



HAL
open science

Mobilisation et place des tables de multiplication dans la résolution de problèmes multiplicatifs

Églantine Valls, Julia Olive

► **To cite this version:**

Églantine Valls, Julia Olive. Mobilisation et place des tables de multiplication dans la résolution de problèmes multiplicatifs. Education. 2012. dumas-00815500

HAL Id: dumas-00815500

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00815500>

Submitted on 18 Apr 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Université Montpellier II
Institut Universitaire de Formation des Maîtres
de l'académie de Montpellier

Master « Métiers de l'Éducation et de la Formation »
Mémoire de recherche de 2^{ème} année

Année universitaire 2011 - 2012

**Mobilisation et place des tables de multiplication
dans la résolution de problèmes multiplicatifs**

VALLS Eglantine & OLIVE Julia

Directeur de mémoire : Monsieur Alain Bronner

Tutrice du mémoire : Madame Mirène Larguier

Assesseur : Monsieur Alain Bronner

Soutenu le 12 Juin 2012

Résumé :

Ce mémoire s'inscrit dans l'étude du concept de la multiplication. Nous nous sommes particulièrement intéressées aux modalités de mobilisation des tables de multiplication et à la place qu'elles occupent dans la résolution de problèmes multiplicatifs. Pour répondre à cette question, nous nous sommes appuyées d'une part sur les recherches de Vergnaud, Brousseau ou encore Douady, et d'autre part sur des productions d'élèves recueillies en classe de CE2.

Mots-clés :

Tables de multiplication – concept de multiplication – dialectique outil/objet – classification des problèmes multiplicatifs – résolution de problèmes.

TABLE DES MATIERES

<i>Introduction</i>	3
<u>I. MODALITES DE MOBILISATION DU REPERTOIRE MULTIPLICATIF</u>	7
1. MOTIVATIONS.....	7
a. Intérêts des tables de multiplication	7
b. Place des tables de multiplication dans les programmes nationaux de 2008	10
2. METHODES D'APPRENTISSAGE DES TABLES DE MULTIPLICATION.....	12
a. Tables de multiplication et mémorisation	12
b. Les méthodes destinées à « retrouver » les résultats des tables de multiplication : l'exemple du calcul digital	15
c. Entre « retrouver » et mémoriser : quelle articulation ?	18
3. LA TABLE DE PYTHAGORE COMME SUPPORT A L'ARTICULATION DES DEUX DEMARCHES.....	24
4. CONCLUSION.....	26
<u>II. RESOLUTION DE PROBLEMES MULTIPLICATIFS ET TABLES DE MULTIPLICATION</u>	28
1. TYPOLOGIE DES PROBLEMES MULTIPLICATIFS ET TABLES DE MULTIPLICATION.....	28
a. La classification des problèmes multiplicatifs selon Vergnaud	28
b. Les problèmes retenus pour le recueil de données	34
2. RESOLUTION DE PROBLEMES MULTIPLICATIFS ET CALCUL MENTAL.....	37
3. CONCLUSION.....	38
<u>III. ANALYSE DE POSTURES D'ELEVES DANS LA RESOLUTION DE PROBLEMES MULTIPLICATIFS</u>	39
1. TEST DIAGNOSTIQUE.....	39
a. Présentation et déroulement de l'activité	39
➤ « Test » de connaissance des tables de multiplication	39
➤ Résolution de problèmes multiplicatifs "simples"	40
b. Analyse de productions d'élèves	45
2. LA SITUATION DU PAVE EN MORCEAUX DE SUCRE.....	50
a. Présentation et analyse <i>a priori</i> de la situation	50
b. Analyse <i>a posteriori</i> de la situation	60
➤ Procédures observées (recueil des productions en annexes)	60
➤ Modifications éventuelles, amélioration de la situation	66
3. CONCLUSION SUR LA PLACE DES TABLES DE MULTIPLICATION DANS LA RESOLUTION DE PROBLEMES MULTIPLICATIFS A PARTIR DES RECUEILS DE DONNEES.....	67
<i>Conclusion</i>	70
<i>Bibliographie</i>	74

Notre intérêt pour l'apprentissage des tables de multiplication à l'école primaire nous a amenées à consulter les évaluations nationales à l'entrée en sixième de 2008 (et des années antérieures) puisqu'elles mettent en évidence une hétérogénéité significative dans la réussite de calculs multiplicatifs. En effet, en 2008, les calculs de 876×34 et 523×305 sont réussis par respectivement 46,5% et 53,4% des élèves. La présence de codes spécifiques permet d'analyser les réponses des élèves, en repérant ceux qui font des erreurs de décalage sans erreur de table et, inversement, ceux qui font des erreurs de tables sans erreur de décalage. Par exemple, en 2008, pour l'opération 876×34 , le codage est le suivant :

<i>Codes</i>	<i>Types de réponses</i>	<i>Pourcentage des élèves</i>
1	réponse exacte	46,5 %
6	erreurs de décalage sans erreur de table	3,2 %
7	erreurs de tables sans erreur de décalage	25,6 %
9	autres réponses	19,5 %
0	absence de réponse	5,2 %

De ce fait, l'analyse des réponses des élèves, depuis les années 2000 montre que les erreurs dues à une connaissance insuffisante des tables de multiplication sont plus nombreuses que celles qui peuvent être attribuées à un manque de maîtrise de la technique opératoire écrite de la multiplication « posée ». Ainsi, ces données permettent de révéler une inégale acquisition de la maîtrise des tables de multiplication à l'entrée du collège, et de ce fait, semblent dénoter une certaine difficulté d'apprentissage des tables de multiplication à l'école élémentaire. À quoi est-elle due ? Quels facteurs peuvent constituer un frein à leur apprentissage ? Existe-t-il une démotivation pour leur mémorisation ? Comment gérer l'introduction nécessaire d'outils de calcul (comme la calculatrice), tout en maîtrisant le risque qu'ils supplantent peu à peu le calcul mental autonome, et de ce fait démotivent la mémorisation de résultats tels que les produits des tables de multiplication ? Il semble résider dans l'apprentissage des tables de multiplication au primaire un enjeu décisif pour la transition entre premier et second degré...

Nous verrons qu'apprendre les tables de multiplication est tout aussi primordial dans la sphère scolaire qu'utile dans la vie courante (par exemple, lors des soldes, pour estimer rapidement le nouveau prix d'un article). C'est pourquoi il paraît prépondérant de fournir aux élèves les moyens de disposer de cet outil, en tenant compte des capacités relatives à chaque individualité,

l'apprentissage des tables de multiplication demandant une forte persévérance d'une part, et une certaine maîtrise de concepts mathématiques d'autre part.

Aussi, l'apprentissage des tables de multiplication occupe une place importante dans les programmes de l'école élémentaire, depuis le début du cycle 2 jusqu'au terme du cycle 3. Mais les instructions officielles demeurent relativement imprécises quant aux compétences exigées à chaque étape de cet apprentissage. La place des tables de multiplication dans les programmes de 2008 fera l'objet d'une analyse plus précise dans la première partie de notre développement, dans la mesure où l'indétermination qui la caractérise provoque un questionnement sur la nature des capacités requises à chaque niveau de la scolarité élémentaire, et de ce fait, sur la progression à adopter dans l'enseignement des tables de multiplication, dont l'objectif apparent est de les « mémoriser ».

Par ailleurs, il apparaît clairement dans ces programmes nationaux que, même si l'introduction des premières tables s'établit de façon progressive dès le CP en se prolongeant en CE1, la vision globale des tables de multiplication comme une unité, permettant la mise en valeur de ses relations internes et ainsi leur compréhension, s'institue au début du cycle 3, en classe de CE2. C'est pourquoi nous avons choisi de nous interroger sur les modalités didactiques présidant à l'enseignement des tables de multiplication au début du cycle 3 en nous focalisant dans un premier temps sur cette dualité entre savoir « retrouver » les résultats des tables et ce qui constitue un des objectifs de l'apprentissage des tables de multiplication : les mémoriser. Quelles relations entretiennent ces deux compétences ? Dans quelle mesure la capacité de savoir « retrouver » les tables de multiplication intervient-elle dans leur mémorisation et que faut-il avoir mémorisé pour pouvoir « retrouver » ? Toutes ces questions feront l'objet d'une étude approfondie dans la première partie de notre propos.

Cependant, les instructions officielles relatives aux tables de multiplication ne les présentent pas uniquement comme objet d'apprentissage, mais soulignent également leur puissante dimension d'outil au service d'autres compétences numériques. Les programmes nationaux de l'école primaire rappellent en effet que les tables de multiplication doivent être « mémorisées et mobilisées » pour effectuer des « calculs sur les nombres entiers », « calculs mentaux » ou « posés », ou encore « résoudre des problèmes ». En outre, ils soulignent réciproquement l'intérêt de « la résolution de problèmes » qui « permet [...] de renforcer la maîtrise du sens et de la pratique des opérations », en l'occurrence de la multiplication. La reconnaissance d'une telle dialectique existant entre l'apprentissage du « champ conceptuel » (Vergnaud, 1996) de la multiplication – auquel appartiennent les tables de multiplication – et la résolution de problèmes nous pousse à examiner le statut des tables de multiplication au sein de la résolution de problèmes multiplicatifs dans l'ensemble des nombres entiers naturels au CE2.

De toute évidence, la maîtrise du répertoire multiplicatif peut s'imposer comme un outil au service de la résolution du problème : l'élève doit pouvoir faire appel aux résultats des tables pour effectuer le – ou les – calcul(s) multiplicatif(s) correspondant au problème. Mais on peut s'interroger sur le sens réciproque de cette interaction : le problème multiplicatif ne peut-il pas être au service de la construction du répertoire multiplicatif ? On peut concevoir que l'élève qui ne maîtrise pas complètement les résultats des tables "joue" avec le problème et s'appuie sur les représentations qu'il induit pour donner du sens aux produits des tables et les retrouver. Ainsi, cette relation dialectique entre l'apprentissage des tables de multiplication et la résolution de problèmes multiplicatifs nous conduit à la question initiale suivante : *Quelle est la place des tables de multiplication dans la résolution de problèmes multiplicatifs ?*

Ainsi, dans un premier temps consacré à l'apprentissage spécifique des tables de multiplication, nous commencerons par exposer les intérêts majeurs de la maîtrise des tables de multiplication dans les sphères scolaire et extrascolaire. Puis, après avoir présenté les motivations de leur apprentissage, nous poursuivrons en situant les tables de multiplication dans les programmes actuels de l'école primaire. Ensuite, il s'agira de tenter de déterminer comment mémoriser les tables de multiplication. Nous explorerons donc les ressorts de leur mémorisation, puis nous nous baserons sur l'exemple du calcul digital pour examiner les dispositifs destinés a priori à « retrouver » les produits. Enfin, nous conclurons cette première partie en étudiant l'articulation pouvant exister entre « retrouver » et mémoriser, notamment au sein de deux méthodes différentes d'apprentissage des tables de multiplication, puis grâce au support de la table de multiplication de Pythagore, symbole de l'enchâssement des deux démarches en question.

Ainsi, après avoir considéré le répertoire multiplicatif en tant qu'objet d'apprentissage en précisant les modalités de sa mobilisation, notre intérêt se portera sur la place qu'il occupe dans le cadre de la résolution de problèmes. Nous présenterons donc dans une deuxième partie le cadre théorique des problèmes multiplicatifs établi par Vergnaud notamment, et tenterons d'en présenter une typologie en fonction de la place qu'occupent les tables de multiplication dans leur résolution.

Enfin, la troisième partie de notre propos sera destinée à l'étude et l'analyse d'un recueil de données réalisé en classe de CE2. Nous allons soumettre un corpus de problèmes multiplicatifs à ces élèves afin d'observer les différentes postures et procédures de résolution adoptées. Notre attention se focalisera sur le rôle et le statut des tables de multiplication dans les stratégies mises en œuvre, et sur les conditions de leur mobilisation, en fonction du niveau de maîtrise du répertoire multiplicatif des élèves¹. L'utilisation éventuelle de signifiants non langagiers dans la résolution du

1. C'est pourquoi nous réaliserons un « test » de connaissance des tables de multiplication en amont de ce recueil.

problème de la part de l'élève sera également interrogée : constitue-t-elle une représentation du problème pour faciliter sa compréhension et sa résolution matérielle, ou un support à la reconstruction du répertoire multiplicatif ? Autrement dit, l'élève schématise-t-il de manière presque systématique la situation proposée – auquel cas les tables interviennent en tant qu'outil dans la résolution – ou utilise-t-il cette situation multiplicative particulière pour donner du sens aux tables de multiplication et pouvoir ainsi les « retrouver » plus facilement ?

L'analyse de ces données empiriques constituées par ces procédures d'élèves nous permettra donc de conclure notre réflexion sur la place des tables de multiplication dans la résolution de ces problèmes multiplicatifs, en fonction de leur maîtrise et de la démarche adoptée pour les mobiliser notamment.

I. Modalités de mobilisation du répertoire multiplicatif

1. Motivations

a. Intérêts des tables de multiplication

Dans la sphère scolaire, les tables de multiplication font partie intégrante du calcul mental, comme le stipulent les programmes nationaux de l'école primaire de 2008 pour le cycle des approfondissements notamment. Le *Document d'application des programmes* de 2002 intitulé « Le Calcul Mental », qui n'est plus en vigueur, mais qui est toujours utilisé, établit un lien entre l'apprentissage des tables de multiplication et le calcul mental, et plus particulièrement « ce qu'il faut mémoriser ou automatiser ».

En cela, l'acquisition de ce répertoire multiplicatif participe d'« une bonne maîtrise » du calcul mental jugée « indispensable pour les besoins de la vie quotidienne », « que ce soit pour obtenir un résultat exact ou pour évaluer un ordre de grandeur ». Effectivement, lorsque l'on souhaite calculer le nouveau prix d'un article en promotion par exemple, ce sont précisément les résultats des tables de multiplication que l'on mobilise. Imaginons un prix initial de 50 € bénéficiant d'une réduction de 30%. Pour estimer approximativement le nouveau prix, on considère que 30% correspond environ au tiers de 100, et on recherche donc le tiers de 50 – que l'on retranchera ensuite au prix initial de 50 €. Pour cela, on peut décomposer 50 comme $30 + 20$ et déduire environ son tiers en ajoutant à 10 (le tiers de 30) le tiers de 20 qui s'approche de 7 (car $3 \times 7 = 21$). On en conclut que le nouveau prix est d'environ : $50 - 17 = 33$, soit 33 €. Afin de réaliser ce calcul, on a bien mobilisé des résultats de la table de 3. Selon le prix de l'article et le montant de la réduction (pour considérer le même cas de figure), le nouveau prix peut être estimé de manière exacte et non approchée. Par exemple, pour une réduction de 20%, on recherche exactement le cinquième du prix ; s'il se termine par 0 ou 5, le calcul fournit un résultat exact (puisque le nombre correspondant au prix est un multiple de 5) : considérons un article à 45€, on retranche à 45 son cinquième, qui est égal à 9 (car $5 \times 9 = 45$), et le nouveau prix s'élève donc exactement à : $45 - 9 = 36$, soit 36€. En revanche, si le prix se termine par 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 ou 9, on doit considérer le multiple de 5 le plus proche, et on n'obtiendra ainsi qu'un résultat approché. Dans tous les cas, on voit bien que l'on fait appel aux résultats de la table de 5. Ainsi, dans toutes ces situations, la connaissance des tables de multiplication est mobilisée et participe de ce « calcul d'usage » mentionné par les *Documents d'accompagnement des programmes* de 2002, en permettant de « mettre en place des moyens efficaces de calculer, utiles dans la vie courante en l'absence de supports ou d'instruments » comme

la calculatrice, ou en complément de ces instruments en tant que « moyen efficace de contrôle, une erreur de manipulation étant toujours possible ».

Etant donc constitutive de la maîtrise du calcul mental, l'appropriation de ce répertoire multiplicatif contribue « également à une bonne compréhension de certaines notions mathématiques » signalée par les *Documents d'application*, comme les « traitements relatifs à la proportionnalité » – illustrés par les exemples présentés ci-dessus – ou le « calcul sur les nombres relatifs ou sur les fractions au collège ». Par exemple, pour simplifier la fraction $\frac{36}{48}$, l'élève remarque aisément, à condition de maîtriser les résultats des tables de multiplication que 36 et 48 sont deux multiples de 6 (car $6 \times 6 = 36$ et $8 \times 6 = 48$). Ce qui l'amène à la simplification suivante :

$$\frac{36}{48} = \frac{6 \times 6}{8 \times 6} = \frac{6}{8} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{3}{4}.$$

Par ailleurs, les auteurs des *Documents d'accompagnement* signalent de manière catégorique le fait que « sans disponibilité rapide des résultats des tables, il n'y a pas d'accès possible aux techniques opératoires », en illustrant leur propos par le constat suivant, décidément significatif : « à l'entrée en sixième les erreurs de tables sont plus fréquentes que celles dues à une mauvaise maîtrise de l'algorithme de calcul ». En effet, « l'algorithme de calcul » correspondant au déroulement de la technique opératoire de la multiplication est introduit dès l'apparition d'un facteur à deux chiffres comme 24×5 – auparavant, avec deux facteurs à un chiffre tel que 6×7 , il s'agit d'un produit qui apparaît inévitablement dans les tables et qui ne demande donc pas la mise en œuvre d'une procédure de calcul ; on soulignera que l'impact de l'« erreur de table » sur le résultat de l'opération est alors immédiat. En revanche, lorsque les élèves commencent à manipuler un facteur à deux chiffres du type 24×5 , ils établissent une procédure – aboutissant à la technique opératoire de la multiplication posée – dans laquelle le calcul multiplicatif est effectué par décomposition du facteur égal à 24 : c'est à dire $24 \times 5 = 20 \times 5 + 4 \times 5$, que ce soit selon une présentation en ligne ou en colonne. Or, ces calculs multiplicatifs intermédiaires (en l'occurrence 20×5 et 4×5) font bien directement appel aux résultats des tables de multiplication – et éventuellement aussi à « la règle des zéros » c'est-à-dire à la multiplication d'un entier par une puissance de 10. De plus, le calcul direct de $24 \times 5 = 120$ est une écriture experte et nécessaire dans la technique opératoire pour passer à l'étape suivante : la multiplication de deux nombres à au moins deux chiffres, par exemple 24×15 . Il est donc évident qu'une erreur de table produite lors d'un calcul multiplicatif intermédiaire se répercute sur le résultat final de l'opération, même si la procédure opératoire est correctement développée. Mais, sachant de plus que les élèves se

familiarisent avec ces multiplications faisant intervenir un facteur à deux chiffres parallèlement à la mémorisation de leurs premiers résultats de table, on peut alors saisir l'enjeu et l'importance de l'apprentissage des tables de multiplication : la construction du répertoire multiplicatif s'avère complémentaire à la mise en place de la technique opératoire experte de la multiplication. En effet, l'ignorance des résultats multiplicatifs est un obstacle à la poursuite du calcul : cela « oblige à compter laborieusement lors de la résolution des opérations » comme le souligne Michel Fayol (2010) dans son article figurant dans *Le nombre au cycle 2*, document mis en ligne sur Eduscol ; tandis que la maîtrise de ces résultats multiplicatifs facilite l'apprentissage de la technique opératoire. Le chercheur conclut d'ailleurs :

L'efficacité de la résolution des opérations passe à la fois par l'apprentissage et l'exercice de procédures (par exemple en calcul mental) jusqu'à leur automatisation, ceci afin de réserver l'attention aux activités qui ne peuvent être automatisées (compréhension des énoncés, raisonnement, etc.) et par la mémorisation de connaissances telles que les tables. (p. 10)

C'est d'ailleurs ce qui motive cette recommandation adressée aux élèves de CE2 dans le manuel *J'apprends les maths* par exemple : « Si tu veux calculer facilement des multiplications, tu dois pouvoir dire directement un résultat dont tu as besoin [...] ».

La connaissance des tables de multiplication est de la même façon essentielle pour la mise en place future de notions comme celles de multiples et de diviseurs, comme l'illustre à nouveau cette remarque de M. Fayol (*Ibid*) :

L'automatisation des tables de multiplication est indispensable à la résolution des problèmes de groupements et de partage. Pour favoriser l'approche de la division, l'élève doit être habitué à manipuler ces tables sous des formulations diverses (par exemple combien fait 4 fois 3 ?, en 12 combien de fois 4 ?, combien fait 3 fois 4 ?, en 12 combien de fois 3 ?). (p. 73)

De manière générale, les tables de multiplication représentent un gain de temps considérable dans la résolution de problèmes ou le calcul d'opérations plus complexes.

Les intérêts des tables de multiplication, à la fois multiples et fondamentaux, semblent être à la source d'un glissement de leur statut d'« outil » à celui d'« objet » au sens où Régine Douady (1986) peut l'entendre et qu'elle présente dans sa thèse *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*. Effectivement, au vu de ce qui précède, elles constituent un « outil » incontestable étant donné que nous pouvons « focaliser notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème » – outil pour lequel, de façon anecdotique, la remarque suivante de R. Douady prend tout son sens : « [...] des outils conceptuels auxquels s'adjoignent maintenant des outils techniques » comme « les ordinateurs ». Cependant, la prépondérance de leur maîtrise alimente un désir de « transmission », en vue de laquelle il faut opérer à une nécessaire « décontextualisation » et une « formulation [...] la plus générale possible » de ce répertoire multiplicatif, ce que représentent les tables de

multiplication. Elles « s'intègrent dès lors au corps des connaissances déjà constituées », et c'est pourquoi à notre sens elles « acquièrent le statut d'objet » en tant que concept « ayant sa place dans un édifice plus large » que le simple cadre des (nombreux) problèmes auxquels l'outil table de multiplication est « adapté » : celui du « savoir savant [...] reconnu socialement ».

L'intégration des tables de multiplication dans cet « édifice » peut d'ailleurs être symbolisée par la place qui leur est accordée comme objet d'apprentissage dans les programmes de l'école élémentaire, que nous nous proposons d'étudier à présent, pour ensuite nous intéresser, dans la deuxième partie de notre propos, aux modalités d'apprentissage et d'enseignement de cet objet de savoir.

b. Place des tables de multiplication dans les programmes nationaux de 2008

L'apprentissage des tables de multiplication s'effectue selon une progression établie sur l'ensemble des cycles 2 et 3, depuis l'entrée à l'école élémentaire jusqu'à sa sortie. En effet, la table de multiplication par 2 est introduite auprès des élèves du cours préparatoire qui doivent dès lors la « connaître », suivie des tables de 3, 4 et 5 en première année du cours élémentaire, avec cette fois pour objectif de les « mémoriser ». On peut immédiatement souligner la gradation signifiée dans le vocabulaire employé : l'élève doit « connaître » puis « mémoriser ». Si « mémoriser » peut être légitimement interprété comme « fixer dans la mémoire », quel sens prêter précisément au terme plutôt générique « connaître » ?

L'analyse des différentes occurrences de ce verbe présentes dans la rubrique « nombres et calcul » – et la sous-rubrique « les nombres entiers [...] » pour le cycle des approfondissements – des programmes de l'école élémentaire, réalisée dans le but de mieux cerner la signification du terme, met en évidence trois types d'emplois majeurs.

- Le premier, spécifique de la connaissance de la file numérique, fait l'objet d'une explication systématique : par « connaître [...] les nombres entiers inférieurs à 100 [ou 1 000] » ou « jusqu'au million [ou milliard] », on entend « savoir [les] écrire et [les] nommer ».

- Le second emploi, qui ne bénéficie d'aucune indication, peut néanmoins renvoyer à une acception précise du mot « connaître », formulée de la sorte dans le *Trésor de la Langue Française* : « savoir quelque chose le plus souvent dans un domaine particulier, moyennant l'étude systématique et/ou la pratique, l'expérience ». Si « savoir » ne constitue pas une directive plus précise, la deuxième partie de cette définition donne cependant une information majeure sur les modalités de cette compétence, qui fait écho à notre étude des instructions officielles : « Connaître » est dans de nombreux cas lié à un aspect « pratique » voire pragmatique qui relèverait plutôt de la manifestation de

comportements, au sens de capacités observables. C'est en effet ce qui semble émerger du vocabulaire employé dans les programmes (en excluant le premier type d'emploi que l'on a distingué précédemment) : « connaître » est systématiquement coordonné à « utiliser », et admet pour objet les expressions suivantes : « technique(s) opératoire(s) » et « procédures », ou même « fonctionnalités de la calculatrice »², qui évoquent plus la mise en œuvre de compétences ou de savoir-faire pratiques que la connaissance théorique de contenus de savoir.

- Enfin, le troisième et dernier type d'emploi du verbe « connaître » rassemble des instructions qui peuvent être mises en lien avec le contexte des tables de multiplication, et qui sont ainsi susceptibles d'apporter quelques précisions sur la signification du terme dans ce cadre. Mais, seulement au nombre de trois sur l'ensemble des programmes, ces directives ne sont soumises à aucune explicitation au sujet de la compétence en question : « connaître les doubles des nombres inférieurs à 10 et les moitiés des nombres pairs » au CP, « connaître les doubles et moitiés de nombres d'usage courant » au CE1 et « connaître et utiliser certaines relations entre des nombres d'usage courant : entre 5, 10, 25, 50, 100, entre 15, 30 et 60 » au CE2. On remarquera que pour les deux premiers extraits, faisant intervenir les notions de « doubles et moitiés » inhérentes aux tables de multiplication, les « nombres » dits « d'usage courant » ne sont pas mentionnés, ce qui ne fait qu'accentuer l'indétermination de ces recommandations.

Ainsi, quelle compétence doivent acquérir les élèves de CP – au delà de la simple compréhension de la notion de double constitutive d'une première approche de l'outil « table de multiplication » ? La réponse institutionnelle demeure évasive et la question reste donc ouverte. S'agit-il d'être en mesure de restituer cette nouvelle connaissance, en l'occurrence les résultats de la table de multiplication par 2 ? Si c'est le cas, l'absence d'indication dans les directives laisse la place au choix de la démarche mise en œuvre pour atteindre cet objectif : la mémorisation constitue une méthode évidente, mais l'approche de la notion de multiplication basée sur le procédé additif offre la possibilité à l'élève de parvenir au résultat par un calcul autre qu'une multiplication (ou une suite de calculs) ; c'est cette alternative que nous désignerons ensuite par « retrouver le résultat ».

Les tables de multiplication par 6, 7, 8 et 9, abordées au cours élémentaire deuxième année, font l'objet d'instructions plus précises, pour lesquelles l'élève est tenu de « mémoriser et mobiliser » les résultats des tables de multiplication. Ce second terme met ici en valeur le statut d'outil de la table de multiplication, et la capacité de l'élève à faire appel à ce répertoire multiplicatif dans le calcul d'opérations ou la résolution de problèmes notamment. Autrement dit, il

1. Pour être tout à fait exhaustif, on trouve une autre occurrence : « connaître et utiliser des expressions telles que : double, moitié ou demi, triple, quart d'un nombre entier ». Il s'agit ici de savoir ce que signifient ces termes de vocabulaire, et d'être capable de les employer à bon escient, ce qui n'apporte donc pas de précision sur le sens du mot « connaître » dans le contexte des tables de multiplication.

doit être en mesure de restituer les résultats des tables de multiplication ; on retrouve alors le questionnement induit plus haut sur la dualité des démarches dont dispose l'élève. Or, à cette compétence requise de « mobiliser » des résultats s'ajoute l'exigence de les « mémoriser ». Dès lors, on peut s'interroger sur la coordination de ces deux démarches. Nous venons de mettre en valeur la potentielle contribution de la mémorisation des résultats dans leur restitution ; de la même façon, il est évident que posséder les résultats des tables de multiplication mémorisés permet de les mobiliser. Mais à la différence de la capacité à « restituer » le résultat de la multiplication qui sous-entend la mise en place d'une démarche pour y parvenir en tant qu'objectif, celle de le « mobiliser » suggère de le considérer en tant qu'outil pouvant être sollicité au service d'un objectif particulier, dans des situations diverses et variées, et semble de ce fait appeler une réelle maîtrise de l'objet. C'est pourquoi il est intéressant de constater que si les programmes nationaux exigent de « mémoriser et utiliser les résultats des tables de multiplication » de 2 à 5 à la fin du cycle 2, le premier palier du socle commun requiert la compétence de « restituer et utiliser les tables [...] de multiplication » ; et en ce qui concerne la fin du cycle 3, alors que les programmes ne font apparaître les tables de multiplication que par l'intermédiaire du calcul mental et posé, le deuxième palier du socle commun rappelle la nécessité de savoir « restituer les tables de [...] multiplication de 2 à 9 ».

Tableau récapitulatif du vocabulaire employé dans les programmes de 2008 de l'école élémentaire et dans le socle commun des connaissances et compétences :

	Programmes de 2008	Socle commun
CP	« connaître » la table de 2	« restituer et utiliser les tables [...] de multiplication par 2, 3, 4 et 5 »
CE1	« mémoriser » les tables de 2, 3, 4 et 5	
CE2	« mémoriser et mobiliser » les tables de 2 à 9	« restituer les tables de multiplication de 2 à 9 »
CM1/CM2	<i>(par l'intermédiaire du calcul mental et posé)</i>	

2. Méthodes d'apprentissage des tables de multiplication

a. Tables de multiplication et mémorisation

D'après notre étude des programmes nationaux de 2008, la mémorisation de la totalité des tables de multiplication est un objectif du CE2. Or, lorsque l'on parle des « tables de multiplication », on les considère sous leur « forme traditionnelle (celle qui figure au dos des cahiers de brouillon !) » selon les termes des auteurs de *J'apprends les maths CE1, livre du maître*.

En effet, cette présentation constitue un moyen de construire un apprentissage progressif du répertoire multiplicatif subdivisé en 8 tables (celles de 0, 1 et 10 sont rarement étudiées de manière aussi formelle) qui représentent autant de sous-objectifs (cf tableau récapitulatif des programmes). De plus, l'apprentissage d'une table est facilité par la maîtrise des tables qui la précèdent, en réduisant le nombre de résultats nouveaux à intégrer ; d'où le célèbre encouragement de l'enseignant à ses élèves : *Vous allez voir, plus on avance dans les tables, plus c'est facile !* Ainsi, il convient de procéder à un apprentissage par table, qui permet en outre l'uniformisation des connaissances relatives au répertoire multiplicatif : bien que l'apparition du socle commun soit à l'origine d'un fonctionnement par cycle, la progression institutionnelle des apprentissages impose des objectifs par niveau (étudiés précédemment) qui doivent être atteints par chaque élève au terme de l'année. De ce fait, il demeure peu concevable de proposer un apprentissage personnalisé des tables avec pour seul objectif leur maîtrise totale à la fin du CE2 – niveau qui, de plus, ne clôture pas un cycle. Pour tout cela, le modèle des tables de multiplication (de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9) est privilégié comme support de leur apprentissage, préféré notamment à celui de la table de multiplication qui rassemble tout le répertoire, plus connue sous le nom de table de Pythagore – dont il sera question dans notre troisième partie.

D'autre part, « les recherches scientifiques prouvent que les résultats des multiplications élémentaires ne se mémorisent pas comme ceux des soustractions élémentaires » ni « comme ceux des additions élémentaires telles que $8 + 6$ (quand le résultat est > 10) » car « il y a plus d'association verbale dans le cas de la multiplication que dans celui des autres opérations » (*Ibid*). Ce dernier constat, associé à celui d'un apprentissage découpé par table (abordé ci-dessus), implique que le travail réalisé autour de la mémorisation des tables en classe repose généralement sur l'énonciation de chaque table dans son ensemble, pratique que l'on nomme « récitation », et définie dans le *Trésor de la langue française* comme un « exercice scolaire consistant à dire de mémoire une leçon, un texte [*constitué par la succession des multiplications d'une table*] appris par cœur ». Ce fait soulève un paradoxe inhérent à l'activité de mémorisation : encore mal appréhendée, largement individualisée car considérée comme personnelle, elle ne fait l'objet en classe que de son évaluation ; c'est en effet ce que suppose la récitation : le « texte » est dit « de mémoire » car déjà « appris par cœur ». L'apprentissage des tables en classe s'appuie également sur le calcul mental. Réunissant le calcul automatisé et le calcul réfléchi, il peut autant apparaître comme un moyen de travailler et/ou de tester l'automatisation des produits, que comme un prétexte pour « mobiliser » et réinvestir les tables – comme le préconisent les programmes nationaux pour le CM1 et le CM2 –

une fois le travail de mémorisation achevé³. En outre, l'exercice de calcul mental permet d'aborder le répertoire multiplicatif de différentes manières, de sorte que l'exigence suivante, formulée par dans le *guide de l'enseignant Cap Maths CE2*, soit satisfaite :

Il est important que, dès le début de leur apprentissage, les tables de multiplication soient " mobiles ", ce qui signifie :

- qu'on évite toute répétition " ordonnée " (du type 2×1 , 2×2 , $2 \times 3 \dots$) ;
- qu'on mêle plusieurs formulations (aussi bien 2 fois 5 que 5 fois 2 pour la table de 2) ;
- qu'on demande aussi bien le résultat d'un produit que l'un des facteurs connaissant le résultat. (p. 126)

Ce choix pédagogique est renforcé par des recherches indiquant que les résultats des multiplications sont récupérés en mémoire grâce à l'association du produit au couple de facteurs. Michel Fayol, dans *L'enfant et le nombre* (1990), fait état de ce processus auparavant étudié par Campbell (1987) en mentionnant l'existence d'« un réseau associatif » qui « mettrait en relation des couples de naturels et leurs somme et produit ». Il serait alors victime d'« interférences » permettant de rendre compte de deux « phénomènes bien avérés » au sujet des erreurs chroniques observées chez les élèves. En effet, on retrouve régulièrement des confusions du type « $5 \times 3 = 20$ mais non $5 \times 3 = 19$ » (car 19 est un nombre qui ne figure pas dans la table) qui pourraient être dues à de « fausses associations effectuées dans la table » elle-même, responsables selon Campbell de 80% des erreurs. On peut à ce sujet souligner le rôle potentiel de la récitation ordonnée des tables dans l'apparition de ce genre de confusions. Un autre type de fausses associations pointé par M. Fayol se produit « entre résultats de la multiplication et de l'addition » : les élèves indiquent la somme à la place du produit. Il s'agit également d'un cas de figure relativement fréquent. D'autre part, des études montrent une « corrélation positive très élevée [...] entre la durée de résolution et le nombre d'erreurs », autrement dit, comme le reformulent les auteurs du *livre du maître Diagonale CE1*, « plus le temps de réponse est long et plus l'erreur est probable ». Anderson (1983), par l'intermédiaire de Fayol toujours, fournit une explication à l'ensemble de ces faits :

La formulation d'une réponse (24 par exemple) en réponse à un couple inducteur (8×4 par exemple) dépend, d'une part, du degré d'activation de 24 lorsque 8 et 4 sont évoqués et, d'autre part, du degré d'activation préalable des associations concurrentes (par exemple 16, 24, 40... tous associés à 4 et 8). (p.192)

De nombreuses activités ayant pour objectif la mémorisation des tables de multiplication favorisent la construction de ce réseau associatif, ou plus précisément de l'association entre le couple de nombres formé par les facteurs de la multiplication et le troisième nombre que constitue leur produit. Dans la mallette *Ermel Numéricartes et posters CMI* ou *Numéricartes CE2* par

2. Le rôle du calcul mental dans l'apprentissage des tables – qui s'avère très complexe – ainsi que ses modalités pourraient d'ailleurs constituer le sujet d'une étude plus poussée.

exemple, sont proposés différents types de jeux travaillant cette association, comme le loto ou le jeu de Pythagore. Dans le cas du loto, l'enseignant énonce la multiplication et les élèves, disposant chacun d'une plaquette sur laquelle figure les produits, doivent y marquer le produit qu'ils ont associé à cette multiplication donnée. Grâce aux cartes recto-verso du jeu de Pythagore, l'association peut être indifféremment travaillée dans les deux sens : une face de la carte indique une multiplication, l'autre face, le produit correspondant. Ainsi, lorsqu'on positionne la carte en rendant visible le nombre seul, on recherche toutes les multiplications dont le produit est égal à ce nombre. Si l'on considère la fonction f associant à tout couple (x,y) d'entiers son produit, cela revient à chercher l'ensemble des antécédents (x,y) d'une image donnée $f(x,y)$ qui représente le produit. Bien évidemment, cette fonction n'est pas injective : chaque nombre jouant le rôle de produit figure au moins une fois dans une table, il est donc le produit de deux nombres x_0 et y_0 , et est alors égal à $f(x_0,y_0)$ mais aussi à $f(y_0,x_0)$. Mais des nombres tels que 24 ou 36 rendent le jeu encore plus riche, car ils demandent de faire appel à plusieurs associations couple-produit, et élargissent ainsi l'aire du réseau associatif mobilisé. Par cette modélisation, on réalise l'ampleur de cette tâche, et de ce fait, la nécessité de permettre aux élèves de se familiariser très tôt avec toutes les formulations et écritures d'un nombre, avec la numération chiffrée de manière générale, en opérant notamment à des changements d'inconnue dans l'association couple-produit, et en favorisant la manipulation et l'entraînement. Comme le rappelaient les *Documents d'accompagnement des programmes de 2002* :

Connaître 7×6 , c'est être capable de répondre 42 immédiatement, mais c'est également pouvoir répondre immédiatement à " Quel nombre multiplié par 7 donne 42 ? ", " Quel nombre multiplié par 6 donne 42 ? ", " 42 divisé par 7 ? ", " 42 divisé par 6 ? " ou encore à produire très vite 7×6 et 6×7 lorsque sont demandées des décompositions multiplicatives de 42. De telles questions doivent être posées dès le départ des apprentissages. (p.36)

b. Les méthodes destinées à « retrouver » les résultats des tables de multiplication : l'exemple du calcul digital

Le calcul digital est une méthode de calcul datant de l'Antiquité qui permet de « retrouver » aisément les résultats de multiplications de nombres entiers compris entre 6 et 9 grâce à nos doigts. Elle ne concerne donc que les tables de multiplication de 6, 7, 8 et 9*, correspondant au programme d'apprentissage du cycle 3, les tables de 2, 3, 4, 5 devant être enseignées en fin de cycle 2. Elle entre donc entièrement dans un processus d'apprentissage adapté à une classe de CE2. On trouve de

* Il est possible d'utiliser cette technique pour la table de 5 également ; mais elle ne s'avère pas forcément pertinente (car tout de même laborieuse), la table de 5 étant souvent assez aisément mémorisée chez la plupart des élèves (un exemple d'astuce plus adaptée et spécifique à la table de 5 est proposé dans notre troisième partie).

nombreuses variantes de cette technique ; celle que nous présentons est exposée par Georges Ifrah dans son œuvre *Histoire universelle des chiffres*, et largement réinvestie dans des manuels comme *Cap Maths* qui la présente comme un moyen de « connaître la table de multiplication [...] sur le bout des doigts » pouvant être exploité au sein de la classe, ou encore dans la sphère des internautes, sous l'appellation séduisante d'« astuce pour retenir des tables ».

Elle consiste dans un premier temps à replier sur chaque main autant de doigts qu'il y a d'unités entre 5 et chaque facteur de la multiplication. Pour obtenir le résultat de la multiplication, il suffit de multiplier par 10 le nombre total de doigts repliés et d'y ajouter le produit des nombres de doigts levés sur chaque main⁴. Par exemple, pour calculer 6×8 , il suffit de plier 1 doigt ($6 - 5 = 1$) sur une main et 3 ($8 - 5 = 3$) sur l'autre main. Cela fait 4 doigts pliés ($1 + 3 = 4$) soit 4×10 unités, et le produit des deux nombres de doigts levés (4 sur une main et 2 sur l'autre main) est 4×2 c'est-à-dire 8 soit 8 unités. Donc $6 \times 8 = 40 + 8 = 48$.

La première étape décrite par Georges Ifrah repose donc sur un processus soustractif qui, même s'il s'agit de considérer des élèves de cycle 3 devant maîtriser le calcul d'une différence, peut apparaître comme un premier frein à la manipulation de cette technique manuelle, notamment par la double mémorisation que nécessite ce calcul : il faut savoir de quels termes on doit faire la différence, l'effectuer de tête, et garder le résultat obtenu en tête le temps de replier progressivement le nombre de doigts correspondant, et répéter ce processus deux fois.

Une alternative immédiate consiste à inverser le nombre de doigts repliés et celui de doigts levés. En effet, il est bien plus naturel pour un enfant ayant appris à manipuler ses doigts pour compter, additionner ou soustraire de commencer le processus poings fermés, et de lever les doigts au fur et à mesure de son raisonnement. De ce fait, en lui demandant de lever le nombre de doigts correspondant à la différence entre 5 et chaque facteur, l'élève entre naturellement dans un processus de simple surcomptage démarrant à 5 qui lui permet d'obtenir directement le complément à chaque facteur⁵.

D'autre part, dans un esprit d'adaptation personnalisée à l'élève, il est possible de proposer une éventuelle reformulation du calcul du résultat pour contourner la phase de multiplication par 10. Pour cela, on pose que le nombre total de doigts repliés – selon la représentation de Georges Ifrah, ou levés selon l'alternative proposée ci-dessus – correspond au chiffre (temporaire) des dizaines. En effet, il est de rigueur de mettre en œuvre le dispositif le plus simplifié et le mieux adapté au service de l'objectif visé d'apprentissage des résultats multiplicatifs, et supprimer cette étape de

3. voir annexe

4. Une seconde alternative permet de débiter le comptage à 1, et donc de contourner le surcomptage, en commençant par dénombrer ses orteils ! Ainsi, on commence bien à compter sur les doigts de la main à partir de 6, ce qui revient de la même façon à afficher le complément de 5 à chaque facteur par le nombre de doigts levés sur chaque main.

multiplication (par 10) peut y participer. Cependant, la phase additive qui suit – consistant à ajouter le produit des doigts dans l'autre position – peut induire une retenue sur le chiffre des dizaines, qui oblige l'élève à distinguer le chiffre des dizaines de ce nouveau produit pour l'ajouter au nombre retenu précédemment. Il est donc amené à mobiliser ce concept de retenue qui doit donc être suffisamment maîtrisé.

La principale limite que présente cette méthode porte sur sa compréhension, ou sa mémorisation : elle peut apparaître comme vide de sens pour des élèves n'ayant pas accès à la justification mathématique du calcul. De ce fait, elle repose sur l'hypothèse fragile de la mémorisation de l'algorithme. En outre, ceci implique que les élèves ne disposent pas de procédés leur permettant de valider les termes de l'opération en cas de doute, et encore moins de les « retrouver » en cas d'oubli. Ainsi, cette « astuce » destinée *a priori* à pallier des lacunes de mémorisation (des résultats des tables de multiplication) demande dans les faits un inéluctable effort de mémorisation... du moins en premier lieu, pendant la période nécessaire à son appropriation et à son automatisation. Denis Butlen et Pascale Masselot rappellent dans *Le nombre au cycle 2* que l'on considère qu'une « procédure est automatisée quand elle est restituée par l'élève pour effectuer un calcul sans que celui-ci la reconstruise (Fischer 1987, Boule 1997) ». Il semblerait que cette manipulation très technique et dénuée de sens, qui se base sur la distribution de rôles respectifs attribués non seulement à chaque main mais également à chaque « groupe » de doigts selon sa position (pliée ou levée), soit en effet la source d'inévitables confusions dans les premiers temps de son utilisation⁶. L'élève mène effectivement un raisonnement algorithmique qu'il doit transposer de manière kinesthésique (en manipulant ses doigts), et gérer le déroulement de ses calculs en prenant en compte ces deux dimensions : il doit continuellement repérer l'étape de l'algorithme où il se situe et le statut de chaque collection de doigts pour effectuer les différents calculs. C'est pourquoi, lors de la phase de familiarisation, chacun de ces trois aspects (algorithmique, raisonnement sur des collections représentatives et calculs) demande à l'élève attention et réflexion, tandis que par la suite, le déroulement « mécanique » de l'algorithme et la maîtrise des fonctions respectives des collections de doigts permettent à l'élève de se consacrer de manière quasi-exclusive à la gestion des calculs. Mais un stade intermédiaire complexe de mémorisation, et de recherche de sens – reposant notamment sur l'appropriation des signifiants non langagiers que constituent ces collections de doigts – est nécessaire pour cheminer depuis la découverte de la technique jusqu'à son automatisation.

5. Ceci pourrait faire l'objet d'une étude plus précise auprès de différents groupes d'élèves évoluant dans leur milieu.

Durant cette phase, il s'agit d'intégrer la procédure, et de l'établir comme un *schème*, ou bien comme un *théorème-en-acte*. Ce choix dépend du statut que l'on attribue au calcul d'un produit, ou plutôt de la réponse à cette question : constitue-t-il une « situation » à part entière ? Selon Brousseau et sa *Théorie des situations didactiques* (1998), « une situation est l'ensemble des circonstances dans lesquelles une personne se trouve, et des relations qui l'unissent à son milieu » ; « milieu » devant être saisi en tant qu'élément d'un « dispositif » représentant dans notre cas « une épreuve, un problème, voire un exercice, une fiche etc. ». Se basant sur la dimension cognitive – plus qu'affective – de la définition de Brousseau, Vergnaud, dans sa *Théorie des champs conceptuels* (1996), envisage une situation comme « l'ensemble des circonstances dans lesquelles se trouve une notion mathématique », ici la multiplication. De ce point de vue, deux réponses à la question posée plus haut peuvent être envisagées : le calcul d'un produit peut constituer une situation en soi, ou bien simplement une opération au service d'une situation.

- Dans le premier cas, le calcul d'un produit représente finalement l'unique « circonstance » dans laquelle se trouve la notion de multiplication ; l'objectif de la recherche du produit est uniquement la dimension opératoire de la multiplication qui ne bénéficie d'aucun prétexte ou contexte. Une technique permettant d'effectuer l'opération apparaît alors comme la « conduite » adaptée à cette « classe de situations donnée » que représentent les calculs de produits. Ainsi, sa mise en œuvre mécanique car inchangeante devient « l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée », c'est-à-dire un « schème » au sens de Vergnaud.

- En revanche, dans le second cas, le calcul n'a qu'une fonction utilitaire, il participe de la résolution d'un problème posé par un contexte : la situation. Alors, la réalisation d'une procédure engagée dans l'objectif d'effectuer un tel calcul peut être simplement perçue comme l'application d'un « théorème-en-acte » qui, selon Vergnaud toujours, représente un « invariant opératoire » dans la résolution de problèmes posés par des situations appartenant à une même classe, et donc une composante du schème évoqué par de telles situations.

c. Entre « retrouver » et mémoriser : quelle articulation ?

Les « deux modalités de traitement » dont il est question dans cet écrit, à savoir « retrouver » et mémoriser, font l'objet d'études rapportées par Michel Fayol dans *L'enfant et le nombre*. La première (respectivement), qualifiée dans cet ouvrage « de type procédural », « consiste à utiliser des systèmes de comptage plus ou moins sophistiqués », autrement dit à mettre en œuvre « une procédure de calcul permettant de reconstituer la réponse ». Cette « stratégie reconstructive », utilisée généralement lors de la découverte de l'objet table de multiplication en CE1, et même plus tard pour introduire de nouvelles tables de multiplication, est pourtant destinée à laisser place à une

« stratégie reproductive ». En effet, à terme, les élèves doivent faire du répertoire multiplicatif ce que Michel Fayol appelle une « connaissance déclarative », ce qui signifie être capable de « récupérer directement en mémoire à long terme le résultat associé à un couple donné ». Voilà donc une formulation que l'on peut proposer comme une possible définition du terme « mémoriser ».

Comme en avisaient les *Documents d'accompagnement des programmes de 2002* au sujet de cette compétence exigée : « mémoriser les tables est le résultat d'un très long processus ». D'après les travaux de Michel Fayol qui précèdent, ce processus correspond au « passage » d'une modalité procédurale dominante « chez les plus jeunes », à une modalité déclarative majoritaire « chez les adultes ». Ce passage « du comptage à la récupération en mémoire », selon des recherches dirigées par Kaye (1986) et rapportées dans *L'enfant et le nombre*, « paraît se produire en CE2 ou CM1 ». Néanmoins, précisons que ce constat fait ici état de stratégies privilégiées, non exclusives, spécifiant que « l'étude des performances⁷, chez l'enfant surtout [...] tend à montrer que les deux possibilités sont toujours présentes ». D'autre part, « le recours à l'une plutôt qu'à l'autre » dépend de « l'impact de facteurs plus ou moins connus et/ou difficiles à contrôler ». Ainsi, il semblerait que le choix de procédure effectué par le sujet soit fonction de son expérience et de son développement cognitifs.

En outre, indications qui figurent dans les *Documents d'accompagnement* paraissent aller dans ce sens, en commençant par souligner que « s'il est indispensable, l'entraînement n'est pas le seul ressort de la mémorisation », puis en précisant la prépondérance du rôle de la dimension cognitive sous-jacente aux facultés de « représentation mentale » et « compréhension » :

Une bonne représentation mentale des nombres, la compréhension des opérations en jeu et une élaboration progressive des résultats constituent l'autre facette, tout aussi indispensable, de l'aide à la mémorisation. (p. 34)

L'« importance de la représentation des nombres » révélée dans ce document, se situe au cœur du travail de mémorisation des tables de multiplication. La notion de représentation, théorisée par Gérard Vergnaud⁸, s'avère constituer un support majeur pour retrouver un résultat multiplicatif, suivant trois types de représentations mobilisées. L'élève peut tout d'abord mobiliser une image mentale de la table sous sa forme traditionnelle ou de la table de Pythagore – qui présente certains avantages en terme de visualisation que nous examinerons ultérieurement. Par ailleurs, le produit peut être reconstruit à partir d'une image mentale associée à la multiplication, comme un quadrillage ; dans ce cas, il fait appel à une représentation de la notion de multiplication, et opère

7. Ces études ont été réalisées par Geary (1987), Siegler (1987), notamment avec Shrager (1984).

8. Plusieurs ouvrages de G. Vergnaud traitent de cette notion, comme *Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation* (1985), *Signifiants et signifiés dans une approche psychologique de la représentation* (1993) ou encore *Compétence, conceptualisation et représentation* (1999).

donc à un retour à la notion. Enfin, il peut solliciter sa « bonne représentation mentale des nombres » qui lui permet d'utiliser leurs propriétés ainsi que celles de la multiplication pour reconstituer un résultat à partir de produits mémorisés. Les *Documents d'accompagnement*, avant de noter le rôle potentiel de la table de Pythagore, font état de cette démarche en identifiant les propriétés des nombres (5^{ème} point) et de la multiplication (2^{ème} et 4^{ème} points), ainsi que les produits mémorisés (1^{er} et 3^{ème} points) qui entrent en jeu :

L'élève peut prendre appui :

- sur les résultats rapidement connus des tables de 2 et de 5 ;
- sur le comptage de n en n pour retrouver un résultat à partir d'un résultat mémorisé ;
- sur la connaissance des carrés souvent bien maîtrisés ;
- sur la commutativité de la multiplication ;
- sur le fait que multiplier par 4, c'est doubler 2 fois ou que multiplier par 6 revient à tripler, puis doubler ;
- sur des particularités et des régularités repérées dans la table de Pythagore [...] (p.35)

De nombreuses méthodes d'apprentissage des tables de multiplication sont fondées sur ce même principe, notamment celle exposée par Françoise Cerquetti-Aberkane, dans le guide *Enseigner les mathématiques à l'école* (2000). Dans l'objectif de « mémoriser les tables de multiplication avec un minimum d'investissement », cette didacticienne des mathématiques propose de « donner des trucs pour retenir les tables ». De la même façon que les *Documents d'accompagnement*, elle conseille d'« apprendre la table de 2 », qui permet de retrouver la table de 4, « obtenue en doublant les résultats de la table de 2 » grâce à l'associativité de la multiplication. Il faut « apprendre ensuite les tables de 5 et de 10 qui ne posent pas de problèmes aux enfants, en général » et « apprendre aussi la table de 3 ». Enfin, la table de 9 bénéficie d'« un système qui permet de trouver les résultats en utilisant les doigts de la main », qui consiste à baisser le n-ième doigt de la main, avec n égal au facteur de la multiplication différent de 9, puis à lire directement le résultat : « le nombre de doigts [*levés*] situés à gauche du doigt baissé » constitue le chiffre des dizaines, tandis que celui des unités correspond au « nombre de doigts situés à droite du doigt baissé ». Il paraît intéressant de noter l'emploi du terme « trouver » qui s'oppose à « apprendre » employé précédemment : ici, il ne s'agit plus de réaliser un « effort » de mémorisation mais d'utiliser une astuce. Ainsi, à ce stade, les élèves disposent des tables de 2, 3, 5 et 10 qui ont été « apprises », et de celles de 4 « obtenue » à partir de la table de 2, et de 9 « trouvée » grâce à un « truc ». Alors, « pour les autres tables », à savoir celles de 6, 7 et 8, « il suffit d'utiliser les résultats des tables de 2, 3, 4, 5, 9, 10 ainsi que l'associativité et la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication », par exemple :

$$3 \times 7 = (2 \times 7) + (1 \times 7) ; 6 \times 8 = (5 \times 8) + (1 \times 8) ; 7 \times 7 = (5 \times 7) + (2 \times 7).$$

Cette conclusion révèle bien la même stratégie que précédemment, qui consiste à retrouver des résultats à partir de produits mémorisés et de propriétés de la multiplication comme la distributivité qu'il faut tout de même « bien savoir manipuler » pour effectuer cet exercice de « calcul mental ». Par ailleurs, cette démarche, étudiée pour son enjeu cognitif en premier lieu, présente également selon F. Cerquetti-Aberkane un avantage dans le domaine affectif :

Il est extrêmement important de travailler ce type de calcul mental car c'est très sécurisant pour les enfants de savoir qu'en faisant un petit effort de mémoire (apprendre les tables de 2, 3, 4, 5, 9, 10), on peut retrouver très vite les résultats de toutes les autres.
(p. 80)

De plus, « utiliser » ce que l'on a appris représente un travail de réinvestissement qui peut produire un effet positif en terme de motivation, à deux niveaux : cela permet de donner du sens à cet apprentissage préliminaire en lui conférant une finalité, mais aussi, paradoxalement, en en faisant une finalité. En effet, apprendre les produits des tables de 2, 3, 5 et 10 – la table de 9 est à mettre à part dans ce programme d'apprentissage – peut être motivé par l'enjeu d'en déduire les autres produits (des tables de 4 et 6, 7, 8), c'est-à-dire de fixer une utilité, un but à cette tâche. Mais, de ce fait, mémoriser ces premiers résultats devient une finalité en soi puisque cela constitue la majeure voire l'unique part de travail dans l'apprentissage des tables de multiplication : une fois cet effort de mémorisation fourni, on peut retrouver tous les résultats souhaités par l'intermédiaire d'un raisonnement uniquement calculatoire. Cependant, il faut noter que l'élaboration d'un tel raisonnement et l'effectuation des calculs requièrent une certaine maîtrise mathématique. Voilà ce qui peut, de manière assez paradoxale à nouveau, motiver la mémorisation des résultats que l'on peut retrouver : certains élèves, peu à l'aise dans la manipulation des nombres et des concepts mathématiques, préfèrent apprendre ces produits plutôt que mettre en place une procédure permettant de les reconstruire. Ce choix est effectué notamment en fonction de la mesure de l'effort à fournir et de l'évaluation de ses propres capacités, qui suppose une bonne connaissance de soi. Ce type de décision est d'ailleurs inhérent à tous les apprentissages, quel que soit le domaine disciplinaire, le niveau ou l'âge de l'apprenant. Effectivement, chaque sujet détermine systématiquement – plus ou moins consciemment – ce qu'il doit mémoriser et ce qu'il peut retrouver grâce à cette partie mémorisée. Ainsi, parmi les savoirs à mémoriser, certains le sont par choix (comme on vient de le voir), et d'autres par nécessité : ce sont ceux qu' " *il faut connaître* " ou encore que l' " *on ne peut pas inventer* " comme on l'entend dans les classes.

Différemment de F. Cerquetti-Aberkane, les auteurs du manuel *J'apprends les maths CE2* présentent dans le *livre du maître* numérisé une méthode permettant de retrouver des résultats multiplicatifs qui se base non plus sur une propriété de la multiplication (la distributivité), mais sur un des sens qui y sont associés, celui d'addition itérée :

La stratégie adoptée a consisté [...] à favoriser une mémorisation de ces tables dans l'ordre en utilisant la propriété qui veut que dans la table de 3, les résultats vont de 3 en 3, dans celle de 4, les résultats vont de 4 en 4 et dans celle de 5, ils vont de 5 en 5. (p.174)

On peut immédiatement souligner le fait que cette procédure repose en réalité sur une certaine conception des notions de multiplication et d'addition. En effet, en ce qui concerne la multiplication, c'est son sens additif qui est ici privilégié, et qui fait donc intervenir la notion d'addition. Or, cette dernière apparaît également sous un sens particulier : additionner 3 par exemple, autrement dit ajouter 3, signifie dans ce cas avancer de 3 dans la file numérique – comme le suggère cette expression : « les résultats vont de 3 en 3 ».

Bien que dans cette « stratégie » un produit soit perçu comme une somme itérée, les auteurs du manuel, par le biais d'un exemple, émettent des réserves à l'interprétation qui pourrait être faite de cette conception : « " 3 fois 4, ... " ne s'obtient pas en calculant $4 + 4 + 4$, c'est-à-dire en s'appuyant sur la signification du mot " fois ", mais en déduisant le résultat de celui qui le précède dans la table ». Effectivement, l'équation $3 \times 4 = 4 + 4 + 4$ constitue la justification mathématique de cette procédure, mais il ne s'agit pas pour obtenir un produit d'effectuer cette addition. En effet, à partir de cette écriture on obtient : $3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 2 \times 4 + 4$, où 2×4 représente le produit précédant 3×4 dans la table de 4, et on voit alors qu'il suffit de « déduire » 3×4 du produit « qui le précède » en ajoutant 4. Ainsi, même si cette méthode s'avère fondée sur un retour à la notion de multiplication et à la signification du mot " fois ", il ne s'agit pas d'obtenir un produit en effectuant l'addition correspondant à la " traduction additive " de la multiplication prise isolément, mais de le déduire du produit précédent par un procédé additif. C'est pourquoi il devient nécessaire que chaque table soit mémorisée « dans l'ordre » (chaque produit étant déduit du précédent). Par conséquent, la « récitation », en tant qu'énonciation de la table dans l'ordre, occupe une place toute particulière dans cette méthode d'apprentissage. Cependant, au regard de la définition de la récitation donnée antérieurement, il est important de spécifier qu'elle n'apparaît pas ici comme l'aboutissement du travail d'apprentissage, mais comme l'objet d'apprentissage : « la récitation [...] s'apprend ». Elle représente la reconstruction de la table de n (avec n entier compris entre 1 et 10), dont les résultats sont obtenus « en ajoutant successivement » n, c'est-à-dire en comptant de n en n. On comprend donc que pour R. Brissiaud et ses collaborateurs, « l'outil pédagogique privilégié pour cette mémorisation est le jeu du furet [...] ». En s'inspirant de son principe, il est également possible de concevoir une activité comme celle explicitée ci-dessous sur l'exemple de la table de 3, qui peut être mise en œuvre dans la classe dans le but d'« apprendre à [...] réciter » la table :

Le 1^{er} élève dit " 3 fois 1, 3 ", le suivant " 3 fois 2, 6 ", le suivant " 3 fois 3, 9 ". Pour se préparer à dire le fait multiplicatif suivant " 3 fois 4... ", il suffit d'avoir mémorisé le résultat précédent, 9, et d'y ajouter 3. (p.100, livre du maître CE1)

Néanmoins, cette méthode présente l'inconvénient de compromettre la " mobilité " des tables, en rendant l'obtention de chaque résultat dépendant de celui qui le précède, lui-même dépendant de celui qui le précède, etc, tous les résultats dépendant finalement du premier de la table. Pour limiter cette " réaction en chaîne ", les auteurs du manuel proposent de se fixer comme « repères 5 et 10 », en supplément du repère obligé 1, c'est-à-dire les produits figurant aux 5^{ème} et 10^{ème} lignes de la table, ou encore les produits correspondant aux multiplications de facteurs 5 et 10 (différents du facteur commun de la table). En bref, si on considère la table de n , il faut connaître les produits égaux à $n \times 5$ et $n \times 10$ en plus de $n \times 1$ qui constitue le " produit de départ ". Effectivement, pour la table de 5 par exemple, cela permet aux élèves de « reconstruire les résultats comme 5 fois 6 et 5 fois 9 sans repartir du début [...] », autrement dit du produit égal à 5 fois 1. Ce statut de « repère » attribué au cinquième produit de chaque table conduit à une segmentation de l'apprentissage des tables de 6, 7, 8, 9 et 10 en deux parties : après en avoir « appris la 1^{ère} partie [...] (depuis " 6 fois 1, 6 " jusqu'à " 6 fois 5, 30 " pour la table de 6 ; depuis " 7 fois 1, 7 " jusqu'à " 7 fois 5, 35 " pour celle de 7, etc.) », les élèves apprennent « à en réciter la 2^{ème} partie » (depuis " 6 fois 6, 36 " jusqu'à " 6 fois 10, 60 ", etc). Or, cette méthode proposant de plus un apprentissage ordonné de l'ensemble des tables, c'est-à-dire depuis la table de 1 jusqu'à la table de 10, « les élèves auraient pu retrouver » les résultats de la première partie de ces « grandes tables » à partir des " petites " tables « en utilisant la commutativité de la multiplication ». En effet, il peut paraître inutile ou du moins redondant de travailler la mémorisation de produits tels que 7×3 sachant que « 7 fois 3 conduit au même résultat que 3 fois 7 » et que 3×7 a dû être appris auparavant. Mais, contrairement à de nombreuses méthodes d'apprentissage qui utilisent la commutativité pour reconstruire près de la moitié du répertoire multiplicatif, et ainsi réduire considérablement le nombre de produits à mémoriser, celle-ci l'emploie pour effectuer « un contrôle supplémentaire sur ces résultats » pouvant être retrouvés grâce à cette propriété de la multiplication. Les raisons pour lesquelles *J'apprends les maths* « n'a pas insisté sur ce phénomène » résident dans la thèse d'une « association verbale » comme ressort de la mémorisation :

On visait l'association verbale la plus directe possible, " 7 fois 3, 21 ", ce qui implique que les 5 premières lignes des tables de 7 soient traitées le plus possible pour elles-mêmes, sans avoir à hésiter sur la stratégie à employer [*pour obtenir ces résultats*].
(p.174, *livre du maître CE2*)

Pour conclure, on remarquera que si la méthode proposée par F. Cerquetti-Aberkane se base sur les relations existant entre les différentes tables pour retrouver des tables à partir des autres tables mémorisées, celle défendue par l'équipe de Brissiaud repose sur les relations unissant les différents produits au sein d'une même table.

3. La table de Pythagore comme support à l'articulation des deux démarches

Certains élèves apprennent « la chanson des tables » comme un automatisme et parviennent, à la fin de cet apprentissage, à trouver le sens et les combinaisons possibles. Face aux apprentissages « automatiques », d'autres élèves – en grande majorité – ont besoin de comprendre avant de pouvoir mémoriser. C'est la raison pour laquelle la troisième partie de notre développement repose sur la table de Pythagore de la multiplication, dont la « lecture » permet des allers-retours entre automatismes et sens, c'est-à-dire une articulation entre résultats mémorisés et résultats retrouvés par retour au sens (à partir de ceux mémorisés). Une étude de la construction de la table de Pythagore va donner aux élèves des outils pour aider à la mémorisation des tables de multiplication. C'est pourquoi diverses séquences sont proposées dans les manuels scolaires pour amener les élèves à construire la table de Pythagore et identifier des éléments de son organisation dans le but d'apporter du sens aux produits contenus dans la table et ainsi favoriser la mémorisation. Le manuel *Cap Maths CE2* par exemple affiche comme objectifs dans une première séance de « comprendre l'organisation du répertoire multiplicatif sous forme de table de Pythagore » et d'« amorcer la mémorisation de ce répertoire ». Puis dans une deuxième séance, les objectifs évoluent ainsi : « comprendre et utiliser l'organisation de la table de Pythagore, aider à sa mémorisation » et « utiliser des propriétés de la multiplication : commutativité et distributivité ». Ce travail de construction terminé, la table de Pythagore constitue un bon support pour la suite de l'apprentissage, car l'organisation des tables qu'elle induit présente des avantages en terme de visualisation :

- Tout d'abord, la caractéristique majeure de la table de Pythagore réside dans le fait qu'elle met en évidence la commutativité. En effet, cette propriété se traduit par une symétrie des résultats par rapport à la diagonale du tableau, dite "des carrés parfaits". Comme le soulignent les auteurs du *guide de l'enseignant* de *Cap Maths CE2*, cette observation a pour conséquence immédiate la suppression d'un grand nombre de résultats à apprendre :

La reconnaissance par les élèves de la commutativité de la multiplication est très importante : elle permet " d'économiser " l'apprentissage de près de la moitié des résultats. Le terme " commutativité " n'est pas à utiliser avec les élèves. (p.132)

- En outre, de manière générale, l'intérêt fondamental des tables de Pythagore est qu'elle rassemble l'ensemble du répertoire multiplicatif à mémoriser, c'est-à-dire les produits des nombres compris entre 0 et 10. Les auteurs du manuel *Cap Maths* exploitent d'ailleurs cet avantage en proposant aux élèves de colorier les cases correspondant aux résultats « qu'ils savent " par cœur " » afin de se focaliser sur les autres produits qu'ils ont à apprendre, ainsi mis en évidence. Cette visualisation globale permet une lecture à plusieurs niveaux, à l'échelle d'un résultat particulier, d'une table, et

enfin de l'ensemble des tables, et de ce fait, rend n'importe quel produit disponible plus rapidement. L'élève peut donc, grâce à un effort cognitif moindre, s'appuyer sur la connaissance de ce produit pour obtenir le résultat recherché. Dans le cadre de l'apprentissage de la technique opératoire par exemple, l'élève peut lire dans la table de Pythagore n'importe quel produit intermédiaire afin que celui-ci ne constitue pas un obstacle à la progression de son calcul : s'il doit effectuer 937×58 , il peut obtenir grâce à la table de Pythagore tous les produits nécessaires tels que 7×8 ou 9×5 . Dans notre contexte des tables de multiplication, il peut utiliser des résultats inscrits dans la table de Pythagore pour en retrouver d'autres par des stratégies de calcul réfléchi. Par exemple, considérons la colonne – on pourrait de même considérer la ligne – du 7, la case correspondant à 6×7 peut être remplie, grâce à la distributivité de la multiplication sur l'addition, en ajoutant les résultats des cases de 2×7 et de 4×7 car : $6 = 2 + 4$, d'où : $2 \times 7 + 4 \times 7 = 14 + 28 = 42$. S'il est donc possible d'obtenir un produit à partir de deux autres de la même table, il est également envisageable de procéder dans la sorte à l'échelle de plusieurs tables : on peut par exemple reconstruire la table de 7 en additionnant les résultats des tables de 2 et de 5 facilement mémorisées (il s'agit encore de la propriété de la distributivité), ou encore celle de 4 à partir de celle de 2 par l'associativité de la multiplication, nous l'avons vu précédemment. Enfin, la table de Pythagore permet de visualiser toutes les écritures multiplicatives d'un même nombre ; ainsi, 24 apparaît quatre fois, comme étant le produit de 3×8 , 8×3 , 4×6 et 6×4 .

Finalement, grâce à l'exploitation de ces différentes caractéristiques, les effets des propriétés de la multiplication sur les tables de 0, 1 et 10 et l'utilisation de diverses "astuces" permettant de retrouver les tables de 5 et 9 (notamment), il ne subsiste que quelques produits difficiles à mémoriser : 6×6 , 6×7 , 6×8 , 7×7 , 7×8 et 8×8 , en plus des tables de 2 et de 3 facilement apprises, et travaillées depuis le CP pour celle de 2 et le CE1 pour celle de 3.

- Effectivement, 0 étant l'élément absorbant de la multiplication, sa table est constituée de zéros ; de même, 1 étant l'élément neutre de la multiplication, sa table est constituée des nombres de 0 à 10 ; enfin, la table de 10 s'obtient aisément en appliquant la « règle des zéros », c'est-à-dire en ajoutant un zéro à droite du nombre multiplié (par 10).

- En ce qui concerne la table de 5, elle peut être reconstruite par la méthode suivante, reposant sur le fait que les produits successifs se terminent alternativement par 0 ou 5 : il suffit de connaître le résultat de 2×5 , d'en déduire en le multipliant respectivement par 2, 3, 4 et 5 les produits 5×4 , 5×6 , 5×8 et 5×10 , c'est-à-dire ceux dont le facteur différent de 5 est pair. Ainsi, chaque produit parmi ceux de facteur différent de 5 impair (5×3 , 5×5 , 5×7 et 5×9) correspond au nombre ayant pour chiffre des unités 5, et pour chiffre des dizaines celui du produit immédiatement précédent.

Quant à la table de 9, il existe de nombreuses " astuces " permettant de retrouver un produit du type $n \times 9$ (avec n entier compris entre 1 et 9) au-delà de la méthode digitale de F. Cerquetti-Aberkane présentée antérieurement. En effet, on peut également procéder à de simples manipulations numériques, comme celle détaillée dans les *Documents d'accompagnement* :

Multiplier un nombre [que l'on a désigné par n] par neuf revient à prendre le prédécesseur de ce nombre comme chiffre des dizaines et le complément à neuf de ce dernier comme chiffre des unités ($6 \times 9 = 54$; 5 c'est $6 - 1$ et $5 + 4 = 9$). (p.35)

De plus, il est bien sûr possible de multiplier n par 10 puis de soustraire n à ce résultat. Enfin, on peut reconstituer l'ensemble de la table de 9 de la manière suivante: les nombres de 0 à 9 écrits dans l'ordre croissant représentent les chiffres des dizaines, et dans l'ordre décroissant, les chiffres des unités.

- Rappelons en outre que la table de 4 est facilement obtenue à partir de la table de 2 (en doublant ses résultats), et ne constitue généralement pas une difficulté pour les élèves.

Ainsi, seuls les six produits cités plus haut nécessitent la mise en place d'une procédure plus complexe pour les retrouver. En effet, grâce à l'associativité, on pourrait considérer que 6×7 est égal à $2 \times (3 \times 7)$ et ainsi en calculer le produit, mais cette démarche est rarement mise en œuvre par des élèves en autonomie, et de ce fait, la mémorisation de ces six résultats lui est préférée (et vivement recommandée !).

Pour conclure, signalons que le produit 7×8 bénéficie d'un moyen mnémotechnique : on retrouve les nombres de 5 à 8 écrits dans l'ordre croissant : $56 = 7 \times 8$.

4. Conclusion

Dans cette première partie, nous nous sommes intéressées à l'apprentissage des tables de multiplication et plus particulièrement aux différents choix d'enseignement autour des deux démarches spécifiques, à savoir « retrouver » les produits et les mémoriser, et ce, dans le but de faciliter l'apprentissage du répertoire multiplicatif dans le cadre des programmes nationaux de l'école primaire de 2008.

Souhaitant approfondir notre recherche sur ce même thème, notre attention se porte actuellement sur la relation entre l'élève et le savoir en référence au *triangle didactique* matérialisé par Yves Chevallard. Au cours de notre recherche précédente, nous nous étions appuyées sur la *dialectique outil-objet* de Régine Douady (1986) afin de mettre en évidence les différents statuts des tables de multiplication. Si elles trouvent largement leur place en tant qu'*outil* dans le domaine mathématique, notamment dans l'apprentissage de la technique opératoire de la multiplication – ainsi que de la division – ou encore dans la résolution de problèmes multiplicatifs, leur dimension

d'*objet* paraît moins évidente, et occupe pourtant une place centrale dans leur apprentissage. En effet, nous avons vu que les méthodes destinées à rendre l'élève capable de « retrouver » les résultats des tables de multiplication s'appuient sur un retour au concept de la multiplication – construit en CE1 –, et donc au sens que peuvent porter les tables ; en revanche, les stratégies de mémorisation des tables reposant sur des procédures cognitives telles que la construction d'un *réseau associatif* semblent viser la maîtrise des tables en tant qu'*outil* devant être mobilisé au service de la consolidation du concept de la multiplication, à travers la résolution de problèmes multiplicatifs notamment. C'est pourquoi nous allons à présent étudier le statut des tables de multiplication au sein de la résolution de problèmes multiplicatifs dans l'ensemble des nombres entiers naturels au CE2.

II. Résolution de problèmes multiplicatifs et tables de multiplication

1. Typologie des problèmes multiplicatifs et tables de multiplication

a. La classification des problèmes multiplicatifs selon Vergnaud

Dans *L'enfant, la réalité et la mathématique*, Gérard Vergnaud (1981) tente d'analyser et classer les problèmes additifs et multiplicatifs. Mais c'est surtout grâce à ses travaux ultérieurs que cette catégorisation va s'affiner et s'imposer comme un outil didactique majeur dans le domaine de la résolution de problèmes, comme Levain et Vergnaud lui-même (1994-1995) le rappellent :

Gérard Vergnaud (1983, 1988) a développé une analyse sémantique des problèmes multiplicatifs. Cette classification s'appuie sur l'analyse de la structure mathématique du problème, c'est-à-dire des relations qu'entretiennent les questions et les différentes données de l'énoncé. (p.57)

Ces termes de « structure » et « relations » sont à la base de la vision tout à fait novatrice qu'a portée Vergnaud sur la résolution de problèmes et les travaux de recherche menés sur le sujet. En effet, Julo (2002) souligne le rôle de « pionnier qu'a joué Vergnaud dans le développement de ce domaine » en focalisant son analyse sur « les relations entre les éléments constitutifs du problème » et « pas seulement l'opération à effectuer comme on le faisait précédemment ». Ainsi, l'étude systématique de ce que Julo a résumé sous l'expression de « structure relationnelle qui caractérise le problème » a permis à Vergnaud de mettre « en évidence [...] différentes classes de problèmes ». Au-delà du monde de la recherche, cette catégorisation des problèmes fondée sur leur structure mathématique a eu un impact considérable dans la sphère de la didactique étant donnée son « influence » avérée sur les « stratégies mises en œuvre par les élèves et sur leur capacité ou non à les résoudre ». Effectivement, nous verrons que la classification établie par Vergnaud présente plusieurs niveaux de catégorisation, dont certains reposent sur des critères tout à fait opérationnels pour les élèves, comme l'opération à effectuer. De ce fait, la « manière de catégoriser un ensemble de problèmes » ou la « capacité de regrouper des problèmes qui ont des structures proches » permet à l'élève de repérer les problèmes appartenant à une « même classe » et ainsi mettre en œuvre une procédure similaire pour les résoudre. Ainsi, « l'organisation des connaissances en mémoire » basée sur « la catégorisation de problèmes » constitue une première réponse à la question des « relations entre apprentissage et résolution de problèmes » qui a émergé avec la naissance de la didactique des mathématiques.

Après avoir brièvement exposé les raisons qui nous poussent – dans ce mémoire au même titre que dans d'autres travaux de recherche en didactique des mathématiques – à appuyer notre

réflexion sur la classification établie par Vergnaud, nous tentons à présent d'en présenter les grands traits. Effectivement, les nombreuses sources qui rendent compte de cette catégorisation se heurtent à la complexité de l'œuvre de Vergnaud, et privilégient donc certains critères de classification à d'autres. Dans cette étude, notre point départ est celui qu'a formulé Vergnaud (1981) faisant part de ses premières réflexions sur le sujet :

On peut distinguer deux grandes catégories de relations multiplicatives, en désignant ainsi les relations qui comportent soit une multiplication soit une division. La plus importante d'entre elles, qui est utilisée pour l'introduction de la multiplication dans l'enseignement élémentaire, et qui forme le tissu de la grande majorité des problèmes de type multiplicatif, est une relation quaternaire et non une relation ternaire : elle n'est pas, de ce fait, adéquatement représentée par l'écriture habituelle de la multiplication : $a \times b = c$, puisque cette écriture ne comporte que trois termes. (p.161)

Un premier critère que met donc en valeur Vergnaud pour « distinguer » les « problèmes de type multiplicatif » réside dans le nombre de termes impliqués, qui peut être de trois ou quatre. Ces termes représentent l'ensemble des données ainsi que l'inconnue, ce qui renvoie à la « relation qu'entretiennent la question [c'est-à-dire l'inconnue] et les différentes données de l'énoncé » exprimée par les propos de Levain et Vergnaud cités plus haut. Ce rapprochement étant fait, nous comprenons ce premier niveau de caractérisation des « relations » multiplicatives qualifiées de « ternaires » ou « quaternaires ». D'après cette introduction de Vergnaud, ces deux catégories occupent une place différente dans l'ensemble des problèmes multiplicatifs et, de manière plus large, dans le champ conceptuel de la multiplication. Cette dimension hiérarchisée de la catégorisation de Vergnaud, qui manifeste le souci constant de rattacher ses travaux de recherche à l'usage qui en est fait dans l'enseignement, apparaît régulièrement au cours de cette étude et permet d'inscrire celle-ci dans une certaine perspective de mise en œuvre didactique.

Après avoir considéré le nombre de termes impliqués, Vergnaud examine la nature de ces termes ainsi que les relations qui les lient, ce qui l'amène à créer des sous-classes de problèmes établies selon ce critère, à commencer par celle des « isomorphismes de mesures » qu'il définit de la façon suivante :

La première grande forme de relation multiplicative est une relation quaternaire entre quatre quantités : deux quantités sont des mesures d'une certaine sorte et les deux autres des mesures d'une autre sorte. (p.161)

En effet, au sein des deux catégories de relations multiplicatives ternaires et quaternaires, il existe des « structures » qui rendent compte des différentes relations existant entre les termes, et qui constituent un niveau supplémentaire de classification. Parmi les relations quaternaires, Vergnaud discerne dans un premier temps la « structure de proportion simple » qu'il présente avec Levain (1994-1995). Elle est définie comme une structure qui « met en jeu quatre quantités appartenant à

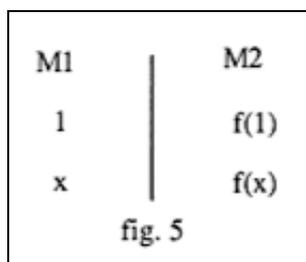
deux espaces de mesure différents » M_1 et M_2 ; il s'agit donc, d'après ce qui précède, d'un isomorphisme de mesures. Cette définition est accompagnée d'un exemple de problème de cette classe : « 4 stylos coûtent 6 francs. Combien coûtent 10 stylos ? ». Cette situation peut être résolue par la mise en place de plusieurs stratégies plus ou moins complexes :

- une procédure « verticale » utilisant un « opérateur scalaire, sans dimension » égal à 2,5 pour "passer" de 4 à 10 stylos ;
- une procédure « de type addition itérée » ;
- une procédure qui « combine les deux précédentes » faisant ainsi appel à des « propriétés de linéarité » spécifiques des isomorphismes ou des situations de proportionnalité au sens où on l'entend communément ;
- une procédure « horizontale » basée sur le calcul du coefficient de proportionnalité permettant de « passer d'une catégorie de mesure à l'autre », ici égal à 1,5.

Cependant, les auteurs de cet article soulignent le fait que ce type de problème, qui demande la mise en place de procédures de résolution relativement complexes, constitue une situation de proportion simple tout à fait prototypique, communément qualifiée de "quatrième proportionnelle", mais pas hégémonique puisqu'ils précisent l'existence d'une autre catégorie de problèmes tout aussi répandue :

Au cycle primaire, de nombreux problèmes sont résolus par l'emploi d'une seule multiplication ou division. Ces problèmes sont néanmoins de véritables problèmes de proportion : simplement l'une des quatre quantités de la proportion est égale à 1. Un grand nombre de situations quotidiennes et professionnelles mettent en jeu cette structure (distribution en parts égales, coûts, vitesse uniforme, etc.). (p.59)

Effectivement, tous ces exemples relèvent de situations de proportion entre des espaces de mesure nommés M_1 et M_2 pouvant être représentées par le schéma suivant (Ibid.) :



Cette distinction des problèmes de proportion simple possédant une quantité égale à 1, motivée par la simplicité de la stratégie opératoire à mettre en œuvre pour les résoudre (« une seule multiplication ou division »), pousse Levain et Vergnaud à approfondir leur analyse et à établir ainsi une sous-catégorisation supplémentaire de ces problèmes :

Trois grands types de problèmes peuvent donc être distingués, en fonction de la place occupée par l'inconnue :

- multiplication : trouver $f(x)$
- division de type 1 : trouver $f(1)$ (fig.1) [voir plus bas]
- division de type 2 : trouver x (fig.2) [voir plus bas] (p.59)

Si l'on s'inscrit dans le cadre de la résolution de problèmes à l'école primaire, on est amené à désigner et reformuler l'objet recherché dans chaque type de manière extrinsèque à ces symboles mathématiques. Le premier « type » de problèmes pose peu de difficulté de représentation car il s'agit en réalité de situations fréquemment rencontrées telles que le calcul du coût $f(x)$ d'une certaine quantité x d'objets (pour reprendre l'exemple du coût cité précédemment), qui se résout par une multiplication au sens d'addition itérée. Les deux autres « types » de problèmes, en revanche, méritent d'être développés.

- En effet, « trouver $f(1)$ » revient à trouver la valeur de l'unité ou d'une part ; de ce fait, ce que Vergnaud et Levain nomment la « division de type 1 » dans leurs travaux correspond dans la sphère didactique à la « division-partition ». Dans le cadre de la résolution de problèmes, Bistos et Matulik (2010), auteurs de l'article « Problèmes de multiplication et de division au cycle 2 » paru dans *Le nombre au cycle 2*, établissent la caractérisation suivante :

Résoudre un problème de division partition revient à calculer la valeur d'un paquet connaissant le nombre de paquets identiques que l'on peut faire dans une collection. (p.64)

- De la même façon, « trouver x » signifie trouver le nombre d'unités ou de parts ; il s'agit de la « division-quotition » d'après la définition de Bistos et Matulik :

Résoudre un problème de division quotition revient à calculer le nombre de paquets identiques que l'on peut faire dans une collection connaissant la valeur d'un paquet. (p.64)

On peut ainsi résumer ces équivalences lexicales :

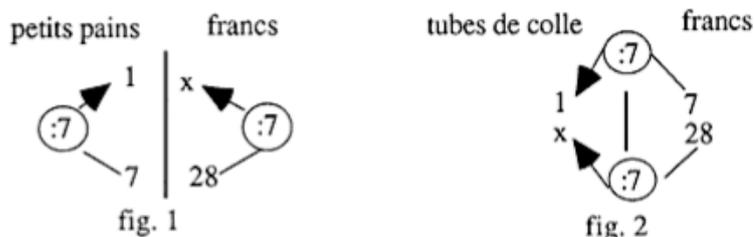
<i>Terminologie de Vergnaud</i>	<i>Désignation plus commune</i>	<i>Caractérisation par la nature de l'inconnue</i>
« Division de type 1 »	Division-partition	$f(1)$: valeur de l'unité/d'une part
« Division de type 2 »	Division-quotition	x : nombre d'unités/de parts

Dans « Proportionnalité simple, proportionnalité multiple », les deux chercheurs insistent sur les significations différentes de l'opération de division. Pour cela, ils considèrent à titre d'exemples deux problèmes étudiés par Levain (1992) :

« Paul achète 7 petits pains pour 28 F. Combien coûte un petit pain ? »
 « Nicolas achète des tubes de colle pour 28 F ; chaque tube coûte 7 F. Combien de tubes a-t-il acheté ? »

Ainsi, les auteurs mettent en valeur le fait que, si l'opération à effectuer pour résoudre ces deux problèmes est identique, elle n'a pas le même statut mathématique : dans le premier cas de division de type 1, c'est-à-dire de division-partition, l'opérateur ($: 7$) est un opérateur « scalaire » et

« sans dimension » ; tandis que dans la deuxième situation de division de type 2, soit de division-quotition, l'opérateur ($: 7$) permet de passer d'une mesure à l'autre. Le schéma suivant proposé par Vergnaud et Levain constitue une représentation de ces deux raisonnements différents et, de ce fait, une justification de la distinction devant être faite entre ces deux types de divisions et donc de problèmes :

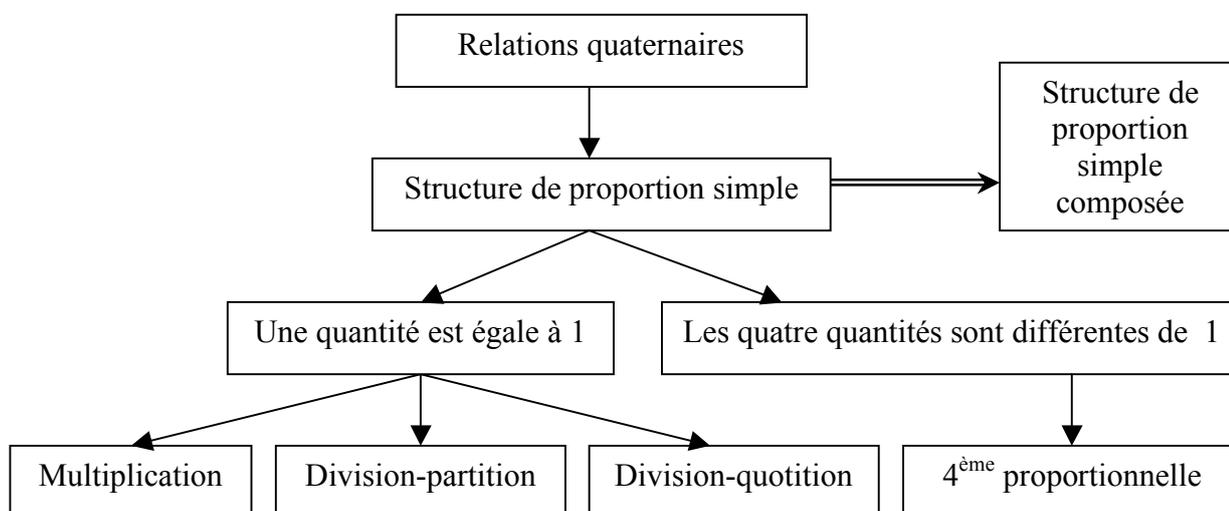


Pour conclure notre propos sur les structures de proportion simple, précisons l'existence d'une structure nommée « structure de proportion simple composée » présentée dans le prolongement de la précédente structure par les auteurs de l'article :

La structure de proportion simple composée résulte de la composition de deux ou plusieurs proportions simples [...]. Elle comporte le plus souvent trois espaces de mesure M_1 , M_2 et M_3 dans lesquels une fonction f permet de passer de M_1 à M_2 et une fonction f' de M_2 à M_3 . (p.59)

Cette dernière peut être placée dans la catégorie des relations quaternaires dans les cas où l'inconnue est x , $f' \circ f(x)$ ou $f' \circ f(1)$, c'est-à-dire les situations où l'on peut considérer la « fonction linéaire composée $f' \circ f$ » de la même façon qu'une fonction linéaire f dans une structure de proportion simple.

Avant de présenter de nouvelles structures de relations ternaires cette fois, essayons de résumer la classification que nous avons développée autour des relations quaternaires et plus particulièrement des structures de proportion simple :



Dans la catégorie des relations ternaires, présentées par Vergnaud comme moins usuelles que les relations quaternaires, on peut distinguer deux voire trois structures différentes (selon si l'on distingue les deux dernières structures ou non) :

- La première est la structure de comparaison multiplicative de grandeurs, qui rassemble les situations de type communément nommé « n fois plus / n fois moins ». Dans cette classe de problèmes, deux grandeurs sont liées par un coefficient – qui représente le troisième terme de la relation –, chacun de ces termes pouvant être l'inconnue de la situation, que l'on obtient en effectuant une simple multiplication ou division selon les cas.

- La deuxième, la « structure du produit de mesures », renvoie à la « composition cartésienne de deux espaces de mesure M_1 et M_2 en un troisième M_3 ». Outre le « produit cartésien », c'est la structure correspondant aux problèmes de calcul d'« aire » ou de « volume », et donc aux problèmes de « représentation rectangulaire » permettant souvent d'introduire la notion de la multiplication dans l'enseignement, comme le font remarquer Bistos et Matulik (2010) : « Ces types de problèmes sont scolairement bien identifiés comme support à la construction du concept de multiplication. »

De la même façon que précédemment – pour les structures de proportion simple possédant une quantité égale à 1 – Levain et Vergnaud établissent une distinction supplémentaire entre les problèmes de cette catégorie :

Deux types de problèmes seulement relèvent de cette structure :

- Multiplication : trouver $f(x_1, x_2)$, connaissant x_1 et x_2

- Division de type 2 : trouver x_1 connaissant x_2 et $f(x_1, x_2)$.

Comme par définition $f(l, l) = l$ (par exemple : $1\text{m} \times 1\text{m} = 1\text{m}^2$), il n'existe pas de division de type 1.

- Enfin, il existe la « structure de proportion double », qui est « proche de celle du produit de mesures puisque la seule différence est que $f(l, l)$ n'est plus nécessairement égal à 1 ». En effet, « l'aire d'un rectangle » par exemple, relevant de la structure du produit de mesures, « est proportionnelle à la longueur (lorsque la largeur est constante) et à la largeur (lorsque la longueur est constante) » : le produit de mesures est un cas particulier d'une relation de double proportionnalité. Cependant, contrairement à la structure du produit de mesures, les problèmes possédant une structure de proportion double présentent la possibilité de « retrouv[er] » les « deux types de division : trouver $f(l, l)$ et trouver x_1 ou x_2 connaissant les autres valeurs » étant donné que $f(l, l)$, qui correspond à la valeur du "couple unité", peut être l'inconnue du problème et ainsi engendrer une situation de division-partition (division de type 1). Il s'agit du cas général de la proportion double, qui est illustré par des situations familières de « consommation, production, dépense, etc. ».

Avant de conclure cette partie consacrée à la classification des problèmes multiplicatifs, synthétisons l'ensemble de notre réflexion sur les relations multiplicatives en récapitulant les différents niveaux de classification utilisés par Vergnaud (1981, 1994-95) :

- Il existe deux catégories de **relations** multiplicatives définies selon le nombre de termes ou de quantités que comporte le problème : la relation quaternaire (majoritaire) ou la relation ternaire.
- Dans chacune de ces catégories, plusieurs **structures** sont caractérisées en fonction des relations mathématiques qui lient les différents termes du problème :
 - pour les relations quaternaires : la structure de proportion simple induisant celle de proportion simple composée ;
 - pour les relations ternaires : la structure de comparaison multiplicative de grandeurs, et la structure de proportion double, incluant la structure du produit de mesures.
- Enfin, au sein de ces structures, on peut distinguer différents **types** de problèmes selon la place de l'inconnue : multiplication, division-partition ou division-quotition.

Pour classer les problèmes de type multiplicatif, on peut donc recenser deux catégories de **relations** (ternaires ou quaternaires), quatre **structures** majeures (proportion simple, proportion simple composée, comparaison multiplicative de grandeurs, proportion double) et trois **types** de problèmes (multiplication, division-partition ou division de type 1, division-quotition ou division de type 2).

b. Les problèmes retenus pour le recueil de données

A partir de cette classification, nous nous sommes interrogées sur les catégories de problèmes sur lesquelles nous souhaitons travailler : celles qui paraissent les plus adaptées, d'une part au niveau des élèves de CE2 (en référence aux programmes nationaux de l'école élémentaire), et d'autre part à notre problématique. Dans les instructions officielles, et plus précisément dans le domaine « nombres et calcul », il est indiqué que les élèves de CE2 doivent « résoudre des problèmes relevant des quatre opérations », autrement dit, dans le cadre de notre étude, nous pouvons leur proposer des problèmes de multiplication et de division. Cependant, deux faits supplémentaires sont à prendre en compte. Le premier concerne l'existence d'une progression dans les apprentissages en terme de résolution de problèmes. En effet, dans les mêmes programmes nationaux, on relève une certaine progressivité dans la rubrique de résolution de problèmes : au CM1, les élèves doivent « résoudre des problèmes engageant une démarche à une ou plusieurs étapes », et au CM2 « résoudre des problèmes de plus en plus complexes ». De plus, dans le volume consacré aux *Situations multiplicatives, problèmes de multiplication et de division* (2011) de la

collection « Outils pour les cycles », la progression suivante est suggérée pour le cycle 3, en référence à différents travaux de la recherche en didactique des mathématiques :

		CATÉGORIES DE PROBLÈMES					
		Multiplication	Division-partage Division- groupements	Type « n fois plus, n fois moins »	Produit cartésien		
P R O G R A M M A T I O N	1 ^{er} trimestre CE2	Rappel CE1				1	M O D U L E S
	2 ^{ème} trimestre CE2					2	
	CM1					3	
	CM2					4	
		1	2	3	4		
SÉQUENCES D'APPRENTISSAGE							

D'après ce tableau, les problèmes de type multiplication, division-partage (ou partition) et division-groupements (ou quotient) font l'objet des apprentissages en résolution de problèmes numériques au CE2. A partir de ces considérations, nous nous sommes renseignées sur les types de problèmes traités dans la classe particulière de CE2 au sein de laquelle allait s'effectuer notre recueil de données. En période 4, les élèves de cette classe continuaient à étudier les problèmes de type multiplication et n'avaient jamais abordé des problèmes de division, que ce soit division-partage ou division-quotient. D'abord contrariées par ce fait, nous nous sommes finalement rendu compte qu'il pouvait constituer un atout dans le cadre de notre étude.

En effet, le deuxième élément à prendre en compte dans notre réflexion est bien évidemment celui de la place des tables de multiplication dans la résolution des différentes catégories de problèmes. Les problèmes de type de multiplication apparaissent comme autant de situations permettant d'évaluer la capacité directe de mobilisation du répertoire multiplicatif dans leur résolution : en proposant des situations "simples", où l'opération de multiplication est évidente et les valeurs numériques appartiennent au répertoire multiplicatif, les compétences en terme de résolution de problèmes sont peu sollicitées au profit d'un réinvestissement direct des tables de multiplication. Le problème sera correctement résolu essentiellement si les élèves savent mobiliser leurs connaissances du répertoire multiplicatif pour (re)trouver le produit des deux données numériques fournies dans l'énoncé qui constitue la solution du problème. Ainsi, si toute difficulté en terme de traitement de données ou interprétation de l'énoncé est réduite voire éliminée, nous

pourrons mesurer, grâce à ces problèmes de multiplication présentant des variables numériques comprises dans le champ des tables de multiplication, les capacités de mobilisation de ces dernières dans le cadre de la résolution de problèmes. Cette première catégorie de problèmes place donc les tables au service de la résolution de problèmes : si elles sont maîtrisées, la résolution du problème est immédiate. Nous proposerons donc trois problèmes de type multiplication avec des données numériques comprises entre 2 et 9, précédés d'un problème faisant référence à une représentation de type quadrillage. En effet, le quadrillage, que nous définissons comme un réseau de droites perpendiculaires subdivisant une surface rectangulaire en plusieurs rectangles identiques, s'avère être un support pertinent pour notre analyse : les tables de multiplication constituent d'une part un outil pour la résolution du problème en permettant de restituer rapidement le produit recherché si elles sont maîtrisées, mais d'autre part, le quadrillage représente également un support pouvant être utilisé pour donner du sens au répertoire multiplicatif, et donc le (re)construire ou le retrouver. Les situations de quadrillage sont d'ailleurs proposées dans certains manuels pour introduire le concept de multiplication.

Puis, pour évaluer entièrement la place des tables dans cette catégorie de problèmes, nous soumettrons également des problèmes aux structures similaires, mais avec des valeurs numériques hors du domaine des tables : on peut supposer que l'éventuelle évolution des procédures engagées par les élèves accordera un statut différent au répertoire multiplicatif.

Par ailleurs, les problèmes de type division n'ayant jamais été abordé, nous pourrons observer deux postures majeures dans leur résolution : l'une reposant sur la compréhension de la situation et le développement d'un raisonnement lié à cette interprétation (sans doute basée sur une procédure imagée), et l'autre reposant sur la reconnaissance des données numériques comme deux termes (un facteur et un produit) des trois constituant une relation multiplicative du répertoire des tables et la restitution de ce troisième terme, indépendamment du contexte. Dans le premier cas de figure, la connaissance des tables est au service de la procédure raisonnée de résolution, et dans le deuxième, elle représente l'unique support de la résolution. De la même façon que pour les problèmes précédents, nous ferons, dans un second temps, évoluer les variables numériques pour observer les procédures engagées par les élèves dans ces nouvelles situations où la maîtrise des tables uniquement ne permet pas d'apporter la solution du problème, et où la représentation imagée de la situation comme support à la résolution est rendue fastidieuse, voire impossible. Il s'agira également de tenter d'évaluer la possibilité que les problèmes présentant des variables numériques réduites aient permis d'apporter du sens à ce type de problèmes inconnus pour les élèves, et leur permettent ainsi de développer une procédure de résolution pour les problèmes de structure

similaire mettant en jeu des variables plus importantes grâce à leur compréhension des situations plus "simples".

Enfin, précisions que les problèmes de type « ... fois plus, ... fois moins », au-delà du fait qu'ils ne font pas l'objet d'un apprentissage prioritaire dans la résolution de problèmes au CE2, ne constituent pas un apport considérable à notre analyse, du moins sous la forme de situations simples que nous les privilégions dans cette étude. Effectivement, considérons deux exemples aux structures très schématiques : « *A a 4 fois plus de bonbons que B qui en a 6.* » et « *A a 4 fois moins de bonbons que B qui en a 16.* ». Le premier ne présente pas un intérêt nouveau dans la mesure où il se rapproche d'un problème de type multiplication et amène une procédure de résolution similaire, d'autant plus largement induite par l'expression employée : « 4 fois plus ». De la même façon, le deuxième énoncé-type renvoie à un problème de division et entraîne une procédure de résolution proche de celle développée dans le cadre de problèmes de partage ou de groupements : la maîtrise des relations multiplicatives figurant dans les tables est un avantage majeur dans la résolution, peut être supplantée par un dessin figuratif de la situation, mais aucune de ces deux procédures n'est suffisante dans le cas où l'on augmente les variables numériques.

Pour conclure, notons que les tables de multiplication, quelle que soit leur place dans la démarche de résolution, jouent un rôle prépondérant dans la technique opératoire de la multiplication posée.

2. Résolution de problèmes multiplicatifs et calcul mental

Les recherches menées par Butlen et Pezard (1992) mettent en évidence les différents atouts et les limites du recours au calcul mental, domaine dans lequel nous pouvons inclure la restitution des tables de multiplication, dans la résolution de problèmes mettant en jeu des « petits nombres », y compris donc, dans notre cas, les nombres issus du répertoire multiplicatif :

1. Avec de « petits nombres », l'élève peut plus facilement représenter le problème [...]. Nous faisons l'hypothèse que les « petits nombres » permettent de donner du sens à des problèmes plus complexes. Toutefois, il se peut que les stratégies qu'ils induisent ne soient pas forcément pertinentes pour des nombres plus grands.

Cette hypothèse nous a amenés à tester la résistance de procédures et conceptions élaborées avec de « petits nombres » lors du passage à des nombres « plus grands ».

2. Avec de « petits nombres », le recours au calcul mental est plus simple et plus rapide. L'élève peut ainsi explorer, dans un temps assez bref, différentes voies permettant de résoudre le problème. Cette phase de tâtonnement, utilisant le calcul mental, peut être déterminante pour trouver la (ou les) procédures de réussite. (p.344, 345)

L'expérimentation réalisée par les chercheurs, sur une durée de 2 ans et à un niveau de classe de CM2 pour la partie de leurs travaux relative à la résolution de problèmes multiplicatifs,

visé à « tester le poids des variables numériques sur les représentations, procédures et performances des élèves » dans la résolution de problèmes de produit cartésien d'ensembles. Pour des « cardinaux "petits" », les élèves manifestent une volonté d'« exhaustivité » dans leur recherche des « différents cas possibles », qui se traduit donc généralement par une « démarche additive ("paquets par paquets" dans le meilleur des cas) » pour obtenir le produit. Cependant, ces stratégies « ne sont plus valides lors d'une augmentation importante des cardinaux ». Les élèves sont donc amenés, comme anticipé par Butlen et Pezard dans l'extrait ci-dessus, à utiliser les problèmes avec des « petits nombres » pour donner du sens à ces problèmes plus complexes en adoptant une posture réflexive sur la démarche de résolution qu'ils ont engagée : ils doivent « "épurer" les représentations qui sous-tendent cette recherche [*exhaustive*] afin d'en dégager la structure multiplicative », soit « abandonner cette recherche et la généraliser en la traduisant par un produit ou une addition des n premiers nombres ». Ces observations montrent que le développement des procédures de résolution pour un même type de problèmes, et la compréhension de leur structure par les élèves « dépend largement du domaine numérique », autrement dit, « le poids des variables numériques est [...] déterminant ».

3. Conclusion

Ainsi, pour tenter à notre tour d'examiner des postures d'élèves dans la résolution de certains types de problèmes multiplicatifs – retenus pour les raisons exposées précédemment –, en s'intéressant d'une part à l'influence des variables numériques, et d'autre part au lien pouvant exister avec les différents niveaux de maîtrise des tables de multiplication, nous avons constitué un recueil de données composé de :

- deux activités en lien avec les tables de multiplication servant de « test diagnostique » sur la connaissance par les élèves du répertoire multiplicatif, et sa place en tant qu'outil au service de la résolution de problèmes simples ;
- une situation plus complexe de produit de mesures à 3 dimensions prenant la forme d'un pavé, qui accorde toujours aux tables de multiplication un statut d'outil calculatoire, mais qui permet également de (re)construire le sens du concept de la multiplication à travers l'équivalence entre le produit et l'aire d'un quadrillage.

III. Analyse de postures d'élèves dans la résolution de problèmes multiplicatifs

1. Test diagnostique

a. Présentation et déroulement de l'activité

Les deux activités que nous allons décrire ci-dessous nous permettent de vérifier la mémorisation, la mobilisation et la restitution par les seize élèves de CE2 d'une classe à double-niveau CE1/CE2 du répertoire multiplicatif dans le calcul mental automatisé et dans la résolution de problèmes multiplicatifs simples du type « situations de proportion simple, avec présence de l'unité » générant des problèmes de multiplication, de division-partition, de division-quotition, et de type « situations de produit de mesures » à deux dimensions engendrant des problèmes de multiplication.

➤ « Test » de connaissance des tables de multiplication

L'activité de calcul mental sur toutes les tables de multiplication est proposée au groupe classe, sous la forme d'un travail individuel. La tâche des élèves est de donner instantanément le produit de deux nombres entiers naturels inférieurs à 10. Nous avons tout d'abord distribué une feuille de papier à chaque élève sur laquelle ils devaient écrire leur prénom et tracer vingt petits traits les uns sous les autres pour indiquer successivement leurs réponses. Ensuite, nous avons donné la consigne suivante : « Je vais vous dicter des multiplications. Je vous laisse un petit moment pour écrire la réponse et je passe à la suivante. Si vous ne connaissez pas le résultat, vous faites une croix ». Les multiplications dictées sont les suivantes :

3×6	5×2	8×4	6×7	4×9	3×4	8×5	7×7	6×4	9×9
8×7	2×9	8×8	9×6	7×3	8×9	4×5	9×7	6×8	8×4

A l'issue de ce premier « test » sur la maîtrise du répertoire multiplicatif, plusieurs profils d'élèves se dégagent : ceux qui connaissent parfaitement les tables et qui les restituent très rapidement, ceux qui prennent un peu plus de temps pour retrouver le résultat – à partir d'un résultat intermédiaire – et ceux qui donnent une réponse erronée, à cause probablement d'une maîtrise partielle et insuffisante du répertoire multiplicatif.

➤ Résolution de problèmes multiplicatifs "simples"

L'activité de résolution de problème – la deuxième partie de notre « test diagnostique » – est également proposée au groupe classe, et constitue encore un travail individuel. La tâche des élèves est de résoudre différents problèmes donnés uniquement sous forme d'énoncés écrits. Cette activité se déroule en deux phases.

▶ Lors de la première phase (environ 15 minutes), chaque élève reçoit une fiche comportant :

- Deux problèmes « de multiplication » de type « produit de mesures à deux dimensions » dont les énoncés sont :

Problème n°1	<i>Un tableau comporte 9 cases sur la longueur et 7 cases sur la largeur. Combien y a-t-il de cases dans le tableau ?</i>
Problème n°5	<i>Une feuille de cahier a 6 carreaux sur la largeur et 28 carreaux sur la longueur. Combien y a-t-il de carreaux sur la feuille ?</i>

- Sept problèmes « de multiplication » de type « proportion simple avec présence de l'unité » dont les énoncés sont :

Problème n°2	<i>Dans la commode de Charline, il y a 6 rangées de 4 tiroirs. Combien y a-t-il de tiroirs dans la commode ?</i>
Problème n°3	<i>J'ai collé 5 rangées de 8 gommettes. Combien ai-je collé de gommettes ?</i>
Problème n°4	<i>Maman a acheté 3 boîtes de 6 œufs. Combien d'œufs a-t-elle acheté ?</i>
Problème n°6	<i>Dans la bibliothèque de Natan, il y a 5 étagères. Sur chaque étagère, Natan a rangé 15 livres. Combien Natan a-t-il de livres ?</i>
Problème n°7	<i>Un jardinier a planté 9 rangées de 16 salades. Combien de salades a-t-il planté ?</i>
Problème n°8	<i>Dans une tablette de chocolat, il y a 32 carrés. Combien de carrés y a-t-il dans 8 tablettes ?</i>
Problème n°9	<i>La maîtresse a 25 boîtes de 9 feutres sur son étagères. Combien de feutres a-t-elle en tout ?</i>

La consigne est la suivante : « Vous écrivez votre prénom, vous lisez les énoncés et vous répondez juste en dessous du problème au crayon à papier. Vous faites comme si c'était votre brouillon, vous pouvez dessiner, raturer. Vous écrivez une phrase-réponse. »

Le tableau suivant propose une analyse *a priori* succincte des premiers problèmes proposés dans cette activité. En effet, nous allons présenter uniquement les variables didactiques et l'influence de nos choix sur les procédures mobilisables par les élèves et les difficultés possibles.

VARIABLES DIDACTIQUES	PROCEDURES ET DIFFICULTES
Familiarité de l'élève avec le contexte du problème	<p>Difficulté : l'élève n'arrive pas à rentrer dans la résolution du problème car le contexte lui est inconnu.</p> <p><i>Exemples :</i> problème n°1 → les cases d'un tableau ; problème n°2 → les tiroirs d'une commode ; problème n°7 → les rangées de salade, etc.</p>
Forme uniquement textuelle de l'énoncé du problème	Laisser à l'initiative de l'élève la possibilité de simuler par un dessin plus ou moins schématisé l'action évoquée par le problème pour en faciliter sa compréhension ou pour retrouver la structure multiplicative et donner du sens à la multiplication qu'il doit faire.
Le type de problème	Difficultés pour résoudre des problèmes du type « produit de mesures » par rapport aux problème du type « proportion simple ».
<p>La taille des nombres (entiers naturels) :</p> <ul style="list-style-type: none"> - uniquement des nombres à 1 chiffre - un nombre à 1 chiffre et un nombre à 2 chiffres 	<p>Pour des nombres à 1 chiffre :</p> <ul style="list-style-type: none"> • procédure utilisant le support d'un dessin ou d'un schéma • procédure additive : addition itérée <p><i>Exemple :</i> problème n°3 → $8 + 8 + 8 + 8 + 8$</p> <ul style="list-style-type: none"> • procédure multiplicative : calcul mental en utilisant un résultat des tables de multiplication <p><i>Exemple :</i> problème n°3 → 5×8</p> <p>Pour un nombre à 1 chiffre et un nombre à 2 chiffres :</p> <ul style="list-style-type: none"> • procédure utilisant le support d'un dessin ou d'un schéma : possible mais très coûteuse ; • procédures additives : possibles, mais des difficultés relatives au contrôle du nombre d'itérations ainsi que des difficultés lors du calcul de sommes de nombres à 2 chiffres peuvent apparaître. <p><i>Exemple :</i> problème n°8 → $32 + 32 + 32 + 32 + 32 + 32 + 32 + 32$</p> <ul style="list-style-type: none"> • procédure multiplicative en utilisant une technique opératoire posée de la multiplication ou par calcul réfléchi. <p><i>Exemple :</i> problème n°8 → 8×32</p>

Ainsi, pour les problèmes n°1 à 4, nous avons choisi de mettre en jeu des nombres à un chiffre afin de pouvoir apprécier la maîtrise de l'outil tables de multiplication dans la résolution de problème multiplicatif de type « multiplication ». Les cinq problèmes suivants font intervenir des nombres à deux chiffres et d'autres à un chiffre pour inciter les élèves à utiliser différentes procédures de résolution telles que la schématisation (par exemple : reproduction du quadrillage, dessins par paquets, etc.), l'addition itérée, ou encore la technique de la multiplication posée ou le

calcul réfléchi. La modification des variables numériques est pour nous un moyen d'observer chez l'élève l'évolution de sa démarche de résolution en fonction du domaine numérique des données et de leur appartenance ou non aux tables de multiplication, et donc d'évaluer son niveau d'appropriation des tables de multiplication à la fois en tant qu'objet d'apprentissage et outil dans la résolution de problèmes.

Par exemple, considérons un élève qui maîtrise le répertoire multiplicatif et qui n'a besoin d'aucun schéma ou support à la représentation pour résoudre un problème mettant en jeu des nombres figurant dans les tables de multiplication (c'est-à-dire des nombres à un chiffre)⁹. Pour résoudre un problème similaire présentant cette fois-ci des nombres à deux chiffres, il aura peut-être recours à une figuration du problème pour obtenir le produit des deux nombres (qui est la solution du problème) puisqu'il ne relève plus uniquement de sa connaissance des tables de multiplication. Un tel élève peut aussi reconnaître immédiatement la structure du problème – quelles que soient les valeurs numériques – et effectuer directement la multiplication, auquel cas il fera toujours appel à sa connaissance des tables de multiplication, que ce soit dans la restitution d'un produit particulier du répertoire multiplicatif, ou dans le développement de la technique opératoire de la multiplication. Inversement, d'autres élèves peuvent s'appuyer sur des représentations figuratives des problèmes qui leur permettront de résoudre un type de problèmes quel que soit le domaine numérique des données. Plus particulièrement, nous allons tenter de voir si la procédure utilisée par l'élève pour résoudre un problème peut lui permettre de reconstruire certains résultats du répertoire multiplicatif.

► Lors de la deuxième phase (environ 18 minutes), chaque élève reçoit une fiche comportant :

- Trois problèmes de « division-quotition » dont les énoncés sont :

Problème n°10	<i>Il y a 27 élèves dans la classe de CE2. Le maître veut faire des équipes de 9 enfants. Combien va-t-il faire d'équipes ?</i>
Problème n°11	<i>Dans une ferme, les poules ont pondu 57 œufs. Le supermarché les achète par boîtes de 6. Combien de boîtes peut-il acheter ?</i>
Problème n°13	<i>Un fermier élève 124 lapins. Il fabrique de nouveaux clapiers pour loger ses lapins. Dans chaque clapier, il veut mettre 4 lapins. Combien de clapiers doit-il fabriquer ?</i>

- Deux problèmes de « division-partage » dont les énoncés sont :

Problème n°12	<i>Léo a acheté 6 paquets de chewing-gums. Il a compté tous ses chewing-gums et a trouvé 42. Combien y a-t-il de chewing-gums dans un paquet ?</i>
---------------	--

9. Ce profil d'élève est tout à fait répandu dans une telle classe de CE2 en période 4.

Problème n°14

L'épicier range 135 bouteilles de jus de fruit dans 7 rayons. Combien de bouteilles a-t-il rangées dans chaque rayon ?

La consigne donnée est identique à celle de la première phase.

Le tableau suivant propose une analyse *a priori* succincte des problèmes de cette deuxième phase de l'activité, sur le modèle de celle réalisée précédemment :

VARIABLES DIDACTIQUES	PROCEDURES ET DIFFICULTES
<p>La taille des nombres (entiers naturels) :</p> <ul style="list-style-type: none"> - un nombre à 1 chiffre et un nombre à 2 chiffres - un nombre à 1 chiffre et un nombre à 3 chiffres 	<p>Pour un nombre à 1 chiffre et un nombre à 2 chiffres :</p> <ul style="list-style-type: none"> • procédure utilisant le support d'un dessin ou d'un schéma : l'élève a besoin d'asseoir sa compréhension du problème ou il ne maîtrise pas suffisamment ses tables de multiplication pour voir directement le lien entre les nombres en jeu dans le problème. <p><i>Exemple :</i> problème n°12 → les nombres étant 6 et 42, l'élève peut reconnaître la structure multiplicative : $6 \times 7 = 42$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • procédure par additions « pas à pas » ou soustractions « pas à pas » <p><i>Exemple :</i> problème n°10 → $9 + 9 + 9 = 27$ ou $27 - 9 = 18$, $18 - 9 = 9$, $9 - 9 = 0$.</p> <p>Remarque : ce type de procédures est difficile à mettre en œuvre pour les problèmes de type « partition ».</p> <ul style="list-style-type: none"> • procédure multiplicative : l'élève cherche à résoudre une équation du type $a \times x = b$, c'est-à-dire à effectuer une "multiplication à trou". La principale difficulté réside dans l'existence ou non d'un reste non nul. <p><i>Exemples :</i> problèmes n°10 et 12 → les nombres 27 et 42 sont des produits du répertoire multiplicatif, l'élève doit mobiliser ses connaissances sur les tables pour résoudre le problème en restituant : $9 \times 3 = 27$ (n°10) et $6 \times 7 = 42$ (n°12).</p> <p>problème n°11 → l'élève doit trouver dans la table de 6 le plus grand produit inférieur à 57 c'est à dire : $54 = 6 \times 9$, et interpréter les trois éléments de cette relation pour répondre à la question du problème.</p> <p>Pour un nombre à 1 chiffre et un nombre à 3 chiffres :</p> <ul style="list-style-type: none"> • procédure utilisant le support d'un dessin ou d'un schéma : impossible (du moins avec les contraintes temporelles imposées) • procédure par additions « pas à pas » ou soustractions « pas à pas » • procédures multiplicatives : <ul style="list-style-type: none"> - essais de multiples successifs du diviseur <p>La procédure peut apparaître fastidieuse si l'élève commence</p>

	<p>son exploration « trop bas ».</p> <p><i>Exemple</i> : problème n°13 $\rightarrow 4 \times 11 = 44 ; 4 \times 12 = 48$ etc. jusqu'à 124.</p> <p>- essais par approches successives</p> <p><i>Exemple</i> : problème n°13 $\rightarrow 4 \times 30 = 120 ; 4 \times 35 = 140 ;$ etc.</p> <ul style="list-style-type: none"> • procédures mixtes : l'élève utilise la multiplication et la soustraction. <p><i>Exemple</i> : problème n°14 $\rightarrow 7 \times 15 = 105 ; 135 - 105 = 30 ; 7 \times 4 = 28 ; 30 - 28 = 2$. Le quotient est donc : $15 + 4 = 19$, et le reste est égal à 2.</p> <ul style="list-style-type: none"> • utilisation de la division
L'existence ou non d'un reste non nul	Difficultés pour interpréter les calculs.

Ainsi, les problèmes n°10 à 12, qui présentent des nombres relevant du répertoire multiplicatif, vont nous permettre d'évaluer le niveau de connaissance des tables de multiplication des élèves dans la mesure où ils doivent être capable de répondre aux questions du type : *Combien de fois 8 dans 48 ?* ou *Combien de fois 8 dans 50 ?* Dans le cas où l'élève ne parvient pas à restituer instantanément la réponse, il a également la possibilité de procéder à une schématisation figurée du problème par exemple, qui lui permettra de retrouver le résultat. Les deux problèmes suivants vont, quant à eux, induire le réinvestissement des tables en tant qu'outil pour extrapoler le raisonnement avec un dividende supérieur à 100.

Cette catégorie de problèmes constitue une nouveauté pour ces élèves de CE2 qui n'ont pour l'instant étudié en classe que les problèmes de type multiplication. Ce fait nous laisse penser que les procédures que nous allons pouvoir observer vont considérablement évoluer entre les deux sous-catégories de problèmes distinguées par le domaine numérique des données : si les trois premiers problèmes peuvent être résolus grâce à une bonne maîtrise des tables de multiplication, cette dernière est insuffisante pour résoudre les deux problèmes suivants qui risquent donc de poser des difficultés plus importantes. L'introduction de telles valeurs numériques constitue un obstacle à la procédure de représentation par dessin ou schéma de la situation. Ainsi, les procédures pouvant être développées par ces élèves pour résoudre le problème – sans faire appel à l'opération experte de division – sont composées d'une succession de calculs (qui relèvent de l'addition, la soustraction, la multiplication ou de plusieurs de ces opérations) effectuée par tâtonnement mettent en jeu des raisonnements si complexes et/ou fastidieux qu'ils peuvent pousser les élèves à les abandonner.

b. Analyse de productions d'élèves

Le tableau suivant synthétise les différents niveaux de connaissance des tables de multiplication suite à notre « test » de calcul mental. Nous distinguons trois profils d'élèves : ceux qui maîtrisent (relativement) le répertoire multiplicatif dans son ensemble, ceux pour qui l'apprentissage est encore en cours, et donc la restitution s'avère fragile ou aléatoire, et enfin, ceux qui ne maîtrisent pas les tables de multiplication, et donc qui manifestent un niveau d'apprentissage insuffisant pour cette période de l'année.

Niveaux de maîtrise	Répertoire maîtrisé dans l'ensemble	Répertoire partiellement maîtrisé	Répertoire non maîtrisé
Critères	1 ou 2 erreurs parmi les produits considérés comme difficiles (tables de 7, 8, 9)	- de 3 à 5 erreurs et de nombreux résultats retrouvés par "tâtonnement" (ratures, erreur à l'unité près, ...) - de 6 à 9 erreurs	Plus de 10 erreurs
Nombre d'élèves (total : 16)	2 élèves	11 élèves	3 élèves

De la même façon, nous résumons dans le tableau suivant les différents types de procédures qui sont apparues dans la résolution de ces problèmes multiplicatifs au sein de la classe (1^{ère} colonne) en fonction du numéro du problème (1^{ère} ligne) ; au croisement est indiqué le nombre d'élèves concernés.

▶ 1 ^{ère} phase : Problèmes de type multiplication									
	n°1	n°2	n°3	n°4	n°5	n°6	n°7	n°8	n°9
Addition (au lieu de multiplication)	7				1				
Dénombrement / erreur	1				1				
Addition itérée / juste		1				1			
Addition itérée / erreur	1			1					
Multiplication immédiate / juste	4	12	13	12	6	9	9	9	11
Multiplication immédiate / erreur de table	3				4		1	4	
Multiplication immédiate / erreur dans la technique opératoire ou dans l'addition					1	2	1	1	1
Figuration (dessin, schéma,...) / juste		2	3	3		3			
Figuration (dessin, schéma,...) / erreur					1	1	1		
Autres (calculs difficiles à interpréter, erreurs de données...)		1			1		3		1
Pas de réponse					1		1	2	3

▶ 2 ^{ème} phase : Problèmes de type division (quotition/partition)					
	n°10	n°11	n°12	n°13	n°14
Réponse uniquement / juste	3		1		
Réponse uniquement / erreur de table		2			
Addition (au lieu de division ou multiplication "à trou")					1
Soustraction (au lieu de division ou multiplication "à trou")	2	2	2	2	
Soustractions successives / juste				1	
Soustractions successives / pas de réponse claire		1			
Soustractions successives / erreur de calcul				1	
Multiplication (au lieu de division ou multiplication "à trou")	1	7	4	3	1
Multiplication "à trou" / juste	1				
Multiplication "à trou" / erreur dans la réponse (mauvaise interprétation du calcul effectué)			2		
Figuration (dessin, schéma,...) / juste	3	1	2		
Figuration (dessin, schéma,...) / erreur	1				
Autres (calculs difficiles à interpréter, erreurs de données...)			1		
Pas de réponse	5	3	4	9	14

Après la correction de la fiche de calcul mental et l'observation des procédures de résolution des problèmes des élèves de la classe, nous avons donc retenu quelques élèves aux profils significatifs (ou singuliers) à qui nous allons faire vivre la situation plus complexe de produit de mesures à trois dimensions présentée ci-dessous. En effet, pour répondre au mieux à notre problématique, il nous a paru intéressant de choisir des élèves à des stades différents dans l'apprentissage du répertoire multiplicatif et à des niveaux hétérogènes dans la résolution de problèmes multiplicatifs. C'est pourquoi nous nous sommes attardées sur les élèves suivants :

• **Laurent** (voir annexe n°3.a) :

- ne maîtrise pas le répertoire multiplicatif dans son intégralité : les six erreurs qu'il réalise – qui sont recensées dans le tableau ci-dessous – manifestent une connaissance encore partielle des produits difficiles essentiellement :

Produits dictés	3×6	6×7	4×9	7×7	8×7	8×8
Réponses	-	-	-	36	-	74

- s'il effectue de manière erronée une addition pour le premier problème (de type quadrillage), il présente par ailleurs des procédures expertes de résolution de problèmes de type multiplication,

mais on relève des erreurs de calculs (problèmes n°5 et 6), notamment une « erreur de table » pour 8×6 dans la multiplication posée de la façon suivante :

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 28 \\ \hline \end{array}$$

- pour résoudre les problèmes de type division-quotition et division-partition mettant en jeu des nombres à un chiffre et des nombres à deux chiffres (produits du répertoire multiplicatif pour les problèmes n°10 et 12), il semble se baser uniquement sur la restitution des produits des tables de multiplication puisqu'il indique directement une phrase-réponse sans justifier sa démarche ou ses calculs. De plus, ces trois problèmes font appel à la connaissance des tables de 9 et 6^{10} qui semblent poser encore quelques difficultés de mémorisation à Laurent. En effet, s'il parvient à résoudre correctement les problèmes 10 et 12 qui demandent de mobiliser les produits 9×3 (qui figure donc dans la table de 3 également) et 6×7 , il fournit une réponse trop approximative pour le problème n°11 (il indique 7 au lieu de 9). Pourtant, on peut remarquer que lors du test de calcul mental, il restitue de manière exacte le produit correspondant à 9×6 (et même celui égal à 6×8), et par ailleurs, il ne donne pas de réponse pour 6×7 . Enfin, pour résoudre le problème n°13 qui fait intervenir un nombre à trois chiffres (hors du répertoire multiplicatif), il utilise une procédure de résolution soustractive « pas à pas », mais une erreur de calcul et une mauvaise gestion et interprétation de cette succession de soustractions le conduisent à une mauvaise réponse au problème. Cependant, on peut souligner le caractère avancé de sa démarche : après avoir soustrait 4 à 124, et cela pendant 6 fois, il réalise des soustractions « groupées », c'est-à-dire qu'il soustrait directement un multiple de 4 (à savoir 24) aux différences partielles. Cet ajustement intermédiaire manifeste le développement d'un schème de résolution mêlant soustractions et multiplications (pour trouver un multiple du diviseur, en général mentalement) pour effectuer une opération de division.

Suite à cette brève analyse, on peut formuler une hypothèse sur l'origine de cette instabilité du répertoire multiplicatif. En effet, lors du test de calcul mental, Laurent restitue correctement les produits 6×8 et 9×6 énoncés dans cet ordre. Mais dans la résolution des problèmes n°5 et 11, il n'est pas capable de mobiliser ces deux mêmes produits en utilisant en acte la propriété de commutativité de la multiplication : pour le problème n°5, il est amené, par la façon singulière dont il pose la multiplication, à restituer le produit de 8×6 , et pour le problème n°11, il doit trouver le

10. Plus précisément, ils font appel à la capacité à restituer un facteur d'une multiplication figurant dans ces tables (problème n°10 : $27 = 9 \times \dots$; problème n°12 : $42 = 6 \times \dots$) ou à s'approcher le plus possible d'un produit de ces tables et donner comme solution au problème le facteur différent de 6 (problème n°11 : l'élève recherche dans la table de 6 le produit directement inférieur à 57, soit 54 et doit résoudre : $54 = 6 \times \dots$).

facteur manquant dans la multiplication « à trou » : $54 = 6 \times \dots$. Dans les deux cas, il fournit des réponses erronées.

• **Maëlys** (voir annexe n°3.b) :

- ne maîtrise pas le répertoire multiplicatif, surtout les produits "difficiles" :

Produits dictés	6×7	4×9	7×7	6×4	9×9	8×7	8×8	8×9	9×7	6×8	8×4
Réponses	-	45	47	20	54	-	-	54	54	-	36

- pour le problème n°1, elle fait partie des quelques élèves qui ont effectué une multiplication face à ce problème de quadrillage, mais elle fait une première erreur de table en indiquant 54 comme produit de 9×7 , résultat qui aurait pourtant pu être vérifié (par dénombrement notamment) grâce à la représentation du quadrillage qu'elle a réalisée sur sa copie par une procédure de schématisation du problème.

- pour les autres problèmes de type multiplication, elle reconnaît également l'opération en jeu (sans doute fortement suggérée par le contrat didactique), mais commet quelques erreurs dans la restitution de produits des tables (problèmes n°5 et 8 notamment).

- d'ailleurs, pour le premier problème de division, elle commence par poser une multiplication, qu'elle n'effectue pourtant pas ; peut-être abandonne-t-elle le calcul car elle est peu convaincue de l'adéquation de cette opération avec la situation. En effet, elle paraît de la même façon quelque peu désarçonnée face aux problèmes suivants pour lesquels elle ne rend compte d'aucun raisonnement.

• **Lola** (voir annexe n°3.c) :

- ne maîtrise le répertoire multiplicatif que de manière aléatoire : elle commet 5 erreurs lors du test de calcul mental, aussi bien pour des produits considérés comme "faciles" (table de 3 notamment) que d'autres plus "difficiles" (table de 9 par exemple) :

Produits dictés	4×9	3×4	8×7	9×6	6×8
Réponses	42	16	54	56	54

- pour le problème n°6, elle effectue une multiplication (posée de façon inhabituelle, tout comme Laurent et d'autres élèves de cette classe) mais elle fait une première erreur de table en indiquant 60 comme produit de 5×15 , résultat qui aurait pourtant pu être vérifié (par dénombrement notamment) grâce à la schématisation tout à fait personnelle de la situation qu'elle a réalisée sur sa copie. En effet, pour représenter les 5 étagères contenant chacune 15 livres, elle les dessine verticalement et les subdivise en 3 niveaux de 5 livres. Pourtant, elle ne paraît pas utiliser dans sa

procédure calculatoire cette représentation étant donné qu'elle pose la multiplication et fournit un résultat erroné (elle semble effectuer $5 + 5$ au lieu de 5×5 dès le premier calcul partiel de la multiplication posée).

- pour les autres problèmes de type multiplication, elle reconnaît l'opération à effectuer (sauf pour le problème n°1 où elle a recours à une addition).

- enfin, pour les problèmes de division, Lola présente une démarche basée sur la représentation figurative des différentes situations qui lui permet d'obtenir les solutions des problèmes faisant intervenir des valeurs numériques suffisamment petites pour développer une procédure exclusivement imagée. D'ailleurs, les problèmes suivants, qui contiennent des données numériques trop importantes pour être représentées par un dessin lui posent des difficultés qu'elle ne parvient pas à dépasser : elle ne répond pas au problème n°13 et effectue une multiplication au problème n°14 (sans doute par une extrapolation de la situation dès le début de l'énoncé puisque l'opération de partage n'est suggérée que dans les deux derniers mots de la question du problème : *L'épicier range 135 bouteilles de jus de fruit dans 7 rayons. Combien de bouteilles a-t-il rangées dans chaque rayon ?*).

• **Eléa** (voir annexes n°3.d) :

- ne maîtrise pas le répertoire multiplicatif : elle n'est pas capable de restituer 13 produits lors du test de calcul mental :

Produits dictés	8×4	6×7	4×9	7×7	6×4	9×9	2×9	8×8	9×6	7×3	8×9
Réponses	-	-	-	-	16	82	27	-	63	-	-
Produits dictés	9×7	8×4									
Réponses	-	-									

- présente des difficultés face aux problèmes de quadrillage (problèmes n°1 et 5) ;

- pour résoudre le problème n°2, elle reconstruit le sens de la multiplication par addition itérée (elle fait figurer la somme puis la « traduit » en une expression multiplicative). On peut supposer qu'elle prend ainsi conscience du fait que sont proposées des situations multiplicatives dans ce corpus puisqu'elle effectue directement des multiplications – sans passer à nouveau par l'addition itérée – pour tous les autres problèmes, y compris la situation de division-quotition du problème n°11 (seul problème de division pour lequel elle propose une solution).

Ainsi, si Laurent et Lola ne maîtrisent pas l'intégralité du répertoire multiplicatif, ils présentent des capacités en résolution de problèmes tout à fait intéressantes : l'un se rapproche des

procédures expertes, et l'autre développe une démarche personnelle de représentation figurée des problèmes qui semble lui permettre d'« asseoir » sa compréhension de la situation et de constituer un support complémentaire au développement d'une procédure calculatoire (et non de dénombrement) en s'appropriant le contexte pour les problèmes de type multiplication. En ce qui concerne les problèmes de division en revanche, cette procédure imagée constitue cette fois un support exclusif à la résolution du problème en réalisant des groupements des éléments dessinés. Par ailleurs, Maëlys et Eléa présentent toutes les deux une connaissance très insuffisante des tables de multiplication. Cependant, Eléa semble s'appuyer sur le sens « addition itérée » de la multiplication pour reconnaître cette opération.

2. La situation du pavé en morceaux de sucre

a. Présentation et analyse *a priori* de la situation

Après avoir mesuré la place des tables de multiplication en tant qu'outil au service de la résolution de problèmes multiplicatifs simples, nous avons souhaité élaborer une situation plus complexe permettant de donner du sens au répertoire multiplicatif à travers le concept de multiplication, situation de référence qui apparaîtrait donc au service de la reconstruction des tables de multiplication.

Lors de notre stage en responsabilité, nous avons eu l'occasion de conduire une classe à double niveau CE1/CE2 jusqu'à la fin de la période 4. Nous avons donc fait vivre à un groupe de 4 élèves¹¹ de CE2 une situation posant un problème de type multiplicatif par l'intermédiaire d'un support spécifique : un pavé droit constitué d'un certain nombre de morceaux de sucre, et dont les trois dimensions sont différentes. Cette activité a fait suite à un travail régulier sur la notion de multiplication (à travers les tables de multiplication, la résolution de problèmes multiplicatifs, ou encore la technique opératoire de la multiplication), mais aussi à une séquence sur les solides qui, ancrée dans les programmes nationaux de l'école primaire de 2008, a permis aux élèves d'étudier plus précisément le cube et le pavé. Ainsi, l'étude de cette situation a fait l'objet d'une séance située en toute fin de période 4 (début avril), marquant de ce fait – d'après la progression en mathématiques établie par l'enseignant titulaire de la classe – l'aboutissement de deux séquences d'enseignement en lien avec le choix de ce support : pour le domaine numérique, l'apprentissage d'une première partie du « champ conceptuel » (Vergnaud, 1996) de la multiplication (la

11. En effet, nous avons privilégié une étude focalisée sur un nombre restreint d'élèves afin de pouvoir optimiser et approfondir l'analyse de leur posture, notamment en ménageant des moments de verbalisation privilégiés avec ces quelques élèves.

composante des problèmes multiplicatifs étant réduite aux problèmes de type « multiplication »¹²), et pour le domaine géométrique, l'étude des solides.

Notre choix d'introduire ce support de pavé composé de morceaux de sucre a été motivé par plusieurs faits, notamment l'intérêt que nous portons pour la représentation quadrillage dans la résolution de problèmes multiplicatifs en lien avec l'apprentissage des tables de multiplication (Olive & Valls, 2011). Rappelons que nous entendons par « quadrillage » tout réseau de droites perpendiculaires subdivisant une surface rectangulaire en plusieurs rectangles identiques. Ce type de représentation peut jouer un rôle différent dans l'élaboration de la procédure de résolution selon le niveau d'appropriation des différentes dimensions du champ conceptuel de la multiplication par les élèves. D'une part, le quadrillage peut constituer une aide à la reconstruction du répertoire multiplicatif des tables par la méthode d'addition itérée qu'elle induit chez des élèves n'ayant pas intégré cette configuration comme une situation de référence du champ conceptuel de la multiplication. Mais d'autre part, il peut suggérer à des élèves ayant saisi l'enjeu de ce type de configuration la méthode experte de résolution de ce problème de type multiplication, qui n'aboutira que si les élèves maîtrisent leur répertoire multiplicatif. C'est pourquoi nous souhaitons introduire la représentation quadrillage dans cette situation. De plus, notre volonté de travailler en trois dimensions s'inscrit dans la continuité du premier recueil de données qui a déjà été l'occasion pour les élèves de rencontrer des problèmes de type quadrillage (en deux dimensions). L'introduction de la troisième dimension présente de nombreux avantages, outre celui d'apparaître comme un approfondissement de l'étude de cette configuration. Effectivement, le problème posé aux élèves est ainsi contenu dans le support du pavé, et la résolution de cette situation réelle doit se faire par l'observation et la manipulation de ce support : ils doivent rechercher le nombre de morceaux de sucre qui constituent ce pavé – sans en altérer l'aspect physique (ils ne peuvent pas le décomposer ou le désintégrer). Or, le raisonnement permettant de dénombrer les morceaux d'une surface quadrillée ne peut être étendu à un volume que si l'élève donne du sens à la multiplication employée comme procédure experte de dénombrement de ces morceaux qui constituent la surface quadrillée ; c'est l'extrapolation de ce sens qui lui permettra de mettre en œuvre la procédure experte pour obtenir le nombre total de morceaux de sucre contenus dans le pavé perçu comme la juxtaposition de surfaces quadrillées. Il est nécessaire de noter que la mise en place de cette procédure experte repose sur bien d'autres conditions que la compréhension unique du sens

12. D'après la terminologie employée dans l'ouvrage *Situations multiplicatives, problèmes de multiplication et de division* (2011) paru dans la collection « Outils pour les cycles ».

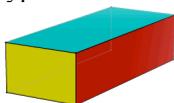
En effet, la division dans ses multiples dimensions (technique opératoire, problèmes de division-groupement, de division-partage, etc.) fera l'objet des apprentissages numériques de la période 5 d'après la progression établie pour la classe.

quadrillage de la multiplication, notamment la capacité à se représenter le pavé comme un solide « plein » c'est-à-dire à prendre en compte les morceaux non visibles.

Cependant, les élèves peuvent percevoir ce pavé de plusieurs manières menant à des stratégies de résolution différentes – nous aurons l'occasion d'approfondir ce point plus tard – qui permettent toutes de donner du sens à la notion de multiplication. C'est dans cette mesure que s'inscrit cette situation dans notre problématique : cette représentation du pavé permet de lier la maîtrise du répertoire des tables de multiplication à la compréhension intrinsèque de la notion de multiplication à travers ses différents sens, et représente ainsi un support privilégié pour analyser la manifestation de cette dialectique entre résolution de problèmes multiplicatifs et apprentissage des tables de multiplication. En effet, ce support pavé induit plusieurs procédures dépendant de l'unité d'observation choisie : on peut percevoir le pavé comme la réunion de morceaux de sucres, ou comme la juxtaposition de « plaques » de morceaux de sucres (c'est-à-dire de quadrillages en deux dimensions), l'« unité plaque » étant elle-même variable : il peut s'agir de trois plaques différentes¹³ selon le point de vue adopté. De plus, dans cette conception du pavé comme accollement de plusieurs « plaques » de morceaux de sucre, la recherche du nombre de morceaux sur une « plaque » revient à résoudre des problèmes de type quadrillage en deux dimensions, et on retrouve alors les trois démarches possibles pour ce dénombrement : compter tous les morceaux d'une face, effectuer une addition itérée par ligne ou par colonne, ou faire appel au répertoire multiplicatif en réalisant une multiplication. Puis, pour calculer le nombre total de morceaux à partir du nombre de morceaux dans une « plaque », la stratégie opératoire mise en œuvre peut varier de la même façon : il est possible de raisonner par addition itérée, ou d'employer la méthode experte qui consiste à effectuer une multiplication. Nous reviendrons ultérieurement de manière détaillée sur les différentes procédures que l'on peut anticiper face à ce problème.

Cette situation fait donc appel à de nombreuses compétences dans la résolution de problèmes numériques¹⁴, en lien avec différents domaines des mathématiques, comme le résume le tableau suivant, qui rassemble les instructions des programmes nationaux de 2008 en terme d'apprentissages mathématiques en CE2 :

13. Ces « plaques » correspondent aux trois types de faces rectangulaires différentes du pavé :



14. L'objectif géométrique d'approfondissement de la perception (physique et mentale) en géométrie spatiale, et notamment l'enjeu de ce type de situation pour la construction du sens des « formules » de calcul de volume dans les apprentissages futurs ne font pas l'objet de notre étude dans le cadre de ce mémoire. Cependant cette situation alimente ces connaissances du domaine géométrique et du domaine grandeurs et mesures.

Nombres et calcul	<i>Calcul sur des nombres entiers</i>	« Mobiliser les tables [...] de multiplication » « Effectuer un calcul posé : [...] multiplication »
	<i>Problèmes</i>	« Résoudre des problèmes portant sur [la multiplication] [...] »
Organisation et gestion de données	« Savoir organiser les données d'un problème en vue de sa résolution. »	

Ces compétences visées doivent être mobilisées pour optimiser les chances de réussite dans la résolution de ce problème, mais ce dernier ne constitue en aucun cas une occasion de les introduire : il s'agit d'une situation de réinvestissement et d'approfondissement par la confrontation à un problème multiplicatif complexe. Notre objectif dans l'analyse des procédures mises en œuvre par les élèves ne réside pas (uniquement) dans l'évaluation de leur réussite, mais dans la mobilisation de ces compétences en référence à leur niveau de maîtrise du répertoire multiplicatif et de compréhension de la notion de multiplication. Nous allons tenter d'estimer dans quelle mesure cette situation va permettre d'apporter du sens au répertoire multiplicatif, en lien avec la construction du sens de la notion de multiplication, et inversement, dans quelle mesure la mobilisation du répertoire multiplicatif associée à une maîtrise de la notion de multiplication va permettre de résoudre ce problème.

Cette situation, nous l'avons dit, est proposée dans le but de recueillir des données destinées à être analysées dans une démarche d'observation ponctuelle de postures d'élèves de CE2 en fin d'apprentissage de la notion de multiplication. Elle n'a donc pas pour ambition première d'apporter des connaissances nouvelles aux élèves, même si la phase de mise en commun et d'explicitation des démarches constitue un moment privilégié dans le partage et l'appropriation de méthodes de résolution. Elle ne fait pas suite à une séquence d'enseignement particulière visant l'élaboration de procédures spécifiques devant être mises en œuvre face à ce problème : cette situation, même si elle s'inscrit dans la cohérence de la progression de la classe, est proposée en « décroché » des activités habituelles.

Les modalités de mise en œuvre de la séance sont résumées dans la fiche de préparation conçue dans cette optique (*voir annexe n°4*). Elle se décline en plusieurs moments : après une phase de présentation de la situation et du pavé par l'enseignant destinée à favoriser l'appropriation du problème par les élèves, ces derniers s'engagent dans une phase de recherche individuelle grâce à la consigne suivante : « Vous avez quinze minutes pour répondre tout seul à la question du problème qui est : "*Combien y a-t-il de morceaux de sucre dans ce pavé ?*". Vous pouvez utiliser les morceaux de sucre qui sont devant vous, vous pouvez dessiner ou écrire sur votre feuille de brouillon. Vous répondez ensuite à la question et vous nous expliquerez oralement, chacun votre tour, comment vous avez procédé. ». La séance se poursuit par une phase collective de mise en

commun des résultats, et se termine par leur validation collective par décomposition du pavé par « plaques » successives réalisée par les élèves et étayée par l'enseignant pour mettre en évidence le sens de ce découpage par « plaques », et ainsi construire le sens de la multiplication comme procédure experte – nous reviendrons sur la question de la validation plus bas dans cette analyse.

Pour résoudre ce problème, les élèves disposent d'un pavé formé de 7 morceaux de sucre dans la longueur, 3 dans la hauteur et 5 dans la profondeur. De plus, une fiche rappelant le problème et sa consigne (*voir annexe n°5*) constitue à la fois leur brouillon et leur fiche-réponse. Le pavé sera déposé sur la table de la même façon qu'il figure sur la fiche : posé sur la plaque de 7×3 morceaux. Enfin, on laisse aux élèves la possibilité de manipuler à leur gré des morceaux de sucre (mobiles) qui sont à leur disposition pour construire les éléments qu'ils souhaitent, en quantité suffisante pour que chaque élève puisse reconstituer le pavé dans son intégralité.

Le problème posé par cette situation réside dans le fait que le pavé, lui, ne peut être déconstruit¹⁵ : les élèves ne peuvent donc pas visualiser – et encore moins compter – les morceaux qui sont « cachés à l'intérieur » des faces. Cette contrainte constitue un obstacle majeur dans la représentation du problème chez des élèves novices en géométrie dans l'espace – qui ont peu l'habitude de manipuler des représentations spatiales –, mais également dans la mise en œuvre de procédures qui seraient peu appropriées telles que le comptage un par un. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi d'introduire cette **variable** de la situation : nous avons souhaité empêcher le développement de procédures de dénombrement par comptage un par un qui sortiraient du cadre du champ conceptuel de la multiplication. Cependant, pour permettre aux élèves de dépasser cet obstacle et limiter le niveau d'abstraction induit par cette contrainte, on ajoute une nouvelle variable abordée plus haut qui est la manipulation possible de morceaux de sucre ; on laisse ainsi les élèves libres de reconstruire le pavé dans sa réalité physique. Par ailleurs, au delà de ces deux variables, la quantité de morceaux de sucre pour chacune des dimensions du pavé d'une part, et la quantité totale de morceaux contenus dans le pavé d'autre part constituent des variables numériques considérables. En effet, nous nous intéressons à la dialectique existant entre résolution de problèmes multiplicatifs et apprentissage des tables de multiplication, c'est pourquoi nous avons choisi des quantités de morceaux pour chaque dimension (longueur, hauteur, profondeur) comprises entre 2 et 9 afin d'imposer la mobilisation du répertoire des tables pour le calcul du nombre de morceaux contenus dans une face. Même au sein de ce répertoire, le choix du nombre de morceaux par dimension représente une première variable : nous savons, autant dans la profession que dans la recherche, que des produits tels que 8×9 ou 6×7 ne sont pas aussi facilement et rapidement disponibles que d'autres comme 3×4 , ou encore que le résultat de 9×4 est plus difficilement

15. Les morceaux de sucre sont collés par plaques de 7×3 maintenues grâce à de l'adhésif double-face.

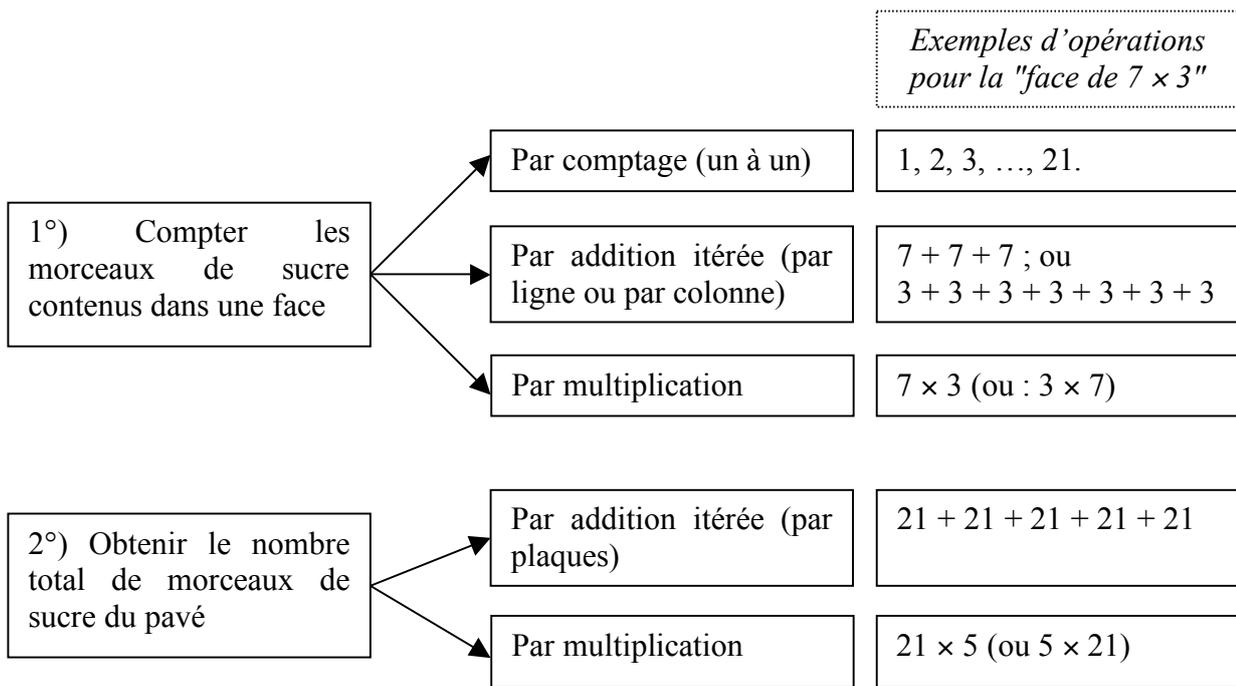
récupérable en mémoire que celui de 6×6 bien qu'étant égaux ! Compte tenu de ces généralités relatives à l'apprentissage des tables, nous avons opté pour un pavé de $7 \times 3 \times 5$ afin de pousser les élèves à mobiliser des produits plus difficilement disponibles – car moins automatisés – que d'autres produits appartenant aux tables de multiplication de 2 ou 10 (par exemple) qui pourraient solliciter des procédures relevant du calcul mental que nous ne cherchons pas à faire émerger. En effet, imaginons un pavé de $7 \times 2 \times 5$: l'élève expérimenté qui établit cette multiplication comme opération experte permettant d'obtenir le résultat l'effectue en récupérant rapidement en mémoire le résultat de 2×5 et le multiplie mentalement par 7 pour obtenir 70 sans mise en place d'une technique opératoire posée. En revanche, nous ne souhaitons pas non plus poser une difficulté supplémentaire à la résolution en ne proposant que des valeurs numériques qui posent problème dans l'apprentissage du répertoire multiplicatif comme 6, 7, 8 ou 9. D'autant plus que pour obtenir le nombre total de morceaux de sucre, il est nécessaire de poser la multiplication d'un nombre à deux chiffres issu du répertoire multiplicatif (21 ; 35 ou 15 selon la multiplication effectuée : respectivement 7×3 ; 7×5 ou 3×5) par un nombre à un chiffre (respectivement 5 ; 3 ou 7), et donc de mobiliser les produits figurant dans la table de ce multiplicateur, au-delà de la maîtrise de la technique opératoire de la multiplication.

Avec de telles variables, on peut envisager différents types de **procédures** de la part des élèves pour résoudre ce problème, comme nous l'avons rapidement énoncé plus haut. La procédure la moins élaborée – en terme de procédure calculatoire du moins – consiste à reconstruire le pavé grâce aux morceaux de sucre disponibles puis à compter ces morceaux. Une variante quelque peu améliorée peut consister à réaliser ce comptage par groupements, de 10 par exemple. Outre cette démarche de dénombrement, les autres procédures pouvant être développées font appel à la notion de multiplication, même si la technique de calcul employée peut se restreindre à une opération d'addition itérée. En effet, le deuxième type de procédures, plus évolué, consiste, nous l'avons dit, à calculer le nombre de morceaux sur une face, puis à le multiplier par le nombre de morceaux contenus dans la dimension restante. Pour ce faire, plusieurs stratégies sont possibles. L'élève peut simplement compter le nombre peu élevé de morceaux contenus dans la face. Il est aussi possible de considérer les dimensions une par une et de réaliser des additions itérées. Par exemple, l'élève peut percevoir la face de 3×7 morceaux comme l'accolement de 3 rangées de 7 morceaux et va donc effectuer une addition réitérée 3 fois de 7 morceaux : il ne récupère pas en mémoire le produit mais calcule $7 + 7 + 7$. De la même façon, il va ensuite calculer $21 + 21 + 21 + 21 + 21$ pour trouver le nombre total de morceaux du pavé perçu comme l'accolement successif de 5 « plaques » de 21 morceaux. On soulignera que cette conception du pavé, si elle est dans ce cas associée à une

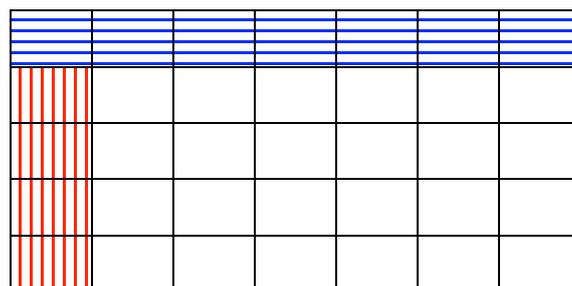
stratégie calculatoire débutante, est commune à la mise en place de toute procédure multiplicative jusqu'à la procédure experte. Un deuxième niveau dans la démarche calculatoire de ce type de procédures réside dans la mobilisation du répertoire multiplicatif pour le calcul du nombre de morceaux sur une face.

On peut néanmoins imaginer que des élèves ayant fait appel à leur connaissance des tables de multiplication pour effectuer ce calcul mettent en place le même procédé d'addition itérée pour obtenir le nombre total de morceaux dans le pavé, et ce pour éviter la technique opératoire de la multiplication posée. En effet, la procédure experte consiste à récupérer rapidement en mémoire le produit correspondant au nombre de morceaux sur une face, puis à le multiplier par le nombre de morceaux contenus dans la dimension restante sous forme d'une multiplication posée. Nous n'avons présenté ici que les différentes modalités de calcul, sans aborder la question stratégique du choix des couples de nombres pour effectuer ces calculs. D'un point de vue calculatoire, il paraît effectivement plus pertinent d'effectuer 3×7 ou 5×7 dans un premier temps afin de simplifier le calcul suivant : respectivement 21×5 ou 35×3 , plutôt que, par appréhension, commencer par effectuer le calcul le plus "facile", c'est-à-dire 3×5 , et aboutir de façon contradictoire à une multiplication posée pouvant paraître plus délicate : 15×7 . Par ailleurs, si l'on peut noter que les élèves pourraient calculer le produit d'un nombre à deux chiffres par un nombre à un chiffre par une procédure de calcul mental basée sur l'outil implicite de la distributivité, il faut cependant préciser que les 17 élèves de CE2 de cette classe, et plus précisément les 5 élèves qui se prêtent à la situation, n'ont pas encore développé les capacités nécessaires pour mettre en place de telles démarches. En effet, à travers le travail de systématisation de la technique opératoire de la multiplication auquel nous avons assisté et que nous avons mené, ainsi que par le biais d'un « test » de connaissance des tables de multiplication que nous avons proposé dans le cadre de notre premier recueil de données, nous avons pu apprécier le niveau de compétences calculatoires des élèves pour effectuer des multiplications, et constater qu'il n'a pas encore atteint un seuil suffisant pour développer des procédures spécifiques du calcul mental dans le domaine multiplicatif.

On peut résumer les procédures multiplicatives permettant de résoudre ce problème de la manière suivante :



Outre les **erreurs** dites « de tables » ou les erreurs de calcul dans la technique opératoire au sein de procédures correctes, on peut anticiper des procédures erronées qui mèneraient à un résultat inexact. On peut par exemple supposer que des élèves vont être gênés par l'impossibilité de visualiser les morceaux situés « à l'intérieur » du pavé et vont tenter de combler cet implicite en essayant de construire une représentation mentale pour généraliser une technique de comptage approximative qui multiplie les risques d'erreur. Par ailleurs, on peut imaginer que d'autres élèves ne vont comptabiliser que les morceaux visibles comme si le solide était « creux ». Enfin, on peut envisager une dernière erreur majeure qui serait due à une certaine instabilité du schème de résolution des problèmes de quadrillage qui se mêlerait à celui du dénombrement : lors du dénombrement des morceaux contenus dans la longueur et dans la largeur, l'élève ne « compte pas deux fois le même » morceau, à savoir celui qui est commun à la longueur et à la largeur, c'est-à-dire celui situé dans l'angle. Par exemple, pour la face de 7 morceaux dans la longueur et 5 morceaux dans la largeur, l'élève dénombre les 7 morceaux de la **longueur**, puis en considérant la dimension de la **largeur**, il ne prend en compte que les 4 morceaux situés "sous" le morceau de l'angle déjà comptabilisé dans la longueur :



Il effectue donc la multiplication suivante : 7×4 , au lieu de 7×5 . De la même façon, s'il commence par dénombrer les 5 morceaux de la largeur, il effectuera finalement la multiplication 5×6 au lieu de 5×7 .

Par la présentation de différentes méthodes de résolution envisageables, nous avons vu que des élèves qui opteraient pour la reconstitution du pavé et le comptage un à un des morceaux de sucre mobiles n'ont pas besoin de connaissances numériques complexes liées à la multiplication, et peuvent donc s'engager dans la recherche, et même la faire aboutir avec le comptage un à un pour seule connaissance nécessaire en terme de dénombrement.

En ce qui concerne les **modalités de validation**, nous avons envisagé un dispositif collectif permettant à l'enseignant d'étayer et de diriger la décomposition du pavé effectuée par les élèves. Effectivement, il paraît nécessaire de réaliser ce découpage du pavé de manière méthodique, à savoir par « plaques » successives, afin de donner (ou construire) du sens à l'opération de multiplication grâce à ce geste. Par ailleurs, ce moyen de validation étant guidé par l'enseignant, nous avons souhaité laisser aux élèves la possibilité non seulement de développer une procédure de validation de leurs résultats de manière autonome, mais également d'obtenir « la réponse exacte » de ce problème en amont du moment collectif de validation. En effet, les explications données lors de cette phase et les opérations expertes associées au raisonnement co-construit auront plus de sens – voire de légitimité – pour les élèves s'ils sont convaincus que le résultat auquel elles mènent est correct, et s'ils sont « allégés » de la recherche perpétuelle de « la bonne réponse ». Tous ces arguments nous poussent à mettre en place un dispositif en deux temps : le premier, une phase de vérification individuelle, permet aux élèves – qui ne l'auraient pas déjà fait lors de la phase de recherche – de reconstruire le pavé pour obtenir le nombre de morceaux qui le constituent par comptage un à un, avant d'entamer un deuxième temps de validation qui est la décomposition collective du pavé commun, support du problème, menée par l'enseignant de manière méthodique. Tout d'abord, il s'agit de laisser un élève défaire librement les morceaux de la première plaque en les comptant – on veillera à ce que le pavé, ayant été manipulé par les élèves auparavant, soit posé sur la plaque de 7×3 morceaux. On reconstruit ainsi le sens quadrillage de la multiplication. Puis, après avoir annoncé aux élèves que l'on va procéder de la même manière pour la plaque suivante, on leur demande de prédire le nombre que l'on va obtenir à l'issue de ce nouveau comptage. Il s'agit de les pousser à effectuer (mentalement) la multiplication 21×2 , même s'ils emploient une stratégie calculatoire par addition itérée : $21 + 21$. En agissant de la même façon pour toutes les plaques (cinq au total), nous avons reconstruit le sens de l'opération 21×5 comme le résultat de l'accolement de 5 plaques de 21 morceaux. Enfin, en mettant en évidence l'opération de

multiplication permettant de dénombrer les 21 morceaux d'une plaque, on aboutit à la procédure experte consistant à effectuer $7 \times 3 \times 5$.

Le **milieu** de la situation est défini comme tout ce sur quoi l'élève agit et tout ce qui agit sur l'élève. Il est donc constitué, au-delà de l'organisation spatiale (un groupe de quatre élèves assis autour d'une table évoluant dans des phases alternées de travail individuel et collectif) et temporelle (une séance de 40 minutes), de tout le matériel mis à disposition des élèves (le pavé, les morceaux de sucre mobiles, la fiche et un crayon), du problème, ainsi que des actions des élèves et des rétroactions de la situation sur ces actions. En effet, le problème fournit des informations continuellement renouvelées en réponse à l'activité de l'élève qui modifie le milieu. Ce dernier évolue en même temps que la pensée, le raisonnement, la procédure de l'élève, ou encore l'interprétation qu'il fait du problème. Le milieu ainsi modifié produit des rétroactions qui font elles-mêmes évoluer l'activité cognitive de l'élève et la dimension sémiotique du milieu. Par exemple, la reconstitution du pavé par l'élève (grâce aux morceaux mobiles) a une action sur sa représentation du problème : cette démarche peut lui permettre de dépasser son interprétation du pavé comme un volume « creux » et de le percevoir comme « plein ». L'élève a réalisé une action entraînant une rétroaction du milieu dans sa dimension matérielle et sémiotique : un nouveau support matériel a été introduit par l'élève dans le milieu, et la réalité physique de ce nouveau pavé a permis de faire évoluer la signification que porte le milieu aux yeux de l'élève ; ce qui va engendrer la mise en œuvre de nouvelles procédures de la part de l'élève... Le milieu est ainsi dynamique : toujours modifié, et enrichi jusqu'à la résolution du problème. Cette résistance de la situation est introduite par Brousseau (1989) :

En situation scolaire l'enseignant organise et constitue un milieu, par exemple un problème, qui révèle plus ou moins clairement son intention d'enseigner un certain savoir à l'élève mais qui dissimule suffisamment ce savoir et la réponse attendue pour que l'élève ne puisse les obtenir que par une adaptation personnelle au problème proposé. (p.325)

La possibilité de reconstruire le pavé grâce à des morceaux de sucre mobiles produit donc des rétroactions permettant à l'élève de tester ses réponses et de statuer sur sa réussite ou son échec dans la résolution du problème. C'est l'élève seul – et non la situation – qui peut se donner les moyens d'une telle auto-validation par la mise en place de cette démarche non opératoire développée en complément d'une procédure plus experte mais moins certifiée, ou en tant que méthode de résolution à part entière. De ce fait, le dénombrement du pavé reconstitué fait l'objet d'une tâche demandée aux élèves – du moins à ceux qui ne l'ont pas réalisé lors de leur recherche individuelle – dans un premier moment de vérification, en amont du second moment de validation mené collectivement.

Pour finir, notons que pendant la phase de recherche, la dimension « facultative » de ce procédé de vérification permet à l'élève de réaliser plusieurs tentatives de résolution du problème.

b. Analyse *a posteriori* de la situation

Le déroulement de la séance de résolution du problème du pavé est retranscrit sous forme de verbatim, qui inclut quelques indications en terme de durée des différentes phases (voir annexe n°...).

Après une brève présentation de la situation aux élèves (2'30" environ), ces derniers sont lancés dans la phase de recherche individuelle qui durera 25 minutes approximativement, en incluant la phase de vérification individuelle – nous y reviendrons. Enfin, la validation collective a permis, au cours de ses 10 minutes, de vérifier le résultat en apportant des explications, et ainsi de mettre en évidence la procédure experte de résolution de ce problème de produit de mesure à trois dimensions (différentes).

➤ *Procédures observées (recueil des productions en annexes)*

• Laurent (voir annexe n°7.a) :

Au terme de deux minutes de réflexion, Laurent a terminé la résolution du problème sans manipuler le pavé "réel", en ne s'appuyant que sur sa représentation en perspective cavalière sur la fiche distribuée, sur laquelle il effectue les deux multiplications suivantes : $7 \times 3 = 21$, puis $21 \times 5 = 105$. Il présente donc une procédure experte, qu'il est capable de nous expliquer de manière relativement claire, dans la description de son raisonnement du moins, même s'il emploie un vocabulaire peu précis : il parle de « rangée » pour signifier ce que nous avons appelé une « plaque », mais les gestes qu'il effectue pour accompagner son explication nous permettent de vérifier qu'il désigne en réalité une plaque. De plus, le caractère très opératoire de sa démarche est mis en évidence par le fait qu'il appuie énormément son explication sur des valeurs numériques, sans y associer les objets dont elles indiquent la quantité : il manipule les nombres du problème sans se préoccuper de leur contexte, et peine à trouver ses mots pour qualifier « ce qu'il calcule ». A aucun moment il ne fait référence aux « morceaux de sucre », et ne formule pas de phrase-réponse sur sa copie. Ceci nous laisse penser que Laurent maîtrise suffisamment le concept de multiplication pour développer une démarche de résolution multiplicative indépendante du contexte : il perçoit immédiatement le pavé comme un accolement de « plaques » qu'il nomme d'ailleurs « rangées », peut-être par analogie à la représentation quadrillage en deux dimensions, pour désigner la « sous-unité » de l'objet. Cependant, la mise en œuvre d'une telle procédure ne peut être issue d'une certaine systématisation puisqu'il semble que cette situation ne soit au contraire qu'une

sensibilisation à ce type de problèmes multiplicatifs en trois dimensions jamais abordés auparavant – dans le cadre scolaire du moins. En outre, sur les deux situations de quadrillage en deux dimensions proposées dans le corpus de problèmes multiplicatifs en guise de « test diagnostique », Laurent effectue pour l'une des deux une addition, et manifeste ainsi une relative instabilité du schème de résolution des problèmes de quadrillage, et donc une perception encore fragile de cette représentation.

• **Maëlys** (voir annexe n°7.b) :

Pendant ce temps, dès le début de la phase de recherche, on peut observer un comportement d'élève directement tourné vers la manipulation : à l'aide des morceaux de sucre mobiles, Maëlys entame la reconstruction du pavé, puis l'abandonne avant son terme. On peut formuler deux hypothèses majeures pour expliquer ce phénomène : soit cette première procédure s'est rapidement avérée trop fastidieuse, soit Maëlys ne l'a mise en œuvre que dans le but de se forger une image mentale du pavé, de comprendre son organisation et met donc un terme à ce processus de reconstruction car elle estime s'être suffisamment approprié l'objet et sa composition. Cette seconde supposition est étayée par l'attitude de Maëlys lors de la résolution des problèmes multiplicatifs de quadrillage constituant le « test diagnostique » : pour le problème n°1, elle a de la même façon commencé à refaire le quadrillage, puis en a déduit l'opération à effectuer avant de le terminer, et a su appliquer directement la conclusion de ce raisonnement pour le problème n°5 dont elle a reconnu la structure similaire. Cependant, il convient de préciser que l'opération cognitive correspondant à la traduction d'un énoncé rédigé en langage naturel en un dessin imagé développée dans cette activité est très différente de celle consistant à extraire d'un énoncé figuratif des données, numériques en l'occurrence. Ceci fait référence aux travaux de Duval (1993) sur les « registres de représentation sémiotique » que nous n'avons pu approfondir dans le cadre de cette étude.

Dans un second temps, elle raisonne à partir de la fiche-énoncé et inscrit quatre fois la multiplication suivante : $4 \times 7 = 28$. Ce « 4 » manifeste une erreur de dénombrement dans la recherche de la quantité de morceaux dans une dimension du pavé, celle qui en contient 5 d'après l'explicitation de sa procédure par Maëlys. Il peut s'agir d'une mauvaise « lecture » – ou interprétation – de la représentation plane du pavé en perspective cavalière. Cependant, on peut formuler d'autres hypothèses portant, non plus sur une "simple erreur de comptage", mais sur une instabilité de certains schèmes. En effet, en comptant 4 morceaux au lieu de 5, on peut supposer qu'elle commet l'erreur signalée dans l'analyse *a priori* de la situation : estimant qu'elle a déjà compté le morceau situé dans l'angle de la plaque (celle de 7×5), elle ne le prend en compte que dans la dimension contenant 7 morceaux, et l'exclut du dénombrement de l'autre dimension. Néanmoins, la probabilité de cette hypothèse peut être remise en question par le sens d'écriture de

la multiplication : Maëlys inscrit : « $4 \times 7 = 28$ » dans cet ordre, ce qui peut laisser penser qu'elle a commencé par dénombrer 4 morceaux dans une dimension, et que ce résultat n'est donc pas issu d'un dénombrement antérieur qui l'aurait poussée à « ne pas recompter » le morceau de l'angle. En revanche, on peut inversement interpréter ce sens d'écriture comme un élément factuel venant renforcer cette hypothèse : recherchant la quantité de morceaux de la face "du dessus", elle compte d'abord 7 morceaux dans sa longueur, puis s'interroge sur le nombre de lignes de 7 morceaux contenues dans cette plaque, et n'en compte que 4 étant donné qu'elle a déjà traité la première ligne en dénombrant ses morceaux. Elle en déduit qu'il y a « 4 fois 7 morceaux » dans la plaque et note l'opération correspondante en retranscrivant cette conclusion dans un langage mathématique, mais en conservant l'ordre d'apparition des facteurs. Par ailleurs, le fait qu'elle inscrive quatre fois cette opération, que l'on peut raisonnablement interpréter comme le résultat de la recherche du nombre de plaques contenant 4×7 morceaux (5×7 en réalité), manifeste une erreur de dénombrement, sans doute due à l'utilisation de la représentation du pavé sur la fiche en tant que support à tous ces dénombrements : elle compte 4 plaques au lieu de 3, ce qui ne peut cette fois-ci être associé à une erreur dans le schème de dénombrement, mais bien à une erreur de dénombrement simplement à cause d'une mauvaise maîtrise perceptive de la représentation plane d'un objet en trois dimensions. Cette analyse est confortée par la phase d'explicitation de sa stratégie : utilisant alors le pavé "réel" pour appuyer son explication en désignant les différentes dimensions, elle réalise instantanément son erreur, et la corrige.

En outre, elle éprouve le besoin d'écrire quatre fois le calcul « $4 \times 7 = 28$ », puis « $5 \times 7 = 35$ » après correction, pour se représenter les quatre plaques et leur quantité de morceaux. Elle résume cette suite d'opérations par l'addition itérée « $35 + 35 + 35 + 35$ », qu'elle traduit immédiatement par « 35×4 », multiplication qu'elle pose ensuite. Maëlys semble donc reconstruire pas à pas le sens « addition itérée » de la multiplication, ici incarné par le pavé comme accollement de plaques. Cette procédure revient finalement à effectuer un calcul expert proche de celui établi par Laurent, mais les erreurs de dénombrement de Maëlys qui, contrairement à Laurent, mettent en évidence une connaissance de mémoire plus que de compréhension, la conduisent à une solution erronée. Une nouvelle fois, le cas particulier de cette représentation quadrillage extrapolée aux trois dimensions de l'espace nous renvoie aux recherches de Duval (1993) qui développe entre autres, et de manière très anecdotique, l'idée que « toute confusion [entre un objet mathématique et sa représentation] entraîne, à plus ou moins long terme, une perte de compréhension et les connaissances acquises deviennent vite inutilisables hors de leur contexte d'apprentissage ».

• **Lola** (voir annexe n°7.c) :

Dans un premier temps, elle développe une procédure personnelle qui s'avère erronée et non aboutie. En effet, elle effectue l'opération « 3×7 » pour trouver la quantité de morceaux compris dans une plaque puis additionne le résultat erroné de cette multiplication, 28, à lui-même et obtient ainsi 56. On peut supposer qu'en additionnant de la sorte deux fois ce produit, elle considère les deux faces visibles (parallèles) de 3×7 morceaux. Elle procède de la même façon pour une autre dimension, et additionne donc le produit correct de « 5×7 » à lui-même pour conclure qu'il y a au total 70 morceaux dans les deux faces visibles (parallèles) de 5×7 morceaux. Cependant, au lieu de terminer son raisonnement en opérant de même pour la troisième dimension du pavé, c'est-à-dire les deux faces visibles de 3×5 morceaux, elle additionne ces deux résultats intermédiaires pour conclure qu'« il y a 126 sucres en tout ». Ainsi, la stratégie de Lola semble consister à dénombrer les morceaux constituant la "coque" du pavé, c'est-à-dire ses six faces visibles. On peut donc supposer qu'elle ne conçoit le pavé que comme un solide "creux", qui ne contient pas de morceaux à l'intérieur de ses faces visibles. Néanmoins, le fait qu'elle ne mène pas son raisonnement à terme peut laisser également penser qu'elle a pu rencontrer des problèmes de gestion des nombreux calculs qu'elle effectue, et poser le doute sur la suite possible de sa réflexion. Effectivement, elle pose six opérations, sans formulation contextualisée quant aux résultats intermédiaires obtenus, si ce n'est « il y a 56 sucres » à l'issue de l'addition $28 + 28$, qui manifeste par son imprécision une certaine perte de sens des calculs effectués, et donc un repérage difficile au sein de l'algorithme développé. Ayant constaté la trop grande complexité de cette procédure pour Lola, nous l'avons lancé dans la reconstruction du pavé en guise de vérification de son résultat, qu'elle conclut en gommant « 126 » dans sa phrase-réponse pour y inscrire « 105 », solution du problème, à la place. Après cette phase de reconstruction, elle parvient, guidée par nos éléments d'étayage, à mettre en place une nouvelle procédure quasi-experte, aux erreurs de tables près, en calculant à nouveau « $3 \times 7 = 28$ » pour obtenir la quantité de morceaux contenue dans la même plaque de 3×7 , puis en multipliant ce résultat par 4 puisqu'il y a quatre autres plaques identiques accolées. On voit alors que la reconstruction du pavé lui a permis de se forger une nouvelle représentation de cet objet comme une succession de plaques. A ce stade du raisonnement, de même que Maëlys, Lola ne prend pas en compte la première plaque qu'elle considère avoir déjà traité en l'utilisant comme support au dénombrement des morceaux des deux dimensions qu'elle contient. Mais elle dépasse immédiatement cette confusion et réalise qu'elle doit ajouter la première plaque, et donc multiplier 28 par 5 et non par 4. Cependant, la solution du problème qu'elle propose, 140, demeure erronée. Et comme nous validons sa démarche pour l'amener à se demander pourquoi, si le raisonnement est juste, elle ne trouve pas le bon résultat, elle en déduit qu'il s'agit d'une erreur de calcul dans les

multiplications, consciente de sa maîtrise encore partielle du répertoire multiplicatif. Nous l'invitons alors à utiliser une plaque reconstituée de 3 fois 7 morceaux pour connaître le résultat de 3×7 . Une fois le dénombrement terminé, elle reprend son raisonnement avec ce nouveau produit égal à 21, et après une brève hésitation, le multiplie directement par 5 pour obtenir 105, résultat qu'elle sait correct.

• **Eléa** (voir annexe n°7.d) :

Elle présente une procédure proche de celle développée par Lola dans un premier temps : elle dénombre les morceaux de la "coque", c'est-à-dire des faces visibles, puis ajoute à ce total la quantité de morceaux contenus dans la plaque "intérieure" restante ; elle compte ainsi certains morceaux plusieurs fois, et obtient donc un résultat trop élevé, d'autant plus qu'elle commet également une erreur dans l'addition finale. En effet, elle effectue les opérations suivantes, dans cet ordre :

- $5 \times 7 = 35 \rightarrow$ quantité de morceaux contenus dans la face « du dessus »

- $5 \times 3 = 15 \rightarrow$ quantité de morceaux contenus dans une face latérale

- $5 \times 3 = 15 \rightarrow$ quantité de morceaux contenus dans l'autre face latérale

- $5 \times 7 = 35 \rightarrow$ quantité de morceaux contenus dans la face « du dessous »

- $5 \times 7 = 35 \rightarrow$ quantité de morceaux contenus dans la plaque « intérieure » restante, sorte de "tranche coincée" entre les deux faces horizontales supérieure et inférieure.

Finalement, elle calcule : 2 fois 5×7 ; 2 fois 5×3 ; et une fois supplémentaire 5×7 pour comptabiliser les morceaux « à l'intérieur ». On comprend que cette stratégie, si elle manifeste une perception singulière de l'organisation du pavé, conduit à dénombrer certains morceaux (ceux constituant des arêtes du pavé) plusieurs fois, notamment ceux situés dans les angles des différentes faces. Eléa aura beaucoup de difficultés à comprendre cette erreur, malgré nos multiples tentatives d'explication, allant jusqu'à colorer un morceau de l'angle avec du café pour mettre en évidence le fait que ce morceau, dont une face est visible dans une face de 5×7 du pavé, et dont une autre face est également visible dans une face de 5×3 du pavé, appartient donc à ces deux faces. On peut néanmoins remarquer que le fait qu'elle ne prenne pas en compte la troisième dimension du pavé, incarnée par les faces de 3×7 , signifie une certaine intuition, si ce n'est sensibilisation, à ce problème de dénombrement : elle est tout de même consciente que les morceaux de la face de 3×7 – pourtant bien visible sur la représentation figurant sur la fiche – sont comptabilisés dans les trois plaques de 5×7 . En outre, elle indique directement les différentes multiplications, de manière presque automatique, semblant reconnaître les multiples situations de quadrillage représentées par les différentes faces du pavé, et ainsi effectuer l'opération experte. En revanche, lors de la

résolution des problèmes multiplicatifs du « test », elle n'avait pas su résoudre les deux problèmes de quadrillage ; on peut donc supposer que leur représentation figurative induite par celle du pavé sur la fiche lui a cette fois permis de les reconnaître. En bref, la reconnaissance visuelle d'un quadrillage l'a conduite à effectuer des multiplications, grâce à une connaissance qui semble plus de mémoire que de compréhension étant donné qu'elle n'a su la réinvestir dans les situations précédentes du « test ». Cela pourrait expliquer sa difficulté à extrapoler cette connaissance à une dimension supplémentaire.

Par ailleurs, lorsqu'elle additionne les produits intermédiaires, elle commet le même type d'erreur et compte deux fois le quatrième produit (35), qu'elle additionne d'une part avec le produit inscrit à la ligne précédente (15), et d'autre part avec celui inscrit à la ligne suivante (35), suivant une procédure additive quelque peu originale dans sa présentation.

Comme les élèves n'avaient pas évolué de la même façon dans leur recherche, nous avons préféré les lancer un par un, à leur rythme, dans la phase de vérification individuelle grâce à la reconstruction du pavé : nous n'avons donc pas procédé à un moment de mise en commun collective des procédures, mais avons privilégié l'approfondissement du raisonnement de chaque élève de manière personnalisée et adaptée à la procédure singulière engagée par l'élève, finalement explicitée auprès de nous de manière individuelle, et non collective. En bref, la phase d'échange des stratégies entre élèves a été supplantée par un recueil individuel des éléments d'explication des démarches de résolution.

Ces différentes démarches abouties et explicitées, nous avons pu lancer la dernière phase de validation collective, de 10 minutes environ, au cours de laquelle nous avons conduit les élèves à la co-construction de la procédure experte étayée par nos explications sur le sens de toutes les opérations intermédiaires effectuées, en démontant le pavé plaque par plaque, en dénombrant les morceaux de chacune par comptage un à un, et en effectuant des prévisions sur la quantité de morceaux que l'on devrait obtenir en enlevant la plaque suivante (*voir verbatim*).

Pour conclure, nous souhaitons préciser à nouveau l'objectif que nous avons poursuivi dans cette séance : nous souhaitons observer et recueillir des stratégies de résolution d'élèves afin de les étudier, et avons de ce fait privilégié la phase de recherche, en terme de durée, d'étayage et d'analyse, à celles de mise en commun ou de validation par exemple, qui sont cependant primordiales dans un objectif d'apprentissage dans le domaine de la résolution de problèmes pour les élèves. Notre posture était ici plus dans la mesure, le recueil ou l'observation des différents niveaux et stratégies de résolution que dans la construction de savoirs effectifs pour les élèves.

C'est pourquoi nous avons tenté, par de nombreux questionnements, de saisir au mieux les raisonnements des élèves dans cette situation.

➤ Modifications éventuelles, amélioration de la situation

La résolution de cette situation du pavé requiert aux élèves le développement de plusieurs compétences, pas toujours maîtrisées dans leur ensemble : elle nécessite une bonne connaissance des tables de multiplication, une assimilation du quadrillage comme représentation d'un produit, et enfin une vision du pavé comme un accolement de plaques.

Cependant, telle qu'elle a été présentée, la situation présente quelques limites. En effet, les variables numériques ne peuvent pas être réellement augmentées étant donné que les élèves sont trop novices en terme de perception en trois dimensions pour se détacher du pavé physique, c'est-à-dire se baser uniquement sur la représentation plane du pavé en perspective cavalière. De plus, les procédures utilisées dans le cadre de variables numériques plus grandes ne laisseraient plus la même place aux tables de multiplication dans la résolution : elles demeurent un outil dans le calcul posé de la multiplication, mais la situation ne permet plus de donner du sens au répertoire multiplicatif. En bref, le cadre de notre étude impose une situation « hyper-contextualisée » et restreinte par le domaine numérique des tables. Cela ne permet donc pas d'étudier l'évolution des procédures d'élèves en fonction de la variation des nombres en jeu.

Par ailleurs, après le déroulement de la séance, nous pouvons formuler plusieurs modifications qui amélioreraient sans doute la résolution de ce problème relativement complexe pour les élèves.

- La première consisterait à utiliser des cubes de différentes couleurs pour mieux visualiser la structure du pavé en plaques, et ainsi mieux dénombrer (pour Maëlys), et mieux percevoir le fait que les morceaux dans les angles ou les arêtes appartiennent à différentes faces et ne doivent donc pas être comptés plusieurs fois (pour Eléa).
- De plus, ne présenter qu'un pavé réellement constitué à ces élèves encore en construction de leur perception dans l'espace supposait qu'ils puissent construire une image mentale rapide du pavé, ce qui, mêlé au développement d'une procédure de résolution complexe d'un problème multiplicatif de produit de mesure à 3 dimensions, s'est avéré difficile et peu solide. Ainsi, nous en concluons qu'il serait sans doute plus pertinent de fournir un pavé "réel" par élève afin de les alléger de toute abstraction (en conservant bien évidemment la contrainte de ne pas pouvoir le défaire tout de suite).
- Par ailleurs, nous nous sommes interrogées sur l'impact de l'absence de contexte dans l'énoncé que nous avons proposé, et avons conclu qu'il aurait été intéressant d'introduire un contexte

familier aux élèves pour favoriser une meilleure appropriation du problème. Nous aurions par exemple pu le formuler de la façon suivante : « Chez l'épicier, j'achète un paquet de sucre. Je voudrais savoir combien il y a de morceaux de sucre dans mon paquet », et fournir à chaque élève donc (d'après notre point précédent) un pavé en morceaux de sucre présenté dans un emballage. Cette mise en contexte aurait de plus permis de supprimer le terme mathématique de « pavé » qui induit un niveau d'abstraction supérieur.

- Enfin, nous aurions également pu proposer des images ou des photographies du pavé à la place de la représentation plane en perspective cavalière. Ce type de figuration trop imprécise n'étant pas adapté pour compter les morceaux, cela n'est réalisable que dans le cas où chaque élève possède un pavé "réel" lui permettant de les dénombrer précisément.

D'autres modifications peuvent être envisagées, non plus dans un souci de simplification de la tâche de résolution, mais dans l'objectif d'enrichir la situation d'apprentissage.

- Pour commencer, il paraît nécessaire de distinguer le support de réflexion habituellement nommé « brouillon » de celui de la « copie ». En effet, la confusion entre les deux dessert autant la phase de recherche que celle de conclusion (et d'interprétation des calculs effectués) : l'élève est déstabilisé par ce glissement du brouillon comme espace personnel et privé de réflexion vers un feuillet mobile destiné à la communication.

- Un autre point concerne le matériel fourni : il aurait été intéressant de restreindre la quantité de morceaux de sucre mobiles disponibles pour inciter l'élève à anticiper et à extrapoler son raisonnement à partir d'un pavé plus petit : ne pas laisser la possibilité de reconstruire le pavé dans son intégralité pour favoriser l'appropriation de la représentation du pavé par la compréhension de son organisation.

3. Conclusion sur la place des tables de multiplication dans la résolution de problèmes multiplicatifs à partir des recueils de données

Pour analyser les procédures de résolution de problèmes multiplicatifs, deux critères majeurs sont à prendre en compte : d'une part, la maîtrise du répertoire multiplicatif, et d'autre part, la compréhension du problème et la reconnaissance de sa structure multiplicative, compétences liées à l'apprentissage du concept de multiplication et au sens que lui attribuent les élèves.

Dans la situation du produit de mesures à trois dimensions, les élèves doivent dans un premier temps comprendre l'organisation du pavé en 5 plaques accolées. Chaque plaque peut ensuite être perçue comme 3 lignes de 7 morceaux de sucre. Ainsi, l'élève qui maîtrise suffisamment le répertoire multiplicatif l'utilise comme un outil rapide et facilement exploitable

pour permettre la résolution du problème ; c'est le cas de Laurent qui, s'il présente certaines difficultés de mémorisation des produits "difficiles" (tables de 7, 8, 9), est capable de mobiliser sa compréhension de la construction du répertoire multiplicatif pour restituer un produit.

En revanche, les élèves pour qui l'apprentissage des tables de multiplication est encore fragile s'appuient sur la situation, et en particulier la représentation quadrillage, pour (re)donner du sens à l'opération de multiplication et/ou reconstruire ainsi certains produits du répertoire multiplicatif grâce à la manipulation. C'est ce que Maëlys et Eléa – qui ont toutes les deux une connaissance très insuffisante des tables de multiplication – manifestent, chacune dans des postures différentes. En ce qui concerne Maëlys, les deux multiplications qu'elle indique sur sa copie sont correctes ; on peut donc supposer qu'elle se soit basée sur le quadrillage pour obtenir ces produits. Mais surtout, comme nous l'avons analysé précédemment, elle retranscrit sur sa copie les différentes étapes qui l'ont menée à reconstruire le sens de la multiplication (à travers le produit « 35×4 »), grâce à sa perception du pavé comme l'accolement de 4 plaques (selon elle) de 35 morceaux. Eléa, quant à elle, ne comprend que partiellement la composition du pavé, mais elle utilise la situation, en particulier le quadrillage, pour « retrouver » le produit de « 5×3 » par comptage comme elle nous le dit clairement dans l'explicitation de sa procédure : « J'ai compté, ça fait 15 » (voir annexe n°6, ligne 65).

Par ailleurs, Lola représente un autre profil d'élève qui redonne du sens au concept (de multiplication) grâce à la représentation quadrillage, comme le montrent ses explications claires sur l'interprétation qu'elle fait des calculs effectués, mais sans parvenir à utiliser ce même quadrillage pour le versant calculatoire de l'opération, autrement dit pour reconstruire le répertoire multiplicatif – en particulier retrouver le produit de « 3×7 » (par comptage notamment).

Enfin, le cas de Maëlys illustre le fait qu'une mauvaise compréhension de la structure du pavé, c'est-à-dire une mauvaise représentation de la situation, constitue une entrave à la résolution du problème, même si la restitution des produits des tables de multiplication est effective.

En revenant sur les procédures de résolution observées pour les problèmes multiplicatifs que nous avons qualifié de « simples » – même si certains ne l'étaient pas, notamment ceux de groupements et partages –, on retrouve ces deux critères majeurs de connaissance des tables de multiplication et de reconnaissance de la structure multiplicative, encore déclinés à plusieurs niveaux chez les procédures d'élèves :

- Si ces deux compétences sont mises en œuvre, l'élève développe une procédure experte de résolution dans laquelle les tables de multiplication apparaissent comme un outil.

- Si l'opération à effectuer est identifiée mais le répertoire multiplicatif non maîtrisé, la démarche contient une « erreur de table » qui aboutit dans toutes les productions que nous avons recueillies à une solution erronée – puisqu'aucun élève n'a exploité la possibilité de vérifier son résultat à l'aide d'un dessin figuratif qui lui permettrait de revenir sur son calcul. En effet, la schématisation du problème peut permettre de donner du sens au concept de multiplication et ainsi « retrouver » le produit de deux nombres à travers l'opération d'addition itérée notamment.

Conclusion

Ce travail de recherche, portant sur les modalités de mobilisation des tables de multiplication au cours de leur apprentissage dans un premier temps, puis au sein de la résolution de problèmes dans un second temps, nous a mené à plusieurs conclusions.

Au cours de la première partie de notre étude consacrée à l'apprentissage des tables de multiplication, nous avons tout d'abord pu voir que leur maîtrise présente de multiples intérêts. En effet, une bonne connaissance des tables s'avère indispensable pour la mise en œuvre de procédures de calcul mental, que ce soit dans la sphère scolaire ou dans la vie sociale quotidienne. De plus, elle participe de l'élaboration et de l'appropriation de notions mathématiques futures en favorisant leur compréhension. Enfin, maîtriser le répertoire multiplicatif facilite l'apprentissage de la technique opératoire de la multiplication, mais également de la division. Ainsi, après avoir établi leur statut d'« outil » au sens de Douady, nous nous sommes intéressées à leur place dans les programmes nationaux de l'école primaire parus en 2008 qui, malgré une grande diversité dans le vocabulaire employé pour fixer les différents objectifs de leur apprentissage, nous a poussées à nous interroger sur le signification de l'injonction « connaître les tables de multiplication », et plus précisément sur le sens de ce terme générique « connaître » : pour restituer un résultat multiplicatif, l'élève doit-il l'avoir mémorisé ou bien être capable de le « retrouver » (rapidement) ? Les directives institutionnelles ne permettant pas de lever cette incertitude, nous nous sommes par la suite intéressées à ces deux procédures, d'abord individuellement. Nous avons alors mis en évidence le vecteur de la mémorisation des résultats multiplicatifs, à savoir la construction et la manipulation d'un « réseau associatif » fondé sur l'association verbale entre le couple des facteurs et leur produit. Ensuite, l'exemple du calcul digital nous a permis de constater que les méthodes reconstructives permettent dans les faits de pallier l'ignorance de certains résultats à un stade de mémorisation partielle, et ainsi de ne pas freiner les acquisitions annexes – comme la résolution de problèmes multiplicatifs – mais également de progresser dans ce travail de mémorisation des tables de multiplication. Cependant, nous avons également pu cerner les limites de ces techniques qui peuvent apparaître comme dénuées de sens pour les élèves qui n'ont pas accès à leur légitimité mathématique, et qui de ce fait peuvent éprouver des difficultés à établir ce genre de procédures en tant que « schème » ou en tant que « théorème-en-acte », selon si l'on considère le calcul d'un produit comme une « situation » à part entière ou non. Puis nous avons examiné l'articulation des deux démarches – consistant à reconstruire un résultat et/ou à le mémoriser – en étudiant deux approches d'enseignement différentes reposant sur la récitation et les propriétés mathématiques de

la multiplication (la commutativité, l'associativité et la distributivité) pour retrouver un produit à partir de résultats mémorisés. Enfin, la table de Pythagore, en permettant de même de « retrouver » des résultats à partir de la mémorisation de certains autres résultats, ou de propriétés caractéristiques visuellement mises en valeur par sa disposition, a été le prétexte d'illustrer la co-existence de ces deux démarches dans l'enseignement des tables de multiplication.

Suite à ce travail constituant une première approche des modalités d'enseignement des tables de multiplication, centrée sur les relations existant entre « retrouver » – par un retour au concept de la multiplication – et mémoriser pour pouvoir disposer des tables comme un outil au service de la multiplication, nous nous sommes interrogées sur l'usage de ce même outil au sein de la résolution de problèmes. Pour cela, nous avons commencé par étudier la classification des problèmes multiplicatifs de Vergnaud d'un point de vue heuristique. Cette typologie établit deux catégories de relations (ternaires ou quaternaires), quatre structures majeures (proportion simple, proportion simple composée, comparaison multiplicative de grandeurs, proportion double) et trois types de problèmes (multiplication, division-partition ou division de type 1, division-quotition ou division de type 2). Dans un second temps, nous avons questionné cette classification d'un point de vue didactique en tentant de cibler les catégories de problèmes les plus adaptées au niveau des élèves de CE2 – en lien avec les instructions officielles en terme de progression au sein du cycle 3 dans le domaine de la résolution de problèmes –, ainsi qu'à notre problématique. En effet, nous avons ensuite essayé de situer la place des tables de multiplication dans les procédures éventuelles de résolution que nous pourrions observer chez de tels élèves. Après toutes ces considérations, nous avons conclu que les problèmes de type de multiplication nous permettraient d'évaluer la capacité de mobilisation du répertoire multiplicatif dans leur résolution : en proposant des situations "simples", où l'opération de multiplication est évidente et les valeurs numériques appartiennent au répertoire multiplicatif, les compétences en terme de résolution de problèmes sont peu sollicitées au profit d'un réinvestissement direct des tables de multiplication. Par ailleurs, les problèmes de type division sont apparus comme le prétexte à l'observation de deux démarches majeures chez des élèves novices en résolution de problèmes de groupement/partage : une première procédure basée sur la compréhension de la situation et le développement d'un raisonnement lié à cette interprétation, de manière imagée notamment, et une seconde procédure reposant sur la maîtrise du répertoire multiplicatif mobilisée par l'élève lors de la reconnaissance des données numériques du problème, indépendante du contexte de la situation. Ainsi, la connaissance des tables peut s'inscrire au service de la procédure raisonnée de résolution, ou représenter l'unique support de la résolution. En outre, la représentation quadrillage s'est avérée être un support intéressant pour notre analyse :

les tables de multiplication constituent d'une part un outil pour la résolution du problème en permettant de restituer rapidement le produit recherché si elles sont maîtrisées, mais d'autre part, le quadrillage représente également un support pouvant être utilisé pour donner du sens au répertoire multiplicatif, et donc le (re)construire ou le retrouver. Pour toutes ces catégories de problèmes, nous avons souhaité tester l'influence des variables numériques en proposant d'autres situations aux structures similaires, mais avec des données situées hors du champ du répertoire multiplicatif. En effet, au-delà de notre réflexion sur les tables de multiplication nous poussant à apprécier l'évolution des stratégies en relation avec le domaine numérique des valeurs en jeu, nous avons été motivées par les conclusions de l'étude menée par Butlen et Pezard sur la dialectique entre calcul mental et résolution de problèmes, qui mettent en avant la forte influence des variables numériques sur les procédures de résolution. Nous avons tout d'abord tenté de mesurer la place des tables de multiplication en tant qu'outil au service de la résolution de problèmes multiplicatifs "simples" appartenant aux catégories sélectionnées. Puis nous avons souhaité élaborer une situation plus complexe de produit de mesures à trois dimensions, reposant sur un réinvestissement de la représentation quadrillage, permettant de donner du sens au répertoire multiplicatif à travers le concept de multiplication, situation de référence qui peut donc apparaître au service de la reconstruction des tables de multiplication.

Nous avons donc pu observer, grâce aux productions recueillies en classe, plusieurs profils d'élèves dans la résolution de problèmes multiplicatifs, en relation avec leur niveau de maîtrise du répertoire multiplicatif d'une part, et de compréhension du problème menant à la reconnaissance de sa structure multiplicative d'autre part. On peut distinguer l'élève qui parvient à restituer des produits du répertoire multiplicatif et à les utiliser de manière efficace au service de la résolution du problème de l'élève pour qui l'apprentissage des tables de multiplication est encore fragile. Ce dernier tente généralement de s'appuyer sur la situation pour donner du sens au concept de multiplication et parvient parfois à reconstruire ainsi les résultats de l'opération, c'est-à-dire à « retrouver » certains produits du répertoire multiplicatif.

Enfin, soulignons qu'une bonne compréhension du problème est nécessaire à sa résolution : un élève qui ne se construit pas une représentation de la situation ne peut faire aboutir sa démarche de manière correcte, car cette lacune empêche la reconnaissance de l'opération à effectuer qui constitue un obstacle au développement de la procédure de résolution (même si sa maîtrise des tables de multiplication lui permettrait d'être dans la capacité d'effectuer correctement les calculs qu'il mettrait en œuvre).

Ainsi, si ces deux compétences de maîtrise du répertoire multiplicatif et de reconnaissance de la structure multiplicative du problème sont effectives, l'élève développe une procédure experte

de résolution dans laquelle les tables de multiplication apparaissent comme un outil. En revanche, si sa connaissance des tables de multiplication est partielle, la situation peut paraître comme un support à sa reconstruction, notamment par une procédure d'addition itérée pour les problèmes de type multiplication, ou par une procédure de soustraction « pas à pas » pour les problèmes de type division quotient essentiellement. En revanche, l'incompréhension de la situation peut apparaître comme une entrave à tout raisonnement portant sur celle-ci, notamment une réflexion permettant de « retrouver » un produit.

A partir des productions des élèves dans les différents types de situations que nous avons étudiées (problèmes multiplicatifs types ou problème du pavé), nous pouvons donc nous rendre compte de la complexité des relations qu'entretiennent mobilisation des tables de multiplication et résolution de problèmes multiplicatifs au sein d'un apprentissage dialectique du concept de multiplication.

Cette étude traitant de la mobilisation des tables de multiplication, il aurait été intéressant de questionner également le rôle du calcul mental dans leur apprentissage et dans la construction des mécanismes de restitution, notamment dans la résolution mentale de problèmes multiplicatifs. En lien avec cet objet d'étude, et comme nous l'avons souligné dans notre travail, l'approche psychocognitive de ces processus nous aurait en outre permis de mieux comprendre les démarches observées dans la résolution de problèmes, notamment la traduction de l'énoncé écrit en une représentation mentale ou figurative de la situation et, réciproquement, le prélèvement de données tangibles à partir d'une représentation imagée de la situation (comme celle du pavé en morceaux de sucre laissant à la charge de l'élève l'extraction des valeurs numériques du problème). Nous faisons ici référence aux travaux de Duval (1991) sur les concepts de « registres de représentation » à travers ceux de « noésis » et « sémiosis ». Par ailleurs, les travaux fondateurs de Polya (1953) seraient à étudier pour alimenter ces questions sur l'activité de résolution de problèmes. Enfin, les opérations mentales et en particulier les processus cognitifs et psychologiques mobilisés dans la résolution de problèmes mettent également en jeu des compétences et capacités de mémorisation comme le soulignent ci-dessous Butlen et Pezard (1992) ; c'est pourquoi un approfondissement de la dialectique existante entre résolution de problèmes et mémorisation aurait été un vecteur d'une meilleure compréhension des procédures mises en œuvre dans cette activité :

La résolution de problèmes est une activité complexe qui passe aussi par l'utilisation de la mémoire. [...] Leurs travaux [*des psychologues*] montreraient [...] que, pour une grande part, les difficultés rencontrées dans une tâche de résolution de problèmes sont liées aux contraintes fonctionnement des systèmes mnésiques. [...] (p.345)

• **Programmes de l'école primaire (2008) :**

CYCLE DES APPRENTISSAGES FONDAMENTAUX :

Programme du CP et du CE1 :

http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/programme_CP_CE1.htm

Progressions pour le CP et le CE1 :

<http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/apprentissages.htm>

CYCLE DES APPROFONDISSEMENTS :

Programme du CE2, CM1 et du CM2 :

http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/programme_CE2_CM1_CM2.htm

Progressions pour le CE2 et le CM :

<http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/approfondissements.htm>

• **Textes institutionnels :**

– M.E.N. (2002). *Documents d'application des programmes, Mathématiques, cycle 3*. CNDP.

– M.E.N. (2005). *Documents d'accompagnement des programmes, Mathématiques, école primaire*. CNDP.

• **Articles :**

– Bistos, V. et Matulik, N. (2010). Problèmes de multiplication et de division au cycle 2, *Le nombre au cycle 2*. CNDP.

– Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique et le concept de milieu, *Recherches en didactique des Mathématiques*, 9(3), 309-336. Grenoble : La pensée sauvage.

– Brousseau, G. (1997). *Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal*. La théorie des situations didactiques : math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf

– Butlen, D. et Masselot, P. (2010). Dialectique entre sens et techniques, l'exemple du calcul mental, *Le nombre au cycle 2*. CNDP.

– Butlen, D. et Pezard, M. (1992). Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du CP au CM2, *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(2.3), 319-367. Grenoble : La pensée sauvage.

– Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques*, 7 (2), 5-31. Grenoble : La pensée sauvage.

- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65. Strasbourg : IREM.
- Fayol, M. (2010). Les mathématiques : regards sur 50 ans de leur enseignement à l'école primaire, *Le nombre au cycle 2*. CNDP.
- Levain, J.-P. et Vergnaud, G. (1994-95). Proportionnalité simple, proportionnalité multiple, *Grand N*, 56, 55-66. Grenoble : IREM.
- Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques : un exemple : les structures additives, *Grand N*, 38, 21-40. Grenoble : IREM.
- COMPTES-RENDUS DE Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2.3). Grenoble : La Pensée Sauvage. :
<http://www.mapreps.com/perrenoudhabitus.htm>
http://docs.google.com/viewer?a=v&q=cache:2vPzrtaGvfkJ:eroditi.free.fr/Enseignement/DDML3S1_08-09/DDML3S1_C3_champs-conceptuels.pdf+vergnaud+champ+conceptuel&hl=fr&gl=fr&pid=bl&srcid=ADGEESj4-X1z1zQwUgnOsP0zo6JmzNEk52RgubNbCMAzHsm05g9GG090J6dwcAI4uY_uqEUYFmgHSoO6UEgbaKdlGY_iNTY2PwbP2Mie3-BtnUeoNLo7UYb6IQLKDqQUzV2ReLBk2q91&sig=AHIEtbR_Hftnh6_dcAMqUhg1eVBEpm6bAQ

• **Ouvrages** :

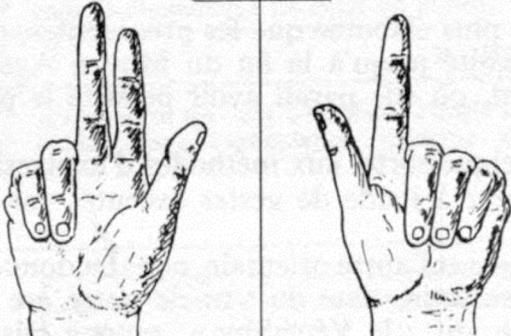
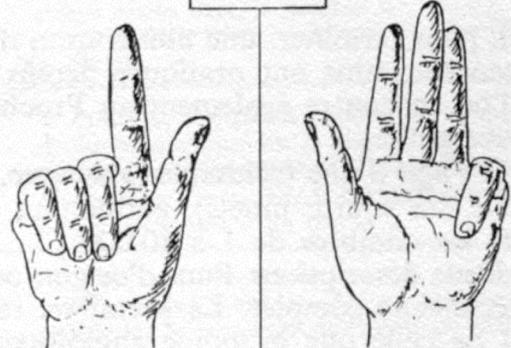
- Cerquetti-Aberkane, F. (2000). *Enseigner les mathématiques à l'école*. Paris : Hachette.
- Fayol, M. (1990). *L'enfant et le nombre : du comptage à la résolution de problèmes*. Paris : Delachaux & Niestlé.
- Graff, O., Wozniak, B., Calmelet, J.-J. (2011). *Situations multiplicatives, problèmes de multiplication et de division*. « Outils pour les cycles ». Lille : CRDP.
- Ifrah, G. (1981). *Histoire universelle des chiffres*. Paris : Seghers.
- Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne : P. Lang.

• **Manuels scolaires** :

- Brégeon, J.-L., Dossat, L., Flouzat, A., Myx, A., et Vicens P.-Y. (2005). *Diagonale CE1 : livre du maître*. Nathan.
- Brissiaud, R. (dir.), Clerc, P., Lelièvre, F., Ouzoulias, A. et Suire, F. (2009). *J'apprends les maths CE1 : livre du maître*. Paris : Retz.
- Brissiaud, R. (dir.), Clerc, P., Lelièvre, F. et Ouzoulias, A. (2004). *J'apprends les maths CE2*. Paris : Retz.
- Charnay, R. (dir.), Combier, G., Dussuc, M.-P. et Madier, D. (2007). *Cap Maths CE2 : guide de l'enseignant, fichier d'entraînement*. Hatier.

ANNEXES

► ANNEXE n°1 : Exemples illustrant le fonctionnement de la **méthode de calcul digital** tirés de *l'Histoire universelle des chiffres* de Georges Ifrah (p. 79).

<p style="text-align: center;">7×8</p> 	<p style="text-align: center;">8×6</p> 
<p style="text-align: center;">PRODUIT DE 7 PAR 8</p> <p>Replier : (7-5) doigts d'une main, et (8-5) de l'autre.</p> <p>Résultat : 5 doigts repliés en tout 3 doigts levés sur une main et 2 sur l'autre</p> <p>Donc : $7 \times 8 = 5 \times 10 + 3 \times 2 = 56$</p>	<p style="text-align: center;">PRODUIT DE 8 PAR 6</p> <p>Replier : (8-5) doigts d'une main, et (6-5) de l'autre</p> <p>Résultat: 4 doigts repliés en tout, 2 doigts levés sur une main et 4 sur l'autre</p> <p>Donc : $8 \times 6 = 4 \times 10 + 2 \times 4 = 48$</p>

► ANNEXE n°2 : **Énoncés des problèmes** multiplicatifs proposés aux élèves dans le cadre du « test diagnostique ».

- 1) Un tableau comporte 9 cases sur la longueur et 7 cases sur la largeur. Combien y a-t-il de cases dans le tableau ?
- 2) Dans la commode de Charline, il y a 6 rangées de 4 tiroirs. Combien y a-t-il de tiroirs dans la commode ?
- 3) J'ai collé 5 rangées de 8 gommettes. Combien ai-je collé de gommettes ?
- 4) Maman a acheté 3 boîtes de 6 œufs. Combien d'œufs a-t-elle acheté ?
- 5) Une feuille de cahier a 6 carreaux sur la largeur et 28 carreaux sur la longueur. Combien y a-t-il de carreaux sur la feuille ?
- 6) Dans la bibliothèque de Natan, il y a 5 étagères. Sur chaque étagère, Natan a rangé 15 livres. Combien Natan a-t-il de livres ?
- 7) Un jardinier a planté 9 rangées de 16 salades. Combien de salades a-t-il planté ?
- 8) Dans une tablette de chocolat, il y a 32 carrés. Combien de carrés y a-t-il dans 8 tablettes ?
- 9) La maîtresse a 25 boîtes de 9 feutres sur son étagère. Combien de feutres a-t-elle en tout ?
- 10) Il y a 27 élèves dans la classe de CE2. Le maître veut faire des équipes de 9 enfants. Combien va-t-il faire d'équipes ?
- 11) Dans une ferme, les poules ont pondu 57 œufs. Le supermarché les achète par boîtes de 6. Combien de boîtes peut-il acheter ?
- 12) Léo a acheté 6 paquets de chewing-gums. Il a compté tous ses chewing-gums et a trouvé 42. Combien y a-t-il de chewing-gums dans un paquet ?
- 13) Un fermier élève 124 lapins. Il fabrique de nouveaux clapiers pour loger ses lapins. Dans chaque clapier, il veut mettre 4 lapins. Combien de clapiers doit-il fabriquer ?
- 14) L'épicier range 135 bouteilles de jus de fruit dans 7 rayons. Combien de bouteilles a-t-il rangé dans chaque rayon ?

► ANNEXE n°3 : **Productions** des quatre élèves – « Test diagnostique »

• *Annexe 3.a* : Production de Laurent

Prénom : Laurent

1) Un tableau comporte 9 cases sur la longueur et 7 cases sur la largeur.
Combien y a-t-il de cases dans le tableau ?

$$7 + 9 = 16$$

Il y a 16 cases dans le tableau.

2) Dans la commode de Charline, il y a 6 rangées de 4 tiroirs. Combien y a-t-il de tiroirs dans la commode ?

$$6 \times 4 = 24$$

Il y a 24 tiroirs dans la commode.

3) J'ai collé 5 rangées de 8 gommettes. Combien ai-je collé de gommettes ?

$$5 \times 8 = 40 \quad \text{J'ai collé 40 gommettes.}$$

4) Maman a acheté 3 boîtes de 6 œufs. Combien d'œufs a-t-elle acheté ?

$$3 \times 6 = 18 \quad \text{Elle a acheté 18 œufs.}$$

5) Une feuille de cahier a 6 carreaux sur la largeur et 28 carreaux sur la longueur. Combien y a-t-il de carreaux sur la feuille ?

$$\begin{array}{r} 6 \\ x 28 \\ \hline 58 \\ + 120 \\ \hline 188 \end{array}$$

Il y a 188 carreaux sur la feuille.

6) Dans la bibliothèque de Natan, il y a 5 étagères. Sur chaque étagère, Natan a rangé 15 livres. Combien Natan a-t-il de livres ?

$$\begin{array}{r} 5 \\ x 15 \\ \hline 25 \\ + 50 \\ \hline 85 \end{array}$$

Natan a 85 livres.

7) Un jardinier a planté 9 rangées de 16 salades. Combien de salades a-t-il planté ?

$$\begin{array}{r} 9 \\ \times 16 \\ \hline 54 \\ + 90 \\ \hline 144 \end{array}$$

Il a planté 144 salades.

8) Dans une tablette de chocolat, il y a 32 carrés. Combien de carrés y a-t-il dans 8 tablettes ?

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 32 \\ \hline 16 \\ + 240 \\ \hline 256 \end{array}$$

Il y a 256 chocolats sur 8 tablettes.

9) La maîtresse a 25 boîtes de 9 feutres sur son étagère. Combien de feutres a-t-elle en tout ?

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 9 \\ \hline 225 \end{array}$$

Elle a 225 feutres en tout.

Prénom : Laurent

10) Il y a 27 élèves dans la classe de CE2. Le maître veut faire des équipes de 9 enfants. Combien va-t-il faire d'équipes ?

Il va faire 3 équipes.

11) Dans une ferme, les poules ont pondu 57 œufs. Le supermarché les achète par boîtes de 6. Combien de boîtes peut-il acheter ?

7 Il peut acheter 7 boîtes.

12) Léo a acheté 6 paquets de chewing-gums. Il a compté tous ses chewing-gums et a trouvé 42. Combien y a-t-il de chewing-gums dans un paquet ?

Il y a 7 chewing-gums dans un paquet.

13) Un fermier élève 124 lapins. Il fabrique de nouveaux clapiers pour loger ses lapins. Dans chaque clapier, il veut mettre 4 lapins. Combien de clapiers doit-il fabriquer ?

$$\begin{array}{l}
 124 - 4 = 120 \quad 2 \\
 120 - 4 = 116 \quad 3 \\
 116 - 4 = 112 \\
 112 - 4 = 108 \quad 5 \\
 108 - 4 = 104 \quad 6 \\
 104 - 4 = 100
 \end{array}$$

124	76	62	38	14
- 4	- 4	- 4	- 4	- 4
76	62	38	14	10

Il va faire 28 clapier. Dans le 28ème il y a 2 lapin.

14) L'épicier range 135 bouteilles de jus de fruit dans 7 rayons. Combien de bouteilles a-t-il rangé dans chaque rayon ?

• Annexe 3.b : Production de Maëlys

Prénom : Maëlys

1) Un tableau comporte 9 cases sur la longueur et 7 cases sur la largeur. Combien y a-t-il de cases dans le tableau ?



$9 \times 7 = 63$

dans le tableau il y a 63 cases

2) Dans la commode de Charline, il y a 6 rangées de 4 tiroirs. Combien y a-t-il de tiroirs dans la commode ?

$6 \times 4 = 24$

il y a 24 tiroirs dans la commode.

3) J'ai collé 5 rangées de 8 gommettes. Combien ai-je collé de gommettes ?

$5 \times 8 = 40$

tu a collé 40 gommettes

4) Maman a acheté 3 boîtes de 6 œufs. Combien d'œufs a-t-elle acheté ?

$$3 \times 6 = 18$$

il y a 18 œufs

5) Une feuille de cahier a 6 carreaux sur la largeur et 28 carreaux sur la longueur. Combien y a-t-il de carreaux sur la feuille ?

	2	8
x		6
	1	6
	5	

il y a 168
Carreaux sur la feuille

6) Dans la bibliothèque de Natan, il y a 5 étagères. Sur chaque étagère, Natan a rangé 15 livres. Combien Natan a-t-il de livres ?

$$5 \times 15 = 75$$

	1	5
x		5
	7	5

7) Un jardinier a planté 9 rangées de 16 salades. Combien de salades a-t-il planté ?

$$9 \times 16 = 144$$

9	16
144	

8) Dans une tablette de chocolat, il y a 32 carrés. Combien de carrés y a-t-il dans 8 tablettes ?

$$8 \times 32 = 256$$

Il y a 32 carrés dans 1 tablette.
 8 tablettes ont 256 carrés.

9) La maîtresse a 25 boîtes de 9 feutres sur son étagère. Combien de feutres a-t-elle en tout ?

$$25 \times 9 = 225$$

25 boîtes de 9 feutres.
 225 feutres en tout.

Prénom : Maelys

10) Il y a 27 élèves dans la classe de CE2. Le maître veut faire des équipes de 9 enfants. Combien va-t-il faire d'équipes ?

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$$

11) Dans une ferme, les poules ont pondu 57 œufs. Le supermarché les achète par boîtes de 6. Combien de boîtes peut-il acheter ?

12) Léo a acheté 6 paquets de chewing-gums. Il a compté tous ses chewing-gums et a trouvé 42. Combien y a-t-il de chewing-gums dans un paquet ?

$$6 \cdot x = 42$$

$$\frac{42}{6}$$

$$7$$

13) Un fermier élève 124 lapins. Il fabrique de nouveaux clapiers pour loger ses lapins. Dans chaque clapier, il veut mettre 4 lapins. Combien de clapiers doit-il fabriquer ?

14) L'épicier range 135 bouteilles de jus de fruit dans 7 rayons. Combien de bouteilles a-t-il rangé dans chaque rayon ?

• Annexe 3.c : Production de Lola

Prénom *Lola*

1) Un tableau comporte 9 cases sur la longueur et 7 cases sur la largeur.
Combien y a-t-il de cases dans le tableau ?

$$\begin{array}{r} 9 \\ + 7 \\ \hline 16 \end{array}$$

Il y a 16 cases

2) Dans la commode de Charline, il y a 6 rangées de 4 tiroirs. Combien y a-t-il de tiroirs dans la commode ?

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 4 \\ \hline 24 \end{array}$$

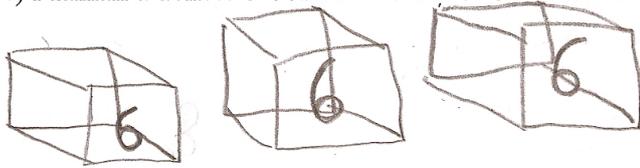
Il y a 24 tiroirs

3) J'ai collé 5 rangées de 8 gommettes. Combien ai-je collé de gommettes ?

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 8 \\ \hline 40 \end{array}$$

Elle a collé 40 gommettes

4) Maman a acheté 3 boîtes de 6 œufs. Combien d'œufs a-t-elle acheté ?



$$\begin{array}{r} 3 \\ x 6 \\ \hline 18 \end{array}$$

Elle a achetée 18 œufs

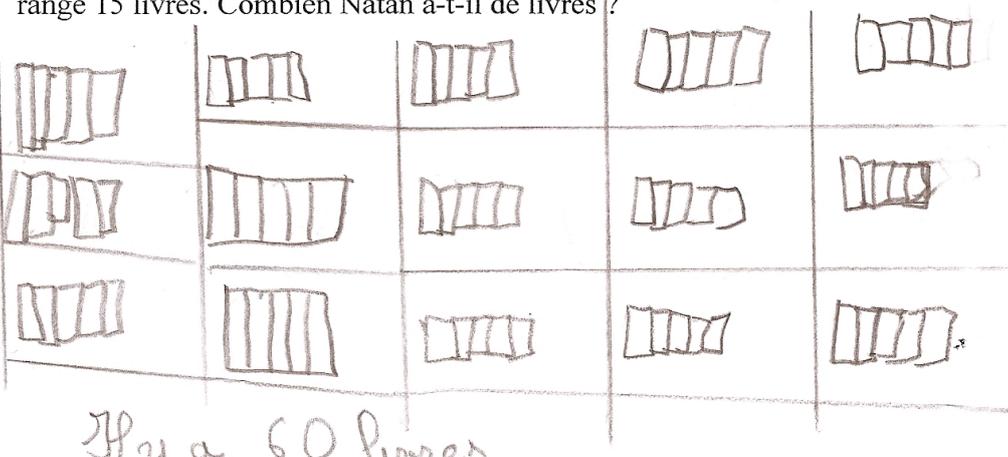
5) Une feuille de cahier a 6 carreaux sur la largeur et 28 carreaux sur la longueur. Combien y a-t-il de carreaux sur la feuille ?

$$\begin{array}{r} 6 \text{ (4)} \\ x 28 \\ \hline 168 \end{array}$$

Il y a 168 carreaux

6) Dans la bibliothèque de Natan, il y a 5 étagères. Sur chaque étagère, Natan a rangé 15 livres. Combien Natan a-t-il de livres ?

$$\begin{array}{r} 5 \text{ (4)} \\ x 15 \\ \hline 60 \end{array}$$



7) Un jardinier a planté 9 rangées de 16 salades. Combien de salades a-t-il planté ?

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 16 \\ \hline 96 \end{array} \quad \textcircled{3}$$

Il a planté 96 salades

8) Dans une tablette de chocolat, il y a 32 carrés. Combien de carrés y a-t-il dans 8 tablettes ?

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 32 \\ \hline 256 \end{array} \quad \textcircled{4}$$

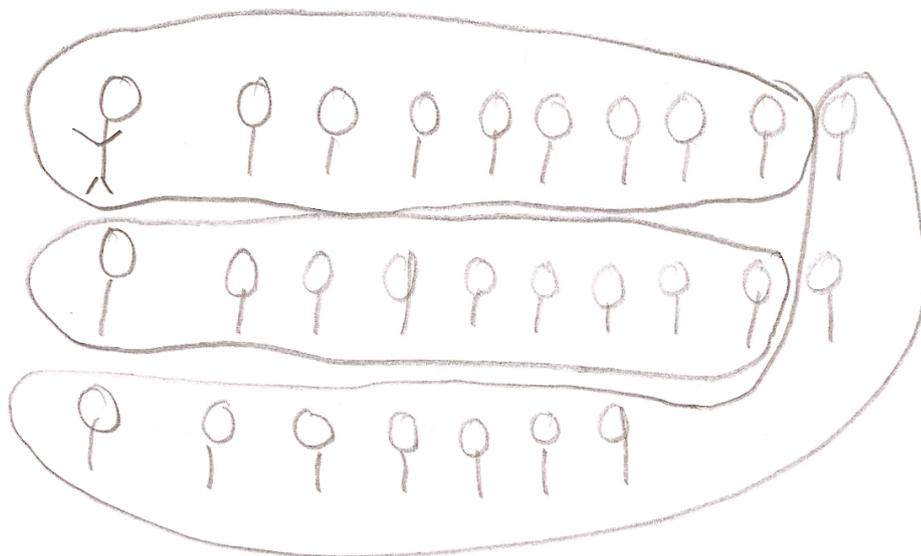
Il y a 256 carrés

9) La maîtresse a 25 boîtes de 9 feutres sur son étagère. Combien de feutres a-t-elle en tout ?

$$\begin{array}{r} 9 \\ \times 25 \\ \hline 225 \end{array} \quad \textcircled{4}$$

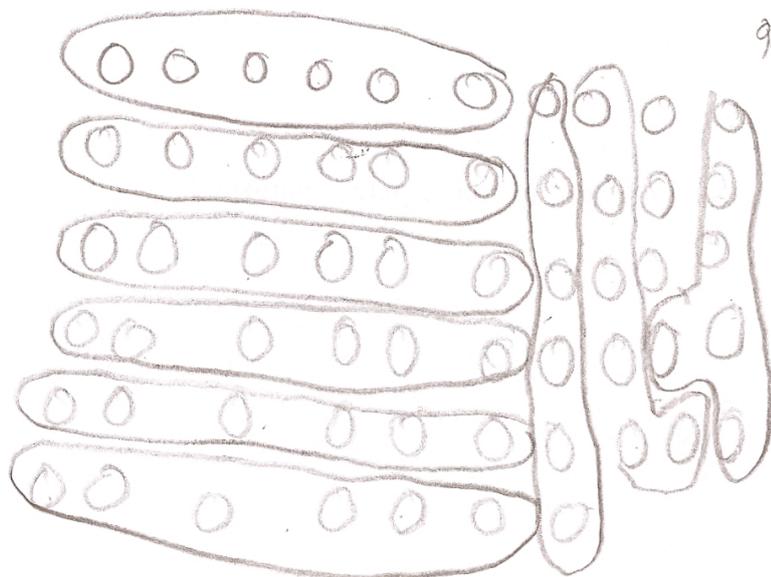
Prénom : *Lola*

10) Il y a 27 élèves dans la classe de CE2. Le maître veut faire des équipes de 9 enfants. Combien va-t-il faire d'équipes ?



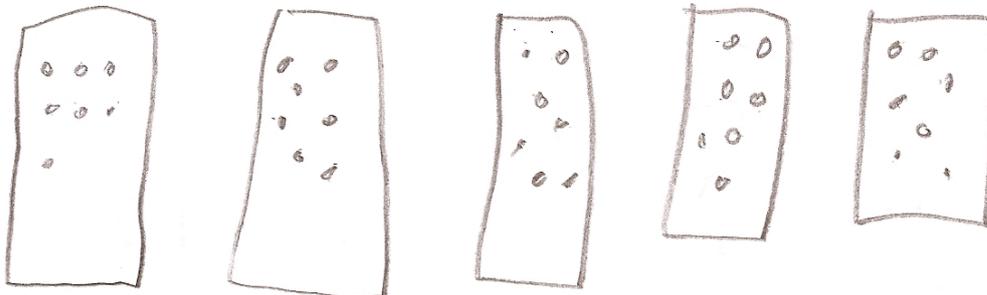
Elle va faire 3 équipes.

11) Dans une ferme, les poules ont pondu 57 œufs. Le supermarché les achète par boîtes de 6. Combien de boîtes peut-il acheter ?



Il peut acheter 9 boîtes.

12) Léo a acheté 6 paquets de chewing-gums. Il a compté tous ses chewing-gums et a trouvé 42. Combien y a-t-il de chewing-gums dans un paquet ?



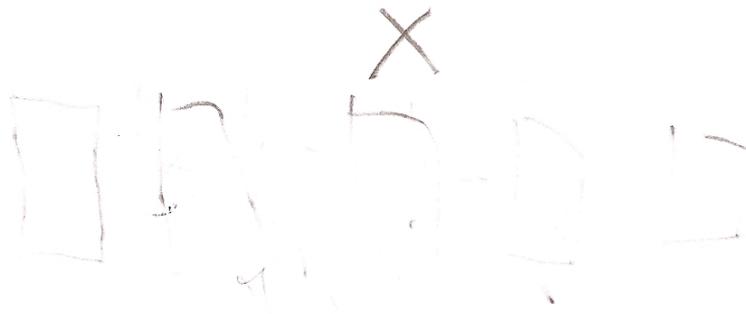
6

7



Il y a 7 chewing-gums.

13) Un fermier élève 124 lapins. Il fabrique de nouveaux clapiers pour loger ses lapins. Dans chaque clapier, il veut mettre 4 lapins. Combien de clapiers doit-il fabriquer ?



14) L'épicière range 135 bouteilles de jus de fruit dans 7 rayons. Combien de bouteilles a-t-elle rangé dans chaque rayon ?

$$\begin{array}{r} \times \quad 135 \\ \quad \quad 7 \\ \hline 945 \end{array}$$

③
②

Elle a rangé 945 bouteilles

• Annexe 3.d : Production d'Eléa

Prénom : Eléa

1) Un tableau comporte 9 cases sur la longueur et 7 cases sur la largeur. Combien y a-t-il de cases dans le tableau ?

dans le tableau il a 16 cases.

$$9 + 7 = 16$$

2) Dans la commode de Charline, il y a 6 rangées de 4 tiroirs. Combien y a-t-il de tiroirs dans la commode ?

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 24$$

$$6 \times 4 = 24$$

Dans la commode de Charline il y a 24 tiroirs.

3) J'ai collé 5 rangées de 8 gommettes. Combien ai-je collé de gommettes ?

$$5 \times 8 = 40$$

Elle a collé 40 gommettes.

4) Maman a acheté 3 boîtes de 6 œufs. Combien d'œufs a-t-elle acheté ?

$$3 \times 6 = 18$$

Maman a acheté 18 œufs.

5) Une feuille de cahier a 6 carreaux sur la largeur et 28 carreaux sur la longueur. Combien y a-t-il de carreaux sur la feuille ?

6) Dans la bibliothèque de Natan, il y a 5 étagères. Sur chaque étagère, Natan a rangé 15 livres. Combien Natan a-t-il de livres ?

$$5 \times 15 = 75$$

Natan a rangé 75 livres.

7) Un jardinier a planté 9 rangées de 16 salades. Combien de salades a-t-il planté ?

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{5} \textcircled{9} \\
 \times 16 \\
 \hline
 54 \\
 090 \\
 \hline
 144
 \end{array}$$

Il a planté 144 salades,

8) Dans une tablette de chocolat, il y a 32 carrés. Combien de carrés y a-t-il dans 8 tablettes ?

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{3} \textcircled{2} \\
 \times 8 \\
 \hline
 256
 \end{array}$$

dans 8 tablette il ya 256 carrés

9) La maîtresse a 25 boîtes de 9 feutres sur son étagère. Combien de feutres a-t-elle en tout ?

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{2} \textcircled{5} \\
 \times 9 \\
 \hline
 345
 \end{array}$$

345 feutres

Prénom : Elia

10) Il y a 27 élèves dans la classe de CE2. Le maître veut faire des équipes de 9 enfants. Combien va-t-il faire d'équipes ?

11) Dans une ferme, les poules ont pondu 57 œufs. Le supermarché les achète par boîtes de 6. Combien de boîtes peut-il acheter ?

$$\begin{array}{r} \cancel{2} \cancel{7} \quad 5 \cancel{7} \\ \times 5 \cancel{7} \\ \hline \cancel{2} \quad 3 \quad 2 \\ + \quad 3 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 3 \quad 3 \quad 2 \end{array}$$

332 boîtes

12) Léo a acheté 6 paquets de chewing-gums. Il a compté tous ses chewing-gums et a trouvé 42. Combien y a-t-il de chewing-gums dans un paquet ?

13) Un fermier élève 124 lapins. Il fabrique de nouveaux clapiers pour loger ses lapins. Dans chaque clapier, il veut mettre 4 lapins. Combien de clapiers doit-il fabriquer ?

$$\begin{array}{r} 124 \\ \times 4 \\ \hline 496 \end{array}$$

14) L'épicier range 135 bouteilles de jus de fruit dans 7 rayons. Combien de bouteilles a-t-il rangé dans chaque rayon ?

► **ANNEXE n°4 : Fiche de préparation** de la séance portant sur la situation du pavé en morceaux de sucre.

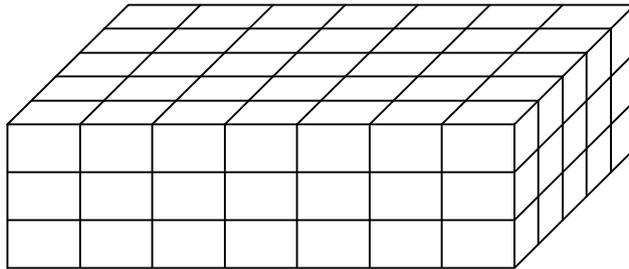
Cycle 3 - CE2 Séance Durée : 40 min	SITUATION « <i>Le pavé en morceaux de sucre</i> »			04/2012	Période 4
Objectif	- résoudre un problème de type multiplication				
Compétences	L'élève doit être capable de : - reconnaître une situation du champ conceptuel de la multiplication - mobiliser les résultats des tables de multiplication - calculer mentalement un produit - utiliser une technique posée de la multiplication d'un nombre à deux chiffres par un nombre à un chiffre				
Pré-requis	- Tables de multiplication - Résolution de problèmes multiplicatifs - Technique opératoire posée de la multiplication				
Dispositif	1 groupe hétérogène de 5 élèves				
Matériel	- 1 fiche-réponse par élève (qui pose le problème et fait office de brouillon) <i>(cf annexe n°5)</i> - 1 crayon à papier par élève - 1 pavé de $7 \times 3 \times 5$ morceaux de sucre collés par plaques de 7×3 grâce à de l'adhésif double-face - 525 morceaux de sucre mobiles + un caméscope				
Phases	Durée	Matériel	Dispositif	Activité de l'enseignant et consignes	Activité attendue des élèves
<u>Phase de présentation</u>	5 min	- pavé - morceaux de sucre mobiles - fiche-réponse - crayon	Collectif	- présenter le problème, le matériel à disposition des élèves - engager les élèves dans l'action - donner la consigne : « Vous avez quinze minutes pour répondre tout seul à la question du problème qui est : " <i>Combien y a-t-il de morceaux de sucre dans ce pavé ?</i> ". Vous pouvez utiliser les morceaux de sucre qui sont devant vous, vous pouvez dessiner ou écrire sur votre feuille de brouillon. Vous répondez ensuite à la question et vous nous expliquerez oralement, chacun votre tour, comment vous avez procédé. »	- écouter - s'approprier le matériel - reformuler la consigne

<u>Phase de recherche</u>	10 min	- pavé - morceaux de sucre mobiles - fiche-réponse - crayon	Travail individuel	- vérifier que la consigne est respectée et que les élèves cherchent réellement ce qui est demandé - repérer les différentes procédures utilisées	- manipulation - élaboration d'une procédure personnelle ou experte
<u>Phase de mise en commun</u>	5 min	- pavé - morceaux de sucre mobiles - fiche-réponse	Collectif	- réguler les interactions - faire émerger les différentes procédures	- verbalisation de sa procédure et de son résultat
<u>Phase de validation n°1</u>	10 min	- pavé - morceaux de sucre mobiles	Travail individuel	- <i>en retrait</i>	- reconstituer le pavé - compter le nombre de morceaux utilisés
<u>Phase de validation n°2</u>	10 min	- pavé	Collectif	- diriger la décomposition du pavé par « plaque » de 7×3 morceaux - étayer le dénombrement pour faire le lien avec la notion de multiplication	- réaliser la décomposition par « plaque » - dénombrer les morceaux de sucre de chaque « plaque » - répondre aux questions d'étayage de l'enseignant

► ANNEXE n°5 : **Fiche-énoncé** distribuée aux élèves lors de la séance portant sur la situation du pavé en morceaux de sucre.

Prénom : _____

Combien y a-t-il de morceaux de sucre dans ce pavé ?



► **ANNEXE n°6** : **Verbatim** de la séance portant sur la situation du pavé en morceaux de sucre, et indications sur son déroulement. (E représente Eglantine Valls ; J représente Julia Olive)

1
1 Installation du groupe de travail ► de 0" à 40"
2 Présentation de la situation et passage de la consigne ► de 40" à 2'50"
3 **E** : Alors, moi j'ai un problème aujourd'hui...J'ai un tas de sucre là, et je voudrais savoir combien
4 il y a de sucres.
5 **J** : Et il y en a dedans, c'est plein.
6 **E** : Donc j'ai tout un tas de sucres. Vous pouvez regarder, c'est un paquet, c'est comme si c'était
7 un paquet de sucre. Je voudrais savoir combien il y a de sucres... Donc vous avez sur votre fiche
8 là le problème. Ce qu'on a représenté ici, à l'ordinateur, c'est ce que vous avez là devant vous...
9 et ce tas de sucres, ce qu'on vous demande, c'est combien y a-t-il de morceaux de sucre dans ce
10 pavé droit. Vous avez toute une place sur votre feuille. Si vous avez besoin, parce que vous avez
11 beaucoup de choses à dire, vous avez l'autre côté de la feuille. Vous pouvez regarder le pavé, vous
12 pouvez prendre des morceaux de sucre. Vous avez la possibilité de faire des dessins, des calculs,
13 mais vous devez me dire combien il y a de morceaux de sucre dans ce pavé.
14 **Eléa** : Et après on va l'expliquer ? On le marque ?
15 **E** : Il faut.
16 **J** : Vous écrivez le maximum sur votre feuille, Eléa, vous essayez d'expliquer un petit peu, et vu
17 que c'est compliqué quand même d'écrire tout ce qu'on pense dans notre tête, après on en
18 discutera. Si on n'arrive pas trop à comprendre comment vous avez fait.
19 **E (à Lola)** : Marque ton prénom.
20 **J** : Vous pouvez le manipuler, mais de toute façon le nombre qu'on doit compter, le nombre de
21 morceaux de sucre c'est le même sur votre feuille.
22
23 Phase de recherche individuelle ► de 2'50 à 26'
24 (*Maëlys manipule les morceaux de sucre...*)
25 ► 4'50 : *Laurent a terminé.*
26 **J** : Dis-moi comment t'as fait.
27 **Laurent** : J'ai compté, heu, combien y en avait là sur une colonne.
28 **J** : La ligne là, celle-là, dans ce sens ?
29 **Laurent** : Voilà
30 **J** : Oui...
31 **Laurent** : Après j'ai additionné fois 3, enfin j'ai multiplié fois 3 parce qu'il y est 3 fois. Ça fait
32 21. Donc il y a 21 dans chaque...rangée et comme là il y en a 5 de rangées, j'ai fait 21 fois 5 et ça
33 fait 105.
34 **J** : D'accord.
35 5'20 : *Laurent a fini ; il est libéré pour un autre travail.*
36 **E (à Lola)** : Pour vérifier ton résultat, tu vas essayer de refaire le pavé et de compter pour voir si
37 tu trouves la même chose.
38 *Maëlys construit son pavé.*
39 ► 6'40
40 **Eléa** : J'ai fini !
41 **J (à Lola)** : Alors, tu m'expliques ce que tu as fait avant de vérifier ?
42 **Lola** : 3 fois 7, 28.
43 **J** : Oui.
44 **Lola** : Après j'ai fait 28 + 28, 56 et après j'ai fait 5 fois 7, 35.
45 **J** : Pourquoi ?
46 **Lola** : Parce que 5 fois 7 c'est comme ça là (*montre sur le pavé une plaque*)
47 **J** : Oui.
48 **Lola** : Et après j'ai fait 35 + 35, 70 et puis j'ai fait 56 + 70.

49 **E** : Qu'est-ce que ça représente pour toi 56 sucres ?

50 **Lola** : C'est ça (*montre deux plaques opposées*).

51 **J** : Tu as compris qu'il y en avait dedans des morceaux, à l'intérieur ?

52 **Lola** : oui

53 **J** : Ok. (*Maëlys continue à dénombrer le pavé reconstruit*) Donc Eléa ?

54 **Eléa** : J'ai fait, j'ai compté 3 et... j'ai fait 3 et 7

55 **J** : Oui

56 **Eléa** : ...et j'ai fait 5 fois 7.

57 **J** : Alors, pourquoi t'as fait tout ça ? Explique-moi. Pourquoi t'as fait 5 fois 7 ?

58 **Eléa** : Euh... j'ai fait 5 fois 3

59 **J** : Et t'as fait 5 fois 7 aussi

60 **Eléa** : En fait, euh... j'ai fait ça donc après je me suis doutée qu'il y avait 7, 7 et 7.

61 **J** : Là il y a le 7. Donc tu m'as dit ?

62 **Eléa** : Je fais 3 et je fais 7 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

63 **J** : D'accord

64 **Eléa** : Je vais faire 5 fois 7, et après je vais mettre égal, ça fait 35. Sur le côté, ben il y a 1, 2, 3, 4,

65 5 et là 3, donc j'ai fait 5 fois 3. Et après j'ai compté, ça fait 15. J'ai assemblé les deux.

66 **J** : C'est-à-dire assemblé ?

67 **Eléa** : J'ai...

68 **J** : Tu les a ajoutés en fait, tu les a additionnés ?

69 **Eléa** : Oui.

70 **J** : D'accord.

71 **Eléa** : J'ai fait une flèche pour dire que... voilà, et j'ai dit $5 + 5$ ça fait 10 donc on met 10.

72 **J** : D'accord, c'est pour faire ton addition en fait ?

73 **Eléa** : Oui. Et après j'ai mis $3 + 1$ ça fait 4. Vu que c'est les dizaines, j'ai mis que ça fait 40. Mais

74 vu qu'il y a 10, je dois encore ajouter l'autre donc ça fait 50. Là c'est la même chose, mais là c'est

75 pas la même chose, parce que c'est pas les mêmes. Donc je vais faire $5 + 5$ ça fait 10 aussi mais 3

76 $+ 3$ ça fait 60. Donc j'ai compté, j'ai mis 10 avec ça, ça fait 7 donc ça fait 70. Et après, tout à la

77 fin, j'ai rassemblé ça, ça fait $50 + 50, + 70$.

78 **J** : Alors, pourquoi t'as recommencé 5 fois 7 plusieurs fois ? Ton premier calcul là, 5 fois 7, c'est

79 pour savoir quoi en fait ?

80 **Eléa** : Ben en fait j'ai fait 5 fois 7 là, 5 fois 3 y a les deux côtés : 5 fois 3, 5 fois 3, donc ça fait

81 deux. Là, y en une autre et là y en a une autre (*en montrant sur la feuille les deux autres plaques*

82 *de 5 fois 7 morceaux*). Donc je fais aussi trois "5 fois 7" parce que si je ferais qu'un côté beh ça

83 finirait pas.

84 **J (à Maëlys)** : Tu m'expliques pourquoi tu fais ça ?

85 **Maëlys** : J'ai fait, j'ai compté, il y en avait 4.

86 **J** : Où ça ?

87 **Maëlys** : Là : 1, 2, 3, 4... euh, 5. Et il y en avait 7 comme ça.

88 *Elle barre la partie de gauche et réécrit en remplaçant le 4 par un 5.*

89 **E (à Lola)** : Donc quand tu comptes 3 fois 7, qu'est-ce que tu cherches à calculer ?

90 **Lola** : Euh... Le pavé... enfin, le dessus. Les sucres qu'il y a sur le dessus.

91 **E** : Alors tu cherches à calculer... (*Eglantine reconstruit la plaque de 3 fois 7 morceaux*). Est-ce

92 que tu es d'accord que tu cherches à calculer ça ?

93 **Lola** : Oui. Parce que quand je fais 3 fois 7, ben je fais 3 fois les 7.

94 **E** : D'accord, je suis d'accord avec toi.

95 **Lola** : Donc je fais 3 fois ça. Et après je fais 3 fois 7 plus 1, 2, 3, 4, 5 (*en montrant les plaques*

96 *superposées*) plus 5 fois 7.

97 **E** : Je suis d'accord avec toi quand on fait 3 fois 7 on calcule tout ce qu'il y a au-dessus, et tu me

98 dis que tout ce dessus, ça y est 5 fois.

99 **Lola** : Non, 4 fois.

100 **E** : Alors qu'est-ce qu'on pourrait faire ?

101 **Lola** : Ben on peut faire 4 fois ce qu'il y a au-dessus. On fait 4 fois, parce qu'il y en a 4. Et celle

102 du dessus, ça y est, ça fait 3 fois 7, 28. Ensuite tu fais 4 fois 28 pour avoir 4 fois.

103 **E** : Vas-y, calcule-le.

104 **Lola** : Beh...4 fois 8, 24. Je pose 4 et je retiens 2. Et 2 fois 4, 8, et 2, 10. Donc je trouve 104

105 sucres. Et parce qu'on n'a pas compté celui qui est...on n'a pas compté...où on faisait le... donc il

106 y en a un de plus, ça fait 5. Donc on fait 5 fois 28. 8 fois 5, 45. Euh, 40. Je pose 0 et je retiens 4. 2

107 fois 5, 10, et 4.

108 **E** : Il y a quelque chose qui me dérange. C'est que ton raisonnement il est juste...

109 **Lola** : ...mais mon résultat il est faux ?

110 **E** : ...mais on trouve 140 alors que toi tu les a comptés un par un et t'as trouvé 105. Alors du coup

111 il y a quelque chose qui me dérange.

112 **Lola** : C'est que je me suis trompée dans l'addition, euh dans la multiplication.

113 **E** : Celle-là elle est juste de multiplication.

114 **Lola** : Et celle-là elle est fausse.

115 **E** : Alors, regarde, 3 fois 7 tu les as là. Essaie de me retrouver le résultat de 3 fois 7.

116 *Lola compte un par un les morceaux de la plaque.*

117 **Lola** : Ça fait 21. 3 fois 7, 21.

118 **E** : Maintenant, qu'est-ce que je dois faire ?

119 **Lola** : Ben... 21 fois 4, 4 fois 21. Non, 5 fois 21.

120 **E** : D'accord.

121 *Lola pose la multiplication.*

122 **E** : Et cette fois-ci tu retombes bien sur le résultat que tu as trouvé en comptant les sucres un par

123 un.

124

125 *Phase de validation collective ▶ de 26' à 35'30"*

126 **J** : Bon, maintenant, on va décomposer le pavé pour savoir combien il y a de morceaux de sucre.

127 *Lola défait la première face qui contient 3 fois 7 morceaux, et compte un à un les morceaux.*

128 **E** : Et 21, c'est le résultat de quoi les enfants ?

129 **Lola** : Du premier morceau de sucre.

130 **E** : Ce premier morceau, il était constitué de combien de sucres ?

131 **Lola** : 21.

132 **E** : 21 au total. C'était quoi comme forme ?

133 **Maëlys** : Un pavé.

134 **E** : Non.

135 **Lola** : Un pavé droit.

136 **Maëlys** : Un rectangle.

137 **E** : C'était quoi ?

138 **Maëlys** : Un rectangle.

139 **E** : C'était un rectangle. Sur la longueur, y a combien de morceaux de sucre ?

140 **Lola** : 21.

141 **E** : Sur la longueur, y a combien de morceaux de sucre ? C'est quoi la longueur d'un rectangle ?

142 **Lola** : 7.

143 **E** : Et sur la largeur ?

144 **Maëlys** : 5

145 **Lola** : 3.

146 **E** : 3. Comment on fait pour calculer le nombre de sucres /

147 **Maëlys** : 3 fois...7

148 **E** : 3 fois 7. Et 3 fois 7, ça fait ?

149 **Maëlys** : 21.

150 **E** : 21. Et pourquoi ça fait 21 ?

151 **Eléa** : Ben tu fais $7 + 7 + 7$.

152 **E** : Et là, regardez, vous le retrouvez là : je fais $7 + 7 + 7$ (*en montrant sur le pavé les lignes de 7*
153 *morceaux de sucre*). C'est pour ça qu'on dit qu'on fait 3 fois le 7.

154 **Eléa** : Et après on fait ça (*en montrant les colonnes de 3 morceaux de sucre*).

155 **E** : Si on fait comme ça, ça fait combien de /

156 **Maëlys** : 3 fois 7.

157 **E** : Ça fait toujours 3 fois 7. Mais on fait 7 fois le 3. Et on sait que 3 fois 7 ou 7 fois 3 ça fait 21,
158 ça change rien. On le voit bien, on n'a pas rajouté des morceaux de sucre, on n'en a pas enlevé.
159 Alors on en était à 21. Continuez à démonter.

160 *Deux élèves décomposent la deuxième plaque contenant 3 fois 7 morceaux de sucre.*

161 **Maëlys** : 22, 23, ... , 41.

162 **E** : Alors là y a un problème les enfants quand même. Vous pensez pas qu'il y a un problème là ?
163 ... Combien on a dit qu'il y avait de morceaux de sucre sur une plaque ?

164 **Lola** : 21.

165 **E** : 21. Et là on en a enlevé combien de plaques ?

166 **Maëlys & Lola** : 2.

167 **E** : Combien ça fait de sucres ?

168 **Lola** : 42.

169 **E** : Pourquoi ?

170 **Maëlys** : 21 fois 2, 42.

171 **Lola** : $21 + 21$.

172 **E** : Oui, d'accord. Et vous vous avez compté 41, donc il y a un problème. Donc on en est à 42.
173 Maintenant y en a une qui enlève et une qui compte. Sinon on s'y retrouvera pas.

174 *Lola et Maëlys enlèvent une nouvelle plaque.*

175 **Maëlys** : ..., 62, 63.

176 **E** : Est-ce que c'est normal qu'on trouve 63 ?

177 **Maëlys** : Oui.

178 **E** : Pourquoi ?

179 **Lola** : 3 fois 21.

180 **E** : Ça fait combien ?

181 **Maëlys** : Normalement, on doit trouver 63.

182 **E** : Et on a trouvé combien ?

183 **Lola & Maëlys** : 63.

184 **E** : Donc est-ce que ça vous convient ?

185 **Maëlys & Eléa** : Oui.

186 **E** : Moi aussi.

187 **J** : Maëlys tu arrêtes, Eléa tu viens prendre le relais ?

188 **Maëlys** : On était à 63.

189 **E** : Allez, on continue.

190 *Eléa et Lola enlèvent une nouvelle plaque.*

191 **Lola** : ..., 83, 84.

192 **E** : Alors, est-ce que 84 ça vous convient les enfants ?

193 **Lola** (*en se mettant la main sur le front*) : Euh... 4 fois 21... (*en marmonnant*) 80... (*à haute voix*)
194 Oui.

195 **E** (*à Eléa*) : Est-ce que ça te convient toi ?

196 **Eléa** : Oui.

197 **E** : Pourquoi ?

198 **Eléa** : Ben on a compté.

199 **E** : T'as compté. Et quand on compte on se trompe jamais ?

200 **Maëlys** : On a trouvé combien ?

201 **Eléa** : Des fois on peut se tromper. Il faudrait calculer.

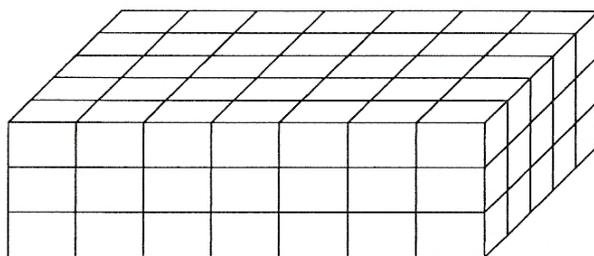
202 **E** : Alors par le calcul, combien on devrait trouver par le calcul ?
203 **Maëlys** : 84.
204 **E** : En faisant quelle opération ?
205 **Lola** : $63 + 21 /$
206 **Maëlys** : 4 fois 21.
207 **E** : Oui, je suis d'accord les filles. Et ces deux calculs nous mènent au résultat : 84. Vous avez
208 bien compté. On continue pour avoir enfin le résultat qu'on cherche.
209 *Les deux élèves continuent à décomposer le pavé : la dernière plaque.*
210 **Eléa** : ..., 104, 105.
211 **E** : 105 ? Est-ce que c'est notre résultat ?
212 **Lola & Maëlys & Eléa** : Oui.
213 **E** : Pourquoi ? Quelle opération nous permet de trouver ce résultat ?
214 **Maëlys** : 5 fois 21.
215 **E** : Et 5 fois 21 /
216 **Maëlys** : Ça fait...105.
217 **E** : Ça fait 105. Alors qu'est-ce qui fallait faire pour résoudre ce problème ?
218 **Maëlys** : 5 fois 21.
219 **E** : Et 21 tu l'as trouvé comment ?
220 **Maëlys** : C'est la première plaque.
221 **E** : Et tu as fait quelle opération ?
222 **Maëlys** : Euh... Je sais plus.
223 **Lola** : On a compté tous les sucres de la face du dessus. Ça fait 3 fois 7.
224 **J** : Pourquoi 3 fois 7 ?
225 **Maëlys** : Parce qu'il y avait 3 lignes de 7 sucres.
226 [...].

► ANNEXE n°7 : **Productions** des quatre élèves observés – La situation du pavé en morceaux de sucre.

• *Annexe 7.a* : Production de Laurent

Prénom : Laurent

Combien y a-t-il de morceaux de sucre dans ce pavé ?

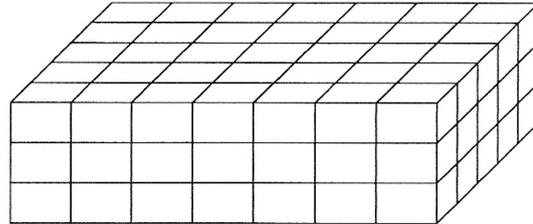


$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 3 \\ \hline 21 \end{array} \quad \begin{array}{r} 21 \\ \times 5 \\ \hline 105 \end{array}$$

• Annexe 7.b : Production de Maëlys

Prénom : Maëlys

Combien y a-t-il de morceaux de sucre dans ce pavé ?



$$\begin{array}{l}
 \cancel{4 \times 7 = 28} \quad 5 \times 7 = 35 \\
 \underline{4 \times 7 = 28} \quad 5 \times 7 = 35 \\
 \underline{4 \times 7 = 28} \quad 5 \times 7 = 35 \\
 \underline{4 \times 7 = 28} \quad 5 + 7 = 35
 \end{array}$$

~~il y a 757 morceaux de sucre dans ce pavé~~

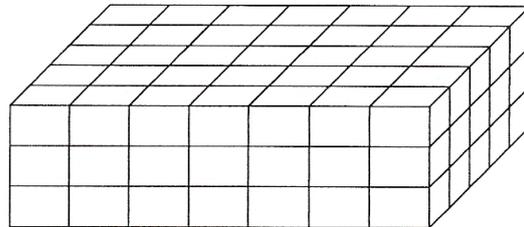
$$35 + 35 + 35 + 35 = 35 \times 4 =$$

$$\begin{array}{r}
 35 \\
 \times 4 \\
 \hline
 140
 \end{array}$$

• Annexe 7.c : Production de Lola

Prénom : Lola

Combien y a-t-il de morceaux de sucre dans ce pavé ?



$$\begin{array}{r} \times 3 \quad 28 \text{ ①} \\ \hline 7 \\ \hline 28 \end{array} \quad \begin{array}{r} + 28 \\ \hline 56 \end{array}$$

Il y a 56 sucres

$$\begin{array}{r} \times 5 \quad ① \\ \hline 35 \\ \hline 70 \end{array} \quad \begin{array}{r} + 35 \\ \hline 70 \end{array} \quad \begin{array}{r} 56 \\ + 70 \\ \hline 126 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 3 \quad ② \\ \hline 21 \\ \hline 105 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 28 \quad ② \\ \hline 105 \\ \hline 140 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 5 \quad ② \\ \hline 140 \end{array}$$

Il y a 105 sucres en tout

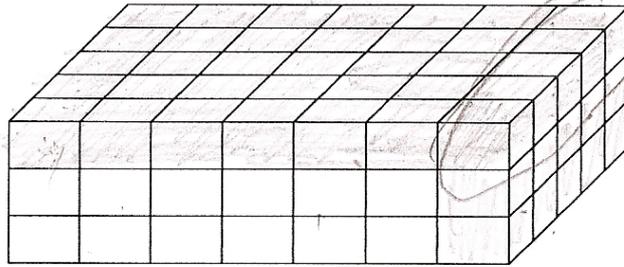
Il y a 105 sucre

$$\begin{array}{r} \times 3 \\ \hline 21 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 5 \\ \hline 105 \end{array}$$

• Annexe 7.d : Production d'Eléa

Prénom : Eléa

Combien y a-t-il de morceaux de sucre dans ce pavé ?



$$5 \times 7 = 35 \rightarrow 50$$

$$5 \times 3 = 15$$

$$5 \times 3 = 15 \rightarrow 50$$

$$5 \times 7 = 35 \rightarrow 70$$

$$5 \times 7 = 35$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ + 50 \\ \hline \end{array}$$

$$+ 70$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ + 50 \\ + 70 \\ \hline 170 \end{array}$$