



HAL
open science

Les doigts : une collection témoin privilégiée pour représenter les nombres

Anaïs Paillard

► **To cite this version:**

Anaïs Paillard. Les doigts : une collection témoin privilégiée pour représenter les nombres. Education. 2012. dumas-00782629

HAL Id: dumas-00782629

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00782629>

Submitted on 30 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Universités de Nantes, d'Angers et du Maine

**Institut Universitaire de Formation des Maîtres
Site du Mans**

Année universitaire 2011-2012

LES DOIGTS :
**une collection témoin
privilegiée
pour représenter les
nombres**

PAILLARD Anaïs

Directeurs de mémoire :
Guillaume MOUSSARD
Agnès DELON

**Master 2 Métiers de l'Enseignement de l'Éducation et de la Formation
Spécialité Enseignement du Premier Degré**

Remerciements

Dans le cadre de la réalisation de mon étude en Histoire des Sciences et plus particulièrement en Histoire des Mathématiques,

Je remercie :

- Mr MOUSSARD, directeur de mémoire, pour son écoute et sa disponibilité tout au long de ces deux années de Master, ainsi que pour l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer dans l'élaboration de ce travail ;
- Mme Agnès DELON, directrice de mémoire et Professeur d'École Maître Formateur, pour ses conseils et pour m'avoir accueillie dans sa classe afin de recueillir les informations nécessaires à la bonne réalisation de mon mémoire.

Je tiens également à remercier tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin dans ce travail.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Remerciements.....	2
Introduction.....	5
Partie Historique.....	8
<i>I- Les bases : une idée fondamentale pour représenter les nombres.....</i>	8
<i>A) Qu'est-ce qu'une base ?.....</i>	<i>8</i>
i. Définition formelle	8
ii. L'idée de groupement.....	9
iii. Peut-on préférer une base plutôt qu'une autre ?.....	11
<i>B) Quelles ont été et quelles sont les bases existantes ?.....</i>	<i>12</i>
i. La base 4 : une base encore mystérieuse.....	13
ii. La base 5 : une distinction entre notion de bases et notion de chiffres.....	13
iii. Des vestiges de la base 12 dans notre civilisation.....	14
iv. La base 20 : un héritage de la civilisation maya ?.....	15
a La civilisation maya.....	16
b Reste-t-il des vestiges de la base vingt ?.....	18
v. La base 60 : un système élaboré pour des raisons commerciales ?.....	19
a En Mésopotamie.....	19
b Chez les Babyloniens.....	20
c Reste-t-il des vestiges de la base soixante ?.....	21
<i>II- La base dix et la morphologie humaine.....</i>	22
<i>A) Son origine.....</i>	<i>22</i>
i. Le principe additionnel de la base dix en Égypte.....	23
ii. Le principe positionnel des mathématiques chinoises.....	26
<i>B) Comment les doigts représentent les nombres dans un système en base dix ?.....</i>	<i>28</i>
i. La méthode occidentale.....	28
ii. La méthode asiatique.....	28
iii. Compter jusqu'à dix milliards avec les doigts.....	29

Partie pédagogique.....	30
<i>I- Les doigts : une collection témoin privilégiée en maternelle.....</i>	31
<i>A) La connaissance des nombres en tant qu'élément essentiel.....</i>	<i>31</i>
<i>B) Les doigts comme représentation du nombre.....</i>	<i>32</i>
<i>C) Les inconvénients de cette collection-témoin.....</i>	<i>33</i>
<i>II- Mise en place de la situation pédagogique.....</i>	36
<i>A) Les textes officiels et l'utilisation des doigts à l'école.....</i>	<i>36</i>
<i>B) Description de la classe.....</i>	<i>37</i>
i. Une grande hétérogénéité.....	37
ii. Les pré-requis nécessaires à la mise en place des séances.....	38
<i>C) La situation pédagogique choisie : « Dix dans un dortoir »</i>	<i>39</i>
i. Description de la situation pédagogique retenue.....	39
ii. Les procédures que peuvent utiliser les élèves.....	40
iii. Ce que va apporter cette situation pédagogique aux élèves.....	41
<i>III- Analyses a priori et a posteriori.....</i>	43
<i>A) Analyse a priori.....</i>	<i>43</i>
i. Pourquoi avoir choisi de mener ces deux séances de cette manière?.....	43
ii. Anticipation sur la réaction des élèves.....	44
<i>B) La première séance effectuée.....</i>	<i>44</i>
i. Compte-rendu.....	44
ii. Conclusions.....	47
<i>C) Deuxième séance effectuée.....</i>	<i>48</i>
i. Compte-rendu.....	48
ii. Conclusions.....	51
Conclusion	53
Bibliographie.....	56
Annexes.....	59

Introduction

Même s'il envahit la vie de tous les jours : acheter du pain, faire les comptes ou encore effectuer une recette de cuisine, le nombre est un concept abstrait. Il convient, ici de commencer par définir ce qu'est un nombre. Une définition du **nombre** est : « *La notion de nombre revêt deux aspects complémentaires : l'un dit cardinal qui ne repose que sur le principe de l'appariement, et l'autre dit ordinal, qui exige à la fois le procédé de l'accouplement et celui de la succession.* » (IFRAH. G, 1981, p.66). Ceci est une notion que l'on ne distingue pas encore assez bien. L'aspect cardinal est la manière de compter : un, deux, trois...etc, alors que l'aspect ordinal montre l'ordre : le premier, le deuxième, le troisième...etc.

Afin de conceptualiser cette notion de nombre, il est nécessaire de pouvoir le représenter. Cependant, un nombre a DES représentations. En effet, le nombre trois, par exemple, peut être représenté matériellement par trois billes, mais aussi par trois personnes ou encore par trois allumettes. Cette représentation du nombre est indissociable du concept d'appariement. L'appariement est l'action d'apparier, c'est-à-dire de mettre en relation des objets qui ont même valeur. On pourrait associer cette notion à l'idée de dénombrer dont la définition est la suivante :

Dénombrer, c'est déterminer le nombre des éléments d'un ensemble en faisant correspondre à chacun d'entre eux, et successivement, chacun des nombres de la série des entiers naturels (ce sont tous les entiers en partant de l'unité : un, deux, trois...etc).

Le dénombrement est donc le résultat de l'action de compter. En effet, l'action de **compter** une collection « *c'est assigner à chacun de ses constituants un symbole (c'est-à-dire un mot, un geste ou encore un signe graphique) correspondant à un nombre puisé dans la suite naturelle des entiers, en commençant par l'unité et en procédant dans l'ordre jusqu'à l'achèvement des éléments de cette collection.* » (IFRAH. G, 1981, p.63). Autrement dit, compter, c'est faire correspondre successivement à chacun des éléments d'un ensemble, chacun des nombres de la série des entiers naturels.

On associe donc, ici, chaque nombre a une représentation matérielle qui permet de conceptualiser le nombre et de donner des renseignements sur la quantité qu'il représente.

Cette représentation du nombre peut se faire de n'importe quelle manière y compris en utilisant le corps humain. Le choix se porte, ici, sur une représentation ayant recours aux doigts. Une définition semble nécessaire, celle de l'anthropomorphisme qui est l'attribution des caractéristiques de la morphologie humaine à une autre entité. Cette autre entité sera le nombre puisque le choix est fait de représenter le nombre par les doigts. L'expression d' « origines anthropomorphiques du nombre » sera présente dans ce document, elle signifie que la représentation du nombre a ses origines dans la morphologie même de l'Homme. En effet, cette origine est facilitée par la présence des doigts n'importe où, puisqu'ils sont SUR l'homme.

Les doigts deviennent alors une collection témoin privilégiée. Une autre définition semble alors importante : celle de collections témoins qui « *sont des collections particulières qui permettent de communiquer des quantités, la communication pouvant être non verbale* » (<http://www3.ac-nancy-metz.fr>).

Des historiens en mathématiques, comme Georges IFRAH, ont permis de montrer que depuis longtemps, les hommes ont utilisé leurs doigts dans le processus de comptage et pour représenter les nombres au cours de l'histoire. Des spécialistes en didactique se sont également positionnés sur ce sujet, comme Rémy BRISSIAUD ou Stella BARUK : ils ont cherché des pistes pédagogiques pour savoir comment enseigner la numération à l'école. La **numération** étant l'action de compter, de dénombrer alors que **calculer**, c'est effectuer un calcul, déterminer par le calcul numérique ou encore évaluer quelque chose par le raisonnement.

Mais alors comment peut-on expliquer le ou les lien(s), s'ils existent, entre le système de numération et la manière de compter et de calculer sur les doigts ? Les doigts peuvent-ils aider dans la compréhension de notre système en base dix ? Si oui, comment les doigts aident-ils dans cette compréhension ? Sont-ils vraiment un outil efficace ?

Toutes ces questions, auxquelles des éléments des réponses seront apportées plus loin, amène la problématique suivante, à savoir :

En quoi les doigts sont-ils une collection témoin privilégiée pour représenter les nombres ?

Deux parties semblent nécessaires pour apporter des réponses à ces questions : une partie théorique avec des éléments historiques et une partie plus pratique, dans laquelle une transposition didactique sera proposée.

Les doigts étant un choix possible pour représenter les nombres, différents groupements sont possibles pour cette représentation. Ceci amène donc à la notion de base. Je commencerai donc par définir ce qu'est une base. Puis, je montrerai que l'histoire affirme que la morphologie humaine a une influence sur la façon de représenter les nombres. En effet, même si la base dix (celle que nous utilisons aujourd'hui dans notre pays) s'est imposée, d'autres bases comme la base 5, 20 ou encore la base 60 ont existé. Toutes celles-ci ont un appui anthropomorphique. Dans un deuxième temps, je m'intéresserai plus particulièrement à la base dix qui est la plus utilisée aujourd'hui. L'historique de l'arrivée de cette base dans notre civilisation semble pertinente pour comprendre notre raisonnement par la suite.

Cette partie historique donnera les éléments théoriques et historiques nécessaires pour élaborer une partie plus pratique. Je commencerai par interroger des auteurs spécialistes de la question. Ceci permettra de comprendre en quoi l'usage des doigts pour l'apprentissage de la numération peut être un bon outil. Puis, je présenterai l'élaboration de séances en Grande Section sur la compétence « *Découvrir et comprendre la fonction du nombre, en particulier comme représentation de la quantité* » (BO du 19 juin 2008, p.15). A travers l'analyse de ces séances, je montrerai en quoi les doigts sont un outil privilégié dans l'apprentissage de la numération.

Grâce à tout ce déroulement, les hypothèses suivantes seront affirmées ou réfutées : l'usage des doigts aide les élèves à comprendre la notion de nombre et à s'approprier notre système de numération ET les doigts sont une collection témoin privilégiée pour représenter les nombres.

Partie Historique

Cette partie historique permettra de comprendre comment les doigts ont été utilisés pour représenter les nombres. Elle sera composée de deux sous-parties. Une première, dans laquelle, l'histoire de la création des bases montrera qu'il n'y a pas une base plus efficace qu'une autre et que le choix d'une base est plus de l'ordre culturel que de l'ordre mathématique. Le terme de « base » sera tout d'abord défini. Puis, l'origine des différentes bases existantes permettra de comprendre cette idée.

Dans une seconde partie, la base dix sera plus particulièrement étudiée d'un point de vue historique puisque c'est celle que les élèves devront comprendre. En effet, à cause de la mondialisation, cette base est utilisée aujourd'hui dans une grande majorité des pays du monde et plus particulièrement dans la civilisation occidentale qui s'est imposée.

I- Les bases : une idée fondamentale pour représenter les nombres.

A) Qu'est-ce qu'une base ?

i. Définition formelle

Tout nombre N s'écrit de manière unique, dans une base donnée B , comme somme de puissances de B . Ainsi :

$$N = a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + \dots + a_0 B^0; \text{ avec :}$$

- le nombre n est unique¹ ;
- les coefficients a_i sont nuls ou compris entre 0 et $B - 1$;

1 n étant le nombre de chiffres moins un dans le nombre N . En effet, un nombre s'écrit avec des chiffres que l'on positionne de droite à gauche en commençant par le chiffre des unités que l'on notera le chiffre du rang 0. Par exemple, le nombre $N=6743$ a 4 chiffres, celui du rang 0 (le plus à droite) est 3, celui du rang 1 est 4, celui du rang 2 est 7 et celui du rang $n=3$ (4-1) est 6.

2 Les coefficients a_i sont les chiffres du nombre N , i étant le rang de ce chiffre, il est compris entre 0 et n .

Un exemple semble nécessaire à la compréhension de ce terme de « base » et de cette définition mathématique. Aujourd'hui, en France comme dans de nombreux autres pays (que nous détaillerons plus tard), c'est la base dix qui est utilisée pour compter. Ce système comporte dix symboles : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Par exemple, dans ce système tout nombre N entier peut s'écrire :

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_0 10^0$$

Pour $N=587$, $n=3-1=2$. 7 est le nombre d'unités et est au rang 0 du nombre N, 8 est au rang 1 et 5 est le chiffre du rang 2. Ainsi, on peut écrire 587 de la manière suivante :

$$587 = 5 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 7 \times 10^0;$$

En effet, on a :

$$5 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 7 \times 10^0 = 5 \times 100 + 8 \times 10 + 7 \times 1 = 500 + 80 + 7 = 587.$$

Ce qui confirme ce qui est écrit plus haut.

Dans une autre base, la démarche fonctionne exactement de la même manière. Par exemple, la base huit comporte huit symboles : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7. Ainsi, le nombre $\overline{746}^8$ en base huit, c'est :

$$\overline{746}^8 = 7 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 6 \times 8^0 = 7 \times 64 + 4 \times 8 + 6 \times 1 = 448 + 32 + 6 = 486^3$$

ii. L'idée de groupement

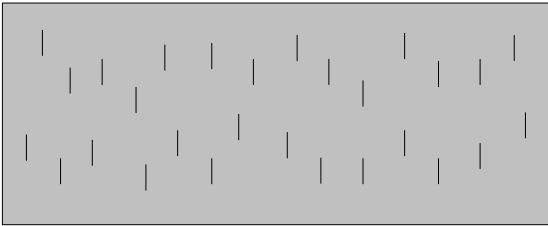
Cette définition formelle ne permet pas de comprendre en quoi les bases sont une idée fondamentale pour représenter les nombres. En effet, cette définition s'attache plus à l'écriture chiffrée des nombres qu'à la représentation même du nombre.

La base peut être définie de la manière suivante : c'est « *le nombre qui sert à définir un système numérique* ». Un système numérique étant un « *système de représentation des nombres* » : la base est donc bien une idée fondamentale pour représenter ces nombres puisque c'est elle-même qui définit le système de représentation des nombres (<http://www.cnrtl.fr/>).

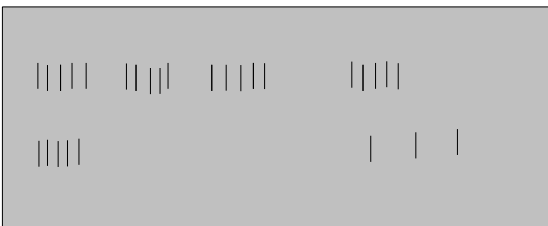
3 Nous noterons, ici, les nombres en base 10 de la même manière que le texte puisque c'est la base que nous utilisons habituellement. Les nombres dans une autre base, quand à eux, seront surlignés et la base, dans laquelle il se trouve, sera indiquée en haut en exposant. Les nombres en exposant dans les égalités restent des puissances.

En fait, derrière cette notion de base, se cache l'idée de faire des paquets pour mieux représenter les nombres. En effet, il y a beaucoup de nombres et pour aider à représenter les quantités, et particulièrement les grandes, les groupements peuvent être pratiques et plus efficaces. Si par exemple, un berger veut compter son troupeau en faisant une encoche sur un bâton à chaque bête qui passe, il sera plus facile par la suite de dénombrer la quantité exacte de bêtes si des paquets sont faits. C'est beaucoup plus compliqué de compter des bâtons alignés que de compter des paquets de bâtons. Cette dernière méthode étant plus efficace. Pour cela, un petit exercice permettra de tester cette affirmation :

Combien de bâtons sont dans ce cadre ?



Combien de bâtons sont dans ce cadre sachant qu'ils sont rangés par paquets de cinq ?



Par ces deux exercices, on voit qu'il est plus facile et plus rapide de compter les bâtons dans le cas où des groupements sont déjà en place. De plus, cette méthode est plus efficace puisqu'on a moins de chance de se tromper.

Les groupements sont donc une notion primordiale de la notion de base et donc de la représentation des nombres. Au contraire de la définition formelle qui associe la base à l'écriture chiffrée des nombres, ici la notion de base est associée à la nécessité de groupements pour représenter les nombres.

La notion de base décrite comme étant l'idée de faire des paquets implique donc que la base peut être non positionnelle. Pour comprendre cette idée, il faut mettre en parallèle deux systèmes différents. Le premier est le système de numération occidental. Pour écrire les nombres dans ce système (celui qu'on utilise en France), les chiffres sont alignés : le plus à

droite désignant les unités, le suivant en partant vers la gauche désignant les dizaines. Ainsi, ce second chiffre doit être multiplié par dix pour définir la quantité qu'il représente. Par exemple, le nombre s'écrivant 23 représente deux dizaines et trois unités et donc vingt plus trois unités. Le deuxième système,, qui peut y être comparé, est le système égyptien qui sera décrit plus précisément plus loin. Dans ce système, il n'y a pas de chiffre mais des symboles. Il existe un symbole pour représenter une unité, un symbole pour représenter les dizaines, un pour les centaines...etc. Ainsi, pour représenter vingt-trois, deux symboles de dizaines et trois symboles d'unités sont représentés. Ils n'ont pas besoin d'être alignés puisqu'ils représentent chacun une quantité différente.

iii. Peut-on préférer une base plutôt qu'une autre ?

Le choix d'une base ne s'impose pas d'un point de vue mathématique. Tous les choix sont équivalents puisque que tout nombre peut s'écrire dans n'importe quelle base. Par exemple, dans notre système de numération en base dix, la quantité représentant deux cent soixante-dix-huit allumettes s'écrit 278. Ce nombre en base dix s'écrira donc $\overline{278}^{10}$ afin de le différencier de ce même nombre écrit dans une autre base.

Dans la base six, les symboles 7 et 8 n'existent pas puisque comme vu précédemment la base six comporte six symboles, à savoir : 0, 1, 2, 3, 4 et 5.

Ici, l'explication du changement de base ne sera pas explicitée puisque ce n'est pas l'objet de l'étude. Les étapes sont quand même décrites ci-dessous :

Étapes de calcul pour le changement de base :

$$278 = 6 \times 46 + 2$$

$$46 = 6 \times 7 + 4$$

$$7 = 6 \times 1 + 1$$

$$6 = 6 \times 1$$

Ainsi, en base six, le nombre deux cent soixante-dix-huit s'écrit $\overline{1142}^6$. Pour vérifier, faisons le calcul suivant (voir le paragraphe « Définition formelle ») :

$$\overline{1142}^6 = 1 \times 6^3 + 1 \times 6^2 + 4 \times 6^1 + 2 \times 6^0 = 1 \times 216 + 1 \times 36 + 4 \times 6 + 2 \times 1 = 216 + 36 + 24 + 2 = \overline{278}^{10}.$$

Un nombre peut donc s'écrire dans deux bases différentes sans difficulté particulière.

Une différence se trouve quand même dans l'écriture des nombres utilisant différentes bases. Plus la base est grande, plus on a besoin de chiffres ou de symboles. Plus la base est petite plus on va avoir un grand nombre « horizontalement ». Par exemple, la base douze comporte douze symboles. Notons ces symboles : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A et B. La quantité onze s'écrit alors \overline{B}^{12} . En base deux, les symboles existants sont 0 et 1. La quantité onze s'écrira alors $\overline{1011}^2$. Ainsi, l'écriture en base deux d'un même nombre en base douze est plus grande.

Le choix d'une base n'est donc pas essentiellement mathématique. La partie suivante essaiera donc de répondre aux questions suivantes : Quelles sont les bases existantes ? Pourquoi certains peuples ont choisi une base plutôt qu'une autre ?

B) Quelles ont été et quelles sont les bases existantes ?

Au fil de leurs découvertes et de leurs besoins, les hommes des premières civilisations utilisaient des entailles sur des bâtons, des cailloux ou tout autre objet facile à manipuler. Ils pouvaient également se servir de leur corps, en particulier des mains et des pieds, pour compter.

Georges IFRAH écrit : « *Et comme tout le monde a commencé à compter sur ses dix doigts, la plupart des systèmes de numération qui existent actuellement sont de base dix. Il y eut pourtant quelques originaux [...]* » (IFRAH. G, 1981, p.9). Autrement dit, les premiers hommes se sont sans doute servis de leur doigts pour compter. Ceci expliquerait peut-être le fait qu'aujourd'hui de nombreuses civilisations utilisent la base dix pour compter. Cependant, il y a quand même eu des civilisations qui se sont servies de bases différentes.

Mais ces autres bases n'ont-elles pas comme la base dix des origines anthropomorphiques ?

Cette partie sera consacrée à l'origine des bases. La base dix ne sera pas détaillée ici puisqu'elle le sera dans la partie suivante.

Aujourd'hui, les bases 2, 8 et 16 sont utilisées en informatique et en électronique. Ces bases ne seront pas développées puisqu'elles ne servent pas à compter. En effet, l'origine du

système binaire est plus « électrique ». Les nombres 0 ou 1 sont attribués en fonction du passage de l'électricité ou pas.

i. La base 4 : une base encore mystérieuse

Nous n'avons pas beaucoup de détails sur cette base qui reste encore mystérieuse. Cependant, l'utilisation de la base quatre s'explique peut-être par le fait que les hommes comptaient en utilisant le pouce qui montrait l'index, l'annulaire, le majeur et l'auriculaire successivement (IFRAH. G, 1981, p.115).

À l'heure actuelle, quelques tribus de la Terre de Feu⁴ et d'Amérique du Sud utilisent encore les systèmes ternaire et quaternaire (bases trois et quatre).

ii. La base 5 : une distinction entre notion de bases et notion de chiffres

La base cinq aurait également une origine anthropomorphique : elle viendrait du fait que certains peuples avaient pris l'habitude de ne compter que sur une seule main.

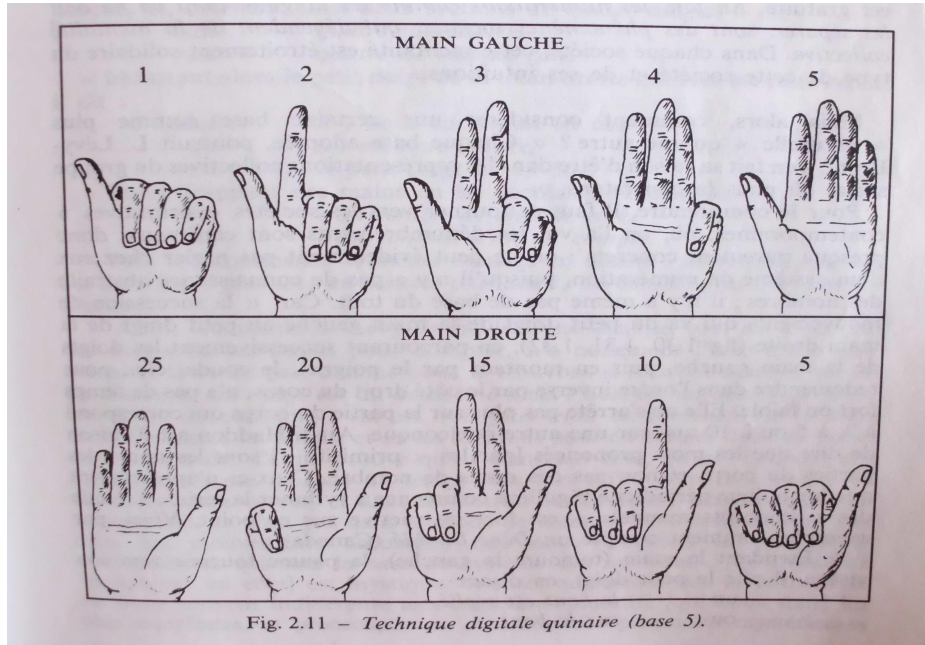
On retrouve une technique digitale dans les régions d'Afrique et d'Océanie qui permet de compter jusqu'à trente. On compte de un à cinq avec la main gauche, puis avec la main droite, on retient cinq avec le pouce (les « cinquaines⁵ »). Dès que l'on a cinq nouveaux doigts sur la main gauche, on lève un nouveau doigt de la main droite. Ainsi, lorsque l'index est levé, on a dix ; quinze avec le majeur ; vingt avec l'annulaire et vingt-cinq avec l'auriculaire. On peut donc aller jusqu'à $5 \times 5 + 5 = 30$.

4 Terre de Feu est le nom donné à l'archipel de l'extrême-sud du continent sud-américain. Il est composé de la Grande Ile de Terre de Feu et d'une grande quantité de petites îles comme Dawson, Navarino, Hoste, de Los Estados.

5 Ce mot n'existe pas mais on se permet ici de l'employer pour désigner un paquet de cinq comme on utilise chez nous le mot « dizaine ». Ceci afin de mieux comprendre le principe.

On peut illustrer cette affirmation de Georges IFRAH par une figure issue de son livre :

Technique digitale quinaire (IFRAH. G, 1981, p.114) :



Ceci montre la distinction entre la base pour l'écriture chiffrée des nombres et la base pour la représentation des nombres. En effet, un doigt levé de la main droite correspond à un groupement de cinq. Ainsi, trois doigts levés de la main droite représente la quantité de : $3 \times 5 = 15$ unités.

Cette base cinq est encore utilisée chez certaines populations en Inde pour les besoins les plus courants, ainsi qu'en Amérique, dans les langues caraïbe et *arawak* ; en Amérique du Sud, dans le *guarani* ; en Océanie, dans l'*api* et le *houaibou* ; en Afrique, dans le *peul*, le *wolof*, le *sérère*, mais aussi dans certaines langues *mandé* (le *dan*), *krou* (le *bété*) ou *voltaiques* (le *kulango*) ; en Asie, dans le khmer (cf M.Malherbe ; F.-A. Pott) (IFRAH. G, 1981, p.69).

iii. Des vestiges de la base 12 dans notre civilisation

Cette base (ainsi que la base 6) est encore utilisée en quelques endroits d'Afrique. La base douze est également encore utilisée en Inde, en Indochine, en Pakistan, en Afghanistan, en Égypte, en Syrie, en Turquie, en Iran et en Irak (<http://histoiredechiffres.free.fr/index.php>).

Pour l'instant, nous n'avons détaillé que des systèmes de numération ayant des origines

anthropomorphiques. Peut-on dire que la base douze est une exception ?

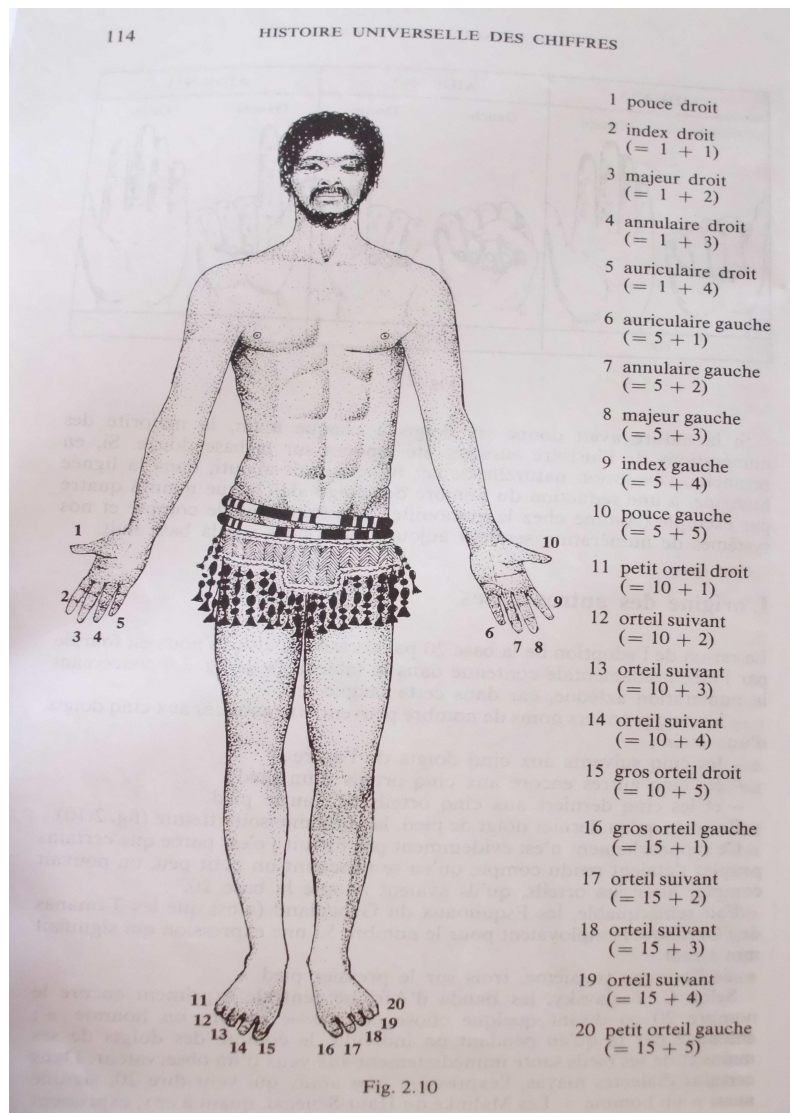
Peut-être pas. En effet, en comptant nos phalanges avec le pouce, on arrivera à $3 \times 4 = 12$ (le pouce servant à compter). En utilisant la deuxième main pour les retenues, nous pouvons donc compter jusqu'à $12 \times 12 + 12 = 156$. Donc, cette base aurait quand même une origine anthropomorphique, même si au premier regard de nos mains, nous avons du mal à voir douze (<http://histoiredechiffres.free.fr/index.php>).

De plus, il reste quelques vestiges de cette base dans notre manière de compter. On parle d'une douzaine (12) et d'une grosse (une douzaine de douzaine soit 144) pour compter les huitres, les œufs et les raviolis de Romains pour la grosse. Le système d'heure actuel fonctionne sur douze heures (horloges). De même, les anciennes unités de mesure de longueurs (1 pied = 12 pouces ; 1 pouce = 12 lignes et 1 ligne = 12 points) découlent aussi de cette base ainsi que le système monétaire des anglo-saxons jusqu'en 1960 : un shilling représentait douze pences, par exemple (<http://histoiredechiffres.free.fr/index.php> et http://rio.orgerus.org/IMG/pdf/son_08.pdf).

iv. La base 20 : un héritage de la civilisation maya ?

Georges IFRAH affirme que certains peuples, comme les Mayas, les Aztèques, les Celtes et les Basques, se sont rendus compte qu'ils pouvaient utiliser leurs doigts mais aussi leurs orteils. Ils comptaient donc par vingtaines à l'aide de leurs extrémités. La base vingt ne viendrait-elle pas de là ? (IFRAH. G, 1981, p.9).

Nous pouvons illustrer ce propos par un schéma « **Origine anthropomorphique de la base vingt** » issu de l'*Histoire Universelle des Chiffres* de Georges IFRAH. Il représente la manière dont auraient pu compter les hommes en base vingt.



a La civilisation maya

Les débuts de cette civilisation remontèrent à environ 300 ans avant J.-C. et elle s'effondra à la fin du IX^e siècle de notre ère. Elle se répandit sur toute la péninsule du Yucatàn⁶. C'est la plus grande civilisation connue jusque-là dans le Nouveau Monde. Les Mayas sont allés très loin dans le développement des mathématiques, indépendamment des autres civilisations. « *Chez les Mayas, le calcul était beaucoup plus avancé que dans n'importe quel autre territoire de Mésopotamie ; il semble qu'il ait débuté en 300 ou 200 avant J.-C. et il était bien développé à l'époque « Classique » de la civilisation maya, au III^e*

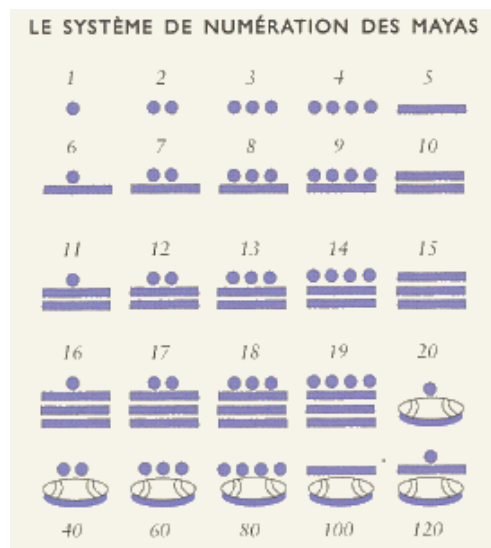
6 La péninsule du Yucatàn se situe au sud-est du Mexique. Elle est bordée par la mer des Caraïbes à l'est et par le golfe du Mexique à l'ouest.

siècle après JC. Ils utilisaient le système vigésimal, avec 20 pour unité. ». Pour désigner 41, ils utilisaient l'expression « un dans la troisième vingtaine » et 379 s'exprimait de la manière suivante : « dix-neuf dans la dix-neuvième vingtaine ». Cela montre bien qu'ils utilisaient la base vingt pour compter et même pour dire oralement les nombres. L'idée de groupements apparaît bien ici : « vingtaine ».

Au niveau de la représentation qu'ils avaient pour désigner les nombres, ils comptaient à l'aide des doigts : « Pour décrire des nombres relativement bas, ils utilisaient des symboles fondés sur le bâton incisé d'encoches ou sur le comptage à l'aide des doigts » (RONAN. C, 1998, p.68-69).





Les mayas ne nous ont pas laissé d'écrits pour expliciter leur théorie : « Les mayas ne nous ont pas laissé de traité de mathématiques [...]. Cependant, la numération maya est parvenue jusqu'à nous à travers deux contextes astronomiques pratiques : l'établissement de calendriers et leur intérêt pour les éclipses. » (RONAN. C, 1998, p.69).

Les nombres mayas s'écrivaient :



Les mayas, pour désigner un nombre, disaient que ce nombre était égal à X fois vingt plus Y.

Ainsi, pour comprendre ce système, voici quelques exemples (http://fr.wikipedia.org/wiki/Num%C3%A9ration_maya) :

Valeur	Chiffres mayas	note
27		$1 \cdot 20 + 7$
358		$17 \cdot 20 + 18$
340		$17 \cdot 20 + 0$
112211		$14 \cdot 8000 + 0 \cdot 400 + 10 \cdot 20 + 11$

b _Reste-t-il des vestiges de la base vingt ?

La base vingt a été et est beaucoup moins fréquentée. Les *Tamanas* de l'Orénoque (au pied du plateau des Guyanes, au Venezuela), les Esquimaux du Groeland, les *Aïnus* (au Japon), les *Zapotèques* et les *Mayas* l'ont quand même adoptée. De plus, « *une multitude de peuples procèdent encore suivant cette base* » : les *Malinké* du Haut-Sénégal et de Guinée, les *Banda* d'Afrique centrale, les *Yébu* et les *Yoruba* du Haut-Sénégal et du Nigéria (IFRAH. G, 1981, p. 97).

En France, il reste des vestiges de ce système en base vingt. Ne dit-on pas « quatre-vingt » pour désigner huit dizaines ou plus précisément quatre vingtaine ? Georges IFRAH suppose que ces traces sont un héritage des peuples présents en Europe avant les Indo-européens. De plus, cette idée est confortée par le fait que les Basques utilisent un système très proche de la base vingt pour les nombres inférieurs à cent. Il existe d'autres traces des vestiges de la base vingt en France, l'hôpital des Quinze-Vingts, qui abritait trois cent lits. En effet, $15 \times 20 = 300$.

Le système de numération en base vingt est encore utilisé en danois, en basque, dans les langues celtiques (gaélique, gallois, breton) et de manière résiduelle en Belgique, au Canada, en France et dans certains cantons de Suisse (lecture de 80, quatre-vingts).

v. *La base 60 : un système élaboré pour des raisons commerciales ?*

Le système sexagésimal a sans doute été utilisé pour la première fois par les Sumériens puis par les Babyloniens. De nombreuses hypothèses ont été faites sur l'origine de cette base. Georges IFRAH et Christine PROUST pensent que les raisons de l'établissement d'un système de calcul sont assez terre-à-terre. Il semble en effet que la base soixante ait été inventée pour des raisons commerciales. Les civilisations n'utilisant pas nécessairement la même base pour compter, les échanges semblaient difficiles. Le nombre soixante est divisible par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 et 60. Si un peuple, utilisant la base douze, voulait échanger avec un peuple maniant la base cinq, la base soixante semblait donc être un bon compromis pour faciliter le commerce.

On peut également proposer une autre hypothèse. Les vietnamiens comptent en faisant défiler le pouce sur les trois phalanges des quatre autres doigts, soit douze phalanges. Si, on utilise les doigts de l'autre main pour les retenues, on peut aller jusqu'à cinq retenues et donc on peut compter jusqu'à $5 \times 12 = 60$ en utilisant nos deux mains. Ceci peut donc être une origine anthropomorphique de la base soixante. Ceci mélange alors la base douze et la base cinq. Ce qui ramène à l'idée de départ que pour faciliter les calculs entre les peuples n'utilisant pas la même base on utilise une base qui « mélange » les deux.

a *En Mésopotamie*

Le mot sumérien vient de Sumer qui est une civilisation et une région située dans le sud de l'actuel Irak, la Mésopotamie. Elle a duré de la fin du VIème millénaire avant J.-C. jusqu'à la montée de Babylone au début du IIème millénaire avant J.-C. C'est la première civilisation véritablement urbaine et elle marque la fin de la Préhistoire au Moyen-Orient.





Les Sumériens utilisaient principalement la base soixante, comme l'écrit Colin RONAN : « *les sumériens utilisaient un diviseur standard basé sur 60 et ses multiples* » (RONAN. C, 1998, p.54). Ils utilisaient cette base notamment parce que le nombre soixante est divisible par beaucoup de nombres et est donc plus facile à manipuler : « *ce fut le premier peuple qui disposa d'un système de mesures standardisées absolument cohérent, et ceci pas plus tard que deux mille ans avant JC, peut-être même plus tôt. Le facteur standard 60 était commode car il était divisible exactement par beaucoup de nombres : 2, 3, 4, 5, 6 10, 12, 15, 20 et 30 ; de nos jours, il reste d'une grande utilité, pour mesurer les angles et le temps par exemple.* »

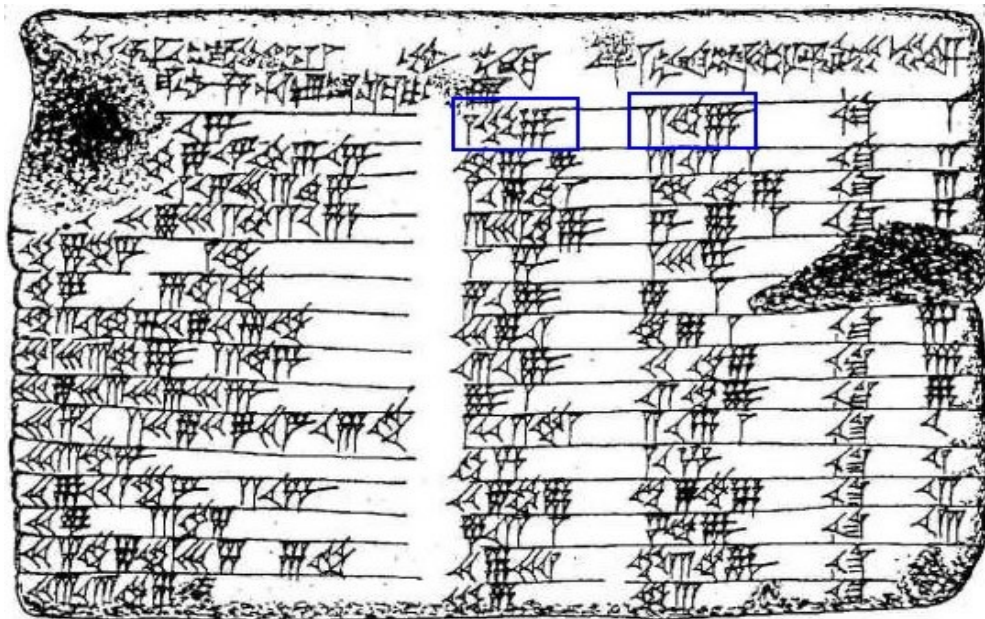
(RONAN. C, 1998, p.54). En effet, une heure est divisée en soixante minutes, qui sont elles mêmes divisées en soixante secondes...etc.

Les Sumériens n'avaient que deux symboles cunéiformes, tout comme les Babyloniens (voir partie suivante), pour écrire tous les nombres. « *Le nombre correct dépendait du contexte* » (RONAN.C, 1998, p.55). En effet, un clou pouvait aussi bien désigner une unité ou une soixantaine ou même une soixantaine de soixantaine. Cependant, en fonction contexte, ils savaient à quelle puissance correspondait le clou.

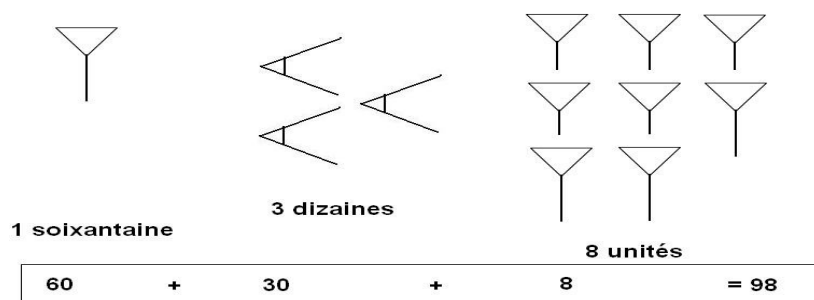
Pour les opérations, ils utilisaient la base intermédiaire vingt, puis des calculs répétés s'enchaînaient : « *les opérations arithmétiques usuelles, addition, soustraction, multiplication et division se faisaient à l'aide de tables qui donnaient les valeurs par unité jusqu'à 20, puis par dizaine jusqu'à 60* ».

b Chez les Babyloniens

Les Babyloniens, au deuxième millénaire avant J.-C., utilisaient eux-aussi la base soixante jusqu'à cinquante-neuf, pour avoir moins de symboles, ils faisaient des paquets de 10 ; ainsi, l'unité était représentée par un clou :  et un chevron :  représentait dix unités. On dit qu'ils utilisaient un système  décimal et additif  jusqu'à cinquante-neuf. Au-delà, ils se servaient d'un système sexagésimal et positionnel sans zéro, c'est-à-dire d'une base soixante. La tablette Plimpton 322 en témoigne (mathemartistes.fr) :



Pour expliquer plus en détail, nous nous servons d'un exemple. En base dix (celle que nous utilisons), le nombre 98 se décompose en neuf dizaines et huit unités, soit $98 = 9 \times 10 + 8$. Les Babyloniens, quant à eux, décomposaient 98 en une soixantaine et trente-huit unités, soit $98 = 60 + 38$. Ainsi, avec leurs symboles (les clous et les chevrons), cela donnerait :



Dans ce système positionnel sans zéro, il n'y a pas de signe pour indiquer l'ordre de grandeurs. Dans notre système de numération, nous écrivons un zéro en position finale ou un zéro pour montrer l'ordre de grandeur. Comme expliqué dans le paragraphe précédent, le nombre dépendait du contexte dans lequel on l'utilisait.

Le système de ces deux civilisations fit beaucoup avancer les mathématiques. Le document suivant est une table de multiplication qui montre que les Babyloniens avaient des connaissances en mathématiques. Voir Annexe 1 : **Table de multiplication de 7 dans le système babylonien.** Mais ce système fut abandonné pendant plusieurs années comme le montre le document suivant. Voir Annexe 2 : **La fin des civilisations sumérienne et babylonienne.**

c Reste-t-il des vestiges de la base soixante ?

La base soixante, adoptée apparemment par les Sumériens et les Babyloniens nous sert encore dans la mesure du temps et les calculs d'angles. En effet, pour la mesure du temps une heure est égale à soixante minutes, une minute est égale à soixante secondes... De même pour la mesure d'angle, un cercle mesure 360° . Cependant, le système sexagésimal n'est actuellement utilisé nulle part de manière systématique.

De cette première sous-partie, nous concluons que le choix d'une base est culturel et pas mathématique. Les bases ont presque toutes une origine anthropomorphique basée sur l'utilisation des doigts. Sauf la base 60, qui aurait son origine dans le commerce.

II- La base dix et la morphologie humaine

La première partie a montré qu'il n'y a pas eu de préférence au niveau du choix de base puisque plusieurs bases différentes ont été utilisées au cours de l'histoire.

Une liste des peuples qui ont utilisé et/ou qui utilisent la base dix a été faite par Georges IFRAH. Tous ces peuples ont fait le choix d'utiliser la base dix indépendamment puisqu'ils sont éloignés géographiquement. Cela renforce donc l'hypothèse de départ qui est : « les doigts sont un outil privilégié pour compter ». En effet, même si les hommes ne venaient pas du même milieu géographique, beaucoup ont choisi la base dix comme outil de numération.

Voir Annexe 3 : **Où la base dix a-t-elle été utilisée, où est-elle encore utilisée ?**

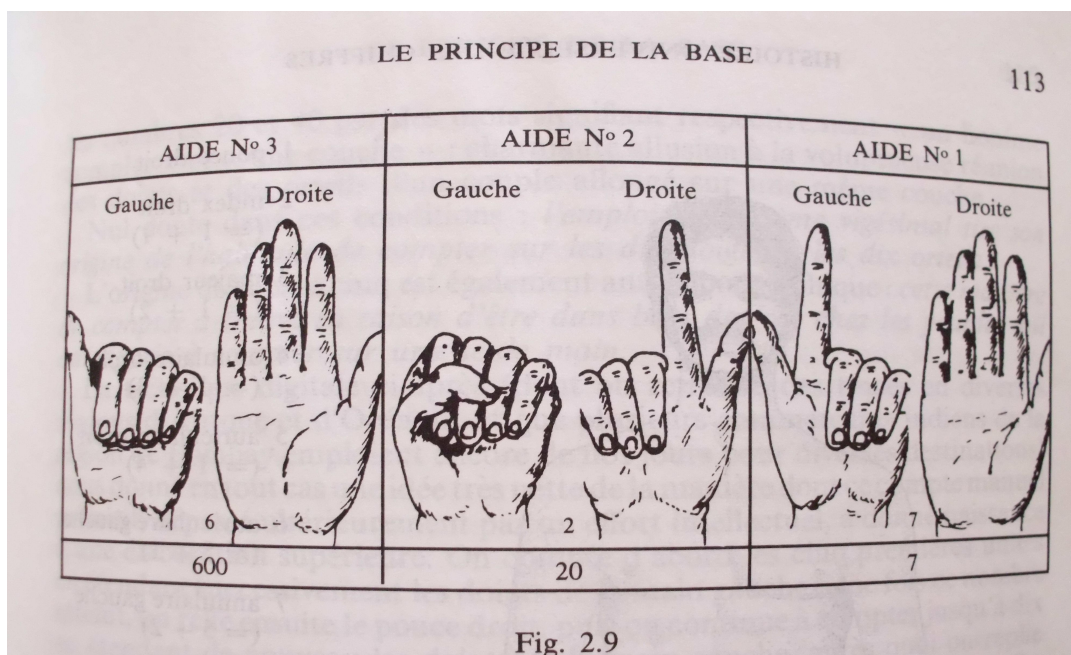
A) Son origine

Dans tous les pays du monde, dix est un nombre que toutes les personnes connaissent et utilisent. Les mains et les pieds, composés respectivement de dix doigts et dix orteils, sont la preuve que tous les hommes utilisent leurs doigts pour compter et que, entre pays différents, on peut se comprendre grâce à cette anatomie identique. Georges IFRAH remarque : « *L'humanité ayant appris à compter sur ses dix doigts, cette préférence quasi générale pour les groupements par dix a été commandée par cet « accident de la nature » qu'est l'anatomie de nos deux mains.* » (IFRAH. G, 1981, p.112). En effet, si la nature nous avait donné six doigts sur chaque main, peut-être qu'aujourd'hui, notre système de numération serait en base douze.

Ce professeur de mathématiques propose également une autre origine anthropomorphique. En effet, il raconte comment un peuple comptait son troupeau sans l'aide de la parole, seulement avec les doigts (IFRAH. G, 1981, p. 112-113). Résumons ce principe décrit par cet auteur : il suffirait de laisser passer le troupeau devant nous et de lever un doigt à chaque bête qui passe. Au passage de la onzième bête, un second homme viendrait et lèverait un doigt en signe d'une dizaine, le premier homme baisserait alors tous ses doigts et ils recommenceraient de même jusqu'à quatre-vingt-dix-neuf. Arrivés à la centième bête, un troisième homme viendrait à son tour et lèverait un doigt, le premier homme et le second baisseraient alors tous leurs doigts. En continuant de cette manière, on peut compter jusqu'à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf avec seulement trois hommes.

Nous pouvons illustrer cette méthode pour le nombre 627 par exemple. Le premier homme qui représente les unités lèverait sept doigts, le second deux pour les deux dizaines et le troisième six pour les six centaines.

Origine anthropomorphique de la base dix (IFRAH. G, 1981, p. 113) :










i. Le principe additionnel de la base dix en Égypte

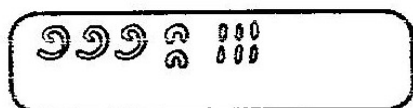
L'Égypte, entre 4000 et 3000 avant J.-C., bâtit ses premières villes. La nécessité de mathématiques se fait alors sentir. Cependant, les « *prouesses de bâtisseurs étaient fondées sur une solide expérience pratique et sur leur flair pour les techniques de la construction. Il semble en effet que les Égyptiens furent essentiellement un peuple très pratique, plus concerné par les résultats effectifs que par la réflexion philosophique sur les principes de base impliqués.* » (RONAN. C, 1998, p.28). Les Égyptiens ne conçoivent pas les mathématiques comme une théorie mais comme une pratique qui est utile tous les jours pour construire leurs villes. Ils n'écrivent donc pas de théories fondamentales comme les Grecs ou d'autres peuples. Ils utilisent simplement les mathématiques pour compter plus facilement comme l'écrit Colin RONAN : « *les anciennes mathématiques égyptiennes se limitaient à l'arithmétique, et même l'arithmétique pratique. Les mathématiques n'étaient pas considérées comme une forme de savoir en soi, indépendamment de leurs applications, contrairement à ce qui se passera en Grèce. [...] les mathématiques servaient seulement à compter* » (RONAN.

C, 1998, p.35).

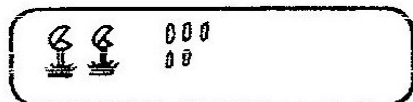
Le système de numération égyptien ne recourt pas à la position. C'est un système décimal mais non positionnel. Le document suivant représente les symboles de l'écriture égyptienne :

	L'unité était représentée par un bâton.
	La dizaine était représentée par un « U » retourné, comme une anse d'un panier.
	La centaine était représentée par un rouleau de papyrus.
	Le millier était représenté par une fleur de lotus.
	La dizaine de mille était représentée par un doigt qui montrait les étoiles dans le ciel.
	La centaine de mille était représentée par un têtard.
	Le million était représenté par un Dieu agenouillé soutenant le ciel tout entier.

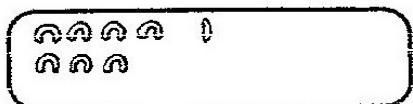
Comme le montre le document suivant, les nombres n'ont pas de position fixe comme notre système d'écriture des nombres.



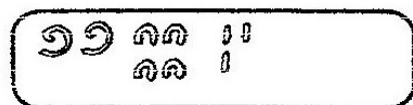
Cette inscription Egyptienne représente le nombre 326.



Cette inscription Egyptienne représente le nombre 2 005.



Cette inscription Egyptienne représente le nombre 71.



Cette inscription Egyptienne représente le nombre 243.

Ces documents sont issus du site internet suivant : http://www.ac-versailles.fr/public/upload/docs/application/pdf/2009-10/systeme_numeration_egyptien-2.pdf

A contrario, la civilisation occidentale prend soin de mettre les chiffres dans l'ordre et bien alignés (principe positionnel) afin que cela soit plus clair : « *les symboles des différents nombres variaient beaucoup et la nécessité d'écrire les nombres en rangées soigneusement alignées était moins impérieuse pour les Égyptiens qu'elle ne l'est pour nous, mais comme nous, ils comptaient par dix.* » (RONAN. C, 1998, p.35). Par exemple, quand nous posons une addition, nous prenons soin de bien aligner les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines...etc.

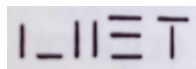
Pour les calculs, la soustraction se faisait en se posant la question « 5, plus combien font ? », l'addition sert donc à la soustraction.

Les égyptiens utilisaient un système de numération en base dix. La principale différence avec aujourd'hui est que, eux, n'ayant pas besoin d'écrire leurs nombres dans des théories ou des démonstrations, puisqu'ils ne s'en servaient qu'en pratique, n'écrivaient pas les nombres de manière positionnelle (en alignant les chiffres).

ii. Le principe positionnel des mathématiques chinoises

Contrairement aux Égyptiens, les Chinois écrivaient leurs nombres sur le même principe que la civilisation occidentale : de manière positionnelle. C'est-à-dire que les nombres sont écrits avec un alignement des différentes puissances de dix.

La première civilisation chinoise qui nous intéresse date de 12000 avant J.-C. environ. Les « Chinois qui manifestèrent [...] un talent particulier pour l'algèbre et pour les façons d'écrire les nombres » (RONAN. C, 1998, p.196) n'étaient pas des « génies » de la géométrie comme les Grecs. Dès le troisième siècle avant J.-C., « la méthode chinoise d'écriture des nombres [...] avait atteint un haut niveau de simplification », ils utilisaient la numération positionnelle, c'est-à-dire que pour chaque « rang » du nombre, ils mettaient un symbole. Aujourd'hui, cette numération positionnelle nous vient naturellement lorsque l'on utilise l'ordre des chiffres pour désigner les unités, les dizaines, les centaines... Par exemple, cent-cinquante-trois s'écrit 153 : le 3 désignant le nombre d'unités, le 5 de dizaines et 1 de centaine. Les Chinois utilisaient des « ensembles de bâtonnets » (RONAN. C, 1998, p.196) pour désigner les nombres. Ainsi, pour écrire 11236, ils dessinaient :



Le système de tablettes à compter, sur lesquelles on pouvait retirer, changer de position ou encore ajouter des bâtonnets, a permis « des développements considérables, non seulement en arithmétique, mais aussi en algèbre » (RONAN. C, 1998, p.197).

La table de représentation des nombres chinoise aidera à comprendre cette écriture positionnelle (SCHÄRLIG. A, 2006, p.216) :

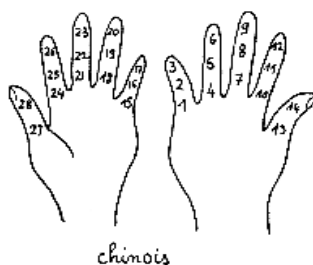
Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	⊥	⊏	⊐	⊑
1	2	3	4	5	6	7	8	9
—	==	≡	≣	≤	⊥	⊏	⊐	⊑
10	20	30	40	50	60	70	80	90

Fig. 10.2 La manière de représenter les unités et les dizaines sur l'échiquier chinois au moyen de bâtonnets.

De plus, Alain SCHÄRLIG écrit : « Ces arrangements ne concernent que les unités et les dizaines, auxquelles sont attribuées les deux premières colonnes de l'échiquier depuis la droite. Au-delà, dans la colonne des centaines, on réutilise les arrangements des unités ; dans celle des milliers, les arrangements des dizaines : et ainsi de suite. En d'autres termes : dans les colonnes de rang pair les arrangements des dizaines » (SCHÄRLIG. A, 2006, p.216). Il écrit également que cette alternance était destinée à éviter les confusions.

« Un système décimal leur était également familier, qui semble avoir pris naissance très tôt car on trouve des rudiments dans les écrits mohistes du IV^e siècle avant J.-C. » et « au II^e siècle après J.-C., ils utilisaient ce que nous appellerions aujourd'hui des « puissances de 10 » » (RONAN. C, 1998, p.197). Il semble donc que la base dix était pour eux leur système de numération. De plus, les Chinois « maniaient avec habileté » les fractions.

Cette civilisation n'utilisait pas uniquement ces tablettes à compter, elle se servait également de leurs doigts pour compter : « Les Chinois ne cessèrent d'inventer d'ingénieux moyens pour faciliter les calculs. Comme dans les autres civilisations, ils comptèrent sur leurs doigts et ils employèrent même la technique plus complexe qui consiste à assigner des nombres non seulement aux doigts, mais aussi aux jointures. » (RONAN. C, 1998, p.199).



Pour les mathématiques chinoises, nous pouvons donc conclure qu'ils ne « développèrent jamais des preuves aussi rigoureuses que celles élaborées par Euclide » (RONAN. C, 1998, p.203) par exemple. Cependant, ils avaient beaucoup de connaissances notamment dans le domaine de l'arithmétique et de l'algèbre.

On voit donc que, depuis plusieurs milliers d'années, un grand nombre de civilisations a mis en place un système de numération en base dix. Nous allons donc voir maintenant comment ce système est utilisé aujourd'hui.

B) Comment les doigts représentent les nombres dans un système en base dix ?

Il existe différentes manières de compter sur les doigts pour la base dix. Nos mains possédant dix doigts, elles sont très pratiques et efficaces pour représenter les nombres dans le système de numération.

Cependant, selon les pays, les coutumes et les époques, on ne compte pas, exactement, de la même façon.

i. La méthode occidentale

Cette méthode consiste à compter les doigts levés (ou fermés) d'une main. En France et en Amérique, un point fermé correspond à zéro et une main ouverte à cinq. Le nombre de doigts levés permet de représenter un nombre. Un doigt correspond au nombre un : cette méthode permet donc de compter jusqu'à dix avec les deux mains.

En France, l'énumération se fait dans l'ordre en débutant par le pouce. Ainsi, le pouce levé représente un, le pouce et l'index pour deux etc... et enfin, la main entière pour cinq. Mais nous ne comptons pas de la même manière partout dans le monde. Certains pays partent de l'auriculaire et d'autres préfèrent commencer par la main entière et replier les doigts au fur et à mesure de l'avancée du comptage. Beaucoup de variantes sont possibles.

ii. La méthode asiatique

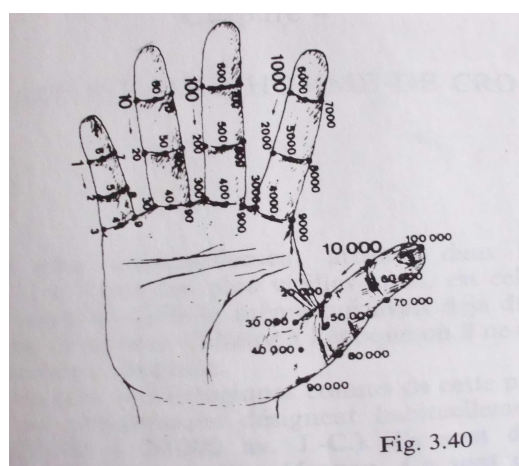
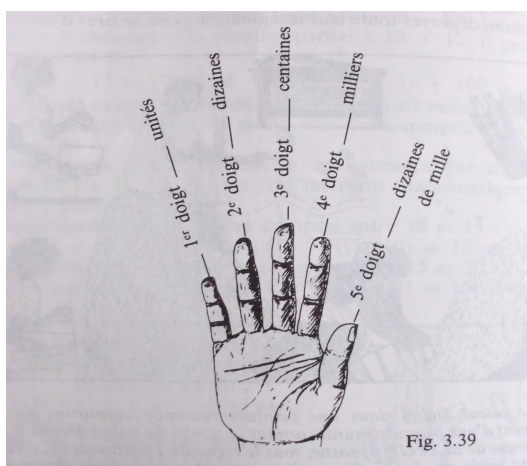
Cette méthode utilise la quantité et la symbolique des doigts. Grâce à celle-ci, on peut représenter chaque nombre de un à neuf avec une seule main. Le nombre dix est, lui, représenté en utilisant les deux mains. Voir Annexe 4 : **Compter sur les doigts en Chine**

- 0 : une main fermée,
- 1 : un auriculaire levé,
- 2 : l'annulaire et l'auriculaire levés,
- 3 : le majeur, l'annulaire et l'auriculaire levés,
- 4 : l'index, le majeur, l'annulaire et l'auriculaire levés,
- 5 : la main ouverte,

- 6 : le pouce et l'auriculaire levés,
- 7 : le pouce touchant l'index et le majeur,
- 8 : l'index et le pouce levés,
- 9 : l'index levé a moitié replié (crochet)
- les index des deux mains se croisant représentent 10 (On peut aussi croiser l'index et le majeur).

iii. Compter jusqu'à dix milliards avec les doigts

Une méthode permet de représenter jusqu'à dix milliards rien qu'avec les deux mains.



De cette première partie émerge l'idée que la morphologie humaine a eu une influence évidente sur la manière dont sont représentés les nombres. L'utilisation des doigts dans cette élaboration a été importante et nécessaire. Même s'il n'y a pas eu de communication entre les civilisations, toutes ont choisi des bases qui ont sans doute une origine anthropomorphique. Nous voyons donc ici que les doigts ont été une collection témoin privilégiée dans la construction des systèmes de numération.

Georges IFRAH a écrit : « *Par le nombre de ses doigts et grâce à leur relative autonomie ainsi qu'à leur grande mobilité, la main forme la collection d'assemblages modèles la plus simple que l'homme a, pour ainsi dire, sous la main. [...] La main de l'homme se présente donc comme la « machine à compter » la plus simple et la plus naturelle qui soit.* ». Il dit donc que les mains sont toujours présentes avec nous et sont donc très faciles et pratiques à utiliser. Mais est-ce si facile pour des enfants ?

Partie pédagogique

La première partie a donc montré que, historiquement, les doigts ont été un outil privilégié pour représenter les nombres.

D'ailleurs, dès l'école maternelle, les mains et les doigts sont beaucoup maniés dans le comptage, notamment par le biais de chants ou de comptines. Ceci est une première approche du nombre même si les enfants ne s'en rendent pas toujours compte.

Les doigts ont été et sont couramment utilisés dans le monde. Les enfants, particulièrement, aiment se servir de ce boulier naturel pour apprendre à compter. Les doigts peuvent aussi bien servir à découvrir un nombre particulier qu'à compter ou encore calculer.

Le premier rapport qu'un enfant a avec le nombre est quand il apprend son âge, les hommes ne sont-ils pas tous passés par le stade où ils disaient : « J'ai trois ans, c'est comme ça !!! » en montrant les trois doigts de la main (pouce, index, majeur) ? Cependant, l'enfant ne montre pas cette constellation dans le souci de représenter un nombre. Il l'a apprise par cœur mais n'a pas encore pris conscience de la fonction de cette représentation du nombre.

Je vais donc essayer de montrer, dans cette partie, comment les doigts peuvent aider dans la compréhension du système de numération en base dix et en quoi sont-ils une collection témoin privilégiée. Pour cela, je ferai d'abord référence à des textes d'auteurs spécialistes de ce problème pour avoir quelques éléments de réponses. Ensuite, je verrai ce que les instructions officielles contiennent dans ce domaine. Enfin, j'essaierai, au travers de la mise en œuvre d'une séance en grande section, de répondre à la problématique de départ : ***En quoi les doigts sont-ils un outil privilégié pour représenter les nombres ?***

I- Les doigts : une collection témoin privilégiée en maternelle

Nous allons voir dans cette partie ce que les auteurs spécialisés dans ce domaine préconisent à propos de l'utilisation des doigts dans le comptage.

A) La connaissance des nombres en tant qu'élément essentiel

Archytas de Tarente (430-350 avant J.-C.), général, savant et homme d'état grec, s'est intéressé aux fondements des différentes sciences et il est arrivé à la conclusion suivante : « *l'art de calculer est la base de toute science* » (RONAN. C, 1998, p.118). Autrement dit, sans les bases de comptage et de calculs mathématiques, nous ne pouvons améliorer nos connaissances scientifiques. Une bonne compréhension du nombre et de son utilisation doit donc être faite rapidement.

Cette première rencontre avec les nombres est primordiale pour comprendre les mathématiques de tout le cursus scolaire. Rémi BRISSIAUD affirme qu'apprendre à compter des objets dès l'école maternelle était une évidence au début de la naissance de la République (au XIXème siècle). Puis, à partir des années 1970, de la « Réforme des mathématiques modernes » (Voir Annexe 5 : **Principes de la réforme des mathématiques modernes**) et jusque dans les années 1990, le comptage dans les petites écoles était banni. Vers 1985, Rochel GELMAN (psychologue américaine) soutient que, non seulement le comptage n'est pas difficile à comprendre pour des enfants, mais qu'en plus, il est nécessaire dans les apprentissages des mathématiques. On a donc repris le dénombrement dans les écoles maternelles et ce, dès la petite section.

La partie historique a montré que les hommes ont développé des systèmes de numération. Ce qui est important de souligner, c'est ce pourquoi ils ont développé ces différents procédés pour compter. Le nombre était utilisé pour compter les bêtes d'un troupeau, ceci met en avant la fonction même du nombre. Il sert à mémoriser une quantité. Cette fonction doit avant toute chose être comprise par les élèves. Si l'on ne comprend pas à quoi sert telle ou telle chose, la compréhension de cette notion en sera d'autant plus difficile puisqu'elle n'aura pas d'intérêt. Il faut donc que les élèves comprennent la fonction même du nombre. Pour cela, des situations pour lesquelles « *la mémorisation de la quantité impose l'utilisation du nombre* » (Le nombre au cycle 2, p.24) sont nécessaires. Par exemple, si « *L'élève possède une collection de tirelires*

par exemple, il doit aller chercher juste ce qu'il faut de jetons, pour qu'il n'y ait pas de tirelire sans jeton, ni de jeton sans tirelire c'est-à-dire un et un seul jeton par tirelire. Les jetons sont dans une autre salle et pour réaliser cette tâche, l'élève doit aller les chercher et n'effectuer qu'un seul trajet. » (Le nombre au cycle 2, p.24). Ainsi, il sera confronté au nombre en tant que mémoire d'une quantité. S'il n'a pas compris cette notion, il ne pourra pas résoudre ce problème. Cet apprentissage est long et l'élève devra être plusieurs fois confronté à cette situation pour la réussir.

B) Les doigts comme représentation du nombre

Dans la partie précédente, nous avons remarqué que le nombre a une fonction de mémoire des quantités. Les doigts sont une aide précieuse pour aider à la mémorisation des quantités. En gardant, la situation du point précédent tirée du document officiel « Le nombre au cycle 2 », le fait d'utiliser les doigts pour mémoriser est plus facile que de garder un nombre dans sa tête. En effet, nous avons alors moins de chances de l'oublier. De plus, les doigts peuvent être une collection témoin pour représenter n'importe quelle collection d'objets. Pour illustrer cela, Rémy BRISSIAUD écrit que, pour des collections de petite taille, l'usage des doigts peut avoir certains avantages. En effet, quatre doigts, par exemple, peut aussi bien servir à désigner quatre baguettes, quatre voitures...etc : ils permettent donc de désigner un nombre d'objets sans pour autant faire attention à la nature de ces objets. Nous pouvons donc bien comparer les doigts à une collection témoin qui peut représenter n'importe quelle collection d'objets. L'utilisation des doigts dans le comptage permet aussi de mieux ressentir les nombres par une approche kinesthésique (sensation du corps et de ses mouvements). On dit aussi que l'utilisation des doigts permet de se faire une représentation fonctionnelle des nombres (qui a rapport au corps).

On pourrait faire une analogie entre l'utilisation des doigts comme collection témoin dans la compréhension du nombre et les travaux pratiques de sciences dans la compréhension d'un concept. En effet, la manipulation lors des travaux pratiques permet une meilleure compréhension de la notion : c'est en manipulant que l'on apprend. Par exemple, faire une maquette de volcans pour expliquer les phénomènes de volcanisme permet la visualisation et donc la conceptualisation de ce phénomène. De même, dans l'apprentissage des nombres, la manipulation des doigts permet une meilleure compréhension du système de numération.

Stella BARUK va même plus loin dans cette idée : les doigts sont un matériel naturel, de plus c'est un « *privilège absolu et indiscutable* » (BARUK. S, 2003 (1), p.51). Le nombre de doigts est très approprié à notre système décimal et à l'écriture en base dix puisque nous avons dix doigts. Ainsi, montrer 37 en faisant trois fois dix doigts et une fois sept doigts permet déjà d'attribuer au chiffre 3 et au chiffre 7 une « *fonction dans l'écriture chiffrée* » (BARUK. S, 2003 (1), p.51) (ici, la fonction de trois dizaines et sept unités). Elle affirme donc que les doigts comme collection témoin d'une quantité aident à comprendre comment fonctionne le système de numération occidental. En lien avec la partie historique, dans la partie II, A, trois hommes comptaient leurs bêtes en se servant de leurs doigts. Un premier homme montrait les unités avec ses doigts, puis un deuxième montrait les dizaines quand le premier avait dix doigts de levés et le troisième montrait les centaines. Ceci est équivalent : par *monstration*⁷ (BARUK. S, 2003 (1), p.51), la collection témoin des doigts permet de comprendre le principe de numération basé sur dix tout comme le faisaient les ancêtres.

Les doigts comme collection témoin pour représenter les nombres sont donc un outil privilégié. En effet, ils sont toujours à portée de mains, ils peuvent représenter n'importe quelle collection et ils permettent la manipulation du concept de nombres.

C) *Les inconvénients de cette collection-témoin*

Les doigts comme collection-témoin dans les apprentissages de notre système de numération ont donc de nombreux avantages. Cependant, on peut également citer quelques inconvénients. Par la simple utilisation de nos deux mains, on ne peut compter que jusqu'à dix. Si l'on veut aller plus loin dans le comptage, il faut au moins deux personnes ou avoir une bonne mémoire du comptage. En reprenant la situation des tirelires, nous voyons bien que si le nombre de tirelires est inférieur à dix, cela sera plus facile pour l'enfant d'avoir une mémoire du nombre. Par contre, si le nombre de tirelires est supérieur à dix, il y a plus de chance que l'élève se trompe en utilisant les doigts et dans ce cas mémoriser un nombre dans sa tête sera plus facile que de mémoriser un nombre de paquets de dix (combien de fois dix doigts?) et un nombre d'unités.

⁷ Action destinée à évoquer un nombre en montrant un nombre de doigts, terme employé par Stella Baruk.

L'usage des extrémités des mains pour compter peut présenter d'autres inconvénients : Rémi BRISSIAUD affirme que la collection témoin de doigts est plus difficile à comprendre qu'une collection de bâton par exemple. L'explication à cette affirmation est simple : tandis que les bâtons sont tous semblables, les doigts, quant à eux sont tous différents les uns des autres ; l'ensemble d'un pouce, d'un index et d'un majeur par exemple est moins facile à traiter qu'un ensemble de bâton.

De plus, s'ils sont mal utilisés, les doigts peuvent vite devenir un obstacle à la compréhension des nombres. En effet, si un nombre est toujours représenté par la même collection témoin de doigts, l'enfant risque de confondre cette collection avec le nombre. Il aura appris par cœur une représentation du nombre sans en comprendre le sens. En reprenant notre analogie avec les sciences, nous pourrions appareiller cette représentation du nombre qui ne change jamais à une leçon de science apprise par cœur sans en comprendre le moindre mot. Il faut donc être très prudent dans la manière de présenter les nombres aux enfants quand l'enseignant les montre avec les mains. Pour que les élèves comprennent que pour un même nombre plusieurs constellations de doigts sont possibles, il ne faut pas utiliser toujours la même manière de compter. En contre-exemple à cette idée, on peut citer cette comptine :

*Voici ma main,
elle a cinq doigts
en voici deux, en voici trois,
le premier, ce petit bonhomme,
c'est mon gros pouce qu'il se nomme,
l'index qui montre le chemin,
c'est le second doigt de ma main.
Entre l'index et l'annulaire,
la majeur paraît un grand frère...
l'annulaire porte un anneau.
Avec sa bague, il fait le beau.
Le minuscule auriculaire
marche à côté de ses grands frères.
Regardez mes doigts travailler,
chacun fait son petit métier*

L'inconvénient de cette comptine, c'est qu'elle incite les enfants à penser qu'il faut commencer par le pouce, puis l'index...Les enfants apprennent alors des constellations de doigts et ne peuvent s'en défaire. Ainsi, ils ne voient pas que l'auriculaire et l'annulaire peuvent également représenter la quantité deux.

Si l'on continue dans cette voie, un enfant est capable de dire : « J'ai trois ans » en montrant le pouce, l'index et le majeur ; mais dès qu'on lui montre trois doigts différents, il est incapable de dire que c'est trois. Il ne considère alors pas les doigts indépendamment de leurs propriétés qualitatives puisque pour lui, l'image du pouce, de l'index et du majeur est associé au nombre trois (problème de constellations de doigts associées à un nombre et à un seul).

Pour palier ce défaut, il est donc intéressant de proposer des activités simples aux élèves. Lorsque l'on fait des activités utilisant les doigts, il ne faut alors pas montrer toujours la même constellation de doigts. On pourrait demander aux élèves de compter en commençant par l'auriculaire. On pourrait également leur faire deviner toutes les manières de faire trois avec les doigts. Ainsi, ils prendront conscience qu'un nombre peut être représenté de différentes manières avec les mains. Pour trouver d'autres activités de ce genre, on peut se référer à Rémy BRISSIAUD ou à « Vers les maths Grande Section » des éditions AccèsEditions (ils existent également pour tous les niveaux de la maternelle).

II- Mise en place de la situation pédagogique

A) Les textes officiels et l'utilisation des doigts à l'école

Les programmes de 2002 et de 2007 évoquent l'idée que les enfants doivent savoir utiliser les constellations comme représentation de nombres : « *reconnaître globalement et exprimer des petites quantités organisées en configurations connues (doigts de la main, constellations du dé)* ». On ne sait pas, ici, si les constellations de doigts utilisées doivent être toujours les mêmes ou pas. Ce qui peut poser un problème pour les enfants qui associeraient donc une configuration de doigts à un nombre sans comprendre qu'une autre configuration peut être possible pour ce même nombre (cf partie précédente).

Et qu'en est-il du bulletin officiel du 19 juin 2008 (hors série n°3) qui contient les programmes sur lesquels nous devons nous baser pour élaborer nos situations pédagogiques ?

Dans la première partie destinée à l'école maternelle, la sous-partie « *Découvrir le monde* » s'attarde sur la manière d' « *Approcher les quantités et les nombres* ». Il y est indiqué que l'acquisition de la suite des nombres est très importante : « *L'école maternelle constitue une période décisive dans l'acquisition de la suite des nombres (chaîne numérique) et de son utilisation dans les procédures de quantification. Les enfants y découvrent et comprennent les fonctions du nombre, en particulier comme représentation de la quantité* » (BO du 19-06-08, p. 15).

L'enseignant a le premier rôle dans l'apprentissage de notre système de numération. Il doit trouver des situations qui captivent les élèves tout en les aidant à bien comprendre ce principe. Ces activités doivent être variées et adaptées à tous les élèves (différenciation) : « *Les situations proposées aux plus jeunes enfants (distributions, comparaisons, appariements...) les conduisent à dépasser une approche perceptive globale des collections. L'accompagnement qu'assure l'enseignant en questionnant (comment, pourquoi, etc.) et en commentant ce qui est réalisé avec des mots justes, dont les mots-nombres, aide à la prise de conscience.* » (BO du 19-06-08, p. 15).

Dans ces instructions officielles, on insiste énormément sur la question du sens des nombres. Les élèves doivent comprendre à quoi servent les activités : « *Dès le début, les nombres sont utilisés dans des situations où ils ont un sens* » (BO du 19-06-08, p. 15). On

revient donc ici à l'idée que le nombre a une fonction qui doit être comprise par les élèves : le nombre est une mémoire des quantités.

Pour les cycles 2 et 3, rien n'est précisé quant à l'utilisation des doigts dans les apprentissages. Cependant, il est noté que l'élève doit faire preuve de plus en plus d'abstraction. Ainsi, les doigts utilisés à l'école maternelle pour donner du sens aux quantités n'ont plus trop leur place ici : « *La pratique des mathématiques développe le goût de la recherche et du raisonnement, l'imagination et les capacités d'abstraction, la rigueur et la précision.* » (BO du 19-06-08, p. 22).

Les compétences du Socle Commun de Connaissances et des Compétences se référant à cet apprentissage sont les suivantes : « *Comparer des quantités, résoudre des problèmes portant sur les quantités ; mémoriser la suite des nombres au moins jusqu'à 30 ; dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus* » (BO du 19-06-08, p. 16). Ainsi, on voit que rien n'est précisé à propos de l'utilisation des doigts dans la compréhension de notre système de numération dans ce Socle commun des connaissances et des compétences.

B) Description de la classe

La classe choisie est une classe de Grande section de l'école maternelle Léonard de Vinci au Mans. Elle est composée d'élèves de moyenne section et de grande section mais l'activité proposée n'a été réalisée qu'avec les douze grands.

i. Une grande hétérogénéité

Nous ferons, ici, une présentation des différents profils des élèves de la classe.

L'enseignante avait fait au préalable une évaluation de la comptine numérique pour chacun des élèves. Les résultats sont très hétérogènes : certains élèves savent compter jusqu'à trente-neuf alors que d'autres ne comptent que jusqu'à quatre. Lors de ma première visite, les élèves n'avaient pas encore le réflexe d'utiliser leurs doigts pour compter ou pour résoudre des problèmes. Mais l'enseignante veut les faire travailler le plus possible avec les doigts. Pour cela, elle leur demande régulièrement de justifier leurs choix et approuvent ou non en montrant ses doigts. Cette classe comporte donc plusieurs niveaux d'élèves. Nous verrons donc si les doigts comme collection témoin pour compter peuvent aider les élèves dans la

compréhension de notre système de numération ou si au contraire cette hétérogénéité sera accentuée.

ii. Les pré-requis nécessaires à la mise en place des séances

Nous allons replacer ces séances dans une progression faite par l'enseignante.

Dans la progression du manuel « Vers les maths, maternelle moyenne section », il est indiqué que les élèves voient au fur et à mesure, les nombres de un à trois, puis le nombre quatre et ses décompositions, le nombre cinq et ses décompositions et enfin le dénombrement de quantités de un à dix. Le manuel de Grande Section de la même collection propose une progression qui reprend les décompositions de quatre dans la première période (septembre-octobre) et celles de cinq dans la deuxième période (novembre-décembre) ainsi que les nombres de cinq à dix. L'enseignante de la classe observée a suivi cette progression depuis le début de l'année. La compétence visée par ces activités est de comprendre qu'un nombre peut être décomposé en plusieurs nombres. Cela servira pour comprendre la principe additionnel plus tard.

Pour atteindre cette compétence, plusieurs activités ont été mises en place. L'activité « 4 feuilles sur un arbre » pour la décomposition du nombre quatre, la décomposition du nombre cinq se fait par le biais de l'activité « Le jeu des lapins ».

Puis, la compétence « Dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus jusqu'à dix » est approchée par « Les nombres de 5 à 10 ». Ceci permettra de mémoriser la suite des nombres et de connaître le nom des nombres. Ce qui est nécessaire pour pouvoir travailler sur ces nombres par la suite.

Dans la suite logique de cette progression, les décompositions du nombre dix peuvent être enseignées. Pour cela, nous avons choisi le jeu « Dix dans un dortoir ». Ces séances sont faites en deuxième période de l'année scolaire. Elles suivent la progression de l'enseignante.

C) *La situation pédagogique choisie : « Dix dans un dortoir »*

i. Description de la situation pédagogique retenue

Les séances ont été choisies avec la professeur *d'École* Maître Formateur (PEMF). Elles sont tirées du manuel « Découvrir le monde avec les mathématiques » de Dominique Valentin.

Voir Annexe 6 : **Situation proposée dans « Découvrir le monde à la maternelle »**

Le jeu « Dix dans un dortoir » permet aux élèves de manipuler les différentes décompositions de dix. De plus, il permet aux élèves de mémoriser quelques résultats de compléments à dix : par exemple, sept et trois égal dix, ou encore neuf et un font dix. En effet, à force de répéter des manipulations, par le biais de ce jeu mais également de d'autres situations, les élèves mémoriseront de plus en plus de compléments à dix et cela deviendra un automatisme pour eux ce qui pourra les aider plus tard pour effectuer du calcul mental.

La première séance (dortoir visible et salle de jeux cachée) sera faite avant l'observation afin que les élèves se soient déjà familiarisés avec le matériel et que l'observation ne porte que sur ce qui nous intéresse. Dans cette activité, les ours ont quitté le dortoir mais il reste une trace de leur passage : les lits. Dans la seconde séance (dortoir caché, salle de jeux visible), cette trace n'existe plus : il faut donc « chercher dans sa tête » un moyen pour résoudre le problème.

Le jeu du dortoir a été fabriqué par l'enseignante. Le matériel utilisé pour ce jeu comprend deux boîtes à chaussures avec couvercles (une pour le dortoir et une autre pour la salle de jeux), dix ours, dix lits (papiers rectangulaires) et des mini-jouets pour la salle de jeux.



**Le dortoir avec les dix ours
et leurs lits**



La salle de jeux

ii. Les procédures que peuvent utiliser les élèves

Pour résoudre le problème, des outils d'aide à la résolution sont à la disposition des élèves. Ces outils sont utilisés régulièrement par les élèves qui ne sont donc pas face à une nouveauté.

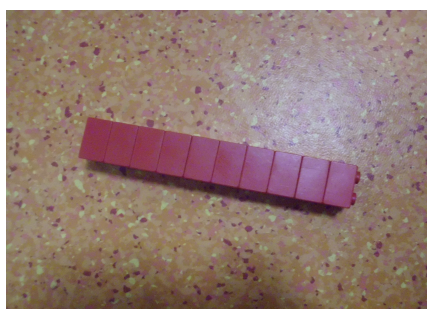
Pour toutes ces procédures, les élèves doivent associer les lits aux outils, et ainsi, comprendre qu'il y a autant de lits que de legos, de nombres sur la bande numérique ou de doigts sur les mains.

Le premier outils est la bande numérique :



Elle comporte les nombres écrits en chiffres, les constellations de doigts et les constellations du dé. L'élève doit apparenter ces nombres aux ours. En effet, si quatre ours sont dans la salle de jeux, on peut cacher les ours levés. Les nombres non cachés doivent alors être comptés. Le nombre trouvé sera le nombre d'ours encore dans le dortoir. Cette procédure nécessite une compétence : le surcomptage. En effet, quand les élèves ont compté les quatre ours présents dans la salle de jeux. Ils doivent les compter sur la bande numérique et repartir à un pour compter les autres.

La deuxième procédure à disposition est une série de dix legos de même couleur pour ne pas perturber les élèves :



Les legos sont apparentés aux ours. S'il y en a quatre dans la salle de jeux, quatre legos doivent être mis de côté et ceux qui restent représentent les ours encore dans le dortoir. Cet outil nécessite une compétence particulière : les élèves doivent accepter de « casser » la série

de legos pour pouvoir les manipuler. De plus, remplacer des ours par des legos est difficile pour les élèves puisque l'on passe à un certain niveau d'abstraction.

Ces deux premiers outils peuvent être conjugués en plaçant les legos sous la bande numérique par exemple.

Une autre procédure peut être envisagée pour les élèves les plus à l'aise avec les nombres : celle du calcul mental. En effet, peut-être que certains élèves ont déjà entendu que par exemple cinq et cinq font dix, donc comme il y a dix ours en tout, si cinq sont levés cinq sont encore couchés. C'est cette compétence que l'on veut faire acquérir, à savoir « Comprendre que dix peut être décomposé de plusieurs manières ». Cette procédure doit donc plutôt arriver à la fin du processus.

Enfin, les élèves ont également à leur disposition leurs doigts (ce qui nous intéresse ici). Pour pouvoir utiliser cet outil naturel, les élèves doivent avoir compris qu'ils ont dix doigts comme le nombre d'ours du jeu. On peut utiliser les doigts de différentes manières. Par exemple, tous les ours étant couchés, tous les doigts sont repliés. Quand trois ours sont dans la salle de jeux, trois doigts se lèvent et le nombre de doigts encore plié est le nombre d'ours dans le dortoir. On peut également faire de même mais en partant les doigts tous levés. Cette procédure implique que les élèves aient déjà acquis une grande agilité des doigts. En effet, bouger les doigts comme on le fait en tant qu'adulte est beaucoup moins évident pour des enfants de cinq ans. De plus, ils doivent oser « remplacer » les ours par les doigts, ce qui est très abstrait pour eux. Mais c'est cela qu'on veut observer : les élèves utilisent-ils leurs doigts comme collection témoin privilégiée pour représenter un nombre et résoudre un problème ?

iii. Ce que va apporter cette situation pédagogique aux élèves

Grâce à cette situation, les élèves seront confrontés aux compléments à dix et les mémoriseront petit à petit. S'ils ont bien compris cette notion, ils comprendront mieux, par la suite, les compléments des autres dizaines ($26 + 4 = 30$, tout comme $6 + 4 = 10$). En effet, notre système de numération est entièrement basé sur le nombre dix (base dix). Donc tout fonctionne de la même manière. Ainsi, grâce à cette situation, tout le système de numération pourra être compris plus tard.

Par le questionnement de l'enseignant (comment as-tu fait pour trouver, pourquoi ...) « *et en commentant ce qui est réalisé avec des mots justes, dont les mots nombres* » (BO 19-06-08, p.15), les élèves prendront conscience de la fonction du nombre et du fonctionnement de notre système de numération. Cette situation problème permet également une « *première entrée dans l'univers du calcul* » (BO 19-06-08, p.15) sans cependant utiliser les symboles mathématiques.

Cette activité est également un premier pas vers le calcul mental. Quand l'élève sera confronté au calcul huit plus cinq par exemple. Le fait d'avoir compris les décompositions de dix permettront à l'enfant d'aller plus vite dans son calcul. Plutôt que de surcompter, l'élève pourra ajouter directement deux à huit pour arriver à dix. Et comme il aura également travaillé les décompositions de cinq, il pourra dire directement que deux et trois font cinq. Ainsi, il trouvera la réponse à son calcul : $8 + 5 = 8 + 2 + 3 = 10 + 3 = 13$. Ceci sera devenu un automatisme par ce genre d'activité.

Pour acquérir cette compétence, on peut se demander si les doigts seront une collection témoin privilégiée pour représenter les nombres et s'ils aideront les élèves dans la compréhension de ce système en base dix. Pour cela, nous observerons les différentes procédures que les élèves utilisent et si elles sont efficaces ou pas. Nous les amènerons également à voir si les doigts les aident à comprendre la base dix. Au cours des deux séances menées, nous verrons s'il y a des évolutions dans leurs procédures pour résoudre le problème et quels outils parmi ceux mis à leur disposition, ils préfèrent plus particulièrement : est-ce les doigts ou pas ? Nous essaierons également de voir, si l'utilisation des doigts les a aidés dans la mémorisation des différents résultats.

III- Analyses a priori et a posteriori

Dans cette partie, nous allons commencer par anticiper les réactions des élèves. Nous analyserons notre séance, essaierons de prévoir les réactions et ferons des hypothèses sur ce qui va se passer. Puis, nous ferons un compte-rendu détaillé de ce qui s'est réellement passé et nous analyserons cet écart pour chaque séance. Dans les compte-rendus, les parties en italique sont les retranscriptions de ce que j'ai pu observer lors des séances.

A) Analyse a priori

i. Pourquoi avoir choisi de mener ces deux séances de cette manière?

La première séance de découverte du jeu n'a pas été observée puisqu'ici ce n'est pas ce qui nous intéressait. Lors de cette première situation, les élèves devaient s'appropriier le matériel et résoudre un premier problème qui ne nécessitait pas l'utilisation des doigts.

Au départ, nous avons prévu de faire deux séances avec un même groupe d'élèves. La première séance aurait été faite en ne donnant aucune piste pour résoudre le problème, puis nous devons voir lors de la deuxième séance si les élèves utilisaient les doigts comme collection témoin de manière privilégiée pour résoudre le même problème. Finalement, nous avons décidé de faire une première séance avec un premier groupe d'élèves en ne leur donnant aucune piste de résolution. A la suite de ce temps, une mise en commun a été faite avec tous les élèves de grande section de la classe. Plus tard, la même activité a été faite avec le deuxième groupe d'élèves. Ceux-ci ont donc eu un premier contact avec les différentes procédures (dont l'utilisation des doigts). Nous verrons donc à ce moment si les doigts ont été une procédure privilégiée pour ces enfants. Les deux séances ont donc été préparées à l'avance. Elles ont été modifiées au cours des séances (ajustements faits par la PEMF en fonction des réactions des élèves) et la deuxième séance a été réajustée par la suite.

Les fiches de préparation ont été élaborées et sont visibles en annexe :

Voir Annexe 7 : **Fiches de préparation des séances** et Annexe 8 : **Fiche de préparation de la séance 2 modifiée**

ii. Anticipation sur la réaction des élèves

Lors de la première séance, nous ne savions pas si les élèves allaient utiliser leurs doigts de manière autonome ou pas. En effet, les élèves avaient déjà résolu des problèmes en utilisant les doigts. Lors de la première séance, nous avons décidé de ne pas imposer de procédures aux élèves. Si un élève utilisait les doigts alors on pourrait dire aux autres de faire de même. Lors de la deuxième séance, nous avons décidé avec l'enseignante de proposer aux élèves la procédure utilisant les doigts. Ainsi, cela nous permettra de voir si les élèves réussissent à résoudre le problème en utilisant les doigts et si c'est une procédure privilégiée pour les élèves.

Une des difficultés envisagées pour les élèves est la suivante : la difficulté pour les élèves d'apparenter un nombre d'ours à une collection témoin de doigts. En effet, pour les élèves, ce n'est pas évident de remplacer un nombre d'objets réels à un nombre d'objets qui ne ressemblent pas aux premiers. Une deuxième difficulté pourrait « bloquer » les élèves : l'agilité de leurs doigts.

B) La première séance effectuée

i. Compte-rendu

Pour la première séance, six élèves étaient présents : Alix, Louna, Lisa, Noah, Jessy et Bryan. La première séance a été un peu modifiée par rapport à la fiche de préparation initiale (Voir Annexe 8 : **Fiche de préparation de la séance 2 modifiée**). Ces changements ont été faits avant le commencement de la séance mais aussi pendant celle-ci en fonction de la réaction des élèves. Un premier petit groupe qui n'avait jamais fait cette séance sera mis face au problème. Celui-ci fera un bilan à tous les élèves de la classe en explicitant ses démarches à la fin de la séance. Ainsi, les élèves de la prochaine séance (la même que la première) auront déjà entendu au moins une fois les différentes manières de procéder. Nous verrons à ce moment-là quelle méthode, ils utilisent et si les doigts sont réinvestis (si oui par quel « type » d'élèves).

Juste avant la séance, nous avons décidé avec Agnès DELON de les laisser utiliser la méthode de leur choix pour résoudre le problème. Si les doigts ne venaient pas d'eux-mêmes, on y ferait allusion lors du bilan de fin de séance.

Pour commencer cette séance, l'enseignante a fait un rappel du matériel en leur demandant ce qu'il y avait dans ce jeu. Un élève a répondu spontanément qu'il y avait des ours. Un rappel a également été fait sur le nombre d'ours et de lits. Il a été aussi précisé qu'on avait une salle dortoir avec les dix ours qui dormaient et une salle de jeux sans ours. A ce moment, tous les ours sont dans le dortoir.

Puis, l'enseignante leur a expliqué qu'il y avait un nouveau problème à résoudre (différent de la séance 1). Pour cela, les outils habituels sont à leur disposition : la bande numérique et les legos (pile de dix legos de même couleur). Une précision a été faite avec les élèves : il y a autant de legos ou de nombres sur la bande numérique que des petits ours dans le dortoir.

Ensuite, une explication de la situation problème a été faite : dix petits ours sont dans le dortoir, mais il est l'heure de se réveiller. Il va donc y avoir des ours qui vont se lever pour aller dans la salle de jeux. Les élèves ferment les yeux. L'enseignante met dans la salle de jeux les petits ours qui sont réveillés : elle en met quatre. On demande alors aux élèves : Combien sont dans la salle de jeu ? Chaque élève compte les ours dans la salle de jeux. Puis, une question leur est posée : Combien dorment encore ? On leur précise qu'ils doivent réfléchir dans leur tête sans rien dire et qu'ils doivent ensuite dire comment ils ont fait pour trouver.

Immédiatement, deux élèves utilisent leurs doigts (Alix et Louna). Ils comptent en levant et baissant leurs doigts. L'enseignant, suite à ces constats de début d'année, m'a confirmé que ces élèves sont les plus à l'aise avec la numération. Les autres réfléchissent mais ne manipulent rien : ni legos, ni bande numérique, ni doigts.

L'enseignante demande alors à chaque élève comment il va faire pour trouver. Lisa (élève qui a un niveau moyen en numération) dit qu'elle va utiliser un outil. L'enseignante lui demande alors lequel, Lisa choisit les legos (ce qu'elle avait dans les mains). Elle dépose quatre legos sur la table et compte les restants (avec l'aide de l'enseignante). Elle trouve six (qui est la bonne réponse). Puis, elle demande à Noah qui répond six sans trouver d'explication. Ensuite, vient le tour d'Alix, il explique très bien sa méthode en l'illustrant avec les doigts :

Alix : Moi je dis six !

Enseignante : Et pourquoi tu penses que c'est six ?

Alix : *Parce que quatre plus dix... (il montre dix doigts, les deux mains avec les doigts levés et en baisse quatre), ça fait six !*

On voit ici, que l'élève s'est embrouillé dans son explication et n'arrive pas à expliciter clairement avec des mots ce qu'il fait exactement. Cependant, il montre avec ses doigts de manière très claire. Cela montre peut-être que même s'il est assez à l'aise avec ses mains, il n'a peut-être pas totalement acquis la compétence d'utiliser les doigts pour résoudre un problème.

Louna, la deuxième élève qui a réfléchi en agitant ses doigts, ne sait plus comment elle a fait. L'enseignante lui laisse le temps de réfléchir et demande à un autre (celui qui a le plus de mal dans le groupe et qui a même du mal à dénombrer). Il met les legos sur la table mais ne sait pas pourquoi. Louna se souvient et l'enseignante revient donc sur sa méthode. Elle se remémore quelque chose avec la position des lits dans le dortoir. Elle dit : *« Il y avait cinq et cinq (en montrant avec ses doigts l'alignement des cinq lits et des cinq autres en dessous) mais comme tu en as enlevé.... Il y a 4... »*.

Finalement, elle ne voit plus trop la disposition des lits dans le dortoir et dit : *« Je dis 7, mais j'suis pas sûre car je sais plus comment c'est... »*.

Une vérification est ensuite faite en enlevant le couvercle qui se situe sur le dortoir. Tous les élèves comptent chacun leur tour les ours restant dans le dortoir.

Elle demande aux élèves s'ils ont tous utilisé la même méthode. Ils répondent que « non » : certains ont utilisé les legos et certains les doigts. L'enseignante décide alors de ranger les legos et les bandes numériques et d'imposer aux élèves l'utilisation des doigts pour résoudre le problème. Elle leur demande ensuite quel outil les élèves doivent utiliser pour être sûre qu'ils aient bien compris ce qu'on leur demande.

On recommence avec une nouvelle situation. Elle fait d'abord un rappel du nombre d'ours et de lits. Elle demande aux enfants de fermer les yeux et enlève cinq ours qu'elle met dans la salle de jeux.

Enseignante : *Combien d'ours sont encore dans la salle de jeux ? Quel outil va-t-on utiliser déjà ?*

Les élèves : *Les mains !*

Enseignante : *Comment avez-vous fait ?*

Alix montre très vite ce qu'il a fait et arrive à la conclusion suivante : il en reste cinq. L'enseignante lui demande donc d'expliquer doucement.

Alix : *On part de dix. On lève les dix doigts (il les lève). On baisse les doigts de la main et il reste cinq.*

Enseignante : *Attends, attends ! Doucement ! Pourquoi tu baisses tous les doigts de ta main droite ?*

Alix : *Car cinq et cinq font dix. On enlève cinq. Il en reste cinq.*

Enseignante : *Et toi Louna, qu'est-ce que tu en penses ?*

Louna : *Cinq.*

Enseignante : *Pourquoi ?*

Louna : *Car on a enlevé cinq (elle montre une main et la baisse). Au revoir le cinq ! Donc il en reste cinq.*

Ensuite, la mise en commun a été faite, tous les élèves de la classe se sont assemblés dans le coin regroupement. L'enseignante a expliqué la situation problème proposée et Alix et Lisa ont expliqué comment ils ont fait.

Alix : *Il y a dix ours (il lève dix doigts). J'en enlève quatre (il baisse quatre doigts de manière très rapide et très maîtrisée) : il en reste six !*

L'enseignante demande alors à chaque élève la méthode qu'il préfère. Seuls deux (sur douze) préfèrent les doigts. Louna, qui avait commencé à réfléchir avec les doigts dit qu'elle préfère, finalement, utiliser les legos.

ii. Conclusions

Pour cette première séance, on peut conclure plusieurs choses. Les élèves en difficulté, ne pensent pas par eux-mêmes à utiliser les doigts. Les élèves, déjà à l'aise dans la compréhension des nombres, les utilisent naturellement. Ceux-là ont déjà compris qu'ils ont dix doigts (cinq et cinq) et ont déjà fait le rapprochement entre les dix ours et leurs dix doigts (niveau d'abstraction plus élevé).

Pour pallier cette abstraction trop élevée, nous aurions pu donner dix ours à chaque élève (à la place des dix legos) lors de cette première manipulation pour que ce soit plus facile pour eux. Mais nous n'aurions alors pas travaillé l'idée de la collection témoin pour représenter les nombres.

Après cette première séance, la fiche de préparation de la séance suivante a été modifiée :

Voir Annexe 12 : **Fiche de préparation de la séance 2 modifiée**

C) *Deuxième séance effectuée*

i. Compte-rendu

Pour cette deuxième séance, six élèves sont présents : Victoria, Nyna, Molyca, Melody, Sanâ, Kaylia. Ce ne sont pas les mêmes élèves que la semaine précédente. La séance sera la même, à l'exception près que ceux-là ont entendu le bilan des différentes manières de procéder : doigts, bandes numériques, legos.

La séance commence par un rappel du matériel :

Enseignante : *Qui me rappelle ce qu'est ce jeu ?*

Tous les élèves se souviennent que c'est le jeu du dortoir et qu'il y a des ours qui dorment et qui vont se réveiller pour aller jouer dans la salle de jeux.

Enseignante : *Et combien y'a-t-il d'ours dans ce dortoir ?*

Chaque élève compte et trouve dix. L'enseignante demande alors ce qu'ils font. Nyna répond : « *Ils sont en train de dormir.* »

L'activité commence alors :

Enseignante : *Vous fermez vos yeux. Des petits ours se réveillent. Je les mets dans la salle de jeux (elle en met quatre).*

Elle ferme alors le dortoir et demande aux élèves : « *Vous pouvez ouvrir les yeux. Alors, je veux savoir combien d'ours sont encore en train de dormir. Avant de réfléchir, on va voir ensemble quels outils sont à notre disposition.* »

Un rappel du matériel est alors fait : bandes numériques, legos. On ne précise pas que l'on peut également utiliser les doigts car ici, l'observation porte justement sur ce point : vont-ils utiliser les doigts comme collection-témoin pour résoudre un problème ?

D'abord, l'enseignante demande aux élèves combien d'ours sont dans la salle de jeux. Chaque élève compte. Puis, elle leur dit qu'elle veut savoir : *Combien sont encore dans le dortoir et comment avez-vous fait pour trouver ?* Les élèves réfléchissent et utilisent les legos et les bandes numériques. Certaines disent cinq, d'autres six ou encore sept.

Enseignante : Combien d'ours sont encore en train de dormir ?

Nyna : Dix.

Melody : Six.

Enseignante : Melody, comment tu as fait ?

Melody : J'ai bien réfléchi dans ma tête, j'ai posé les legos en dessous (de la bande numérique).

L'enseignante demande aussi aux autres élèves. Sanâ ne sait pas pourquoi, Victoria n'ont plus. Molyca dit qu'elle a compté dans sa tête jusqu'à cinq mais ne va pas plus loin dans l'explication. Kaylia ne sait plus comment elle a fait. L'enseignante ouvre le dortoir et compte avec les élèves les ours présents dans le dortoir pour vérification.

L'enseignante demande alors aux enfants s'il n'y aurait pas un autre outil. Sanâ répond presque aussitôt : « *Avec les mains !* ». L'enseignante demande alors à chaque élève ce qu'ils vont utiliser :

Enseignante : Quels outils vous allez utiliser ?

Victoria : Moi, je veux les legos

Molyca : Les legos

Melody : Les legos.

Kaylia : Les legos.

Nyna : Les mains.

Un rappel du nombre d'ours dans le dortoir est fait : chaque élève les compte. Elles (il

n'y a que des filles dans ce groupe) ferment les yeux pendant que l'enseignante sort cinq ours.

Enseignante: Alors combien il y en a dans le dortoir ?

Kaylia: Cinq (presque automatiquement).

Sanâ: Si on a cinq et cinq ça va faire dix...

Enseignante: Explique nous Sanâ.

Sanâ: Pour trouver cinq j'ai utilisé mes doigts. J'ai mis cinq (une main posée sur la table) et après j'en ai mis quatre. Ici, on voit qu'elle s'est embrouillée que son explication n'est pas très claire. Elle dit quatre alors qu'elle pensait sans doute cinq.

Enseignante: D'accord, et toi Kaylia comment tu as trouvé cinq ?

Kaylia: J'ai réfléchi dans ma tête et j'ai compté dans ma tête.

Elle ne va pas plus loin dans l'explication. Puis, l'enseignante entame une discussion avec Melody.

Enseignante: Combien tu penses qu'il y a d'ours dans le dortoir ?

Melody: Dix

Enseignante: Tu es sûr ? Combien sont réveillés ?

Melody: Cinq

Enseignante: Et il en reste combien alors ?

Melody: Cinq.

Enseignante: Pourquoi ?

Melody n'a pas plus d'explication à donner. Molyca dit également cinq mais elle ne sait pas pourquoi. Victoria pense au nombre quatre et Nyna à neuf. Une vérification se fait de la même manière que précédemment.

L'enseignante essaie de trouver un moyen pour que les élèves aient un procédé de résolution. Cette étape n'est pas dans la fiche de préparation mais voyant que les élèves n'y arriveraient pas toutes seules, l'enseignante décide d'improviser pour que les élèves sachent comment résoudre ce problème.

Enseignante: On va essayer avec une petite histoire (à l'observateur). 1, 2, 3 nous sommes au pays des magiciens ! Et moi je suis une magicienne et je transforme vos doigts en petits ours. Nyna, combien tu as d'ours ?

Toutes répondent dix.

Enseignante: Alors maintenant, on fait danser les petits ours (elle fait danser ses doigts sur la table). Puis, ils se reposent. quatre petits ours se réveillent, quatre petits ours ont disparu.

Elle plie alors quatre doigts et demande aux élèves de faire pareil. Sanâ y arrive toute seule et l'enseignante aide les autres à replier leurs doigts pour qu'elles puissent toutes suivre.

Enseignante: Combien sont encore en train de dormir ?

Sanâ: Six, moi j'ai même pas compté.

On vérifie avec l'enseignante puis, on recommence la situation avec six ours qui sont réveillés.

Enseignante: Sanâ, combien sont encore dans le dortoir ?

Sanâ: Six sont réveillés (elle lève 6 doigts)....et après C'est trop dur...

Puis, avec l'aide de l'enseignante elle réussit. Melody aussi.

L'enseignante décide ensuite d'arrêter la séance car elle pense qu'on n'ira pas plus loin aujourd'hui.

ii. Conclusions

Grâce à cette séance, on voit qu'intuitivement les élèves trouvent la réponse mais ne savent pas comment l'expliquer. De plus, pour le deuxième essai, ces dernières répondent naturellement cinq car elles savent déjà que cinq et cinq font dix.

Ici, on voit que comme la séance avec le groupe précédent, l'utilisation des doigts n'est pas naturelle chez elles. Même avec de l'aide, les enfants n'y arrivent pas tous. Seuls les « bons » élèves réussissent à résoudre le problème avec l'aide de l'enseignante mais ce n'est pas un automatisme. Elles ne considèrent pas encore les doigts comme une collection témoin pratique pour résoudre un problème puisqu'elles n'arrivent pas à se décentrer de l'activité même et à représenter les dix ours par les dix doigts. De plus, l'utilisation des doigts nécessite

une certaine agilité qu'elles n'ont pas encore. Les doigts ne leur viennent donc pas tout de suite à l'idée car elles n'arrivent pas à les manipuler rapidement. En discutant avec l'enseignante, nous avons remarqué que les élèves les plus à l'aise avec les doigts étaient, en moyenne section, dans une classe où l'enseignante utilisait souvent la démarche de BRISSIAUD pour compter. Même si cela n'est pas complètement acquis par ces élèves, cela est en cours d'acquisition.

Ces séances nous amènent donc à penser que pour utiliser les doigts comme il faut, cette compétence doit être travaillée dès le plus jeune âge chez les enfants afin que cela devienne une sorte d'automatisme pour eux. Ainsi, l'agilité dans la manipulation des doigts et la compréhension des doigts comme une collection témoin pour représenter toute sorte d'objets permettra de résoudre des situations. Mais, ceci est une situation compliquée pour les élèves quand ils n'ont pas l'habitude d'utiliser les doigts. Prendre les doigts pour une collection d'ours ou de tout autre objet est très abstrait pour les élèves et ils n'arrivent pas à apparenter leurs doigts à cette collection. Pour eux, les doigts sont une collection différente de la collection de la situation, ils ne peuvent donc pas penser à les utiliser pour remplacer ceux-ci.

Cependant, certains élèves réussissent à résoudre le problème sans utiliser les doigts et les élèves en difficulté manipulent plus rapidement d'autres outils comme les legos pour résoudre un problème de ce genre.

Donc, même si historiquement les doigts ont permis élaborer les systèmes de numération, l'appui sur les dix doigts comme une collection témoin privilégiée pour représenter les nombres n'est pas naturel pour les élèves. Cette utilisation doit se construire dès le plus jeune âge.

Conclusion

Suite à tout ce raisonnement, nous pouvons donner quelques pistes pour répondre à notre question de départ qui était : ***En quoi les doigts sont-ils une collection-témoin privilégiée pour représenter les nombres ?*** L'humanité s'est servie de ses doigts pour développer les systèmes de numération en base dix mais aussi dans d'autres bases qui ont sans doute une origine anthropomorphe comme les bases 4, 5, 12 ou 20, on peut donc dire que les doigts ont sans doute été une collection témoin privilégiée pour représenter les nombres. Les doigts étaient le premier outil utilisé par les hommes pour compter les bêtes d'un troupeau par exemple. De plus, si la nature nous avait donné six doigts à chaque main au lieu de cinq peut-être qu'aujourd'hui le système de numération majoritaire dans le monde serait en base douze. Les doigts ont donc été utilisés et sont utilisés dans beaucoup de civilisations et ont été une grande aide pour comprendre et établir les systèmes de numération.

Aujourd'hui, dès l'école primaire, les doigts sont utilisés pour que les élèves mémorisent la suite des nombres dans des chants et des comptines. Cependant, grâce à notre situation pédagogique mise en place dans une classe de grande section, les enfants qui avaient déjà des difficultés n'étaient pas aidés plus particulièrement en utilisant les doigts comme collection témoin pour représenter un nombre. Les élèves qui n'ont jamais été confrontés aux doigts comme collection témoin durant leur scolarité ne s'en servent pas de manière privilégiée. Les élèves, ayant une approche du nombre à l'aide des doigts dès le plus jeune âge, sont capables de s'en servir pour résoudre des simples problèmes. Ils ont même tendance à plus s'en servir que les autres, mais seulement quand ils ont compris que les doigts pouvaient remplacer n'importe quelle collection. Les doigts n'aident donc pas les élèves à assimiler les dix doigts comme la base de notre système de numération. On peut donc dire que cette acquisition n'est pas naturelle pour les enfants. Elle doit s'acquérir. Les élèves préfèrent, en général, des outils plus maniables qui peuvent être déplacés facilement. En effet, les doigts ne peuvent être mis d'un côté pour les « séparer » des autres et leur utilisation demande une agilité particulière.

Pour que l'utilisation des doigts soit bénéfique avant d'être pratique, il faut faire très attention à son utilisation. Il ne faut pas utiliser la même constellation de doigts, sinon l'élève

retiendra une constellation pour un nombre sans comprendre le sens même du nombre. Par exemple, pour le nombre trois, si on montre trois toujours en levant le pouce, l'index et le majeur, quand on lui montrera l'auriculaire, l'annulaire et le majeur, il sera incapable de dire que c'est trois puisque ce ne sera pas la même constellation que d'habitude.

Notre hypothèse de départ se trouve donc grandement compromise puisque l'usage des doigts n'aide pas réellement les élèves à comprendre la notion de nombre et à s'approprier notre système de numération. Ils n'arrivent, en effet, pas à représenter une quantité d'objets réels avec les doigts. Cependant, les séances ayant été menées dans une seule classe (qui plus est de douze élèves), les résultats sont peut-être trop ambitieux. Si les séances avaient été menées dans une autre classe, les conclusions ne seraient sans doute pas exactement les mêmes. C'est une des limites de ce travail, un échantillon plus grand aurait permis d'avoir des conclusions plus proches de la réalité.

Ici, nous avons parlé exclusivement des manières de représenter les nombres sur les doigts et ce que cela pouvait apporter. Mais, on peut aussi étendre cette utilisation des doigts au calcul. En effet, dans les programmes du cycle 3, on ne parle pas précisément de l'utilisation des doigts dans les calculs. Pourtant, on y met que les élèves doivent maîtriser une technique opératoire pour chacune des quatre opérations (addition, soustraction, multiplication, division) : « *calcul posé : la maîtrise d'une technique opératoire pour chacune des quatre opérations est indispensable.* » (BO du 19-06-08, p.23). On peut donc se demander si l'on ne pourrait pas se servir d'une méthode nécessitant l'usage des mains et des doigts pour trouver le résultat d'une opération. Par exemple, pour la multiplication des nombres compris entre cinq et dix, il existe des méthodes simples dont le pré-requis nécessaire est « savoir compter jusqu'à neuf ». Si on veut multiplier huit par sept, on procède de la manière suivante :

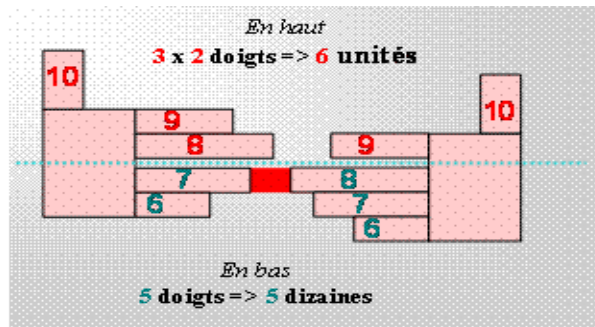
- $8 - 5 = 3 \Rightarrow$ On replie trois doigts sur la première main ;
- $7 - 5 = 2 \Rightarrow$ On replie deux doigts sur la deuxième main ;
- On additionne les doigts repliés : $3 + 2 = 5 \Rightarrow$ Cinq est le chiffre des dizaines ;

- On multiplie les doigts levés : $3 \times 2 = 6 \Rightarrow$ Six est le chiffre des unités.

On obtient alors le résultat suivant : $8 \times 7 = 56$. Cette méthode n'est pas évidente pour savoir quels doigts faut-il replier, lesquels faut-il multiplier, lesquels faut-il additionner. En positionnant les mains d'une certaine manière, on peut exécuter cette méthode en ayant moins de choses à retenir. En partant du petit doigt, on numérote l'auriculaire six, l'annulaire sept, le majeur huit, l'index neuf et enfin le pouce dix. En regardant les paumes des mains, on met en correspondance les extrémités des doigts. Par exemple, pour sept fois huit, cela donne (voir ci-contre) :

Puis, le nombre de doigts en bas donne le chiffre des dizaines, alors que les doigts libres en haut, donne les unités si on les multiplie.

Nous pouvons illustrer cette méthode par le schéma suivant.



Les doigts ne sont donc pas un outil privilégié pour représenter une collection-témoin. Cependant, peut-être que les doigts pourraient être un outil privilégié pour mémoriser des tables de multiplications par exemple. En effet, ici, le fait de « jouer » avec les doigts pour trouver le résultat d'une multiplication peut permettre aux élèves de mémoriser plus facilement ces tables qui sont essentielles pour le reste de la scolarité.

Bibliographie

Les ouvrages :

- **BARUK, S.** (2003). *Comptes pour petits et grands (Volume 1 : Pour un apprentissage du nombre et de la numération fondé sur la langue et le sens)*, Magnard. => (BARUK. S, 2003 (1), p. ...) et (*Volume 2 : Pour un apprentissage des opérations, des calculs, et des problèmes, fondé sur la langue et le sens*). Magnard. => (BARUK. S, 2003 (2), p. ...)
- **BIDEAUD J. ; MELJAC C. ; FISCHER J-P.** (1991). *Les chemins du nombre*. Presses universitaires de Lille.
- **BRANSIET, M.** (19ème siècle). *Nouveau traité d'arithmétique décimale*. Paris : Alfred Mame et fils, Tours et Poussielgue frères.
- **BRISSIAUD, R.** (2005). *Comment les enfants apprennent à calculer (Le rôle du langage, des représentations figurées et du calcul dans la conceptualisation des nombres)*. Editions Retz. => (BRISSIAUD. R, 2005 (1),p. ...) dans le développement.
- **BRISSIAUD Rémi, MALAUSSENA Philippe.** (2005). *J'apprends les maths, PS cycle des apprentissages premiers..* Retz. => (BRISSIAUD. R, 2005 (2),p. ...) dans le développement.
- **BRISSIAUD, R.** (2007). *Premiers pas vers les maths, les chemins de la réussite à l'école maternelle*. Retz.
- **CERQUETTI-ABERKANE, F.** (1992). *Enseigner les mathématiques à l'école*. Hachette éducation.

- **CONDILLAC.** (1798). *La langue des calculs (ouvrage posthume)*. Paris : Imprimerie de Ch. Houel (p.10 à 31).
- **GUILMIN, A.** (1880). *Arithmétique à l'usage des écoles primaires et des classes élémentaires*. Paris : Picard.
- **IFRAH, G.** (1981). *Histoire universelle des chiffres, L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul*. Bouquins.
- **Institut national de recherche pédagogique.** (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes*. Hatier Ermel.
- **RONAN, C.** (1983, 1988 pour la traduction française). *Histoire mondiale des Sciences*. Editions du Seuil.
- **ROSHDI Rashed** (Sous la direction de). (1997). *Histoire des sciences arabes (Volume 2 : Mathématiques et physique)*. Editions du seuil.
- **SERRES, M** (Sous la direction de). (1997). *Eléments d'histoire des Sciences*. Larousse.
- **SCHÄRLIG, A.** (2006). *Compter du bout des doigts : cailloux, jetons et bouliers, de Périclès à nos jours*. Presses polytechniques et universitaires romandes.
- **VALENTIN, D.** (2005). *Découvrir le monde avec les mathématiques (Situations pour la grande section)*. Hatier.

Les instructions officielles

- *Documents d'accompagnements 2007*
- « *Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire* », *Bulletin Officiel du 19 juin 2008, hors-série n° 3*
- **Socle commun des connaissances et des compétences** (décret 11 juillet 2006)
- *Le nombre au cycle 2* (Mathématiques), Scérén, CNDP-CRDP, parution : 1^{er} juillet 2010

Les articles :


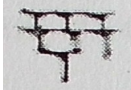

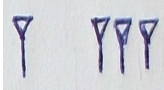
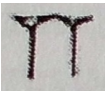
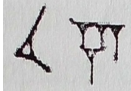

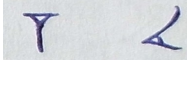

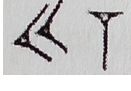
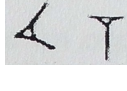
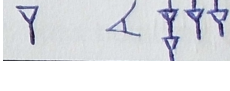

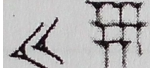
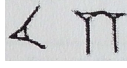
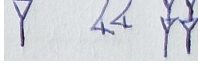
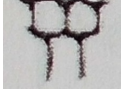
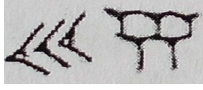
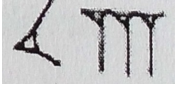
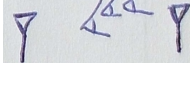

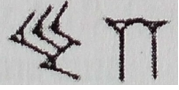
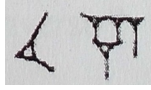
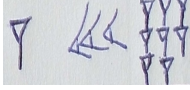


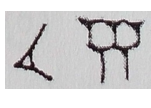
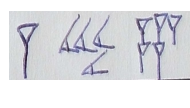
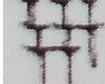


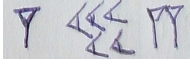
- MINAUD, G. *Des doigts pour le dire, Le comput digital et ses symboles dans l'iconographie romaine*. <http://histoiremesure.revues.org/index1534.html> (via Cairn)

Les sites internet :

- <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2038695/f11.image.pagination.r=.langFR> => « La langue des calculs » de Condillac => p. 10 : Chapitre 1er : Des calculs avec les doigts.
- <http://villemin.gerard.free.fr/> (site créé en 1998 et mis à jour le 12 février 2012) => illustrations des méthodes de calcul
- <http://www.math.ens.fr/culturemath/index.html> => CultureMath (Site expert des Ecoles Normales Supérieures et du Ministère de l'Education Nationale)
- http://promenadesmaths.free.fr/fichiers_pdf/histoire_arithmetique.pdf
- <http://www.ac-versailles.fr> => pour les symboles égyptiens
- <http://www3.ac-nancy-metz.fr>
- <http://histoiredechiffres.free.fr/index.php> (Site créé le 12 novembre 2000 par deux professeurs de mathématiques et mis à jour le 10 février 2012)
- http://rio.orgerus.org/IMG/pdf/son_08.pdf (document de Guy PANNETIER)

Annexes

Annexe 1 : Table de multiplication de 7 dans le système babylonien

Multiplicateur	Résultat	Multiplicateur	Résultat
1 	7 	9 	63 
2 	14 	10 	70 
3 	21 	11 	77 
4 	28 	12 	84 
5 	35 	13 	91 
6 	42 	14 	98 
7 	49 	15 	105 
8 	56 	16 	112 

Ce tableau se lit : « Sept multiplié par le multiplicateur donne le résultat » ; ainsi, on a pour la première ligne et les deux premières colonnes : sept multiplié par un donne sept et pour la première ligne deux dernières colonnes : sept multiplié par neuf donne soixante-trois. De plus, pour la dernière colonne, le premier symbole à gauche désigne le nombre de soixantaine et les symboles à droite les unités. Par exemple, pour la case 105, on a une soixantaine et quarante-cinq unités, c'est-à-dire un clou pour la soixantaine, quatre chevrons pour les quatre dizaines et cinq clous pour les cinq unités.

Annexe 2 : La fin des civilisations sumérienne et babylonienne

« Malheureusement, les acquis mathématiques des Sumériens et des Babyloniens ne furent pas repris et poursuivis aux époques postérieures. Leur algèbre fut oubliée et, exception faite d'une période où, comme nous le verrons, quelques Grecs reprirent cette discipline pendant un court laps de temps, l'algèbre resta en sommeil jusqu'à ce que les mathématiciens islamiques la fassent revivre au IX^e siècle après J.-C. Leur adoption d'une division par 10 comme base de toutes les mesures officielles ne fut pas reprise dans le monde occidental avant l'avènement du système métrique, vers la fin du XVIII^e siècle. Enfin, leur façon de placer les symboles numériques pour indiquer leur valeur fut aussi perdue et ne regagna l'Occident qu'au X^e siècle, avec l'arrivée des chiffres indo-arabes que nous utilisons encore aujourd'hui. Dire que les Sumériens et les Babyloniens firent beaucoup progresser les mathématiques est en deçà de la vérité : il semble qu'ils aient posé les fondements réels de toute cette discipline ». Cet extrait est issu de l'ouvrage de Colin RONAN (RONAN. C, 1998, p. 55-56).

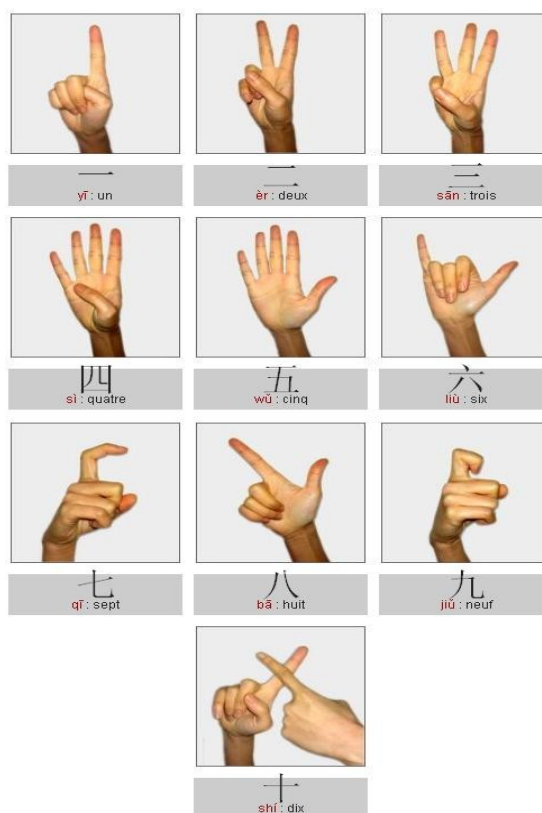
Annexe 3 : Où la base dix a-t-elle été utilisée, où est-elle encore utilisée ?

Voici la liste alphabétique (IFRAH. G, 1981, p. 103) des peuples utilisant ou ayant utilisé la base dix comme système de numération :

- les Amorites (nord-ouest de la Mésopotamie)
- les Arabes (avant et après la naissance de l'islam)
- les Araméens (Proche-Orient)
- les Assyriens (Mésopotamie entre le Tigre et le grand Zab)
- les Bamoums (Cameroun)
- les Baoulés (Côte d'Ivoire)
- les Berbères (population blanche d'Afrique du Nord)
- les Cham (région indochinoise)
- les Chinois

- Les Egyptiens
- les Elamites (Khouzistan)
- les Etrusques (Toscane)
- les Gourmachés de Haute-Volta
- les Grecs
- les Hébreux
- les Hittites (Anatolie)
- Les Incas (Amérique du Sud)
- les habitants de l'Inde
- les Indusiens
- Les Lyciens (Asie mineure)
- les Malais
- les Malgaches
- les Mandchous
- les Minoes (Crète)
- les Mongols
- les Nubiens (nord-est de l'Afrique)
- les Perses
- les Phéniciens
- les Romains
- les Tibétains
- les Ugaritains (Syrie du Nord)
- les Urtéens ...

Annexe 4 : Compter sur les doigts en Chine



Annexe 5 : Principes de la réforme des mathématiques modernes

Cette réforme des mathématiques modernes, née dans les années soixante, insiste sur les structures mathématiques à travers des concepts abstraits. Ainsi, dès l'école primaire, les élèves étudiaient la théorie des ensembles par exemple. On espérait ainsi développer la pensée logique et les facultés d'abstraction des élèves. Au niveau du collège, les notions de groupes, d'anneaux ou de corps algébriques étaient introduites. La mise en pratique du calcul était remplacée par une approche théorique. Les classes de lycée, quant à elles, voyaient l'intrusion de l'algèbre linéaire. Cette pédagogie faisait donc un ravage sur les « élèves concrets » et cet enseignement convenait à la sélection et à la réussite d'élèves habitués à manier du langage, sans référence à un problème qui donne sens. Il servait donc à élire l'élite de la nation et les enfants d'ouvrier étaient vite perdus.

=> **Sources** : http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/Barbin-APMEP-R-forme_mathematiques_modernes.pdf et http://fr.wikipedia.org/wiki/Math%C3%A9matiques_modernes

Situation 1

Le dortoir¹

Atelier dirigé de 4 à 6 enfants et un meneur de jeu (qui est d'abord l'enseignant puis un enfant)

Objectifs

- Prendre conscience que les nombres permettent de garder la mémoire de certains faits
- Utiliser les compléments à dix pour résoudre un problème
- Mémoriser quelques résultats

Matériel

- une boîte carrée avec un couvercle, appelée le « dortoir » dans le fond de laquelle sont collés 10 rectangles de mousse (10 lits), en 2 rangées de 5 lits
- 10 bébés (petites poupées en plastique ou gabarits)
→ matériel classe n° 25
- une deuxième boîte, un peu plus petite, qui pourra être rangée à l'intérieur du « dortoir » : c'est la « salle de jeux » dans laquelle un tapis et quelques jouets miniatures sont installés
- un plateau sur lequel est disposé du matériel mis à la disposition des enfants : quelques feuilles, crayons, cubes, bandes numériques



Les « jouets » miniatures peuvent parasiter la situation en apportant des éléments que les enfants sont parfois amenés à dénombrer avec les bébés. Ces « données inutiles », comme nous le dirions à propos de problèmes à l'école élémentaire, doivent donc être maniées avec prudence. Habillage intéressant avec les enfants qui ne s'en laissent pas conter..., il peut être préférable de les supprimer avec d'autres et d'utiliser alors un simple « tapis » simulant la salle de jeu.

Matériel mis à la disposition des enfants : Il est parfois nécessaire de proposer aux enfants des outils auxquels ils n'ont pas recours par eux-mêmes, soit parce qu'ils n'en voient pas la pertinence, soit parce qu'ils ne se croient pas autorisés à y avoir recours. Par exemple : feuilles, crayons, cubes, bandes numériques... Mais le moment de cette introduction n'est pas facile à définir : introduits en cours de résolution, et donc parce qu'un enfant semble ne pouvoir trouver seul ce qui peut l'aider, ces éléments peuvent être très inducteurs et amener des enfants à une utilisation formelle. Nous pensons donc qu'il est préférable de les disposer sur la table de jeu, dès le début, et sur un plateau.

1. Cette situation a déjà fait l'objet d'une publication dans la revue *Grand N*, « Les compléments à 10 en Grande Section : pourquoi ? comment ? », Jacqueline Viennot, Dominique Valentin.

ACTIVITÉ 1 Appropriation du matériel

Le dortoir reste visible, la salle de jeux est cachée

BUT À ATTEINDRE : Trouver le nombre de bébés qui sont dans le dortoir

L'enseignant enlève le couvercle du dortoir, pose la « salle de jeux » à côté du « dortoir » et présente les deux lieux et leur fonction. Les bébés sont alors placés chacun dans leur lit. Le matériel étant très fort sur le plan affectif, il faut prévoir un temps de manipulation permettant aux enfants de verbaliser la situation, de toucher ces fameux bébés, de les coucher et de les lever, bref de prendre du plaisir avant de chercher à atteindre un but précis.

Puis, l'enseignant explique que le jeu va consister à repérer où sont les bébés (dans le dortoir ou dans la salle de jeux) : « Regardez ! 10 bébés dorment dans le dortoir, mais certains vont se réveiller et iront alors dans la salle de jeux. Nous regarderons ceux qui sont encore dans le dortoir et vous chercherez combien sont déjà dans la salle de jeux. Mais attention, vous ne verrez pas la salle de jeux que je vais cacher. » Il n'attire pas l'attention des enfants sur l'équipotence des lits et des bébés.

Les mains sous le couvercle du dortoir, alors que les enfants ont été invités à fermer les yeux, l'enseignant enlève 3 bébés et les pose, toujours dissimulés, dans la salle de jeux dont il ferme le couvercle. Puis, il demande : « Ouvrez vos yeux et regardez le dortoir. Combien de bébés sont déjà dans la salle de jeux ? ».

Chaque proposition est discutée (« Est-ce le bon nombre de bébés ? Comment as-tu trouvé ce nombre ? »), puis validée en soulevant le couvercle de la salle de jeux.

L'activité est reprise une ou deux fois en changeant le nombre de bébés enlevés du dortoir.

A ce moment de l'activité, les élèves prennent généralement conscience que le nombre de lits visibles correspond au nombre de bébés déjà levés qui est le nombre cherché. Dans cette première activité, il n'est pas nécessaire de mettre en relation le nombre total de bébés, nombre qui reste constant, et les deux autres nombres : celui des bébés visibles et celui des bébés cachés. Les enfants réalisent très vite qu'il suffit de compter les lits vides pour trouver le nombre de bébés qui sont dans la salle de jeux.

ACTIVITÉ 2 Résolution de problèmes

Le dortoir est caché et la salle de jeux est visible

BUT À ATTEINDRE : Trouver le nombre de bébés qui sont dans la salle de jeux

Cette activité suit immédiatement la précédente.

L'enseignant ouvre la boîte qui symbolise la salle de jeux et referme la boîte-dortoir : « Attention, maintenant vous allez voir combien de bébés sont réveillés dans la salle de jeux, mais le dortoir est caché. Il faut trouver combien de bébés dorment encore ».

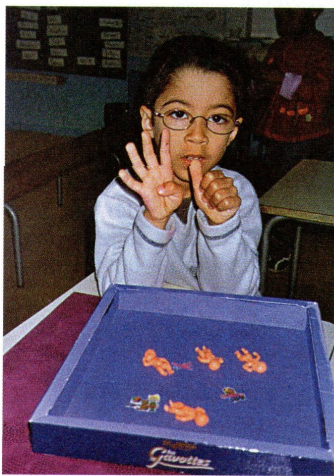
Les enfants ferment les yeux et l'enseignant retire discrètement 4 bébés du dortoir qu'il referme et pose ces bébés dans la salle de jeux qui reste ouverte. Puis il demande : « Combien de bébés dorment encore ? ».

C'est ici que se pose vraiment un problème puisqu'il n'y a plus de possibilité de se repérer sur les lits vides à compter, comme à la phase précédente. Seul le nombre total de bébés, dix, va servir de point d'appui ; le problème mathématique revient donc à chercher le complément à dix, ce qui implique de revenir sans cesse sur le nombre total de bébés.

Chaque proposition des enfants est explicitée et discutée (« Est-ce qu'il peut y avoir encore 9 bébés dans leurs lits alors qu'il y en a 4 de réveillés ? »), puis validée ou invalidée en ouvrant le dortoir. L'activité est reprise plusieurs fois en changeant le nombre de bébés réveillés. Les enfants peuvent utiliser **différentes procédures** :

- **L'enfant ne dispose que de ses mains.**

Les deux poings fermés, il lève 4 doigts et compte ceux qui sont baissés. C'est la procédure la plus couramment utilisée car la plus simple et la plus rapide à mettre en œuvre, une fois que l'enfant l'a découverte. C'est donc une procédure qui doit être entraînée pour devenir fiable et rapide.



- **L'enfant dispose d'une feuille de papier et dessine, souvent à la demande de l'enseignant :**

- Il dessine ce qu'il voit : 4 bébés (il faut alors le conduire à formuler que ce sont bien là les bébés **réveillés**, ceux de la salle de jeux), et complète ensuite son dessin avec les autres bébés encore **endormis**.

- Il dessine toute l'organisation de la situation : la salle de jeux avec les 4 bébés réveillés et le dortoir avec 10 lits dont 4 sont barrés (parce qu'ils sont vides) ; il n'a plus alors qu'à compter ou remplir les autres lits.

- **L'enfant utilise sa bande numérique.**

- Il décompte : 4 en partant de 10 et se retrouve sur la case 6.

- Il cache 4 cases avec sa main et il reste 6 cases à compter jusqu'à 10.

- **L'enfant utilise, dans quelques cas, des résultats mémorisés :**

- 10, c'est 5 et 5 ou 9 et 1...

Alors que la première activité est vite comprise par tous les enfants qui dénombrent les lits vides pour trouver le nombre de bébés levés, cette deuxième activité s'avère beaucoup plus difficile et il reste parfois quelques enfants en échec, qui se montrent même persuadés qu'il n'est pas possible de trouver ce qui est caché (ils semblent penser qu'il s'agit de **deviner** ce nombre). Nous distinguons plusieurs causes d'échec :

- certains enfants, malgré la première activité, n'ont pas réalisé qu'il y a **10 bébés en jeu en permanence** et ne prennent pas conscience de l'importance de ce nombre ;

- le **recours à une collection intermédiaire** dénombrable (en général les doigts) ne se fait pas facilement, parce que soit symboliser des bébés par des doigts est loin d'être évident, soit leur capacité à lever le bon nombre de doigts n'est pas immédiate.

La tentation est grande de montrer aux enfants une procédure, en particulier le comptage sur les doigts. Mais nous pensons préférable de pratiquer une politique du détour, c'est-à-dire **d'abandonner momentanément** la situation et de proposer :

- la situation « deux cartes pour faire dix » aux enfants qui n'ont pas réalisé qu'il y avait toujours 10 bébés (voir p. 36) ;

- des activités d'entraînement sur les doigts (voir p. 41) aux enfants qui ont des difficultés à compter à l'aide de leurs doigts.

Après quelques parties, seules deux procédures sont en général utilisées :

- les résultats mémorisés à l'occasion des parties précédentes : « Tout à l'heure c'était 6 là et 4 ici, maintenant c'est pareil, mais ça a changé d'endroit ».

- l'utilisation des doigts des deux mains.

Nous voyons, en particulier à cette occasion, que les outils intermédiaires, pas toujours disponibles, sont rarement repris spontanément par les enfants.

Annexe 7 : Fiches de préparation des séances

MATHEMATIQUES

Les nombres	Dix dans un dortoir : Séance n° 2 (25/11/2011)	Grande Section
Référentiel institutionnel d'après le BO du 19 juin 2008 :		
Socle commun	Programmes	
<ul style="list-style-type: none"> - comparer des quantités, résoudre des problèmes portant sur les quantités - mémoriser la suite de nombres jusqu'à 10 (ici) - dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus 	<ul style="list-style-type: none"> - acquisition de la suite des nombres et utilisation dans des procédures de quantifications - fonction du nombre comme représentation d'une quantité - apprendre à utiliser la suite de nombres pour dénombrer <ul style="list-style-type: none"> - première entrée dans l'univers du calcul 	

Objectifs pédagogiques de la séance :

- A la fin de la séance, l'élève doit avoir mémorisé quelques compléments à 10 et doit les utiliser dans la résolution de problèmes

Objectifs de l'observateur :

- Quelle procédure utilisent les élèves dans la résolution de problèmes utilisant les compléments à 10 ?
 - Est-ce que les doigts les aident dans la compréhension de ces compléments à 10 ?

Matériel : le jeu du dortoir, matériel habituel qu'ils utilisent

	Déroulement de la séance
Rappel	Faire un petit rappel de la séance précédente en refaisant un ou deux exemples de la première situation pour qu'ils se remettent bien la situation et le matériel en tête.
Explicitation de la situation	« Maintenant, je laisse la salle de jeux ouverte mais je ferme le dortoir. On ne voit plus que la salle de jeux. Vous allez voir combien de bébés sont réveillés dans la salle de jeux et vous devrez me dire comment vous pourriez trouver le nombre de bébés qui dorment. Quelles manières vous allez utiliser pour trouver la réponse ?
Recherche	<p>Sachant que nous avons déjà des outils à notre disposition. Rappelez moi lesquels. » => faire émerger les outils qu'ils ont déjà utilisé (duplo, bande numérique, et voir si les élèves pensent déjà aux doigts à ce moment de la séance)</p> <p>« Dites moi comment on pourrait faire pour trouver combien de bébés dorment encore dans le dortoir alors qu'on ne le voit pas. »</p> <p>Leur proposer une première situation et voir leurs démarches. Leur demander ce qu'ils en pensent et pourquoi ou comment ils ont fait pour trouver ça. Discuter avec eux : s'ils n'ont pas trouvé voir avec eux comment on pourrait faire pour trouver ? Leur faire expliciter leurs procédures. (j'aimerais bien que l'idée d'utiliser les doigts viennent d'eux, qu'ils se rendent compte par eux-mêmes que c'est un outil facile)</p> <p>Si jamais l'utilisation des doigts dans la résolution du problème ne vient pas peut-être faire une passerelle avec les activités faites précédemment et faire un rapprochement pour qu'ils se souviennent eux-mêmes qu'on peut utiliser les doigts. (car il me semble que vous avez travaillé avec l'utilisation des doigts dans différentes procédures)</p> <p>Recommencer la situation</p>

MATHEMATIQUES

Les nombres	Dix dans un dortoir : Séance n° 3 (6/12/2011)	Grande Section
<u>Référentiel institutionnel d'après le BO du 19 juin 2008 :</u>		
Socle commun	Programmes	
<ul style="list-style-type: none"> - comparer des quantités, résoudre des problèmes portant sur les quantités - mémoriser la suite de nombres jusqu'à 10 (ici) - dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus 	<ul style="list-style-type: none"> - acquisition de la suite des nombres et utilisation dans des procédures de quantifications - fonction du nombre comme représentation d'une quantité - apprendre à utiliser la suite de nombres pour dénombrer <ul style="list-style-type: none"> - première entrée dans l'univers du calcul 	

Objectifs pédagogiques de la séance :

- A la fin de la séance, l'élève doit avoir mémorisé quelques compléments à 10 et doit les utiliser dans la résolution de petits problèmes

Objectifs observateur :

- Est-ce que l'utilisation des doigts est devenue un automatisme dans la résolution de ces problèmes ?
- Préfèrent-ils utiliser les doigts ou une autre procédure (celles qu'ils ont l'habitude d'utiliser : bandes numériques, duplo...) ?
- Voir s'ils ont mémorisé quelques compléments à 10 ? Si oui, comment ils ont mémorisé (comment sais-tu que s'il y en a trois dans la salle de jeux, il y en a 7 dans la dortoir ? => voir s'ils s'en rappellent grâce à la collection témoin des doigts ou pas)

<u>Matériel :</u> le jeu du dortoir
--

Déroulement de la séance	
Rappel	Faire un petit rappel de la séance précédente « Je laisse la salle de jeux ouverte mais je ferme le dortoir. On ne voit plus que la salle de jeux. Vous allez voir combien de bébés sont réveillés dans la salle de jeux et il faut trouver combien dorment encore. »
Recherche	<p>Leur proposer une première situation et voir leurs démarches. (mettre à leur disposition différents matériels : ardoise, bande numérique, cubes)</p> <p>Leur demander ce qu'ils en pensent et pourquoi ou comment ils ont fait pour trouver ça : leur faire expliciter leurs procédures. Voir si certains ont déjà mémorisé des compléments à 10 (pour cela, surtout voir comment ils ont fait pour se rappeler de ces compléments (est-ce qu'ils utilisent les doigts pour expliquer?))</p> <p>Discuter avec eux : s'ils n'ont pas trouvé voir avec eux comment on pourrait faire pour trouver ? Les faire expliciter leurs procédures.</p> <p>et recommencer la situation</p>

Annexe 8 : Fiche de préparation de la séance 2 modifiée

MATHEMATIQUES

Les nombres	Dix dans un dortoir : Séance n° 3 (6 décembre 2011)	Grande Section
Référentiel institutionnel d'après le BO du 19 juin 2008 :		
Socle commun	Programmes	
<ul style="list-style-type: none"> - comparer des quantités, résoudre des problèmes portant sur les quantités - mémoriser la suite de nombres jusqu'à 10 (ici) - dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus 	<ul style="list-style-type: none"> - acquisition de la suite des nombres et utilisation dans des procédures de quantifications - fonction du nombre comme représentation d'une quantité - apprendre à utiliser la suite de nombres pour dénombrer <ul style="list-style-type: none"> - première entrée dans l'univers du calcul 	

Objectifs pédagogiques de la séance :

- A la fin de la séance, l'élève doit avoir mémorisé quelques compléments à 10 et doit les utiliser dans la résolution de problèmes

Objectifs observateur :

- Quelle procédure utilisent les élèves dans la résolution de problèmes utilisant les compléments à 10 ?
 - Est-ce que les doigts les aident dans la compréhension de ces compléments à 10 ?

Matériel : le jeu du dortoir, les outils pour compter	
	Déroulement de la séance
Rappel	Faire un rappel du matériel (ne pas leur rappeler les différentes démarches pour voir s'ils utilisent leurs doigts seuls après le bilan de l'autre groupe). Leur demander quels outils ils ont à leur disposition ?
Recherche	<p>Expliquer la situation : dortoir fermé et salle de jeu ouverte. Vous allez devoir trouver combien d'ours sont encore dans le dortoir.</p> <p>Leur proposer une première situation et voir leurs démarches. (mettre à leur disposition différents matériels : ardoise, bande numérique, cubes)</p> <p>Leur demander ce qu'ils en pensent et pourquoi ou comment ils ont fait pour trouver ça : leur faire expliciter leurs procédures. Voir si certains ont déjà mémorisé des compléments à 10 (pour cela, surtout voir comment ils ont fait pour se rappeler de ces compléments (est-ce qu'ils utilisent les doigts pour expliquer?))</p> <p>Discuter avec eux : s'ils n'ont pas trouvé voir avec eux comment on pourrait faire pour trouver ? Les faire expliciter leurs procédures. et recommencer la situation</p>
Mise en commun	Faire un bilan de leurs différentes procédures.

Résumé en français :

L'objectif de ce travail est de trouver des axes de réponses à la question suivante :

En quoi les doigts sont-ils une collection témoin privilégiée pour représenter les nombres ?

Ce document comporte d'abord une partie théorique qui contient la définition de la notion de

base et l'histoire de toutes celles qui existent. Ceci montre que ces bases ont quasiment à chaque fois une origine anthropomorphique. La base dix, qui est celle que la civilisation occidentale utilise aujourd'hui, sera abordée plus particulièrement dans un deuxième point.

La deuxième partie, plus pédagogique, est destinée à l'élaboration d'une séance en classe.

L'hypothèse de départ est que les doigts sont une collection témoin privilégiée pour représenter les nombres et comprendre notre système de numération. Les données recueillies sur le terrain lors d'une séance en Grande Section permettront de répondre à la question de départ et de vérifier cette hypothèse. Les conclusions établiront le fait que les doigts ne sont finalement peut-être pas si faciles à utiliser pour des enfants.

Mots-clés : Collection-témoin, compter, constellation, doigt, numération

Résumé en anglais :

The objective of this work is to explore ways for answers to this question :

In what fingers are they a symbol set privileged to represent numbers ?

This document contains a first theoretical part that contains the definition of base and history of all existing ones. This shows that these bases have almost every time an anthropomorphic origin. Base ten, which is the one that the western civilization uses today, will be specifically addressed in a second point.

The second part, more educational, is intended to develop a classroom session. The basic assumption is that fingers are a symbol set preferred to represent numbers and understand our numbering system. The data collected in the field during a session in "Grande section" will allow to answer the original question and to verify this assumption. The findings establish the fact that fingers are finally perhaps not so easy to use for children.

Mots-clés en anglais : constellation, count (to), finger, numeration, symbol set