

**MASTER 2 SMEEF
SPÉCIALITÉ « PROFESSORAT DES ÉCOLES »
ANNÉE 2011/2012
SEMESTRE 4**

INITIATION À LA RECHERCHE

MÉMOIRE

**NOM ET PRÉNOM DE L'ÉTUDIANT : WACHEUX Marjolaine
SITE DE FORMATION : Valenciennes
SECTION : Master 2 groupe B**

**Intitulé du séminaire de recherche : Mathématiques
Intitulé du sujet de mémoire : L'introduction des nombres décimaux au cycle 3
Nom et prénom du directeur de mémoire : LOISEAU Bruno**

Direction

365 bis rue Jules Guesde
BP 50458
59658 Villeneuve d'Ascq cedex
Tel : 03 20 79 86 00
Fax : 03 20 79 86 01
Site web : www.lille.iufm.fr

Sommaire

<i>Introduction</i>	2
<i>Conceptualisations mathématique et historique des fractions et des nombres décimaux</i>	4
• Conceptualisation mathématique des nombres décimaux	4
• Conceptualisation historique des fractions et des nombres décimaux	5
• Les différents types de fractions.....	7
<i>Mes lectures</i>	9
• Analyse des Instructions Officielles de 2008	9
• Etude de différentes progressions	10
• Formulation de la problématique.....	12
<i>Mes investigations</i>	14
• Evolution des programmes depuis 1882	14
• Analyse de productions d'élèves	16
• Analyse de manuels scolaires.....	19
• Analyse de pratiques enseignantes	31
• Situations de remédiation possibles.....	33
<i>Conclusion</i>	37

Introduction

L'année dernière, j'ai pris la décision de consacrer mon mémoire au domaine des mathématiques. En effet, ce domaine étant ma spécialité et n'ayant pas de sujet précis en tête, j'ai pensé qu'il serait intéressant d'associer mes connaissances théoriques à celles nécessaires pour enseigner. Il m'a paru important de pouvoir approfondir ce domaine d'un côté plus pratique et de pouvoir comprendre davantage comment les élèves assimilent et analysent certaines notions. Je pourrais ainsi faire face, au mieux, aux difficultés rencontrées à l'avenir. De ce fait, ce mémoire pourrait m'être utile pour une pratique professionnelle à venir.

Mon sujet s'est précisé lorsque nous avons étudié et analysé, en cours de didactique des mathématiques, les évaluations nationales de CM2 et plus particulièrement la partie concernant les nombres décimaux. En effet, je ne pensais pas du tout que ces nombres pourraient poser autant de problèmes aux élèves de cycle 3 et les mettrait en échec. J'ai donc voulu savoir le pourquoi de ces difficultés. J'ai pu constater que les erreurs se posaient surtout quand il s'agissait de comparer ou de ranger des nombres décimaux. Après plusieurs analyses de productions d'élèves, j'ai compris que les enfants n'assimilaient pas du tout les nombres décimaux comme de nouveaux nombres mais plutôt soit comme des entiers (en ne prenant pas en compte la virgule), soit comme deux entiers mis bout à bout et séparés par une virgule. De ce fait ils utilisent les règles vues pour les nombres entiers pour comparer ou ranger des nombres décimaux. Par exemple, après avoir classé les parties entières, ils regardent la longueur de la partie décimale pour conclure. Ainsi la nature même de ces nombres n'est pas comprise, ce qui explique les différentes erreurs régulièrement observées. De plus, les élèves ont d'importantes difficultés à comprendre qu'on puisse toujours intercaler un nombre décimal entre deux autres. En constatant cela, il paraît plus évident de comprendre pourquoi les nombres décimaux posent autant de problèmes aux élèves de cycle 3. Il m'a donc semblé important d'approfondir cette notion mathématique pour savoir comment l'enseigner et à quoi faire particulièrement attention à l'avenir car il paraît vraiment primordial que les élèves de cycle 3 partent au collège avec une idée correcte de ce que représentent ces nombres. Ainsi le sujet de mon mémoire s'est porté sur l'introduction et l'apprentissage des nombres décimaux au cycle 3.

Pour cela, mes recherches se sont basées, dans un premier temps, sur la conceptualisation mathématique et historique des notions que je comptais aborder. Ensuite, afin d'approfondir mon sujet et de formuler ma problématique, je me suis attardée sur la lecture des Instructions officielles de 2008 et de plusieurs travaux de chercheurs de la fin du XXème siècle concernant les nombres décimaux. Enfin, après avoir pris connaissance de tout cela, j'ai mis en place certaines investigations rapprochant davantage le côté pratique à la théorie et me permettant ainsi de comprendre l'origine de certaines erreurs afin de définir les outils et les points essentiels nécessaires à une bonne assimilation de ces nombres.

Conceptualisations mathématique et historique des fractions et des nombres décimaux

- **Conceptualisation mathématique des nombres décimaux**

« Les décimaux écrits avec une virgule, ça ressemble à deux entiers collés » voilà ce qu'a pu entendre R. Brissiaud (1999) dans une classe de CM1 lors de sa recherche concernant l'assimilation des nombres décimaux chez les élèves. En effet, comme dit plus haut, les élèves assimilent très mal la nature même des nombres décimaux et ont tendance à les considérer comme des entiers. En demandant à des enfants de CM1 de comparer 1,015 et 1,05, 48% des élèves interrogés par R.Brissiaud (1999) dans le cadre de sa recherche ne n'ont pas répondu correctement. En effet, ces derniers comparent les deux parties décimales comme deux nombres entiers à savoir 15 et 5 et concluent rapidement que 1,015 est supérieur à 1,05. Et certaines règles ont tendance à confirmer cela : « Pour comparer 2 décimaux, on écrit des zéros à droite de la virgule jusqu'à ce qu'ils aient le même nombre de chiffres après la virgule ». Un enfant qui applique cette règle est conduit à comparer 1,015 et 1,050 et là il trouve le bon résultat. Mais a-t-il pour autant compris la nature même des nombres décimaux ? Il raisonne toujours sur des entiers et non sur des centièmes et des millièmes. D'ailleurs à l'oral, on lit généralement un nombre décimal comme deux entiers. Par exemple «15,17 » sera prononcé « 15 virgule 17 » et non « 15 virgule 17 centièmes ». Enfin, lorsqu'on les manipule, on considère les nombres décimaux comme des entiers. En effet, pour une addition ou une multiplication, la façon d'opérer est très proche de celle utilisée pour les nombres entiers.

Ainsi ces différentes remarques permettent de comprendre pourquoi les élèves rapprochent souvent les nombres décimaux des nombres entiers. Il m'est donc paru inévitable de redéfinir le plus clairement possible l'objet d'étude de ce mémoire à savoir les nombres décimaux.

Conceptuellement, un nombre décimal ne se rapproche en aucun cas d'un nombre entier mais est rattaché à une fraction. Par définition, c'est un nombre que l'on peut écrire sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10. R. Brissiaud (1999) nous montre, à l'aide du problème de recherche de la longueur de la diagonale d'un carré, que l'intérêt des nombres décimaux est de **pouvoir s'approcher d'aussi près que l'on veut d'un nombre rationnel ou irrationnel**. Il faut rappeler qu'un nombre rationnel est

un nombre qui s'écrit sous la forme d'une fraction. Ainsi les nombres décimaux font partie des nombres rationnels. Ainsi, même si les décimaux semblent plus facilement manipulables, fractions et décimaux ont la même fonction. D'ailleurs R.Brissiaud (1999) en donne une définition précise : « Les décimaux sont des fractions qui permettent d'approcher d'aussi près que l'on veut la mesure d'une grandeur continue quelconque ». On parle même de filtre décimal, c'est-à-dire de filtre permettant de se rapprocher autant que l'on veut de la valeur exacte de la fraction.

Il faut tout de même noter qu'à l'école primaire, les nombres décimaux permettront surtout de s'approcher d'aussi près que l'on veut d'un nombre rationnel (les irrationnels étant aperçus bien plus tard) et ainsi de comprendre leur utilité, à savoir faciliter la comparaison et la manipulation de deux grandeurs.

- **Conceptualisation historique des fractions et des nombres décimaux**

Pour comprendre au mieux cette conceptualisation, il faut la mettre en lien avec l'histoire des nombres fractionnaires.

Très tôt, les Hommes ont été confrontés au problème de partage : comment palier à l'insuffisance des nombres entiers ? Les premières civilisations anciennes qui nous ont laissé des sources permettant d'analyser assez justement leurs connaissances mathématiques sont les civilisations babyloniennes et égyptiennes. Il faut noter que les fractions babyloniennes et égyptiennes (cf. en annexe) sont nées des besoins économiques et commerciaux (taxes, intérêts, échanges monétaires, ...). Mais les premières représentations des fractions apparaissent sous forme de symboles chez les Sumériens vers 3000 av J-C. Cela dit ces représentations n'existent que pour des cas particuliers : $1/120$; $1/60$; $1/30$; $1/10$; $1/5$.

Une des célèbres sources de renseignements est le papyrus de Rhind écrit par le scribe Ahmès vers 1650 ans avant J-C. Concernant les fractions, on peut trouver deux significations différentes selon les civilisations.

Chez les Egyptiens, la fraction est vue comme un partage. Plusieurs symboles permettent d'écrire les fractions $1/3$, $1/5$, $1/10$, $1/100$... Il faut noter que les seules fractions utilisées par les Egyptiens, à l'exception de $2/3$, ont pour dénominateur 1 (fractions unitaires). Ils

avaient même mis au point une table donnant une décomposition possible du double d'une fraction, en la somme de deux fractions unitaires. Ainsi, toutes les fractions sont exprimées sous la forme de somme de fractions unitaires.

Chez les Babyloniens, les fractions prennent la signification d'inverse. Les fractions du type m/n étaient expliquées comme $m \cdot 1/n$. Il faut noter également que cette civilisation utilisait le système de numération sexagésimal et donc les fractions avaient comme dénominateur 60 ou 3600.

Par la suite, au 11^{ème} siècle chez les arabes, les fractions deviennent le rapport de deux longueurs et prennent le statut de nombre. Ainsi $2/3$ est perçu comme le nombre qui multiplié par 3 donne 2. Il faut noter que la notation fractionnaire avec la barre est un héritage des peuples arabes.

Ensuite, en 1457, J. Al Kashi, savant arabe, donne une première définition des fractions décimales, expose leur théorie et montre comment décomposer toute fraction en somme de fractions décimales. Al Kashi détaille les techniques opératoires en expliquant qu'en utilisant les fractions décimales, les opérations sur les fractions se ramènent à des opérations sur les entiers.

Enfin, après l'arrivée des fractions décimales en Occident (et notamment par François Viète), c'est au Belge Simon Stevin que l'on doit l'invention des nombres décimaux. En effet, il les introduit avec une écriture particulière et des règles de calculs simples qu'il détaille dans l'ouvrage de référence « La disme ». Par exemple, 89,532 s'écrit :

89⑩5①3②2③

Comme il l'explique clairement dans son ouvrage, l'avantage de cette écriture est d'éviter les calculs lourds de fractions pour se ramener aux règles opératoires d'arithmétique utilisées sur les entiers.

La virgule n'apparaîtra dans l'écriture des nombres décimaux qu'au début du XVII^{ème} siècle avec le néerlandais Willebrord van Roijen Snell et l'écossais John Napier.

- **Les différents types de fractions**

En analysant la progression historique des fractions et des nombres décimaux, plusieurs chercheurs et auteurs ont pu mettre en avant plusieurs types de fractions utilisées. C'est le cas de Nicolas Rouche (1998) qui présente quatre types de fractions différentes dans un ouvrage intitulé « Pourquoi ont-ils inventé les fractions ». Selon lui, les fractions sont à distinguer selon le sens et la fonction qu'elles prennent ainsi que des valeurs qu'elles manipulent. Dans ce sens, R.Brissiaud (1999) le rejoint en distinguant également quatre types de fractions différentes. En premier lieu, une fraction peut opérer sur deux valeurs différentes et permet de représenter un partage (en parts égales : on parle de partage équitable). On retrouve d'ailleurs les fractions unitaires vues précédemment. Par exemple $1/3$ consiste à partager en 3 parts égales et d'en saisir une. Parmi ce type de fraction, on peut distinguer deux façons possibles de partager une grandeur (lorsqu'il ne s'agit pas de fraction unitaire). En effet, pour la fraction $3/5$, on peut soit partager en 5 parts égales l'unité donnée et en prendre 3 parts, soit multiplier par 3 l'unité donnée, partager l'ensemble en 5 parts égales et en prendre une. Le premier partage proposé correspond à une partition de l'unité suivie d'une multiplication. Dans ce cas on appelle ce type de fraction « un fractionnement de l'unité » et la fraction $3/5$ est lue « trois cinquièmes ». Pour le second partage possible, il correspond au partage de la totalité des 3 unités en 5 parts égales. On appelle ce type de fraction « une division-partition de la pluralité » et la fraction $3/5$ est lue « 3 divisé par 5 ». Il faut noter que ces deux types de partages se valent, ce qui n'est pas évident pour les élèves.

Concernant les deux autres types de fractions, on distingue les fractions qui correspondent à un rapport entre deux valeurs de même nature. On parle alors de fraction-rapport. On les utilise souvent en trigonométrie, par exemple pour calculer la tangente d'un angle. Bien-entendu pour que ce rapport ait du sens, il faut que l'unité donnée soit commune aux deux valeurs du rapport.

Enfin, la dernière fraction possible est celle exprimant une notion de proportion entre deux valeurs de natures différentes. La fraction $3/5$ se lit alors 3 pour 5. On l'utilise par exemple pour un rendement, ou encore pour désigner une proportion de personnes malades pour une certaine population.

Ainsi, connaissant à la fois la construction historique des nombres décimaux et les différentes fractions possibles, j'ai pu analyser et comprendre au mieux mes différentes lectures concernant l'enseignement des nombres décimaux au CM1 et CM2. Il faut noter à ce sujet que seuls les deux premiers types de fractions exposés plus haut sont utilisés au cycle 3, les deux suivants se rapprochant davantage de la proportionnalité.

Mes lectures

- **Analyse des Instructions Officielles de 2008**

Après avoir défini au mieux mon objet d'étude, j'ai pensé qu'il serait judicieux d'analyser les programmes afin d'être au clair avec les objectifs à travailler. Au niveau des Instructions Officielles de 2008, l'élève de cycle 3 aborde les nombres décimaux au CM1 et leur apprentissage se poursuit au CM2. En synthétisant, on voit apparaître clairement deux parties dans cet apprentissage à savoir la connaissance et la compréhension de ce que représentent ces nombres, puis la manipulation des décimaux en calculs mental et posé. Concernant la première partie, il s'agit surtout d'associer une écriture fractionnaire à une écriture décimale, connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de leur position, travailler sur la droite graduée et savoir comparer et ranger des nombres décimaux. Pour ce qui concerne le calcul mental, les élèves doivent savoir, en fin de CM2, multiplier et diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100 ou 1000. Concernant le calcul posé, l'addition, la soustraction de deux nombres décimaux, la multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier et la division décimale sont abordées au CM1 et complétées par la multiplication de deux nombres décimaux et la division d'un nombre décimal par un nombre entier au CM2. Pour ma part, travaillant sur la compréhension même de ces nombres, je me suis davantage penchée sur l'introduction des nombres décimaux au CM1 sans pour autant mettre de côté totalement la partie calculs, aide efficace pour l'assimilation de ces nombres. Par ailleurs, sachant que les nombres décimaux sont rattachés par nature aux fractions, il m'est paru primordial d'interroger également les programmes en ce qui concerne cette notion. Les fractions sont amenées, à juste titre, au CM1 et sont approfondies au CM2. Il s'agit surtout de savoir associer une fraction à une représentation d'un partage, encadrer une fraction entre deux nombres entiers, décomposer une fraction en une somme d'entier et de fraction inférieure à 1 ainsi que d'ajouter deux fractions de même dénominateur. En somme, les fractions au cycle 3 ne sont pas amenées simplement pour donner du sens aux nombres décimaux mais travaillées et approfondies comme de nouveaux nombres.

- **Etude de différentes progressions**

Après avoir mis au clair les objectifs attendus en fin de cycle 3, je me suis intéressée à quelques articles de chercheurs en didactique des mathématiques qui se sont penchés sur l'enseignement des nombres décimaux au cycle 3. Partant des erreurs commises par les élèves dans ce domaine, ils proposent des progressions variées à mener en classe pour limiter les difficultés. Je me suis particulièrement attachée à celle proposée par R.Brissiaud (1999) car elle paraissait être une des plus récentes dans ce domaine et tout à fait unique dans le sens où elle ne suit pas la même trame que celles des autres chercheurs.

En effet, en se basant sur les recherches de G. Brousseau (1980) dans ce domaine, R.Brissiaud (1999) part du constat que l'enseignement des nombres décimaux doit absolument débiter par l'enseignement des fractions décimales, ce choix permettant par la suite d'associer plus facilement les décimaux aux fractions et non aux entiers.

Pour l'enseignement des fractions, ce chercheur souligne l'importance de l'équivalence entre les fractions représentant une partition de la pluralité et celles correspondant à un fractionnement de l'unité. Afin de favoriser l'assimilation de cette équivalence, R. Brissiaud (1999) recommande de commencer l'enseignement par un contexte de partition de la pluralité. En effet, débiter dans un contexte de fractionnement de l'unité amène une difficulté dans l'assimilation de l'équivalence. Par exemple 11 quarts évoque une pluralité de quarts d'unités alors que 11 divisé par 4 évoque une pluralité d'unités. On ne travaille pas sur les mêmes objets. Débiter par 11 divisé par 4 permet de donner plus facilement du sens au partage du reste de la division, à savoir $\frac{3}{4}$ ($11/4 = 2 + \frac{3}{4}$).

Pour assimiler l'équivalence, R. Brissiaud (1999) propose de mettre en place 4 problèmes faisant varier à la fois le calcul utilisé (soit un partage de la totalité, soit un fractionnement de l'unité) et la représentation que se font les lecteurs (représentation par un fractionnement de l'unité ou une partition de la totalité).

Après l'appropriation de l'équivalence, le moment est venu dans la progression d'apprentissage de travailler les fractions sur des unités de mesure non conventionnelles pour favoriser l'appropriation de fractionnement, en évitant que les enfants ne se servent de leurs pré-acquis (la connaissance des mesures conventionnelles telles que le mètre, centimètre...). Puis le rapprochement sera fait avec les mesures traditionnelles telles que

le centimètre et millimètre en insistant davantage sur le fractionnement du mètre. Ensuite l'écriture à virgule des nombres décimaux est introduite simplement par un changement de notation en utilisant la calculatrice. Les élèves ont en effet acquis l'écriture en partie entière et partie fractionnaire (exemple : $143/10=14+3/10$) et vont constater, sur la calculatrice, que la virgule sépare simplement ces deux parties. Enfin, il s'agit de faire oraliser correctement les « nombres à virgule » en utilisant les termes dixièmes, centièmes et millièmes.

Pour cet auteur, il semble donc primordial de faire le lien entre fractionnement de l'unité et partition de la pluralité. Aucun autre auteur ne met cet aspect en avant.

Selon R.Douady et M.J. Perrin (1986), il faut commencer par introduire le fractionnement de l'unité et surtout jouer avec les cadres géométriques, numériques et graphiques. Ces auteurs proposent en effet d'introduire les nombres décimaux (et en premier lieu les fractions) par des mesures d'aires.

Brousseau (1980), quand à lui, propose une situation d'entrée particulière. En effet, il propose de trouver un moyen de désigner l'épaisseur d'une feuille de papier alors que cette dernière est trop petite pour être mesurée directement. Avec une telle situation, les fractions utilisées peuvent être vues comme une partition de la pluralité (en divisant 50 feuilles par l'épaisseur mesurée) ou encore comme une proportion (4mm pour 50 feuilles).

Quant à C.Comiti et R.Neyret (1979), ces deux auteurs mettent en avant, dans un article intitulé « A propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux en classe de cours moyen », les désavantages des présentations usuelles des décimaux (à cette époque). En effet, avant 1980 il faut noter que les nombres décimaux étaient généralement introduits par un codage de mesure de grandeur. Ainsi les décimaux étaient vus comme un recollement de deux entiers. Ces deux auteurs semblent dénoncer cette méthode d'introduction (qui aujourd'hui à montrer ces limites) pour en proposer une, plus innovante, et travaillant davantage sur le sens de ces nombres. Il s'agit de la méthode d'intercalation de points sur une droite numérique. Cette situation, se rapprochant de l'effet-loupe décrit plus bas, permet d'éviter cet attachement des nombres décimaux à un système de codage et permet également de travailler en quelques sortes la notion d'intercalation infinie entre deux nombres décimaux. Pour terminer, ces deux auteurs

concluent que les nombres décimaux doivent être enseignés comme de nouveaux nombres, et non comme un recollement de deux nombres entiers, en passant notamment par un travail minimal sur l'étude des fractions. Selon eux, les nombres décimaux doivent n'être qu'un outil aux activités de mesure.

J.Bolon (1992), dans un article concernant l'enseignement des décimaux à l'école élémentaire, cherche à mettre en regard les textes officiels et les pratiques ordinaires pour les confronter aux résultats de la recherche. Ainsi, après une analyse des textes officiels de 1985 et 1991, elle dénonce un travail « artificiel » concernant les fractions ainsi qu'une faible continuité des programmes entre le cycle 3 et la 6^{ème}. D'autre part en analysant certains exercices, elle constate que les savoirs des élèves semblent constitués de parties non reliées entre elles. Ainsi les élèves ne semblent pas avoir compris que 14/10 équivaut à 14 divisé par 10 (fraction division-partition de la pluralité). Cette auteure note ensuite quelques obstacles à l'apprentissage des nombres décimaux, notamment en ce qui concerne l'utilisation de règles (pour les entiers) appliquées aux nombres décimaux. Pour terminer, J.Bolon (1992) semble préconiser une étude des propriétés des nombres décimaux en lien avec les fractions, présentées à la fois comme longueurs et comme aires.

Ainsi, au vue de ces lectures, il semble que l'introduction des nombres décimaux au cycle 3 est toujours un objet de recherche et d'interrogation. Aucune progression ne semble être parfaite, mais chaque auteur semble préconiser une introduction par les fractions décimales. Il faudra prendre en compte par la suite cet aspect essentiel ainsi que les autres pensées des chercheurs à ce sujet.

- **Formulation de la problématique**

La lecture de ces différentes recherches, plus ou moins récentes, m'a permis de me rendre compte que tous les chercheurs ne présentent pas la même introduction et les mêmes pensées sur l'apprentissage des nombres décimaux. Il semble qu'il n'existe pas une unique progression, méthode permettant une bonne compréhension et assimilation de ces nombres. En effet, chaque chercheur envisage et justifie, à juste titre, une façon différente d'amener ces nombres et de les travailler. Il ne s'agira donc pas, à la fin de ce mémoire, de

mettre en avant une progression d'un chercheur particulier mais plutôt de prendre en compte chaque différence afin d'en tirer les avantages et les inconvénients. Le cœur même de ce mémoire portera donc sur la question suivante :

Comment les progressions peuvent-elles tenir compte des difficultés de l'apprentissage des décimaux ?

Mes investigations

Ayant pris connaissance des états de la recherche actuelle et des objectifs des instructions officielles de 2008, le constat m'a paru alarmant : comment et pourquoi de nombreux enfants, de nos jours encore, n'assimilent pas ces nouveaux nombres, après toutes ces années de réflexions et d'analyses?

Dans un dernier temps, j'ai donc voulu chercher les causes de ces difficultés pour tenter de proposer des situations de remédiations innovantes et surtout efficaces.

- **Evolution des programmes depuis 1882**

J'ai donc, en premier lieu, décidé de me consacrer aux programmes et leurs évolutions. En effet, il m'est paru primordial de comprendre comment ont été enseignés les nombres décimaux au fil des années afin de voir quels étaient les enjeux de leur enseignement et ainsi de les mettre en lien avec les objectifs des manuels. Pour cela, j'ai lu et analysé les programmes de 1882 à nos jours en ne prenant en compte que les mathématiques au cycle 3 et plus précisément les parties portant sur les fractions simples et décimales ainsi que sur les nombres décimaux.

Concernant les programmes de 1882, on trouve les notions de fractions simples, fractions décimales et de nombres décimaux mais il n'est pas précisé que les nombres décimaux doivent être vus en lien avec le système métrique. En revanche, dans les programmes de 1938 et 1945, les décimaux sont introduits en lien avec le système métrique et la monnaie même si les fractions simples sont abordées et travaillées.

A partir de 1970, les mathématiques modernes apparaissent : la compréhension des notions mathématiques prévalue sur la technique et l'utilisation de ces notions. Les enfants doivent comprendre ce que représentent les nombres décimaux et non simplement savoir s'en servir. Ainsi on voit apparaître dans les programmes les fractions opérateurs, permettant de travailler sur des tableaux. On remarque notamment que le produit de deux fractions doit être vu au cycle 3 en 1970 alors qu'actuellement seule l'addition et la soustraction sont travaillées. D'autre part il faut souligner que les nombres décimaux sont amenés par un changement d'unité et non en lien avec les fractions décimales. C'est seulement dans les programmes de 1980 que les décimaux sont abordés comme de nouveaux nombres, en lien

avec les fractions. Cependant il n'est pas réellement précisé dans quel ordre aborder ces deux notions (fractions et décimaux). Il est simplement noté qu'il faudrait lier ces deux notions en passant d'une écriture à l'autre.

Concernant les programmes de 1991 et 1995, ils se rejoignent fortement dans le fait que les décimaux sont introduits par les fractions simples puis décimales. En revanche il faut souligner que, concernant les calculs, le produit de deux nombres décimaux disparaît des instructions de 1995.

Les programmes de 2002 et notamment les documents d'accompagnements présentent plus précisément comment doivent être enseignés les fractions et les nombres décimaux. Tout d'abord, il est indiqué que le « travail sur les fractions est essentiellement destiné à donner du sens aux nombres décimaux envisagés comme fractions décimales ». Cela pourrait sous-entendre que les fractions sont peu travaillées au cycle 3. Il est d'ailleurs noté dans les documents d'accompagnement que le travail sur les écritures fractionnaires reste modeste à l'école primaire. Cependant, les fractions sont tout de même bien approfondies, bien que les calculs et les comparaisons ne soient pas l'objet de compétences devant être acquises en fin de CM2. D'autre part, il est bien rappelé dans les programmes que les fractions représentant la partition de la pluralité ne sont abordées qu'en classe de sixième. Concernant les nombres décimaux, les élèves doivent considérer ces nombres comme une autre écriture des fractions décimales permettant d'approcher le quotient de deux entiers. Ils doivent être introduits en lien avec les fractions et travaillés avec le système de mesure et les graduations par la suite. Au niveau des calculs il faut souligner que dans les programmes de 2002 la division d'un décimal par un entier disparaît.

Enfin, concernant les programmes de 2008, on peut constater que, en comparaison avec ceux de 2002, les sommes de fractions (de même dénominateur) font partie des objectifs ainsi que la division d'un décimal par un entier. Par ailleurs, rien n'est spécifié sur le type de fractions à aborder au cycle 3.

Pour terminer sur cet aspect, il m'a paru judicieux, en travaillant sur l'évolution des programmes, d'analyser également les programmes actuels du collège (classe de 6^{ème}) afin d'évaluer la continuité des apprentissages. Les instructions officielles de 6^{ème} concernant les fractions et nombres décimaux sont en continuité avec ceux du cycle 3, notamment en ce qui concerne l'équivalence entre les fractions représentant une partition de la pluralité et celles représentant un fractionnement de l'unité. Par ailleurs, il est clairement indiqué que le programme de cycle 3 ne sera pas repris à zéro mais au contraire considéré comme acquis, notamment en ce qui concerne la compréhension de la nature même des nombres

décimaux. Les programmes mettent davantage en avant l'assimilation de ces nombres par le calcul et les problèmes, ainsi que l'approfondissement des fractions.

- *Analyse de productions d'élèves*

Ainsi, ayant analysé l'évolution de l'enseignement des nombres décimaux, j'ai pu commencer l'analyse de quelques productions d'élèves de cycle 3 concernant la manipulation et la compréhension des nombres décimaux. Bien-entendu, ces analyses m'ont permis de poursuivre mes recherches pour comprendre l'origine de ces erreurs mais également par la suite de mettre en place quelques activités de remédiation.

Les productions (cf. en annexe) présentent des erreurs très fréquentes chez les élèves et qui sont liées à une mauvaise compréhension de la nature des nombres décimaux.

Concernant le classement proposé en évaluation nationale à la rentrée de 2002 pour des élèves de 6ème, dans l'ensemble, les enfants classent en premier lieu les parties entières puis s'occupent des parties décimales. Il me semble important de noter que, pour les cas de Nadia et de Thomas, le seul nombre entier 2 est mis complètement à part des nombres décimaux, comme si nombres décimaux et entiers correspondaient à deux ensembles distincts. Ainsi Nadia le place en début de classement alors que Thomas le place en fin de classement, ceci totalement aléatoirement. Cela dit, il faut noter que pour les quatre élèves, si l'on met de côté le nombre entier 2, les nombres décimaux sont tous correctement rangés, à l'exception d'Enzo qui fait un classement dans l'ordre décroissant. Mais cette activité ne permet pas d'évaluer au mieux la bonne compréhension des nombres décimaux. En effet, les nombres décimaux proposés ont, à l'exception de 22,02 et de 22,2, des parties entières différentes. Ainsi les élèves n'ont qu'à regarder la partie entière pour ranger les nombres décimaux. La deuxième activité est bien plus intéressante. En effet, elle nous permet d'observer qu'Aude, pour qui le classement est correct, ne sait pas situer 3,1 parmi les nombres proposés. Il semble qu'elle compare les parties décimales 1 et 7 pour conclure, sans prendre en compte que le 1 représente un dixième alors que le 7 des centièmes. Elle n'a donc pas assimilé correctement la valeur des chiffres d'un nombre décimal en fonction de sa position. Thomas fait la même erreur. Nadia, quant à elle, soit ne sait pas du tout placer 3,1 et donc le place à la fin du classement, soit le rapproche de 3,4 en comptant le nombre de chiffres de la partie décimale. Enzo uniquement place correctement 3,1 entre

3,07 et 3,15. Il est donc réellement le seul à avoir assimilé la nature des nombres décimaux et la valeur de chaque chiffre en fonction de leur position.

En poursuivant avec ce type d'exercice de classement, je me suis attardée sur les productions proposées par Claude Comiti et Robert Neyret (1979) dans un article intitulé « A propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux en classe de cours moyen ». Il faut noter avant toute analyse que cet article relativement ancien est à mettre en lien avec les programmes de 1970 qui préconisaient une approche des nombres décimaux différente de celle des programmes de 2008 (ainsi les erreurs doivent être mises en relation avec cela). Cela dit, les deux auteurs mettent en avant le fait que seuls 37% des élèves savent ranger correctement les 7 nombres (entiers et décimaux) proposés. Pour ce qui est des erreurs rencontrées, on retrouve comme précédemment les élèves qui séparent les nombres entiers et les nombres décimaux. C'est le cas pour 2% des élèves. On remarque également que, comme précédemment, les élèves classent en premier lieu les parties entières pour ensuite s'attarder aux parties décimales. Concernant ces dernières, elles sont considérées comme des nombres entiers à part et donc les élèves leur appliquent les mêmes règles que pour les nombres entiers. Ainsi ils comparent la longueur de la partie décimale pour conclure. De plus, certains d'entre eux ne voient pas la différence entre 3,9 et 3,09 car ils ne font pas attention à la place du chiffre 9 dans les deux nombres. Ainsi 23% des élèves mettent de côté le nombre 3,9 car ils ne savent pas où le placer. Pour le dernier classement proposé par 4% des élèves, ceux-ci ne prennent même pas la virgule en compte. Par exemple pour 3,09 ils considèrent ce nombre comme 309. Ils ne prennent même pas attention aux parties entière et décimale des nombres.

Concernant l'activité proposée pour tester la compréhension de la notion d'intercalation, j'ai pu constater que, pour la plupart des élèves, il n'existe pas de nombres décimaux compris entre 5,2 et 5,3. En observant ceci, j'ai pu me rendre compte que les élèves n'ont pas du tout compris la définition et l'objectif même d'un nombre décimal. Ils n'ont pas du tout assimilé la notion de filtre décimal. Ainsi l'effet de loupe et de partage d'un dixième en centièmes n'est pas du tout compris. Et pourtant ce sont des élèves de 6^{ème}...

Ensuite, je me suis attardée sur quelques manipulations de nombres décimaux dans des additions. J'ai pu constater que pour la plupart des élèves, à l'exception de Thibaut, que l'addition $15,87 + 8,32$ pose peu de problèmes aux enfants. Cette facilité peut-être due au

même nombre de chiffres de la partie décimale. Tous les élèves placent correctement les chiffres les uns en dessous des autres. Ils additionnent ainsi des centièmes avec des centièmes, des dixièmes avec des dixièmes... De plus pour la plupart d'entre eux, ils ont correctement assimilé que dix centièmes équivalent à un dixième et réalisent alors correctement les échanges à faire. Quant à Thibaut, lui seul, considère la partie entière et la partie décimale comme deux nombres entiers distincts et donc ne réalise pas les échanges entre dixièmes et unités.

Concernant la deuxième addition, on peut remarquer que le fait que ni la partie entière ni la partie décimale ne possède le même nombre de chiffres pose de nombreuses difficultés aux élèves. En effet, la plupart ne pose pas correctement l'addition. Certains s'arrangent en bougeant la virgule de place, comme le fait Alexandra, et d'autres ajoutent des zéros n'importe où, comme le fait Jonathan. Cet ajout de zéros est sûrement la conséquence de l'application d'une règle vue pour comparer deux nombres décimaux. Ces erreurs montrent clairement que les enfants manipulent ces nombres comme bon leur semble sans prendre en compte le sens et la valeur de chaque chiffre des nombres décimaux. Ainsi Alexandra transforme 6 dixièmes en 6 unités. Pour les cas de Sylvain et de Thibaut, c'est la partie décimale qui pose problème. En effet, ils considèrent cette partie comme un nombre entier à part entière et donc positionnent les deux parties décimales comme ils placeraient deux nombres entiers à additionner, c'est-à-dire en les alignant à droite. Cette erreur montre bien qu'ils ne prennent pas en compte la valeur des chiffres en fonction de leur position. Ils additionnent ainsi des millièmes avec des centièmes et des centièmes avec des dixièmes. Seul Hichem place et réalise correctement le calcul. Enfin, concernant le cas d'Anthony, il additionne séparément les parties entières puis les parties décimales. Il ne considère pas pour autant ces deux parties comme deux nombres distincts puisqu'il réalise ensuite les échanges entre dixièmes et unités. Cela dit, pour la deuxième addition, il oublie que 21 représente 21 centièmes et que 672 représente 672 millièmes. Il additionne ensemble millièmes et centièmes.

Ainsi, en analysant les erreurs observées dans ces productions, on peut constater et confirmer que la plupart proviennent d'une mauvaise assimilation de la nature même des nombres décimaux et de la signification de chaque chiffre composant un nombre décimal.

- **Analyse de manuels scolaires**

De ce fait, afin de comprendre l'origine de ces erreurs et ce qui peut les renforcer, j'ai décidé de mener un travail d'analyses sur différents manuels et guides pédagogiques associés à l'aide d'une grille d'analyse. Pour cela, j'ai ouvert mon éventail de recherche en comparant plusieurs manuels basés sur les mêmes programmes mais également en travaillant sur l'évolution des méthodes utilisées au fil des années. J'ai ainsi comparé plusieurs manuels du même auteur et éditeur mais selon des années de parution différentes et donc en lien avec différentes instructions officielles. J'ai donc analysé des manuels parus de 1991 à nos jours, à savoir :

- Atout Math, CM1, paru en 1994 (IO de 1991), (livre d'activités et guide pédagogique)
- Collection Diagonale, Math en flèche, CM1, paru en 1996 (IO de 1995), (livre d'activités et guide pédagogique)
- Le nouveau Math élem, CM1, paru en 2001 (IO de 1995), (livre d'activités)
- CAP MATHS, CM1 et CM2, paru en 2003 (IO de 2002), (livre d'activités et guide pédagogique)
- La tribu des maths, CM1, paru en 2009 (IO de 2008), (livre d'activités et guide pédagogique)
- J'apprends les maths, CM1, paru en 2010 (IO de 2008), de Rémi Brissiaud (livre d'activités et guide pédagogique)
- Collection Diagonale, Math en flèche, CM2, paru en 1994 (IO de 1991), (livre d'activités et guide pédagogique)

Dans l'ensemble et même pour les livres parus en 1991, il semble que les nombres décimaux soient introduits grâce aux écritures fractionnaires, ce qui semble logique puisqu'ils s'en rapprochent conceptuellement. A l'exception de Rémi Brissiaud (2010) qui propose une progression tout à fait unique et dont on parlera par la suite, les auteurs des manuels analysés semblent suivre la « même » progression présentant les étapes suivantes : la notion de partage équitable, les fractions simples et décimales, les nombres décimaux et leur étude, et les calculs posés sur les nombres décimaux. Il faut noter que cette dernière partie (sur les calculs posés) varie en fonction des instructions officielles suivies. A titre d'exemple, la multiplication de deux nombres décimaux et la division d'un nombre décimal par un entier sont absents des programmes de 2002.

Cela dit, même si la progression générale se retrouve dans chacun des manuels analysés, il existe certaines différences notables plus fines. Cela concerne par exemple l'utilisation de plusieurs supports, de la façon dont sont amenés les nombres décimaux et les fractions ou encore le lien fait entre les nombres décimaux et le système métrique. En détaillant ces différences, j'ai pu mettre en avant certains avantages et inconvénients pour la compréhension et l'assimilation de ces nombres.

Concernant la notion de partage équitable, j'ai pu constater que peu de manuels proposent une activité réellement basée sur cette notion même. On trouve souvent un travail sur des partages (en 2, 3, 4...) mais pas vraiment la notion « d'équitable ». Certains enfants ne comprendront pas alors que les partages doivent être réalisés de sorte que chaque part soit égale et de ce fait ne pourront pas assimiler correctement la notion de fraction. Dans « Le nouveau Math élem » de 2001 (IO de 1995), un travail est mené sur le partage équitable par le biais de surfaces divisées en 4 parties égales ou non. On peut remarquer que dans cet exercice, on utilise différentes formes de surface à partager (carré, triangle, rectangle, cerf-volant) ce qui rend la tâche plus difficile mais également plus intéressante car, nous le verrons par la suite, il est important de varier les types de représentation des fractions et partages. Ce travail de partage équitable peut être également amené dans des situations contextualisées, comme c'est le cas dans « Euro Maths » dans lequel il est travaillé à l'aide de tablettes de chocolat ou encore dans « Atout Maths » dans lequel on réalise des partages de durées. Ces situations vécues au quotidien par les enfants peuvent amener davantage de sens à l'activité de partage, ce qui me paraît tout à fait intéressant. Enfin, j'ai pu constater que souvent les manuels proposent un partage d'un segment à l'aide de « la machine à partager » appelée également « guide-âne ». Cet outil permet en effet de partager un segment donné en autant de parts égales que l'on veut. Cependant, je pense que cet outil, quoique très pratique, ne met pas réellement en avant l'égalité des segments construits. Il peut, en outre, être complémentaire d'un travail fait sur des surfaces.

Après avoir proposé une activité (plus ou moins intéressante) sur la notion de partage, les manuels amènent les fractions simples. Pour cela, j'ai pu relever plusieurs différences notables, notamment dans la façon même de les amener. En effet, dans la plupart des manuels, ces fractions (demi, quart, tiers, sixième...) sont présentées à l'aide d'une situation contextualisée que les enfants ont pu vivre au quotidien. Il s'agit surtout du

travail sur les heures (une demi-heure, un quart d'heure...) ou des capacités (un demi-litre d'eau...), complété par la suite par un partage de surfaces, de segments, de l'utilisation d'une graduation... Cette situation d'entrée, quoique très logique et proche des élèves, n'est pas suffisante ! En effet, les fractions simples ne sont pas vécues comme de nouveaux nombres. Ce type de situation ne met pas en avant l'insuffisance des nombres entiers, ce qui peut-être déjà une première difficulté pour la compréhension des nombres décimaux. Par ailleurs, ce type de situation permet uniquement de travailler les fractions inférieures à un, et implique donc un travail sur le fractionnement de l'unité. Séparer les fractions inférieures à un et celles supérieures à un n'est pas à conseiller. Il faut savoir que les enfants ont beaucoup de facilité à comprendre les fractions inférieures à un puisqu'il est plus simple de les représenter par un partage de surface, de bande. En revanche prendre 5 tiers de tarte est bien plus compliqué à représenter pour les élèves de cycle 3. De ce fait, même si les fractions inférieures à un sont amenées en premier, il ne faut pas tarder à les compléter par celles supérieures à un, même si elles sont toujours expliquées par un fractionnement de l'unité (5 tiers sera vu comme 5 fois un tiers). Cette approche, par un fractionnement de l'unité, est en général celle préconisée par les instructions officielles, les fractions division étant abordées généralement au collège. Concernant la nécessité d'amener les fractions simples comme de nouveaux nombres, « CAP MATHS » propose une situation très intéressante, par le biais d'une activité d'émission-réception. Un groupe d'enfants doit mesurer une bande de papier à l'aide d'une bande unité, afin d'émettre un message pour que le groupe récepteur puisse construire une bande identique à celle mesurée. Bien-entendu, les mesures des bandes ne sont pas des multiples de la longueur de la bande unité. Ainsi, les enfants comprennent que les nombres entiers ne sont pas suffisants et doivent se résoudre à utiliser les fractions. Cette activité, montrant l'intérêt des fractions, permet également de travailler à la fois les fractions inférieures à un mais également supérieures à un. En effet, par la suite, le message envoyé, par exemple $1 + \frac{1}{3}$, pourra être reformulé en utilisant uniquement des tiers de bande, à savoir $\frac{4}{3}$. Ceci se fera bien-entendu dans un second temps avec l'aide de l'enseignante. Par ailleurs, cette manipulation permettra de mettre en évidence une décomposition de fractions supérieures à un en la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à un. En bref, cette situation permet d'aborder avec les élèves de nombreuses manipulations, utiles à l'assimilation des fractions et donc par la suite à celle des nombres décimaux.

Lorsque les enfants ont compris l'insuffisance des nombres entiers et donc l'intérêt des fractions simples, il est important de passer par une phase de structuration afin que les

enfants assimilent et manipulent ces nouveaux nombres. Pour cela, il est primordial de varier le type de supports utilisés afin que les enfants s'approprient la notion de fraction dans différents contextes et ne s'attachent pas à une seule représentation. Par ailleurs, cette variété de supports va permettre à chaque élève de trouver la représentation et l'outil qui lui parle le plus pour comprendre et assimiler ces nouveaux nombres. Dans les manuels, on trouve surtout l'utilisation de surfaces (tartes, carrés, horloge), de bande unité (ou unité encore la résolution de petits problèmes utilisant les fractions dans des situations contextualisées. Lorsque les enfants savent associer une représentation d'un partage à une fraction, la progression consiste à mettre en évidence les fractions équivalentes ($1/2 = 2/4 = 4/8$; $1/3 = 2/6...$). Ceci peut se faire notamment à l'aide de pliages successifs d'une surface carrée ou grâce à une graduation de plus en plus fine d'un segment (graduation en demi, puis en quart, puis en huitième...). Ces fractions équivalentes permettent d'une part une manipulation des fractions, une première approche de la notion d'intercalation mais également de comparer plusieurs fractions. Ces manipulations se prolongent, dans la plupart des manuels, par un placement, un rangement sur une droite graduée, un encadrement d'une fraction par deux entiers consécutifs, par la comparaison de fractions, et par la décomposition d'une fraction simple (supérieure à 1) en la somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1. Il faut noter que tout ce travail n'est pas répertorié dans les Instructions officielles mais qu'il est nécessaire pour la bonne compréhension de ces nouveaux nombres. Cependant, on peut noter que la décomposition d'une fraction est un objectif de CM2 alors que c'est une étape essentielle pour l'introduction des nombres décimaux à partir des fractions décimales. Par ailleurs, dans la progression de R. Brissiaud (2010), j'ai pu constater que la somme de fractions était présente au CM1, alors qu'elle est un objectif du CM2. Ces remarques m'ont permis de mettre en évidence l'importance d'apporter un aspect critique à la fois sur certains manuels mais également sur les Instructions officielles, pour faciliter un apprentissage rigoureux.

Dans la plupart des cas, les fractions décimales sont amenées après un travail rigoureux sur les fractions simples. Cependant dans plusieurs manuels, tels que celui de R. Brissiaud (2010) ou encore « Le nouveau MATH élem », les fractions simples et décimales sont vues quasiment en même temps. Si les fractions simples sont amenées par une activité de partage (et non dans une situation de la vie quotidienne), partager en deux parts égales ou en dix parts égales posent rarement des problèmes aux enfants. Cependant, il faut tout de même passer par un travail sur les fractions décimales car c'est la base des nombres

décimaux. J'ai pu constater, en analysant les différents manuels, que généralement les dixièmes et les centièmes étaient vus séparément. Ce n'est pas le cas de tous les manuels mais la plupart amène et travaille en premier lieu les dixièmes, par le biais de partage de segments (ou construction de bandes à partir d'une bande unité), de surfaces. Cela peut se justifier par le fait que les enfants ont plus de facilité à se représenter un tel partage qu'un partage en centièmes. Il sera donc plus simple de manipuler ces fractions et de les travailler. Cela dit, il ne faut pas attendre trop longtemps pour introduire les centièmes ni travailler systématiquement en séparant dixièmes et centièmes. En effet, les unités, les dixièmes et les centièmes doivent être vus en lien les uns avec les autres. Des équivalences entre unité et dixième, dixième et centième ou encore unité et centième doivent être découvertes et travaillées par les enfants. Cet oubli dans la progression de l'apprentissage des nombres décimaux peut-être la cause de nombreuses erreurs sur ces nombres et notamment lors de comparaison et de rangement de plusieurs nombres décimaux. En effet, ne comprenant pas le lien qui existe entre unité, dixièmes et centièmes, les enfants ne seront pas capables d'expliquer par exemple le nombre de dixièmes d'un nombre décimal en nombre de centièmes, ce qui les empêchera de comparer par exemple 2,6 et 2,58 (ils ne sauront pas dire que 6 dixièmes équivalent à 60 centièmes). Par ailleurs, ces liens seront inévitables pour savoir intercaler un nombre décimal entre deux autres. Si les enfants ne savent pas qu'un dixième peut être divisé en 10 centièmes, ils ne comprendront pas qu'on puisse intercaler 2,58 entre 2,5 et 2,6. Généralement, quand les liens existant entre unité, dixième et centième sont travaillés, cela est fait par le biais de la ligne graduée. Avec un effet de « loupe », on peut facilement mettre en évidence qu'un dixième peut être encore partagé en 10 centièmes. Ce travail peut également être fait en passant par le découpage d'une surface, généralement carrée, en 10 petits carrés puis en 100 carrés plus petits. Dans quelques manuels, j'ai pu constater que les millièmes étaient aperçus lors de ce travail de partages successifs. Les millièmes sont en principe abordés au CM2 mais je pense qu'il peut être bénéfique de montrer aux enfants que l'on peut continuer à partager un centième en 10 parties plus petites encore, sans même apporter leur nom. Ceci permettra déjà d'amener progressivement, dans la tête de certains élèves, la notion d'infinité entre deux nombres. Dans CAP MATHS, les fractions décimales sont amenées par la même activité d'émission-réception, en utilisant un découpage de bandes en 10 ou 100 parts égales. Le lien entre dixièmes et centièmes peut être donc rapidement fait avec ce type de situation. Dans d'autres manuels, on trouve également des activités portant directement sur les

équivalences entre unité, dixième et centième par le biais de questions telles que « Combien y-a-t-il de centièmes dans 2,6 ? ».

Lorsque les dixièmes et les centièmes sont introduits et compris par les enfants, un travail de manipulation, comme pour les fractions simples est mis en place. Comme précédemment il s'agit de travailler sur les équivalences de fractions, la comparaison, le rangement, le placement sur droite graduée, l'encadrement d'une fraction décimale entre deux entiers et surtout la décomposition d'une fraction décimale en la somme d'un entier, de dixièmes et de centièmes. Ce travail de manipulation se fait surtout, dans les manuels, par le biais de la droite graduée. J'ai pu observer à plusieurs reprises que les manuels n'hésitaient pas à mélanger les différentes écritures (fractions décimales ou de somme d'un entier et de fraction) pour comparer et manipuler les fractions décimales. Ceci est tout à fait intéressant car ça permet de relier plus facilement différentes écritures et dans un sens prépare le passage d'une écriture fractionnaire à décimale. Par ailleurs, il faut noter que le travail de décomposition est primordial pour l'introduction des nombres décimaux. Il est d'ailleurs toujours présent au fil des années. J'ai pu remarquer, avec grand étonnement, que dans « La tribu des maths », manuel récent, ce travail de décomposition est peu développé avant l'introduction des nombres décimaux et repris ensuite (après l'introduction des nombres décimaux).

Ainsi, après ce travail imposant sur les fractions simples et décimales, il est temps d'introduire les nombres décimaux. En principe si le travail préalable sur les fractions a été réalisé avec rigueur et en favorisant le sens, l'introduction des nombres décimaux ne doit pas être déstabilisante pour les élèves. En effet, généralement, les nombres décimaux sont vus comme une simplification d'écriture des fractions décimales. C'est là que la décomposition d'une fraction décimale en entiers, dixièmes et centièmes prend tout son sens. En effet, la virgule est souvent utilisée pour remplacer le « + » séparant la partie entière des fractions décimales dans la décomposition ($2 + 65/100 = 2,65$). Cette simplification d'écriture peut être découverte, comme c'est le cas dans le manuel de R.Brissiaud (2010), par l'utilisation de la calculatrice. En effet, en comparant la décomposition d'une fraction décimale et le résultat de la somme de cette décomposition sur la calculatrice, les enfants peuvent rapidement associer les dixièmes, centièmes sous forme fractionnaire et ceux sous forme décimale. Cette utilisation de la calculatrice est très judicieuse. Elle permet aux enfants de découvrir par eux-mêmes les nombres décimaux, ce qui facilitera très certainement leur compréhension et leur assimilation. Cette façon

d'introduire les nombres décimaux, c'est-à-dire par une simplification d'écriture, est très fréquente dans les manuels mais non unanime. En effet, dans « La tribu des maths », l'introduction de ces nombres se fait par le biais d'une situation contextualisée, à savoir l'utilisation d'expressions connues des enfants sur les secondes (3 secondes et 35 centièmes). Cette situation d'introduction ne permet pas vraiment de mettre en lien fractions décimales et nombres décimaux alors qu'ils s'en rapprochent conceptuellement. Cette situation contextualisée pourrait-être utilisée par la suite, dans une phase de manipulation des nombres décimaux, afin de donner un objectif « pratique » à l'apprentissage de ces nombres. Les enfants s'investissent en effet davantage dans un apprentissage s'ils trouvent un but concret dans leur vie quotidienne.

Comme pour les fractions décimales, certains manuels proposent une introduction des nombres décimaux en séparant dixièmes et centièmes. Ce choix peut avoir les mêmes conséquences que lorsqu'on sépare les dixièmes et les centièmes pour introduire les fractions décimales. Le travail mené sur les liens existant entre unités, dixièmes et centièmes doit être renouvelé avec les écritures décimales. En effet, cette étape est essentielle pour éviter que les nombres décimaux soient vus comme deux nombres entiers « collés ». Comme précédemment, les manuels utilisent la droite graduée, avec un effet loupe, pour renforcer ces liens vus avec les fractions décimales. Mais il faut noter que ce travail est rarement proposé par les manuels qui estiment que c'est un acquis pour les élèves.

Après que les nombres décimaux sont introduits, les enfants doivent apprendre et s'entraîner à passer d'une écriture fractionnaire à décimale dans les deux sens de l'équivalence puis comprendre la valeur de chaque chiffre d'un nombre décimal en fonction de sa position. Pour cela, certains manuels amènent directement le tableau de numération mais je pense qu'il est dans l'intérêt des enfants de mener ce travail par l'utilisation du sens, c'est-à-dire en repassant par les fractions décimales et notamment la décomposition en entiers, dixièmes, centièmes. Le tableau de numération, complété par les dixièmes et les centièmes, pourra être amené par la suite afin de donner des repères aux apprenants. De plus, il faut noter que ces manipulations des nombres décimaux vont permettre dans un sens de renforcer encore les liens existant entre unités, dixièmes et centièmes. Elles ne sont malheureusement pas toujours présentes dans les manuels. On le trouve légèrement dans « La tribu des maths » et « le nouveau math élém » sous forme de Vrai ou Faux (Le nombre de dixièmes dans 125,56 est 1255 : Vrai ou faux ?) ou de tableau de numération à remplir.

Lorsque ces manipulations sont acquises par les élèves, il s'agit alors de commencer le long travail de placement, rangement sur droite graduée, d'encadrement entre deux nombres entiers, de comparaison et d'intercalation. Concernant les activités de placement et de rangement sur droite graduée, j'ai pu constater que certains manuels mélangeaient les écritures fractionnaires et décimales. Ceci me paraît tout à fait judicieux car cela permet de travailler sur le sens. Par ailleurs il faut habituer les élèves à manipuler les différentes écritures pour qu'ils intègrent bien la nature même des nombres décimaux. En ce qui concerne les comparaisons de nombres décimaux, j'ai pu noter que généralement les manuels mettaient en avant des techniques, méthodes pour faciliter le difficile travail de comparaison. Ces techniques sont notamment mises en évidence dans des « encadrés » des « leçons » à retenir. Personnellement, ces techniques sont tout à fait intéressantes pour les élèves lorsque ceux-ci ont déjà réalisé un travail de comparaison basé sur le sens, la compréhension. En effet, avant de décalquer et recalquer des méthodes toutes faites, il est primordial de passer par le sens, de comprendre pourquoi l'on fait telle ou telle manipulation. Cela nécessite notamment de repasser par les fractions décimales ou encore d'utiliser les équivalences construites et travaillées entre unités, dixièmes et centièmes. Ainsi pour comparer 12,36 et 12,4, la technique voudrait que l'on compare les parties entières puis, comme elles sont égales, les dixièmes, alors que le travail sur le sens requiert, par exemple, d'expliciter 12,36 comme 1236 centièmes et 12,4 comme 1240 centièmes ou encore de passer par les fractions décimales, à savoir $12,36 = 12 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100}$ et $12,4 = 12 + \frac{4}{10}$. Par ailleurs, si l'on introduit trop rapidement ces « règles », les élèves vont avoir tendance à reconsidérer les nombres décimaux comme deux nombres entiers mis bout à bout. En effet, toutes ces règles rappellent généralement celles acquises et utilisées sur les nombres entiers.

Pour continuer l'appropriation des nombres décimaux, j'ai pu noter quelques activités portant sur le complément à l'unité supérieur d'un nombre décimal ou encore portant sur l'écart existant entre un nombre décimal et un entier supérieur ou inférieur. Ces activités peuvent être mises en lien avec une droite graduée, qui sera alors une aide efficace.

Enfin, concernant l'intercalation d'un nombre décimal entre deux autres, j'ai été très surprise en analysant les manuels. Tout d'abord très peu de manuels proposent une activité portant sur cette compétence, mais par ailleurs, lorsqu'une activité est présentée, elle est souvent inutile. En effet, demander aux élèves d'intercaler un nombre décimal entre 1,2 et 1,4 doit être fait mais est tout à fait insuffisant ! Avec ce type d'activité, les élèves n'ont pas forcément besoin d'avoir compris ce que représentaient les nombres décimaux et

encore moins les équivalences existantes entre unités, dixièmes et centièmes. En somme ils n'ont pas besoin d'avoir compris qu'entre deux nombres décimaux, on peut toujours en intercaler un autre. Un manuel présentant uniquement ce type d'intercalation va renforcer dans l'esprit des enfants le fait qu'il n'existe pas de nombre compris entre 1,2 et 1,3. On comprend mieux alors pourquoi la notion d'intercalation « infinie » pose autant de problèmes aux élèves de cycle 3. A titre d'exemple, dans le manuel de R.Brissiaud (2010), dans « Atout math », et dans la « Tribu des maths », je n'ai pas observé de réel travail sur cette notion d'intercalation.

D'autre part, en le découvrant uniquement dans CAP MATHS, le manuel de R.Brissiaud (2010) et dans « le nouveau MATH élem », je me suis penchée plus sérieusement sur les activités portant sur la notion de zéros utiles ou inutiles. Au début de mes analyses, je n'avais pas pensé que ce type d'activité pouvait être bénéfique pour les élèves. Or en y songeant, j'ai réalisé que la notion de zéros utiles ou inutiles était souvent une grande source d'erreurs chez les élèves. En effet, les élèves ne voient pas forcément la différence entre 1,05 et 1,50. Pour eux, dans ces deux nombres, on utilise les chiffres 1 et 5 uniquement. En effet, généralement le zéro ne représente rien pour ces élèves... De plus, ne comprenant pas la nature même des nombres décimaux, ils appliquent souvent les règles vues pour les entiers aux nombres décimaux. Ainsi, un zéro placé devant est inutile alors qu'un zéro placé derrière est très important ! C'est pourquoi, pour ma part, une activité sur cette notion doit être menée par les enseignants de CM1. Dans les manuels cités plus haut, on trouve une seule activité mettant en évidence la différence entre les zéros utiles et inutiles. Généralement, les enfants doivent regrouper plusieurs écritures décimales (possédant des zéros inutiles ou non) désignant un même nombre puis les ranger dans l'ordre croissant ou décroissant. Ainsi, j'ai pu constater que cette notion était très peu travaillée dans les manuels, et donc qu'il fallait, pour les enseignants de CM, remédier à ce manque.

En somme, concernant les nombres décimaux et les fractions (simples et décimales), j'ai pu constater, en analysant plusieurs manuels, qu'il fallait absolument apporter un esprit critique ,d'une part, sur chaque exercice donné, en se demandant ce qu'il peut apporter à l'élève, mais également sur les petits encadrés de « leçon ». En effet, très souvent, il s'agit de technique, de méthode à suivre pour réaliser un ou deux exercices de la page. Ces méthodes ne permettent pas à l'élève de comprendre ce que sont les nombres décimaux et ont, quelques fois, tendance à les conforter dans leur idée fautive, qu'ils se sont faits, de ces

nombres. Il faut absolument donner du sens à ces nombres, en passant des écritures fractionnaires aux écritures décimales et inversement. Mélanger et faire manipuler couramment les différentes écritures par les élèves ne pourra être que bénéfique pour eux. Même si cela prend du temps, il ne faut pas négliger le temps pendant lequel les enfants s'approprient ces nouveaux nombres. Il ne faut pas les précipiter dans des méthodes toutes faites (cf. en annexe), sans aucun sens pour eux!

Par ailleurs, j'ai pu remarquer dans les différents manuels analysés que les nombres décimaux étaient travaillés en lien avec les unités de mesure, conventionnelles ou non. Je pense qu'il est tout à fait intéressant de lier ces deux notions car c'est la première situation dans laquelle les enfants se serviront de ces nouveaux nombres. C'est d'ailleurs pour cela qu'auparavant les nombres décimaux étaient introduits directement avec le système métrique, sans travail préalable sur la fraction. Mais, depuis les années 1970 et les mathématiques modernes, cette progression fut mise à l'écart, pour le grand bien de tous. De nos jours, tous les manuels travaillent les nombres décimaux à partir des fractions décimales. Cela dit, il reste primordial de contextualiser cet apprentissage afin que les enfants voient un objectif, un but à cette nouvelle notion. Cette contextualisation doit, bien-entendu, être réalisée après l'introduction des nombres décimaux, ce que j'ai pu noter dans chaque manuels. Cependant, j'ai pu voir différentes façons de lier nombres décimaux et système de mesure. R.Brissiaud (2010), dans toute sa progression, utilise une unité de mesure qu'il a lui-même mise en œuvre. Il fractionne, en effet, un stylo dont il se sert pour mesurer des segments ou autres. Cette méthode est tout à fait judicieuse ! En effet, les élèves, ayant l'habitude d'utiliser le système métrique depuis le CE1, font rarement le rapprochement entre les nombres décimaux et ce qu'ils connaissent déjà. Ainsi le centimètre n'est pas vu comme le centième du mètre. De ce fait, utiliser des mesures non conventionnelles peut-être une solution à ce phénomène. D'autre part, R.Brissiaud (2010) associe ensuite les nombres décimaux avec une unité conventionnelle moins fréquente, à savoir les décimètres carrés. Ainsi les enfants font plus rapidement le lien avec les nombres décimaux puisqu'ils peu ou pas cette unité. De plus, cette unité, utilisée avec des surfaces, fait un très bon rapprochement entre fractions, nombres décimaux et unités de mesures. D'autre part, lors de l'analyse des manuels, j'ai pu comprendre que l'enjeu de cette contextualisation est la compréhension même des unités de mesures ou autres. Ainsi, lorsque certains manuels amènent directement le tableau des unités, les enfants ne peuvent pas correctement associer nombres décimaux et système de mesure. Il s'agit encore, ici, de

techniques utilisées pour les conversions. Les enfants ont besoin de comprendre pourquoi ils bougent une virgule de place... Pour cela, j'ai pu constater dans plusieurs manuels que les unités de mesure étaient dans un premier temps utilisées en lien avec les fractions décimales afin de redonner du sens aux conversions. De ce fait, un centimètre vaut un centième d'un mètre. Ce travail n'empêche en aucun cas l'introduction du tableau d'unité par la suite mais il est nécessaire pour la bonne compréhension des conversions de travailler sur le sens, et donc de repasser pas les fractions décimales.

Avant de parler de la progression de R.Brissiaud (2010) et de ses points particuliers, j'ai voulu faire un point sur l'importance et l'intérêt que peut amener l'utilisation de la graduation. En effet, comme j'ai pu le signaler plus haut, la graduation (d'un segment, d'un récipient, d'un sablier...) est utilisée, plus ou moins, par les manuels, et ceci conformément aux programmes qui imposent le placement des nombres décimaux sur une droite graduée. Cela dit, la droite graduée n'est pas utile que pour cela. Comme j'ai pu le constater elle est également amenée pour travailler les fractions simples ou décimales, pour mettre en évidence les fractions équivalentes, pour comparer des fractions, pour encadrer une fraction par deux entiers ou encore pour décomposer une fraction en la somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à un. D'autre part, la ligne graduée permet de mettre en évidence le lien qui existe entre unité, dixième et centième. C'est un véritable outil d'apprentissage pour les élèves. R.Brissiaud (2010), quant à lui, ne met pas suffisamment en avant l'utilisation de cet outil, ce qui dans un sens est contradictoire aux programmes. Cependant, il ne faut pas se baser uniquement sur la droite graduée car, même si c'est un outil essentiel, elle est très souvent décontextualisée et donc manque de sens et de but pour les élèves. C'est pourquoi, comme dit plus haut, il est plus qu'important de varier les supports didactiques fréquemment.

Enfin, il me semble important de consacrer un peu de temps à la progression spécifique de R.Brissiaud (2010). Comme expliqué plus haut, cet auteur porte énormément d'importance aux types de fractions amenés chez les élèves de CM1. Selon lui il est désastreux qu'un élève de CM2 parte au collège en n'ayant travaillé que sur des fractionnements de l'unité. Ainsi, il s'attache durant toute sa progression à mener un travail spécifique sur le lien existant entre le fractionnement de l'unité et la division-fraction. Pour lui ce lien n'est pas du tout évident pour les enfants et doit donc être vu rapidement, c'est-à-dire dès le cycle 3. Cela dit, il faudra tout de même, pour les enseignants suivant cette progression, faire

attention à respecter les programmes de 2008, notamment en ce qu'il concerne ce lien mais également l'utilisation de la ligne graduée. Par ailleurs, il faut noter que cette progression, quoique très intéressante, laisse peu de place pour les activités de remédiation et les retours en arrière pour les élèves en difficultés. En effet, tout semble s'enchaîner, et passer une étape semble impossible. La différenciation est peu abordée ! Ainsi, suivre cette progression est très intéressant avec des élèves de cycle 3, car cette dernière présente une rigueur mathématique unique, mais cela nécessite surtout de prendre en compte les élèves et leurs difficultés.

Enfin, pour terminer cette analyse de manuels, il m'a semblé primordial d'aborder certains points concernant la partie calculs sur les nombres décimaux. En effet, j'ai pu noter qu'au CM1, conformément aux programmes, les manuels amènent l'addition de deux nombres décimaux puis la multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier puis la soustraction de deux nombres décimaux. Parallèlement, la division décimale est également abordée. En CM2, conformément aux programmes de 2008, la partie calculs sur ces nombres se compose de la multiplication de deux nombres décimaux et la division d'un nombre décimal par un nombre entier. En analysant les manuels de CM1, j'ai été surprise par la progression proposée. En effet, sur les nombres entiers, la soustraction est vue bien avant la multiplication alors que pour les nombres décimaux, très souvent dans les manuels c'est l'inverse. Cette constatation m'a amenée à creuser davantage cette partie. En y réfléchissant, j'ai compris que, pour les enfants, il était plus simple de comprendre la multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier que la soustraction de deux nombres décimaux. En effet, pour eux, la seule différence entre une multiplication de deux entiers et une multiplication d'un nombre décimal par un entier est le placement de la virgule à la fin. À part cela tout reste identique. En revanche, concernant la soustraction de deux nombres décimaux, il faut, tout d'abord placer correctement les deux nombres l'un en dessous de l'autre et par ailleurs avoir réellement compris le système de la retenue et ce que chaque chiffre d'un nombre décimal représente. Ainsi, j'ai pu comprendre une telle progression. Par ailleurs, en observant les manuels, j'ai pu constater que, généralement, les opérations étaient vues en utilisant une technique, méthode comme lors de la comparaison de deux nombres entiers. En effet, peu de travail sur le sens était mené avant ! Or, je sais que l'apport d'une nouvelle opération doit se faire par les étapes suivantes : travail sur le sens puis apport de la technique. À l'exception de « CAP Maths », « La tribu des maths » et le manuel de R.Brissiaud (2010) qui utilisent une décomposition en unités, dixièmes et

centièmes lors de l'addition et de la soustraction, les autres manuels se contentent d'une technique des opérations posées. Vues ainsi, les opérations ne peuvent pas renforcer la notion de nombres décimaux alors que, travaillées par le sens, elles peuvent combler certaines lacunes des élèves et être un complément à l'apprentissage des nombres décimaux.

D'autre part, il ne faut pas mettre de côté dans cet apprentissage la partie calcul mental. En effet, j'ai pu constater dans les manuels que, au niveau du calcul mental avec des nombres décimaux, on trouvait souvent le jeu du furet de 0,1 en 0,1 (compter de 0,1 en 0,1) mais aussi la multiplication par 10 et 100 de nombres décimaux. Cependant, et comme précédemment, cette multiplication est rarement vue par le sens. On apprend souvent aux élèves à déplacer une virgule... Par exemple pour $1,23 * 10$ il serait utile de passer par :

-1 unité * 10 vaut 10 unités

-23 centièmes * 10 vaut 230 centièmes c'est à dire 2 unités et 3 dixièmes

Ainsi en ajoutant 10 unités à 2 unités et 3 dixièmes on obtiendrait le compte juste à savoir 12 unités et 3 dixièmes.

Cette façon d'amener les opérations est essentielle. Tout doit passer par le sens avant d'amener la technique.

Ainsi, grâce à cette analyse détaillée de manuels scolaires, j'ai pu comprendre certaines origines d'erreurs. Cela dit, je pense que les enseignants ne suivent pas entièrement les manuels et apportent d'eux même certaines modifications. Mais il n'est pas toujours simple de voir les modifications à faire...

- **Analyse de pratiques enseignantes**

Après avoir analysé différents manuels, j'ai donc pensé qu'il serait astucieux de voir comment les enseignants actuels se servent de ces manuels et quelles sont leur façon d'introduire et d'enseigner les nombres décimaux. Pour cela, n'ayant pas pu suivre différentes classes lors d'une séance d'introduction des fractions ou des nombres décimaux, j'ai mis en place un questionnaire (cf. en annexe) anonyme à destination des enseignants de CM, et en particulier ceux de CM1. J'ai pu récupérer six questionnaires de différentes écoles et milieux. A partir de ces quelques questionnaires (insuffisants pour réaliser un travail de statistique), j'ai pu tout de même observer certaines constatations récurrentes.

En premier lieu, les nombres décimaux sont abordés en fin de CM1 (période 4 ou 5), ce qui semble logique vu que les fractions doivent être vues avant l'introduction des nombres décimaux. Par ailleurs cette notion sera revue en début de CM2 afin de les manipuler dans des calculs et des problèmes. En revanche, les avis divergent en ce qui concerne la reprise des fractions décimales ou non au CM2. En somme, certains enseignants de CM2 reprennent la formation et le sens des nombres décimaux avant de les manipuler alors que d'autres considèrent cela « acquis » et poursuivent leur étude dans les calculs et les problèmes. Je pense qu'il sera utile dans chaque classe de CM2 d'évaluer les élèves sur cette notion afin de voir ce qu'ils ont assimilé.

Ensuite, dans l'ensemble, les manuels servent de banque d'exercices aux enseignants de CM1 qui préfèrent adapter leur enseignement aux besoins des élèves. Le seul manuel suivi réellement est Cap Maths.

Concernant l'introduction des nombres décimaux, ils sont toujours mis en lien avec les fractions décimales travaillées au préalable (fractions simples et décimales sont vues généralement durant la période précédant celle introduisant les nombres décimaux). Le plus souvent, les nombres décimaux sont amenés comme une simplification d'écriture des fractions décimales. Quelques enseignants utilisent la calculatrice également.

En ce qui concerne l'enseignement des fractions, il faut noter que celles-ci sont vues dans des situations variées et sont représentées de différentes manières (bande unité, tarte (aires), graduation (inconnue), ligne graduée et également à l'aide de fractions de la vie courante). Ceci est un point positif de l'enseignement des fractions. Il faut, comme dit plus haut, multiplier les façons de représenter les fractions afin que chaque élève trouve une représentation claire pour lui. Cela dit, je n'ai pas su si la situation d'introduction des fractions mettait réellement en avant l'insuffisance des nombres entiers pour ainsi apparaître comme de nouveaux nombres. D'autre part, les avis divergent en ce qui concerne le type de fractions introduit. Certains enseignent le fractionnement de l'unité puis le mettent en lien avec la fraction division-partition de la pluralité ($\frac{3}{4}$ est d'abord vue comme 3 fois un quart puis comme 3 divisé par 4) alors que d'autres n'introduisent que le fractionnement de l'unité. En somme, certains travaillent sur l'équivalence existant entre le fractionnement de l'unité et la division-partition de la pluralité alors que d'autres laissent cette lourde tâche aux enseignants du secondaire. Il faut souligner que cette équivalence n'est pas un objectif des programmes. Dans les documents d'accompagnement de 2002, il est d'ailleurs indiqué que cette équivalence sera réalisée par la suite au collège. Ceci étant, nous savons que R.Brissiaud (1999) préconise fortement l'enseignement de l'équivalence,

et même selon lui, en commençant par la division-partition de la pluralité. De ce fait peu d'enseignant semble prendre en compte cette progression, cette façon d'introduire les fractions.

Concernant le travail sur l'intercalation et sur les zéros utiles ou non, il fait rarement l'objet d'une activité précise. Il n'est pas mis à l'écart pour autant et est aperçu dans des exercices types. Pour les zéros utiles ou non, j'ai pu constater que de nouveau des règles étaient utilisées pour ajouter ou supprimer des zéros. Ceci n'assure en rien la bonne compréhension des élèves vis-à-vis des zéros utiles ou non. Pour travailler l'intercalation, de nombreux enseignants ont noté que les enfants auraient des difficultés à comprendre qu'il existe une infinité de nombres décimaux entre deux autres. Je pense qu'avec un effet de loupe, et même sans forcément donner le nom de tous les chiffres de la partie décimale, il serait intéressant de montrer aux élèves que l'on peut toujours partager une unité en dix plus petites. Ainsi on pourrait peut-être leur ôter l'idée qu'il n'existe pas de nombres entre 4,5 et 4,6.

Enfin, j'ai pu constater avec grand étonnement que plus de la majorité des enseignants ne pensent pas que la manipulation des nombres décimaux dans des calculs (addition, soustraction...) permet de renforcer l'assimilation de la nature des nombres décimaux. De ce fait, les calculs doivent être certainement abordés d'une façon technique et non basés sur le sens. Ceci peut alors expliquer certaines erreurs analysées plus haut comme le mauvais placement des deux nombres à additionner.

Ainsi, il ne s'agit pas ici de dénigrer certaines pratiques enseignantes, mais plutôt de comprendre ce qui peut entraîner telles ou telles erreurs, pour que dans un avenir proche je puisse mettre en place un enseignement n'induisant pas en erreur certains élèves.

- **Situations de remédiation possibles**

Ayant analysé les programmes, des erreurs, des manuels et des pratiques enseignantes, il me semble important de proposer maintenant quelques activités permettant de remédier à certaines difficultés des élèves. Les activités expliquées par la suite peuvent être proposées à des élèves en grande difficulté, lors de l'aide personnalisée par exemple.

En effet, ces activités se basent sur le jeu. Elles permettent de manipuler et d'assimiler la notion de nombres décimaux à travers des situations ludiques. Certaines d'entre elles donnent même un certains sens à l'utilisation des nombres décimaux. Malheureusement je n'ai pas pu tester ces activités en classe mais je pense qu'elles permettraient à certains élèves, perdus et « dégoûtés » des fractions et des nombres décimaux, de reprendre goût à cette notion.

La première activité présentée permet aux élèves de lier écritures fractionnaires à une représentation d'un partage. Ici les fractions utilisées sont de type fractionnement de l'unité. Cette activité s'intitule « Dominos des fractions ». Les règles sont les mêmes que celles du domino classique mais les dominos se composent d'une partie avec une écriture fractionnaire et l'autre partie d'une représentation d'une fraction (cf. en annexe). Bien-entendu, les représentations varient : tarte, bande...

Une deuxième activité possible pour travailler le même objectif, est le « disque des fractions » (cf. en annexe). Chaque élève possède les pièces de deux disques découpés en plusieurs morceaux (demis, tiers, quarts, sixièmes, huitièmes, neuvièmes) ainsi qu'un dé sur lequel figurent les écritures fractionnaires des morceaux des disques. Chacun leur tour, les élèves lancent le dé, lisent la fraction indiquée par le dé, trouvent la pièce correspondante et tentent de reconstituer les disques. Si jamais toutes les pièces ont été tirées mais que les disques ne sont pas reconstitués, les élèves pourront échanger des pièces entre les deux disques. Ce jeu pourra être aménagé par l'ajout de plusieurs pièces (exprimant des partages plus petits : douzièmes...). Tour à tour chaque élève lancera le dé et devra composer la fraction indiquée sur le dé à l'aide de plusieurs pièces. Par exemple pour composer la fraction $\frac{1}{2}$ les élèves pourront prendre 2 quarts ou encore 4 huitièmes. Ainsi, cette activité permet également de manipuler les fractions et d'intégrer la notion de fractions équivalentes.

Une troisième activité possible permettant cette fois-ci de manipuler les fractions décimales et plus précisément les liens existant entre dixièmes et centièmes, dixièmes et unités est une activité basée sur le jeu du « Monopoly » (cf. en annexe). Comme le Monopoly traditionnel, le but de l'activité est de posséder le plus de biens possibles. Pour cela, les élèves doivent acquérir des centaines, des dizaines, des unités, des centièmes et des dixièmes d'appartements ou d'étages afin de reconstituer des immeubles et des quartiers d'immeubles. Un plateau de jeu permet de gagner des morceaux de biens et réaliser ensuite à la banque certains échanges (10 centièmes contre un dixième). Ainsi les

élèves vont assimiler plus rapidement la notion de partage d'une unité en dixième et d'un dixième en centième.

Concernant le passage d'une écriture fractionnaire à un nombre décimal, on peut proposer l'activité de la « fabrique à décimaux » (cf. annexe). Cette activité va permettre aux élèves d'associer à un nombre décimal choisi sa décomposition en écriture fractionnaire ou à l'inverse d'associer à une décomposition en écriture fractionnaire donnée un nombre décimal. Cette activité peut se faire par binôme l'un donnant un nombre décimal ou une décomposition en écriture fractionnaire et l'autre devant compléter le tableau.

En ce qui concerne la valeur de chaque chiffre d'un nombre décimal, l'activité du « loto des nombres décimaux » peut permettre aux élèves de renforcer cette notion par le biais d'un jeu ludique. Comme le jeu du loto traditionnel, un élève tire une carte sur laquelle est indiquée une décomposition d'un nombre décimal en dizaine, unité, dixième et centième. Chaque élève doit alors observer sa carte de jeu pour vérifier s'il possède ce nombre (écrit sous forme décimale). Le jeu pourra même être amélioré de sorte que les cartes tirées indiquent la décomposition du nombre décimal sous forme fractionnaire.

Ensuite afin de remédier aux difficultés de comparaison, on peut proposer aux élèves le jeu de la « bataille » (cf. en annexe). Le but du jeu est le même que celui de la bataille classique, à savoir obtenir toutes les cartes du jeu. Pour ce jeu, les cartes utilisées présentent soit un nombre décimal, soit la décomposition d'un nombre décimal en unités, dixièmes et centièmes. Ainsi les élèves devront comparer les deux nombres décimaux des deux cartes en passant par le nombre d'unités puis celui de dixièmes puis celui de centièmes. L'intérêt de cette activité est qu'elle travaille sur le sens, sans donner de « règles » pour comparer deux nombres. C'est une activité qui sera très intéressante pour des élèves en difficultés.

Enfin, pour rendre plus attrayant le placement de nombres décimaux sur une droite graduée, on peut passer par le « loto des décimaux sur une droite graduée ». Chaque élève possède une droite graduée (plastifiée) sur laquelle se trouvent des nombres décimaux et des cases vides situées entre deux nombres décimaux. Un élève tire des cartes et lit à haute voix le nombre décimal noté. Les autres élèves devront alors repérer sur leur droite graduée si le nombre énoncé peut être placé dans une case vide. Le premier élève ayant

rempli correctement toutes les cases vides a gagné. Lors de cette activité il sera très important que les droites graduées soient vérifiées par l'ensemble de la classe. Il faudra expliquer pourquoi tel ou tel nombre peut se placer dans telle ou telle case. Pour cela il faudra repasser par le sens en décomposant chaque nombre décimal en unités, dixièmes et centièmes.

Ainsi, à l'aide de différentes activités basées sur le sens et la nature même des nombres décimaux, il est toujours possible de remédier aux difficultés rencontrées par les élèves lors de l'introduction des nombres décimaux. Bien-entendu toutes les activités proposées ci-dessus devront être réalisées en petit groupe sous l'œil vigilant de l'enseignant qui saura poser les bonnes questions pour vérifier l'assimilation correcte de cette nouvelle notion.

Conclusion

Afin de clore ce mémoire, il me semble primordial de mettre en avant quelques recommandations pour l'introduction des nombres décimaux en classe de CM1. En premier lieu, à la suite des analyses réalisées plus haut, il me paraît important de ne pas minimiser l'étude des fractions simples et décimales afin que celles-ci ne soient pas simplement introduites mais plutôt comprises et assimilées pour rendre compte de la nature même des nombres décimaux. Pour cela, la situation d'introduction des fractions doit mettre en évidence l'insuffisance des nombres entiers de sorte que ces dernières soient vues comme de nouveaux nombres complémentaires aux entiers. Lors de cette introduction, il faudra veiller à ne pas se borner aux fractions inférieures à 1 car ceci pourrait avoir des conséquences importantes sur la suite de l'apprentissage. D'ailleurs je pense, comme le préconise R.Brissiaud (1999), que le lien entre les fractions présentant un fractionnement de l'unité et celles basées sur une partition de la pluralité gagne à être expliqué aux élèves. D'autre part, et comme dis plus haut, l'important durant cette phase de manipulation des fractions est de varier les supports utilisés afin de diversifier les types de représentations d'un partage. Cette notion, de partage équitable, devra d'ailleurs ne pas être oubliée.

Par la suite, les nombres décimaux pourront être amenés par la décomposition des fractions décimales. Ces nombres doivent simplement être vus comme une simplification d'écriture des fractions décimales. Une longue phase de cet enseignement doit être attribuée au lien existant entre les écritures fractionnaires et décimales. Ceci doit notamment se faire par le biais de divers supports, activités ludiques et bien-entendu la droite graduée. Il faut également insister sur la valeur de chaque chiffre d'un nombre décimal en fonction de sa position et jouer sur les échanges possibles entre unités-dixièmes, dixièmes et centièmes. Ainsi pour renforcer ces liens, il ne faudra pas séparer trop longtemps l'introduction des dixièmes avec celle des centièmes.

Quand la nature des nombres décimaux et leur fonctionnement sera acquis, on pourra introduire le tableau de numération et commencer la phase de manipulation des nombres décimaux : comparaison, rangement, classement, intercalation et calculs. La recommandation à donner pour cette phase, est de ne pas se laisser entrainer rapidement par la mise en place de règles à appliquer pour comparer, ranger, additionner... Bien au contraire, même si certaines règles ont tout à fait leur place par la suite, il faut avant tout

donner du sens aux manipulations. Et pour cela il faudra repasser par la décomposition en fractions décimales et par la valeur de chaque chiffre. Les règles pourront être amenées par la suite sans pour autant oublier de demander fréquemment aux élèves d'expliquer leur manipulation.

Pour les erreurs rencontrées lors d'un travail d'intercalation d'un nombre décimal entre deux autres, l'effet de loupe sur une droite graduée pourra être utilisé afin de mettre en avant les partages successifs possibles d'une unité. La notion de « filtre décimal » doit absolument être comprise par les élèves.

Enfin, durant ce travail de manipulation, il ne faudra pas oublier d'intégrer les nombres décimaux dans des situations contextualisées et connues des élèves. Je parle notamment de l'utilisation du système métrique et de tout système de mesure en général. Bien-entendu, il faudra avant tout expliquer les liens existant entre les différentes unités et sous unités en utilisant les fractions décimales (travail sur le sens : 1cm vaut $1/100$ du mètre). Il sera d'ailleurs très utile de mettre en place un système d'unité inconnu des élèves au début afin qu'ils ne se contentent pas de rester sur leurs acquis sans réellement comprendre ce qu'ils font.

En somme, la plus importante recommandation à faire concernant l'introduction des nombres décimaux en classe de CM1 est de privilégier dans un premier temps le travail sur le sens pour amener ensuite la technique et l'automatisation. Il faut donner du sens aux apprentissages. De plus, il ne faut pas hésiter à ajouter de temps à autre un côté ludique aux activités car les nombres décimaux sont rarement vus comme une partie de plaisir chez certains élèves. Leur donner envie de comprendre est bien le plus important.

Ainsi en réalisant ce mémoire, j'ai pu comprendre certaines origines des erreurs des élèves. Ceci, comme dis au début de ce mémoire, pourra m'être tout à fait utile pour la poursuite de mon parcours et surtout pour un enseignement futur. Par ailleurs, il est du devoir des enseignants de s'informer de la recherche actuelle et ce travail de recherche m'a amené à en comprendre l'intérêt. Enseigner à notre époque n'est plus l'unique affaire de l'enseignant. Il faudra à l'avenir prendre en compte les pensées des didacticiens afin d'améliorer son enseignement.

ANNEXES

Symboles des fractions babyloniennes et égyptiennes

- *Les fractions égyptiennes*

Les fractions égyptiennes étaient écrites avec un hiéroglyphe en forme de « bouche » représentant le numérateur 1 et le dénominateur était placé en dessous. Ainsi 1/3 était écrit :



Il y avait des symboles spéciaux pour les fractions les plus courantes comme 1/2 et pour deux fractions non unitaires 2/3 et 3/4 :

$$\overline{\hspace{1cm}} = \frac{1}{2} \quad \text{mouth over 2 strokes} = \frac{2}{3} \quad \text{mouth over 3 strokes} = \frac{3}{4}$$

Si le dénominateur devenait trop large, la "bouche" était placée juste au début du dénominateur :

$$\text{mouth over } \overline{\text{nn}} = \frac{1}{331}$$

- *Les fractions babyloniennes*

Dans l'écriture babylonienne, il n'existe que deux symboles : le "clou vertical" et le "chevron".

$$\lll = 30/60 \quad \langle \lll = 15/60$$

$$\l \lll = 1 + 30/60 = 3/2$$

$$\ll \lll = 2 + 20/60 = 7/3$$

Productions d'élèves

- Premières productions

Les exercices suivants ont été donnés dans le cadre de l'évaluation nationale à la rentrée scolaire en 6e (septembre 2002).

Exercice 12

Range les nombres suivants du plus petit au plus grand.

2 2,02 22,2 22,02 20,02 0,22

..... < < < < < | 1 | 5 | 6 | 7 | 9 | 0 |

Exercice 13

Voici cinq nombres rangés du plus petit au plus grand.

Écris le nombre 3,1 à la place qui convient.

..... 2,93 3 3,07 3,15 3,4 | 1 | 6 | 9 | 0 |

Voici les réponses de quatre élèves :

Aude

0,22 < 2... < 2,02 < 20,02 < 22,02 < 22,2 | 1 | 5 | 6 | 7 | 9 | 0 |
Placement de 3,1 entre 3 et 3,07

Enzo

22,2 < 22,02 < 20,02 < 2,02 < 2... < 0,22 | 1 | 6 | 7 | 9 | 0 |
Placement de 3,1 entre 3,07 et 3,15

Nadia

2... < 0,22 < 2,02 < 20,02 < 22,02 < 22,2 | 1 | 5 | 6 | 7 | 9 | 0 |
Placement de 3,1 après 3,4

Thomas

0,22 < 2,02 < 20,02 < 22,02 < 22,2 < 2... | 1 | 5 | 6 | 7 | 9 | 0 |
Placement de 3,1 entre 3 et 3,07

- Deuxièmes productions

On a demandé à quelques élèves de réaliser les deux opérations suivantes :

- 8,32 + 15,87

- 15,672 + 352,21

Productions :

Jonathan

$$\begin{array}{r} 8,32 \\ + 15,87 \\ \hline 24,19 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 150,672 \\ + 352,210 \\ \hline 502,882 \end{array}$$

Alexandra

$$\begin{array}{r} 15,87 \\ + 8,32 \\ \hline 24,19 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 352,21 \\ 156,72 \\ \hline 508,93 \end{array}$$

Sylvain

$$\begin{array}{r} 8,32 \\ + 15,87 \\ \hline 24,19 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15,672 \\ + 352,21 \\ \hline 367,882 \end{array}$$

Anthony

$$\begin{array}{r} 8+15=23 \\ 32+87=119 \\ \hline 23+119 \\ \hline 24,19 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15+352=367 \\ 21+672=693 \\ \hline 367+693 \\ \hline 373,93 \end{array}$$

Hichem

$$\begin{array}{r} 15,87 \\ + 8,32 \\ \hline 24,19 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 352,210 \\ + 015,672 \\ \hline 367,882 \end{array}$$

Thibaut

$$\begin{array}{r} 8,32 \\ + 15,87 \\ \hline 24,19 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15,672 \\ + 352,21 \\ \hline 367,882 \end{array}$$

Pages de manuels, « leçons » travaillant la technique et non le sens

Voici deux pages du manuel « le nouveau MATH elem » dans lesquelles les « leçons » mettent davantage en avant la technique et non le sens.

MULTIPLIER UN NOMBRE DÉCIMAL PAR 10 OU PAR 100

- **Multiplier un nombre décimal par 10.**

Cela revient à déplacer la virgule d'un rang vers la droite.

$$23,94 \times 10 = 239,4$$

- **Multiplier un nombre décimal par 100.**

Cela revient à déplacer la virgule de deux rangs vers la droite.

$$23,94 \times 100 = 2\,394$$

COMPARER DES NOMBRES DÉCIMAUX

- **Nombres décimaux n'ayant pas la même partie entière**

Comparons par exemple : **6,83** et **32,4**

On compare les **parties entières** : **6** est **inférieur** à **32**, donc **6,83 < 32,4**.

- **Nombres décimaux ayant la même partie entière**

Par exemple : **5,28** et **5,4**

Les deux nombres sont compris entre 5 et 6.

On compare alors le **nombre de dixièmes** : **2** pour l'un, **4** pour l'autre.

Le plus grand est donc 5,4.

On écrit : **5,28 < 5,4**.

Dans cet exemple, la comparaison des dixièmes suffit. Si la partie entière et les dixièmes étaient identiques, **il faudrait comparer les centièmes**, et ainsi de suite.

Questionnaire enseignant (vierge)

1) Dans quelle école exercez vous ? Quel est votre niveau de classe ?

2) A quelle(s) période(s) de l'année abordez-vous les nombres décimaux ?

3) Suivez-vous ou basez-vous sur un manuel précis ?

Si oui, lequel ?

4) Quelles notions, selon vous, doivent être vues des élèves avant d'introduire les nombres décimaux ?

5) Mettez- vous en lien nombres décimaux et fractions ?

Si oui, que voyez-vous des fractions et à quel moment (avant, après, en même temps que les nombres décimaux) ?

Dans quels contextes travaillez-vous les fractions (bande unité, aires, graduation, ligne graduée) ?

6) Utilisez-vous le système métrique pour INTRODUIRE les nombres décimaux ?

Sinon, comment amenez-vous ces nombres (simplification d'écriture, utilisation de la calculatrice...) ?

7) $\frac{3}{4}$ est-il expliqué aux enfants comme 3 fois un quart ou comme 3 divisé par 4 ? Ou les deux ?

8) Faites vous une activité précise sur les zéros utiles et inutiles (1,05 ; 1,50) ?

Et sur l'infinité de nombres décimaux entre 2 nombres ?

9) Entre enseignants de CM1-CM2, comment répartissez vous le travail des calculs sur les nombres décimaux (addition, soustraction, multiplication et division d'un décimal par un entier) ?

10) Pour vous, les calculs sur les nombres décimaux permettent-ils de consolider la compréhension des nombres décimaux chez les élèves ?

Si oui, comment ?

- Le Monopoly

DEPART/ Banque	1/10 étage 	Banque	1/100 appartement 	1 immeuble 	Banque	10 quartier
1/100 appartement 	<p>REGLE DES REGROUPEMENTS</p> <p>10 appartements = 1 étage 10 centièmes = 1 dixième $10 \times 0,01 = 0,1$ $10 \times 1 = 10$ **</p> <p>10 étages = 1 immeuble 10 dixièmes = 1 $10 \times 0,1 = 1$ **</p> <p>10 immeubles = 1 quartier d'une dizaine d'immeubles 10 unités = 1 dizaine $10 \times 1 = 10$</p>				1/10 Étage 	
Banque					1/10 étage 	
1/10 étage 					Banque	
1 immeuble 					1 immeuble 	
Banque	1/10 étage 	1/10 étage 	10 quartier 	Banque	1/10 étage 	1/100 appartement

- La fabrique à décimaux

4,03		4	$\frac{3}{100}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{1000}$
25,12		25	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{100}$	251
13,401		13	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{8}{10}$
0,75		$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{100}$	1	$\frac{3}{10}$

les planches à compléter

les cartes pour compléter

- Le jeu de la bataille

1 dizaine 1 dixième	101 dixièmes	10,1	10 unités 1 dixième
1 unité 5 dixièmes	15 dixièmes	150 centièmes	1,5
1 dizaine 8 centièmes	10 unités 8 centièmes	1008 centièmes	10,08

BIBLIOGRAPHIE

- Articles et livres

- BOLON J., 1992-1993, *L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire*, Grand N n° 52
- BRISSIAUD R., 1999, Les fractions et les décimaux au CM1 : une nouvelle approche, in Actes du 15^{ème} colloque des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres, Loctudy du 11 au 13 mai 1998, IREM de Brest
- BROUSSEAU G., 1980, *Problèmes de l'enseignement des décimaux*, Recherche en Didactique des Mathématiques Vol 1 N° 1, 11-58
- COMITI C., NEYRET R., 1979, *A propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux en cours moyen*, Grand N, 19, 5-20
- DOUADY R., PERRIN-GLORIAN M-J., 1986, Nombres décimaux, Brochure de l'IREM de Paris 7
- ROUCHE N., 1998, Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?, *L'esprit des sciences* Ellipses

- Manuels scolaires

- BRISSIAUD R., CLERC P., LELIEVRE F., OUZOULIAS A., 2010, *J'apprends les maths CM1 : livre du maître*, Paris, Edition Retz
- BRISSIAUD R., CLERC P., LELIEVRE F., OUZOULIAS A., 2010, *J'apprends les maths CM1 : manuel de l'élève*, Paris, Edition Retz
- CHAMPEYRACHE G., FATTA J.C., JABLONKA L., SAUGER P., STOECKLE D., 2001, le nouveau MATH ELEM : manuel CM1, Paris, Edition Belin
- CHARNAY R., COMBIER G., DUSSUC M.P., 2003, *Cap Maths CM1: pour l'enseignant*, Paris, Edition Hatier
- CHARNAY R., COMBIER G., DUSSUC M.P., 2003, *Cap Maths CM1: manuel de l'élève*, Paris, Edition Hatier
- CHRISTOPHE S., 1994, *Atout Maths CM1: guide pédagogique*, Paris, Edition Hachette education

- CHRISTOPHE S., 1994, *Atout Maths CM1:livre d'activités*, Paris, Edition Hachette education
- DEMAGNY C., DEMAGNY J.P., DIAS T., DUPLAY J.P, 2009, La tribu des maths CM1 : guide pédagogique, Paris, Edition Magnard
- DEMAGNY C., DEMAGNY J.P., DIAS T., DUPLAY J.P, 2009, La tribu des maths CM1 : *manuel de l'élève*, Paris, Edition Magnard
- POLI B., MYX A., BREGEON J.L., DOSSAT L., VICENS P.Y., 1995, Math en flèche – Diagonale CM1 : guide pédagogique, Paris, Edition Nathan
- POLI B., MYX A., BREGEON J.L., DOSSAT L., VICENS P.Y., 1995, Math en flèche – Diagonale CM1 : *livre d'activités*, Paris, Edition Nathan
- VICENS P.Y., MYX A., BREGEON J.L., DOSSAT L., BLANC J., 1994, Math en flèche-Diagonale CM2 : guide pédagogique, Paris, Edition Nathan
- VICENS P.Y., MYX A., BREGEON J.L., DOSSAT L., BLANC J., 1994, Math en flèche-Diagonale CM2 : *livre d'activités*, Paris, Edition Nathan
- Instructions Officielles
 - Extrait du Bulletin Officiel, 1882
 - Extrait du Bulletin Officiel, 1938, Arithmétique et dessin géométrique, site des anciens programmes de l'école primaire <http://jl.bregeon.perso.sfr.fr>
 - Extrait du Bulletin Officiel, 1945, Calcul et système métrique
 - Extrait du Bulletin Officiel, 1970, Fractions et nombres décimaux, site <http://appy.ecole.free.fr>
 - Extrait du Bulletin Officiel, 1980, Ecrire, nommer et comparer les nombres décimaux, site <http://jl.bregeon.perso.sfr.fr>
 - Extrait du Bulletin Officiel, 1985, Arithmétique, <http://appy.ecole.free.fr>
 - Extrait du Bulletin Officiel, 1991, Approche du nombre, <http://appy.ecole.free.fr>
 - Extrait du Bulletin Officiel, 1995, Nombres et calcul, <http://appy.ecole.free.fr>
 - Extrait du Bulletin Officiel, 2002, Connaissances des fractions et des nombres décimaux, <http://appy.ecole.free.fr>
 - Extrait du Bulletin Officiel, 2008, Nombres et calcul

4^{ème} de couverture

Depuis longtemps et encore actuellement, les nombres décimaux posent de nombreuses difficultés aux élèves de cycle 3. Et ces difficultés vont rarement en s'améliorant dans les années suivantes. C'est pourquoi il est primordial que les élèves sortent de l'école primaire avec une idée précise et claire de ce que sont ces nouveaux nombres. Les sources d'erreurs sont souvent dues à l'assimilation des nombres décimaux comme deux nombres entiers mis bout à bout. Or les nombres décimaux se rapprochent d'autant plus des fractions que des nombres entiers. De ce fait la nature même de ces nombres est mal comprise, ce qui entraîne de nombreuses difficultés de manipulation par la suite.

Ainsi l'introduction des nombres décimaux en classe de CM1 est une étape essentielle dans cet enseignement. Mais quelles sont les progressions possibles ? Quelles étapes faut-il aborder avant d'introduire ces nouveaux nombres ? Quelles sont les erreurs à éviter ?

Après une définition claire de l'objet d'étude, ce mémoire expose plusieurs progressions proposées par différents chercheurs puis apporte une analyse détaillée de quelques aspects à suivre ou à éviter. Pour terminer, ce mémoire apporte quelques idées possibles d'activités ludiques à mettre en place en classe ou lors de l'aide personnalisée afin de remédier à certaines difficultés rencontrées par les élèves.

Mots-clés : nombres décimaux, CM1, progressions, erreurs, remédiations, sens