



**HAL**  
open science

# Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème : l'application du théorème de Pythagore

William Pigache

## ► To cite this version:

William Pigache. Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème : l'application du théorème de Pythagore. Education. 2012. dumas-00765214

**HAL Id: dumas-00765214**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00765214v1>**

Submitted on 14 Dec 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore



**UNIVERSITÉ D'ORLÉANS  
ET DE TOURS**  
***IUFM Centre Val de Loire***

**MEMOIRE de recherche** présenté par :  
**William PIGACHE**

soutenu le : **21 juin 2012**

pour obtenir le diplôme du :  
**Master Métiers de l'Éducation, de l'Enseignement,  
de la Formation et de l'Accompagnement**  
Discipline : Psychologie

Construction d'un modèle mental au cours d'une  
activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

**Mémoire dirigé par :**  
**Sandra Jhean-Larose** Professeur des Universités, Université d'Orléans

---

**JURY :**  
**Sandra Jhean-Larose** Professeur des Universités, Université d'Orléans  
**Isabelle Maunet-Salliet** Professeur de français, Université de Tours

## Remerciements

*La réalisation de ce travail n'aurait été possible sans un encadrement soutenu, c'est pourquoi j'adresse un grand remerciement à ma directrice de mémoire, Sandra Jhean-Larose, pour son implication, ses conseils, son aide et sa disponibilité tout au long de ces deux années de Master.*

*Un grand merci à Jean Philippe Georget pour son appui dans l'élaboration du protocole, ses idées, ses remarques et bien plus encore.*

*Je remercie l'établissement qui a accepté que je propose mon protocole, à savoir le collège Bergson à Saint Cyr sur Loire, ainsi que les élèves de troisième qui ont participé et leur professeur Mme Boissard qui m'a accueilli.*

*Je tiens à remercier ma compagne, Aïta, pour ses encouragements, son soutien et son aide.*

*Enfin, à tous mes proches, je vous en suis très reconnaissant.*

## Table des matières

<b>Contexte théorique.....</b>	<b>5</b>
Introduction.....	5
I. La théorie des modèles mentaux selon Johnson-Laird.....	6
II. Modèles mentaux, Modèles de situation et Compréhension de textes.....	7
III. Modèles mentaux spatiaux et Imagerie mentale.....	10
IV. Propriété de typicalité.....	12
V. Problématique.....	13
<b>Méthodologie.....</b>	<b>14</b>
Introduction.....	14
1. Population.....	14
2. Méthode.....	14
I. Expérience 1 : Théorie de la Typicalité.....	14
1. Méthode.....	15
2. Analyse.....	15
II. Expérience 2 : Résolution de problèmes.....	16
1. Méthode.....	16
2. Hypothèses.....	17
III. Expérience 3 : Mémoire sémantique et mémoire de travail.....	22
1. Méthode.....	22
<b>Résultats.....</b>	<b>23</b>
I. Théorie de la typicalité.....	23
II Construction d'un modèle mental.....	25
A. Effet du type d'énoncé.....	25
1. ...en termes d'erreurs.....	25
2. ...en termes de temps.....	26
B. Effet du type du degré de typicalité de la situation.....	27
1. ...en termes d'erreurs.....	27
2. ...en termes de temps.....	27
C. Interaction.....	28
III. Modèle mental et mémoire épisodique.....	29

**Discussion..... 31**

I. Modèle mental : effet du degré de typicalité..... 31

A. Degré de représentativité des figures..... 31

B. Degré de typicalité de la situation..... 32

C. Mémoire épisodique et mémoire de travail..... 34

II. Modèle mental : effet du type d'énoncé..... 36

III. Degré de typicalité de la situation et type d'énoncé..... 37

**Conclusion..... 39**

**Bibliographie**

**Annexes**

## Contexte théorique

### Introduction

La théorie des modèles mentaux trouve ses origines en philosophie et en psychologie, mais au cours des trente dernières années, elle s'est développée dans l'étude de la perception, de la compréhension et de la déduction.

Le premier auteur à définir une théorie sur les modèles mentaux est Johnson - Laird. Introduite dans un article *Mental Models in Cognitive Psychology* en 1980 et développée dans un ouvrage *Mental models* en 1983, c'est une théorie de la cognition humaine, et plus particulièrement une théorie des représentations mentales mises en œuvre dans le langage et le raisonnement.

Le concept de modèle mental est actuellement admis par plusieurs chercheurs, même si certains, soulignant le caractère vague du terme, préfèrent user d'autres expressions. C'est pourquoi il sera nécessaire dans la présente recherche de bien le définir afin de comprendre le concept de modèle mental et ce qu'est la mémoire. C'est avec les travaux de Johnson - Laird (1977, 1980, 1981, 1983, 1984, 1991) que l'on pourra définir la théorie des modèles mentaux. Cet auteur s'attache particulièrement à l'étude des modèles que les sujets humains construisent et utilisent pour comprendre et raisonner (c'est ce qu'il appelle les représentations transitoires). En ce qui concerne la mémoire, on abordera le concept de système de mémoires multiples avec les travaux de Tulving (Squire, 2004 ; Tulving, 1987).

Il sera intéressant de mettre en parallèle une autre théorie sur les modèles mentaux qui est le modèle mental de situation introduit par Van Dijk et Kintsch (1983). Cette théorie intègre les connaissances, personnelles et générales d'un sujet dans la construction d'un modèle mental lors de la compréhension de textes.

Ensuite, il sera pertinent dans le cadre de la présente recherche, de comprendre quels sont les effets des illustrations sur les modèles mentaux. L'étude de deux articles sera nécessaire ; un de Michel Denis et Manuel de Vega (1993) s'intéressant aux relations que les modèles mentaux entretiennent avec les images mentales, et l'autre de Gyselick (1996) nous

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

énonçant le rôle bénéfique des illustrations dans la mémorisation et la compréhension de textes.

Enfin, une étude de Françoise Cordier (1991) sur l'application du théorème de Thalès sera utile dans la validation de nos hypothèses. Son travail met en avant le rôle des représentations typiques comme les biais cognitifs et notamment les représentations dans la mémoire à long terme.

## I. La théorie des modèles mentaux selon Johnson-Laird

Pour bien assimiler la théorie des modèles mentaux, il est important et nécessaire de comprendre ce qu'est la mémoire.

Aujourd'hui, la communauté scientifique adhère largement au concept de système de mémoires multiples (Squire 2004, Tulving, 1987). D'après le modèle hiérarchique de Tulving (1972), une distinction peut d'abord être faite entre mémoire à long terme et mémoire à court terme. Cette dernière, également appelée *mémoire de travail*, a une capacité de maintien et de manipulation d'informations limitée. A l'inverse, celles retenues dans la mémoire à long terme peuvent l'être en quantité et temps illimités. Elle est divisée en trois principaux sous systèmes ; *la mémoire sémantique* (stockage des connaissances factuelles et conceptuelles liées au langage, la où se construit les modèles mentaux), *la mémoire procédurale* (habiletés cognitives, perceptives ou motrices acquises graduellement) et *la mémoire épisodique* (Tulving, 1987), la où peuvent être stockés les modèles mentaux.

Après cette brève hiérarchisation des systèmes de la mémoire on va pouvoir définir un modèle mental qui est pour Johnson-Laird (1980) une représentation interne d'un état de choses (« *state of affairs* ») du monde extérieur. Il s'agit d'une forme de représentations des connaissances comme étant la façon naturelle par laquelle l'esprit humain construit la réalité, en conçoit des simulations mentales. Elles peuvent être représentées par un ensemble de propositions, un ensemble d'images ou même un réseau de neurones.

Il faudra noter que les représentations peuvent être différentes selon les individus mais se rapportent toutes à la même réalité sous-jacente. Comme l'explique Johnson-Laird (1980),

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

*« c'est comme si des explorateurs parlaient d'un animal jusque ici inconnu, mais que leur vision très fragmentaire les avait convaincus qu'ils avaient vu des animaux différents. »*

La théorie des modèles mentaux est actuellement appliquée au raisonnement inductif, à la prise de décision et aux processus de conception (Johnson-Laird, 1983). Les données psychologiques suggèrent que les sujets humains construisent des modèles mentaux et que, le plus souvent, penser consiste à manipuler des modèles dans le but de chercher des conclusions plausibles, les sujets humains font ce qu'on appelle des inférences. La construction d'un modèle mental relève donc de la mise en œuvre d'inférence.

Le traitement inférentiel est lié à la capacité de la mémoire de travail (Johnson - Laird (1991); Byrne & Tabossi, 1986); la théorie des modèles fait donc deux prédictions essentielles. Premièrement, elle prédit que plus le nombre de modèles nécessaires pour faire une inférence est élevé, plus l'inférence sera difficile. Deuxièmement elle prédit que les conclusions erronées devraient être compatibles avec seulement certains modèles des prémisses, car les sujets ne parviennent pas, le plus souvent, à construire tous les modèles possibles. Dans la vie quotidienne, les connaissances acquises tout au long de la vie facilitent donc l'inférence.

La fonction d'un modèle est donc de rendre explicites les objets, les propriétés et les relations au sein d'une situation, qui sont pertinents pour les actions potentielles, c'est-à-dire les rendre disponibles pour faire des inférences et prendre des décisions sans qu'un traitement supplémentaire ne soit nécessaire. La structure d'un modèle correspond donc à la structure de la situation, telle que les humains la conçoivent, et non pas à la structure linguistique du discours.

## **II. Modèles mentaux, modèles de situation et compréhension de textes**

Les travaux sur la compréhension des textes constituent deux groupes distincts, dont les auteurs appartiennent à deux « familles » différentes.

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

Le premier groupe de recherche est le fait de psycholinguistes qui prennent en compte les caractéristiques linguistiques des énoncés et des textes, et considèrent les différentes dimensions du langage : lexicale, syntaxique, sémantique et pragmatique. C'est dans ce groupe que doivent être situés les travaux de Johnson - Laird (1981), de Garnham et Oakhill. L'objet privilégié de ces études est le traitement de la cohérence locale du texte. Les textes considérés sont très courts (suites de deux ou plusieurs phrases) ou courts (paragraphe d'une dizaine de lignes).

Les recherches du second groupe ont pour visée l'étude du contenu « conceptuel » des textes : seule est prise en compte leur composante sémantico-conceptuelle, vue comme indépendante de la syntaxe. Leurs auteurs ne se définissent pas comme des psycholinguistes. Plusieurs d'entre eux, notamment Rumelhart (1975, 1977 en collaboration avec Ortony) et Kintsch (1974) ont travaillé à l'élaboration de modèles de la mémoire et plus particulièrement de la mémoire dite sémantique, au sens de Tulving (1972) qui oppose mémoire épisodique et mémoire sémantique (voir Kintsch, 1972 ; Rumelhart, Lindsay & Norman, 1972 ; Rumelhart & Norman, 1975).

Au sein de ce second groupe, Kintsch occupe une position dominante. Après avoir considéré que les représentations cognitives mises en jeu dans la compréhension étaient de nature propositionnelle, il a proposé que ces représentations soient des modèles des situations décrites dans les textes. Selon Johnson-Laird (1980) une représentation propositionnelle est définie comme une suite de symboles dotée d'une structure syntaxique arbitraire et d'un lexique qui correspond étroitement à celui du langage naturel.

Dès 1980, Johnson-Laird souligne les insuffisances des représentations propositionnelles et distingue deux étapes dans la compréhension, deux niveaux de représentations. Il réaffirme cette position dans un autre article publié en 1980 (Johnson-Laird & Garnham, 1980), puis dans son ouvrage de 1983. Dans celui-ci, il considère que la compréhension d'un texte met en jeu trois niveaux de représentation : une représentation graphémique (ou phonémique), une représentation propositionnelle et un modèle mental. La représentation propositionnelle est réalisée à partir de la représentation de premier niveau, de manière automatique, rapide et non volontaire pour le lecteur (auditeur) maîtrisant bien la langue. Elle est définie comme une suite de symboles dotée d'une structure syntaxique arbitraire et

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

d'un lexique qui correspond étroitement à celui du langage naturel. A partir de cette représentation propositionnelle, peut être construit un modèle mental, défini comme un modèle interne de « *l'état de choses* » (*state of affairs*) que décrit le texte, dont la structure est analogique à cet état de choses.

En 1983, Kintsch adopte une nouvelle approche qui le conduit à distinguer trois niveaux de représentation : une représentation des caractéristiques de surface du texte, une base de texte propositionnelle et une représentation du contenu du texte, le « *modèle de situation* ». Soulignant le caractère complexe et souvent confus de la notion de proposition chez les philosophes et les linguistes, « *in part because of a lack of serious alternatives, the proposition has been taken as a fundamental unit in cognitive semantics (...)* » (Van Dijk & Kintsch, 1983). Il substitue à la notion de proposition, celle de schéma propositionnel. Chaque phrase du texte est traduite non plus en une liste de propositions, mais en un schéma propositionnel. Ce schéma prend en considération la structure interne de la phrase, en particulier la nature du prédicat, les rôles sémantiques des arguments, les modificateurs et les circonstances de lieu et de temps. Il organise, de façon hiérarchisée, non pas des concepts, mais des propositions atomiques, au sens logique du terme. Vu sous les deux aspects, intension et extension, le schéma propositionnel est une représentation d'un fait (action, état, événement...) dans un monde possible.

Un ensemble cohérent de schémas propositionnels constitue la microstructure de la base de texte ; à partir des schémas formant la microstructure il est possible de dériver les schémas formant la macrostructure.

Le modèle de situation est une forme de représentation plus élaborée que la base de texte propositionnelle, permettant de rendre compte de nombreux phénomènes de compréhension. Il intègre les connaissances, personnelles et générales, mises en œuvre par le sujet au cours de la lecture.

*(...) a situation model is an integrated structure of episodic information, collecting previous episodic information about some situation as well as instantiated general information from semantic memory* (Van Dijk & Kintsch, 1983).

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

C'est à partir d'un modèle de situation que le sujet peut, sur la base des informations données dans un texte, réaliser des activités complexes telles qu'acquérir de nouvelles connaissances, raisonner, résoudre un problème, etc.

### **III. Modèles mentaux spatiaux et imagerie mentale**

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux caractéristiques des images mentales et à la construction des modèles mentaux spatiaux. On va vouloir savoir, dans le but des hypothèses de la présente recherche, si les modèles mentaux spatiaux peuvent se construire à la lecture seule d'un texte et si la complémentarité d'une illustration aux textes peut faciliter la construction d'un modèle mental spatial.

On a pu voir précédemment qu'un modèle mental est défini comme un modèle interne de l'état de choses auquel le texte se réfère, ne correspondant à aucune de ses représentations linguistiques et dont la structure est analogique à cet état de choses. Ce qui n'a pas été spécifié auparavant c'est que le modèle mental comporte, d'après Johnson Laird, des éléments appelés des *tokens*, qui représentent les entités auxquelles il est fait référence (individus, objets ou événements). Les propriétés de ces entités sont représentées dans le modèle par les propriétés des éléments représentationnels correspondants, et les relations spatiales, temporelles ou causales que les entités entretiennent sont représentées dans le modèle par les relations entre les éléments représentationnels. Le modèle mental peut alors être subjectivement considéré comme équivalent à une image mentale. Cependant, la parenté entre image mentale et modèle mental ne doit pas conduire à assimiler les deux notions. Les images mentales selon Johnson-Laird (1983) correspondent à des vues particulières des modèles. Selon Denis et de Vega (1993), qui ont présenté et comparé les caractéristiques du modèle mental et celles de l'image mentale, l'image ferait partie des procédures qui contribuent à la formation de modèles mentaux au cours du traitement de descriptions et, une fois le modèle construit, elle fonctionnerait comme un instrument d'instanciation du modèle, sous un angle particulier (voir aussi pour un point de vue similaire, Seel et Strittmatter, 1989). Denis et de Vega (1993) proposent de considérer

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

l'image mentale : « *Comme un mode de spécification privilégié des modèles mentaux lorsque ces modèles incluent des données figurables, que celles-ci soient de nature spatiale ou de nature quasi spatiale* ». On sait maintenant que la représentation d'une image mentale permet donc de modéliser un modèle mental tel que les modèles mentaux spatiaux.

Pour rendre compte des bénéfices des illustrations et de la représentation d'une image mentale, l'appui de la théorie du double codage (Paivio, 1971, 1986) est essentielle.

A l'origine, la théorie du double codage a été proposée par Paivio (1971) pour étudier principalement des phénomènes liés à la mémoire épisodique. Sa pertinence a surtout été mise en évidence pour rendre compte de l'activité d'imagerie ou de l'effet bénéfique des illustrations dans la mémorisation de matériels verbaux simples (mots et phrases). Dans la théorie du double codage, deux systèmes de représentations symboliques sont postulés : le système verbal et le système non verbal. Ces deux systèmes de traitement et de stockage sont considérés comme fonctionnellement et structurellement distincts. Ainsi, les unités de base activées dans les deux systèmes sont des « *logogènes* » (au sens de Morton, 1969) et des « *imagènes* ». Ils sont fonctionnellement distincts car chacun peut être actif sans que l'autre le soit. Bien que séparés, les deux systèmes sont toutefois interconnectés. Il y a diffusion de l'activation dans un système et dans l'autre. Selon Kulhavy et ses collaborateurs (1993) dans le cas où un texte est présenté accompagné d'une carte, les informations du texte sont encodées séquentiellement dans le système de stockage verbal, sous forme de propositions linguistiques. L'illustration est encodée dans le système non verbal sous la forme d'une image mentale, qui retiendrait à la fois l'information sur la structure de l'illustration et les caractéristiques physiques des éléments figurés. Le stockage et la récupération des informations verbales seraient séquentiels. Les informations contenues dans l'image mentale seraient en revanche disponibles simultanément et leur accès serait par conséquent peu coûteux, ce qui libérerait la mémoire de travail et expliquerait l'effet bénéfique de l'illustration. Pour Paivio (1986) (voir aussi Clark et Paivio, 1991 ; Sadoski, Paivio et Goetz, 1991) il n'est pas nécessaire de postuler l'existence d'une représentation intégrée. L'hypothèse de deux représentations séparées, quoique connectées, suffit à rendre compte des résultats généralement observés concernant les effets de l'imagerie et les effets des illustrations lors de la mémorisation et de la compréhension de textes. Cependant, alors

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

que la théorie du double codage permet de rendre compte des effets des images (mentales et externes sous forme d'illustrations) sur la mémorisation de matériels verbaux simples, elle peut difficilement rendre compte des processus mis en jeu lors de la compréhension de textes, et en particulier l'élaboration d'inférences (pour une discussion de certaines limites de la théorie du double codage, voir Marschark, 1985, et Denis, 1989).

L'ensemble des résultats de Franklin et Tversky (1990) montre que les sujets construisent des modèles mentaux spatiaux, même quand ils n'ont pas vu d'illustration ou qu'ils n'ont pas reçu l'instruction de former des images. Le modèle construit est spatial, en ce sens qu'il représente les directions spatiales relatives, mais il n'a pas les caractéristiques analogues, quasi-perceptives, typiques des représentations étudiées dans les recherches sur l'inspection et la transformation d'images mentales. C'est davantage la conception de l'espace que sa perception qui détermine le modèle mental construit à partir de descriptions complexes de ce type. La compréhension des termes spatiaux serait biaisée par les connaissances et l'expérience perceptivo-motrice que les sujets ont du monde. Ainsi, le modèle serait suffisamment général, abstrait et flexible, pour permettre la prise de différentes perspectives, contrairement à l'image mentale ou à une représentation propositionnelle qui ne représentent qu'un certain point de vue.

#### **IV. Propriété de typicalité**

La typicalité est une propriété des éléments d'une catégorie qui correspond à l'idée que certains éléments constituent de meilleurs exemples que d'autres de par leur catégorie d'appartenance : on dit qu'ils sont très typiques pour cette catégorie. Dans le domaine des catégories naturelles, un moineau est ainsi un meilleur exemple d'oiseau qu'une poule ou une autruche. Ces « bons » exemples, obtenus à partir de consignes appropriées, se montrent d'une grande stabilité sur des échantillons importants de sujets. Les normes de typicalité mises en évidence témoignent ainsi d'une organisation particulière des représentations en mémoire à long terme. Cette propriété va être appliquée dans les travaux de Françoise et Jean Cordier (1989) et montre dans un premier temps que les sujets ont une représentation géométrique typique pour l'application du théorème de Thalès. Puis, dans un second temps, on remarque lors de la résolution de problèmes qu'il existe bien une

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

relation entre représentativité d'une situation et réussite. Les figures non typiques sont les lieux d'erreurs plus nombreuses et d'une résolution plus longue.

Ces résultats mettent en relief un problème dans la mesure où l'élève ne traite pas la catégorie comme une catégorie conceptuelle, c'est-à-dire ne se montre pas capable d'abstraire la ou les propriétés strictement nécessaires à l'application du théorème, mais fonde son raisonnement sur de multiples propriétés figuratives des figures géométriques, dont plusieurs sont évidemment superflues.

## **V. Problématique**

Nous avons vu grâce aux précédentes recherches, tout d'abord le rôle bénéfique des illustrations liées à la lecture d'un texte qui facilite la construction d'un modèle mental. Ensuite, nous avons découvert le rôle des situations typiques dans la conception des représentations des figures géométriques. A notre connaissance, on ne recense pas de travaux sur des exercices de géométrie qui analysent les effets de la construction d'un modèle mental en fonction des images, d'un énoncé texte et aussi de la typicité de la figure géométrique. Cette typicité de la figure géométrique fait référence à la théorie de la typicalité de Françoise et Jean Cordier (1989).

## Méthodologie

### Introduction

#### 1. Population

Ce protocole a été proposé à une classe de 23 élèves de troisième, au cours de trois visites pendant l'année scolaire lors de leur cours de Mathématiques. Les expérimentations ont été réalisées pour tous les élèves en même temps, dans la salle de classe.

#### 2. Méthode

Ce protocole comporte 3 expériences :

- *L'Expérience 1* est supposée mettre en évidence les situations les plus représentatives, c'est-à-dire les plus typiques de l'application du théorème de Pythagore.
- *L'Expérience 2* cherche à mettre en évidence deux points, le premier est que les exercices impliquant des situations peu représentatives sont plus difficiles à résoudre, le second est que le type d'énoncé va modifier les variables temps et erreurs.
- *L'Expérience 3* cherche à démontrer que les modèles mentaux construits par les élèves grâce aux *Expériences 1 et 2* vont être récupérés en mémoire épisodique pour être utilisés et ainsi **augmenter la diversité des figures géométriques**.

#### I. Expérience 1 : Théorie de la typicalité

L'objectif de cette expérience est de mettre en évidence le degré de représentativité des figures géométriques susceptibles d'être utilisées pour l'application du théorème de Pythagore. Dans ce but, nous avons mis en place une tâche de production de ces situations. Il s'agit donc ici de la construction de normes de typicalité, autrement dit, d'étudier les représentations les plus typiques du théorème de Pythagore.

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

## 1. Méthode

**Procédure :** Dans un premier temps, nous avons réactivé en mémoire le théorème de Pythagore en l'inscrivant au tableau (« *un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés* ») et on y ajoute un exemple (« *ABC est un triangle rectangle en A alors  $BC^2 = AB^2 + AC^2$*  »).

Ensuite, nous avons demandé aux élèves de penser au maximum de figures géométriques pour lesquelles le théorème de Pythagore est applicable. Nous leur avons distribué des feuilles vierges. Les élèves ont eu 10 minutes pour dessiner ces figures.

## 2. Analyse

Nous avons ensuite catégorisé les différentes figures dessinées par les élèves, que nous avons classées en fonction de leur fréquence de production.

Nous nous sommes ensuite appuyés sur ces fréquences dans le choix du matériel expérimental pour l'Expérience 2.

## II. Expérience 2 : résolution de problèmes

L'expérience 2 place les participants dans une situation de résolution de problèmes. Nous avons proposé aux 23 élèves de résoudre 5 exercices de géométrie où ils devaient appliquer le théorème de Pythagore lorsque cela était possible.

### 1. Méthode

Nous avons distribué à l'ensemble des élèves des feuilles comportant 5 exercices à résoudre. Il existait deux groupes indépendants d'élèves, en fonction de si les énoncés des exercices comportaient une figure géométrique pour les aider ( $n = 11$ ) ou non ( $n = 12$ ). Une première variable indépendante était donc **le type d'énoncé proposé** et comportait 2 modalités :

- condition **énoncé-texte** : l'énoncé de l'exercice ne comptait que du texte
- condition **énoncé-texte + image** : l'énoncé de l'exercice comportait du texte et l'image de la figure géométrique

Les 5 exercices proposés se différençaient en fonction du type de figure géométrique sollicitée. Tous les élèves passaient les 5 exercices, ils étaient donc appareillés. Cette seconde variable indépendante, le **degré de typicalité des situations**, comportait ainsi 5 modalités :

- exercice 1 : losange / peu typique
- exercice 2 : cône / non typique et en 3D
- exercice 3 : triangle inscrit dans un cercle / non typique
- exercice 4 : parallélogramme / erroné
- exercice 5 : triangle rectangle / très typique

Les critères de sélection des figures géométriques dans les exercices ont été en partie établis en fonction des résultats obtenus lors de l'*Expérience 1*. Nous avons choisi les 5 figures en fonction de 4 critères :

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

- La figure la plus fréquemment représentée par les élèves, que nous avons alors classée comme étant la représentation la plus typique du théorème de Pythagore : **la figure du triangle rectangle**
- Une des figures les moins fréquemment représentées par les élèves, que nous avons alors classée comme étant une représentation peu typique du théorème de Pythagore : **le losange**
- Les figures qui n'ont pas du tout été représentées par les élèves, que nous avons alors classées comme étant des représentations atypiques du théorème de Pythagore : **le triangle inscrit dans un cercle** et **le cône**. En outre, le cône est une situation de représentation de géométrie dans l'espace en trois dimensions.
- Enfin, nous avons choisi une représentation erronée où le théorème de Pythagore n'est pas applicable du tout : le **parallélogramme**.

L'ordre d'administration des exercices a été défini en fonction de leurs difficultés de résolution et de la surcharge cognitive qu'ils peuvent infliger aux élèves. Par exemple, l'exercice 2 avec la figure géométrique dans l'espace (un cône) peut demander plus de facultés cognitives, et il est donc placé au début. A l'inverse, l'exercice sur le triangle simple, en principe plus facile à résoudre, est administré en dernier.

Tous les sujets ont commencé les exercices en même temps. Chaque fois qu'un élève terminait un exercice, il lui était demandé de consulter l'horloge dans la salle de classe et de noter le temps qu'il avait mis individuellement à réaliser chaque exercice. Les élèves disposaient de leurs calculatrices scientifiques.

Les variables dépendantes mesurées étaient : le temps de résolution de chaque exercice et le nombre d'erreurs commises dans chaque exercice.

## 2. Hypothèses

- Hypothèse 1 : On fait l'hypothèse que la présence d'une image de la figure géométrique dans l'énoncé facilitera la construction d'un modèle mental. Autrement dit, on s'attend à observer un **effet du type d'énoncé proposé**, à savoir que :

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

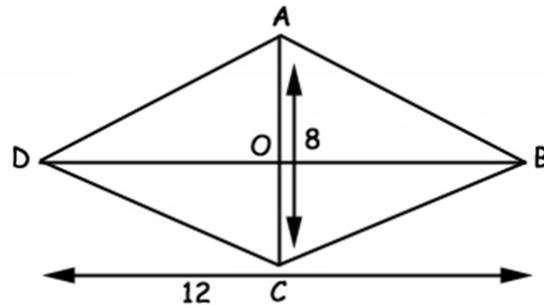
- Le groupe de participants *énoncé-texte+image* commettra moins d'erreurs dans les exercices que le groupe de sujets *énoncé-texte*
  - Le groupe de participants *énoncé-texte+image* mettra moins de temps à résoudre les exercices que le groupe de sujets *énoncé-texte*.
- 
- Hypothèse 2 : On s'attend à observer un **effet du degré de typicalité de la situation** :
    - Il y aura plus d'erreurs commises dans les exercices où le degré de typicalité est moins important.
    - Les sujets mettront plus de temps à résoudre les exercices les moins typiques.
- 
- Hypothèse 3 : On s'attend à observer **une interaction entre le degré de typicalité de la situation et le type d'énoncé..**

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

Groupe1

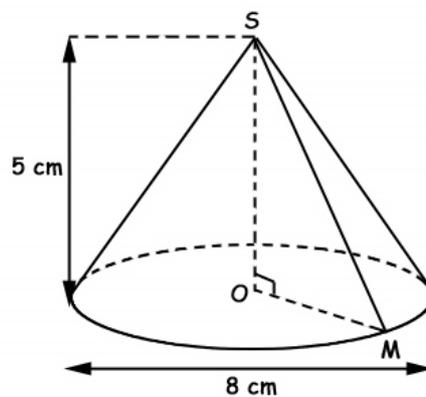
### Exercice 1 :

- Le quadrilatère ABCD est un losange. La diagonale [AC] mesure 8cm et la diagonale [BD] mesure 12 cm. Calculer la longueur du segment [AD].



### Exercice 2 :

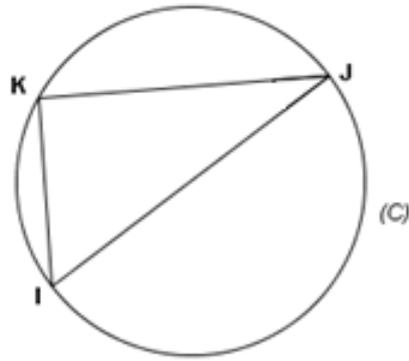
- Soit S le sommet d'un cône, le cercle de base a pour centre O et pour diamètre 8cm. M est un point sur ce cercle. Sa hauteur [SO] mesure 5cm. Calculer la longueur du segment [SM].



### Exercice 3 :

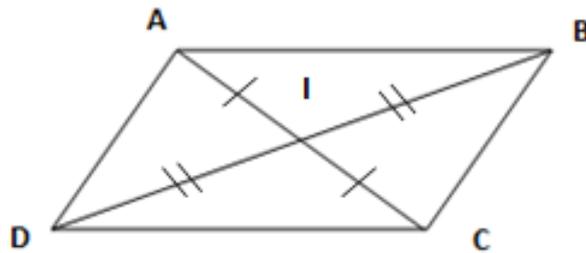
- Le segment [IJ] est un diamètre du cercle (C), le point K appartient au cercle (C). Le diamètre du cercle est égal à 8cm. La longueur du segment [KI] est égale à 3cm. Calculer la longueur du segment [KJ].

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore



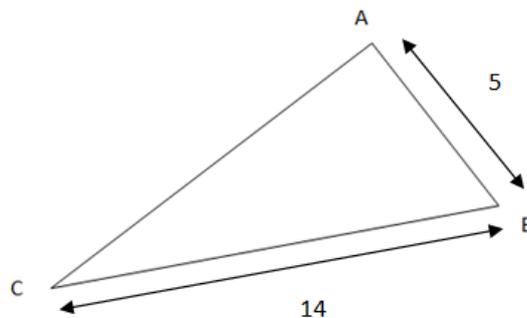
**Exercice 4 :**

- Soit un parallélogramme quelconque ABCD. Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu en I. Calculer la longueur du segment [AB] sachant que [AC] mesure 6cm et [BD] mesure 8cm.



**Exercice 5 :**

- Le triangle ABC est rectangle en A. Calculer la longueur AC sachant que la longueur AB est égale à 5cm et celle de BC à 14 cm.



Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

**Groupe 2 :** Les énoncés sont donnés sans les figures. Attention il est interdit de représenter les figures sur un quelconque document.

**Exercice 1 :**

- Le quadrilatère ABCD est un losange. La diagonale [AC] mesure 8cm et la diagonale [BD] mesure 12 cm. Calculer la longueur du segment [AD].

**Exercice 2 :**

- Soit S le sommet d'un cône, le cercle de base a pour centre O et pour diamètre 8cm. M est un point sur ce cercle. Sa hauteur [SO] mesure 5cm. Calculer la longueur du segment [SM].

**Exercice 3 :**

- Le segment [IJ] est un diamètre du cercle (C), le point K appartient au cercle (C). Le diamètre du cercle est égal à 8cm. La longueur du segment [KI] est égale à 3cm. Calculer la longueur du segment [KJ].

**Exercice 4 :**

- Soit un parallélogramme quelconque ABCD. Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu en I. Calculer la longueur du segment [AB] sachant que [AC] mesure 6cm et [BD] mesure 8cm.

**Exercice 5 :**

- Le triangle ABC est rectangle en A. Calculer la longueur AC sachant que la longueur AB est égale à 5cm et celle de BC à 14 cm.

### III. Expérience 3 : Mémoire épisodique et mémoire de travail.

Le but principal de l'expérience 3 est de mettre en évidence le lien entre la mémoire épisodique et la mémoire de travail où sont stockés les modèles mentaux (Denis & de Vega, 1993). On va essayer d'observer si les modèles mentaux créés dans l'expérience 2 sont réutilisés dans l'expérience 3. On fait l'hypothèse qu'un modèle mental peut être stocké dans la mémoire épisodique et ainsi aider à la construction d'un modèle mental.

#### 1. Méthode

**Procédure :** 2 mois plus tard revenir dans la même classe de collégiens et proposer à nouveau les exercices de l'expérience 1. C'est à dire redonner dans un premier temps la formule du théorème de Pythagore en l'inscrivant au tableau (« *un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés* ») et on y ajoute un exemple (« *ABC est un triangle rectangle en A alors  $BC^2 = AB^2 + AC^2$*  »).

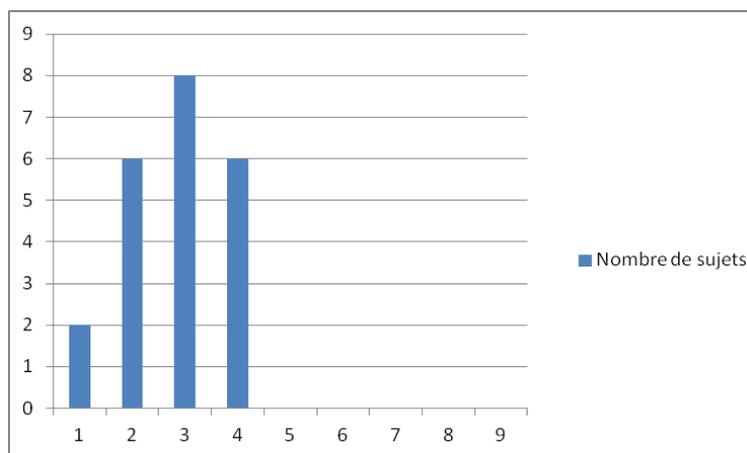
Puis, nous avons demandé aux élèves de penser au maximum de figures géométriques pour lesquelles le théorème de Pythagore est applicable. Nous leur avons distribué des feuilles vierges. Les élèves ont eu 10 minutes pour dessiner ces figures.

## Résultats

Le traitement statistique des données recueillies a été réalisé à l'aide du logiciel Statistica.

### I. Théorie de la typicalité

Aucun participant n'est parvenu à donner plus de 4 situations (voir Graphique 1). Dans un premier temps, nous avons comptabilisé le nombre de figures géométriques différentes donnés par chacun des participants.

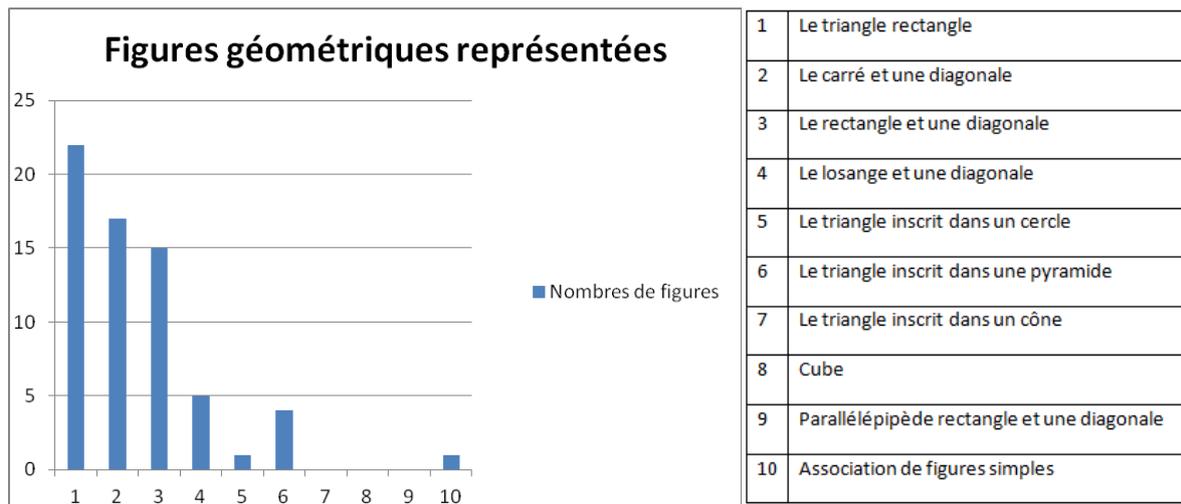


Graphique 1 : Nombre de réponses données, sans tenir compte de la pertinence des figures géométriques

Nous relevons ensuite les applications incorrectes du théorème des erreurs c'est-à-dire pour les figures géométriques ou le théorème n'est pas applicable. Le nombre de réponses erronées par sujet était alors le suivant :

Types de réponses erronées	Triangles isocèles	Triangle équilatéraux	Trapèze
Nombre de sujets	4	2	1

Les participants, en moyenne, ne produisent que 3 figures géométriques différentes en appliquant correctement le théorème de Pythagore. Certaines de ces formes géométriques apparaissent avec une fréquence plus notable que d'autres. Il est donc important de représenter les représentations les plus typiques.



Graphique 2 : Types de figures géométriques représentées par les sujets.

On relève directement à partir du graphique 2 la situation la plus représentative qui est le triangle rectangle ainsi que des situations peu ou pas du tout représentatives comme le cône ou encore le triangle inscrit dans un cercle.

A partir de ces résultats, nous identifierons les situations les plus typiques du théorème de Pythagore. Ce relevé se fera sous la forme d'un classement de la figure géométrique la plus simple à la plus complexe. Ce classement a pour but de nous aider à déterminer les figures les plus pertinentes pour l'expérience 2. Le classement des figures géométriques a été effectué selon 3 critères : le premier est la représentation des figures en 2D (représentées sur une surface plane) ou en 3D (représentées dans l'espace), le deuxième critère correspond aux figures qui ont un angle droit bien visible ou non et enfin le troisième distingue les figures simples (définies par exemple comme « figures qui portent un nom et ont déjà été rencontrées par les sujets au cours de leur scolarité »), figures complexes (formées de figures simples).

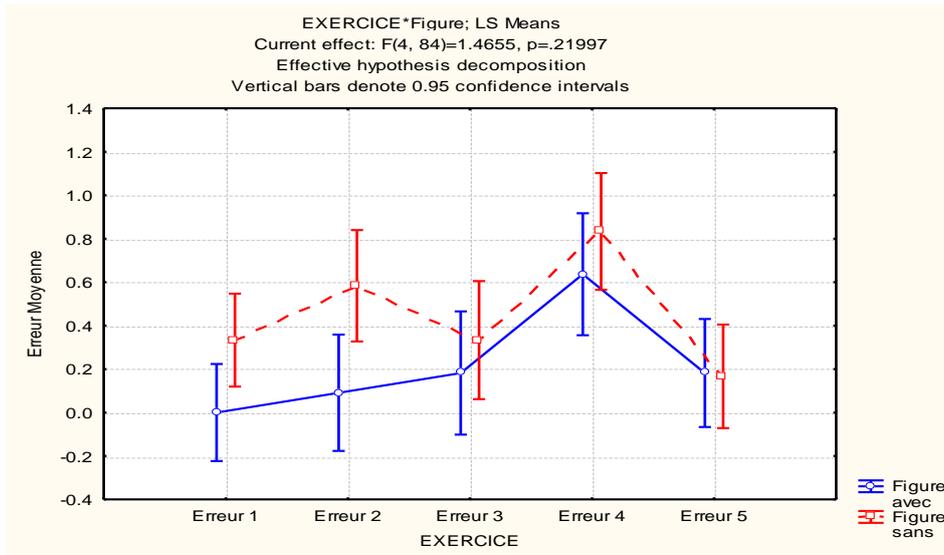
L'expérience 2 plaçait les sujets dans une situation de résolution de problème.

## II. Construction d'un modèle mental

### A. Effet du type d'énoncé...

Pour étudier l'**effet du type d'énoncé proposé**, nous avons tout d'abord réalisé une analyse de variance (ANOVA) à deux facteurs (groupe : *énoncé texte+image* et groupe : *énoncé texte*).

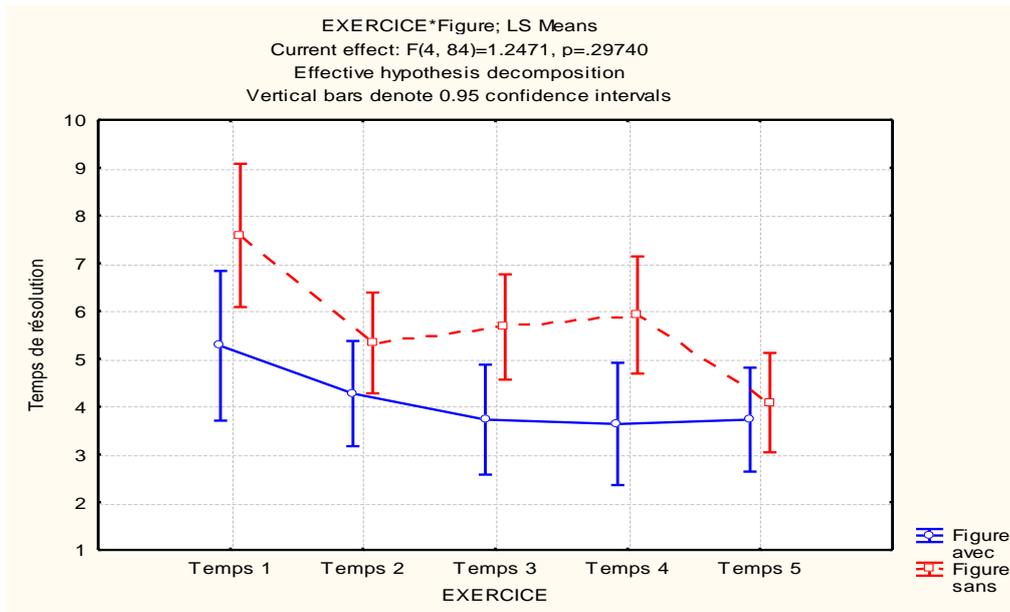
#### 1. ...en termes d'erreurs



Graphique 3 : Nombre d'erreurs des sujets en fonction des exercices.

Un effet significatif du type d'énoncé est observé : le groupe de sujets *énoncé texte + image* commet moins d'erreurs que le groupe de sujets *énoncé texte* [ $F(1,21) = 5,20$  ;  $p = .03$ ]. Les résultats indiquent un effet significatif du type d'exercice : les sujets commettent significativement plus d'erreurs à l'exercice 4 (voir moyennes) [ $F(4,84) = 8,78$  ;  $p < .001$ ]. En outre l'analyse statistique ne met pas en évidence d'interaction entre le type d'énoncé et le type d'exercice [ $F(4,84) = 1,47$  ;  $p = 0,22$ ], autrement dit, en termes d'erreurs commises, l'effet du type d'énoncé est le même quel que soit le type d'exercice.

## 2. ...en termes de temps



Graphique 4 : Temps de résolution des sujets en fonction des exercices.

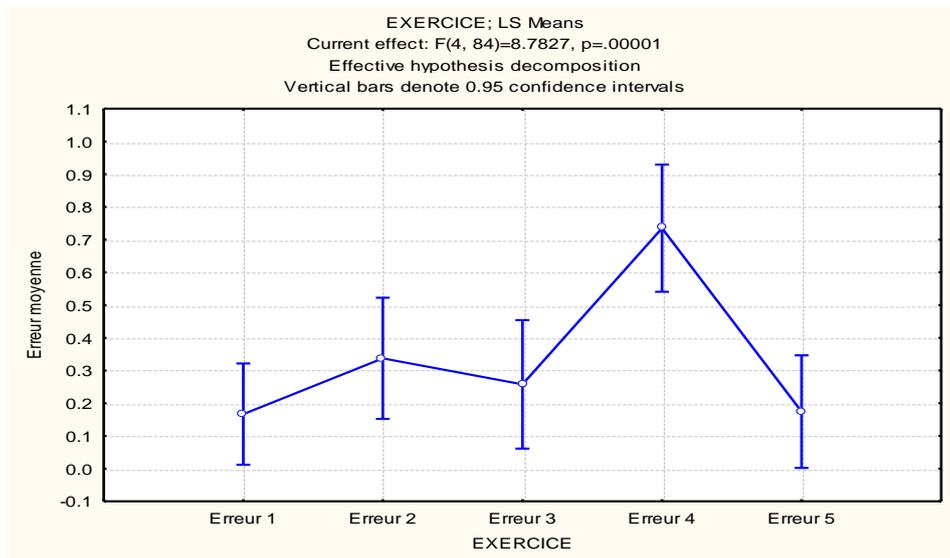
Un effet significatif du type d'énoncé est mis en évidence : le groupe de participants *énoncé texte + image* met significativement moins de temps à réaliser les exercices que le groupe de sujets *énoncé texte* [ $F(1,21)=72,90 ; p = .003$ ].

On retrouve un effet du type d'exercice [ $F(4,84) = 5,78 ; p < .001$ ] : certains exercices sont significativement réalisés en plus de temps que d'autres, notamment l'exercice 1. (cf. moyennes).

L'analyse statistique ne met pas en évidence d'interaction entre le type d'énoncé et le type d'exercice [ $F(4,84) = 1,25 ; p = 0,29$ ], autrement dit, en termes de temps, l'effet du type d'énoncé est le même quel que soit le type d'exercice.

## B. Effet du type du degré de typicalité de la situation...

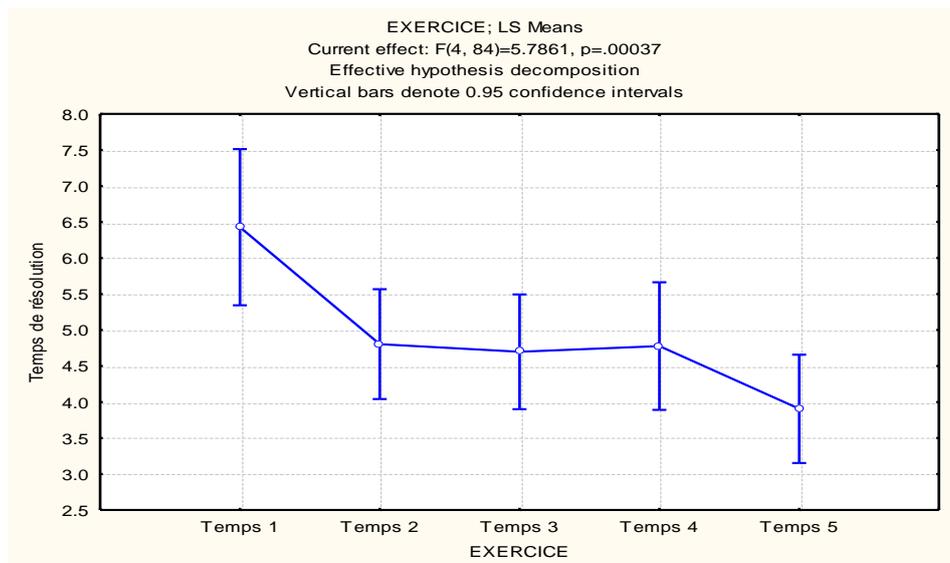
### 1. ... en termes d'erreurs



Graphique 5 : Nombre d'erreurs des sujets en fonction des exercices.

Il existe une différence significative entre les erreurs commises par les participants en fonction des exercices [ $F(4,84)=8,78$  ;  $p=.00001$ ], en particulier, les erreurs commises pour réaliser l'exercice 4, elles sont beaucoup plus importantes que pour les autres exercices.

### 2. ...en termes de temps



Graphique 6 : Temps de résolution des sujets en fonction des exercices

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

Une différence significative entre les temps mis par les participants en fonction des exercices est observée [ $F(4,84)=5,79$  ;  $p = .00037$ ], en particulier, le temps mis pour réaliser l'exercice 1 est significativement plus long et le temps mis pour réaliser l'exercice 5 est significativement plus court.

### C. Interaction

Dans cette partie, nous allons chercher à compléter l'analyse faite précédemment car nous n'avons pas recueilli d'interaction entre **le type d'énoncé et le degré de typicalité**. C'est pourquoi nous allons comparer les résultats de l'exercice le plus typique avec la situation de l'exercice 4 qui renvoie à la situation erronée, donc une situation non typique.

Pour ce faire, nous réalisons des comparaisons de moyennes 2 à 2 à l'aide du test t de Student, entre les résultats à l'exercice 4 (situation non typique) et l'exercice 5 (situation la + typique).

Groupe : énoncé texte	Ex. 4	Ex. 5	Valeur t	P
Nombre erreurs	0,83 (0,38)	0,17 (0,40)	4,19	<.001***
Temps	7,58 (2.78)	4,1(2)	3,53	.0018**

Moyennes (écart-type)

$p < .05^{**}$  ;  $p < .001^{***}$

En condition *d'énoncé-texte*, les participants commettent significativement plus d'erreurs dans l'exercice 4 que dans l'exercice 5 [ $t(22) = 4,19$  ;  $p < .001$ ]. En outre, les participants mettent significativement plus de temps dans l'exercice 4 que dans l'exercice 5 [ $t(22) = 3,53$  ;  $p .002$ ].

Sujets : énoncé texte + image	Ex. 4	Ex. 5	Valeur t	P
Nombre erreurs	0,63 (0,50)	0,18 (0,40)	2,33	<.03**
Temps	3,64 (1.74)	3,73(1,35)	-0,14	.89

Moyennes (écart-type)

$p < .05^{**}$  ;  $p < .001^{***}$

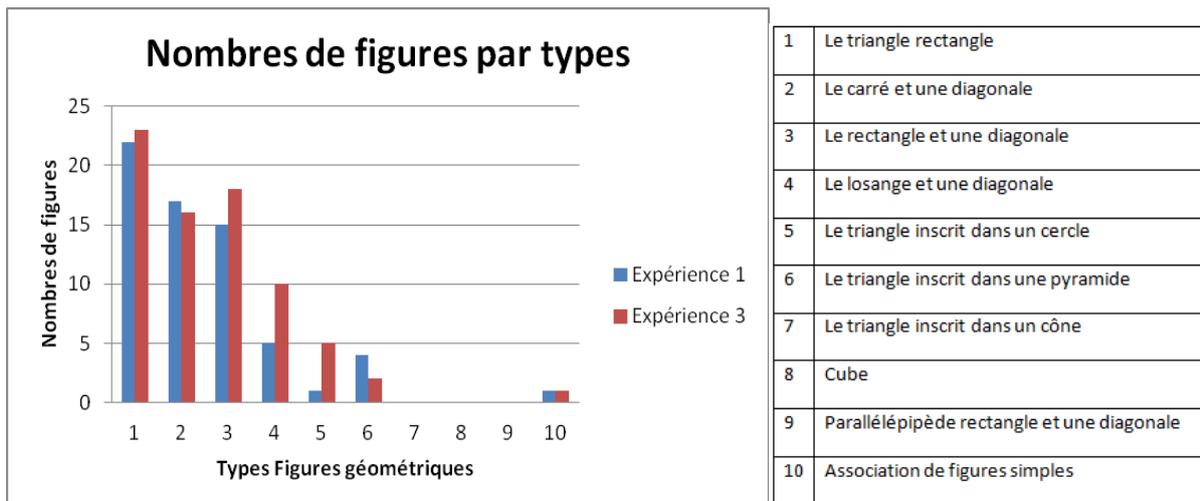
En condition *d'énoncé-texte+image*, les participants commettent significativement plus d'erreurs dans l'exercice 4 que dans l'exercice 5 [ $t(20) = 2,33$  ;  $p < .03$ ]. Par contre, nous ne

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

pouvons pas conclure que les participants mettent plus ou moins de temps entre les deux exercices, les statistiques ne sont pas significatives.

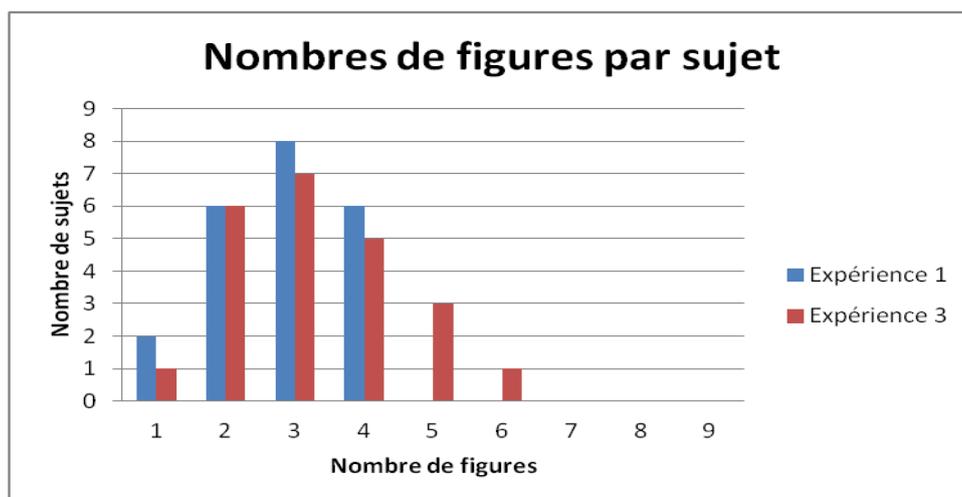
### III. Modèle mental et mémoire épisodique.

Pour savoir si les modèles mentaux construits par les élèves grâce aux *Expériences 1 et 2* sont récupérés en mémoire épisodique, nous allons faire une comparaison des analyses de l'expérience 1 avec celles de l'expérience 3.



Graphique 7 : Types de figures géométriques représentées par les sujets.

Le graphique 7 permet de constater que les élèves n'ont pas assimilé de nouvelles figures géométriques par rapport à l'expérience 1.



Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

Graphique 8 : Nombre de réponses données, sans tenir compte de la pertinence des figures géométriques

On peut constater à la lecture du graphique 8 une diversité des figures géométriques plus importante dans l'expérience 2. Alors que dans l'expérience 1, les meilleurs participants représentaient au maximum 4 figures géométriques, dans l'expérience 2 nous remarquons que les meilleurs participants arrivent à représenter jusqu'à 6 figures différentes.

A noter que les participants de l'expérience 3 n'ont commis aucune faute sur les représentations des figures géométriques.

## Discussion

Notre recherche avait pour but d'étudier la construction d'un modèle mental lors de la résolution de problème, plus spécifiquement lors de la résolution d'exercices sur le théorème de Pythagore. Nous avons donc recherché les effets des images liées au texte (type d'énoncé) et le rôle de la typicalité des figures géométriques.

### I. Modèle mental : effet du degré de typicalité

#### A. Degré de représentativité des figures

L'objectif de l'*Expérience 1* était de mettre en évidence le degré de représentativité des figures géométriques susceptibles d'être utilisées pour l'application du théorème de Pythagore. Le but était donc d'étudier les représentations les plus typiques du théorème de Pythagore pour ensuite catégoriser ces différentes figures dessinées par les élèves, afin de faire un classement en fonction de leur fréquence de production. Nous postulons que les figures les plus représentées par la majorité des élèves seraient les plus typiques de la situation.

Dans un premier temps, les résultats ont montré que les élèves ne représentaient que 4 figures géométriques (différentes) au maximum et une moyenne de 3 figures géométriques par personnes ce qui peut paraître peu sachant que le classement effectué comporte 10 figures où l'on peut appliquer le théorème de Pythagore. Ce faible score peut être expliqué par deux raisons. La première est sans doute la consigne qui a été donnée : « *dessiner sur une feuille blanche le plus possible de figures géométriques pour lesquelles le théorème de Pythagore est applicable* ». Le temps imparti était de 10 minutes. Les élèves se sont arrêtés aux représentations qu'ils connaissaient et n'ont pas cherché à construire et à imaginer d'autres représentations, au risque de se tromper. Il aurait été préférable de suivre la consigne de Françoise et Jean Cordier (1991), qui demandaient aux participants: « *soit de produire de mémoire, soit d'imaginer des constructions géométriques caractéristiques de l'application de théorème (...)* ». Dans ce but, ils distribuaient aux sujets un petit carnet d'une

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

dizaine de pages blanches. Sur chacune d'elles, les sujets devaient tenter de tracer une situation nouvelle. Le temps imparti était de 30 minutes.

La deuxième cause que l'on peut invoquer s'explique au vu des résultats des erreurs : sur les 73 représentations des figures géométriques, très peu d'élèves se sont trompés. Seulement 7 erreurs ont été commises, nous pouvons donc en déduire que la plupart des élèves n'a finalement pas essayé d'autres situations, au risque de se tromper.

Toutefois, nous avons pu relever sans grande difficulté les situations les plus typiques ainsi que celles qui ne le sont pas. Puisque la totalité des élèves (sauf un) a représenté le triangle rectangle, et pour plus des 2/3 des élèves le carré avec une diagonale et le rectangle avec une diagonale, ces représentations sont donc considérées comme des situations typiques par les participants. Il existe deux autres types de représentations : les situations peu typiques et non typiques. Les situations peu typiques concernent les situations représentées par moins d'1/4 des élèves tels que le losange, la pyramide ou encore le triangle inscrit dans un cercle et les situations non typiques concernent les situations qui n'ont pas été représentées comme le cône ou le cube.

Suite à ces situations, nous avons pu choisir les représentations les plus pertinentes pour nos problèmes de géométries dans *l'Expérience 2* : une situation typique, deux situations peu typiques, une situation non typique et une situation erronée (situation où le théorème de Pythagore ne peut pas être appliqué).

## B. Degré de typicalité de la situation

Nous avons prédit que les élèves mettraient plus de temps à résoudre les exercices les moins typiques et feraient plus d'erreurs dans les exercices où le degré de typicalité était le moins important. Cette hypothèse est validée. En effet, nous observons un effet significatif pour les erreurs commises par les participants en fonction des exercices et pour les temps mis par les participants en fonction des exercices.

En fonction des situations, nos résultats indiquent que le nombre d'erreurs varie. Une différence significative du nombre d'erreurs commises par les participants en fonction des exercices est observée. Cette variation est flagrante entre l'exercice 4 (situation erronée), là

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

il y avait le plus d'erreurs et l'exercice 5 (situation typique), où les erreurs étaient peu nombreuses.

La situation erronée a été l'exercice qui a posé le plus problème aux participants puisque les erreurs ont été les plus nombreuses. Ces derniers ont fait abstraction des priorités de la figure géométrique, ici un parallélogramme, pour appliquer le théorème de Pythagore. Les élèves ont cru reconnaître un triangle rectangle dans le parallélogramme. Ils se sont donc rapportés à une figure typique ; le triangle rectangle, situation où il y a eu le moins d'erreurs, pour la rapporter à une figure non typiques où les propriétés du théorème de Pythagore ne s'appliquent pas.

Ensuite, nous avons observé que le temps de résolution de la situation la plus typique est le plus court. Ce temps de résolution peut s'expliquer grâce à la théorie du double codage (Gyselinck, 1996 ; Paivio, 1971, 1986). La situation du triangle rectangle, un modèle mental, était déjà assimilée par tous les participants en mémoire épisodique, les sujets peuvent facilement récupérer cette figure en mémoire épisodique et ainsi ne pas surcharger la mémoire de travail. C'est donc peut-être pour cela qu'on observe des temps très courts que ce soit pour le groupe de participants texte+image et pour le groupe texte seulement. La situation est tellement typique que les participants n'ont plus besoin de se construire un modèle mental. Dans ce cas, les élèves récupèrent le modèle mental approprié et utilisent juste une image mentale de la figure (Denis et de Vega, 1993).

Il existe bien une relation entre représentativité d'une situation et résolution du problème. Mais cette relation est complexe, car si certaines figures non ou peu typiques sont sources d'erreurs plus nombreuses, ce n'est pas le cas pour toutes. La figure géométrique du losange est une figure peu typique mais est celle qui avait le moins d'erreurs commises. L'exemple du losange est particulier car c'est une figure peu typique comme vu précédemment. Grâce aux résultats, deux points sont à dégager : l'exercice 4 est la situation qui connaît le moins d'erreurs avec la situation de l'exercice 5 mais elle est aussi celle où la durée de résolution est la plus longue. Ce phénomène peut s'expliquer de par la position de celle-ci (c'est le premier exercice) et de par sa situation peu typique. Les participants sont donc plus attentifs et concentrés sur cet exercice, ils prennent leur temps pour ne pas se tromper.

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

Par ailleurs, le temps de résolution des exercices est augmenté pour les situations les moins typiques. La situation la plus typique, le triangle rectangle, est la représentation où le temps de résolution est significativement plus court que les autres, à l'inverse de la situation peu typique, le losange, où le temps de résolution a été le plus long.

L'ensemble de ces résultats indique bien dans quelle mesure une représentation typique peut être érigée en modèle par le participant. Un problème est à noter dans la mesure où l'élève ne traite pas la catégorie comme une catégorie conceptuelle, c'est-à-dire ne se montre pas capable d'abstraire la où les propriétés strictement nécessaires à l'application du théorème, mais fonde son raisonnement sur de multiples propriétés figuratives géométriques, dont plusieurs sont évidemment superflues et non pertinentes. Les élèves ramènent une situation non typique à une situation plus typique et ceci est un frein lorsqu'il s'agit d'exploiter la situation non typique.

Comme le soulignent Françoise et Jean Cordier (1991), on ne peut empêcher les représentations typiques de s'installer car elles peuvent constituer des points de référence, des relais pour la compréhension des élèves (Hupp & Mervis, 1981). Mais elles peuvent être source d'erreurs et d'un temps de résolution plus long lorsqu'une situation non typique est à exploiter.

Le degré de typicalité d'un figure géométrique est bien un facteur qui va changer le temps de résolution d'un exercice et sa réussite. La construction du modèle mental se fait en fonction du degré de typicalité de la figure. La construction du modèle mental est souvent erronée et est plus longue lorsque les participants se trouvent dans une situation non ou peu typique.

### C. Mémoire épisodique et mémoire de travail

Nous postulons qu'un modèle mental peut être stocké dans la mémoire épisodique et ainsi aider à la construction d'un modèle mental. Pour ce faire, nous avons observé si les modèles mentaux créés dans l'expérience 2 étaient récupérés et réutilisés dans l'expérience 3. Cette hypothèse est validée. En effet, nous retrouvons une diversité des figures plus grande et une vitesse d'exécution plus rapide. Cependant, nous ne pouvons pas conclure à savoir si c'est

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

l'expérience 2 qui a permis la construction de ces modèles ou si nous avons « juste » assisté à une réactivation de ceux-ci.

Un constat : par rapport à l'expérience 1, les élèves n'ont pas assimilé de nouvelles figures mais nous avons remarqué une diversité de figures beaucoup plus importante dans l'expérience 3. Alors que dans l'expérience 1 les meilleurs participants représentaient au plus 4 figures géométriques, dans l'expérience 3, on peut remarquer que les meilleurs participants représentent jusqu'à 6 figures différentes.

Par contre, la seule figure qui n'est toujours pas représentée par les élèves est le cône. Qualitativement, nous avons observé une augmentation des représentations de figures géométriques qui étaient insérées dans l'expérience 2. Le triangle rectangle est représenté par l'ensemble des participants, le losange voit sa représentation doublée et le triangle inscrit dans un cercle est passé d'une représentation à cinq. En revanche, les situations qui n'étaient pas représentées dans l'expérience 2 ont vu leurs représentations chuter tels que le carré ou la pyramide.

Notre protocole n'était pas opérationnalisé pour établir une distinction entre construction de nouvelles situations ou réactivation en mémoire de situations anciennes. Autrement dit, nous n'avons pas pu, dans cette étude, démontrer significativement que l'expérience 2 a aidé les élèves à construire un modèle mental des situations où s'ils avaient déjà stockés en mémoire ces modèles mentaux. En effet, nous n'avons pas pu distinguer si l'Expérience 2 a réactivé ou aidé à construire de nouveaux modèles mentaux. Peut-être que cette expérience a juste été pour les élèves un rappel de ces situations. Il serait intéressant d'orienter un prochain travail dans cette optique. Cependant la situation non typique, le cône, nous ouvre des éléments de réponse, puisque le cône n'a pas été assimilé comme modèle mental dans la mémoire épisodique car il n'a jamais été représenté dans l'expérience 3. Nous avons observé que cette situation conduit au maximum d'erreurs dans l'expérience 2 pour les participants *texte seulement* (plus de la moitié des élèves se sont trompés). Ce qui indique qu'un modèle mental qui n'est pas stocké en mémoire épisodique, semble contraindre l'élève à se construire un modèle mental qui sera en grande partie erroné (si le participant ne dispose pas en aide d'une image de la figure) car il n'est pas assimilé et donc pas stocké.

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

A noter que concernant les représentations des figures géométriques de l'expérience 3, aucune erreur n'est observée mais aucune nouvelle représentation n'a émergé. Cela est probablement dû au moment d'administration du protocole : l'expérience 3 a été proposée à la fin du cours, ainsi la plupart des élèves ne sont restés que 5 min devant leurs copies. A l'inverse, l'Expérience 1 s'est déroulée en début de cours et les sujets ont eut 10 min pour faire l'exercice. Il est donc possible que la durée et la motivation des élèves expliquent ce résultat.

## II. Modèle mental : effet du type d'énoncé.

Nous avons émis l'hypothèse que la présence d'une image de la figure géométrique dans l'énoncé facilitera la construction d'un modèle mental. Cette hypothèse est confirmée. Nos résultats ont en effet montré un effet significatif en fonction **du type d'énoncé proposé** : la présence d'une image dans l'énoncé améliore les performances des sujets, aussi bien en termes de temps que d'erreurs.

Cependant, des spécificités sont à indiquer sur le temps passé pour certains exercices.

En ce qui concerne l'exercice 2 et l'exercice 3 des situations non et peu typiques, il est intéressant de remarquer les écarts de temps en fonction des erreurs entre le groupe de participants *texte+image* et le groupe *texte seulement*. Plus l'écart en temps est faible entre les deux groupes d'énoncé, plus l'écart des erreurs est important. On pourrait alors expliquer cela en postulant que le groupe *texte seulement* a besoin de temps pour se construire un modèle mental correct avec les bonnes propriétés et la bonne représentation de la figure.

Si nous regardons les résultats des participants *texte seulement* :

- La situation de l'exercice 2 est la suivante : sur les 7 erreurs commises par le groupe *texte seulement*, 4 élèves ont dessiné une mauvaise représentation de la figure, 2 élèves non pas su représenter la figure (page vierge) et 1 s'est trompé sur les caractéristiques ou propriétés de la figure.

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

- La situation de l'exercice 3 est la suivante : sur les 4 erreurs 2 élèves ont dessiné une mauvaise représentation de la figure et 2 se sont trompés sur les caractéristiques ou propriétés de la figure. Les 4 sujets en erreurs mettent en moyenne 4.25 min pour résoudre le problème alors que les élèves en réussites mettent 6.4 min.

Il faut relever deux points : le premier indique que pour plus de la moitié des erreurs commises par le groupe *texte seulement*, ces erreurs renvoient à une mauvaise représentation de la figure géométrique. Le second point concerne le temps, qui est un facteur déterminant dans la construction d'un modèle mental. Il va conditionner la bonne représentation de la figure mais aussi ses propriétés essentielles.

### III. Degré de typicalité de la situation et type d'énoncé

Nous avons prédit que le groupe *texte seulement* mettrait plus de temps et commettrait plus d'erreurs à une situation non typique que typique. Cette hypothèse est partiellement validée. En effet, le groupe *texte seulement* commet significativement plus d'erreurs et met significativement plus de temps à la situation non typique que dans la situation typique. Par contre, pour le groupe *texte+image* on retrouve bien significativement plus d'erreurs si la situation est typique mais il n'y a pas d'effet de la situation sur temps.

Nous allons donc tout d'abord nous intéresser au groupe *texte+image*, qui a effectué un temps de résolution semblable pour les deux exercices. Le degré de typicalité des exercices n'a pas joué sur le temps de résolution, le résultat obtenu n'étant pas significatif. Les participants ont su dans les deux cas (exercices 4 et 5) libérer leur mémoire de travail grâce aux figures représentées sur la feuille d'exercices et ainsi se concentrer sur la formule mathématique, le théorème de Pythagore. Le problème a été d'oublier pour l'exercice 4 les propriétés de la figure. Les participants ont superposé une figure typique sur une figure non typique, c'est pourquoi dans le cas de l'exercice 4, nous obtenons des temps de résolution plus courts mais aussi le plus d'erreurs commises par les élèves.

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

Il faut souligner le fait que la moitié des participants *texte+image* est en situation de réussite pour cet exercice alors que pour les participants *texte seulement*, seuls deux élèves ont trouvé la réponse.

Pour les deux participants *texte seulement* qui ont trouvé la bonne réponse, ils ont su construire la bonne image mentale de la figure ainsi que ses propriétés, qui forment un tout : le modèle mental. A noter que ce sont aussi ces deux élèves qui ont passé le plus de temps sur l'exercice 4. Ce qui confirme le fait que le temps est un gage de réussite pour la construction d'un modèle mental. Il aurait été intéressant de savoir si ces élèves sont forts en mathématiques.

## Conclusion

L'objectif de cette étude était d'étudier la construction d'un modèle mental lors de la résolution de problème, plus spécifiquement lors de la résolution d'exercices sur le théorème de Pythagore. Nous avons pu mettre en évidence l'effet bénéfique des images liées au texte (type d'énoncé) et le rôle de la typicalité des figures géométriques.

Nous avons montré un effet du degré de typicalité des figures. Face à une situation typique, les élèves résolvent l'exercice plus rapidement et avec moins d'erreurs. Grâce aux situations typiques les participants se construisent plus facilement un modèle mental car la plupart d'entre eux a enregistré ce modèle mental en mémoire épisodique. C'est pourquoi le temps de résolution est plus court et les erreurs sont moins fréquentes.

Face à une situation non typique, les élèves commettent des erreurs plus fréquentes mais le temps de résolution n'est pas nécessairement plus court. Pour les situations non typiques, le modèle mental n'est pas assimilé et stocké en mémoire épisodique. On assiste bien à une construction d'un modèle mental mais ce dernier est élaboré à partir d'une situation plus typique donc la construction de ce modèle mental peut parfois être erronée.

Nous avons aussi montré l'effet bénéfique des images liées au texte. Les figures géométriques aident à la construction du modèle mental, dans la vitesse de construction de ce modèle (libère la mémoire de travail) mais aussi dans sa « bonne » construction (un modèle mental non erroné). Cependant lorsque la figure n'est pas présente sur un support, le temps est un facteur important pour la construction d'un modèle mental pertinent.

Il faut néanmoins souligner la modestie de l'échantillon étudié, qui, idéalement, devra être élargi si ce type d'étude venait à être réitéré.

Dans une autre recherche, il aurait été intéressant d'observer, pour le groupe 2, si les élèves les meilleurs en mathématiques obtiennent de meilleurs résultats ou si les erreurs sont homogènes. Cela pourra nous renseigner à savoir si la résolution de problème en géométrie est due à l'acquisition d'une méthode à établir devant une situation ou si c'est le résultat d'un entraînement à comprendre et à se construire un modèle mental.

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

Il aurait aussi été intéressant de repasser l'expérience n°2 avec les participants deux mois après cette présente recherche. On aurait pu étudier ainsi si les représentations non typiques peuvent être assimilées et stockées en mémoire épisodique. Et donc voir si la réussite des élèves augmente ainsi que la vitesse de résolution des exercices.

## Bibliographie

- DENIS, M., DE VEGA, M. (1993). *Modèles mentaux et imagerie mentale*, in M. -F. Ehrlich, H. Tardieu et M. Cavazza (Edit.), *Les modèles mentaux : approche cognitive des représentations*, Paris, Masson, 79-100.
- GYSELINCK, V. (1996). Illustrations et modèles mentaux dans la compréhension de textes. *L'année psychologique*, 96 (3), 495-516.
- HUPP, S.C. et MERVIS, C.B. (1982). Acquisition of basic objects categories by severely handicapped children. *Child Development*, 53, 760-767.
- JOHNSON-LAIRD, P.N. (1977). Procedural semantics. *Cognition*, 5, 189-214.
- JOHNSON-LAIRD, P.N. (1980). Mental models in cognitive science. *Cognitive Science*, 4, 71-115.
- JOHNSON-LAIRD, P.N., & GARNHAM, A. (1980). Descriptions and discourse models. *Linguistics and Philosophy*, 3, 371-393.
- JOHNSON-LAIRD, P.N. (1981). Comprehension as the construction of mental models. In H.C.
- JOHNSON-LAIRD, P.N. (1983). *Mental models : Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness*. Cambridge : Cambridge University Press.
- JOHNSON-LAIRD, P.N., & BARA, B. (1984). Syllogistic inference. *Cognition*, 16, 1-61.
- JOHNSON-LAIRD, P.N., & BYRNE, R.M.J. (1991). *Deduction*. Hove, Sussex : Lawrence Erlbaum Associates.
- KINTSCH, W. (1972). *Notes on the structure of semantic memory*. In E. Tulving & W. Donaldson (Eds.), *Organisation and memory*. New York : Academic Press.
- KINTSCH, W., & VAN DIJK, T.A. (1978). Toward a model of text comprehension and production. *Psychological Review*, 85, 363-394
- TULVING, E. (1972). *Episodic and semantic memory*. In E. Tulving & W. Donaldson (Eds.), *Organization and memory*. New York : Academic Press.

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

TARDIEU, H., EHRLICH, M. -F., GYSELINCK, V. (1992). Levels of representation and domain-specific knowledge in comprehension of scientific texts, *Language and Cognitive Processes*, 7, 335-352.

VAN DIJK T. A., KINTSCH W. (1983). Strategies of discourse comprehension, New York, Academic Press.

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

## Annexes

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

## Annexes 1 : tableau des représentations des figures de l'expérience 1

	Triangle rectangle	Carré	Rectangle	Losange	Triangle inscrit dans un cercle	Pyramide	Cône	Cube	Parallélépipède rectangle	Association de figures
S1	1	1			1					
S2	1	1		1	1					
S3	1									
S4	1	1		1						
S5										
S6	1	1		1			1			
S7	1						1			
S8	1			1						
S9	1	1		1		1				
S10	1	1		1		1				
S11	1	1		1						
S12	1	1		1			1			
S13	1	1		1						
S14	1	1		1						
S15	1	1								
S16	1				1					
S17	1	1		1						
S18	1	1		1						
S19	1	1		1						
S20	1									1
S21	1	1								
S22	1	1		1			1			
S23	1	1		1		1				
Total	22	17	15	5	1	4	0	0	0	1

Nombre de réponses	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de sujets	2	6	8	6	0	0	0	0	0

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

Types de réponses erronées (*)	1	2	3
nombre de sujets	4	2	1

1(\*) = Triangle isocèle

2(\*) = Triangle rectangle

3(\*) = Trapèze

## Annexes 2: Tableau de l'expérience 2

		Tableaux des temps				
Exercices		1	2	3	4	5
Exercices avec l'aide des figures géométriques						
Sujets						
	1	8	5	4	5	4
	6	5	2	4	3	3
	7	6	5	3	4	7
	8	4	5	7	7	3
	10	5	5	4	3	5
	11	5	7	5	3	3
	13	4	5	4	3	4
	15	2	3	4	3	3
	17	5	3	2	5	3
	18	4	2	4	4	2
	23	10	5			4
Résultats		58	47	41	40	41
Exercices sans les figures géométriques						
	21	4	3	3	8	2
	20	5	3	3	5	3
	19	4	4	4	4	3
	16	5	6	9	6	4
	3	7	5	7	11	5
	14	8	6	8	6	4
	22	12	6	6	5	10
	5	7	4	4	4	3
	4	9	5	6	5	4
	12	12	7	6	4	4
	9	9	10	5	4	4
	2	9	5	7	9	3
Résultats		91	64	68	71	49

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

Tableaux des erreurs					
Exercices	1	2	3	4	5
Exercices avec l'aide des figures géométriques					
Sujets					
1				1	
6				1	1
7				1	
8			1	1	
10				1	
11		1		1	1
13			1		
15				1	
17					
18					
23					
Résultats	0	1	2	7	2
Exercices sans les figures géométriques					
	1	2	3	4	5
21					
20	1	1	1	1	
19			1	1	
16	1			1	
3		1			
14		1		1	
22	1	1	1	1	1
5		1	1	1	1
4		1		1	
12	1			1	
9		1		1	
2				1	
Résultats	4	7	4	10	2

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

Tableaux des types d'erreurs					
Exercices	1	2	3	4	5
Exercices avec l'aide des figures géométriques					
Sujets					
1				a,d	
6				a,c	c
7				a	
8			f	f	
10				a	
11		d		a,c	c
13			c		
15				a	
17					
18					
23					
Exercices sans les figures géométriques					
Exercices	1	2	3	4	5
21					
20	d	b	b	a	
19			c	a	
16	f			a	
3		f			
14		b		a	
22	d	b	b	a	c
5		d	c	a	c
4		f		a	
12	e			a	
9		b		b	
2				a	

Types d'erreurs :

A : Non prise en compte de l'angle droit

B : Mauvaise représentation de la figure géométriques sur la feuille

C : Inversion de l'hypoténuse avec un des cotés du triangle

D : Utilise les mauvaises dimensions (confusion entre diamètre et rayon ou diagonale et diagonale/2)

E : Erreur de calcul

F : Page vierge

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

### Annexes 3 : Tableaux des représentations géométriques de l'expérience 3

	triangle rectangle	carré	rectangle	losange	triangle inscrit dans un cercle	Pyramide	cône	cube	Parallélépipède rectangle	Association de deux figures
S1	1	1	1	1						
S2	1	1	1	1						
S3	1		1							
S4	1	1	1							
S5	1									
S6	1	1	1							
S7	1		1			1				
S8	1		1							
S9	1	1	1							
S10	1	1	1	1	1	1				
S11	1	1	1	1	1	1				
S12	1	1	1	1	1	1	1			
S13	1		1							
S14	1		1							
S15	1	1								
S16	1			1						
S17	1	1	1	1	1					
S18	1	1	1							
S19	1	1	1							
S20	1	1			1					1
S21	1	1		1	1					
S22	1	1	1							
S23	1	1	1	1						
Expérience 1	22	17	15	5	1	4	0	0	0	1
Expérience 3	23	16	18	10	5	2	0	0	0	1

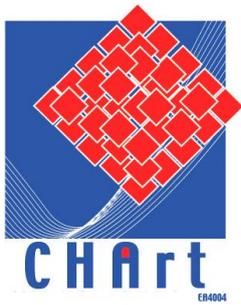
Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

Nombres de réponses	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de sujets	1	6	7	5	3	1	0	0	0
Expérience 1	2	6	8	6	0	0	0	0	0
Expérience 3	1	6	7	5	3	1	0	0	0

Il n'y a pas eu d'erreurs sur les représentations des figures géométriques

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

## Annexes 4 : Demande de passation



**Sandra Jhean-Larose**  
Professeur des Universités  
Université d'Orléans  
Equipe CHArt (Cognitions Humaine et Artificielle)  
EA 4004 EPHE-Paris VIII  
41, Rue Gay-Lussac  
75005 Paris  
Téléphone : 33 (0) 06 83 28 79 07

Fondettes le 12 janvier 2012

à l'attention de Monsieur Farge  
Principal du Collège H. Bergson  
Saint Cyr sur Loire

Monsieur, cher collègue,

La recherche menée par Monsieur William Pigache s'inscrit dans le cadre du module « Initiation Recherche » du Master MEEFA (2ème année).

Cette étude menée sous ma direction porte sur la construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problèmes appliquée au Théorème de Pythagore.

La passation de l'épreuve consistant en la résolution d'exercices s'effectue en collectif classe entière. La durée moyenne estimée est de 30 à 45 mns.

Nous souhaiterions travailler avec des élèves de troisième de la classe de Madame Boissard.

Espérant que vous recevrez favorablement la demande de William, je me tiens bien évidemment à votre disposition pour toute information complémentaire.

Très cordialement, S. Jhean-Larose

Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore

**William PIGACHE**

**Construction d'un modèle mental au cours d'une activité de résolution de problème :  
L'application du théorème de Pythagore**

**Résumé**

**Un modèle mental** est une forme de représentation des connaissances comme étant la façon naturelle par laquelle l'esprit humain construit la réalité, en conçoit des simulations mentales. Elles peuvent être représentées par un ensemble de propositions, un ensemble d'images ou même un réseau de neurones. L'objectif de la présente recherche était de mieux comprendre la construction d'un modèle mental lors de la résolution de problème. Les problèmes étaient de résoudre des exercices de géométrie suivant la propriété du théorème de Pythagore. Afin d'expliquer au mieux la construction d'un modèle mental, nous nous sommes intéressés à plusieurs variables dont la combinaison de deux éléments que sont les énoncés des exercices et la typicalité des figures géométriques. Le but était de voir si l'association d'un énoncé d'exercice avec une figure géométrique a un effet bénéfique sur la construction d'un modèle mental. Deux groupes de sujets d'une classe de troisième étaient placés dans une situation de résolution de problème, un groupe de 11 élèves possédant l'énoncé texte associé à une figure géométrique et un groupe de 12 élèves ne possédant que l'énoncé texte. Les résultats ont mis en évidence un effet bénéfique de la présence de figures géométriques associée à un énoncé texte lors de la résolution de problème. On a montré les effets du degré de typicalité des figures géométriques, à savoir que plus les figures géométriques sollicitées ont un haut degré de typicalité par rapport à la situation de problème, plus cela est bénéfique à la résolution. Enfin nous avons confirmé qu'un modèle mental peut être stocké en mémoire épisodique et ainsi aider à la construction d'un modèle mental.

**Mots clés :**

*Modèle mental, modèle de situation, inférence, double codage, théorie de la typicalité, mémoire épisodique, mémoire de travail.*

---

A mental model is a representation of the surrounding world, created by the human mind, who allows the construction of a certain reality, of mental simulations. These representations can be propositions, images or a group of neurons. The aim of this study was to provide a better understanding of how a mental model is constructed by our mind in a geometrical problem, involving the Pythagoras's theorem. We studied two variables : the type of wording and the typicality of shapes. We wanted to study if having a drawing of the shape with the wording could help for the construction of a correct mental model. Two groups of pupils in troisième (highest class in French high school) were asked to resolve geometrical problems : 11 pupils had wording of exercises with the shape drawing while 12 other pupils just had the wording (just text). The outcome showed a positive effect of the association of drawing with the text to help resolve the problem. The results also showed an effect of typicality of the shapes : problems involving a shape with a strong typicality level were easily resolved. Finally, we showed that a mental model can be saved in episodic memory and help in the construction of an other mental model.

**Key words :**

*Mental model, situation model, double coding, typicality theory, episodic memory, working memory*