



HAL
open science

La construction des collections équipotentes

Aurélie Vanengelandt

► **To cite this version:**

Aurélie Vanengelandt. La construction des collections équipotentes. Education. 2013. dumas-00862135

HAL Id: dumas-00862135

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00862135v1>

Submitted on 16 Sep 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**MASTER SMEEF
SPÉCIALITÉ « PROFESSORAT DES ÉCOLES »
DEUXIÈME ANNÉE (M2)
ANNÉE 2012/2013**

LA CONSTRUCTION DE COLLECTIONS EQUIPOTENTES

NOM ET PRÉNOM DE L'ÉTUDIANT : VANENGELANDT Aurélie
SITE DE FORMATION : Villeneuve d'ascq
SECTION : 3

NOM ET PRENOM DU DIRECTEUR DE MEMOIRE : DUBOIS Daniel
DISCIPLINE DE RECHERCHE : Mathématiques

Direction

365 bis rue Jules Guesde
BP 50458
59658 Villeneuve d'Ascq cedex
Tel : 03 20 79 86 00
Fax : 03 20 79 86 01
Site web : www.lille.iufm.fr

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.....	page 1
PARTIE 1	
I/Les instructions officielles	page 2
II/Analyse mathématiques du concept de nombre.....	page 3
1)Les aspects du nombre.....	page 3
2)La construction du nombre en maternelle.....	page 4
III/Activités et problèmes sur la construction du nombre en maternelle.....	page 6
1)En petite section.....	page 6
2)En moyenne section.....	page 7
3)En grande section.....	page 8
PARTIE 2	
I/La problématique.....	page 9
II/Enquête sur le terrain.....	page 9
1)Recueil de données.....	page 9
a)En petite section	
b)En grande section	
2)Analyse.....	page 17
III/Exemple d'activité utile à la construction du nombre.....	page 20
IV/Bilan.....	page 21
CONCLUSION.....	page 23
BIBLIOGRAPHIE.....	page 24

INTRODUCTION

En maternelle, l'utilisation des mathématiques est quotidienne que ce soit lors de séance de travail formel, lors des temps de rituels le matin ou encore lorsque les enfants sont responsables de leur table et qu'ils doivent ramener assez de matériel pour leurs camarades. C'est ce dernier point qui m'a interpellée durant mon premier stage en M1. Les élèves sont répartis en groupe, chaque groupe a un responsable. Les élèves sont répartis en atelier et certains exercices demandent du matériel comme de la colle, des crayons gris, etc... En grande section le matériel n'est pas préparé, dans la classe où j'ai effectué mon stage de pratique accompagnée, chaque responsable de table devait amener le matériel pour son groupe. Les responsables de groupes, quel qu'il soit, ne se rendaient pas compte qu'il fallait ramener cinq crayons par exemple s'ils étaient cinq dans son groupe. Par exemple, il en amenait d'abord trois, puis un, puis encore un. Ces moments ne faisaient pas partis des moments d'enseignement formel mais ils sont très riches en apprentissage. A partir de cette observation, j'ai voulu en savoir davantage sur la conservation des quantités discrètes. C'est pourquoi, j'ai choisi les mathématiques comme discipline pour mon mémoire et plus précisément les problèmes qui portent sur le nombre. Dans une première partie, je présenterai comment ce thème s'inscrit dans les instructions officielles, quel cycle il concerne et quelles notions mathématiques entrent en jeu. Je ferai une analyse mathématiques du concept de nombre, je présenterai les problèmes et activités autour du nombre en maternelle et enfin, dans une deuxième partie, j'expliquerai la construction de ma problématique, je présenterai les données que j'ai recueilli et je les analyserais.

Partie 1

I/ Les instructions officielles

Dans le *Bulletin officiel n°3 du 19 juin 2008*, les mathématiques prennent place dans le domaine « Découvrir le monde », dans les programmes de l'école maternelle. Le thème qui m'intéresse plus particulièrement est dans le cadre « Approcher les quantités et les nombres ». C'est à l'école maternelle que se fait l'acquisition de la chaîne numérique et de son utilisation dans la procédure de quantification. Les enfants découvrent et comprennent les fonctions du nombre, ils se rendent compte qu'il peut servir à représenter une quantité ou à repérer des positions dans une liste ordonnée d'objets. Pour ma part, je m'intéresse plutôt à la première fonction, c'est à dire, représenter une quantité. Le nombre est utilisé dans des contextes où il a du sens pour que la construction puisse se faire. La taille des collections et le fait de pouvoir les manipuler sont deux variables qui pourront être adaptées aux capacités des enfants. Dans la classe de grande section de maternelle, la manipulation du nombre devient quotidienne.

A la fin de l'école maternelle, l'enfant doit être capable de :

- comparer des quantités, résoudre des problèmes portant sur les quantités
- mémoriser la suite des nombres au moins jusqu'à 30
- dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus
- associer le nom des nombres connus avec leur écriture chiffrée

Les programmes de 2002 comportaient un point plus précis sur la conservation des collections. Une compétence était de « réaliser une collection qui comporte la même quantité d'objets qu'une autre collection (visible ou non, proche ou éloignée) en utilisant des procédures non numériques ou numériques, oralement ou avec l'aide d'écrit ». Ce point entre dans le cadre plus général de « résoudre des problèmes sur les quantités » mais il est appuyé dans les programmes de 2002.

Avant les années 1970, les programmes demandaient d'apprendre le nombre, de l'étudier concrètement¹. Il fallait étudier la formation, la décomposition, le nom et l'écriture

1 CHARNAY R., Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Hatier Ermel, p 18

des nombres de 1 à 5 puis de 5 à 10, etc. L'apprentissage des nombres n'est décrit que précisément au CP, en ce qui concerne la maternelle, il semblerait que la grande section, ne soit qu'un avant goût du CP, en limitant l'apprentissage du nombre jusque 50. L'apprentissage des nombres se faisait par l'observation de collections d'objets. « Pour avoir véritablement la notion de nombre, il faut pouvoir le reconnaître sous ses aspects divers ; connaître son nom, sa figure, sa constitution. »².

A partir des années 1970, il y a eu un changement. La notion de nombre est entrée dans les programmes. Les programmes veulent que la notion de nombre s'élabore peu à peu grâce à de nombreuses manipulations d'objets. Il faut que les enfants comprennent que le nombre naturel n'est pas un objet, ni une propriété attachée à un objet mais que c'est une propriété attachée à des ensembles.

II/Analyse mathématique du concept de nombre

1)Les aspects du nombre

Il y a deux aspects du nombre :

- le nombre cardinal
- le nombre ordinal

Ces deux aspects sont très importants dans la genèse du nombre chez l'enfant selon Piaget. L'aspect cardinal, renvoie à la capacité du nombre à quantifier une collection et l'aspect ordinal, c'est le repérage dans une file. L'aspect cardinal est très important dans la quantification des quantités, c'est ce qui permettra à l'enfant de dire qu'il y a, par exemple, cinq objets dans une collection et non pas qu'il y en a « 1,2,3,4,5 » quand on lui demandera « Combien ? ».

L'aspect ordinal est souvent négligé alors que les pratiques ordinales sont très efficaces pour le calcul mental, par exemple pour additionner 5 et 3, l'enfant va souvent surcompter, il va partir de 5 et utiliser la suite des nombres pour ajouter 3. Cependant,

2 CHARNAY R., Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Hatier Hermel p18

l'aspect ordinal est souvent utilisé pour résoudre les problèmes puisque les élèves récitent la comptine orale. Dans ce dossier, l'aspect cardinal est celui qui sera étudié plus précisément. D'après le manuel Ermel Grande Section, le schéma de construction de la notion de nombre comme « cardinal d'une classe d'ensembles équipotents » apparaît comme une belle construction, satisfaisante pour un esprit mathématique. Cela dit, il faut faire attention à ne pas tomber dans ce que Guy Brousseau appelle « l'effet Jourdain », c'est à dire que les enfants manipulent sans jamais construire d'apprentissage. « Dans la genèse du concept de nombre, le nombre « pour compter » joue le premier rôle important » critique Freudenthal dans *Mathematics and educational task* (1973)³. Pour pouvoir transmettre la notion de nombre, il faut, en quelque sorte, oublier notre théorie des nombres naturels. Les élèves prennent conscience de l'invariance des nombres dans un contexte plus vaste, à un moment ils savent que peu importe le moment où ils comptent le nombre de leurs doigts, ils en auront toujours cinq à chaque main. Ils ne construisent absolument pas cette invariance par bijection qui est une attitude d'adulte. L'enfant, en maternelle, n'a qu'un concept partiel du nombre puisqu'il n'a pas encore accès à l'opérativité.

2) La construction du nombre en maternelle

Certains pensent que les prérequis à la construction du nombre ne sont pas nécessaires. La conservation des quantités ne doit pas être maîtrisée pour manipuler les nombres. Au contraire, la manipulation, les procédures numériques (comptage) et les procédures non numériques (correspondance terme à terme) favorisent la construction de l'idée de conservation des quantités. L'histoire fait que cette hypothèse est de plus en plus admise car il a fallu des années de pratique et de manipulation des nombres pour qu'une définition (relativement récente puisqu'elle date de la fin du XIX^{ème}) mathématique des nombres voit le jour.

En 1983, Gelman a mis en avant cinq principes qui sont indispensables pour que les enfants puissent compter :

- principe d'ordre stable lié à la stabilité de la suite des mots nombres de la comptine

3 CHARNAY R., Apprentissage numériques et résolutions de problèmes, Hatier Ermel, p22

- principe de correspondance terme à terme qui suppose la mise en relation d'un mot nombre et d'un objet, pour qu'on puisse parler de comptage
- principe cardinal qui suppose que le dernier mot nombre d'une collection représente le nombre d'éléments de cette collection
- principe de non pertinence de l'ordre, l'enfant sait qu'il peut démarrer le dénombrement pas n'importe quel élément de la collection, elle aura toujours le même cardinal à condition d'énumérer tous les éléments
- principe d'abstraction selon lequel la nature des objets de la collection n'influe pas sur le cardinal de cette collection

Dénombrer une collection, c'est dire combien il y a d'éléments dans collection. Il y a plusieurs méthodes pour dénombrer :

- On peut compter les éléments en utilisant la comptine numérique, en associant chaque mots-nombre à un objet, certains enfants le font en pointant les objets du doigt d'autres le font mentalement.
- Les élèves peuvent surcompter, si on ajoute des éléments à un collection dont ils connaissent le cardinal. Par exemple, s'ils savent qu'il y a 4 bonbons sur la table et qu'on en ajoute 3, ils compteront à partir de 4, avec leurs doigts, pour en ajouter 3.
- On peut aussi avoir recours aux opérations. Par exemple, si on dit qu'il y a 10 barquettes de 15 fraises, on pourrait multiplier 10 par 15 et savoir qu'il y a 150. Cette méthode ne nous intéressera pas puisque les élèves de maternelle n'ont pas accès à l'opérativité.

Pour dénombrer de façon opératoire, il faut :

- utiliser la suite des mots nombres de façon stable et conventionnelle
- synchroniser le pointage des éléments avec la citation des mots-nombre (ne pas compter plusieurs fois le même objet ou en oublier)
- se rendre compte que le cardinal de la collection est la réponse à « combien y a-t-il d'éléments dans cette collection ? »
- ne pas tenir compte de la nature différentes des objets (couleur, forme...)

Il faut bien faire la différence entre compter et dénombrer. Compter, c'est réciter la comptine numérique et dénombrer, c'est dire quel est le cardinal d'une collection, donner une quantité. Un élève peut savoir compter sans savoir dénombrer, il ne maîtrise alors pas le pointage de chaque objet de la collection, l'énumération, ou il ne sait pas que le dernier mot-nombre récité est le cardinal de la collection. Compter pour dénombrer, il faut appliquer les 5 principes de Gelmann.

Pour construire deux collections équipotentes, les enfants ne comptent pas obligatoirement. Si les deux collections sont visibles en même temps, l'enfant peut utiliser la correspondance terme à terme.

III/Activités et problèmes sur la construction du nombre en maternelle

Les diverses procédures de quantification et la chaîne numérique oral s'acquièrent généralement entre 2 et 6 ans. Les années de scolarité en maternelle jouent donc un rôle déterminant. Les compétences du programme sont des compétences que l'élève doit avoir développées en fin d'école maternelle mais les apprentissages se construisent dans la durée, les objectifs qui découlent de ces compétences seront acquis à des rythmes différents par chaque élève. Pour les aider dans cette construction, l'enseignant doit proposer des activités adaptées à chaque niveau de l'école maternelle.

Dans un premier temps des activités de classification sont nécessaires dans la construction du nombre.

1)En petite section

Les activités et les jeux proposés entraîneront les enfants à élaborer l'idée de quantité. Les enfants utilisent d'abord du vocabulaire comme « pareil » et « pas pareil » ou « beaucoup » et « pas beaucoup ». Les élèves de cette classe sont amenés à construire des collections équipotentes de petite taille, selon les capacités de chacun, ils utilisent la correspondance terme à terme. Deux collections équipotentes sont deux collections qui comportent le même nombre d'éléments ou autrement dit, elles ont le même cardinal. La

correspondance terme à terme est un outil de comparaison de deux collections ou de la construction de petites collections. Cette méthode est associée à la notion de bijection. C'est la mise en correspondance de chaque élément d'une collection A avec un seul élément d'une collection B et inversement, il doit y avoir correspondance de chaque élément de la collection B avec un seul élément de la collection A. Lors de ces activités, l'apparence des collections devient de moins en moins gênantes pour les enfants. Les collections peuvent être multicolores, par exemple, les objets ne sont plus obligatoirement tous identiques alors que dans un premier temps, les élèves ne peuvent pas percevoir comme étant une collection plusieurs objets qui ne sont pas tous parfaitement identiques. Pour aider les enfants, le professeur peut oraliser ce que fait l'élève pour l'aider à prendre conscience des effets de ses actes. Le début de la comptine numérique commence à être appréhendé et son utilisation pour dénombrer se développe. Les enfants dénombrent par pointage avec le doigt, ceci a un rôle très important. Les techniques peuvent varier à cette âge pour reconnaître des quantités : reconnaissance globale de petites quantités, jusque 4 pour les enfants (appelé subitizing), reconnaissance de constellations organisées (comme sur un dé) ou comptage un par un. Beaucoup de rituels sont l'occasion d'utiliser les nombres (récitation de la suite des nombres ou comptage des absents...) mais à force, ces activités perdent de leur sens. Il faut proposer davantage d'activités qui font sens chez les élèves, il faut qu'ils prennent conscience que dénombrer est efficace pour retenir une quantité mais tous ne comprendront pas que le dernier mot-nombre prononcé est la quantité des objets de la collection.

2) En moyenne section

Une étape peut être franchie pour comparer ou construire une collection qui a le même nombre qu'une collection donnée. Les collections peuvent être éloignées. L'enfant commence à utiliser des procédures variées. Il estime qu'une collection est plus grande ou plus petite qu'une autre (si elles sont vraiment différentes), il s'imprègne d'une image mentale. Il peut aussi avoir recours à une collection intermédiaire, comme ses doigts par exemple. Il arrive aussi qu'il divise la collection en sous-collection facilement reconnaissable, comme par exemple une collection de 6 objets, il pourra retenir qu'il y a 2 objets rouges et 4 verts. Il se peut qu'il sache déjà représenter la quantité d'une collection

par son cardinal. A cet âge la représentation des nombres avec les doigts est très utilisée soit par dénombrement soit par affichage direct. Les comptines et les livres à compter aident à étendre la comptine orale des nombres, les chiffres irréguliers : de 11 à 16, restent cependant compliqués, l'élève pourrait avoir besoin d'aide. La suite orale des nombres est de plus en plus utilisée pour le dénombrement. Les activités proposées sont souvent des activités où les objets peuvent être déplacés pour ne pas en oublier ou les compter deux fois. C'est le moment où des occasions doivent être créées, les élèves seront amenés à y résoudre des problèmes parce que l'utilisation occasionnelle des nombres dans la vie quotidienne de la classe ne suffit pas à atteindre les compétences visées. La verbalisation des procédures par les enfants est toujours importante pour qu'ils prennent conscience de ce qu'ils sont en train de faire.

3) En grande section

Les activités proposées devront être des problèmes où l'utilisation des nombres est un bon moyen pour le résoudre. Il s'agira de consolider les compétences acquises pour qu'un travail plus organisé soit fait au CP. Le nombre devient un outil pour contrôler des quantités, pour en garder la mémoire, pour construire deux collections équipotentes, etc. L'élève se sert de la suite orale (au moins jusque 30) des nombres pour dénombrer des collections, dont les éléments peuvent être déplacés comme en moyenne section mais elles peuvent aussi devenir fixe (un marquage mental doit être effectué pour repérer les objets déjà comptés).

Partie 2

I/La problématique

Comme je l'ai déjà dit ci-dessus, je m'intéresse aux collections équipotentes. Plus particulièrement à la question :

Quelles techniques utilisent les élèves pour la réalisation d'une collection ayant le même nombre éléments qu'une collection donnée ?

Cette problématique entraîne plusieurs autres questions. Est-ce que le dénombrement est indispensable pour réaliser des collections équipotentes ? Quelles variables entrent en jeu pour la réalisation de collections équipotentes ? Quelles variables didactiques peut-on mettre en place ?

Pour essayer de répondre au mieux à cette problématique, je présenterais, dans un premier temps, l'enquête de terrain que j'ai menée auprès d'enfants de classe de maternelle, et j'en ferais une analyse. Ensuite, je présenterai quelques activités qui sont fréquemment mises en place et qui aident à la construction du nom. Je finirais par un bilan de cette analyse.

II/Enquête sur le terrain

1)Recueil de données

Pour recueillir les données dont j'avais besoin pour ce travail de recherche, je me suis rendue dans deux classes : une classe de petite section dans une école de Wattignies et une classe de grande section dans une école d'Ennevelin.

Dans ces deux classes, j'ai eu l'occasion de mener deux séances différentes que j'ai filmé. Je voulais m'intéresser aux stratégies des élèves, pour cela je voulais qu'ils m'expliquent ce qu'ils faisaient, en grande section cette partie du travail n'a pas posé de problème aux élèves contrairement en petite section où les élèves n'ont pas été pas très bavards, j'ai dû poser des questions plus précises où les élèves pouvaient répondre par oui

ou par non mais j'ai peur que les questions étaient trop orientées et qu'elles ont influencé les élèves. Toutefois comme j'ai filmé la séance, je pourrais analyser leur comportement. J'avais construit une grille d'observation (visible en annexe) mais je n'ai pas pu l'utiliser. Il n'est pas possible de mener une séance et de remplir une grille d'observation. J'en ai pas eu besoin quand j'ai regardé les films, j'ai relevé les procédures des élèves et ce qu'ils ont dit.

a) En petite section

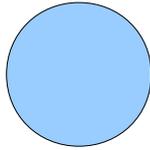
En petite section, j'ai proposé aux élèves une activité que j'ai trouvé dans un livre de Dominique VALENTIN⁴. Cette activité s'appelle « Les boîtes à oeufs » (annexe 1). J'ai également proposé une variante de cette activité à un seul élève. Il s'agissait de ramener en **un seul voyage** les coquilles d'escargots nécessaires pour remplir une boîte de 6 œufs. Je lui ai posé des questions pour le pousser à s'interroger sur la démarche à adopter.

J'avais six élèves, ce qui était difficile à gérer, il m'aurait fallu plus de temps ou moins d'élèves pour discuter avec chacun de ce qu'il avait fait et du résultat. Dans un premier temps, j'ai demandé aux enfants de prendre des coquilles d'escargot dans leur plateau pour pouvoir en remplir leur boîte à œufs. Puis j'ai introduit le terme « assez » : *il faut que tu prennes assez de coquilles d'escargot pour remplir ta boîte à œufs.*

Comme je l'ai dit, les enfants parlaient peu ou pas donc je leur posais des questions fermées et souvent il me répondait en faisant un signe de la tête.

1ère tentative : A la question « Est-ce que tu as assez de coquilles dans ton plateau ? » Ils m'ont tous répondu que oui. Les uns en avait trop et d'autres pas assez, ils n'arrivent pas encore à cet âge à comparer d'un coup d'œil deux collections. Pour ceux qui n'en avaient pas assez, je leur demandais « Est-ce qu'il y en a assez ? », ils me répondaient que non. Pour un élève qui n'en avait pas assez, il a dû en reprendre deux fois dans son plateau pour remplir sa boîte et finalement, il y en a eu une en trop. Pour ceux qui en avaient trop, ils recommençaient.

⁴VALENTIN D., 2004, *Découvrir le monde avec les mathématiques, situations pour la petite et la moyenne section*, Hatier



1) L'enfant prend 6 coquilles pour 15 trous.



2) Il se rend compte que sa boîte n'est pas remplie.



3) Il prend une poignée de 4 coquilles.



4) Il reprend une poignée de 6 coquilles.



5) Finalement, il y a une coquille en trop.

2ème tentative : Les élèves prenaient toujours « au hasard » un nombre de coquilles d'escargot pour leur premier essai. En leur posant des questions, comme « combien reste-il de trous vides ? », avec leur réponse les élèves savaient combien de coquilles d'escargot prendre.



1) Prise d'un nombre au hasard de coquilles d'escargot.



2) L'élève a pris 2 coquilles d'escargot parce qu'il en manquait deux.

J'ai pu remarquer ce comportement plusieurs fois, lorsque qu'il manquait peu de coquilles mais je devais leur demandais combien il restait de trous vides, ce n'était pas automatique. Le dénombrement n'est donc pas encore une technique acquise en petite section alors qu'ils connaissent la comptine numérique, nous remarquons alors qu'il n'est pas suffisant de savoir compter pour dénombrer.

J'ai proposé, à un élève, une variante de l'activité. Il avait une plus petite boîte à œufs (6 trous) et il devait aller chercher les coquilles d'œufs en un seul voyage. Les deux premières fois, il en prenait pas assez, il en manquait une. Les trous n'ont pas été compté.



1) Il manque une coquille d'escargot et il le sait puisqu'il montre le trou vide.



2) Il en prend plus que les premières fois. Mais il y en a une de trop.



3) Il en reprend moins mais il n'y en a plus assez.

Il se rend compte qu'il en manque puisqu'il pointe le trou du doigt à chaque fois mais il ne semble pas mettre en place de stratégie de dénombrement. Je mets donc en place une conversation avec lui, je lui demande « combien il y a-t-il de trous dans ta boîte ? » comme il ne sait pas me répondre, on compte ensemble, je pointe chaque trou avec mon doigt. C'est un acte important pour eux, pour les capacités d'énumération, le pointage avec le doigt montre que nous comptons tous les trous. Il est encore plus facile de le faire quand la collection est mobile, on peut alors déplacer chaque élément sur le côté pour faire l'énumération correctement. Après avoir utilisé la comptine numérique, il sait me dire combien il y a de trous dans la boîte. Après cela, je lui demande d'aller chercher « juste ce qu'il faut » de coquilles pour remplir la boîte. Arrivé devant la boîte où il doit prendre les coquilles, il n'utilise pas le fait qu'il sait combien de trous il y a.



4) Il en prend toujours trop

Au niveau de la boîte où il doit prendre les coquilles d'escargot, je discute avec lui, il sait qu'il doit en prendre 6, pourtant il en prend 5, je lui demande de compter combien il y en a (il utilise ses doigts pour pointer), il se rend compte qu'il en manque et il en prend encore plusieurs, ce qu'il fait qu'il y en a trop donc il recommence. Pour le dernier essai, il en prend cinq, les compte et réalise qu'il en manque un donc il en ajoute un. Donc il a finalement réussi.

J'ai rencontré également une situation où une élève me disait que sa boîte à œufs était remplie alors qu'il restait un trou vide.



Je lui ai demandé : « Est ce qu'il y a une coquille d'escargot dans chaque trou ? », elle me répondait toujours oui.

b)En grande section

En grande section, j'ai mené une activité qui s'appelle « Voiture et places », dans un premier temps, je leur donné des voitures et ils devaient aller chercher le nombre juste de places de parking et dans un second temps, je leur donnais des voitures et ils devaient aller chercher le bon parking.

Les élèves avait une collection de voitures et ils devaient aller chercher une collection de places de parking qui a le même nombre d'éléments. Ils ne voyaient pas les voitures quand ils allaient chercher les places de parking. Pour débiter l'activité, je leur ai dit que chaque voiture allait sur une place de parking et la consigne était *en un seul voyage, il faut aller chercher autant de place de parking qu'il faut pour placer chaque voiture*. J'ai bien insisté sur le fait qu'il fallait le faire en un seul voyage. Après chaque tentative, je posais des questions au élèves, elles étaient différentes si l'élève avait réussi la tâche ou non.

1ère tentative : j'ai donné des collections de voitures facilement dénombrables parce que c'était de petites collections et les couleurs des voitures pouvaient les aider à mémoriser le cardinal de la collection, visuellement, sans les compter on peut voir qu'il y a deux voitures et deux voitures rouges par exemple.

Quand je leur ai demandé comment ils avaient fait, ils m'ont répondu :

Louis : « J'ai compté les voitures et j'ai pris le nombres de places »

Arthur : « J'ai regardé les voitures et après j'ai été cherché les parkings et j'ai réussi »

Jeanne : « J'ai pas compté, j'ai regardé »

Léa : « J'ai oublié un parking, j'ai pas compté »



Arthur



Louis



Jeanne



Léa

2ème tentative : pour l'élève qui n'avait pas pris le bon nombre de places de parking, j'ai donné une collection du même genre que la première tentative et pour les autres, j'ai distribué des collections plus importantes avec des couleurs aléatoires.

Quand ils m'ont expliqué leur stratégie, j'ai pu entendre :

Louis : « J'ai regardé avec mes yeux et j'ai compté »

Arthur : « J'ai pas réussi, j'avais compté, j'en avais 9 et puis après je savais plus mais je pensais que c'était bon »

Léa : « J'ai réussi et j'ai compté »

Jeanne : « J'ai réussi parce que j'ai compté dans ma tête »



Louis



Arthur



Léa



Jeanne

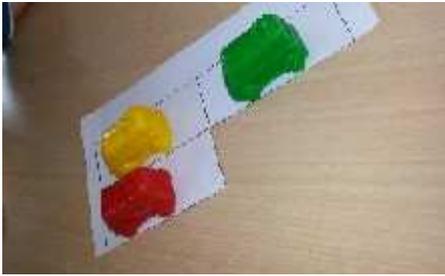
Les tentatives suivantes : Je continuais à donner des collections de plus en plus grandes et disparates au niveau des couleurs. Les élèves semblaient avoir trouver la stratégie puisqu'il n'y a eu qu'une erreur. Plusieurs élèves alignaient les voitures que je leur donnais avant de les compter avec leurs doigts mais un élève ne les alignait pas avant de les compter avec ses doigts. Souvent, ils me répondaient :

- « J'ai compté dans ma tête »
- « J'ai réfléchi dans ma tête »
- « J'ai compté avec mes doigts »



Jeanne

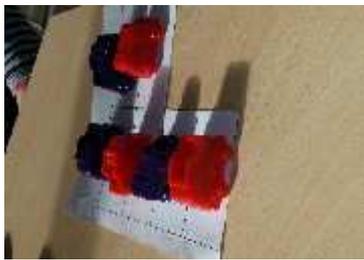
Activité dérivée : Je donnais aux élèves une collection de voitures et il devait retrouver le bon parking qui était déjà formé.



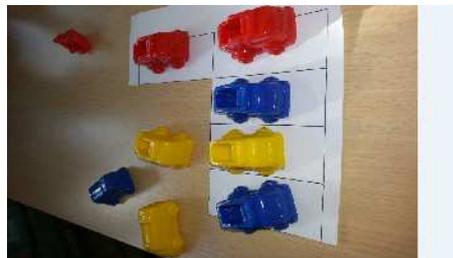
Léa



Jeanne



Louis



Arthur

Léa : « J'ai regardé »

Jeanne : « J'ai compté dans ma tête »

Louis : « J'ai compté dans ma tête »

Arthur : « J'ai compté mais il n'y en avait pas des comme moi »



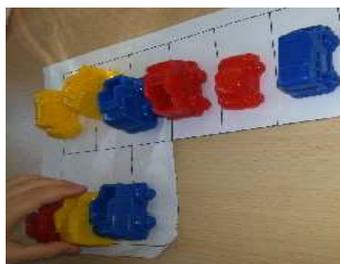
Léa



Jeanne



Louis



Arthur

Léa : « J'ai compté dans ma tête »

Jeanne : « J'ai une place en trop, j'ai pas compté le nombres de places »

Louis : « J'ai vite compté »

Arthur : (3ème essai) « J'ai vu qu'il y en avait neuf donc j'ai compté les places et j'ai réussi »

III/Analyse

Il existe plusieurs techniques pour réaliser deux collections équipotentes. Elles dépendent fortement du niveau de classe des élèves mais aussi de l'activité proposée, les contraintes de l'activité induisent fortement les techniques utilisées.

La construction d'une collection équipotente est une étape importante dans la construction du nombre. A chaque niveau de l'école maternelle correspond des activités appropriées pour que cette construction se fasse dans les meilleures conditions.

L'enseignant doit créer un besoin du nombre chez l'enfant grâce aux activités. Pour que le sens du nombre soit acquis par les enfants, il faut qu'ils maîtrisent les cinq principes de Gelman, dont j'ai déjà parlé. Pour chaque principe, il y a des activités pour que les élèves les maîtrisent. Le dénombrement, la comparaison et la construction de collections aident les élèves à acquérir le principe de cardinal. Ce principe est, je le rappelle, le fait de pouvoir dire combien d'objets sont contenus dans une collection. L'élève a compris que le dernier mot-nombre énoncé, lorsqu'il dénombre une collection à l'aide de la comptine numérique, est le cardinal de la collection. Le dénombrement et la construction de collections d'objets variés aide à l'acquisition du principe d'abstraction, c'est-à-dire l'enfant sait que la nature des objets n'influencent en rien le cardinal, l'hétérogénéité de la collection n'a pas de rapport avec son dénombrement. L'élève a alors dépassé le concept d'objet pour acquérir le concept de nombre.

En petite section, les activités proposées pour la construction du nombre sont souvent présentées tous les jours, sous la forme de rituels, il peut aussi y avoir, des activités ponctuelles. L'activité que j'ai proposé avait pour objectif d'évaluer une quantité dans une tâche de construction progressive d'une collection équipotente à une collection de

référence, l'activité n'a pas eu les finalités que j'espérais.

Les élèves maîtrisaient bien la correspondance terme à terme, ils savaient que dans chaque trou, il fallait mettre une coquille d'escargot. Une seule élève n'avait pas acquis cette capacité, elle ne comprenait pas qu'à chaque trou correspondait une coquille. Normalement, les élèves devaient ajuster le nombre de coquilles d'escargots à chaque expérience, en fonction du fait qu'ils en aient pris trop ou pas assez. Je n'ai pas pu observer ce que je voulais pour plusieurs raisons :

- il y avait trop d'élèves dans mon groupe d'activité, j'avais très peu de temps à accorder à chaque élève
- les trous dans les boîtes à œufs étaient trop nombreux, probablement au dessus des capacités des élèves
- les élèves ne parlaient pas, j'aurais aimé qu'ils oralisent leurs procédures pour comprendre ce qu'ils faisaient et pourquoi.

Je n'ai pas donc pas eu la possibilité de tirer beaucoup de conclusions. Cela dit, il ne semblait pas que les élèves aient recours au dénombrement pour trouver le cardinal des collections. Comme je l'ai déjà dit, le nombre de trous était peut-être trop élevé et ce n'était pas le but de la tâche contrairement à la variante que j'ai proposé. En effet, pour un élève, la tâche était de d'aller chercher, en un seul voyage, six coquilles d'escargot pour remplir une boîte à œufs, il ne lui ai pas venu spontanément l'idée de compter les trous alors que la comptine numérique jusque six lui était accessible, je m'étais renseignée auprès du professeur de la classe. Il semblerait donc que le dénombrement de collection ne soit pas une technique à la portée d'élèves de petite section. De plus, cet élève connaissait le cardinal de la collection de référence (le nombre de trou dans la boîte à œufs), j'ai compté avec lui le nombre de trous, il a su me dire qu'il y avait six trous quand je lui ai posé la question « combien ? » donc il maîtrise le principe cardinal mais au moment de prendre les coquilles d'escargot, il n'en tenait pas compte. Il n'a peut être pas encore compris que les nombres sont utiles pour mémoriser des quantités. La technique pour la construction de collection équipotente est donc la correspondance terme à terme pour les élèves en petite section.

Je n'ai pas eu l'occasion de proposer d'autres activités aux élèves de ce niveau. Avant de construire une collection équivalente à une autre, il aurait fallu faire un travail de comparaison de collections, mobiles ou non. Par exemple, les élèves pourraient comparer des collections de voitures et de bonhommes en plastiques, les deux collections sont mobiles donc les élèves pourraient utiliser la correspondance terme à terme.

Les activités courtes et ritualisées sont de bons leviers pour que l'enfant construise le nombre. La petite section est un niveau de classe, ainsi que le cycle 1 en général, propice à ce genre d'activités. On peut demander aux élèves de « poser la table » pour quatre personnes, il faut qu'à chaque place, ils mettent quatre assiettes, quatre verres etc... C'est une activité qu'on peut mettre en place tout au long de l'année puisque les procédures vont évoluer.

L'activité que j'ai proposé en grande section a été plus satisfaisante du point de vue des conclusions. Les élèves ont davantage oralisé leurs procédures, ce qui m'a permis de comprendre leur démarche. Pour de petites collections, la première tentative, les élèves me disaient parfois qu'ils regardaient, ils ne comptaient pas, c'est ce qu'on appelle le « subitizing », pour de petites quantités, jusque 4 généralement, on peut les reconnaître sans les compter. J'ai donc pu vérifier cette théorie. J'avais mis des voitures de couleurs facilement reconnaissables (deux rouges et deux vertes par exemple), ce détail a peut-être aidé les élèves pour le subitizing mais ils n'en ont pas parlé spontanément, je n'ai donc pas voulu les influencer en leur posant la question.

Pour les collections plus grandes et disparates, les élèves avaient recours au dénombrement, parfois avec les doigts. Le dénombrement comporte des risques, l'élève peut oublier des éléments ou en compter deux fois, c'est probablement pour ça qu'une élève alignait les voitures avant de les compter, elle était alors d'autant plus certaine qu'elle n'en oublierait pas. J'en fais la déduction puisque l'élève en question n'a pas expliqué pourquoi elle rangeait les voitures mais ce comportement est une aide à l'énumération. Le dénombrement est utile mais il faut retenir le résultat, la difficulté était que les deux collections étaient éloignées l'une de l'autre. Cette difficulté a empêché un élève, une seule fois, d'avoir le bon résultat.

En grande section, les élèves utilisent donc le dénombrement. Les élèves maîtrisent donc une technique efficace pour connaître le nombre d'éléments d'une collection. A ce niveau, le nombre a une véritable fonction pour eux, ils utilisent le nombre pour retenir des quantités.

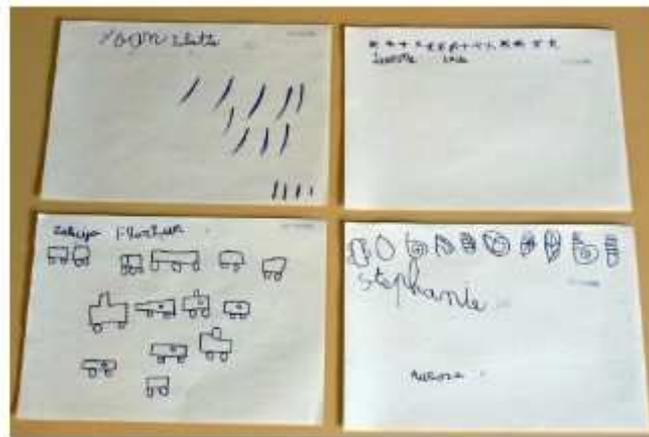
La variante de l'activité posait une difficulté supplémentaire puisque les parkings étaient déjà formés. En effet, face au choix de parking, les élèves pouvaient « voir » lesquelles n'étaient pas bons, les élèves de grande section ont la capacité de comparer deux collections sans avoir recours au dénombrement, si les deux collections sont très différentes ou alors, il fallait qu'ils comptent, comparent le nombre d'éléments, tout en se souvenant du nombre d'éléments de la collection de départ. La deuxième collection n'était donc plus à former mais à retrouver, ça a posé un problème à un élève puisqu'il me disait « qu'il ne trouvait pas le bon », il en prenait donc un au hasard.

III/ Exemples d'activités utiles à la construction du nombre

Une autre variante de l'activité est de donner une collection de voiture aux élèves mais ils doivent faire appel à un intermédiaire pour aller chercher les places de parkings, ils vont devoir « passer commande ». Cette activité permet de se rendre compte que les nombres sont un moyen utile pour communiquer sur les quantités avec d'autres personnes. Les enfants pourront constater qu'un nombre représente la même quantité pour lui que pour quelqu'un d'autre. C'est le principe de l'ordre stable pour Gelman. Ils comprennent qu'il existe une définition unique du nombre, reconnue par tous.

Une autre variante de cette activité : donner une collection de voitures et dire aux élèves qu'ils n'iront chercher les places de parking plus tard, avec quelques heures de décalage voire avec un jour de décalage. L'élève peut avoir recours à des sous-collections s'il n'est pas sûr de mémoriser le cardinal de la collection. Voici une illustration⁵ :

5 www.ac-caen.fr/ia61/circos/laferte/.../La_construction_du_nombre.ppt



Ces illustrations sont des réalisations d'élèves lors de cette activité, ce sont des sous-collections. Les élèves ont chacun une manière personnelle de représenter les collections qu'on leur propose. Deux élèves les représentent par l'objet en question (des voitures) et les deux autres font appel à des symboles (étoiles et bâtons). Il avait été précisé aux élèves qu'ils pouvaient utiliser une feuille pour se souvenir de la quantité de la collection, les élèves ont représenté la collection mais aucun n'a noté le cardinal de la collection. On peut penser que les élèves qui ont représenté la collection par des voitures n'ont pas encore conscience que s'ils la représentent différemment, la collection aura toujours le même nombre d'éléments, si j'avais pu discuter avec ces élèves, ils m'auraient expliqué leur choix.

On peut aussi utiliser les sous-collections lorsqu'on demande aux élèves de « passer commande » pour construire une collection, l'utilisation de sous-collections est alors une variable didactique. En proposant cette activité j'aurais pu voir si les élèves utilisaient la sous-collection ou s'ils maîtrisaient le principe cardinal.

IV/Bilan

Il aurait été intéressant de voir si les élèves réinvestissaient ces compétences dans la vie quotidienne. La construction de collections équipotentes peut être remarqué tous les jours dans une classe en maternelle. Ce sont d'ailleurs ces moments là qui ont été à l'origine de mes interrogations. Lors de moments d'enseignements formels, les élèves ont une consigne, une tâche à effectuer, ils apprennent des choses et réinvestissent mais les moments d'apprentissages non-formels sont tout aussi importants. J'aurais aimé pouvoir

observé les élèves dans ces moments, lorsqu'ils distribuent le matériel à leur groupe, ils construisent une collection équipotente à une autre, ils doivent donner cinq tubes de colles aux cinq enfants de la table par exemple. Dans ces moments là, ils peuvent réinvestir ce qu'ils ont appris mais je n'ai pas eu l'occasion de l'observer.

Il y a plusieurs points qui pourraient être amélioré dans ce dossier. Tout d'abord la problématique est très précise ce qui restreint les champs d'analyse mais le point positif c'est qu'elle est rédigé de telle sorte que les observations sont faciles à mener. Dans la pratique, je n'ai pas eu l'occasion d'aller souvent en classe, le professeur de la classe de grande section où je suis allée, a souvent annulé nos rendez-vous, ce qui a compliqué ma tâche. J'aurais aimé aller davantage en classe, surtout en petite section, je n'avais pas imaginé devoir y aller plusieurs fois, cependant le travail que j'ai mené n'a pas été suffisant. Pour établir une relation avec les élèves, j'aurais dû y retourner plusieurs fois, de plus, en petite section, il faut un temps pour que les élèves s'approprient l'activité, la proposer plusieurs fois à quelques jours d'intervalles aurait pu permettre l'émergence de procédures, les élèves auraient peut être plus oraliser leurs procédures s'ils se sentaient plus à l'aise dans l'activité et avec moi.

En grande section, j'étais satisfaite de ce que j'ai fait même si j'aurais pu proposer d'autres activités, les procédures sont peut-être différentes selon l'activité, les contraintes... J'aurais également pu mettre en place les variantes de l'activité que j'ai expliqué dans ce mémoire.

CONCLUSION

La construction de collections équipotentes est un sujet important en mathématiques dans les classes de maternelles et les procédures sont nombreuses. Cette activité a un rôle très important dans la construction du nombre, les élèves utilisent dans un premier temps la correspondance terme à terme et peu à peu se crée un besoin du nombre grâce à différentes contraintes (proposer des collections éloignées, mobiles, utiliser un messenger).

A l'aide de mes lectures, des activités que j'ai proposé aux élèves de différents niveaux et des fiches d'activités que j'ai étudiée, j'ai pu observer et analyser les procédures que les élèves utilisent pour répondre à des situations problèmes portant sur la construction d'une collection ayant le même nombre d'éléments qu'une collection donnée.

Les procédures dépendent évidemment du niveau de classe des élèves mais aussi de leurs compétences, chaque élève avance à son rythme et il ne faut surtout pas brûler les étapes pour qu'ils acquièrent une bonne notion du nombre. Il faut d'abord proposer des activités de classification pour que les élèves apprennent qu'une collection est une formation d'éléments qui forme un « tout » et qui ont un caractère commun. Ensuite il faut traiter l'aspect ordinal et cardinal. Il y a donc des activités de rangement et d'ordre pour appréhender l'aspect ordinal du nombre, des activités d'énumération pour préparer au dénombrement, ces activités consiste en l'exploration orale de tous les objets d'une collection, en une seule fois. Et ensuite viennent les activités de dénombrement dans la construction de collection équipotente qui donnent du sens au nombre.

Il a été très intéressant de travailler sur ce sujet qui, comme je l'ai dit, est très important en maternelle. Si j'ai l'occasion d'être enseignante en cycle 1, l'étude de ce sujet me sera très précieuse, elle me permettra de proposer des activités adéquates et utiles pour la construction du nombre en maternelle.

BIBLIOGRAPHIE

LIVRES :

BOULE F., 1989, *La construction des nombres*, Paris, Editions Armand Colin

BRISSIAUD R., 1991, *J'apprends les maths CP : fichier de l'élève*, Paris, Editions Retz

CHARNAY R., 2005, *Apprentissages numériques et résolutions de problèmes*, Paris, Editions Hatier Ermel

DEHAENE S., 2001, Qu'est-ce qu'un nombre ?, *La recherche, spécial mathématiques*, n°346

FAYOL M., 1985, Nombre, numération et dénombrement : que sait-on de leur acquisition ?, *Revue française de pédagogie*, n°70, 59-77

MARTIN F., 2003, *Apprentissages mathématiques : jeux en maternelle*, CRDP Aquitaine

MELJAC C., 1979, *Décrire, agir, compter. L'enfant et le dénombrement spontané*, Paris, Editions P.U.F

PIAGET J., 1991, *La genèse du nombre chez l'enfant*, Neuchâtel, Editions Delachaux et Niestlé

PIERRARD A., 2002, *Faire des mathématiques à l'école maternelle*, CRDP de l'Académie de Grenoble

VALENTIN D., 2005, *Découvrir le monde avec les mathématiques, situations pour la grande section*, Hatier

VALENTIN D., 2004, *Découvrir le monde avec les mathématiques, situations pour la petite et la moyenne section*, Hatier

WALLON H., 1962, Pluralité et nombre, *Enfance*, n°15, p201-220

PROGRAMMES

BO Hors série n°3 3 du 19 juin 2008

Direction de l'enseignement scolaire Bureau du contenu des enseignements, *Vers les mathématiques. Quel travail en maternelle ?*, Document d'accompagnement en mathématiques

INTERNET :

www.ac-caen.fr/ia61/circos/laferte/.../La_construction_du_nombre.ppt

http://www.ac-grenoble.fr/mathssciences/IMG/pdf_Construction_du_nombre_Mat_PE_mardi.pdf

http://maths.creteil.iufm.fr/Premier_degre/lexique.htm

CEDEROM :

BRIAND J., LOUBET M. et SALIN M-H., 2004, *Apprentissages mathématiques en maternelle*, HATIER Pédagogie

Annexe 1

Activité : Les boîtes à œufs

Objectifs : Evaluer une quantité dans une tâche de construction progressive d'une collection équipotente à une collection de référence.

Matériel :

- une centaine de coquilles d'escargots placées dans une grande corbeille
- des boîtes à œufs
- un plateau par enfant

But à atteindre : Mettre une coquille dans chaque alvéole d'une boîte de 12 œufs.

Prenez des coquilles d'escargots sur votre plateau et ensuite mettez en une dans chaque trou.

Variables didactiques : Il faut que le plateau soit vide quand la boîte est remplie.

Grille d'observation :

	Enfant 1	Enfant 2	Enfant 3
L'enfant essaie décompter le nombre de trou			
L'enfant prend trop de coquilles d'escargots sur son plateau			
L'enfant ne prend pas assez de coquilles d'escargots sur son plateau			
L'enfant prend le bon nombre de coquilles d'escargots			
L'enfant met plusieurs coquilles d'escargots dans le même trou			
L'enfant met une seule châtaigne dans chaque trou			
L'enfant laisse un trou dans la boîte à oeufs			

Annexe 2

Activité : Voitures et places

Objectifs : Construire les premiers nombres dans leur aspect cardinal

Matériel : - une grande boîte pour récupérer les places en trop
- une cinquantaine de voitures
- une centaines de places de parking

But à atteindre : prendre le nombre exact de places de parking par rapport aux nombres de voitures données.

Allez chercher en un seul voyage, le nombres exactes de places de parking pour vos voitures. Vous devez mettre chaque voiture sur une place et il ne faut pas que vous ayez des places en trop.

Variables didactiques :

- donner des voitures de même couleur (2 voitures rouges et deux voitures jaunes, ce qui permettre de repérer 2 et 2)
- varier le nombre de voitures
- demander aux enfants d'aller chercher un parking qui est déjà fait par rapport aux nombres de voitures donnés.

Grille d'observation :

	Enfant 1	Enfant 2	Enfant 3
L'enfant décompte le nombre de voitures			
L'enfant prend trop de places dans sa barquette			
L'enfant ne prend pas assez de places dans sa barquette			
L'enfant prend le bon nombre de châtaignes			
L'enfant met plusieurs voitures sur la même place			
L'enfant met une seule voiture sur chaque place			

Ce mémoire traite de la construction de collections équipotentes en maternelle, ce qui signifie que je m'intéresse à la capacité des élèves à construire une collection ayant le même nombre d'éléments qu'une collection donnée. Cette collection peut-être construite de diverses manières sous différentes contraintes. Vous découvrirez que ces activités sont très importantes en numération, en effet elles entrent dans le processus de construction de la notion de nombre chez l'élève.

Mots-clés : maternelle, collections équipotentes, correspondance terme à terme, dénombrement