  $G$  de l'écoulement atteint cette capacité alors les sédiments arrachés retomberont

instantanément et ne seront donc pas transportés [KSNB95]. On notera alors  $A_n$  le détachement net :

$$A_n = A\left(1 - \frac{G}{T_c}\right).$$

Il est clair que la charge de sédiment  $G$  contenue dans l'écoulement est comprise entre 0 et  $T_c$ . Ainsi on a

$$0 \leq 1 - \frac{G}{T_c} \leq 1.$$

Ce qui revient à dire que le détachement net est un pourcentage du détachement théorique  $A$ .

**Le redétachement** définit le fait que les sédiments qui viennent d'être déposés sont plus facilement érodable. Concrètement, une particule du sol venant d'être déposée n'a pas le temps de se lier à d'autres particules du sol et donc n'étant pas accrochée au sol la contrainte d'érosion sera beaucoup plus faible. Ainsi, *Parlange et al* [PHR<sup>+</sup>99], qui suit la description donnée par exemple par *Hairsine et Rose* [HR91], différencient le détachement des sédiments qui viennent d'être déposés du détachement simple des sédiments. Ils posent :

$$A_r = K_r P \frac{M_{di}}{M_{d\tau}},$$

où  $K_r$  est le coefficient d'érodibilité de la couche de dépôt,  $M_{di}$  est la masse par unité d'aire dans la couche de dépôt et  $M_{d\tau}$  est la somme totale de la masse de cette couche.

**Le transport des sédiments** est la deuxième phase de l'érosion. En effet, après avoir été arrachés les sédiments sont transportés dans le fluide avant d'être redéposés. Cette phase dépend essentiellement d'un paramètre qui est la capacité de transport  $T_c$  de l'écoulement.

La capacité de transport est la masse maximale de sol pouvant être transportée d'une cellule à une autre par unité de longueur [RVO<sup>+</sup>01]. *Desmet et Govers* [DG95] et *Van oost et al* [OGD00] considèrent que la capacité de transport est directement proportionnelle au potentiel érosif du sol  $A_{PE}$ , qui correspond au taux d'érosion théorique du sol :

$$T_C = K_{TC} A_{PE},$$

où  $K_{TC}$  est le coefficient de transport. Il décrit la proportionnalité entre le potentiel érosif du sol et la capacité de transport, ce qui peut être interprété comme la distance théorique qui est nécessaire pour produire assez de sédiments pour atteindre la capacité de transport  $T_C$  (pour une pente et une vitesse uniforme)[RVO<sup>+</sup>01]. En fait  $K_{TC}$  est un facteur empirique qui sera évalué par une moyenne de calibration.

*De Roo et al* [RWR95] et *Dickinson et al* [DWR90] considèrent au contraire que cette quantité dépend de la vitesse  $V$  de l'écoulement ou de son débit  $q$  :

$$T_c = a[S \times V - 0.4]^b \quad \text{ou} \quad T_c = aq^b S^c.$$

où  $S$  est le gradient de la pente,  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des coefficients empiriques. Lorsqu'il pleut *Dickinson et al* [DWR90] pensent que la capacité de transport augmente proportionnellement à l'intensité de la pluie :

$$T_c = dI^e S^f,$$

où  $d$ ,  $e$ ,  $f$  sont des coefficients empiriques.



**Le dépôt** représente la troisième phase de l'érosion comme son nom l'indique elle consiste à déposer les sédiments présents dans le fluide. Ce dépôt est considéré par *Sander et al* [SHR<sup>+</sup>96] comme proportionnel à la vitesse des sédiments  $V_s$  et à la concentration des sédiments dans le fluide  $C$  :

$$D = V_s C.$$

*De Roo et al* [CCR96] associent le dépôt à la capacité de transport. En d'autres termes, ils considèrent que tant que la charge des sédiments présents dans le fluide n'a pas atteint la valeur maximale de la capacité de transport alors il n'y a pas de dépôt. Cela s'explique par le fait que tant que le fluide peut transporter ce qui a été arraché alors les particules de sol ne seront pas déposées. Ainsi, ils définissent le dépôt par la formule suivante :

$$D = wV_s[T_c - C],$$

où  $w$  est la largeur du flux,  $V_s$  la vitesse des sédiments et  $C$  la concentration sédimentaire.

## Références

- [ABNF95] J.C. Ascough, C. Baffaut, M.A. Nearing, and D.C. Flanagan. Watershed model channel hydrology and erosion processes, 1995.
- [Aud04] E. Audusse. *Modélisation hyperbolique et analyse numérique pour les écoulements en eaux peu profondes*. PhD thesis, Université Paris VI, 2004.
- [AWM<sup>+</sup>89] J.B. Arnold, G. Wall, N. Moore, C.S. Baldwin, and I.J. Shelton. *L'érosion du sol - Causes et Effets*, 1989.
- [Ben74] J.P. Bennett. Concepts of mathematical modelling of sediment yield. *Water Resources Research*, 10(3) :485–492, 1974.
- [BMS81] Z.B. Begin, D.F. Meyer, and S.A. Schumm. Development of longitudinal profiles of alluvial channel in response to base level lowering. *Earth Surface Processes and Land Forms*, 6(1) :48–49, 1981.
- [BSS] F. Benkhaldoun, S. Sahmim, and M. Seaïd. A two-dimensional finite volume morphodynamic model on unstructured triangular grids.
- [BTHB06] B. Benes, V. Tesinsky, J. Hornys, and S.K. Bhatia. Hydraulic erosion. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 17(2) :99–108, 2006.
- [CCR96] A.P.J. De Roo C.G., Wesseling C.J., and Ritsema. LISEM : A single-event physically based hydrological and soil erosion model for drainage basins .1. Theory, input and output. *Hydrological Processes*, 10(8) :1107–1117, AUG 1996.
- [CDFNF08] M.J. Castro-Díaz, E.D. Fernández-Nieto, and A.M. Ferreiro. Sediment transport models in shallow water equations and numerical approach by high order finite volume methods. *Computers & Fluids*, 37(3) :299 – 316, 2008.
- [DCJD08] O. Delestre, S. Cordier, F. James, and F. Darboux. Simulation of rain-water overland-flow. 2008.
- [DEA<sup>+</sup>08] B.J. Dewals, S. Erpicum, P. Archambeau, S. Detrembleur, and M. Pirotton. Hétérogénéité des échelles spatio-temporelles d'écoulements hydrosédimentaire et modélisation numérique. *La houille blanche*, (5) :109–114, 2008.
- [DG95] P.J.J. Desmet and G. Govers. Gis-based simulation of erosion and deposition patterns in an agricultural landscape - a comparison of model results with soil map information. *Catena*, 25(1-4) :389–401, JUN 1995. Memorial Symposium on Experimental Geomorphology and Landscape Ecosystem Changes, Louvain, Belgium, MAR 22-26, 1993.
- [DJ09] O. Delestre and F. James. Simulation of rainfall events and overland flow. 2009.
- [DJLZ08] O. Devauchelle, C. Jossierand, P. Lagrée, and S. Zaleski. Mobile bank conditions for laminar microrivers. *Comptes Rendus Geosciences*, 340(11) :732 – 740, 2008.
- [DWR90] W.T. Dickinson, G.J. Wall, and R.P. Rudra. Model building for predicting and managing soil erosion. In J. Boardman, I.D.L. Foster, and J.A. Dearing, editors, *Soil erosion on agricultural land*, pages 415–428. 1990.
- [Ein50] H.A. Einstein. The bed load functions for sediments transport in openchannel flows, 1950.
- [eMH09] M.B. Abd el Malek and M.M. Helal. Application of a fractional steps method for the numerical solution of the two-dimensional modeling of the lake mariut. *Applied Mathematical Modelling*, 33(2) :822 – 834, 2009.
- [FFN<sup>+</sup>95] G.R. Foster, D.C. Flanagan, M.A. Nearing, L.J. Lane, L.M. Risse, and S.C. Finkner. *Ch. 11 hillslope erosion component, in Water Erosion Prediction Project : Hillslope Profile and Watershed Model Documentation*, volume USDA NSERL Rep. 10. 1995.
- [Fos90] G.R. Foster. *Process-based Modelling of Soil Erosion by Water on Agricultural Land*. John Wiley & Sons Ltd, 1990.

- [FS03] S. Fagherazzi and T. Sun. Numerical simulations of transportational cyclic steps. *Computers & Geosciences*, 29(9) :1143 – 1154, 2003.
- [GPZ04] P. Gomi, P.Sergent, and B. Zhang. Evolution morphodynamique des souilles d’extraction marines, 2004. paper presented at the Journées Nationales Génie Civil - Génie Côtier, Compiègne.
- [Gra99] W. Graf. *Traité de génie civil - Hydraulique fluviale*, volume 16. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1999.
- [HR91] P.B. Hairsine and C.W. Rose. Rainfall detachment and deposition - Sediment transport in the absence of flow-driven processes. *Soil Science Society of America Journal*, 55(2) :320–324, Mar-Apr 1991.
- [IAC97] B. Ildefonse, C. Allain, and P. Coussot. *Des grands écoulements naturels à la dynamique du tas de sable*. Cemagref éditions, 1997.
- [KD09] D.M. Kelly and N. Dodd. Floating grid characteristics method for unsteady flow over a mobile bed. *Computers & Fluids*, 38(4) :899 – 909, 2009.
- [KSNB95] A. Klik, M.R. Savabi, L.D. Norton, and O. Baumer. Application of wepp hillslope model in austria. *Water management in urban areas*, 1995.
- [KWD06] E.J. Kubatko, J.J. Westerink, and C. Dawson. An unstructured grid morphodynamic model with a discontinuous galerkin method for bed evolution. *Ocean Modelling*, 15(1-2) :71 – 89, 2006. The Third International Workshop on Unstructured Mesh Numerical Modelling of Coastal, Shelf and Ocean Flows.
- [Li79] R.M. Li. Water and sediment routing from watersheds, in modeling of rivers. 1979.
- [LLG08] X. Liu, B.J. Landry, and M.H. García. Two-dimensional scour simulations based on coupled model of shallow water equations and sediment transport on unstructured meshes. *Coastal Engineering*, 55(10) :800 – 810, 2008.
- [LSS] L.J. Lane, E.D. Shirley, and V.P. Singh. *Modelling Geomorphological Systems*, chapter 10.
- [LVNM08] M. López-Vicente, A. Navas, and J. Machín. Modelling soil detachment rates in rainfed agrosystems in the south-central pyrenees. *Agricultural Water Management*, 95(9) :1079 – 1089, 2008.
- [MZZC08] T. Ma, C. Zhou, T. Zhu, and Q. Cai. Modelling raindrop impact and splash erosion processes within a spatial cell : a stochastic approach. *Earth Surface Processes and Landforms*, 33(5) :712–723, 2008.
- [Nor06] G. Nord. *Modélisation à base physique des processus de l’érosion hydrique à l’échelle de la parcelle*. PhD thesis, L’université Joseph Fournier - Grenoble 1, 2006.
- [NRE09] M. Gopal Naik, E.P. Rao, and T.I. Eldho. A kinematic wave based watershed model for soil erosion and sediment yield. *Catena*, 77(3) :256 – 265, 2009.
- [OGD00] K. Van Oost, G. Govers, and P. Desmet. Evaluating the effects of changes in landscape structure on soil erosion by water and tillage. *Landscape Ecology*, 15(6) :577–589, Aug 2000.
- [PH03] D. Pritchard and A.J. Hogg. Suspended sediment transport under seiches in circular and elliptical basins. *Coastal Engineering*, 49(1-2) :43 – 70, 2003.
- [PHR<sup>+</sup>99] J.Y. Parlange, W.L. Hogarth, C.W. Rose, G.C. Sander, P. Hairsine, and I. Lisle. Addendum to unsteady soil erosion model. *Journal of hydrology*, 217(1-2) :149–156, APR 1 1999.
- [RHdV08] P.C. Roos, S.J.M.H. Hulscher, and H.J. de Vriend. Modelling the morphodynamic impact of offshore sandpit geometries. *Coastal Engineering*, 55(9) :704 – 715, 2008.
- [Rij84a] L.C. Van Rijn. a. sediment transport , part I : bed load transport. *J. Hydraulic Engineering*, pages 1431–1456, 1984.

- [Rij84b] L.C. Van Rijn. b. sediment transport , part II : suspended load transport. *J. Hydraulic Engineering*, pages 1613–1641, 1984.
- [RVO<sup>+</sup>01] A.J.J. Van Rompaey, G. Verstraeten, K. Van Oost, G. Govers, and J. Poesen. Modelling mean annual sediment yield using a distributed approach. *Earth Surface Processes and Landforms*, 26(11) :1221–1236, Oct 2001.
- [RWR95] A.P.J. De Roo, C.G. Wesseling, and C.J. Ritsema. Lisem : a single-event physically based hydrological and soil erosion model for drainage basins. i : theory, input and output. *Hydrological processes*, 1995.
- [SC06] G. Simpson and S. Castelltort. Coupled model of surface water flow, sediment transport and morphological evolution. *Computers & Geosciences*, 32(10) :1600 – 1614, 2006.
- [SHA<sup>+</sup>09] P.K. Stansby, J. Huang, D.D. Apsley, M.I. García-Hermosa, A.G.L. Borthwick, P.H. Taylor, and R.L. Soulsby. Fundamental study for morphodynamic modelling : Sand mounds in oscillatory flows. *Coastal Engineering*, 56(4) :408 – 418, 2009.
- [SHR<sup>+</sup>96] G.C. Sander, P.B. Hairsine, C.W. Rose, D. Cassidy, J.Y. Parlange, W.L. Hogarth, and I.G. Lisle. Unsteady soil erosion model, analytical solutions and comparison with experimental results. *Journal of Hydrology*, 178(1-4) :351 – 367, 1996.
- [SMM07] M. Soutter, A. Mermoud, and A. Musy. *Ingénierie des eaux et du sol, Processus et aménagements*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2007.
- [SP09] L. Schippa and S. Pavan. Bed evolution numerical model for rapidly varying flow in natural streams. *Computers & Geosciences*, 35(2) :390 – 402, 2009.
- [SS94] V.N. Sharda and S.R. Singh. A finite-element model for simulating runoff and soil-erosion from mechanically treated agricultural lands .1. governing equations and solutions . *Water resources research*, 30(7) :2287–2298, Jul 1994.
- [TRDS01] L.T. Tran, M.A. Ridgley, L. Duckstein, and R. Sutherland. Using fuzzy logic-based modeling to improve the performance of the revised universal soil loss equation. pages 919–923. D.E. Stott, R.H. Mohtar and G.C. Steinhardt, 2001.
- [VH06] V. Villaret and J.M. Hervouet. Comparaison croisée de différentes approches pour le transport sédimentaire par charriage et par suspension, 2006. paper presented at the Journées Nationales Génie Civil - Génie Côtier, Compiègne.
- [WB96] J.M. Wicks and J.C. Bathurst. SHESED : A physically based, distributed erosion and sediment yield component for the SHE hydrological modelling system. *Journal of hydrology*, 175(1-4) :213–238, FEB 1996.
- [Wis76] W.H. Wischmeier. Use and misuse of the universal soil loss equation. *The journal of soil and water conservation*, 31(1) :5–9, January-February 1976.