

Modèles de croissance de populations de poissons

Charles Bordet

► **To cite this version:**

Charles Bordet. Modèles de croissance de populations de poissons. Méthodologie [stat.ME]. 2013. dumas-00858949

HAL Id: dumas-00858949

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00858949>

Submitted on 6 Sep 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Strasbourg

Modèles de croissance de populations de poissons

par

Charles Bordet

UFR de Mathématique et d'Informatique

août, 2013

© Charles Bordet, 2013

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1:	Introduction	1
Chapitre 2:	Généralisation du modèle de Schaefer	5
2.1	Stationnarité du modèle de Pella et Tomlinson	5
2.2	Détermination des points de référence biologique	12
2.3	Stationnarité du modèle de Fox	17
Chapitre 3:	Cadre général pour les points de référence biologique	24
Annexe A:	Figures	31
Annexe B:	Contre-exemples pour l'existence d'une variable aléatoire	39

Chapitre 1

INTRODUCTION

Dans la recherche halieutique, c'est-à-dire qui concerne la pêche, on peut utiliser des modèles de surplus de production (surplus-production model, SPM) pour étudier l'évolution de la biomasse d'une pêcherie et estimer le rendement équilibré maximal (maximum sustainable yield, MSY), ce qui correspond à la prise maximale ne compromettant pas la survie à long terme de la population. Ce sont les modèles les plus simples capables d'évaluer le stock de poissons ainsi que de déterminer un taux de pêche parce qu'ils regroupent en une seule fonction de production le recrutement de la biomasse, sa mortalité et sa croissance. De plus, ils ne requièrent que très peu de données par rapport à des modèles plus complexes tels les modèles de structure d'âge : seulement une série temporelle d'indice d'abondance de stock (par exemple, le CPUE, *Catch-Per-Unit-of-Effort*, (Edwards et al., 2012)) et les prises associées sont nécessaires. Ils peuvent aussi être utilisés lorsque les données sont très limitées (Chaloupka and Balazs, 2007). Même s'ils sont critiqués pour être moins réalistes que les modèles de structure d'âge, les SPM restent très utiles dans la mesure où ils peuvent donner des résultats aussi utiles que ceux obtenus à l'aide de modèles plus complexes (Ludwig and Walters, 1985). Ils sont par ailleurs toujours très utilisés dans la gestion des pêcheries (Panhwar et al., 2012; Prager, 2002). Nous nous sommes intéressés au cas à temps discret, mais nous pensons que des résultats similaires pourraient être obtenus en temps continu (Ewald and Wang, 2010).

À chaque SPM est associé une fonction de production $f(\cdot)$ donnant la production de stock au temps $t + 1$ en fonction du stock de biomasse au temps t . La différence

de stock de biomasse entre le temps $t + 1$ et t est la différence entre la production de stock de biomasse et les prises au temps t :

$$B_{t+1} - B_t = f(B_t) - C_t, \quad (1.1)$$

où B_t est le stock de biomasse au temps t et C_t correspond aux prises au temps t . Pendant ce stage, nous nous sommes focalisés sur le modèle de Pella et Tomlinson (Pella and Tomlinson, 1969) dont la fonction de production est donnée par :

$$f(B_t) = \frac{p+1}{p} r B_t \left(1 - \left(\frac{B_t}{K} \right)^p \right), \quad t \geq 0, \quad (1.2)$$

où $r \in (0, 1)$ caractérise la croissance de la population, K est la capacité maximale de population et p est un paramètre d'asymétrie. Ce dernier paramètre permet d'introduire une asymétrie dans la courbe de production, ainsi qu'on peut le vérifier sur la Figure (1.1)

Il y a deux cas particuliers : $p = 1$ correspond au modèle de Schaefer (Schaefer, 1954) avec une fonction de production $f(B_t) = 2rB_t(1 - B_t/K)$ et le modèle de Fox (Fox, 1970) est le cas limite où p tend vers 0, ce qui donne la fonction de production $f(B_t) = -rB_t \log(B_t/K)$.

Dans un modèle déterministe, si l'espèce ne disparaît pas, on suppose que la biomasse va converger vers une certaine valeur B (hypothèse d'équilibre). Le MSY correspond alors au maximum de $f(B)$, et la stratégie est alors de garder la biomasse au niveau maximisant le surplus de production et de le pêcher. Pour le modèle de Pella et Tomlinson, on obtient :

$$\begin{aligned} f(B) &= \frac{p+1}{p} r B \left(1 - \left(\frac{B}{K} \right)^p \right) \\ \Rightarrow f'(B) &= 1 - (1+p) \left(\frac{B}{K} \right)^p = 0 \\ \Leftrightarrow B &= \frac{K}{(1+p)^{1/p}} \end{aligned}$$

Donc la biomasse qui maximise la fonction de production est $B_{MSY} = K/(p+1)^{1/p}$. Alors le MSY est égal à $f(B_{MSY}) = Kr/(1+p)^{1/p}$ et le taux de pêche optimal est

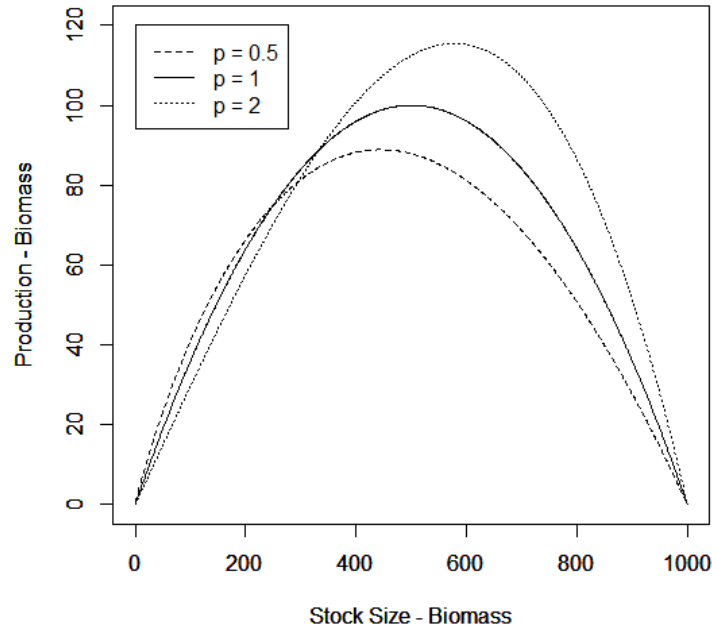


Figure 1.1. Représentation de la fonction de production du modèle de Pella et Tomlinson selon différentes valeurs du paramètre p .

$F_{MSY} = MSY/B_{MSY} = r$. La paramétrisation utilisée dans ce mémoire pour le modèle de Pella et Tomlinson permet ainsi d'avoir r comme taux de pêche optimal quelle que soit la valeur de p . Lorsqu'on fait tendre p vers 0, pour le modèle de Fox, on obtient $B_{MSY} = K/e$, $MSY = rK/e$, et $F_{MSY} = r$.

Supposons qu'un stock subisse un choc environnemental qui réduise sa biomasse presque à zéro. Lorsque B est proche de zéro, le taux de croissance dans (1.2) est $(p+1)r/p$. Ainsi, plus p est grand, plus le stock va mettre de temps pour se rétablir. Ceci nous indique que pour le modèle de Pella et Tomlinson, il semblerait que la sensibilité à la variabilité environnementale croît avec p . Pour le modèle de Fox, le taux de croissance pour B proche de zéro est $-r \log(B_t/K)$. Il tend vers $+\infty$ lorsque

B_t tend vers 0 et est bien plus grand que pour le modèle de Pella et Tomlinson. Le modèle de Fox serait donc bien moins sensible à la variabilité environnementale.

Les modèles de surplus de production ont été critiqués pour leurs estimations en général trop optimistes du MSY (Larkin, 1977; Boerema and Gulland, 1973). Ainsi, pour améliorer la pertinence de ces modèles, on veut prendre en compte la variabilité environnementale en incorporant au modèle un bruit aléatoire multiplicatif ε_t (indépendant et identiquement distribué), de variance σ^2 . On obtient alors :

$$B_{t+1} = \left[B_t + \frac{p+1}{p} r B_t \left(1 - \left(\frac{B_t}{K} \right)^p \right) - \phi B_t \right] \varepsilon_t, \quad (1.3)$$

où ϕ est le taux de pêche, avec, dans (1.1), $C_t = \phi B_t$. L'hypothèse déterministe d'équilibre ($B_{t+1} = B_t$) devient alors une hypothèse stochastique d'équilibre, c'est-à-dire que la distribution de B_{t+1} est la même que la distribution de B_t .

L'objectif est d'abord de généraliser les résultats obtenus par Bousquet et al. (2008) pour le modèle de Schaefer au modèle de Pella et Tomlinson. En premier, on étudie le processus stochastique défini par (1.3). On exhibe une distribution pour les résidus qui permet d'obtenir une expression de la distribution stationnaire et on en déduit une borne pour la variance de ces résidus qui assure l'existence du processus. Ensuite, on détermine l'impact de la variance des innovations sur les points de références biologiques en déterminant des versions stochastiques du *MSY* et de F_{MSY} . Les calculs ont été faits à la fois à l'aide de la distribution stationnaire précédemment déterminée mais aussi dans un contexte plus général en ajoutant l'effet d'une autocorrélation dans les innovations. L'autocorrélation peut être associée à des périodes de bonnes ou mauvaises années pour le stock. Le modèle limite de Fox est aussi étudié pour obtenir des résultats équivalents.

Chapitre 2

GÉNÉRALISATION DU MODÈLE DE SCHAEFER

Dans ce chapitre, nous allons nous focaliser sur l'étude du modèle stochastique (1.3). En imposant un modèle particulier pour les innovations, on détermine la forme de la distribution stationnaire de (1.3), puis on étudie la tolérance au bruit environnemental du processus. Pour ϕ et r fixé, on détermine une borne supérieure pour la variance des innovations qui nous garantit la stationnarité du processus, ou autrement dit, que la population survive à long terme.

2.1 Stationnarité du modèle de Pella et Tomlinson

On peut supposer sans perte de généralité que $\forall t \in \mathbb{N} : E(\varepsilon_t) = 1$. En effet, supposons que $\forall t \in \mathbb{N}, E(\varepsilon_t) = \mu$, alors on a :

$$B_{t+1} = \left[\left(1 - \phi + \frac{p+1}{p}r\right)B_t\mu - \frac{p+1}{p}r\frac{B_t^{p+1}}{K^p}\mu \right] \frac{\varepsilon_t}{\mu}$$

On va alors reparamétriser le modèle en écrivant :

$$\begin{cases} (1 - \phi + \frac{p+1}{p}r)\mu = 1 - \phi_\mu + \frac{p+1}{p}r_\mu \\ \frac{r}{K^p}\mu = \frac{r_\mu}{K_\mu^p} \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} K_\mu^p &= \frac{r_\mu}{r_\mu} K^p \\ \phi_\mu &= \phi\mu \\ r_\mu &= r\mu + \frac{p}{p+1}(\mu - 1) \\ \omega_t &= \frac{\varepsilon_t}{\mu} \end{aligned}$$

On a bien reparamétrisé l'équation :

$$B_{t+1} = \left[\left(1 - \phi_\mu + \frac{p+1}{p}r_\mu\right) B_t - \frac{(p+1)r_\mu}{pK_\mu^p} B_t^{p+1} \right] \omega_t$$

avec $E(\omega_t) = 1$ où les (ω_t) sont indépendants et identiquement distribués.

On va réécrire (1.3) afin de faciliter l'étude du modèle à l'aide de cette proposition :

Proposition 2.1.1. *Soit $Z_t = \frac{B_t}{K} \left(\frac{r(p+1)}{p-\phi p+r(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}}$, alors l'équation (1.3) est équivalente à :*

$$Z_{t+1} = \left(1 - \phi + \frac{p+1}{p}r\right)Z_t(1 - Z_t^p)\varepsilon_t \quad (2.1)$$

Proof. On a :

$$\begin{aligned} B_{t+1} &= \left[\left(1 - \phi + \frac{p+1}{p}r\right) B_t - \frac{p+1}{p}r \frac{B_t^{p+1}}{K^p} \right] \varepsilon_t \\ \iff B_{t+1} &= \left(1 - \phi + \frac{p+1}{p}r\right) B_t \left(1 - \frac{p+1}{p}r \left(\frac{B_t}{K}\right)^p \frac{1}{1 - \phi + \frac{p+1}{p}r}\right) \varepsilon_t \\ \iff Z_{t+1} &= \left(1 - \phi + \frac{p+1}{p}r\right) Z_t (1 - Z_t^p) \varepsilon_t \end{aligned}$$

□

L'équation (2.1) est bien définie tant que $0 < Z_t < 1$. Puisque la valeur maximale dans $(0, 1)$ de $z(1-z^p)$ est $p/(1+p)^{1/p+1}$, z_t va rester dans $(0, 1)$ tant que les innovations satisfont $\varepsilon_t \in \left(0, \frac{(1+p)^{1/p+1}}{p-\phi p+r(p+1)}\right)$. Cette condition apparait dans le théorème suivant qui généralise le Théorème 1 de (Bousquet et al., 2008) au modèle de Pella et Tomlinson.

Théorème 2.1.1. *On considère $\{Z_t\}$ la chaîne de Markov définie par (2.1). On suppose que les innovations $\{\varepsilon_t\}$ sont indépendantes et identiquement distribuées, de support inclus dans \mathbb{R}_+ .*

Si $z_0 \in]0, 1[$ et si le support des innovations $\text{Supp}(\varepsilon)$ est égal à $\left(0, \frac{(1+p)^{1/p+1}}{p-\phi p+r(p+1)}\right)$, alors la chaîne est irréductible et apériodique. Il s'ensuit que si la chaîne de Markov admet une distribution stationnaire, alors pour tout état initial, elle va converger vers cette distribution stationnaire.

Proof. La preuve est exactement la même que dans (Bousquet et al., 2008) en utilisant $\lambda(z) = (1 - \phi + \frac{p+1}{p}r)z(1 - z^p)$. \square

À présent que nous avons obtenu, sous certaines conditions, l'existence d'une unique distribution stationnaire pour la chaîne de Markov $\{Z_t\}$, nous allons spécifier dans le prochain théorème une forme particulière pour les résidus de telle manière à obtenir une distribution stationnaire explicite pour $\{Z_t\}$. Dans un premier temps, nous allons faire quelques rappels sur la loi Beta, notamment sa définition et le calcul de ses moments :

Définition 2.1.1. Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^*$. Alors X suit une loi Beta de paramètre (α, β) si :

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$$

Proposition 2.1.2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi Beta de paramètre (α, β) et $u \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$E(X^u) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + u)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + \beta + u)},$$

et

$$E(X^u(1-X)^{pu}) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + u)\Gamma(\beta + pu)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha + \beta + pu + u)}.$$

Proof. On utilise le théorème de transfert dans les deux cas. On obtient :

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+r-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+r)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+r)} , \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+r)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E(X^r(1-X)^{pr}) &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+r-1}(1-x)^{\beta+pr-1} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+r)\Gamma(\beta+pr)}{\Gamma(\alpha+\beta+pr+r)} . \end{aligned}$$

\square

Théorème 2.1.2. Soit $\gamma = \frac{p+1}{p}r - \phi > 0$ et supposons que γ et p sont tels que $\sigma_M^2 > 0$ où

$$\sigma_M^2 = \frac{-p\gamma^3 + 3\gamma^2 + 2\gamma}{(1 + \gamma)^2(1 + p\gamma)}.$$

Soit $\sigma^2 \in (0, \sigma_M^2)$ et on définit α et β par :

$$\beta = \frac{1}{2(1 + \gamma)\sigma^2} \left[\left(\frac{2}{p} - \gamma - \sigma^2(1 + \gamma) \right) + \sqrt{4\sigma^2 \frac{1+p}{p^2} + \left(\frac{2}{p} - \gamma - \sigma^2(1 + \gamma) \right)^2} \right]$$

$$\alpha = \beta\gamma - 1/p,$$

alors $\alpha, \beta > 0$. Supposons qu'il existe une variable aléatoire ε de support $\left(0, \frac{(1+p)^{1/p+1}}{p-p\phi+r(p+1)}\right)$ dont les moments sont donnés par

$$E[\varepsilon^v] = \left(\frac{\beta}{\frac{1}{p} + \alpha + \beta} \right)^v \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha + \beta + v + \frac{v}{p})}{\Gamma(\alpha + \beta + \frac{v}{p})\Gamma(\beta + v)} \quad (2.2)$$

Si les innovations $\{\varepsilon_t\}$ dans (2.1) ont pour moments (2.2), alors la distribution stationnaire de la chaîne $\{Z_t^p\}$ est une loi Beta de paramètre (α, β) .

Proof. Par construction $\beta > 0$, il reste à montrer que $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &< \frac{-p\gamma^3 + 3\gamma^2 + 2\gamma}{(1 + \gamma)^2(1 + p\gamma)} \\ \iff \gamma^2 + p\gamma^2 + 2\gamma + 2\gamma^2 - p\gamma^2 - p\gamma^3 &> \sigma^2(1 + \gamma)^2(1 + p\gamma) \\ \iff (1 + p)\gamma^2 + 2(1 + \gamma)\gamma - (1 + \gamma)p\gamma^2 &> \sigma^2(1 + \gamma)^2(1 + p\gamma) \\ \iff \frac{1 + p}{p} + \frac{2(1 + \gamma)}{p\gamma} - (1 + \gamma) &> \sigma^2 \frac{(1 + \gamma)^2}{\gamma} \left(1 + \frac{1}{p\gamma}\right) \\ \iff \frac{1 + p}{p} &> \frac{(1 + \gamma)^2\sigma^2}{p\gamma^2} - \frac{1 + \gamma}{\gamma}(2/p - \gamma - \sigma^2(1 + \gamma)) \\ \iff 4\sigma^2 \frac{1 + p}{p^2} &> \frac{4(1 + \gamma)^2\sigma^4}{p^2\gamma^2} - \frac{4(1 + \gamma)\sigma^2}{p\gamma}(2/p - \gamma - \sigma^2(1 + \gamma)) \\ \iff \sqrt{4\sigma^2 \frac{1 + p}{p^2} + (2/p - \gamma - \sigma^2(1 + \gamma))^2} &> \frac{2(1 + \gamma)\sigma^2}{p\gamma} - (2/p - \gamma - \sigma^2(1 + \gamma)) \\ \iff \beta &> \frac{1}{p\gamma} \\ \iff \alpha &> 0 \end{aligned}$$

Comme les conditions de 2.1.1 sont vérifiées, on a l'existence et l'unicité d'une distribution stationnaire. On suppose que $Y_t = Z_t^p$ suit une loi Beta de paramètre (α, β) et on montre que la distribution est invariante. Le processus pour Y_t est :

$$Y_{t+1} = (1 - \phi + r(p+1)/p)^p Y_t (1 - Y_t)^p \varepsilon_t^p \quad (2.3)$$

D'abord, d'après la Proposition 2.1.2, on a pour tout $u > 0$:

$$E(Y^u) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + u)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + \beta + u)},$$

et :

$$E(Y^u(1 - Y)^{pu}) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + u)\Gamma(\beta + pu)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha + \beta + pu + u)}.$$

On cherche à évaluer $(1 - \phi + r(p+1)/p)^{pu} E\{Y_t^u(1 - Y_t)^{pu}\} E(\varepsilon_t^{pu})$. Comme $1 - \phi + r(p+1)/p = 1 - \gamma$ et $\beta/(1/p + \alpha + \beta) = 1/(1 + \gamma)$, en remplaçant $E(\varepsilon_t^{pu})$ par (2.2), on obtient :

$$\frac{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + u)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + \beta + u)}$$

ce qui est égal au u^e moment d'une loi Beta(α, β). Ainsi, d'après la propriété qu'une distribution bornée est déterminée de manière unique par ses moments ([Shohat and Tamarkin, 1943](#)), Y_{t+1} suit une loi Beta de paramètre (α, β) .

Il reste à vérifier que $E(\varepsilon_t) = 1$ et $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$. Pour cela, on prend les moments de (2.3), on isole $E(\varepsilon_t^{pu})$ et on calcule les cas où $u = 1/p$ et $u = 2/p$. Le calcul n'est pas développé ici. \square

La condition $\sigma^2 < \sigma_M^2$ est nécessaire pour l'existence de la distribution stationnaire, ou autrement dit, est une condition nécessaire de non-extinction de la population. Des figures représentant l'évolution de σ_M^2 en fonction des différents paramètres ont été placées en annexe. La Figure (A.1) en donne l'évolution en fonction de $r(p+1)/p$ qui est le facteur de (1.2). Pour p fixé, on remarque que plus r augmente, et plus σ_M^2 est grand, donc plus le système peut soutenir une importante variabilité environnementale. En revanche, il semblerait que lorsque p augmente, σ_M^2 diminue.

C'est ce qui est confirmé par la Figure (A.2) où on observe l'évolution en fonction de p avec r fixé. La borne supérieure de la variance chute très rapidement lorsque p augmente en étant inférieur à 1 puis continue ensuite à décroître plus lentement avec de plus grandes valeurs de p . Pour ces deux figures, on s'est contenté de prendre $\phi = r$ (c'est-à-dire le taux de pêche optimal pour le modèle déterministe), mais on observe sur la Figure (A.3) que la sensibilité du processus à la variabilité environnementale diminue lorsque ϕ augmente. On observe d'ailleurs un maximum du taux de pêche qui correspond au cas où $\gamma = 0$, c'est-à-dire pour $\phi = r(p + 1)/p$.

Pour certaines valeurs des paramètres, la borne supérieure σ_M^2 pourrait devenir négative si p est trop grand. En utilisant Maple, on peut déterminer le maximum de p pour que σ_M^2 soit positive :

$$p < \frac{\sqrt{r^2 - 10r\phi + 12r + 9\phi^2 - 12\phi + 4} - 2r^2 + 2r\phi + 3r - 3\phi + 2}{2(r^2 - 2r\phi + \phi^2)}.$$

Toutefois, ce résultat reste d'une importance relative. Il s'avère en effet que si en théorie p pouvait prendre n'importe quelle valeur positive, en pratique on observe que p ne va jamais atteindre des valeurs suffisamment grandes pour atteindre ce maximum.

Jusqu'ici, nous avons supposé qu'il existe bien une variable aléatoire ε_t satisfaisant les conditions du Théorème 2.1.2. Avec quelques hypothèses supplémentaires, on peut en montrer l'existence :

Proposition 2.1.3. *Soit γ , α , et β définis comme dans le Théorème 2.1.2. Supposons que $p \in \mathbb{Q}$ et s'écrive $p = d/q$ avec d, q deux entiers positifs non nuls. Si $\beta > p\alpha$ et $\alpha + \beta > q$, alors il existe une variable aléatoire ε_t de moments (2.2) et de support $\left(0, \frac{(p+1)^{1+1/p}}{p-p\phi+r(p+1)}\right)$.*

Proof. Soit $U_0, \dots, U_{d-1}, V_0, \dots, V_{q-1}$ $d + q$ variables aléatoires indépendantes telles que pour i dans $\{0, \dots, d-1\}$, U_i suit une loi Beta de paramètre $\left(\frac{\alpha+\beta+i}{d+q}, \frac{(\beta+i)q-\alpha d}{d(d+q)}\right)$ et pour tout $j \in \{0, \dots, q-1\}$, V_j suit une loi Beta de paramètre $\left(\frac{\alpha+\beta+d+j}{d+q}, \frac{(\alpha+\beta+j-q)d}{q(d+q)}\right)$.

Ces lois sont bien définies grâce aux hypothèses sur α et β . On définit :

$$\varepsilon = \frac{(p+1)^{1+1/p}}{p-p\phi+r(p+1)} \prod_{i=0}^{d-1} U_i^{\frac{1}{d}} \prod_{j=0}^{q-1} V_j^{\frac{1}{d}}.$$

Il est clair que le support de ε est égal à $\left(0, \frac{(p+1)^{1+1/p}}{p-p\phi+r(p+1)}\right)$. On va montrer que les moments de ε sont égaux à (2.2). On remarque d'abord que :

$$\frac{(p+1)^{1+1/p}}{p-p\phi+r(p+1)} = \frac{\left(\frac{d}{q}+1\right)^{\frac{q}{d}+1}}{\frac{d}{q}} \frac{1}{1+\gamma} = \frac{(d+q)^{\frac{q}{d}+1}}{dq^{\frac{q}{d}}} \frac{\beta}{\frac{1}{p}+\alpha+\beta}.$$

Soit $s = u/p$. Alors en utilisant la Propriété 2.1.2, on calcule les moments de ε :

$$E(\varepsilon^{ds}) = \frac{(d+q)^{(d+q)s}}{d^{ds}q^{qs}} \left(\frac{1}{1+\gamma}\right)^{ds} \prod_{i=0}^{d-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+i}{d+q}+s\right)\Gamma\left(\frac{\beta+i}{d}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+i}{d+q}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+i}{d}+s\right)} \prod_{j=0}^{q-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+d+j}{d+q}+s\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+j}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+d+j}{d+q}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+j}{q}+s\right)}$$

On utilise la formule de multiplication pour la loi Gamma, pour m entier :

$$\Gamma(mz) = \frac{m^{mz-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}} \Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{m}\right)\dots\Gamma\left(z+\frac{m-1}{m}\right)$$

D'où on déduit :

$$\Gamma(\alpha+\beta+(d+q)s) = \frac{(d+q)^{\alpha+\beta+(d+q)s-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d+q-1}{2}}} \Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{d+q}+s\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+1}{d+q}+s\right)\dots\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+d+q-1}{d+q}+s\right)$$

$$\Gamma(\alpha+\beta) = \frac{(d+q)^{\alpha+\beta-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d+q-1}{2}}} \Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{d+q}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+1}{d+q}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+2}{d+q}\right)\dots\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+d+q-1}{d+q}\right)$$

$$\Gamma(\alpha+\beta+qs) = \frac{q^{\alpha+\beta+qs-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{q-1}{2}}} \Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{q}+s\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+1}{q}+s\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+2}{q}+s\right)\dots\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+q}{q}+s\right)$$

$$\Gamma(\alpha+\beta) = \frac{q^{\alpha+\beta-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{q-1}{2}}} \Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{q}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+1}{q}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+2}{q}\right)\dots\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+p}{q}\right)$$

$$\Gamma(\beta+ds) = \frac{d^{\beta+ds-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \Gamma\left(\frac{\beta}{d}+s\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{d}+s\right)\Gamma\left(\frac{\beta+2}{d}+s\right)\dots\Gamma\left(\frac{\beta+d-1}{d}+s\right)$$

$$\Gamma(\beta) = \frac{d^{\beta-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \Gamma\left(\frac{\beta}{d}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{d}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+2}{d}\right)\dots\Gamma\left(\frac{\beta+d-1}{d}\right)$$

Ce qui permet de trouver, après simplification :

$$E[\varepsilon^{ds}] = \left(\frac{\beta}{\frac{1}{p} + \alpha + \beta} \right)^{ds} \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha + \beta + ds + qs)}{\Gamma(\alpha + \beta + qs)\Gamma(\beta + ds)}$$

En utilisant la propriété qu'une distribution bornée est déterminée de manière unique par ses moments (Shohat and Tamarkin, 1943), on a le résultat. \square

Ainsi, une telle variable aléatoire existe mais avec des hypothèses supplémentaires. On peut se demander si ces nouvelles hypothèses sont plus restrictives ou non (on a montré qu'elles étaient suffisantes mais pas qu'elles étaient forcément nécessaires). Il y a une autre manière de montrer l'existence d'une variable aléatoire avec le problème des moments de Hausdorff (Shohat and Tamarkin, 1943) :

Proposition 2.1.4. *Soit $(m_n)_n$ une suite de réels avec $m_0 = 1$. Alors il existe une variable aléatoire X de support $[0, 1]$ telle que $E(X^n) = m_n$ si et seulement si pour tout $k, n \geq 0$: $(-1)^k(\Delta^k m)_n \geq 0$ où on a $(\Delta m)_n = m_{n+1} - m_n$.*

En Annexe B, on donne des exemples où une des deux nouvelles hypothèses n'est pas vérifiée et où la condition de Hausdorff s'avère ne pas être vérifiée non plus. Cela montre donc non seulement que les hypothèses de la Proposition 2.1.3 sont plus contraignantes, mais aussi qu'il existe des cas où l'existence d'une variable aléatoire satisfaisant les hypothèses du Théorème 2.1.2 n'est pas possible.

2.2 Détermination des points de référence biologique

Sous les hypothèses du Théorème 2.1.2, nous allons pouvoir déduire une expression explicite pour le MSY, sa biomasse associée et le taux de pêche optimal. Le MSY est égal au maximum de $\phi E(B_\infty | \phi)$, où B_∞ est la variable aléatoire modélisant la biomasse à l'équilibre. Nous allons étudier le problème pour σ^2 au voisinage de 0 afin de déterminer l'influence de σ^2 sur le MSY. Dans un premier temps, nous allons démontrer la propriété suivante :

Proposition 2.2.1. *Au voisinage de 0, σ^2 est un équivalent de $1/\beta$, et on a :*

$$\lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} (\sigma^2 \beta) = \frac{2/p - \gamma}{1 + \gamma}$$

Proof. On rappelle que :

$$\beta = \frac{1}{2(1 + \gamma)\sigma^2} \left[\left(\frac{2}{p} - \gamma - \sigma^2(1 + \gamma) \right) + \sqrt{4\sigma^2 \frac{1+p}{p^2} + \left(\frac{2}{p} - \gamma - \sigma^2(1 + \gamma) \right)^2} \right].$$

Alors :

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} (\sigma^2 \beta) &= \lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2(1 + \gamma)} \left[\left(\frac{2}{p} - \gamma - \sigma^2(1 + \gamma) \right) + \sqrt{4\sigma^2 \frac{1+p}{p^2} + \left(\frac{2}{p} - \gamma - \sigma^2(1 + \gamma) \right)^2} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2(1 + \gamma)} \left(\frac{2}{p} - \gamma + \sqrt{\left(\frac{2}{p} - \gamma \right)^2} \right) \\ &= \frac{2/p - \gamma}{1 + \gamma} \end{aligned}$$

si $\frac{2}{p} - \gamma > 0$, ce qui est vrai puisque $\gamma = r(p + 1)/p - \phi$ avec $r < 1$. □

Nous pouvons donc étudier le problème avec $1/\beta$ au voisinage de 0 plutôt que σ^2 au voisinage de 0. On sait que Y_∞ suit une Beta de paramètre (α, β) avec :

$$Y_\infty = \left(\frac{B_\infty}{K} \right)^p \frac{r(p + 1)}{p - \phi p + r(p + 1)} \iff B_\infty = K \left(\frac{p - \phi p + r(p + 1)}{r(p + 1)} Y_\infty \right)^{1/p}$$

On va alors directement calculer l'espérance de B_∞ :

$$E[B_\infty] = K \left(\frac{p - \phi p + r(p + 1)}{r(p + 1)} \right)^{1/p} \frac{\Gamma(\beta(1 + \gamma) - 1/p) \Gamma(\beta\gamma)}{\Gamma(\beta\gamma - 1/p) \Gamma(\beta(1 + \gamma))} \quad (2.4)$$

Alors en utilisant la formule de Stirling qu'on rappelle :

$$\Gamma(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} z^{z-1/2} e^{-z} \sqrt{2\pi}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(\beta(1+\gamma) - \frac{1}{p})\Gamma(\beta\gamma)}{\Gamma(\beta\gamma - \frac{1}{p})\Gamma(\beta(1+\gamma))} &\sim \frac{(\beta + \beta\gamma - \frac{1}{p})^{\beta+\beta\gamma - \frac{1}{p} - \frac{1}{2}} (\beta\gamma)^{\beta\gamma - \frac{1}{2}}}{(\beta\gamma - \frac{1}{p})^{\beta\gamma - \frac{1}{p} - \frac{1}{2}} (\beta(1+\gamma))^{\beta(1+\gamma) - \frac{1}{2}}} \\
&\sim \frac{(1 + \gamma - \frac{1}{p\beta})^{\beta+\beta\gamma - \frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \gamma^{\beta\gamma - \frac{1}{2}}}{(\gamma - \frac{1}{p\beta})^{\beta\gamma - \frac{1}{p} - \frac{1}{2}} (1 + \gamma)^{\beta+\beta\gamma - \frac{1}{2}}} \\
&\sim \left(\frac{1 + \gamma - \frac{1}{p\beta}}{\gamma - \frac{1}{p\beta}} \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{1 + \gamma - \frac{1}{p\beta}}{1 + \gamma} \right)^{\beta+\beta\gamma - \frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma}{\gamma - \frac{1}{p\beta}} \right)^{\beta\gamma - \frac{1}{2}} \\
&\sim \left(\frac{1 + \gamma - \frac{1}{p\beta}}{\gamma - \frac{1}{p\beta}} \right)^{-\frac{1}{p}} \frac{\left(1 - \frac{1}{p\beta(1+\gamma)}\right)^{\beta+\beta\gamma - \frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{1}{p\beta\gamma}\right)^{\beta\gamma - \frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

On détermine des expansions en séries de Taylor de chacun des quatre termes pour en déduire une expression simplifiée de $\frac{\Gamma(\beta(1+\gamma) - \frac{1}{p})\Gamma(\beta\gamma)}{\Gamma(\beta\gamma - \frac{1}{p})\Gamma(\beta(1+\gamma))}$:

$$\begin{aligned}
&\sim \left(\frac{1 + \gamma}{\gamma} \right)^{-\frac{1}{p}} \left[1 + \left(-\frac{1}{p^2\gamma} + \frac{1}{p^2(1+\gamma)} + \frac{1}{2p(1+\gamma)} - \frac{1}{2p^2(1+\gamma)} - \frac{1}{2p\gamma} + \frac{1}{2p^2\gamma} \right) \frac{1}{\beta} \right] \\
&\sim \left(\frac{1 + \gamma}{\gamma} \right)^{-\frac{1}{p}} \left[1 + \frac{-2(1+\gamma) + 2\gamma + p\gamma - \gamma - p(1+\gamma) + (1+\gamma)}{2p^2\gamma(\gamma+1)} \frac{1}{\beta} \right] \\
&\sim \left(\frac{1 + \gamma}{\gamma} \right)^{-\frac{1}{p}} \left[1 - \frac{1+p}{2p^2\gamma(1+\gamma)\beta} \right]
\end{aligned}$$

Avec $\gamma = r(p+1)/p - \phi$, on a :

$$\frac{1 + \gamma}{\gamma} = \frac{p + r(p+1) - p\phi}{r(p+1) - p\phi}$$

Finalement on obtient une expression explicite pour l'espérance de B_∞ :

$$\phi E[B_\infty | \phi] \sim \phi K \left(1 - \frac{\phi p}{r(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[1 - \frac{1+p}{2p^2\gamma(1+\gamma)\beta} \right] \quad (2.5)$$

Il ne reste plus qu'à remplacer β par sa valeur. Or, d'après la Propriété 2.2.1, on a :

$$\frac{1}{\beta} \sim \frac{1 + \gamma}{2/p - \gamma} \sigma^2$$

D'où :

$$\begin{aligned}
f(\phi) &= \phi E[B_\infty | \phi] \\
&\sim \phi K \left(1 - \frac{\phi p}{r(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} \left[1 - \frac{1+p}{2p^2\gamma(2/p - \gamma)}\sigma^2\right] \\
&\sim \phi K \left(1 - \frac{\phi p}{r(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} \left[1 - \frac{1+p}{2p\gamma(2 - p\gamma)}\sigma^2\right] \\
&\sim \phi K \left(1 - \frac{\phi p}{r(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} \left[1 - \frac{1+p}{2(r(p+1) - p\phi)(2 - r(p+1) + p\phi)}\sigma^2\right]
\end{aligned}$$

Le MSY est le maximum de $f(\phi)$, mais comme déterminer un maximum de l'expression obtenue n'est pas aisé, nous allons dériver $f(\phi)$ et utiliser l'algorithme de Newton-Raphson en prenant comme valeur initiale le résultat pour le cas déterministe, c'est-à-dire $\phi_0 = r$. La formule est la suivante :

$$F_{MSY} = -\frac{f'(r)}{f''(r)} + r$$

On calcule les dérivées de f :

$$f'(r) = rK \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} (1+p)p\sigma^2 \left[\frac{-1+r}{r^2(2-r)^2}\right]$$

$$f''(r) = -K \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{p+1}{r} + d\sigma^2 \quad (d \in \mathbb{R})$$

Et donc en utilisant la formule de l'algorithme de Newton-Raphson, on en déduit F_{MSY} :

$$\begin{aligned}
F_{MSY} &= -\frac{rK \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} (1+p)p\sigma^2 \left[\frac{-1+r}{r^2(2-r)^2}\right]}{-K \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{p+1}{r}} + r \\
&= r^2 p \left[\frac{-1+r}{r^2(2-r)^2}\right] \sigma^2 + r \\
&= r - p \frac{1-r}{(2-r)^2} \sigma^2
\end{aligned}$$

À présent que nous avons déterminé F_{MSY} , nous pouvons en déduire une expression explicite pour le MSY qui est $f(F_{MSY}) = F_{MSY}E[B_\infty|F_{MSY}]$. On note $f(F_{MSY}) = u(F_{MSY})v(F_{MSY})$ avec :

$$u(F_{MSY}) = F_{MSY}K \left(1 - \frac{F_{MSY}p}{r(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

et

$$v(F_{MSY}) = \left[1 - \frac{1+p}{2(r(p+1) - pF_{MSY})(2 - r(p+1) + pF_{MSY})}\sigma^2\right]$$

On a :

$$\begin{aligned} u(F_{MSY}) &= F_{MSY}K \left(1 - \frac{F_{MSY}p}{r(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= K \left(r - p\frac{1-r}{(2-r)^2}\sigma^2\right) \left(1 - \frac{p}{r(p+1)} \left(r - p\frac{1-r}{(2-r)^2}\sigma^2\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= K \left(r - p\frac{1-r}{(2-r)^2}\sigma^2\right) \left(1 - \frac{p}{p+1} + \frac{p^2}{r(p+1)}\frac{1-r}{(2-r)^2}\sigma^2\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= K \left(r - p\frac{1-r}{(2-r)^2}\sigma^2\right) \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(1 + \frac{p^2}{r}\frac{1-r}{(2-r)^2}\sigma^2\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= K \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(r - p\frac{1-r}{(2-r)^2}\sigma^2\right) \exp\left[\frac{1}{p}\ln\left(1 + \frac{p^2}{r}\frac{1-r}{(2-r)^2}\sigma^2\right)\right] \\ &= K \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(r - p\frac{1-r}{(2-r)^2}\sigma^2\right) \exp\left[\frac{p}{r}\frac{1-r}{(2-r)^2}\sigma^2 + o(\sigma^2)\right] \\ &= K \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(r - p\frac{1-r}{(2-r)^2}\sigma^2\right) \left(1 + \frac{p}{r}\frac{1-r}{(2-r)^2}\sigma^2\right) + o(\sigma^2) \\ &= Kr \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} + o(\sigma^2) \end{aligned}$$

Puis pour $v(F_{MSY})$:

$$\begin{aligned} v(F_{MSY}) &= 1 - \frac{1+p}{2(r(p+1) - pF_{MSY})(2 - r(p+1) + pF_{MSY})}\sigma^2 \\ &= 1 - \frac{1+p}{2r(2-r)}\sigma^2 + o(\sigma^2) \end{aligned}$$

On peut alors en déduire le MSY :

$$MSY = Kr \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1+p}{2r(2-r)}\sigma^2\right) + o(\sigma^2) \quad (2.6)$$

En réalité, cette partie n'était clairement pas nécessaire, et l'interprétation sera abordée dans le chapitre suivant. On retrouvera en effet les mêmes résultats, mais de manière plus générale (avec un coefficient d'auto-corrélation d'ordre 1) et sans les hypothèses assez lourdes du Théorème 2.1.2. Toutefois, en tant que première approche au cours du stage, elle a sa place dans le mémoire.

2.3 Stationnarité du modèle de Fox

Le modèle de Fox est le cas particulier du modèle de Pella et Tomlinson où p tend vers 0. On obtient l'équation suivante :

$$B_{t+1} = B_t \left(1 - \phi - r \log \left(\frac{B_t}{K} \right) \right) \varepsilon_t \quad (2.7)$$

On réécrit à nouveau le modèle pour simplifier l'étude, en posant $Z_t = B_t/K \exp((\phi - 1)/r)$ on obtient :

$$Z_{t+1} = -r Z_t \log(Z_t) \varepsilon_t \quad (2.8)$$

Un premier résultat intéressant est que le modèle ne dépend plus du tout du taux de pêche ϕ . Nous avons une version du Théorème 2.1.1 pour le modèle de Fox. :

Théorème 2.3.1. *On considère $\{Z_t\}$ la chaîne de Markov définie par (2.8). On suppose que les innovations $\{\varepsilon_t\}$ sont indépendantes et identiquement distribuées, de support inclus dans \mathbb{R}_+ .*

Si $z_0 \in]0, 1[$ et si le support des innovations $\text{Supp}(\varepsilon)$ est égal à $(0, e/r)$, alors la chaîne est irréductible et apériodique. Il s'ensuit que si la chaîne de Markov admet une distribution stationnaire, alors pour tout état initial, elle va converger vers cette distribution stationnaire.

La preuve est la même. On a aussi une version du Théorème 2.1.2 où on spécifie la forme des moments du bruit afin de déterminer la distribution stationnaire pour $\{B_t\}$ et observer l'influence de la variance des innovations. Cette fois-ci, nous allons travailler avec la loi Gamma :

Définition 2.3.1. Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f et $(\beta', \alpha') \in \mathbb{R}_+^*$. Alors X suit une loi Gamma de paramètre (β', α') si :

$$f(x|\beta', \alpha') = \frac{\alpha'^{\beta'}}{\Gamma(\beta')} x^{\beta'-1} e^{-\alpha'x} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

Proposition 2.3.1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi Gamma de paramètre (k, α') . Alors :

$$\begin{aligned} E[e^{-nX}] &= \left(\frac{\alpha'}{\alpha' + n} \right)^{\beta'} \\ E[e^{-nX} X^n] &= \frac{\alpha'^{\beta'}}{\Gamma(\beta')} \frac{\Gamma(\beta' + n)}{(\alpha' + n)^{\beta'+n}} \end{aligned}$$

Proof. On a :

$$\begin{aligned} E[e^{-nX}] &= \frac{\alpha'^{\beta'}}{\Gamma(\beta')} \int_0^\infty x^{\beta'-1} e^{-(\alpha'+n)x} dx \\ &= \frac{\alpha'^{\beta'}}{\Gamma(\beta')} \frac{\Gamma(\beta')}{(\alpha' + n)^{\beta'}} \\ &= \left(\frac{\alpha'}{\alpha' + n} \right)^{\beta'} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} E[e^{-nX} X^n] &= \frac{\alpha'^{\beta'}}{\Gamma(\beta')} \int_0^\infty x^{n+\beta'-1} e^{-(\alpha'+n)x} dx \\ &= \frac{\alpha'^{\beta'}}{\Gamma(\beta')} \frac{\Gamma(\beta' + n)}{(\alpha' + n)^{\beta'+n}} \\ &= \frac{\Gamma(\beta' + n)}{\Gamma(\beta')} \left(\frac{\alpha'}{\alpha' + n} \right)^{\beta'} \frac{1}{(\alpha' + n)^n} \end{aligned}$$

□

Théorème 2.3.2. Soit $\sigma_M^2 > 0$ défini par :

$$\sigma_M^2 = \frac{3-r}{1+r}.$$

Soit $\sigma^2 \in (0, \sigma_M^2)$ et on définit α' et β' par :

$$\beta' = \frac{1}{2r\sigma^2} \left(2 - r - \sigma^2 r + \sqrt{4\sigma^2 + (2 - r - \sigma^2 r)^2} \right).$$

$$\alpha' = \beta'r - 1,$$

alors $\alpha', \beta' > 0$. Supposons qu'il existe une variable aléatoire ε de support $(0, e/r)$ dont les moments sont donnés par

$$E[\varepsilon^u] = \left(\frac{\alpha' + u}{r}\right)^u \frac{\Gamma(\beta')}{\Gamma(\beta' + u)} \quad (2.9)$$

Si les innovations $\{\varepsilon_t\}$ dans (2.8) ont pour moments (2.9), alors la distribution stationnaire de la chaîne $\{-\log(Z_t)\}$ est une loi Gamma de paramètre (β', α') .

Proof. Par construction, $\beta' > 0$, et on montre que $\alpha' > 0$:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &< \frac{3-r}{1+r} \\ 3-r &> \sigma^2(1+r) \\ 1 &> \sigma^2 - 2 + r + \sigma^2 r \\ 4\sigma^2 &> 4\sigma^4 - 4\sigma^2(2-r-\sigma^2 r) \\ \sqrt{4\sigma^2 + (2-r-\sigma^2 r)^2} &> 2\sigma^2 - (2-r-\sigma^2 r) \\ \beta' &> \frac{1}{r} \\ \alpha' &> 0 \end{aligned}$$

Comme les conditions du Théorème 2.3.1 sont vérifiées, on a l'existence et l'unicité d'une distribution stationnaire. On suppose que $Y_t = -\log(Z_t)$ suit une loi Gamma de paramètre (β', α') et on montre que la distribution est invariante. Le processus pour Y_t est :

$$e^{-Y_{t+1}} = r e^{-Y_t} Y_t \varepsilon_t \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} E(e^{-nY_{t+1}}) &= r^n \frac{\Gamma(\beta' + n)}{\Gamma(\beta')} \left(\frac{\alpha'}{\alpha' + n}\right)^{\beta'} \frac{1}{(\alpha' + n)^n} \left(\frac{\alpha' + n}{r}\right)^n \frac{\Gamma(\beta')}{\Gamma(\beta' + n)} \\ &= \left(\frac{\alpha'}{\alpha' + n}\right)^{\beta'} \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la Propriété 2.3.1 et la propriété qu'une distribution bornée est déterminée de manière unique par ses moments (Shohat and Tamarkin, 1943), Y_{t+1} suit une loi Gamma de paramètre (β', α') et on a le résultat.

Il reste à vérifier que $E(\varepsilon_t) = 1$ et $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$. Pour cela, on prend les moments de (2.9) et on calcule les cas où $u = 1$ et $u = 2$. À nouveau, le calcul n'est pas développé ici. \square

Les paramètres ont été choisis de telle manière à ce qu'ils correspondent aux rôles de (α, β) dans l'étude de Pella et Tomlinson. On a aussi β' correspondant à la limite de β quand p tend vers 0. En effet, après avoir remarqué que $\gamma = \frac{p+1}{p}r - \phi \sim \frac{r}{p}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2(1+\gamma)\sigma^2} \left[\left(\frac{2}{p} - \gamma - \sigma^2(1+\gamma) \right) + \sqrt{4\sigma^2 \frac{1+p}{p^2} + \left(\frac{2}{p} - \gamma - \sigma^2(1+\gamma) \right)^2} \right] \\ &\sim \frac{1}{2\frac{r}{p}\sigma^2} \left[\left(\frac{2}{p} - \frac{r}{p} - \sigma^2 \frac{r}{p} \right) + \sqrt{4\sigma^2 \frac{1}{p^2} + \left(\frac{2}{p} - \frac{r}{p} - \sigma^2 \frac{r}{p} \right)^2} \right] \\ &\rightarrow \frac{1}{2r\sigma^2} \left[2 - r - \sigma^2 r + \sqrt{4\sigma^2 + (2 - r - \sigma^2 r)^2} \right] \end{aligned}$$

C'est aussi le cas de σ_M^2 :

$$\begin{aligned} \frac{-p\gamma^3 + 3\gamma^2 + 2\gamma}{(1+\gamma)^2(1+p\gamma)} &\sim \frac{-\frac{r^3}{p^2} + 3\frac{r^2}{p^2} + 2\frac{r}{p}}{\left(1 + \frac{r}{p}\right)^2(1+r)} \\ &\rightarrow \frac{-r^3 + 3r^2}{r^2(1+r)} \\ &\rightarrow \frac{3-r}{1+r} \end{aligned}$$

On retrouve donc le résultat indiqué au début de la section affirmant que le processus ne dépend plus du taux de pêche ϕ . De plus, on observe sur la Figure A.4 que l'évolution de σ_M^2 pour le modèle de Fox en fonction de r est très différente puisqu'elle est décroissante. De plus, la borne est beaucoup plus élevée, ce qui signifie une résistance à la variabilité environnementale beaucoup plus importante. Ces

résultats sont assez surprenants et montrent qu'il reste encore beaucoup à étudier sur ce modèle.

Comme pour le modèle de Pella et Tomlinson, on peut montrer l'existence d'une variable aléatoire ε_t satisfaisant les conditions du Théorème 2.3.2 avec quelques hypothèses supplémentaires :

Proposition 2.3.2. *Supposons $\alpha' > 1$ et $\beta' > \alpha'$. Alors il existe une variable aléatoire ε_t dont les moments sont :*

$$E[\varepsilon_t^u] = \left(\frac{\alpha' + u}{r} \right)^u \frac{\Gamma(\beta')}{\Gamma(\beta' + u)}$$

et telle que $\text{Supp}(f_{\varepsilon_t}) = [0, \frac{\varepsilon}{r}]$.

Proof. Nous allons reprendre le résultat de la Propriété 2.1.3 en faisant tendre p vers 0, ce qui revient à prendre $d = 1$ puis à faire tendre q vers l'infini. Nous avons alors $\gamma \sim rq$ puis :

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta\gamma - \frac{1}{p} \\ &\sim \beta'rq - q \\ &\sim q(\beta'r - 1) \end{aligned}$$

Alors les conditions de la Propriété 2.1.3 deviennent :

$$\alpha > 0 \sim q(\beta'r - 1) > 0 \sim \alpha' > 0$$

$$\beta > p\alpha \sim \beta' > \beta'r - 1 \sim \beta' > \alpha'$$

$$\alpha + \beta > q \sim q(\beta'r - 1) + \beta > q \sim \beta'r - 1 > 1 \implies \alpha' > 1$$

Puis le résultat devient :

$$\begin{aligned}
E[\varepsilon_t^u] &= \left(\frac{1}{1+\gamma} \right)^u \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha + \beta + u + \frac{u}{p})}{\Gamma(\alpha + \beta + \frac{u}{p})\Gamma(\beta + u)} \\
&\sim \left(\frac{1}{rq} \right)^u \frac{\Gamma(\beta')}{\Gamma(\beta' + u)} \prod_{i=0}^{u-1} \left(\alpha + \beta + \frac{u}{p} + i \right) \\
&\sim \left(\frac{1}{rq} \right)^u \frac{\Gamma(\beta')}{\Gamma(\beta' + u)} \prod_{i=0}^{u-1} (q(\beta'r - 1) + qu) \\
&\sim \left(\frac{1}{rq} \right)^u \frac{\Gamma(\beta')}{\Gamma(\beta' + u)} (q\alpha' + qu)^u \\
&\sim \left(\frac{\alpha' + u}{r} \right)^u \frac{\Gamma(\beta')}{\Gamma(\beta' + u)}
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\frac{(p+1)^{1+\frac{1}{p}}}{p - p\phi + r(p+1)} &\sim \frac{\exp\left[\left(1 + \frac{1}{p}\right)\ln(p+1)\right]}{r} \\
&\sim \frac{\exp(p+1)}{r} \\
&\rightarrow \frac{e}{r}
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la Propriété 2.1.3, en faisant tendre p vers 0, on a bien l'existence d'une variable aléatoire dont les moments sont :

$$E[\varepsilon_t^u] = \left(\frac{\alpha' + u}{r} \right)^u \frac{\Gamma(\beta')}{\Gamma(\beta' + u)}$$

et dont le support est $[0, \frac{e}{r}]$. □

Nous avons donc l'existence des innovations du Théorème 2.3.2 avec deux nouvelles hypothèses qui sont $\alpha' > 1$ et $\beta' > \alpha'$. Ces hypothèses sont donc suffisantes mais pas forcément nécessaires.

Dans ce chapitre, nous avons étudié le modèle de Pella et Tomlinson et, après avoir imposé un modèle pour les innovations, observé l'influence de la variabilité environnementale sur le modèle. Nous avons explicité une borne supérieure pour la variance qui est une condition de non-extinction de la population et pu voir dans

quelle mesure elle limitait le modèle que nous avons posé. Une étude pour déterminer des expressions explicites du MSY et de F_{MSY} a été faite, mais ces expressions seront approfondies et discutées dans le chapitre suivant. Enfin, nous avons aussi étudié le modèle limite de Fox où p tend vers 0 et trouvé des résultats surprenants, notamment que le taux de pêche ϕ n'avait plus d'influence sur le processus.

Chapitre 3

CADRE GÉNÉRAL POUR LES POINTS DE RÉFÉRENCE BIOLOGIQUE

Dans ce chapitre, nous allons étudier de plus près l'influence de la variabilité environnementale sur le rendement équilibré optimal, sa biomasse associée ainsi que le taux de pêche optimal. Dans le chapitre précédent, nous avons établi une expression explicite du MSY sous les hypothèses très fortes du Théorème 2.1.2. Dans cette partie, nous allons retrouver ces résultats dans un cadre plus général, sans ces hypothèses, en travaillant directement à l'aide de calculs infinitésimaux sur le modèle (1.3). Sous l'hypothèse d'équilibre ($B_t = B_{t+1} = B$), on a :

$$B = B - \phi B + \frac{p+1}{p} r B \left(1 - \left(\frac{B}{K} \right)^p \right)$$

ce qui nous donne :

$$B = K \left(1 - \frac{\phi p}{r(p+1)} \right)^{1/p} =: \mu$$

On suppose que la variance des (ε_t) , σ^2 , est petite, et qu'il existe une corrélation d'ordre 1 qu'on note ρ . Afin de faciliter les calculs, nous allons définir $\delta_t = \varepsilon_t - 1$. Précisons au préalable qu'on a $\mu^p = K^p \left(1 - \frac{p\phi}{(p+1)r} \right)$. Nous allons faire une expansion

de Taylor en μ de B_t :

$$\begin{aligned}
B_{t+1} &= \left[\left(1 - \phi + \frac{p+1}{p}r \right) \mu - \frac{p+1}{p}r \frac{\mu^{p+1}}{K^p} \right] (1 + \delta_t) \\
&+ \left[\left(1 - \phi + \frac{p+1}{p}r \right) - \frac{(p+1)^2}{p}r \left(\frac{\mu}{K} \right)^p \right] (B_t - \mu)(1 + \delta_t) \\
&+ \frac{1}{2} \left[-(p+1)^2 r \frac{\mu^{p-1}}{K^p} \right] (B_t - \mu)^2 (1 + \delta_t) + o(\sigma^2) \\
&= \left[\mu + \left(-\phi + \frac{p+1}{p}r \right) \mu - \frac{p+1}{p}r \mu \left(1 - \frac{p\phi}{(p+1)r} \right) \right] (1 + \delta_t) \\
&+ \left[\left(1 - \phi + \frac{p+1}{p}r \right) - \frac{(p+1)^2}{p}r \left(1 - \frac{p\phi}{(p+1)r} \right) \right] (B_t - \mu) \\
&+ \frac{1}{2} \left[-(p+1)^2 r \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{p\phi}{(p+1)r} \right) \right] (B_t - \mu)^2 + o(\sigma^2)
\end{aligned}$$

$$B_{t+1} = \mu + \mu\delta_t + (1 + p\phi - (p+1)r)(B_t - \mu) + \frac{p(p+1)\left(\frac{p+1}{p}r - \phi\right)}{2\mu}(B_t - \mu)^2 + o(\sigma^2) \quad (3.1)$$

Sous l'hypothèse de stationnarité, B_t et B_{t+1} suivent la même distribution, et a fortiori $E[B_{t+1} - \mu] = E[B_t - \mu]$. D'où :

$$E[B_{t+1} - \mu] \sim -\frac{p+1}{2\mu}E[(B_t - \mu)^2] \quad (3.2)$$

Puis on a : $E[(B_t - \mu)^2] \sim Var(B_t)$. Or :

$$Var(B_{t+1}) \sim \mu^2\sigma^2 + (1 + p\phi - (p+1)r)^2Var(B_t) + 2\mu(1 + p\phi - (p+1)r)Cov(\delta_t, B_t)$$

Il nous faut donc déterminer $Cov(\delta_t, B_t)$. En multipliant (3.1) par δ_{t+1} puis en prenant l'espérance, on obtient :

$$E[\delta_{t+1}(B_{t+1} - \mu)] \sim \mu E[\delta_{t+1}\delta_t] + (1 + p\phi - (p+1)r)E[\delta_{t+1}(B_t - \mu)]$$

En utilisant alors la formule de l'espérance totale :

$$\begin{aligned}
E[(B_t - \mu)\delta_{t+1}] &= E[E[(B_t - \mu)\delta_{t+1}|\delta_t]] \\
&= \rho E[(B_t - \mu)\delta_t]
\end{aligned}$$

D'où finalement, en réutilisant l'hypothèse de stationnarité :

$$E[\delta_t(B_t - \mu)] \sim \mu\rho\sigma^2 + (1 + p\phi - (p+1)r)\rho E[\delta_t(B_t - \mu)]$$

$$E[\delta_t(B_t - \mu)] \sim \frac{\mu\rho\sigma^2}{1 - (1 + p\phi - (p+1)r)\rho}$$

On peut donc en déduire une expression explicite de la variance :

$$Var(B_t) \sim (1 + p\phi - (p+1)r)^2 Var(B_t) + \mu^2\sigma^2 + 2\frac{\mu^2(1 + p\phi - (p+1)r)\rho\sigma^2}{1 - (1 + p\phi - (p+1)r)\rho}$$

$$Var(B_t) \sim \frac{1}{1 - (1 + p\phi - (p+1)r)\rho} \frac{1 + (1 + p\phi - (p+1)r)\rho}{1 - (1 + p\phi - (p+1)r)\rho} \mu^2\sigma^2$$

Et finalement, en réutilisant (3.2) puis en remplaçant μ , on trouve :

$$E[B_t] = K \left(1 - \frac{p\phi}{(p+1)r}\right)^{\frac{1}{p}} \left[1 - \frac{(p+1)/2}{1 - (1 - (p+1)r + p\phi)^2} \frac{1 + (1 - (p+1)r + p\phi)\rho}{1 - (1 - (p+1)r + p\phi)\rho} \sigma^2\right] + o(\sigma^2)$$

On pourra vérifier que pour $\rho = 0$, on retrouve bien un résultat similaire à (2.5).

Comme dans le chapitre précédent, on va déterminer le MSY en maximisant $f(\phi) = \phi E[B_t|\phi]$ en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson. La formule est :

$$F_{MSY} = r - \frac{f'(r)}{f''(r)}$$

On calcule les dérivées de f :

$$f'(r) = rK \left(1 - \frac{p}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(-\frac{p(p+1)(1-r)}{(1-(1-r)^2)^2} \frac{1+(1-r)\rho}{1-(1-r)\rho} \sigma^2 - \frac{(p+1)p\rho\sigma^2}{(1-(1-r)^2)(1-(1-r)\rho)^2}\right)$$

$$f''(r) = -K \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{p+1}{r}$$

Ce qui nous permet d'établir :

$$F_{MSY} \sim r - \frac{rK \left(1 - \frac{p}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(-\frac{p(p+1)(1-r)}{(1-(1-r)^2)^2} \frac{1+(1-r)\rho}{1-(1-r)\rho} \sigma^2 - \frac{(p+1)p\rho\sigma^2}{(1-(1-r)^2)(1-(1-r)\rho)^2}\right)}{-K \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{p+1}{r}}$$

$$\sim r - \frac{r^2}{p+1} \left(\frac{p(p+1)(1-r)(1+\rho-r\rho)}{(2r-r^2)^2(1-\rho+r\rho)} + \frac{(p+1)p\rho}{(2r-r^2)(1-\rho+r\rho)^2}\right) \sigma^2$$

$$\sim r - \frac{p(1-r)(1+\rho-r\rho)}{(2-r)^2(1-\rho+r\rho)} \sigma^2 - \frac{rp\rho}{(2-r)(1-\rho+r\rho)^2} \sigma^2$$

Puis le MSY est égal à $F_{MSY}E[B_t|F_{MSY}]$, d'où :

$$MSY = F_{MSY}K \left(1 - \frac{pF_{MSY}}{(p+1)r}\right)^{\frac{1}{p}} \left[1 - \frac{(p+1)/2}{1 - (1 - (p+1)r + p\phi)^2} \frac{1 + \rho - r\rho}{1 - (1 - \rho + r\rho)} \sigma^2\right] + o(\sigma^2)$$

Par un calcul similaire à celui nécessaire pour obtenir la formule du MSY (2.6) dans le chapitre précédent (le calcul est non développé ici), on trouve :

$$MSY = \frac{Kr}{(p+1)^{1/p}} \left(1 - \frac{(p+1)/2}{1 - (1-r)^2} \frac{1 + \rho - r\rho}{1 - \rho + r\rho} \sigma^2\right) + o(\sigma^2) \quad (3.3)$$

Et il reste à calculer la biomasse associée, on a :

$$\begin{aligned} E[B_{MSY}] &= \frac{MSY}{F_{MSY}} \\ &\sim \frac{MSY}{r} \frac{1}{1 - \frac{p(1-r)(1+\rho-r\rho)}{r(2-r)^2(1-\rho+r\rho)} \sigma^2 - \frac{p\rho}{(2-r)(1-\rho+r\rho)^2} \sigma^2} \\ &\sim \frac{K}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(1 - \frac{(p+1)/2}{1 - (1-r)^2} \frac{1 + \rho - r\rho}{1 - \rho + r\rho} \sigma^2\right) \\ &\quad \cdot \left(1 + \frac{p(1-r)(1+\rho-r\rho)}{r(2-r)^2(1-\rho+r\rho)} \sigma^2 + \frac{p\rho}{(2-r)(1-\rho+r\rho)^2} \sigma^2\right) \\ E[B_{MSY}] &= \frac{K}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(1 - \frac{1+r(p-1)/2}{r(2-r)^2} \frac{1 + \rho - r\rho}{1 - \rho + r\rho} \sigma^2 + \frac{p\rho}{(2-r)(1-\rho+r\rho)^2} \sigma^2\right) \end{aligned}$$

La différence avec le cas déterministe est évidente. On observe sur les figures A.5, A.6, A.7 et A.8 que le MSY stochastique peut être fortement diminué pour des valeurs suffisamment grandes de σ^2 ou de ρ et des valeurs petites de r . Par exemple, pour $r = 0.2$ et $\sigma = 0.5$, le MSY stochastique est diminué de 50% par rapport au MSY déterministe. Cette conséquence est bien sûr aussi valable pour le F_{MSY} et le $E[B_{MSY}]$. Cela nous montre bien qu'il faut être très prudent lors de l'utilisation des SPM et met notamment en avant le danger de l'utilisation du MSY déterministe qui peut être dans de nombreux cas bien trop optimiste et donc conduire à des surpêches.

Ce travail pourrait être poursuivi, notamment à travers une application pratique pour illustrer les différences entre le cas stochastique et le cas déterministe des points de référence biologique à travers des résultats concrets. Il serait aussi intéressant de

comparer l'efficacité des modèles de Schaefer et de Pella et Tomlinson à travers des exemples pratiques. Quant au modèle de Fox, une poursuite du travail théorique est nécessaire pour comprendre les résultats que nous avons obtenus.

BIBLIOGRAPHY

- Boerema, L.K., Gulland, J., 1973. Stock assessment of the peruvian anchovy (*en-
graulis ringens*) and management of the fishery. *J. Fish. Res. Board Can.* 30,
2226–2235.
- Bousquet, N., Duchesne, T., Rivest, L.P., 2008. Redefining the maximum sustain-
able yield for the schaefer population model including multiplicative environmental
noise. *J. Theor. Biol.* 254, 65–75.
- Chaloupka, M., Balazs, G., 2007. Using bayesian state-space modelling to assess the
recovery and harvest potential of the hawaiian green sea turtle stock. *Ecol. Model.*
205, 93–109.
- Edwards, C.T.T., Hillary, R.M., Levontin, P., Blanchard, J.L., Lorenzen, K., 2012.
Fisheries assessment and management: A synthesis of common approaches with
special reference to deepwater and data-poor stocks. *Rev. Fish. Sci.* 20, 136–153.
- Ewald, C.O., Wang, W.K., 2010. Sustainable yields in fisheries : Uncertainty, risk-
aversion, and mean-variance analysis. *Nat. Resour. Model.* 23, 303–323.
- Fox, W.W., 1970. An exponential surplus-yield model for optimizing exploited fish
populations. *Trans. Am. Fish. Soc.* 99, 80–88.
- Larkin, P., 1977. An epitaph for the concept of maximum sustained yield. *Trans.*
Am. Fish. Soc. 106, 1–11.
- Ludwig, D., Walters, C.J., 1985. Are age-structured models appropriate for catch-
effort data ? *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 46, 137–144.

- Panhwar, S.K., Qun, L., Amir, S.A., Kalhoro, M.A., 2012. Performance comparison between logistic and generalized surplus-production models applied to the sillago sihama fishery in pakistan. *J. Ocean Univ. China* 11, 401–407.
- Pella, J., Tomlinson, P., 1969. A generalized stock production model. *Bull. Inter-Am. Trop. Tuna Comm.* 13, 416–497.
- Prager, M.H., 2002. Comparison of logistic and generalized surplus-production models applied to swordfish, *xiphias gladius*, in the north atlantic ocean 58, 41–57.
- Schaefer, M.B., 1954. Some aspects of the dynamics of populations important to the management of the commercial marine fisheries. *Bull. Inter-Am. Trop. Tuna Comm.* 1, 247–285.
- Shohat, J.A., Tamarkin, J.D., 1943. *The Problem of Moments*. Amer. Math. Soc., New York.

Annexe A

FIGURES

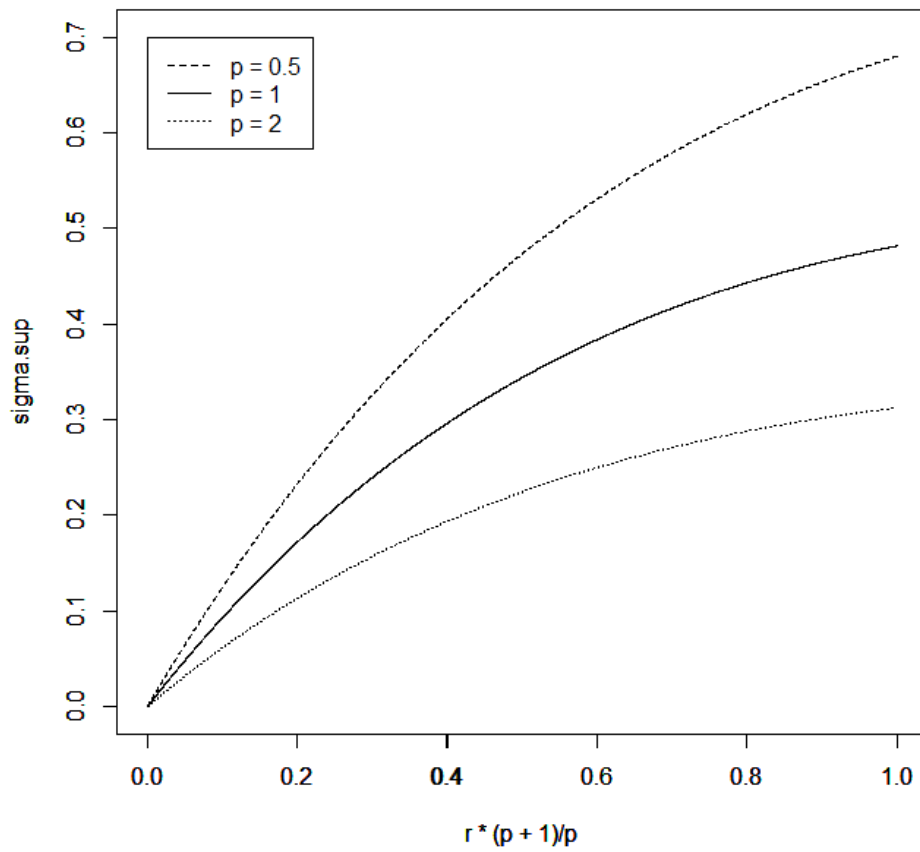


Figure A.1. Représentation de l'évolution de la borne supérieure de σ^2 en fonction de $r \frac{p+1}{p}$ selon plusieurs valeurs de p avec $\phi = r$

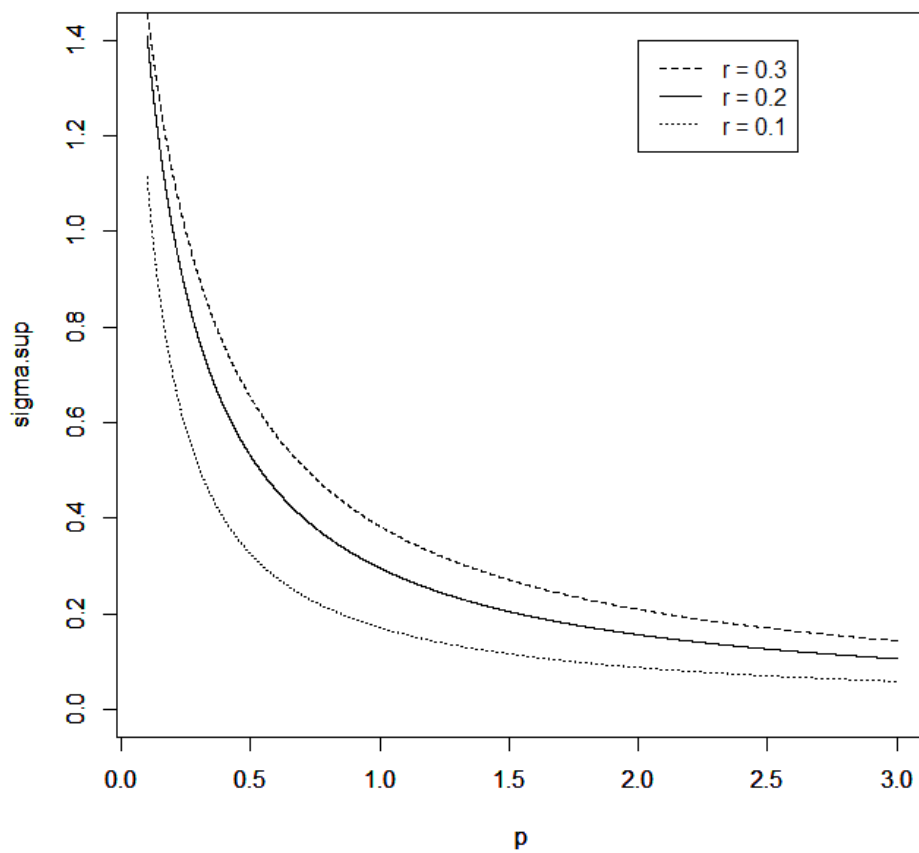


Figure A.2. Représentation de l'évolution de la borne supérieure de σ^2 en fonction de p selon plusieurs valeurs de r avec $\phi = r$

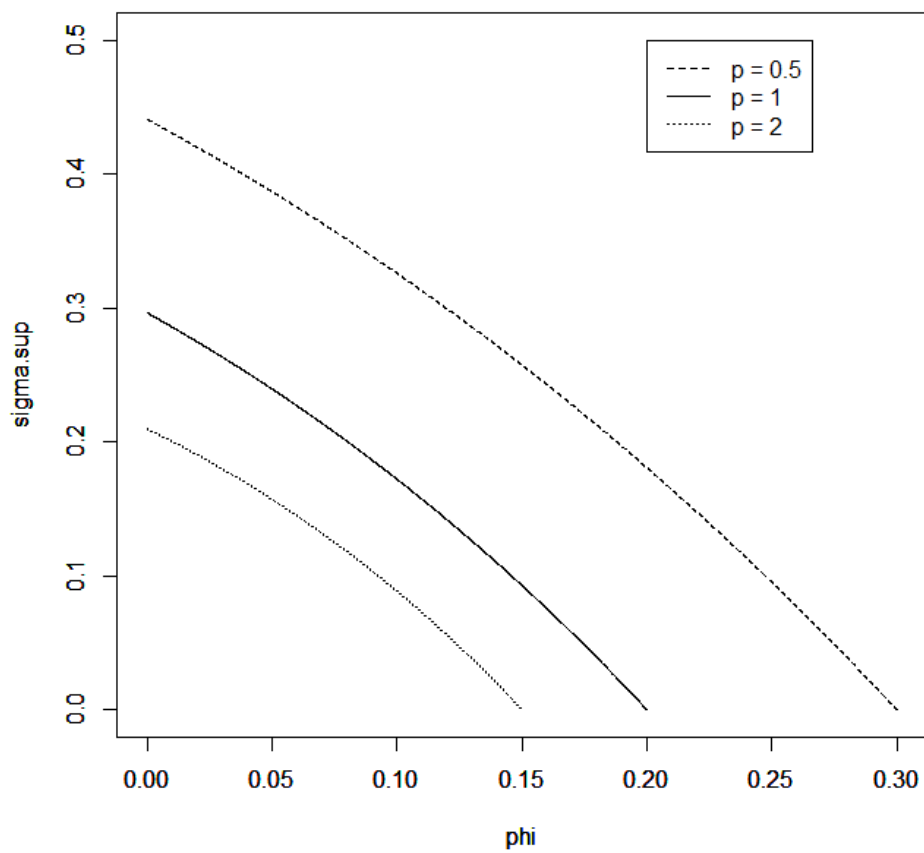


Figure A.3. Représentation de l'évolution de la borne supérieure de σ^2 en fonction de ϕ selon plusieurs valeurs de p avec $r = 0.1$

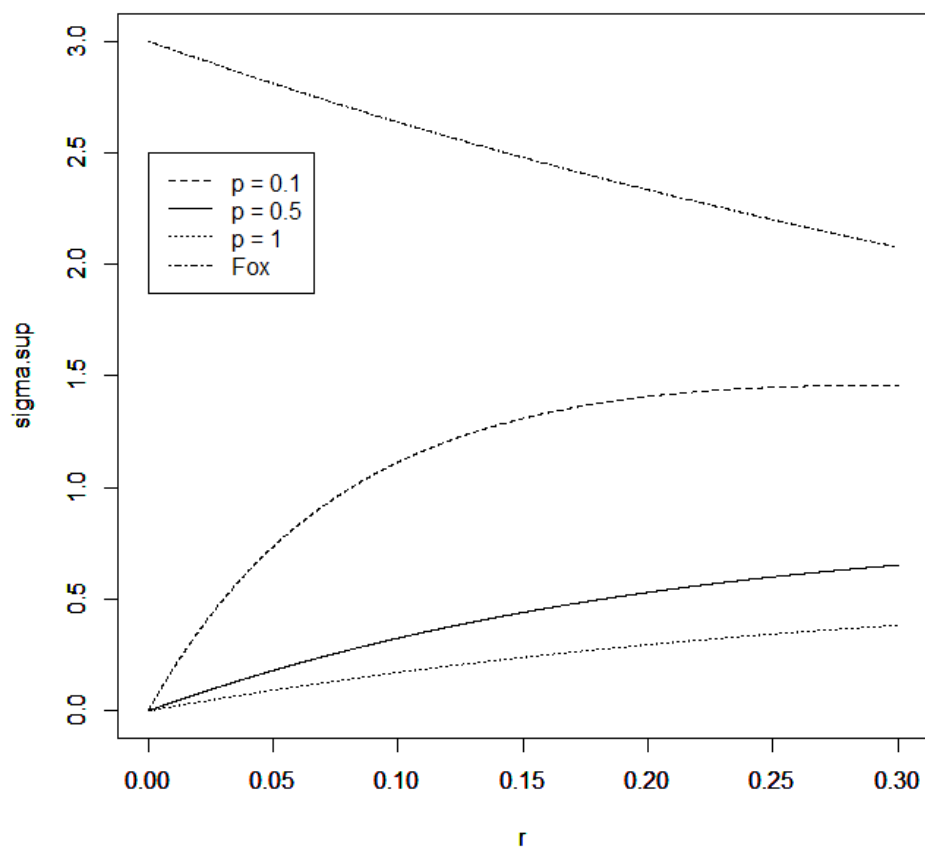


Figure A.4. Comparaison de l'évolution de la borne supérieure de σ^2 en fonction de r entre le modèle de Fox et différents modèles de Pella et Tomlinson

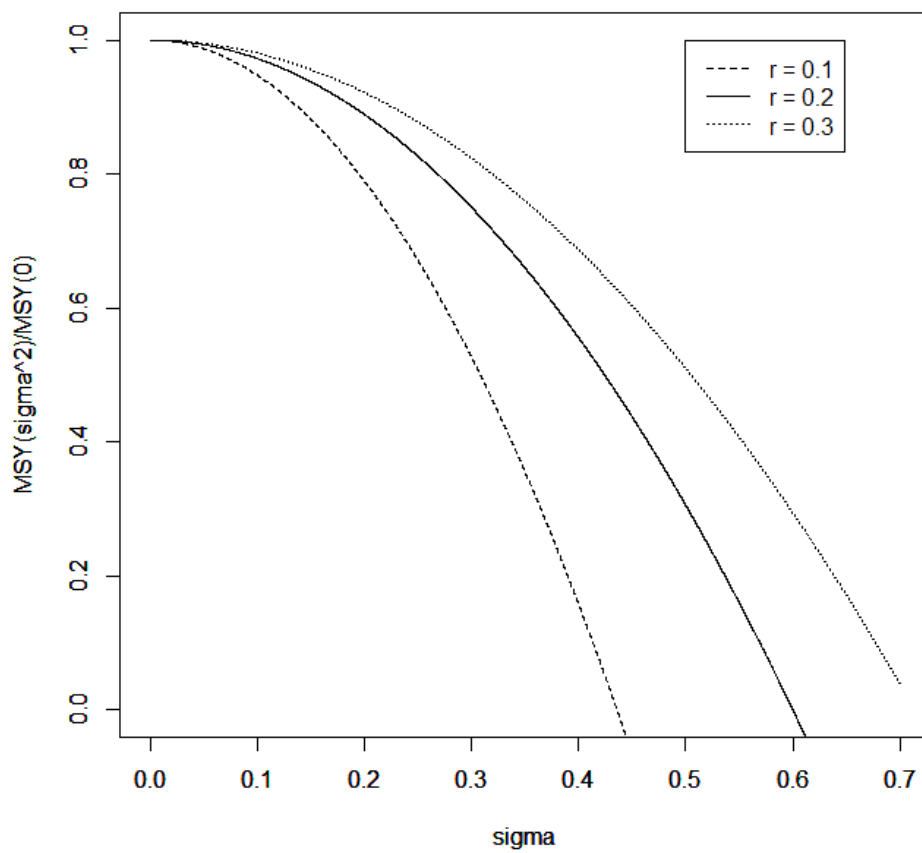


Figure A.5. Évolution du rapport $MSY(\sigma)/MSY(0)$ en fonction de σ pour différentes valeurs de r , avec $p = 1$

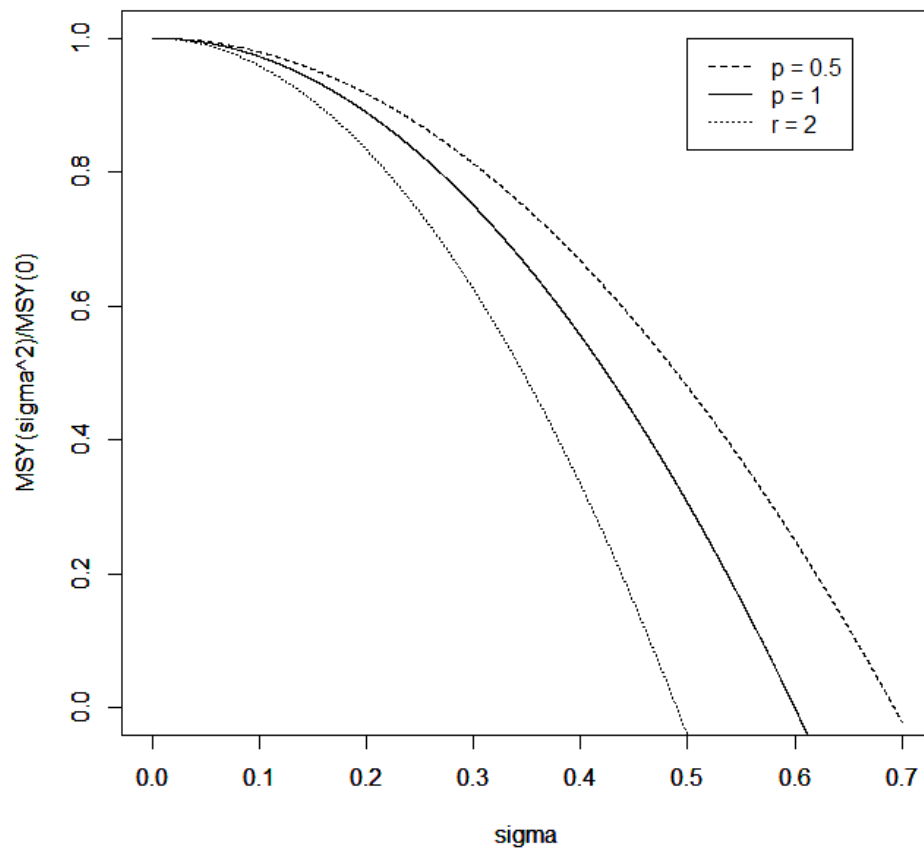


Figure A.6. Évolution du rapport $MSY(\sigma)/MSY(0)$ en fonction de σ pour différentes valeurs de p , avec $r = 0.2$

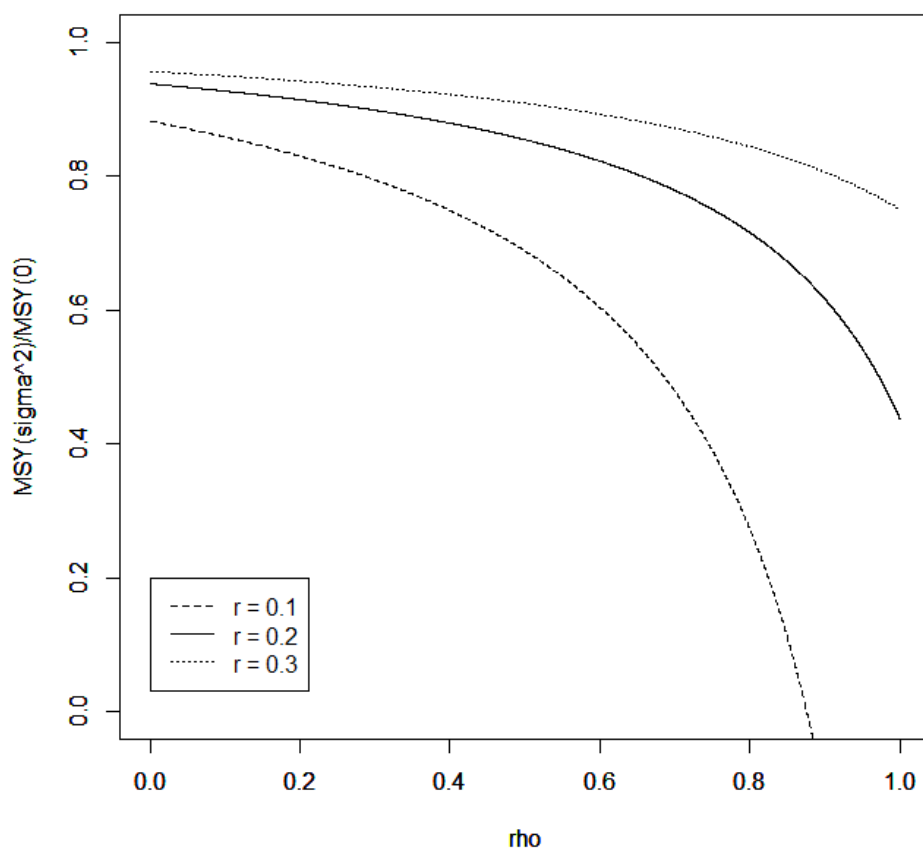


Figure A.7. Évolution du rapport $MSY(\sigma)/MSY(0)$ en fonction de ρ pour différentes valeurs de r , avec $p = 1$ et $\sigma^2 = 0.15$

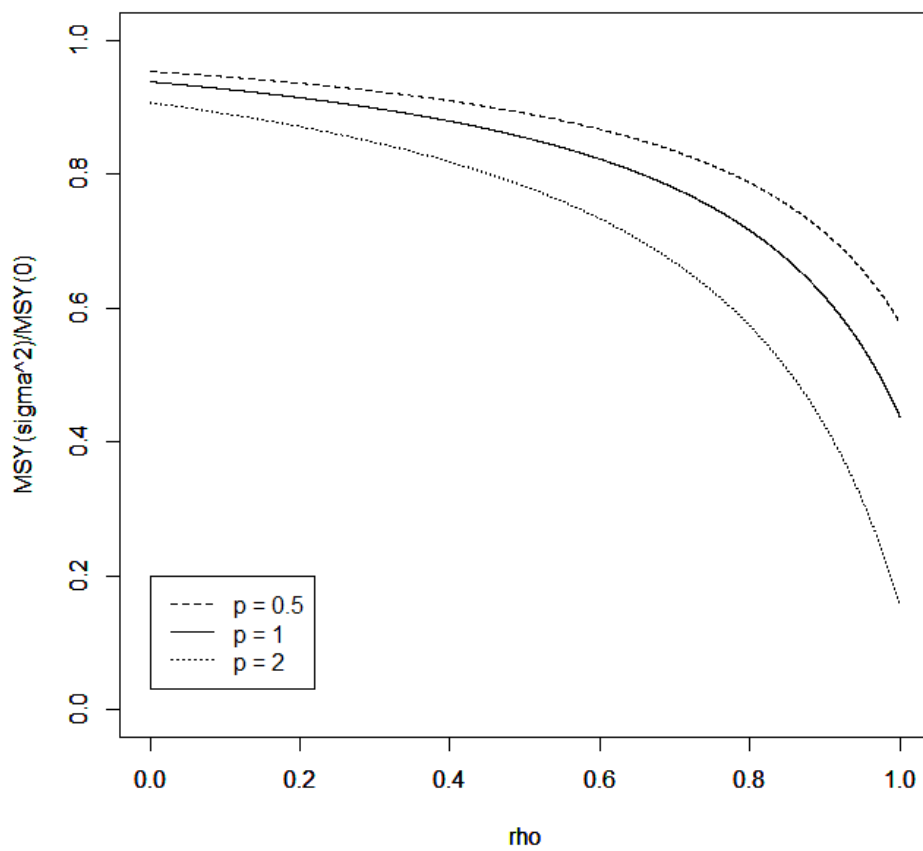


Figure A.8. Évolution du rapport $MSY(\sigma)/MSY(0)$ en fonction de ρ pour différentes valeurs de p , avec $r = 0.15$ et $\sigma^2 = 0.15$

Annexe B

CONTRE-EXEMPLES POUR L'EXISTENCE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

```
# On détermine les paramètres :
d = 25 ; q = 1
p <- d/q
r <- 0.6151513
phi <- 0.5398505
gam <- (p+1)/p*r - phi
sigma2 <- 0.0384913

# On calcule beta puis alpha :
beta <- 1/(2*(1+gam)*sigma2) * (2/p - gam - sigma2*(1+gam) +
sqrt(4*sigma2 * (1+p)/p^2 + (2/p - gam - sigma2*(1+gam))^2))
alpha <- beta*gam - 1/p

m <- 50 # On va calculer m moments
moments <- 1 # On stocke les moments dans cette variable
for(u in 1:m)
{
# On calcule les moments
moments <- c(moments,((p - p*phi + r*(p+1))/((p+1)^(1+1/p)))^u *
(1/(1+gam))^u * prod(alpha+beta+u/p + 0:(u-1))/prod(beta+0:(u-1)))
}
```

```

Deltamoments <- matrix(0,m,m+1)
Deltamoments[1,] <- moments
A <- sum(Deltamoments[1,] < 0)
# A est la variable de test. A = 0 <=> La condition de Hausdorff est vérifiée.

k <- 0
while(A == 0 && k < m-1)
# k compte le nombre de boucles.
{
k <- k+1
Deltamoments[(k+1),] <- c((Deltamoments[k,][2:(m+1-(k-1))]) -
Deltamoments[k,][1:(m+1-k)]),rep(0,k))
A <- sum((-1)^k * Deltamoments[(k+1),] < 0)
}

# A = 25 ; k = 1 ; d = 25 ; q = 1 ; r = 0.6151513 ; phi = 0.5398505
# sigma2 = 0.0384913 ; alpha = 0.006184813 ; beta = 0.4622792
# Ici, alpha + beta > q est faux mais beta > p*alpha est vrai
# et on montre que la condition de Hausdorff n'est pas vérifiée.

# Autre exemple :
# A = 1 ; k = 5 ; d = 7 ; q = 2 ; r = 0.6683201 ; phi = 0.2353102
# sigma2 = 0.01905086 ; alpha = 0.758069 ; beta = 1.672841
# Ici alpha + beta > q est vrai mais beta > p*alpha est faux
# et de nouveau la condition de Hausdorff n'est pas vérifiée.

```