



**HAL**  
open science

## L'introduction de la notion d'aire

Elise Locquet

► **To cite this version:**

| Elise Locquet. L'introduction de la notion d'aire. Education. 2013. dumas-00906343

**HAL Id: dumas-00906343**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00906343v1>**

Submitted on 19 Nov 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**MASTER SMEEF**

**Spécialité « PROFESSORAT DES écoles »**

**DEUXIÈME Année (M2)**

**Année 2012/2013**

**L'INTRODUCTION DE LA NOTION D'AIRE**

**NOM ET PRENOM DU RESPONSABLE SCIENTIFIQUE DU SEMINAIRE : DELPLACE Jean-Robert**

**DISCIPLINE DE RECHERCHE : Mathématiques**

**NOM ET Prénom DE L'étudiant : LOCQUET Elise**

**SITE DE FORMATION : ARRAS**

**SECTION : Groupe 3**

**Direction**

*365 bis rue Jules Guesde*

*BP 50458*

*59658 Villeneuve d'Ascq cedex*

*Tel : 03 20 79 86 00*

*Fax : 03 20 79 86 01*

*Site web : [www.lille.iufm.fr](http://www.lille.iufm.fr)*

*Institut Universitaire de Formation des Maîtres*

*école interne de l'Université d'Artois*

# SOMMAIRE

<b>I.</b>	<b>LES PROGRAMMES OFFICIELS.....</b>	<b>4</b>
<b>II.</b>	<b>DEFINITIONS.....</b>	<b>6</b>
	1. <i>Les grandeurs et mesures .....</i>	6
	2. <i>Les niveaux de pensée de Van Hiele .....</i>	7
	3. <i>Les trois types de géométrie .....</i>	8
	4. <i>La thèse de Berthelot Salin (1992).....</i>	8
<b>III.</b>	<b>BIBLIOGRAPHIE COMMENTEE .....</b>	<b>8</b>
<b>I.</b>	<b>METHODOLOGIE.....</b>	<b>12</b>
	A. PRESENTATION DE LA CLASSE.....	12
	B. ORGANISATION DES SEQUENCES .....	12
	C. DESCRIPTION DES SEANCES .....	13
	1. <i>Observation sur les périmètres .....</i>	13
	2. <i>Première séance : la découverte de l'aire .....</i>	16
	3. <i>Deuxième séance : des exercices pour ranger et classer .....</i>	21
<b>II.</b>	<b>EXPERIMENTATION.....</b>	<b>27</b>
	A. L'ANALYSE A PRIORI .....	27
	1. <i>Les connaissances et procédures .....</i>	27
	2. <i>Les erreurs.....</i>	30
	B. L'ANALYSE A POSTERIORI .....	31
	1. <i>Séance 1.....</i>	34
	2. <i>Séance 2.....</i>	40
	3. <i>Séance 3.....</i>	44
	4. <i>Séance 4.....</i>	49
	C. BILAN.....	57
<b>III.</b>	<b>OUVERTURE .....</b>	<b>60</b>

# Introduction

---

En première année de Master, j'avais décidé d'orienter mon mémoire vers la géométrie, et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord, parce qu'après avoir effectué un stage en école élémentaire, en deuxième année de licence, j'avais déjà orienté mon rapport de stage sur la géométrie : il me semblait alors évident de poursuivre et d'approfondir mes recherches. Puis, et surtout, la géométrie est un domaine des mathématiques qui n'est que peu enseigné à l'école primaire, face aux autres domaines. De plus, le temps accordé à cette matière est de plus en plus court, dans un programme de plus en plus chargé.

J'ai choisi l'étude des aires, et plus particulièrement l'introduction de la notion d'aire. La découverte de cette grandeur se fait en CM1, et l'apprentissage des mesures avec les formules que nous connaissons se fait en CM2.

Ce thème m'a particulièrement intéressée, notamment j'ai pu me rendre compte, en première année de Master, que de nombreux étudiants estimaient que si deux figures ont le même périmètre, alors elles ont la même aire, et réciproquement. J'ai donc fait la conclusion que cette notion n'avait pas de sens pour eux, tout du moins, qu'ils ne parvenaient pas à se la représenter clairement. Il est pourtant important, certes, d'appliquer correctement les formules de calculs, mais aussi de connaître ce qu'elles signifient, et leur éventuelle relation si elle existe.

Les lectures faites en première année de Master m'ont grandement aidée, car j'ai pu retracer l'évolution de l'enseignement de la géométrie, découvrir les trois types de géométrie, et enfin appréhender plusieurs méthodes pour introduire la notion d'aire dans des livres d'élèves et du maître.

Cependant, j'ai fait une grande confusion entre la grandeur et la mesure. Nous n'avions en effet pas encore abordé la didactique des mathématiques, et il est typique de mélanger, dans le langage courant, ces deux concepts. Par exemple, nous disons naturellement « la longueur d'un segment », au lieu de « la mesure de la longueur d'un segment ». J'ai donc discuté avec mon directeur de mémoire en début de deuxième année de Master, pour qu'il m'explique les grandeurs et les mesures. De plus, nous avons abordé, dès septembre, la didactique des « Grandeurs et mesure », et c'est ainsi que j'ai pu me rendre compte de mon erreur de première année.

J'avais également construit une séquence à mettre en place dans une classe de CM1, qui devait me permettre de savoir quelle technique permet de donner le plus de sens à la notion d'aire. J'avais donc retenu trois méthodes, toutes trois trouvées dans des manuels d'élèves : le pavage, le pliage / découpage, et les tangrams. Je voulais alors organiser la classe en trois groupes, pour que chacun travaille sur une méthode. Cependant, mon directeur de mémoire m'a expliqué que je risquais fortement de me perdre en route, puisque d'une part, il est très complexe de gérer trois groupes en même temps, sur trois thèmes différents, et d'autre part, il aurait été très difficile de conclure quant à l'efficacité d'une technique.

Il m'a alors aidée à construire une nouvelle séquence, se basant cette fois-ci sur un travail en groupe classe, et sur deux techniques employées à deux séances différentes. J'ai pu, par la suite, la mettre en place dans une classe de CM1.

J'ai ainsi, au fur et à mesure de ma première année, puis de ma deuxième année de Master, affiné ma problématique pour qu'elle devienne : « Comment donner du sens à la notion d'aire pour une surface plane donnée ? », mais surtout mes sous-questions, centrées sur :

- Le matériel (pavage, pliage / découpage) peut-il aider dans la représentation ?
- Comment faire pour que l'aire ne soit pas confondue avec le périmètre ?

Premièrement, je vous présente la partie théorique, avec notamment des définitions. Ensuite, ce sera la partie pratique, avec mon expérience en classe de CM1 ainsi que l'analyse a priori de l'activité, et l'analyse a posteriori.

# Partie théorique

---

## **I. Les programmes officiels**

En lisant les programmes officiels, et particulièrement le Bulletin Officiel du 19 juin 2008, je me suis rendu compte que, contrairement à ce que je pensais initialement, l'aire d'une surface ne fait pas partie du domaine de la « Géométrie plane », mais du domaine des « Grandeurs et mesure ».

Concernant ce dernier domaine, le bulletin officiel est relativement complet, que ce soit au niveau du programme, au niveau des références au socle commun, comme au niveau des repères fournis pour organiser la progressivité des apprentissages.

Toutefois, concernant les aires, le choix se restreint nettement.

En effet, à propos du programme de l'école, nous pouvons remarquer qu'elles ne sont abordées qu'au cycle 3, et qu'il y est indiqué : « Les aires : comparaison de surfaces selon leurs aires, unités usuelles, conversions ; formule de l'aire d'un rectangle et d'un triangle. ». (BO du 19 juin 2008)

A propos du socle commun, la référence est assez large, et ne concerne pas que les aires : « Compétences attendues à la fin du CM2 (2<sup>ème</sup> palier). L'élève est capable :

- d'utiliser les unités de mesure usuelles ;
- d'utiliser des instruments de mesure ;
- d'effectuer des conversions ; » (BO du 19 juin 2008).

Enfin, concernant les repères fournis pour organiser la progressivité des apprentissages, les aires apparaissent en CM1 et en CM2. En CM1, il est dit :

« - Mesurer ou estimer l'aire d'une surface grâce à un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence ou grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé.

- Classer et ranger des surfaces selon leur aire. »

En CM2, il est dit :

« - Calculer l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle en utilisant la formule appropriée.

- Connaître et utiliser les unités d'aire (cm<sup>2</sup>, m<sup>2</sup> et km<sup>2</sup>). » (BO du 19 juin 2008).

Nous pouvons donc constater que les apports donnés par le bulletin officiel sont très vastes. Il propose deux méthodes en CM1 pour mesurer une aire sans utiliser les formules (qui n'apparaissent donc qu'en CM2) : la surface de référence ou le réseau quadrillé. Toutefois, liberté pédagogique aidant, ces propositions ne sont pas des obligations, et tout enseignant a la possibilité d'employer la méthode de son choix.

Je me suis également penchée sur les programmes officiels de 2002, et plus particulièrement sur le document d'accompagnement intitulé « Grandeurs et mesure à l'école élémentaire ».

La partie A nous présente quelques repères pour l'enseignement des grandeurs et de la mesure, et nous pouvons y apprendre qu'il est important que les élèves appréhendent la grandeur avant la mesure, et que « les premières activités visent à construire chez les élèves le sens de la grandeur, indépendamment de la mesure et avant que celle-ci n'intervienne » (document d'accompagnement). Ceci rejoint donc ma problématique.

De plus, pour classer les aires, les élèves ont à leur disposition deux techniques : les comparaisons directes, et les comparaisons indirectes (où le recours à un objet intermédiaire est nécessaire). Dans le cas de ma séquence que vous lirez ultérieurement, les deux comparaisons sont proposées.

La partie B précise les aires :

« La progression qui se poursuit au collège, suit la même dynamique que celle utilisée pour les longueurs : d'abord des travaux de comparaison, puis un passage à la mesure par le choix d'un étalon, suivi d'une familiarisation avec certaines unités du Système International. Un premier temps doit être consacré à des activités de comparaison d'aires. Il s'agit de comparer des surfaces planes selon leur étendue. Ces surfaces peuvent être soit dessinées sur une feuille de papier uni, avec la possibilité de les découper, soit matérialisées par des objets peu épais. Il s'agit :

- des surfaces d'aires très différentes : la superposition (mentale ou effective) permet de constater que l'une est beaucoup plus étendue que l'autre ;
- des surfaces d'aires égales, l'égalité pouvant être vérifiée par superposition directe ;
- des surfaces d'aires égales, mais qui ne sont pas superposables directement : des découpages et des réagencements (effectifs ou mentaux) sont alors nécessaires pour constater l'égalité des aires.

(...) Un second temps peut être consacré à la comparaison d'aires de surfaces dessinées sur papier quadrillé. Pour cette activité, il est bon de se limiter à des contours suivant des

lignes ou les diagonales du quadrillage. Les procédures précédentes restent valables, enrichies par la possibilité de compter le nombre de carreaux « occupés » par les surfaces et de comparer les mesures en « carreaux ». » (document d'accompagnement).

J'ai grandement suivi cet apport, en prenant bien soin de ne pas entrer dans la mesure, puisque les élèves ne l'étudient qu'en CM2.

## II. Définitions

Dans cette partie, je définis les termes et notions que j'emploierai par la suite.

### 1. Les grandeurs et mesures

Un objet a des propriétés, appelées « caractères ». Ces caractères sont de deux types :

- qualitatifs, c'est-à-dire qu'on ne peut pas les quantifier, comme la couleur, la matière ;
- quantitatifs, c'est-à-dire qu'on peut leur associer un nombre. Parmi ces caractères quantitatifs, il y a les discrets, que l'on peut dénombrer, et les continus, que l'on peut parfois **mesurer**, c'est-à-dire compter le nombre de fois qu'une grandeur unité (appelée l'étalon) de la même espèce est contenue dans l'objet. Dans certains cas, on ne peut pas mesurer, mais calculer.

Dans le magazine JDI, un physicien définit la mesure :

« C'est faire un rapport de deux quantités de même nature – deux longueurs, deux masses ... (...) Effectuer une mesure nécessite aussi de fixer un référent et de lui donner un nom. Le fixer est le problème de la métrologie qui pourra produire en un grand nombre d'exemplaires des étalons identiques, de sorte que toutes les mesures faites dans le monde soient comparables. (...) Parler de mesure d'une grandeur a deux acceptions : l'une, d'ordre théorique, est liée aux mathématiques ; l'autre, plus pragmatique, renvoie à la manière dont on prend physiquement la mesure de la grandeur.» (JDI n°8, 2008, p12).

Une **grandeur** est un caractère quantitatif.

L'aire est une grandeur, plus précisément un caractère quantitatif continu.

L'aire d'une figure géométrique plane correspond à la mesure de la surface sur laquelle elle s'étend. Un abus de langage assez fréquent consiste à donner pour synonyme d'aire le mot surface. L'aire est pourtant la grandeur associée à la surface.

Dans la classe de CM1, j'ai utilisé comme définitions de l'aire : « la quantité de papier qu'utilise cette figure », « l'encombrement », « la place qu'elle prend sur le papier ».

Pour approcher la notion d'aire, j'ai proposé des activités de comparaison :

- directe, c'est-à-dire à l'œil ou par manipulation ;
- indirecte, c'est-à-dire par l'utilisation d'un tiers objet.

Par la suite, j'ai suggéré des activités de rangement. Les élèves devaient mettre en ordre, soit disposer selon un ordre donné (dans mon cas, il s'agissait de ranger les aires par ordre croissant).

Le magazine JDI propose sur les aires : « La mesure des aires ne s'approche pas aussi facilement car il est impossible, sauf dans certains cas triviaux, de reporter une surface d'aire « un » pour déterminer celle d'une surface quelconque donnée. Bien souvent, on pourra approcher la mesure de l'aire d'une surface par des encadrements. » (JDI n°8, 2008, p14).

## 2. Les niveaux de pensée de Van Hiele

Van Hiele distingue 4 niveaux de pensée, repérés en géométrie.

- Le niveau 0 : C'est la reconnaissance visuelle. Devant une figure géométrique, il n'y a pas d'analyse. Elle est reconnue par sa forme.  
C'est le stade typique en maternelle. L'élève saura qu'il a devant lui un carré, car il a la forme d'un carré. La représentation prototypique y a toute son importance, car un carré placé sur la pointe devient alors un losange.
- Le niveau 1 : Il y a analyse. Les figures ont des propriétés, mais ce n'est pas ordonné.  
C'est le stade de l'élémentaire. L'élève repère les propriétés des différentes figures, mais ne se préoccupe pas des assertions et redondances.  
A ce niveau, le carré n'est pas un rectangle particulier.
- Le niveau 2 : C'est le début des petites démonstrations. L'enfant en dit un peu trop, par exemple « Ce quadrilatère est un carré, car il a quatre angles droits ».  
A ce niveau, le carré est un rectangle.
- Le niveau 3 : Le raisonnement se fait avec déduction et démonstration. On est alors dans la géométrie euclidienne.  
C'est le stade typique du collège.

### 3. Les trois types de géométrie

Catherine Houdement et Alain Kuzniak distinguent trois types de géométrie.

- La géométrie naturelle I : Ce que l'élève voit est la réalité, et cela suffit pour prouver. Il y a confusion entre géométrie et réalité. Cependant, cette géométrie s'enrichit au fur et à mesure, avec ce que l'on rencontre.
- La géométrie axiomatique naturelle II : A partir de ce que l'élève voit, il construit la géométrie à partir d'axiomes. Il commence les démonstrations. L'élève utilise la géométrie comme un schéma de la réalité. La déduction et la démonstration y sont majeures.
- La géométrie axiomatique formaliste III : La géométrie « pure », qui peut se faire sans dessin. C'est une séparation de la géométrie et de la réalité « visuelle ».

### 4. La thèse de Berthelot Salin (1992)

Cette thèse a permis de bien définir certains termes ou expressions géométriques, en particulier : les connaissances spatiales, qui sont les connaissances qui permettent à un sujet de contrôler ses relations à l'espace sensible, donc lui permettre de :

- reconnaître, décrire, fabriquer ou transformer des objets. (...)

## III. Bibliographie commentée

Pour cette bibliographie, j'ai choisi de commenter l'article « Aires de surfaces planes en CM et 6<sup>ème</sup> », de Régine DOUADY, Marie-Jeanne PERRIN de l'I.R.E.M de Paris Sud.

Cet article, que j'ai lu après avoir commencé la préparation de ma séquence, m'a interpellée, puisqu'il est parfaitement en lien avec ma problématique. De plus, il m'a apporté des éléments de définition. Ainsi, dès la première page, nous apprenons que « Par surfaces planes, on entend des parties bornées du plan dont l'intérieur (non vide) est limité par une ou plusieurs courbes fermées de longueur finie ». (Aires de surfaces planes en CM et 6<sup>ème</sup>, 1986, p47).

J'ai trouvé très intéressant de lire cet article après avoir trouvé et organisé mon sujet, puisqu'il ne m'a pas influencée dans la rédaction de ma séquence. Au contraire, il m'a offert une autre vision, ainsi que d'autres possibilités.

Je pense que si je l'avais lu avant de développer tout travail, ma séquence n'aurait pas été celle qu'elle a été. L'article m'aurait sans doute influencée, même si je ne le désirais pas.

Il est évident que la notion d'aire en 1986 était exactement la même qu'actuellement. Ainsi, nous pouvons lire dès le début :

« Par déplacement, on peut amener certaines surfaces à se superposer ou à s'inclure les unes dans les autres. Elles occupent plus ou moins de place dans le plan. Pour d'autres surfaces, leur forme ne permet ni superposition ni inclusion. [...] Soient deux surfaces S1 et S2 qu'un même déplacement amène en coïncidence, elles occupent autant de place dans le plan. Nous dirons que S1 et S2 ont même aire. Soient S une surface, S' une surface obtenue en découpant S en pièces et en recollant les pièces sans perte ni chevauchement. Nous dirons encore que S et S' ont même aire. ». (Aires de surfaces planes en CM et 6<sup>ème</sup>, 1986, p48).

Cependant, j'ai été intéressée par cet article, puisqu'il date d'il y a plus de 25 ans (il a été rédigé en 1986), époque où les programmes étaient clairement différents de ceux de maintenant. J'ai donc voulu savoir si la façon d'introduire la notion était en adéquation avec la mienne.

Dès la troisième page, les auteurs décrivent leur séquence, et le contenu des séances. J'ai donc rapidement pu me rendre compte des différences avec la mienne. Je ne vais pas anticiper sur la suite de ce mémoire, en comparant le travail de Régine DOUADY et Marie-Jeanne PERRIN avec le mien (d'autant plus que je n'aurais pas la prétention de dire que mon travail est meilleur) ; mais je vais vous présenter comment elles ont procédé. De cette manière, il sera possible, par la suite, de remarquer les ressemblances ou non avec ce que j'ai réalisé.

#### 1) Le papier quadrillé : partir du savoir mobilisable

D'abord, elles ont décidé d'introduire la notion d'aire en utilisant des connaissances anciennes, pour servir de base pour la suite. Ainsi, elles amènent rapidement la notion d'aire, en faisant travailler les élèves sur papier quadrillé.

#### 2) L'aire

Puis, elles demandent aux élèves d'utiliser un support carton : à partir d'une même forme initiale (un rectangle), les élèves doivent la découper « en puzzle » pour former une nouvelle figure. Ils doivent ensuite comparer l'aire de toutes les nouvelles surfaces créées.

Bien que nous n'ayons pas les réponses des élèves, il est précisé « On attend que les élèves se ramènent au rectangle témoin ».

### 3) La distinction entre aire et périmètre

La troisième phase m'a plu, puisque les deux auteurs ont décidé de montrer la distinction entre aire et périmètre. Cela rejoint donc ma problématique.

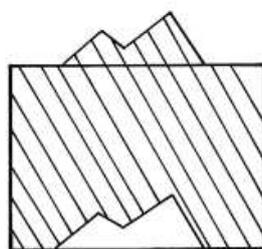
Ainsi, les élèves ont donc dû, grâce à la ficelle, mesurer le périmètre de leur nouvelle figure, pour finir par remarquer que même si les figures ont toutes la même aire, elles ont un périmètre différent.

J'ai trouvé cette approche particulièrement intéressante, puisqu'elle se base principalement sur de la manipulation (pour l'aire : création du puzzle, pour le périmètre : commande de ficelle nécessaire).

De plus, j'ai apprécié l'anecdote suivante :

Les élèves avaient presque tous fabriqué des surfaces à bord très découpés. Les deux procédures étaient assez coûteuses. Dans une équipe en CMI, un élève (David) a eu l'idée de mesurer le périmètre du rectangle témoin pour faire sa commande de fil. Son coéquipier (Bruno) lui objecte que le fil sera trop court : "il ne pourra pas faire le tour de tous les zigzags, il faut tout mesurer". En réponse à cette objection, David déclare que la surface a été construite à partir du rectangle témoin et qu'elle a le même périmètre. Chacun fait sa commande de fil en suivant sa

procédure. A la vérification, il manque environ 20 cm de fil à David. Bruno s'y attendait et croit avoir emporté la conviction de David. Or celui-ci met le décalage sur le compte des erreurs de manipulation dans la reproduction de la surface à border et dans la mesure du bord du rectangle. Il vérifie sa manipulation, modifie sa commande de 2 cm, ce qui ne résout pas le problème. Bruno alors modifie le rectangle témoin en créant une surface à bord irrégulier mais relativement proche du rectangle en découpant une pièce sur un bord et en la recollant le long d'un autre bord, comme dans le dessin ci-dessous.



---

A ce moment là seulement, David est convaincu et le restera de façon très stable

Ce qui prouve bien que l'idée « intuitive » reçue que si deux figures ont la même aire, alors elles ont le même périmètre.

Cette activité se conclut donc par : « deux surfaces de même aire n'ont pas nécessairement le même périmètre ; pour comparer les aires de deux surfaces, il ne sert à rien de comparer les périmètres ». (Aires de surfaces planes en CM et 6<sup>ème</sup>, 1986, p54).

La phase suivante concerne encore la distinction aire / périmètre. La consigne est de dessiner une surface S polygonale quelconque. Cette surface a une certaine aire A(S) et un certain périmètre P(S). Modifier S de façon à obtenir une surface d'aire plus petite et de périmètre plus grand.

La phase suivante a le même but. En effet, les auteurs se sont rendu compte que les élèves n'ont pas totalement acquis la distinction aire / périmètre. Elles souhaitent donc de nouveau prouver aux élèves que la comparaison des longueurs pour comparer les aires n'est pas valable.

#### 4) La mesure

Plus tard, Régine DOUADY et Marie-Jeanne PERRIN ont introduit la mesure, par pavage de la surface à l'aide de « carrelages ». Ces derniers sont soit des rectangles, soit des carrés, soit des triangles (isocèles, rectangles).

Je ne vais pas m'étendre sur la description et l'observation de la séance, puisque celle-ci a été proposée à plusieurs classes de CM2. Cela ne rentre donc pas dans le cadre de ma séquence. Toutefois, le principe du pavage est un principe que j'ai utilisé, le carrelage proposé étant beaucoup plus simple.

Cette séquence se termine par ailleurs dans une classe de 6<sup>ème</sup>, avec notamment les mesures d'aire grâce aux formules. Je ne vais pas en parler maintenant, puisque cela serait hors-sujet. Cependant, la lecture de l'article a été très intéressante.

# Partie pratique

---

## I. Méthodologie

### A. Présentation de la classe

Ma pratique s'est organisée dans une classe de CM1, dans la période de novembre et de décembre. J'ai d'abord fait une séance d'observation (qui sera décrite plus tard), puis j'ai pratiqué sur quatre séances (initialement deux).

L'enseignante maître formatrice, Mme S., ne gère normalement pas les cours concernant la géométrie et les grandeurs et mesures, puisqu'elle est déchargée un jour par semaine. Elle a cependant accepté de s'occuper de l'enseignement des périmètres pour que je puisse ensuite me tourner vers les aires. Elle ne connaissait cependant pas le niveau des élèves dans ce domaine, et c'est avec elle que j'ai pu le découvrir.

Sa classe compte 28 élèves.

### B. Organisation des séquences

J'ai décidé d'organiser mes deux séances de la manière suivante. Dans un premier temps, j'expose la consigne et m'assure que celle-ci a été correctement comprise en demandant aux élèves de répéter voire de reformuler. Je leur distribue alors le matériel. Puis, je les laisse chercher individuellement ou par binômes, selon la modalité proposée. Je passe alors dans les rangs et observe. Vient alors la phase de mise en commun, où je demande les différents résultats, et les commente ou fais commenter par les élèves. C'est lors de cette étape que les élèves argumentent et développent le sens de l'aire. Ils comparent également leur méthode. Mon rôle à cet instant est de souligner les objectifs d'apprentissage et de mettre en avant les avantages d'une action / manipulation.

Au début d'une nouvelle séance, je résume la séance précédente, soit directement, c'est-à-dire que je demande simplement aux élèves de m'expliquer ce qui a été vu une semaine auparavant, soit indirectement, en organisant une discussion avec des questions diverses.

Mme S. a accepté que je me filme pendant mes pratiques, ce qui m'a permis de garder une trace visuelle et audio, que j'ai pu analyser par la suite.

## C. Description des séances

Ma première séance concerne la découverte de l'aire. L'idée est de partir du périmètre. Les élèves ont en effet vu cette grandeur en CE2, et elle est supposée avoir du sens pour eux. Ils doivent également avoir déjà vu quelques techniques de mesures. L'idéal était pour moi, que les élèves aient étudié les formules de calcul de périmètres du carré et du rectangle, juste avant mon arrivée dans la classe.

Mme S. a consenti à ma demande, et j'ai donc pu, dans un premier temps, effectuer une séance d'observation sur les formules de calcul de périmètres. Il n'était pas obligatoire que je sois présente lors de cette leçon, mais j'y ai trouvé deux avantages. Premièrement, cela m'a permis de découvrir la classe, et d'une certaine manière, de rencontrer les élèves. Cela m'a aidée à être plus à l'aise la semaine suivante, lors de ma première pratique. Puis, cela m'a également donné la possibilité de connaître leur niveau global sur les périmètres, et leurs méthodes de calcul.

### 1. Observation sur les périmètres

Je ne vais pas décrire longuement cette séance, puisqu'elle ne concerne pas directement mon sujet. Cependant, comme je l'ai dit précédemment, ma première séance se base sur la différence entre périmètre et aire. Je voulais donc être présente, et j'ai pu découvrir la manière dont les élèves appréhendent le périmètre, et surtout, les difficultés qu'ils éprouvent.

Tout d'abord, Mme S. affiche au tableau deux figures géométriques (un carré et un rectangle), leur demande de ranger tout matériel de géométrie, et leur annonce : « Vous allez avoir ce document. Ce sont deux figures géométriques. Vous allez devoir me dire quelle figure a le plus grand périmètre ».



Ayant étudié les deux figures, je sais qu'elles ont le même périmètre. Cependant, un élève lève immédiatement la main et s'écrie « Je pense que c'est la 2 ! ». Un camarade approuve. La professeure en profite alors pour faire un vote à main levée, et nous pouvons constater que quatre élèves pensent que la figure 1 (le carré) a le plus grand périmètre, alors que dix-huit élèves pensent que c'est la 2 (le rectangle).

Mme S. leur demande alors s'ils savent comment vérifier les hypothèses, et un élève propose de calculer en utilisant les mesures indiquées à côté de figures. En effet, j'ai été grandement surprise, car l'enseignante ne souhaite pas faire mesurer ses élèves. Elle préfère qu'ils ne se tournent que vers le calcul. Je ne peux donc pas savoir s'ils manipulent correctement la règle, ni s'ils mesurent correctement.

Elle approuve en disant qu'il y a des indications jointes avec la figure, et leur demande leur signification. Un élève répond alors « Vous avez mesuré les traits ». La professeure l'interroge donc « Les traits ? », et il corrige rapidement en répondant « Les côtés ». Il semble cependant que le vocabulaire géométrique n'est pas maîtrisé.

Elle leur demande ensuite « Trouvez la figure géométrique qui a le plus grand périmètre ». Les élèves se mettent par groupes de deux, et ont chacun une grande feuille pour écrire les calculs et la phrase réponse, et leur cahier de recherche pour brouillon.

J'en profite alors pour passer dans les rangs, et observer les méthodes employées :

- Plusieurs élèves sortent leur règle, bien que cela ne soit pas nécessaire (et qu'elle ait d'ailleurs été interdite).
- Certains semblent perdus, et ne font rien.
- Une grande majorité procède par addition ( $12 + 12 + 12 + 12$  et  $14 + 10 + 14 + 10$ ).
- Quelques-uns utilisent une multiplication, uniquement pour le périmètre du carré ( $12 \times 4$ ). Deux groupes utilisent la multiplication pour le carré, et les multiplications et addition pour le rectangle ( $14 \times 2 + 10 \times 2$ ).
- Un groupe n'utilise que des multiplications ( $12 \times 12$  et  $14 \times 14$ ).

Je remarque immédiatement que les élèves n'écrivent pas l'unité.

Pour la correction, Mme S. demande à un élève de chaque groupe d'aller au tableau présenter son travail, et à la classe de réagir en argumentant leur désaccord. Ceux qui ont utilisé additions et multiplications pour le rectangle expliquent qu'ils ont trouvé que cela allait plus vite à calculer. Les autres élèves approuvent, et la classe finit par conclure que la méthode la plus rapide est bien celle-ci.

Cependant, malgré tout cela, j'ai pu constater quelques erreurs de langage, dont il faudra que je tienne compte par la suite :

- Une élève dit « La figure 1 mesure 48 cm », au lieu de « La mesure du périmètre de la figure 1 est 48 cm ».
- Ils ne connaissent pas la différence entre la largeur et la longueur du rectangle. Ils utilisent même l'un ou l'autre, au hasard.

Enfin, Mme S. leur demande de réfléchir individuellement à la trace écrite notée dans le cahier, qu'ils afficheront dans la classe par le biais d'un référentiel. Elle écrit donc au tableau :

Pour calculer le périmètre d'un carré, il faut ...

Pour calculer le périmètre d'un rectangle, il faut ...

En passant dans les rangs, certains élèves semblent éprouver des difficultés à résumer ce qu'ils viennent de voir. J'ai ainsi pu lire :

« Il faut multiplier les centimètres. »

« Mesurer ».

« Multiplier par 4 ».

Constatant leur gêne, l'enseignante leur propose de travailler par deux et de l'appeler en cas de besoin.

Elle finit par les aider oralement, car personne ne semble parvenir à écrire une phrase réponse pertinente :

*Professeure : « Dans un carré, nous savons que tous les côtés ont la même longueur. Est-ce que cela peut nous aider à calculer le périmètre d'un carré ? ».*

*Elève : « Oui, il faut faire  $12 \times 4$ . »*

*Professeure : « Tous les carrés ont des côtés de même longueur ? »*

*Elève : « Non, il faut multiplier les centimètres ! ».*

*Professeure : « Par quoi ? »*

*Elève : « 4 fois le côté. »*

*Professeure : « Pourquoi par 4 ? »*

*Elève : « Sur un carré, il y a 4 côtés de même longueur ! ».*

Elle procède de la même manière pour le rectangle, et les laisse à nouveau chercher. Je n'ai malheureusement pas pu assister à la suite de cette séance. Cependant, le jeudi suivant, j'ai pu constater que le référentiel était terminé.

## **2. Première séance : la découverte de l'aire**

Un des objectifs de cette séance est de leur montrer que la notion de périmètre et la notion d'aire sont deux choses différentes, et ne sont pas liées. C'est une première approche, donnant du sens à la notion d'aire.

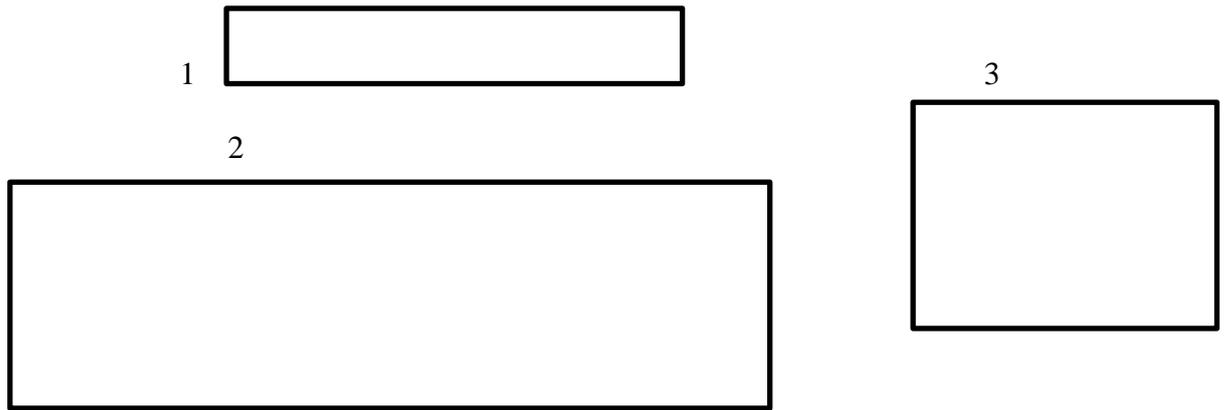
Je commence donc en leur montrant sur une feuille blanche de format A4 un rectangle :



Je leur demande alors de justifier la figure géométrique. Je les amène donc à parler des côtés opposés parallèles et de mêmes longueurs, et des quatre angles droits. Je propose même à un élève de venir vérifier avec son équerre la présence des angles droits. Cela permet donc une première révision commune sur les propriétés du rectangle.

Puis, je leur demande de récapituler les acquis de la semaine précédente à propos de carrés et rectangles, pour qu'ils me parlent du périmètre. Je les interroge alors sur les deux formules qu'ils doivent savoir, et écris au tableau celle concernant le rectangle : «  $2 \times \text{Longueur} + 2 \times \text{Largeur}$  ».

Maintenant que les rappels nécessaires sont effectués, je leur propose un premier exercice : les élèves doivent calculer le périmètre de trois rectangles. La première difficulté réside dans le fait que par rapport à la semaine précédente, les mesures des longueurs des côtés ne sont pas indiquées : il faut alors mesurer avec la règle graduée. Je leur précise que ce sont bien des rectangles, que j'ai construits moi-même.



Je leur laisse un temps de recherche individuel, observe en passant dans les rangs, et réponds aux questions. A la correction, oralement, j'attends la réponse trouvée pour la première figure. Si différentes propositions sont faites, je rappelle comment calculer le périmètre d'un rectangle, je demande alors de mesurer la largeur, la longueur, puis à l'élève concerné d'effectuer le calcul. J'écris alors au tableau le périmètre du premier rectangle. Je procède de la même manière pour les deux autres.

Puis, je les sollicite, pour les amener à me dire que les figures 1 et 3 ont le même périmètre.

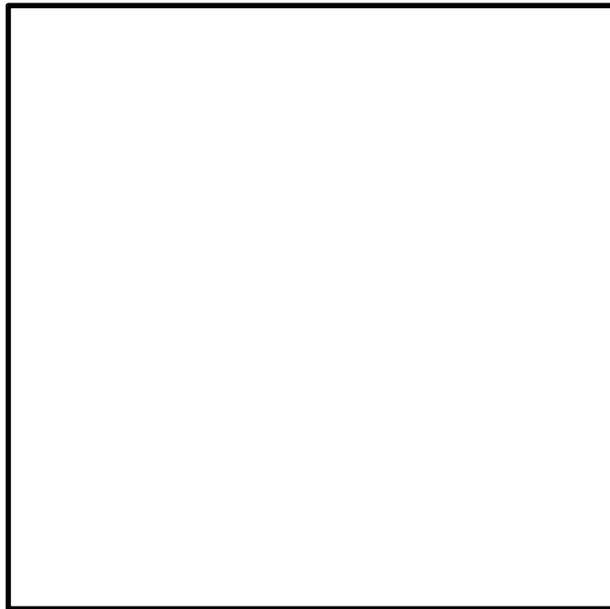
Je leur fais remarquer que cependant, les figures ont une différence notable, et j'essaie de les faire parler de leur forme différente, en les laissant discuter au maximum. Je finis par conclure que selon moi, les deux figures ont un encombrement différent, c'est-à-dire qu'elles n'utilisent pas la même quantité de papier.

Je les questionne : sont-ils d'accord avec moi ? Voient-ils une méthode pour vérifier ceci ? Ils en viennent alors à découper le premier rectangle en bandes, à le placer dans le troisième, pour se rendre compte qu'il peut se mettre à l'intérieur de celui-ci, et qu'il reste de la place : il n'y a pas assez de papier avec le rectangle 1 pour remplir le rectangle 3.

Je conclus alors en leur expliquant que la quantité de papier utilisée par une figure, l'encombrement, la place de papier (et j'insiste sur les différents mots) s'appelle l'aire de cette figure.

J'insiste donc sur le fait que les deux figures ont le même périmètre, mais n'ont pas la même aire. Le troisième rectangle a une aire plus importante que le rectangle 1, puisqu'il utilise une quantité de papier supérieure.

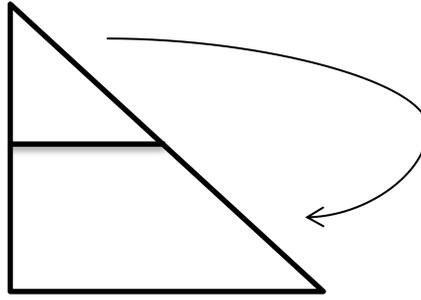
Pour le premier problème, je leur explique que je vais leur distribuer deux carrés égaux superposables. Avant tout, concernant l'aire, je cherche à savoir ce que peuvent dire les élèves, en insistant bien sur le fait que comme les deux carrés sont parfaitement superposables, ils utilisent la même quantité de papier. Puis, je leur donne comme consigne : « Vous devez plier les deux carrés en deux parts égales, mais de deux manières différentes », et leur distribue les carrés :



Je passe dans les rangs, une fois les bons pliages effectués (selon une diagonale, et selon la médiatrice d'un côté), et je leur demande de découper.

Je demande alors quelles figures viennent d'être trouvées : deux rectangles et deux triangles rectangles, puis dans un premier temps, ce que l'on peut dire quant à l'aire des deux rectangles, et l'aire des deux triangles rectangles. Je les amène donc à superposer leurs figures, pour qu'ils constatent encore une fois qu'elles utilisent la même quantité de papier, et que donc leurs aires sont égales.

Je les questionne ensuite, qu'en est-il des aires d'un rectangle et d'un triangle : sont-elles égales ? Il est en effet impossible de superposer et de se rendre compte de l'égalité. J'essaie de les faire parler pour qu'ils me disent que cela utilise la même quantité de papier (celle d'un demi carré), et leur montre cette manipulation :

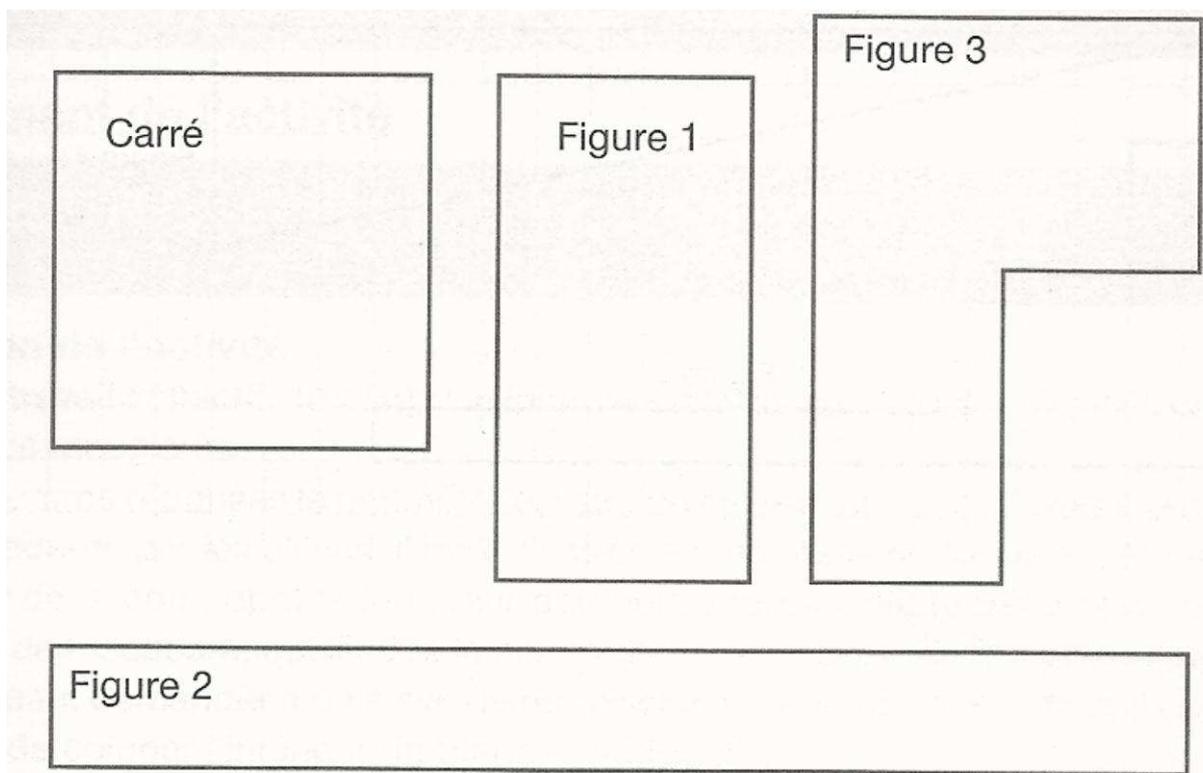


Je leur propose ensuite un problème connexe : « Vous devez maintenant essayer de rassembler les deux rectangles et les deux triangles rectangles, de deux manières différentes. Le but est de trouver une nouvelle figure géométrique plane que vous pourrez nommer ». Je précise bien qu'ils doivent pouvoir la nommer, pour qu'ils ne placent pas, par exemple, les deux rectangles en un « T ». Ils doivent former un rectangle, et soit un parallélogramme, soit un triangle isocèle.

Après un temps de recherche individuel, et après que toute la classe a trouvé, je leur demande ce que l'on obtient comme figures, et ce qu'on l'on peut dire quant à leurs aires : elles sont égales. En effet, elles utilisent la même quantité de papier : celle pour faire le carré du départ.

Pour conclure cette activité, je leur explique qu'il est parfois impossible de dire si deux figures ont la même aire, puisqu'elles ne peuvent pas se superposer directement. Il faut alors plier, découper et superposer pour s'en rendre compte : deux figures de formes différentes peuvent avoir la même aire.

Pour faire suite, je leur propose le deuxième et dernier problème :



qui a pour consigne : « Grâce à des découpages et des superpositions, dire parmi les figures suivantes lesquelles ont la même aire que le carré. ».

Avant de leur distribuer la feuille, je leur précise bien de ne découper dans un premier temps que la figure 1, et que nous effectuerons la correction juste après. Je les laisse ensuite chercher individuellement, ou par binômes si besoin.

Je fais ensuite un vote à main levée pour savoir qui pense que l'aire de la figure 1 est inférieure à l'aire du carré, qui pense que l'aire de la figure 1 est égale à l'aire du carré, et qui pense que l'aire de la figure 1 est supérieure à l'aire du carré.

Je leur montre ensuite le découpage que j'ai moi-même préalablement conçu, pour qu'ils réalisent qu'il manque du papier pour remplir le carré, et que donc, la figure 1 a une aire inférieure à l'aire du carré.

Cependant, je demande alors aux élèves s'étant trompés de montrer leur découpage, et ainsi, leur erreur. Le principal pour moi est qu'ils comprennent bien comment découper pour agir correctement pour les deux figures suivantes.

Je procède de la même manière pour les deux autres figures : la figure 2 a une aire égale à celle du carré, et la figure 3 a une aire supérieure à celle du carré.

Pour conclure cette activité, je montre aux élèves qu'il est donc possible de ranger les figures : avoir une aire inférieure / égale / supérieure à celle du carré. J'insiste également sur ces derniers termes, car il est primordial qu'ils utilisent un langage mathématique adapté, et non « plus grand, ou « plus petit ».

Pour finir, j'écris alors au Tableau Blanc Interactif la trace écrite qui est : « L'aire d'une figure plane représente l'encombrement, la quantité de papier occupée par cette figure. Deux figures qui se superposent exactement ont la même aire. Parfois, il faut découper et superposer pour constater que deux figures ont la même aire. ».

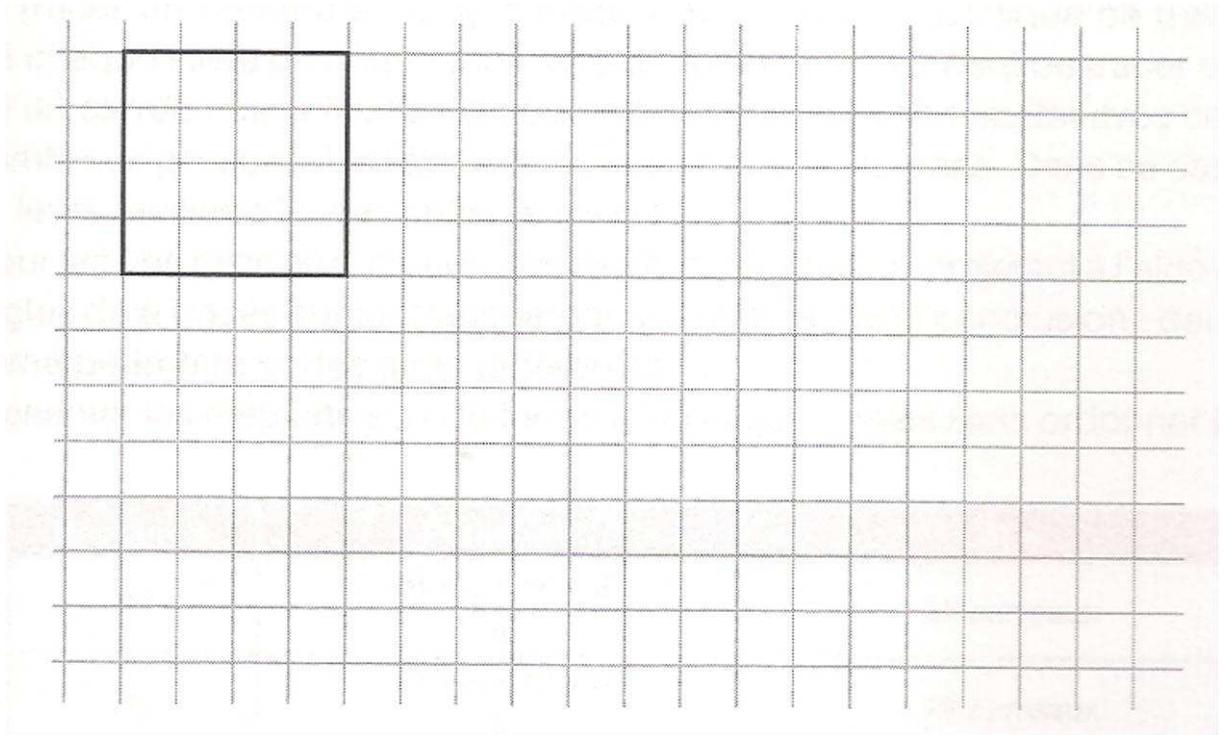
### **3. Deuxième séance : des exercices pour ranger et classer**

*Avant que les élèves n'entrent dans la classe, je dessine au tableau deux figures géométriques connues : un carré et un rectangle.*

J'effectue dans un premier temps un rappel sur ce qui a été vu la semaine précédente, en essayant de les faire parler le plus possible, pour replacer le vocabulaire et la technique de pliage, découpage, superposition.

J'amène alors le premier problème : comment peut-on comparer les aires des deux figures dessinées au tableau, puisqu'il est évidemment impossible de les découper et de les superposer. Je les laisse proposer des solutions, l'idée étant d'arriver à la nécessité de mesurer.

Je leur montre alors, sur une feuille A4 affichée au tableau, un carré dessiné sur papier quadrillé :



et leur demande leur avis sur l'aire de ce carré. Je m'attends à ce qu'ils parlent du dénombrement de carreaux : ici le carré contient 16 carreaux.

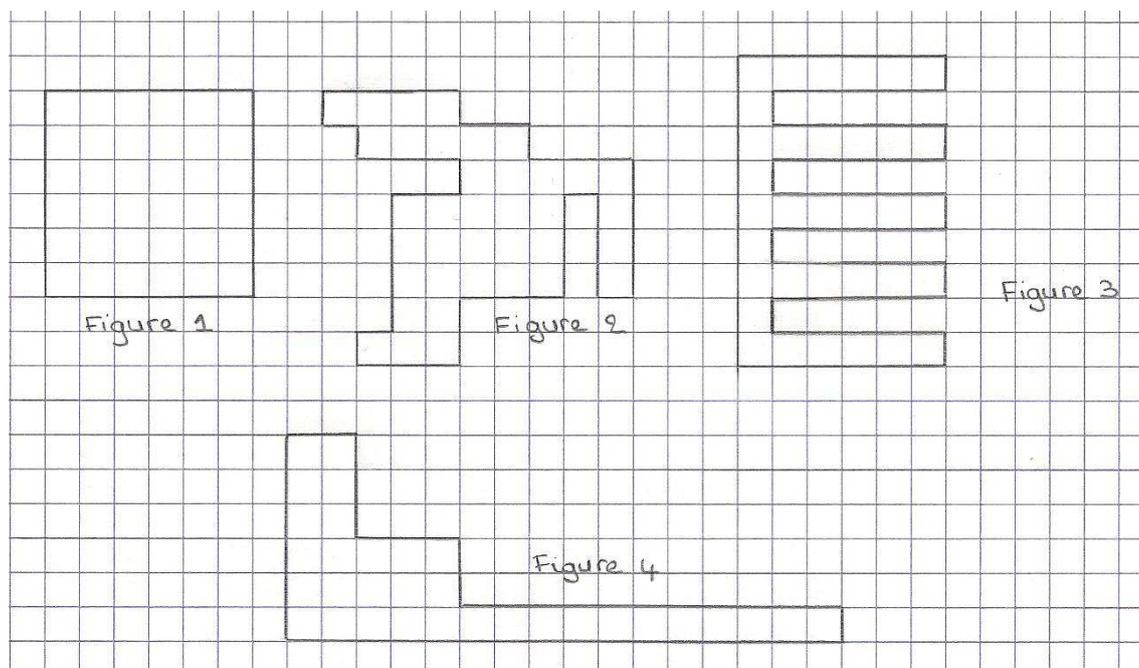
J'explique que le nombre de carreaux obtenu s'appelle la mesure de l'aire du carré, et qu'ici, si l'on choisit comme unité d'aire le carreau, la mesure de l'aire du carré est de 16 carreaux, mais que l'on dit encore que « l'aire du carré est de 16 carreaux ».

Pour conclure ce premier problème, je leur rappelle donc que l'aire d'une figure est la place que prend cette figure sur le papier. Je leur explique ensuite que l'aire est mesurable, en utilisant une unité. Il faut alors se demander combien de fois l'unité est présente dans la surface à mesurer.

Je leur distribue ensuite une reproduction de ce que j'ai affiché au tableau, et leur propose de dessiner deux figures ayant la même aire que le carré, c'est-à-dire, deux figures ayant une aire de 16 carreaux, et qui soient de formes différentes de celle du carré. Pendant un temps de travail individuel, je passe dans les rangs, j'observe, et pour aider ceux en difficulté, je leur rappelle tout ce que l'on sait sur les aires. Pour la correction, je demande aux élèves de se mettre par deux, avec leur voisin de table,

et de vérifier ce que le camarade a fait. Si l'un pense que l'autre a fait une erreur, il m'appelle alors.

Pour le deuxième problème, je leur distribue ceci (en fait, ils ont déjà cet exercice sur la feuille distribuée pour le premier problème) :



et leur demande de donner l'aire, en carreaux, de chaque figure, puis de ranger par ordre croissant les figures, selon leur aire.

Je les laisse alors chercher individuellement. Pendant ce temps, j'écris au tableau :

Aire de la figure 1 : .....

Aire de la figure 2 : .....

Aire de la figure 3 : .....

Aire de la figure 5 : .....

Aire de la figure .. <  
Aire de la figure ..

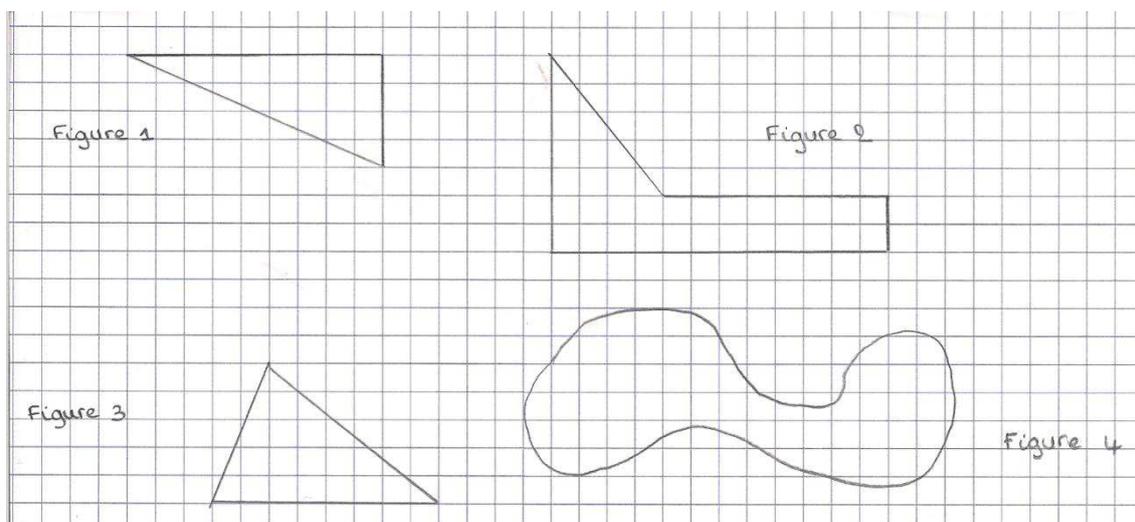
Je questionne l'élève sur le résultat de la première figure, et j'interroge la classe pour savoir si tout le monde est d'accord. J'invite alors l'élève à venir au tableau, pour compter le nombre de carreaux (j'affiche alors la reproduction de l'exercice en format A4).

Pour le cas du carré, il est intéressant de leur faire remarquer qu'il n'est pas nécessaire de compter les carreaux un à un, puisque l'on peut multiplier le nombre de carreaux d'un côté par le nombre de carreaux d'un côté perpendiculaire, soit ici  $6 \times 6$ .

Je fais de même avec un élève différent pour les figures suivantes. A chaque fois, j'écris au tableau la réponse.

Enfin, j'invite un cinquième élève à venir compléter au tableau la dernière ligne.

Pour le troisième problème, je leur distribue ceci :



qui a pour consigne de trouver l'aire des trois premières figures, et un encadrement pour la quatrième.

Je les sollicite cependant à ne chercher que l'aire de la première figure, et leur laisse un moment de réflexion individuelle.

L'idée est d'arriver à construire le symétrique du triangle rectangle par rapport à l'hypoténuse, pour obtenir un rectangle, puis de calculer l'aire du rectangle, et enfin de diviser cette aire par deux.

J'observe leur façon de procéder. Si un élève trouve la bonne méthode, je l'invite à venir expliquer au tableau, sur la reproduction de l'exercice au format A4 (la feuille est recouverte d'une pochette transparente, pour qu'il puisse écrire sur le quadrillage, et effacer si nécessaire).

Si personne ne trouve, je leur explique alors comment faire, leur laisse un nouveau temps de réflexion, puis envoie un élève faire la correction.

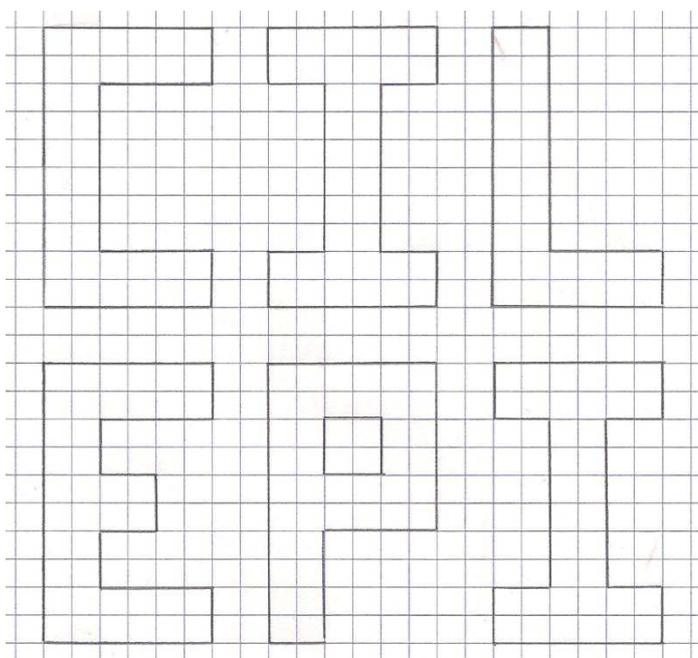
Je les laisse de nouveau chercher pour les deux autres figures, et nous corrigeons de manière similaire.

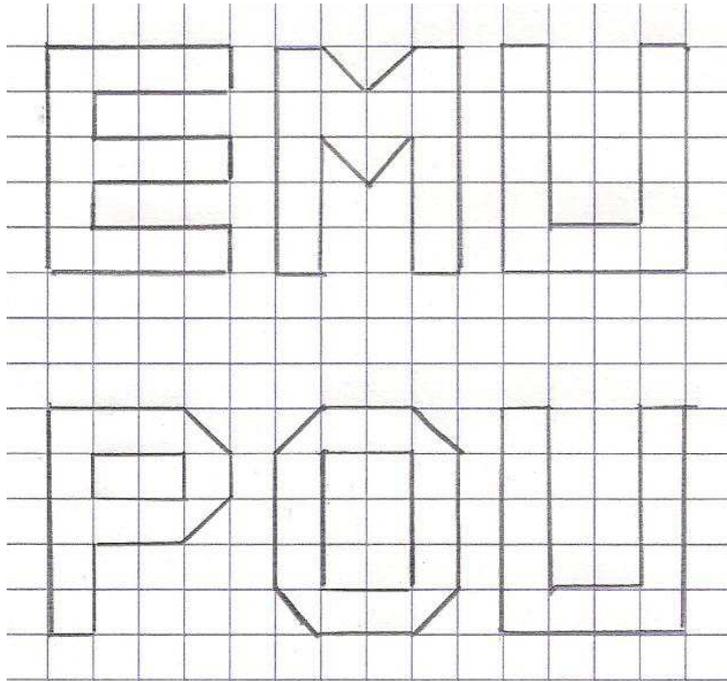
Pour la dernière figure, je les questionne : savent-ils ce qu'est un encadrement, peuvent-ils me l'expliquer, et voient-ils comment procéder pour encadrer l'aire de la figure ? Je les laisse un instant chercher au crayon de bois sur leur feuille.

J'envoie alors un élève qui a dessiné un rectangle autour. Puis, je leur dis qu'il est possible d'affiner davantage, de s'approcher encore plus près des contours de la figure. Je leur montre alors au tableau, sur la reproduction. Je demande alors à un élève de compter le nombre de carreaux, puis si nous venons de donner un résultat de l'aire supérieur ou inférieur à l'aire de la figure. L'idée est de les amener à construire l'encadrement inférieur de la même manière.

A la correction, j'attends une réponse orale pour savoir combien ils ont trouvé. Je leur indique que je n'attends pas un nombre spécifique, car il y a toujours une imprécision possible, mais qu'il faut être proche d'un ordre de grandeur.

Pour le dernier problème, je leur distribue la dernière feuille, qui a pour consigne « Parmi les mots suivants, trouver quelle lettre a une aire différente des deux autres. ».





A nouveau, je souhaite qu'ils ne s'intéressent qu'au premier mot. Dans les rangs, j'observe les méthodes employées et réponds aux questions si besoin.

Pour la correction de « CIL », je demande oralement aux élèves, et par un vote à main levée, qui pense que l'intrus est la lettre C, qui pense que l'intrus est la lettre I, et qui pense que l'intrus est la lettre L. Un élève s'étant trompé vient au tableau compter les carreaux de chaque lettre.

Ceci réalisé, je leur fais remarquer que l'on aurait pu trouver très rapidement que l'intrus était le L, sans compter les carreaux. Je leur explique alors en mimant sur la feuille d'exercices (encore une fois, agrandie sur un format A4) que si l'on déplace la barre verticale du I vers la gauche, on obtient le C. Par contre, si l'on déplace la barre verticale du L vers le milieu, on obtient le I, sans la barre supérieure horizontale. Cependant, je n'insiste pas sur ce sujet : cette méthode permet juste un gain de temps. Le principal est pour moi qu'ils comprennent et calculent correctement.

Ils doivent maintenant s'intéresser au mot suivant, et procèdent de la même manière que précédemment pour la correction.

Pour le mot « EMU », je leur annonce qu'il y a une difficulté supplémentaire, car le M utilise des diagonales de carré, et que donc certains carreaux sont coupés en deux. Ils doivent donc réfléchir à une méthode pour ne pas avoir de demi-carreaux.

Après un temps de réflexion, les élèves sont interrogés sur leur manière de procéder. L'un

d'entre eux est alors invité à expliquer sa procédure à ses camarades.

En conclusion, je souligne (en me servant de l'explication ou non que l'élève a proposée) que l'on peut grouper deux demi-carreaux pour n'en former qu'un.

Je leur laisse un nouveau temps de réflexion, et leur conseille de pointer les carreaux qu'ils ont déjà comptés avec un crayon de couleur.

A la correction, je procède de la même manière.

Ils peuvent enfin se pencher sur le mot « POU », corrigé de manière identique.

## **II. Expérimentation**

### **A. L'analyse a priori**

Après avoir conçu ma séquence, il m'a alors semblé indispensable de me poser des questions, m'obligeant à anticiper sur ce que les élèves allaient faire ou dire. Répondre à ces questions s'appelle l'analyse a priori de l'activité.

L'analyse a priori a plusieurs finalités pour l'enseignant. Elle permet ainsi, entre autres, d'analyser les activités proposées, de mieux dégager les enjeux en terme d'apprentissage, de justifier les choix, d'identifier les obstacles à dépasser pour les élèves et de mieux interpréter le choix des enseignants.

Elle prend appui sur quatre questions :

- ✓ Quelles connaissances (correctes) et procédures les élèves peuvent-ils utiliser pour entrer dans la tâche demandée et la résoudre ?
- ✓ Quelles erreurs peuvent-ils rencontrer ?
- ✓ Quels blocages peuvent-ils faire ?
- ✓ De quelle manière arriveront-ils à investir les éléments de savoir visés ?

Toutes les réponses dépendent des variables didactiques choisies par l'enseignant.

#### **1. Les connaissances et procédures**

Les connaissances et procédures utilisées par les élèves sont l'enjeu principal d'une activité.

## Séance 1

### Les connaissances relatives aux propriétés

Les élèves doivent mobiliser à plusieurs reprises, des connaissances acquises sur les propriétés géométriques des figures usuelles planes. Ce n'est certes pas lié à l'objectif de ma séquence, mais cela peut se révéler problématique pour leur année de CM2 (quand les calculs apparaîtront) : s'ils ne savent pas vérifier de quelle figure il s'agit, ils ne pourront jamais appliquer les formules de calcul correctes.

Tout au long de ma séquence, aucun effet de contrat ne sera à prendre en compte par rapport aux figures géométriques, puisque le travail est tourné vers les aires de plusieurs figures.

Pour essayer de les guider, j'ai choisi d'employer de les aider oralement.

### Les connaissances relatives au périmètre

Après avoir rappelé les propriétés du rectangle, je demande aux élèves de calculer le périmètre de trois rectangles. Il est alors évident qu'il leur sera nécessaire de se rappeler la formule étudiée la semaine précédente, et surtout, de l'utiliser judicieusement.

La variable didactique retenue est que les mesures des longueurs des côtés de chaque rectangle sont des nombres entiers. Cela leur permet un calcul plus simple et plus rapide.

### Les procédures de manipulation d'outils géométriques

Lors de la première séance, les élèves sont invités à manipuler quelques outils géométriques.

Je ne demande qu'à un seul élève de vérifier la présence d'angles droits sur le rectangle, car cet élément de savoir n'est pas en lien direct avec l'objectif visé.

Par la suite, les élèves doivent tous manipuler la règle graduée pour mesurer deux côtés de chaque rectangle. Ici, il est attendu qu'ils ne mesurent que deux côtés, et non pas les quatre, car je leur ai précisé qu'il s'agit de rectangles.

Pour finir, les élèves doivent découper, superposer, et coller. Ce ne sont pas des manipulations que nous pouvons considérer comme de la géométrie pure, mais elles sont à prendre en compte, car elles auront une incidence sur les résultats obtenus (nous pouvons d'ailleurs remarquer qu'il s'agit de géométrie I). En effet, pour le dernier exercice, les aires sont proches. Si les élèves découpent grossièrement, il leur sera alors impossible de replacer correctement les pièces, et encore moins de constater les aires supérieure, inférieure ou égale au carré.

## Séance 2

### Les connaissances du rangement

Lors de cette séance, je demande aux élèves de ranger plusieurs figures selon leur aire. Il sera alors important qu'ils comprennent bien ce que signifie ranger (puisque un autre abus de langage consiste à parler de « classement » pour désigner le rangement), et qu'ils maîtrisent les termes associés (« supérieur à », « inférieur à » et « égal »).

Pour le troisième exercice, ils doivent encadrer une aire. Il est nécessaire qu'ils comprennent donc la signification du terme « encadrer », et qu'ils utilisent une procédure correcte pour y parvenir : encadrer la figure par une figure d'aire supérieure, et par une figure d'aire inférieure. Pour ne pas trop complexifier la tâche, j'ai choisi de gérer le niveau de difficulté de l'exercice des façons suivantes : tout d'abord, la figure est incluse dans un rectangle facilement repérable. D'autre part, j'ai volontairement dessiné la figure de sorte qu'à certains endroits, elle frôle des carreaux.

Pour l'encadrement inférieur, j'ai décidé de complexifier la tâche. Cependant, celle-ci reste accessible, puisque nous aurons fait l'encadrement supérieur ensemble juste avant. Ils doivent réinvestir une connaissance qui vient d'être utilisée.

### Les procédures de comptage de carreaux

J'attends particulièrement que les élèves emploient des techniques élaborées pour compter les carreaux ou les grouper. Certes, ils peuvent compter un par un tous les carreaux de chaque figure, mais cela est très chronophage. Je pourrais employer ici comme variable didactique, pour complexifier la tâche, la taille de la figure (si je présente un carré de 100 carreaux sur 100 carreaux par exemple), pour qu'ils se rendent compte de la longueur de leur procédure. Cependant, je ne l'ai pas fait, par souci de place sur la feuille d'exercices. J'ai donc choisi de leur faire remarquer oralement qu'il est possible d'aller plus vite. Cela est toutefois bien moins formateur.

Pour le dernier exercice, comme dit dans la présentation de la séance, il est possible de voir l'intrus rapidement en déplaçant mentalement des portions. Cet exercice étant le dernier de la séance, les élèves pourront ainsi réinvestir ce qui a été vu précédemment : il y a toujours un moyen pour parvenir plus vite à la solution.

J'aurais pu les aider davantage en décomposant la difficulté : leur faire comparer tout d'abord l'aire de deux lettres, par exemple, le C et L. Ils se seraient alors rendu compte que l'aire du L est inférieure à l'aire du C, et que ceci se remarque facilement.

## 2. Les erreurs

### Séance 1

#### Les connaissances relatives aux propriétés

Si les élèves ne connaissent pas ou mal les propriétés des figures géométriques, ce n'est pas problématique pour ma séquence. Cependant, il est primordial qu'ils les maîtrisent rapidement, ne serait-ce que parce que ces propriétés se doivent d'être connues en CM1. De plus, pour le CM2 ou le calcul d'aire sera mis en place, il leur faudra connaître et vérifier les propriétés des figures géométriques.

#### Les connaissances relatives au périmètre

La découverte du périmètre étant récente, il est fortement probable que les élèves ne connaissent pas encore la formule. Il sera nécessaire de la rappeler et de l'écrire au tableau. Il sera également possible qu'ils fassent des erreurs de calcul, même si, comme je l'ai dit précédemment, les calculs présentent peu de difficultés.

#### Les procédures de manipulation d'outils géométriques

Une des premières erreurs possibles est que les élèves ne manipulent pas correctement la règle. J'entends par là deux actions probables. Soit les élèves ne tiennent pas correctement la règle (par exemple, elle penche légèrement au lieu de suivre régulièrement le segment à mesurer), soit les élèves ne placent pas correctement la règle graduée, c'est-à-dire qu'ils ne démarrent pas la lecture de la mesure au 0, mais au bord de la règle. Il se peut également qu'ils ne lisent pas correctement le résultat, mais c'est assez peu probable, puis que les nombres choisis sont entiers, il n'y a donc pas de millimètres. Concernant les découpages, comme je l'ai dit précédemment, il est important que les élèves découpent le plus proprement possible. Puisque cette séance est basée sur des découpages et superpositions, si un élève découpe mal une figure, il lui sera alors impossible de la placer de manière correcte dans une autre.

## Séance 2

### Les connaissances du rangement

La première difficulté, et la principale, serait que les élèves ne connaissent pas le rangement. Il découlerait donc qu'ils ne maîtrisent pas le vocabulaire associé (supérieur, inférieur, égal, croissant, décroissant).

Pour le troisième exercice, il est possible que les élèves ne parviennent pas à encadrer le plus précisément possible la figure. Je joue ici sur la consigne orale : une tolérance est acceptée, selon l'encadrement choisi. J'attends davantage un ordre de grandeur.

### Les procédures de comptage de carreaux

Il se peut que les élèves se trompent dans le comptage des carreaux. Plus la figure est complexe (dès l'exercice 2, il y a des figures à forme atypique), plus l'élève risque de compter deux fois un même carreau.

Pour le cas de l'exercice 3, les élèves pourront associer deux « morceaux de carreaux », sans être sûr qu'ils forment bien ensemble un carreau. Toutefois, cela ne sera pas inintéressant, car pour le dernier exercice, il faudra associer deux demi-carreaux pour en former un.

## **B. L'analyse a posteriori**

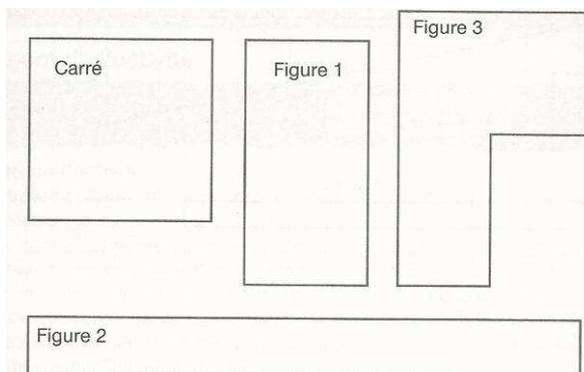
La contrainte majeure que j'ai rencontrée en réalisant ma séquence a été le temps. Je ne connaissais pas les élèves, et il s'est avéré qu'ils ont été plus lents que ce que je ne pensais. Ainsi, au lieu de réaliser ma séquence en deux séances, j'ai ainsi eu besoin de quatre séances. Ceci ne m'a pas posé de problème particulier, étant donné que j'avais prévu une marge préventive. De plus, je préférais évidemment prendre le temps nécessaire pour que les élèves parviennent tous à maîtriser les aires.

L'autre contrainte avec laquelle j'ai dû jouer a été l'hétérogénéité de la classe. En effet, j'ai vite constaté que certains élèves étaient très rapides, et parvenaient à résoudre les exercices immédiatement. D'autres, au contraire, éprouvant davantage de difficultés, nécessitaient plus de temps que leurs camarades. Les premiers se voyaient donc dans l'obligation d'attendre les seconds. J'ai trouvé qu'il était souhaitable de mettre en place une pédagogie différenciée, pour que chacun puisse effectuer des exercices adaptés à son

niveau et à son rythme.

Ainsi, ma première séance « initiale » s'est déroulée en deux séances. Il n'y a eu aucun changement sur les exercices. La première séance a concerné l'exercice sur les rectangles (calcul de périmètres, puis découpage) et le problème avec les deux carrés superposables.

La deuxième séance a permis la résolution de cet exercice :

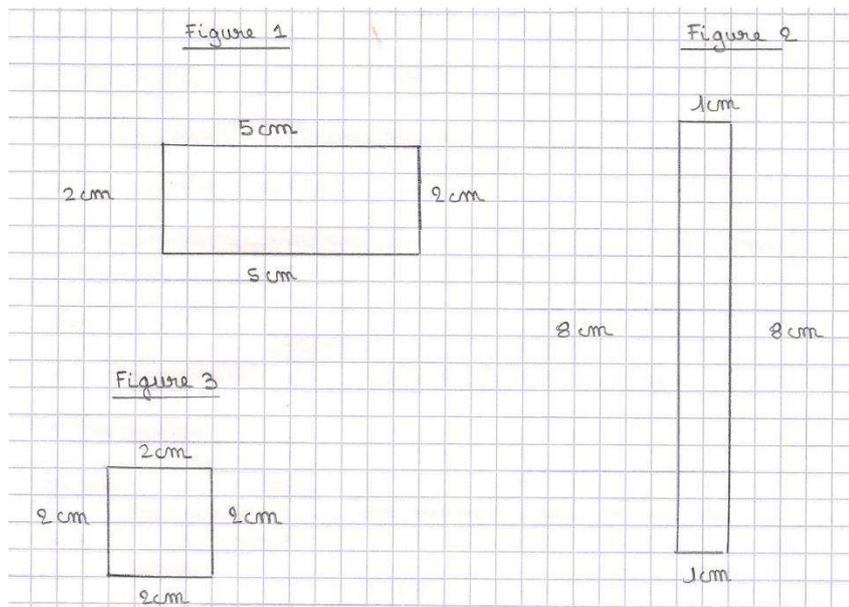


ainsi que la rédaction de la trace écrite.

Par contre, pour la deuxième séance initiale, il y a eu une modification. Elle a eu lieu, elle aussi, en deux séances. Pour la première, les élèves ont réalisé les deux premiers exercices prévus. Mais lors de cette séance, les différences de niveaux étaient telles (certains avaient terminé les deux premiers exercices, alors que d'autres n'avaient qu'à peine commencé le premier) que j'ai décidé de faire passer le lendemain, par le biais de Mme S., une évaluation formative :

Consigne : Dire quelle figure a :

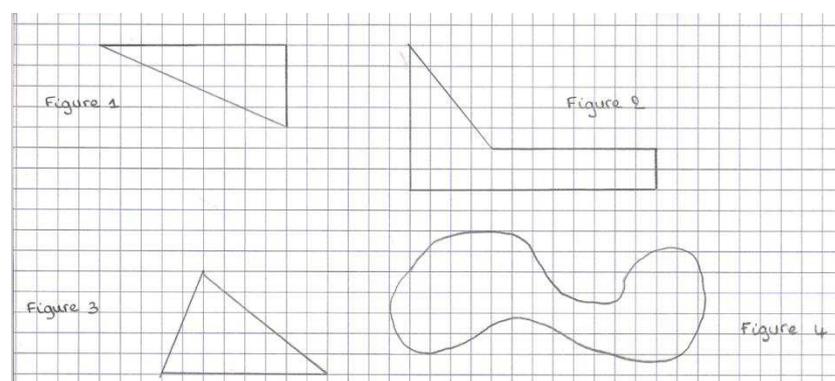
- Le plus petit périmètre,
- Le plus grand périmètre,
- La plus petite aire,
- La plus grande aire.



J'ai récupéré le soir-même les copies des élèves, et j'ai organisé trois groupes de travail. Le premier groupe est le groupe des élèves maîtrisant parfaitement les périmètres et les aires, et justifiant correctement leurs réponses. Le deuxième groupe est le groupe étant au point sur les périmètres, mais ayant encore besoin d'entraînement pour les aires. Enfin, le troisième groupe est le groupe nécessitant une révision sur les périmètres.

C'est ainsi que j'ai proposé différents exercices aux trois groupes. Cependant, je ne voulais pas m'éloigner de ma séquence prévue initialement. J'ai donc décidé de redonner les exercices prévus, ou les exercices déjà donnés, mais avec quelques modifications : formes, longueurs, et consignes.

J'ai proposé au premier groupe de finir la deuxième séance initiale. Ils ont terminé l'exercice avec les mots, et ils ont commencé celui-ci :



J'ai proposé au second groupe de recalculer rapidement des périmètres (pour être sûre que tous les élèves maîtrisaient bien les formules), puis de poursuivre le travail de la

semaine précédente, c'est-à-dire le comptage de carreaux. Je voulais particulièrement que les élèves fassent le lien entre carreaux et aire, et que cette procédure devienne un automatisme.

Enfin, pour le troisième groupe, j'ai retravaillé le périmètre, et j'ai redonné du sens à l'aire. Les élèves ont donc revu la nécessité de découper et de superposer.

J'ai laissé les deux premiers groupes travailler davantage en autonomie que le troisième. Etant donné que je ne pouvais pas corriger les exercices des trois groupes au tableau, j'ai décidé de leur proposer d'aller chercher une fiche d'auto-évaluation une fois l'exercice fini. Toutefois, pour être certaine que les élèves aillent bien prendre une correction une fois la recherche effectuée, je suis passée dans les rangs très régulièrement. Par ailleurs, j'ai laissé la possibilité aux élèves du groupe 1 de travailler par binômes, pour échanger des idées de méthodes.

Pour les deux derniers groupes, je me suis basé sur les mêmes exercices que les séances précédentes. Cependant, pour mon analyse a posteriori, je ne vais pas tenir compte de ce que les élèves de ces deux groupes ont réalisé. En effet, d'une part, je considère que les résultats sont quelque peu faussés, puisque certains élèves se souvenaient de ce qui avait été vu les semaines précédentes. Il ne s'agissait donc plus d'une découverte. De plus, les quatre séances m'ont offert suffisamment de matière à analyser.

Maintenant que les modifications ont été présentées, nous pouvons passer à l'analyse a posteriori. Pour plus de clarté, j'ai décidé de la détailler séance par séance.

## 1. Séance 1

### Les difficultés

#### *a) Les propriétés géométriques*

Après avoir présenté mon rectangle sur feuille A4 aux élèves, et demandé de quelle figure il s'agit, j'ai pu remarquer que les élèves ne s'expriment pas clairement quant aux propriétés géométriques. Ils emploient ainsi du vocabulaire vague, et clairement non mathématique.

Ainsi, quand j'ai demandé aux élèves « Comment sait-on que c'est un rectangle ? », j'ai eu pour réponses : « Parce que ses traits ne sont pas de la même longueur et la même largeur. Ils ont la même longueur et la même largeur, c'est pareil. » ou « Les côtés ne sont pas égaux ». J'ai dû corriger leurs propositions : « Les côtés opposés parallèles de même

longueur ». Bien que les élèves connaissent cette propriété, ils sont incapables de l'exprimer correctement.

De plus, il y a un manque de connaissances. En effet, après qu'ils m'ont cité les propriétés des longueurs, je leur ai dit qu'il y a encore d'autres propriétés permettant de dire que l'on a affaire à un rectangle. Aucune main ne s'est levée. J'ai donc essayé de les aiguiller en parlant des angles.

Enfin, le vocabulaire mathématique n'est pas acquis. J'ai pu constater que les élèves tentent d'employer les mots adaptés, sans pour autant les maîtriser. Ainsi, ils ont fini par se souvenir qu'un rectangle possède quatre angles droits. Pourtant, ils ont alors fait un amalgame entre le vocabulaire des côtés, et le vocabulaire des angles : «C'est de la famille des quadrilatères, il y a quatre angles droits. », « Il a quatre angles droits, c'est un polygone. »

Nous pouvons par ailleurs remarquer que les élèves en sont au niveau 1 des pensées de Van Hiele. Ils m'ont par exemple cité les quatre angles droits, alors qu'un seul aurait été suffisant. Cependant, je n'ai pas cherché à les corriger, car cette connaissance relève du collège. L'important pour moi est qu'ils me citent les propriétés, telles qu'ils les ont étudiées à l'école (soit : un rectangle est un polygone qui a quatre angles droits et dont les côtés opposés sont parallèles et égaux deux à deux).

### ***b) Les manipulations***

Comme je m'y attendais (cf analyse a priori), les élèves ont pour la plupart rencontré des difficultés dans la manipulation du matériel géométrique.

Ainsi, comme je le prévoyais, certains élèves ont été gênés pour mesurer les côtés (dans l'exercice du périmètre). J'ai pu expliquer ceci très facilement : comme je l'ai constaté lors de ma séance d'observation sur les périmètres, les élèves ne sont que très rarement mis en situation de mesure. L'enseignante ayant inscrit les mesures de chaque côté sur les figures, les élèves n'ont pas eu l'occasion de se servir de la règle graduée. C'est donc pourquoi j'ai pu constater très rapidement lors de la séance que les élèves ne positionnent pas correctement leur règle (la lecture ne démarre pas au 0), ou ne lisent pas correctement le résultat (ils retirent ou ajoutent des millimètres). Pour régler ce problème, j'ai choisi d'opérer comme le fait Mme S., c'est-à-dire que j'ai annoncé aux élèves les mesures de chaque côté.

Egalement comme je le prévoyais, les découpages n'ont pas été soignés. Certes, lors du premier exercice de découpage, il était clairement visible qu'une figure était contenue dans

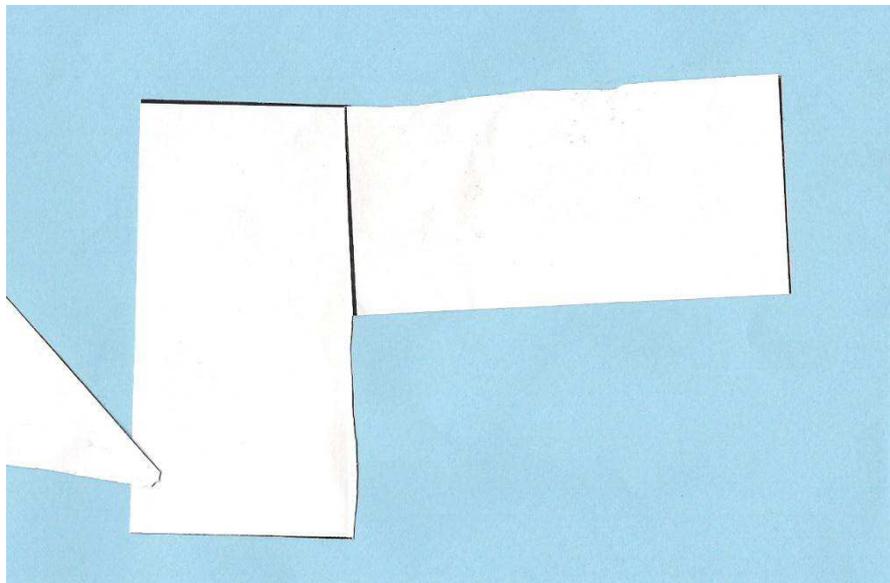
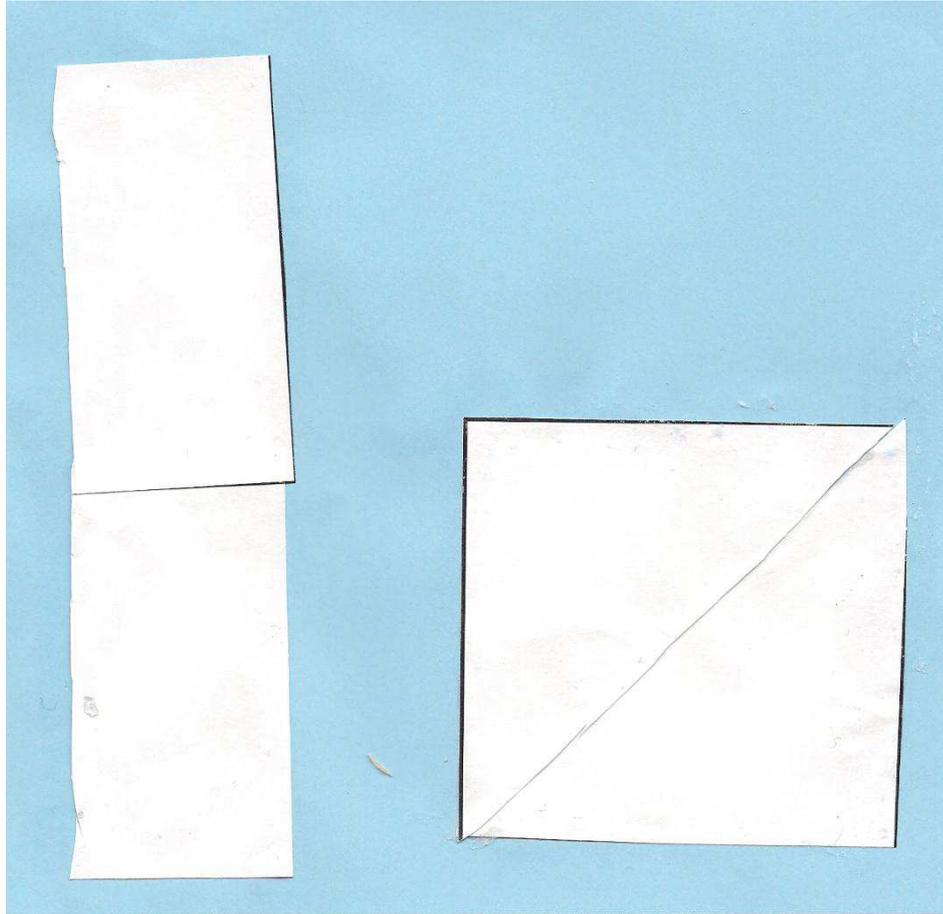
l'autre. Toutefois, quelques enfants ont été gênés par les « morceaux » qui dépassaient, dus à leur imprécision. M., un élève, n'a d'ailleurs cessé de me répéter, tout au long des séances « Mais madame, je n'arrive pas à bien découper moi ! ». La seule variable sur laquelle j'ai joué a été de leur répéter à plusieurs reprises de prendre le temps nécessaire pour arriver à un résultat net et précis.

### *c) Les consignes*

Tout au long de ma séquence, j'ai répété les consignes, voire même reformulé. J'ai également demandé aux élèves de les répéter, et je me suis assurée qu'elles étaient comprises.

Cependant, je me suis retrouvée face à quatre principaux cas de figure :

- Lors de l'exercice sur les rectangles, les élèves ont découpé une figure pour essayer de l'inclure dans une autre, ils ont jeté le morceau considéré comme en trop. Toutefois, il se peut que ce ne soit pas un souci de consigne mais de représentation, et cela se vérifiera pour certains enfants par la suite (cf séance 2).
- Lors de l'exercice avec les deux carrés superposables, après les avoir découpés de deux manières différentes, quelques élèves ont voulu associer un rectangle et un triangle, et non pas les deux rectangles d'une part, et les deux triangles d'autre part. Lorsque je leur ai demandé pourquoi avoir fait ça, ils m'ont tous dit « On peut faire une flèche ! ». Je me suis alors rendu compte que ce problème de mauvaise compréhension de la consigne rejoint les problèmes de connaissance des propriétés géométriques : les élèves considèrent qu'une flèche est une figure géométrique connue.
- De même, bien que j'aie insisté pour qu'ils ne reforment pas le carré initial, de nombreux enfants l'ont tout de même fait. Certains ont également produit une figure qu'ils ne pouvaient pas nommer. Selon moi, il s'agit simplement d'un problème d'attention.



#### *d) Les erreurs de calcul*

J'ai constaté que le calcul que je qualifierai de basique n'est pas maîtrisé par une minorité d'élèves. Ainsi, j'ai observé deux élèves effectuer «  $8 + 5$  » à l'aide des doigts. De plus, le recours à la calculatrice est trop systématique, même pour des calculs qu'il est tout à fait possible de réaliser mentalement (comme «  $12 \times 2$  »). J'ai donc interdit la

calculatrice, pour obliger les élèves à poser les opérations. Les procédures de calculs posés étant plus ou moins maîtrisées, cela leur a offert une révision.

①  $\begin{array}{r} 6 \\ + 6 \\ \hline = 12 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1 \\ + 1 \\ \hline = 2 \end{array}$

$\begin{array}{r} 12 \\ + 2 \\ \hline = 14 \end{array}$

~~$\begin{array}{r} 12 \\ \times 2 \\ \hline = 24 \\ + 000 \\ \hline = 24 \end{array}$~~

mesure.  
Le périmètre est 14 cm.

### e) Les notions non-acquises

Comme je le présentais lors de mon analyse a priori, quelques élèves ne connaissaient pas la formule du périmètre. Cependant, comme tous ont été capables de me le définir, tout du moins de me le montrer du doigt, il s'agissait simplement de faire un rappel de la formule. J'ai tout de même insisté longuement, parce qu'il est important qu'ils la sachent par cœur.

Cependant, j'ai dû faire face à deux autres difficultés auxquelles je n'avais pas pensé.

Tout d'abord, la relation «  $n + n = 2 \times n$  » n'est pas complètement maîtrisée. En effet, j'ai remarqué que les élèves préfèrent calculer le périmètre de la manière «  $L+L+L+L$  », et non pas par la formule «  $2 \times L + 2 \times l$  ». En fait, les élèves « font le tour » de la figure avec leur doigt, et ajoutent successivement longueur et largeur. En procédant de la sorte, ils n'associent pas les longueurs et les largeurs. Pour le périmètre du carré, la tâche est plus aisée : ils remarquent facilement que «  $c+c+c+c$  » revient à «  $4 \times c$  ».

$\begin{array}{r} 10 \\ + 10 \\ + 3 \\ + 3 \\ \hline = 26 \end{array}$

$\begin{array}{r} 6 \\ + 6 \\ + 1 \\ + 1 \\ \hline = 14 \end{array}$

$\begin{array}{r} 4 \\ + 4 \\ + 3 \\ + 3 \\ \hline = 14 \end{array}$

Enfin, les élèves sont très attachés à la représentation prototypique des figures géométriques de base. Ainsi, lors de l'exercice avec les deux carrés superposables, les élèves m'ont, comme je l'ai expliqué dans le paragraphe sur les consignes, reformé le carré initial. Cependant, la moitié l'a disposé sur la pointe, en affirmant « C'est un losange. ». Il est clair que les élèves sont ancrés au niveau 1 des pensées de Van Hiele, ce qui est normal à cet âge. Ils ne considèrent pas que le carré est un losange particulier. Pour leur prouver, j'ai simplement basculé le carré sur le côté, comme pour la représentation prototypique. Les élèves ont tous conclu très rapidement « C'est le carré du départ ! ».

### **Les procédures**

La séance 1 n'a pas permis aux élèves d'employer beaucoup de procédures, étant donné qu'il y a eu un important moment de rappel quant aux propriétés et au périmètre. Cependant, je tiens à les présenter, en les classant selon les exercices : celui concernant les rectangles, et celui concernant les carrés.

#### *a) Les rectangles*

##### **POUR COUPER.**

① : Certains placent le rectangle 1 dans le 3, font un repère, et coupent. Ils placent le premier morceau dans le rectangle 3, et se rendent compte que le second s'intègre dans le rectangle 3 également.

② : D'autres coupent au hasard, très souvent vers le milieu du rectangle 1. A tâtons, ils placent les bouts de rectangle dans le rectangle 3, et redécoupent (toujours au hasard) si nécessaire. L'avantage de cet exercice est que l'aire du rectangle 1 est deux fois plus petite que l'aire du rectangle 3. Il est donc relativement facile de placer le rectangle 1 dans le 3, et il ne nécessite que peu de découpages.

③ : Enfin, certains utilisent la même procédure que les premiers, mais après avoir coupé le morceau dépassant, le mettent de côté.

##### **POUR PLACER**

Selon les procédures utilisées pour couper, il est possible de faire une analogie. Ceux qui ont employé la méthode ① placent les morceaux selon une certaine rigueur : collés ou perpendiculaires. Ceux qui ont préféré la ② les placent au hasard.

## *b) Les carrés*

### POUR PLIER / COUPER

Tous les élèves sans exception ont trouvé les deux méthodes.

### POUR PLACER

Certains ont placé les deux triangles pour former un parallélogramme, d'autres pour former un triangle. Aucune méthode n'a été préférée : la moitié a construit un parallélogramme, l'autre moitié le triangle.

D'autres élèves ont dû tâtonner et ne parvenaient pas à former d'autre figure que le carré initial. D'ailleurs, plusieurs ont cru à un contrat didactique rompu, puisqu'ils m'ont dit : « Mais c'est impossible, en fait, il n'y a pas d'autre figure à construire ? ». J'ai alors dû leur assurer que c'était bel et bien possible, qu'il fallait simplement s'armer de patience. Enfin, comme nous l'avons vu dans la partie sur les difficultés, certains élèves ont cherché à associer un rectangle et un triangle, bien que la consigne ne le demande pas.

## **2. Séance 2**

Cette séance termine la séance 1 initialement prévue.

### Les difficultés

#### *a) La compréhension*

Pour débiter la séance 2, j'ai demandé aux élèves de rappeler ce qui a été appris la semaine précédente. Bien qu'ils m'aient rapidement cité l'aire, j'ai remarqué qu'ils n'avaient pas compris. Ainsi, E. a dit à ses camarades : « L'aire, c'est la place qu'il reste. » (sous-entendu « Quand on découpe une figure pour la placer dans une autre »). En fait, j'ai conclu ici que certains élèves ont fait une confusion, suite aux problèmes de découpage de la semaine précédente. En effet, comme restait de la place dans la figure (nous n'avions vu que des cas où l'aire était inférieure ou égale, et jamais supérieure), nous avons conclu que l'aire de cette figure était supérieure à l'aire de l'autre figure. Ainsi, bien que j'aie répété, et fait répéter aux élèves que l'aire est « la quantité de papier », « l'encombrement », « la place que prend la figure », certaines confusions ont tout de même eu lieu.

De la même manière, l'exercice de la séance 2 a témoigné de difficultés de compréhension pour certains élèves. Ainsi, en passant dans les rangs, quand je les ai sollicités : « Que peux-tu conclure », un quart de la classe m'a répondu « Il reste de la place », et jamais « la figure 1 a une aire inférieure au carré ». Ces enfants n'ont donc pas

fait le lien entre la place occupée (et par conséquent la place restante) et l'aire. J'ai donc décidé de récapituler avec eux ce que nous avons vu la semaine précédente, parfois même en leur demandant de montrer l'aire d'une figure avec le doigt, pour qu'ils saisissent bien la notion, et finissent par conclure « L'aire de la figure 1 est inférieure à l'aire du carré ».

Enfin, quand tout à la fin de la séance, pour faire le bilan et la trace écrite, j'ai interrogé la classe « Qu'avez-vous appris la semaine dernière et aujourd'hui ? », un élève a répondu « Il y a trois sortes d'aire ». Intriguée, je lui ai demandé d'expliquer ce qu'il entendait par là, et il a alors naturellement répondu « Oui ! L'aire supérieure, l'aire inférieure et l'aire égale. ». Cette erreur, bien qu'elle n'entrave pas la compréhension de l'aire en tant que telle (l'élève ayant répondu ceci est d'ailleurs un élève ayant parfaitement réalisé les exercices), témoigne du besoin de catégorisation de l'aire. Certes, l'aire ne peut être que supérieure, inférieure ou égale, mais j'ai alors expliqué à l'élève qu'une aire n'est supérieure / inférieure / égale qu'à une autre aire. Il y a là une comparaison.

### *b) Le manque de connaissances*

Le fait le plus problématique lors de cette séance a été la méconnaissance des termes « supérieur » et « inférieur ». En effet, lors de la correction de la première figure, j'ai effectué un vote à main levée : « Qui pense que la figure 1 a une aire inférieure à l'aire du carré ? ». E. m'a alors questionnée : « Ça veut dire quoi inférieur ? ». Je lui ai répondu que cela signifie « plus petit » et que supérieur est équivalent de « plus grand ». J'ai tout d'abord supposé qu'ils n'avaient simplement jamais étudié le rangement. Pourtant, quand j'ai cherché à savoir s'ils connaissaient les symboles correspondants, ils ont réussi à les représenter (bien que certains aient inversé les significations). Ils ont même précisé « La pointe montre le plus petit ! ».

Le fait que les élèves connaissent les symboles, mais pas les termes mathématiques m'a alors intriguée. Il est en effet étonnant d'apprendre un code sans en donner l'explication. J'ai alors eu la réponse sans la chercher : Mme S. m'a en effet dit qu'elle considère que l'utilisation des termes « supérieur » et « inférieur » est trop complexe pour les élèves, et qu'elle et sa collègue (qui s'occupe du quart temps) ne préfèrent pas les employer. Après la séance, j'ai effectué des recherches dans le BO pour savoir si les élèves étaient effectivement trop jeunes pour connaître ces termes. Ainsi, j'ai remarqué qu'à de nombreuses reprises, dans le tableau de la progressivité des apprentissages, il est fait référence au rangement. De plus, dans le programme en lui-même, il est dit « Comparaison et rangement de nombres, repérage sur une droite graduée, utilisation des signes  $>$  et  $<$  ».

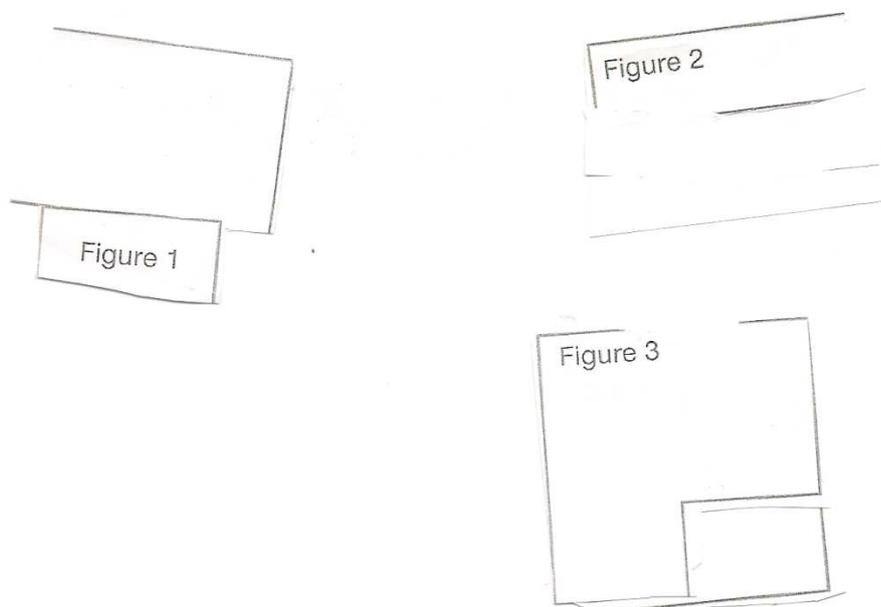
Cependant, il n'est pas précisé si les termes utilisés doivent être « inférieur » ou « plus petit » (respectivement « supérieur » ou « plus grand »).

J'ai donc décidé, la semaine suivante, d'amener les élèves à employer le langage mathématique, en insistant sur le fait que les expressions sont synonymes, mais que l'on préfère utiliser « inférieur » et « supérieur ». A la fin de ma séquence, les élèves utilisaient tous, sans erreur quelconque, les termes corrects, ainsi que les symboles associés.

### *c) Les manipulations*

Comme je l'avais supposé dans mon analyse a priori, quelques élèves ont fait des découpages grossiers. Les trois figures ayant une aire très proche de celle du carré, ces élèves ont donc toujours conclu que les aires étaient égales.

Ce problème a d'ailleurs été lié aux difficultés à placer correctement les morceaux de figures découpées. En effet, placer des bouts de papier, côte à côte et selon une certaine logique relève de la motricité fine. Il s'est avéré pendant le problème, que beaucoup d'élèves éprouvaient des difficultés à poser les morceaux de figures, et laissaient des blancs.

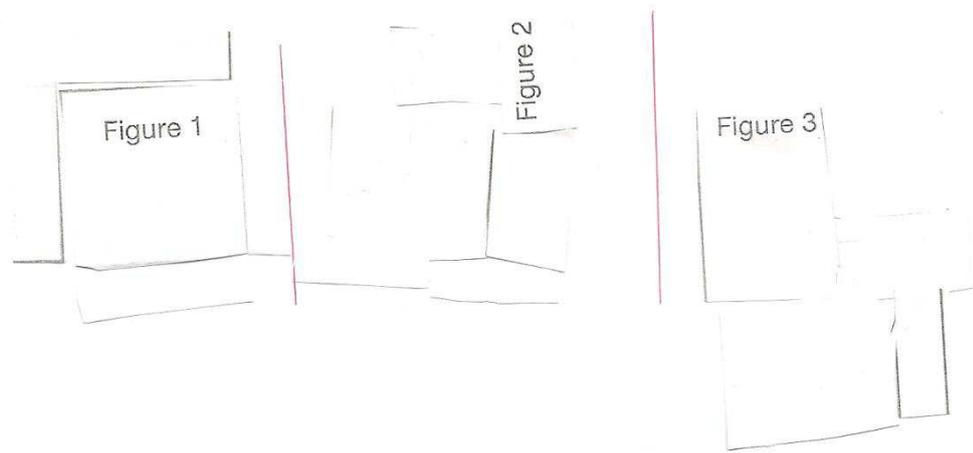


## Les procédures

Cette séance, contrairement à la précédente, a permis aux élèves de mettre en place des procédures de découpage.

① De la même manière que la procédure ① de la séance 1, les élèves placent la figure dans le carré, font un repère, coupent, et réitèrent l'opération. Il y a davantage d'élèves que la semaine précédente qui ont utilisé cette méthode. En effet, certains se sont rendu compte que cette technique était la plus précise et la plus économe en manipulation.

② Certains, comme la semaine précédente, découpent au hasard. Cependant, les découpages de cette séance étant plus complexes, ils finissent par se retrouver avec plein de morceaux de papier, et éprouvent parfois des difficultés à les placer. Certains ont d'ailleurs perdu des bouts.



D'autres procédures ont été utilisées, mais témoignent d'erreurs. Les élèves ont d'ailleurs fini par corriger.

③ Quelques élèves, se souvenant des pliages de la séance précédente, m'ont demandé s'il était possible de plier. J'ai acquiescé. Cependant, ils se sont arrêtés au pliage, et n'ont pas découpé. Ainsi, quand ils m'ont appelé, j'ai constaté qu'ils avaient plié la figure, pour la placer dans la figure, et m'ont répondu « L'aire de la figure est inférieure à l'aire du carré. ». J'ai ainsi dû leur expliquer que le morceau de papier « caché » était à prendre en compte, car il fait partie intégrante de la quantité de papier initiale.

④ Comme à la séance, certains élèves ont découpé, et mis de côté les morceaux.

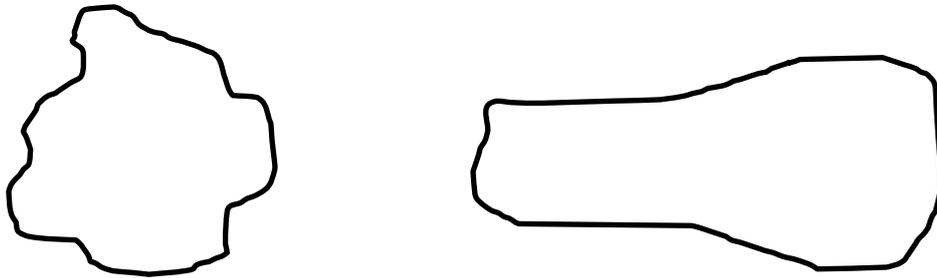
### 3. Séance 3

#### Les difficultés

Pour cette séance, avec l'introduction du comptage de carreaux, j'ai décidé de classer les difficultés chronologiquement : l'introduction, le premier problème et le second. En effet, chaque partie a amené ses contraintes, et celles-ci sont radicalement différentes.

#### a) L'introduction

Contrairement à ce que j'avais prévu initialement (c'est-à-dire dessiner deux figures géométriques connues : un carré et un rectangle), j'ai dessiné deux figures quelconques, semblables à celles-ci :



En effet, je n'ai pas pu rentrer dans la classe en avance, étant donné qu'il avait neigé, et que Mme S. est arrivée à l'heure où les élèves rentrent en classe. De ce fait, j'ai préféré dessiner deux figures quelconques, plutôt qu'un carré et un rectangle à main levée.

J'ai ensuite continué en demandant « Qui peut me dire quelle figure a la plus grande aire. »

*L. « C'est la figure à droite. »*

*Moi : « Comment tu le sais ? »*

*L. « Ça se voit, la figure elle est plus grande. »*

*Une autre élève lève la main, je l'interroge.*

*E. « La première, elle a plus de largeur, et la seconde, elle a plus de longueur. Donc les aires sont presque pareilles. »*

*Moi : « Ah, vous n'êtes donc pas d'accord ! L. pense que la deuxième figure a une plus grande aire, et toi tu dis qu'elles sont presque égales. Est-ce que quelqu'un aurait une idée pour prouver quelle aire est la plus grande ? ».*

Pour répondre à ma dernière question, les élèves ont ainsi fait différentes propositions :

- « Il faut découper ». Une élève lui fait alors remarquer qu'il est impossible de découper le tableau.
- « Il faut prendre du calque, reproduire la figure à droite et la mettre dans la figure à gauche. On verra comme ça si elle rentre dans l'autre ou pas ! ». Je ne m'étais pas du tout attendu à ce qu'un élève propose d'utiliser du papier calque, étant donné que nous n'en avions pas parlé. J'ai d'ailleurs trouvé l'idée intéressante (et cela a également prouvé qu'il avait bien compris le principe du découpage pour comparer l'aire), et je lui ai fait remarquer. Cependant, j'ai précisé qu'aucun papier calque ne leur est proposé, et qu'ils devaient trouver une autre méthode.
- « Il faut mesurer les côtés. Mais là, on ne peut pas mesurer, ce ne sont pas des figures que l'on connaît ! ». J'ai donc compris que le fait que mes deux figures ne soient pas des figures géométriques connues les a dérangés. J'ai ainsi dessiné, toujours à main levée, deux rectangles, et leur précisant qu'il fallait imaginer qu'il s'agissait bien de deux rectangles.
- « Il faut mesurer alors. ». Toutefois, quand je leur ai demandé quoi mesurer, aucun n'a su me répondre. Quelques-uns ont dit : « si on mesure les côtés, on peut calculer le périmètre, mais pas l'aire. ». Cela m'a prouvé qu'ils avaient donc déjà, pour la plupart, bien fait la distinction entre périmètre et aire.

C'est ainsi que je leur ai proposé le carré représenté sur quadrillage.

### *b) Premier problème*

Ils ont très rapidement reconnu la figure ; mais quand je leur ai demandé « Que pouvez-vous me dire par rapport à l'aire ? », les premières erreurs ont été constatées. En effet, j'ai pu diviser la classe en deux, selon les réponses des élèves : une petite partie a répondu 4 carreaux (c'est-à-dire la longueur d'un côté), et une majorité a proposé 16 carreaux. J'ai donc demandé à un élève de rappeler à ses camarades la définition de l'aire, et de venir montrer sur ma feuille ce qu'elle représente. Grâce à cela, la classe s'est accordée pour répondre : l'aire du carré est de 16 carreaux.

Je leur ai ensuite distribué le premier problème, qui consiste à dessiner sur quadrillage, deux figures ayant la même aire que le carré.

J'ai ici recensé trois types d'erreurs :

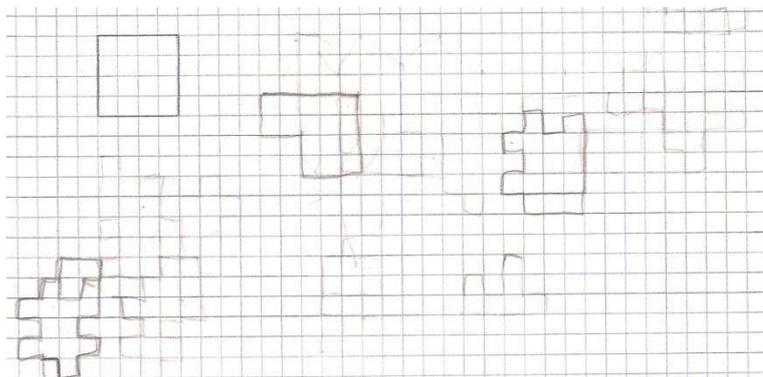
- Les élèves tentent de dessiner des figures connues, comme le carré (et redessinent donc le carré initial) ou le rectangle (de 8 carreaux sur 2 carreaux). Je leur précise

donc qu'ils peuvent s'aider des modèles de figures de l'exercice 2, qu'ils ont déjà sur leur feuille, pour représenter des figures atypiques.

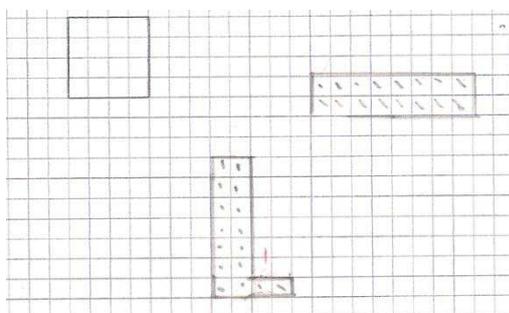
- Pour rester dans la même idée, quelques élèves ont représenté deux fois le même rectangle de 8 carreaux sur 2 carreaux, mais dans des positions différentes : un posé horizontalement, et un verticalement. Encore une fois, j'ai pu remarquer à quel point la représentation prototypique du rectangle (posé sur son plus grand côté) a son importance. Pour pallier à ce problème, j'ai simplement proposé une vérification par binômes, qui a ainsi permis de constater le souci.

Très peu d'élèves ont pensé à dessiner un rectangle de 16 carreaux sur 1 carreau.

- Enfin, le problème le plus récurant ne m'a pas particulièrement étonnée, puisqu'il s'agissait du premier exercice de construction d'une figure en fonction d'une aire donnée : la majorité des enfants ont tâtonné, et s'y sont repris à plusieurs fois pour parvenir à dessiner une figure d'une aire de 16 carreaux. J'ai ainsi pu remarquer qu'ils dessinent une figure au hasard, comptent le nombre de carreaux, ajustent en gommant et rajoutent ou suppriment des carreaux, comptent de nouveau, etc.



*Nous pouvons constater ici que l'élève a particulièrement recherché, en gommant à de nombreuses reprises, pour finir par obtenir 2 figures atypiques d'aire 16 carreaux.*



*Ici, nous remarquons très nettement la procédure de recomptage des carreaux employée, ainsi que l'ajustement réalisé pour la 2<sup>ème</sup> figure (l'élève a ajouté les 2 carreaux en bas).*

Ce problème a été corrigé par binômes.

### *c) Deuxième problème*

La première partie du deuxième problème a été réalisée sans souci particulier. La correction a montré que les élèves s'étant trompés dans l'aire des figures n'ont fait des erreurs qu'à un ou deux carreaux près.

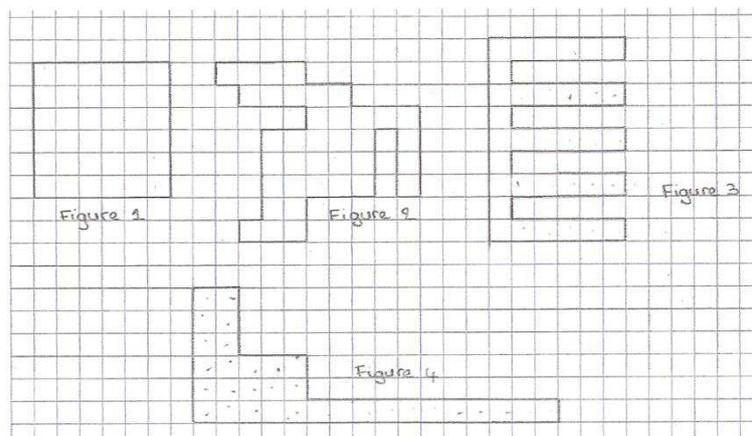
La deuxième partie s'est révélée tout aussi aisée.

Tout d'abord, je leur ai demandé s'ils savent ce que veut dire « ordre croissant ». Etant donné que nous avions discuté de ce sujet la semaine précédente (cf l'analyse a posteriori de la séance 3), la majorité devait s'en souvenir. Les élèves m'ont tous répondu « du plus petit au plus grand ». Puis, j'ai cherché à savoir s'ils connaissent les symboles utilisés, et ils m'ont répondu « la flèche » ou « le V sur le côté ». J'ai donc demandé à un élève de venir les représenter au tableau ; il a d'ailleurs précisé « la pointe montre toujours le plus petit ». N'ayant donc pas rencontré de souci particulier sur la connaissance des élèves sur cette notion de rangement, j'ai donc laissé les élèves procéder.

Cependant, je n'avais pas du tout pensé au fait que les élèves allaient classer en termes de carreaux, et non en terme d'aire. J'entends par là que toute la classe a écrit : «  $32 < 34 < 36 < 37$  ». Evidemment, leur réponse étant correcte, je n'ai pas pu les contredire. Toutefois, je leur ai expliqué que ce qui m'intéresse est de parler « d'aire de la figure », et non pas de carreaux, et j'ai demandé à un élève d'essayer de formuler la réponse. Il a alors proposé : « L'aire de la figure 4 est inférieure à 34 carreaux ». Encore une fois, sa réponse étant correcte, je n'ai pu qu'acquiescer, mais j'ai dû affiner un peu plus : « Il faut que vous remplacez tous les nombres par : l'aire de la figure ... ». Cette fois, la majorité a compris, et j'ai pu écrire, sous leur dictée, la réponse attendue au tableau. Cependant, je ne leur ai pas demandé d'effacer leur première réponse.

## Exercice 2

Quelle est l'aire (en carreaux) de chaque figure ? Rangez-les par ordre croissant.



Aire de la figure 1 : ..... 36 carreaux  
Aire de la figure 2 : ..... 32 carreaux  
Aire de la figure 3 : ..... 34 carreaux  
Aire de la figure 4 : ..... 39 carreaux

Rangement par ordre croissant :

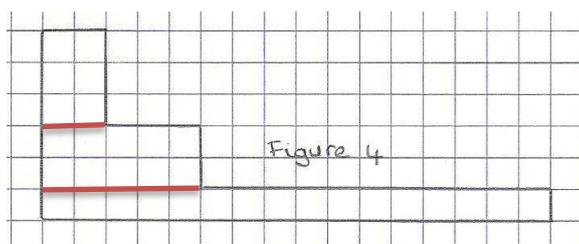
32 - 34 - 36 - 39  
32(2) < 34(3) < 36(4) < 39(9)

Néanmoins, même si cet exercice a été bien compris et relativement facile, j'ai tout de même dû insister sur les termes « inférieur à », et « supérieur à ». En effet, bon nombre d'élèves préfèrent employer « plus petit que » et « plus grand que ». Cependant, j'ai préféré les amener à l'utiliser des termes mathématiques corrects, et j'ai donc valorisé l'emploi de ces expressions.

### Les procédures

Les procédures, lors de cette séance, sont très peu présentes.

- Pour les constructions, je les ai détaillées dans les difficultés : représenter des figures connues, ou dessiner et ajuster au fur et à mesure.
- Pour le comptage de carreaux, soit les élèves dénombrent les carreaux un à un, soit ils effectuent des groupements de carreaux. Par exemple :



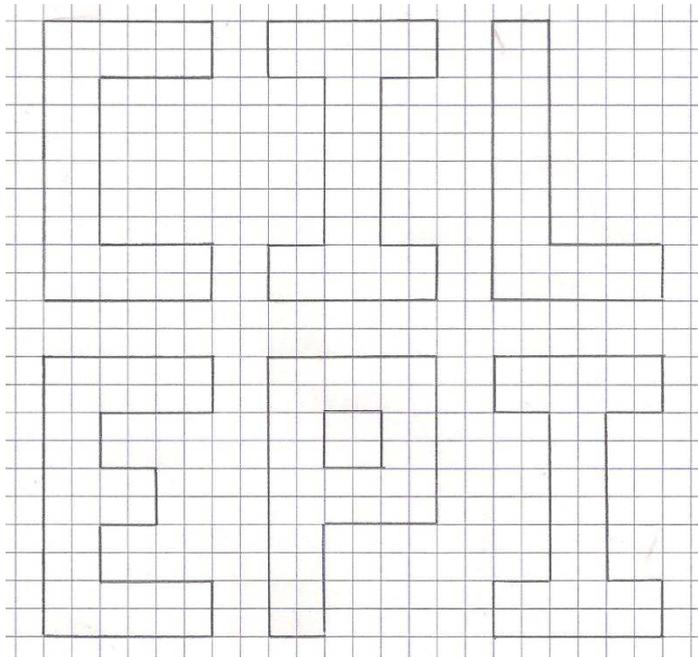
pour cette figure, certains élèves ont imaginé 3 rectangles. De plus, pour calculer l'aire de chaque rectangle, ils ont pensé à

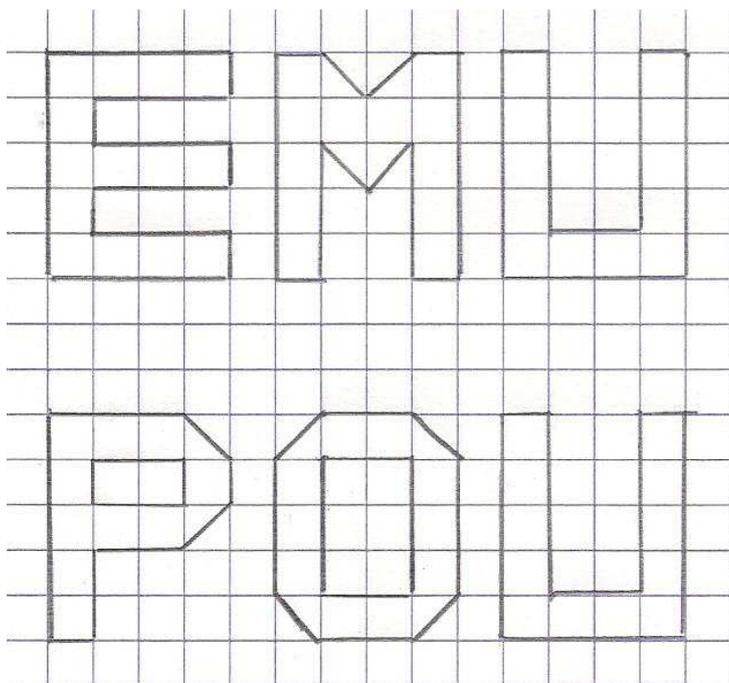
compter le nombre de carreaux de la longueur, le nombre de carreaux de la largeur, et à les multiplier entre eux (ils ont donc atteint, sans le savoir, la mesure de l'aire d'un rectangle, telle que nous la connaissons).

#### 4. Séance 4

Pour l'étude de cette séance, je rappelle que je ne me suis intéressée qu'au cas du groupe 1, c'est-à-dire le groupe ayant parfaitement compris les notions de périmètre et d'aire.

##### a) Premier problème



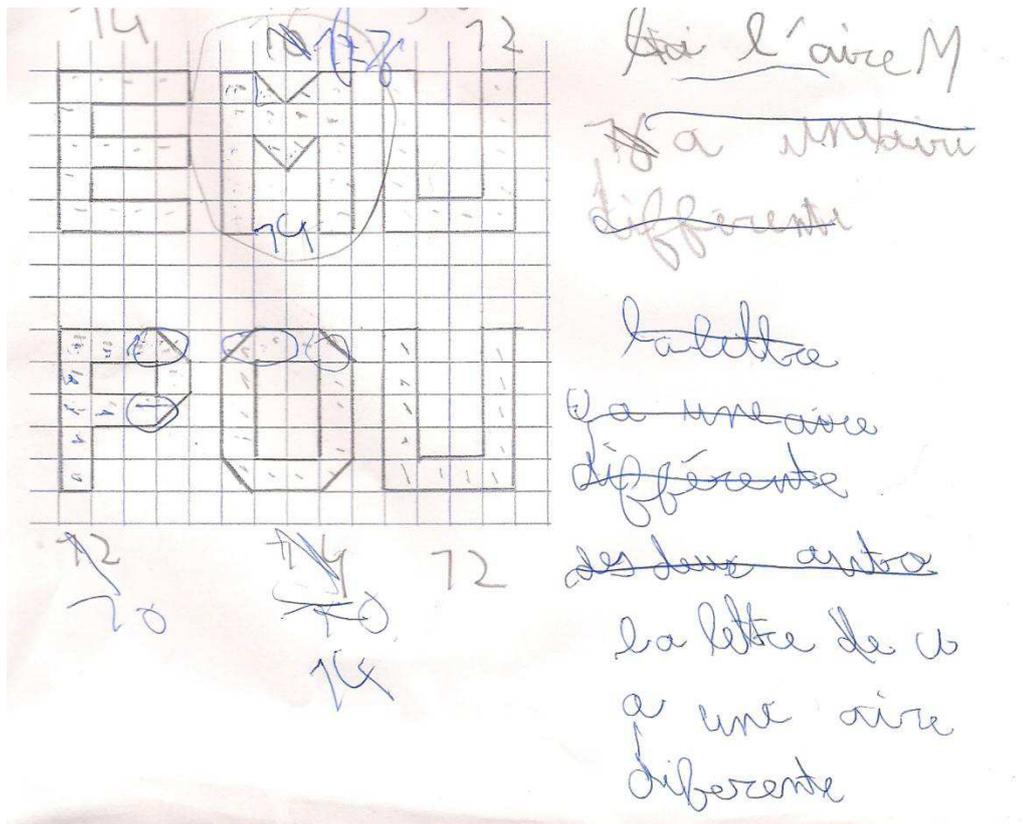


### Les difficultés

Ce groupe n'a pas rencontré de difficulté majeure pour répondre à l'exercice. Le principe est en effet le même que le dernier de la séance précédente. Les seuls obstacles que certains élèves ont croisés sont les demi-carreaux. En effet, ces élèves en question se sont senti gênés, et ont compté un demi-carreau pour un carreau.

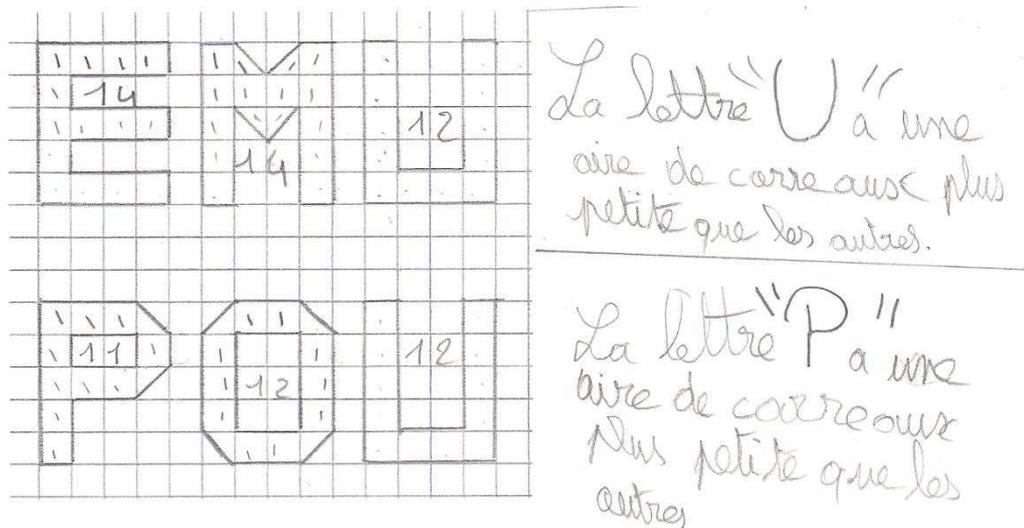
Etant donné qu'elles n'étaient qu'une petite minorité (deux élèves), j'ai décidé de discuter avec elles : « *Ce qui pose problème, ce sont les demi-carreaux. Essayez de réfléchir à ce que l'on peut faire avec les demi-carreaux. Discutez ensemble, voyez si vous pouvez trouver une solution. La seule chose que je peux vous affirmer, c'est que vous ne pouvez pas les compter comme un carreau.* ». Je les ai laissé chercher quelques minutes, et quand je suis revenue vers elles, elles ont proposé de grouper deux demi-carreaux pour n'en faire qu'un.

Toutefois, bien que je pensais le problème résolu, il s'est avéré qu'elles ont rencontré des difficultés pour dénombrer les carreaux : en effet, elles comptaient plusieurs fois les groupements de demi-carreaux. Il a fallu que je les fasse marquer les carreaux déjà comptés, pour ne pas revenir dessus.

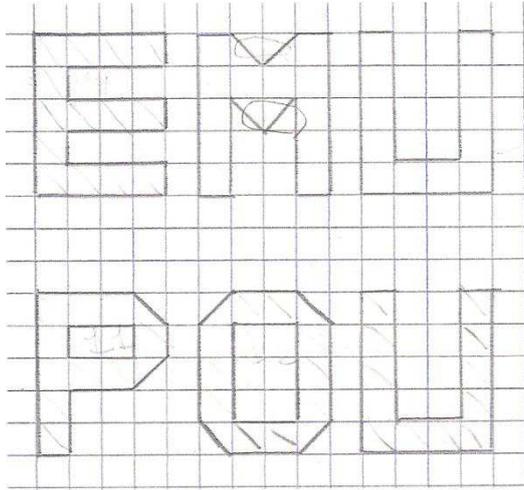


### Les procédures

La principale procédure que j'ai pu rencontrer en observant les élèves a été le « marquage » sur les carreaux déjà comptés. Certains ont choisi de pointer différemment les demi-carreaux, pour bien valoriser le dénombrement différent, d'autres non.



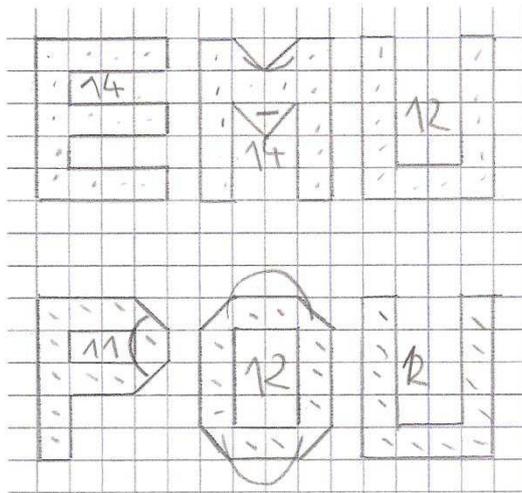
Ici, nous pouvons remarquer que pour le M, les demi-carreaux à grouper étant côte à côte, l'élève a choisi de les marquer immédiatement. Pour le O et le P, au contraire, il a choisi de ne pas les marquer, pour probablement compter mentalement.



L'aire différente  
des autres aires  
aires est la lettre U

L'aire différente  
des autres aires  
est la lettre P

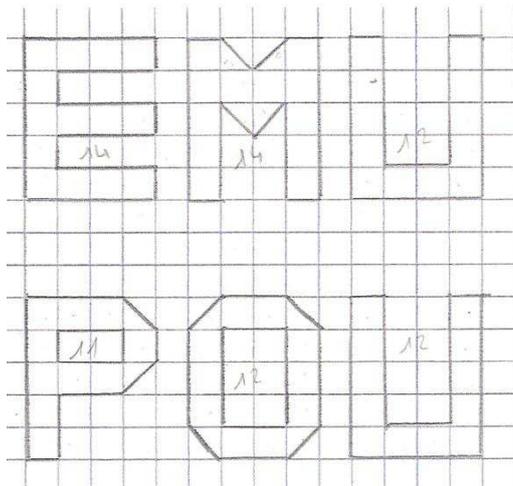
L'élève a procédé de la même manière que le précédent, en entourant les groupements pour le M.



L'aire différente des  
deux autres pour le  
mot EMU est la lettre U

L'aire différente des  
deux autres pour le  
mot POU est la lettre P.

Sur cet exemple, il est visible que l'élève a relié les demi-carreaux.



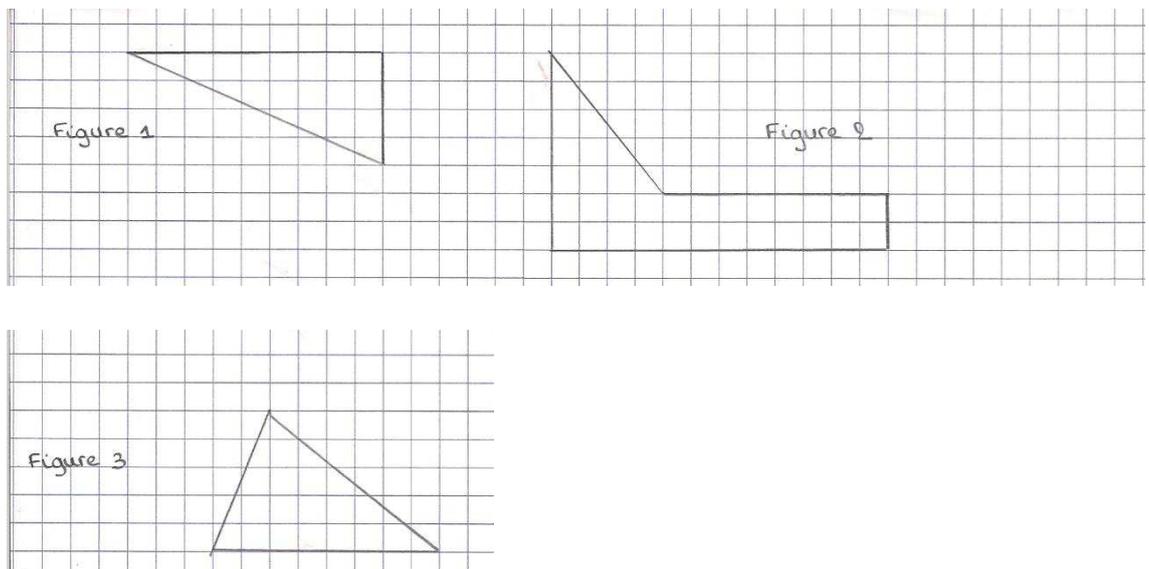
La lettre "U" est l'intrus car, il y a 14 ~~lett~~ carreaux.

La lettre "P" est l'intrus car, il y a 12 carreaux.

Ici, l'élève n'a rien écrit dans les lettres. L'ayant observée, je peux dire qu'elle a pointé les carreaux avec son stylo, sans les marquer. La procédure s'est faite mentalement.

Aucun élève n'a pensé à utiliser des procédures visuelles (voir dans la description des séances, I, C, 3 : pour CIL, le L est l'intrus et se repère facilement). Certains, après avoir compté les carreaux du mot CIL m'ont dit « mais ça se voit que le L a un aire inférieure », sans cependant réussir à le justifier clairement. Toutefois, comme je l'avais dit, je n'ai pas cherché à leur faire utiliser cette technique, puisqu'elle permet juste un gain de temps.

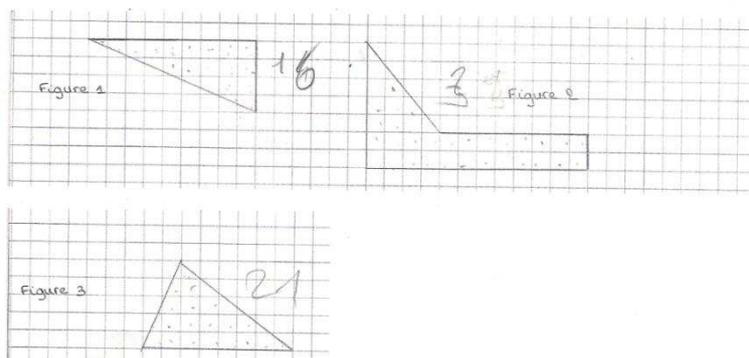
### b) Deuxième problème



Pour ce problème, je ne vais pas séparer les difficultés et les procédures, pour la simple et bonne raison qu'aucun élève n'a trouvé la bonne méthode, et encore moins la bonne réponse.

Bien évidemment, j'ai fini par leur expliquer comment procéder, mais je vais revenir sur leurs différentes procédures, puisqu'elles sont toutes intéressantes.

- ✓ **Les élèves ne transforment pas la figure, et choisissent de grouper des carreaux.** Cette méthode se base sur le principe du problème précédent. Il est en effet habituel, à l'école élémentaire, que lorsqu'une technique est étudiée, elle est répétée dans plusieurs exercices pour permettre de s'entraîner. Je pense que par effet de contrat didactique, les élèves ont choisi de fonctionner de la même manière qu'avant : « *en groupant le petit bout de carreau avec ce gros bout de carreau, on obtient un carreau. Là, c'est pareil, et là, on met deux demi-carreaux, etc.* ». Evidemment, je leur ai expliqué qu'il est impossible de considérer cette procédure comme juste, étant donné qu'on ne peut pas être certain que les deux morceaux de carreaux choisis forment bien un carreau.



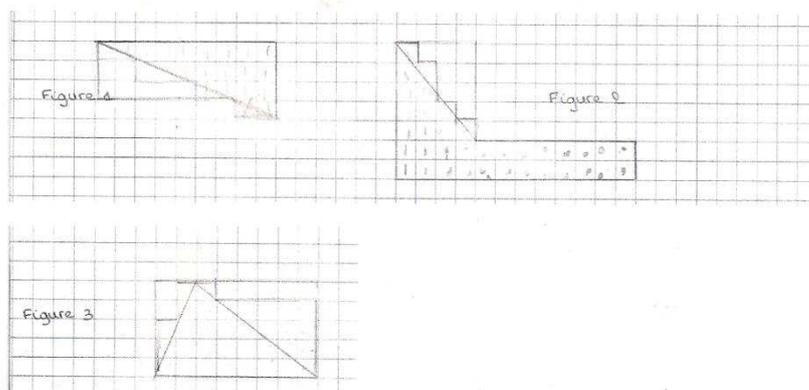
Réponse :

F1 : L'aire de la F1 fait  $1\frac{9}{2}$  carreaux.

F2 : L'aire de la F2 fait  $3\frac{4}{2}$  carreaux.

F3 : L'aire de la F3 fait  $2\frac{9}{2}$  carreaux.

- ✓ **Les élèves qui transforment les morceaux de carreaux.** Ces élèves ont compris que ce sont les carreaux tronqués qui posent problème, et qu'il faut les « remplir ». Ils choisissent donc de compléter ces carreaux, et comptent. Le souci qui se pose rejoint le précédent : on ne sait pas combien de carreaux ont été ajoutés.

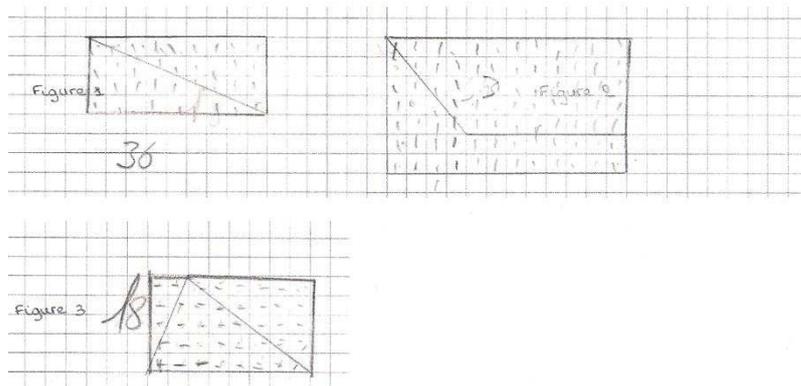


Réponse :

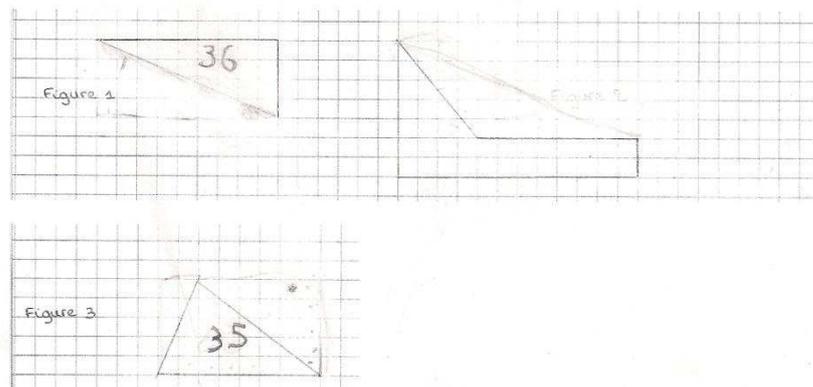
Figure 1 = 21 carreaux.  
 Figure 2 = 36 carreaux  
 Figure 3 = 33 carreaux

*Ici, l'élève, sachant qu'il était proche de la réponse, a tâtonné : j'enlève un ou deux carreaux.*

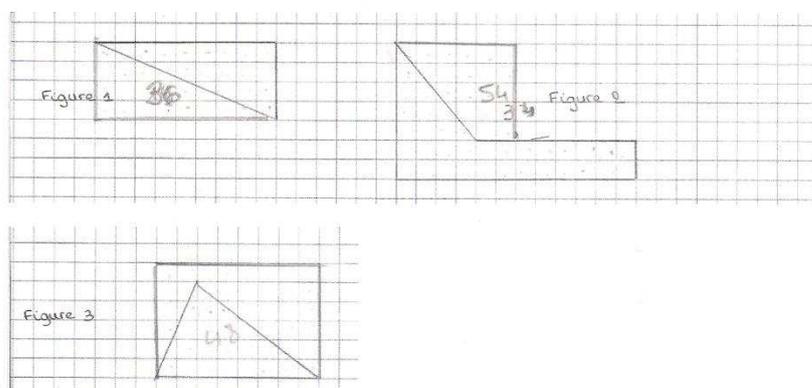
- ✓ **Les élèves qui complètent la figure.** Ces élèves savent que la méthode précédente n'est pas incorrecte mais incomplète (d'ailleurs, beaucoup ont tenté la méthode précédente, pour ensuite essayer celle-ci). Ils perçoivent donc qu'il faut jouer sur la figure en elle-même. En règle générale, tous les élèves ont trouvé la technique pour la première figure, et l'ont comprise, mais éprouvent des difficultés, notamment pour la deuxième.



Ce cas de figure a été le plus récurrent : La figure 1 et la figure 3 sont complétées correctement pour former un rectangle. De ce fait, les élèves forment un rectangle avec la figure 2, sans se rendre compte qu'ils ne construisent pas un complément de même aire. Seule la forme de la figure obtenue importe.



Je trouve ce cas de figure intéressant, car bien que pour la figure 2, les carreaux soient toujours tronqués, l'élève a manifesté un désir de recherche. Il a tenté une technique autre que celle du rectangle, pour finir par se rendre compte que cela ne convenait pas.



J'aime également cette méthode pour la figure 2 (qui d'ailleurs est celle qui se rapproche le plus de la méthode attendue), puisqu'elle démontre également une recherche. L'élève a compris

*que le problème concerne le triangle rectangle posé au-dessus du rectangle, et a donc concentré sa recherche sur celui-ci. Cependant, nous pouvons constater en regardant la figure 3 qu'elle a agrandi trop les nouvelles figures, ce qui explique sûrement ses erreurs.*

### **C. Bilan**

Après plusieurs semaines à préparer mes séances, quatre matinées à les réaliser, et des mois à les analyser, il m'est nécessaire de faire un bilan de tout ce travail, mais également de répondre à la question que je me posais il y a maintenant un an et demi.

Tout d'abord, sur le plan du mémoire de recherche, un long chemin a été parcouru : j'ai longtemps tâonné et hésité, pour m'intéresser tout particulièrement à l'introduction de la notion d'aire.

Maintenant que l'analyse a posteriori de toutes les séances est effectuée, je peux classer les difficultés et les procédures récurrentes.

#### **Difficultés :**

- Le manque de connaissances. J'ai pu en recenser quatre venant des élèves : les propriétés manquantes ou mal formulées, la carence de vocabulaire, les calculs mentaux qui leur sont complètement inconnus, et les notions mal apprises (comme les formules du périmètre par exemple) ; et une venant de l'enseignante elle-même : le manque de vocabulaire, notamment « inférieur à » et « supérieur à ».
- La représentation prototypique (qui peut rejoindre le niveau 0 des pensées de Van Hiele).
- La mauvaise compréhension de l'aire –qui a été palliée très rapidement - : c'est la place restante et non la place occupée, ou bien les élèves ne font pas lien entre la quantité de papier et l'aire.
- La manipulation du matériel, notamment de la règle (due à la professeur), et des ciseaux.
- L'inattention en règle générale, particulièrement lors de la passation de consignes.

**Procédures** : Le découpage s'est fait le plus souvent grâce à une logique (on place, on découpe, et on réitère), mais certains ont préféré utilisé le « hasard ».

A partir de la séance 3, c'est-à-dire la séance introduisant la mesure de l'aire, je considère que les élèves ont fait preuve d'une bonne compréhension et distinction de l'aire et du périmètre. Nous pouvons en effet le remarquer dès la phase d'introduction (avec les deux figures dessinées au tableau) : ils ont proposé pour comparer les aires de découper, d'utiliser du calque ou de chercher la place occupée par les deux figures ; quant au périmètre, ils ont bien acquis que celui-ci se mesure avec les côtés.

Même si j'ai dû, pour la dernière séance, effectuer des groupes de différenciation pédagogique, je ne dirai pas que l'aire n'a pas été acquise pour le groupe 3. Personnellement, je fais le pari de l'éducabilité cognitive. Simplement, les classes ne sont plus du tout homogènes, et il est primordial selon moi, de tenir compte des différences des élèves, que ce soit les différences de réussite dans telle discipline, les différences de rythme d'acquisition, ou les différences de styles cognitifs (c'est-à-dire les apprenants plutôt « visuels » ou « auditifs »). Si certains élèves n'ont besoin que de peu d'entraînement et peu de temps pour acquérir une notion, d'autres nécessitent de s'exercer davantage. Cela ne signifie pas pour autant qu'ils n'ont pas compris.

Même si j'ai pris deux fois plus de temps que je ne le pensais, au vu des travaux que j'ai corrigés à la dernière séance, je peux affirmer que la façon dont j'ai introduit l'aire a été bénéfique.

La manipulation, dans un premier temps, leur a permis de visualiser clairement l'aire, de se l'approprier, et même de la « toucher » (lorsque les élèves ont découpé des figures géométriques et ont ainsi eu entre les mains la « quantité de papier » déterminée). Pour les mathématiques, matière scientifique, il faut développer des connaissances –qui seront comprises et pas seulement apprises – mais également des attitudes : notamment la recherche, le raisonnement et la pensée critique. C'est le rôle de l'école de développer ceci, et dès le plus jeune âge. Je considère que la manipulation aide au passage de la perception à l'abstraction, et que l'expérimentation aide à la compréhension générale de la notion. Ce n'est certes pas en ayant testé dans une seule classe que je peux clamer « Oui, la

manipulation a aidé à la construction du savoir de l'aire », mais je pense sincèrement qu'elle y a participé. Il me paraît évident que l'expérimentation et les démarches personnelles des élèves aident à la construction d'un savoir, mais également à plus long terme, au goût du raisonnement.

La consolidation du savoir avec le quadrillage, dans un second temps, leur a permis d'avoir une première approche de la mesure de l'aire. Des exercices adaptés à leur avancée les ont aidés à consolider les connaissances formelles et fonctionnelles des deux semaines précédentes. Il est très probable, au vu des résultats que j'ai pu observer sur les mesures de l'aire par quadrillage (notamment les procédures pour compter les carreaux), que quand les élèves seront au CM2, ils parviennent à comprendre plus facilement les formules de mesure d'aire, tout du moins, pour le carré et le rectangle.

Au final, il y a eu un juste équilibre entre :

- Manipulation / expérimentation, cours « magistral » pour valider ou réfuter puis institutionnaliser, et enfin entraînement ;
- Travail collectif, par binômes et individuel ;
- Les supports : TBI, tableau, feuille d'exercice, feuille à découper.

Je pense que cela a aidé les élèves à s'imprégner de la notion d'aire, mais également à la différencier de la notion de périmètre.

Certes, il est nécessaire que Mme S. continue de travailler sur le long terme ce que j'ai introduit. Il n'est pas question de donner aux élèves des connaissances, sans jamais revenir sur celles-ci.

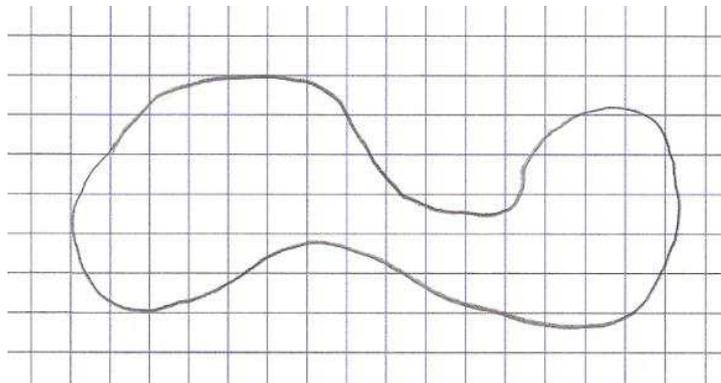
Puis, sur le plan personnel, cette expérience en classe a été très enrichissante. Ces heures passées avec les élèves m'ont permis d'apprendre un peu plus sur le métier, et ce à plusieurs niveaux. De plus, Mme S., enseignante maître formatrice, m'a conseillé très régulièrement pour améliorer mes préparations, mes fiches de préparation, la modulation de ma voix et mon autorité. Ses suggestions m'ont été très bénéfiques, puisque j'ai moi-même pu remarquer une évolution positive au cours des quatre semaines.

Certes, un professeur apprend sans cesse, jusqu'à la fin de sa carrière, mais il est vrai que le fait d'être filmée (et de regarder et analyser la vidéo ensuite), et d'avoir des recommandations de l'enseignante, ont été des conseils et outils très précieux.

### **III. Ouverture**

Je tiens, dans cette partie, à vous présenter les autres exercices que j'aurais aimé proposer aux élèves, dans le cadre de ce mémoire de recherche. Cela a été malheureusement impossible, d'une part, par manque de temps en classe, et d'autre part, par manque de temps personnel, puisque la préparation au concours est très chronophage. Cependant, je souhaite les garder en mémoire, et si l'occasion se présente, je les mettrais en place avec des CM1.

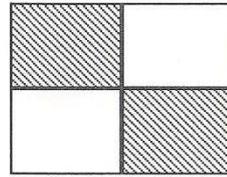
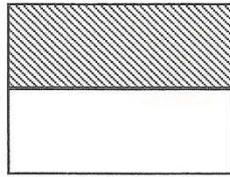
Il est évident que si le temps m'avait été suffisant, j'aurais alors terminé la séquence que j'avais prévue initialement, en proposant de déterminer l'aire de la figure à encadrer :



J'avais prévu cet exercice, mais il s'est avéré que les élèves du groupe 1 ont éprouvé des difficultés avec le deuxième exercice.

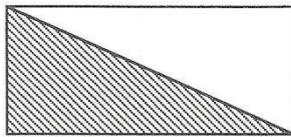
J'étais également intéressée par ce problème :

Regarde bien ces deux rectangles.



Dans les deux cas, la partie hachurée est la moitié de l'aire du rectangle.

Question 1 : La partie hachurée est-elle la moitié de l'aire du rectangle ?

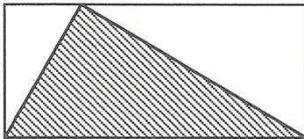


Réponse :

---

---

Question 2 : La partie hachurée est-elle la moitié de l'aire du rectangle ?

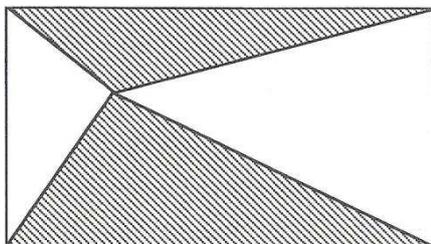


Réponse :

---

---

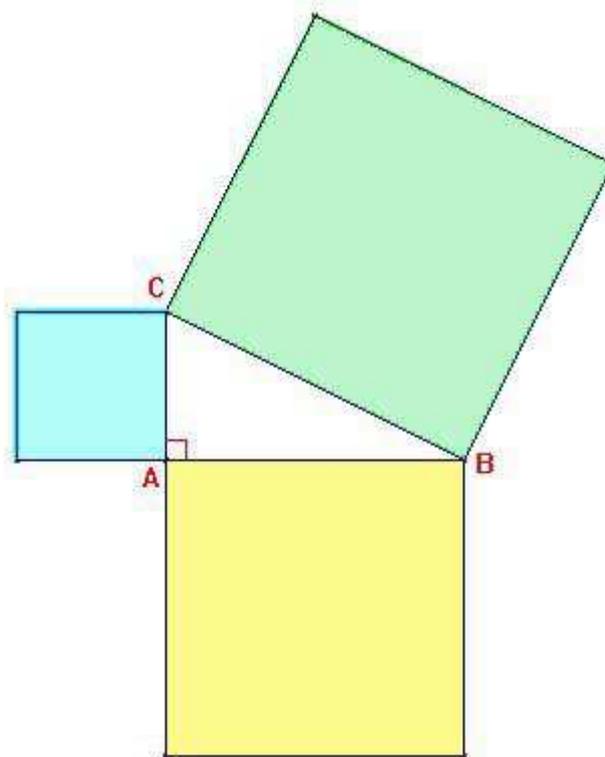
Question 3 : La partie hachurée est-elle la moitié de l'aire du rectangle ?



Réponse :

Je le trouve très attrayant, car il demande de travailler l'aire d'une manière différente : pas de découpage, pas de carreaux. Il suffit juste de bien observer et construire certains segments. Si je l'avais présenté aux élèves, cela aurait été une consolidation forte de la connaissance de l'aire.

Enfin, un troisième exercice m'aurait également tentée : celui d'une présentation « ludique » du théorème de Pythagore. J'aurais présenté aux élèves cette figure :



Et leur aurais demandé, par des découpages ou par un quadrillage (puisque en CM1, je le rappelle, ils ne connaissent pas encore les formules de calcul d'aire), de comparer l'aire du carré vert et la somme des aires des carré bleu et jaune ; ce qui illustre bien que dans un triangle rectangle, « le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés adjacents à l'angle droit ».

# Bibliographie / Sitographie

---

## *Bibliographie*

CHARNAY R. et MANTE M., 2011, *Mathématiques Epreuve orale*, Paris, Hatier Concours.

COLMEZ F., 2008, Longueur, aire et volume, *JDI*, n°1917, 20-21.

DOUADY R. PERRIN M-J., 1986, *Grand N 39-40 : Aires de surfaces planes en CM et 6<sup>ème</sup>*, Grenoble, IREM de Grenoble.

HOUEMENT C. KUZNIAK A., 1998, *Grand N 64 : Réflexions sur l'enseignement de la géométrie pour la formation des maîtres*, Grenoble, IREM de Grenoble.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, 2008, Bulletin officiel, Paris, /.

PETIT S., 2008, Dossier grandeurs et mesures, *JDI*, n°1917, 12-13.

PETIT S., 2008, Des concepts fondamentaux, *JDI*, n°1917, 14-15.

## *Sitographie*

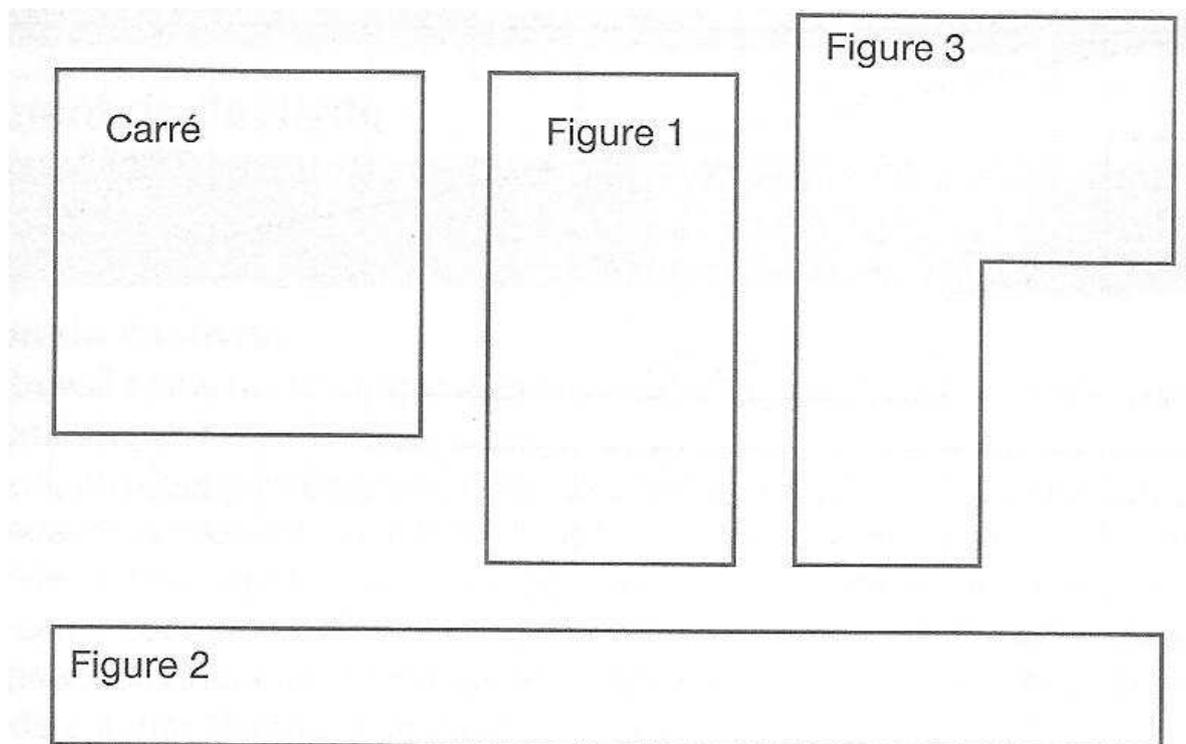
GROS, D., 2012, *Géométrie au cycle 2 et au cycle 3 – Séance du 08-12-03*, [En ligne], [http://dan.gros.free.fr/PPRE/math\\_ress/geometrie\\_niveaux.pdf](http://dan.gros.free.fr/PPRE/math_ress/geometrie_niveaux.pdf)

# Annexe

---

## **Exercice (séance 2)**

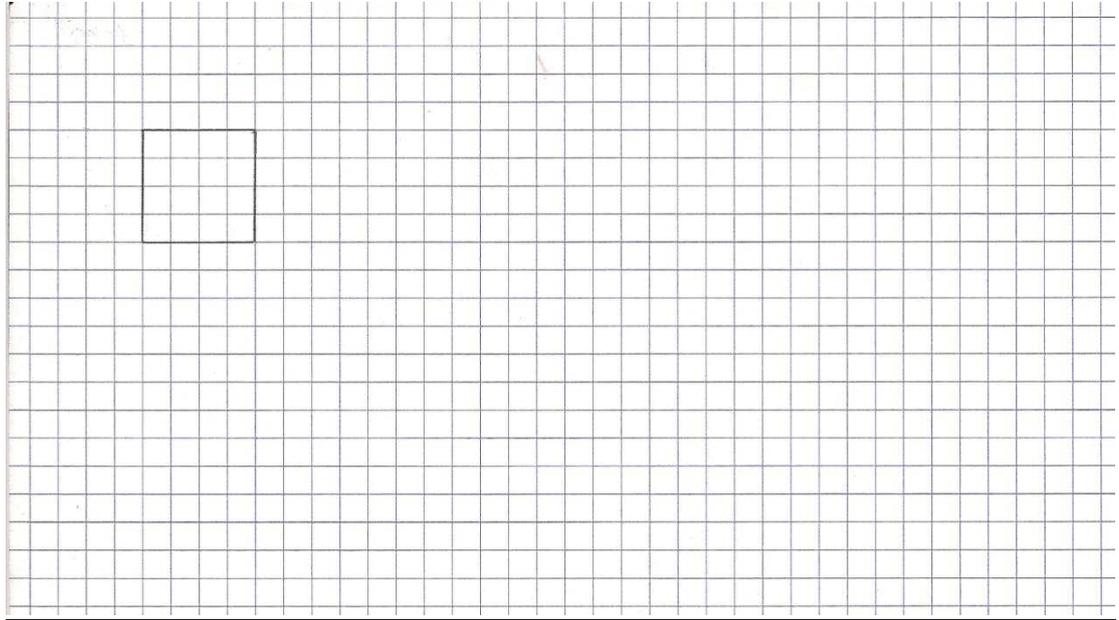
Grâce à des découpages et des superpositions, dire parmi les figures suivantes lesquelles ont la même aire.



## Exercices (séance 3)

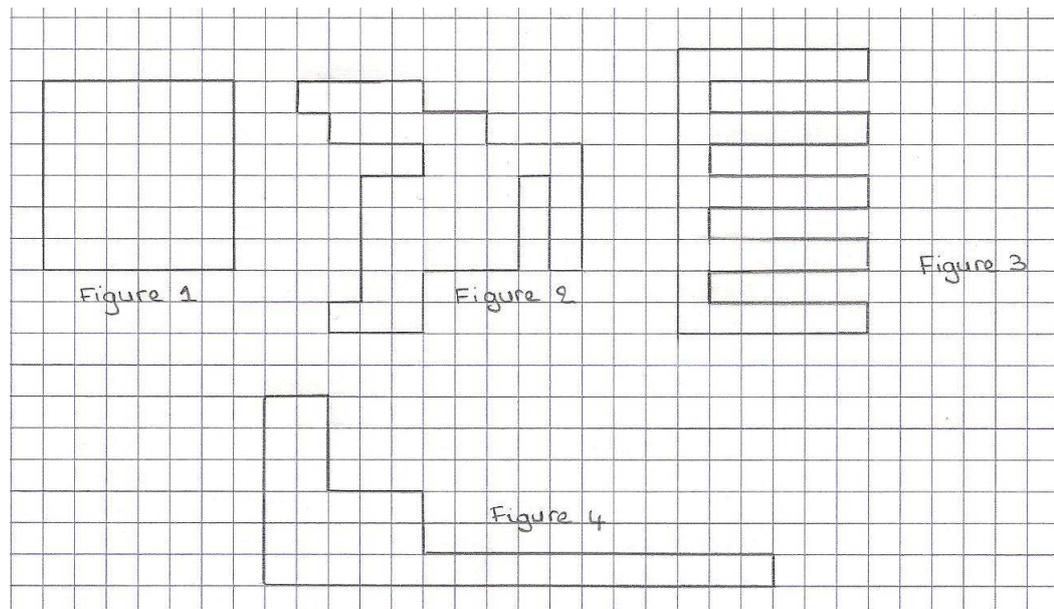
### Exercice 1

Dessinez, sur le quadrillage, deux figures ayant la même aire que le carré.



### Exercice 2

Quelle est l'aire (en carreaux) de chaque figure ? Rangez-les par ordre croissant.



Aire de la figure 1 : .....

Rangez-les par ordre croissant :

Aire de la figure 2 : .....

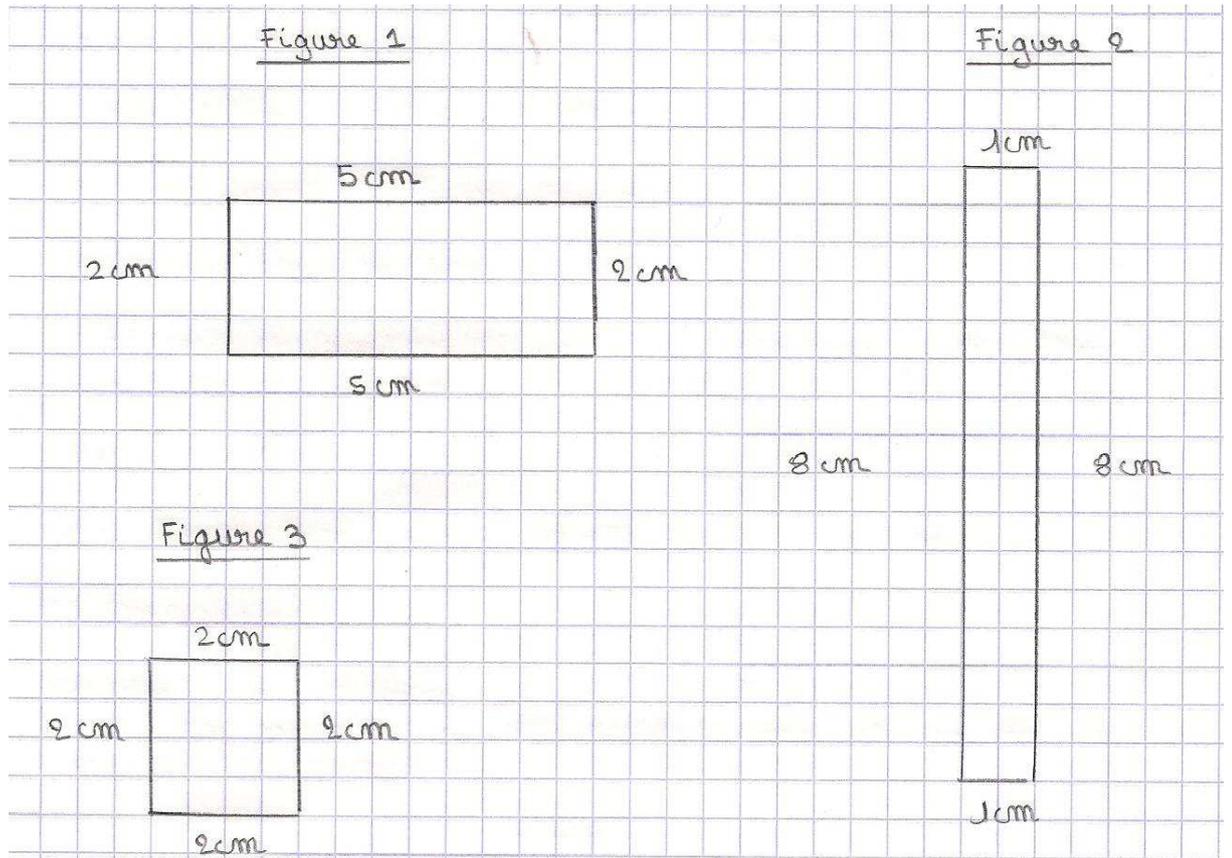
Aire de la figure 3 : .....

Aire de la figure 4 : .....

## Evaluation formative (entre la séance 3 et la séance 4)

Consigne : Dire quelle figure a :

- Le plus petit périmètre,
- Le plus grand périmètre,
- La plus petite aire,
- La plus grande aire.

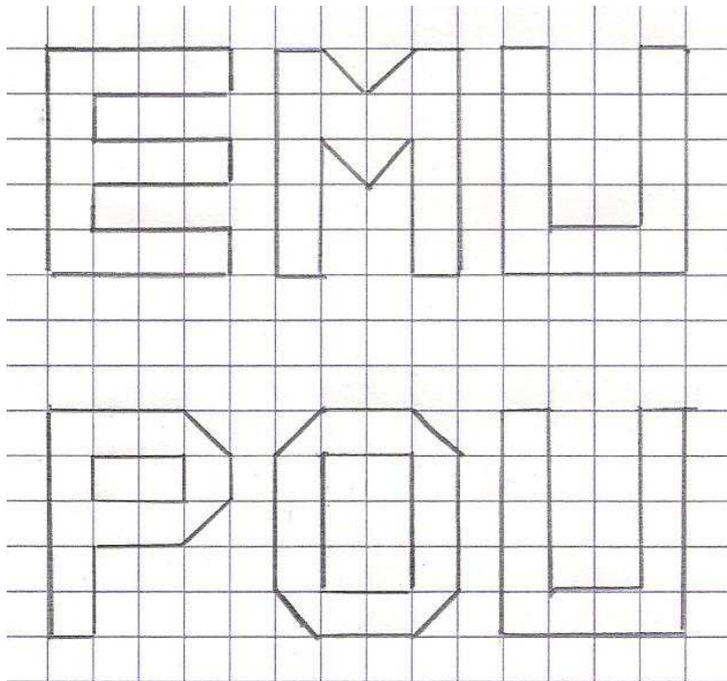
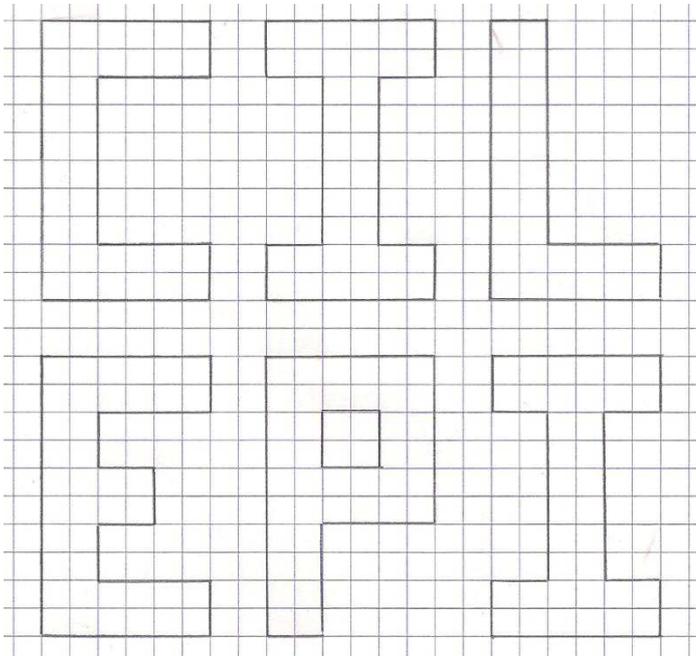


Réponses :

## Exercices séance 4 (pour le groupe 1)

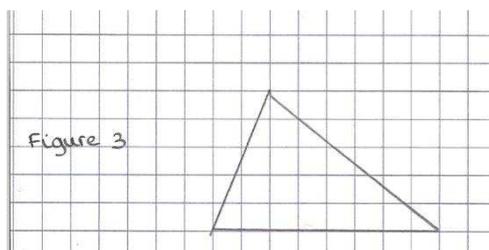
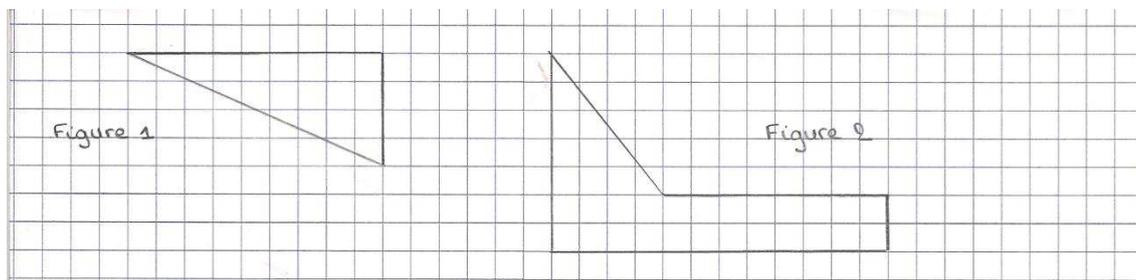
### Exercice 1

Parmi les mots suivants, trouvez quelle lettre a une aire différente des deux autres.



Exercice 2:

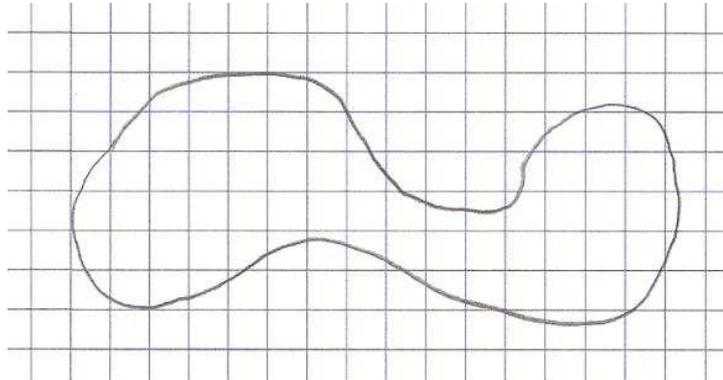
Calculez l'aire de chaque figure.



Réponse :

Exercice 3 :

Donner un encadrement de l'aire de la figure.

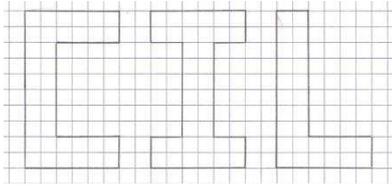


Réponse :

..... < Aire de la figure <  
.....

## Fiches d'auto-correction séance 4 (groupe 1)

### Exercice 1

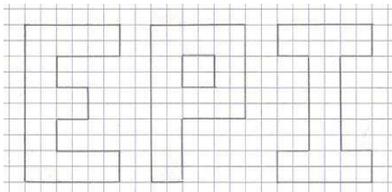


Le C a une aire de 36 carreaux.

Le I a une aire de 36 carreaux.

Le L a une aire de 28 carreaux.

L'intrus est donc le L.

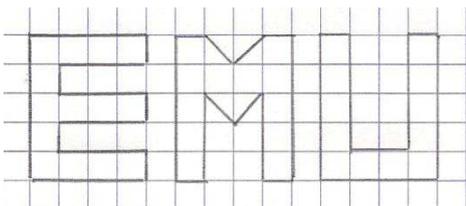


Le E a une aire de 40 carreaux.

Le P a une aire de 40 carreaux.

Le I a une aire de 36 carreaux.

L'intrus est donc le I.



**carreau !**

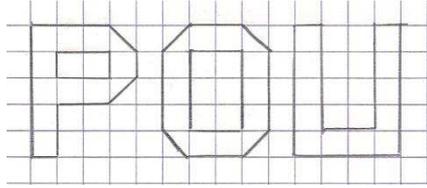
**Deux demi-carreaux forment un**

Le E a une aire de 14 carreaux.

Le M a une aire de 14 carreaux.

Le U a une aire de 12 carreaux.

L'intrus est donc le U.



**carreau !**

Le P a une aire de 11 carreaux.

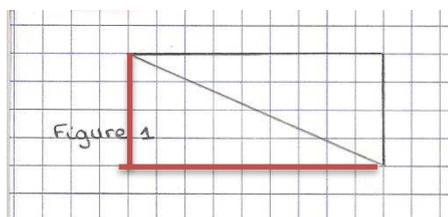
Le O a une aire de 12 carreaux.

Le U a une aire de 12 carreaux.

L'intrus est donc le P.

**Deux demi-carreaux forment un**

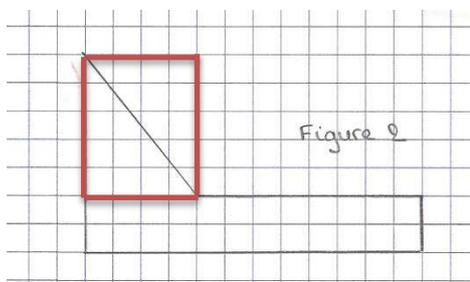
## Exercice 2



L'aire du rectangle est le double de l'aire de la figure 1.

Aire du rectangle : 36 carreaux.

**Donc aire de la figure 1 : 18 carreaux.**

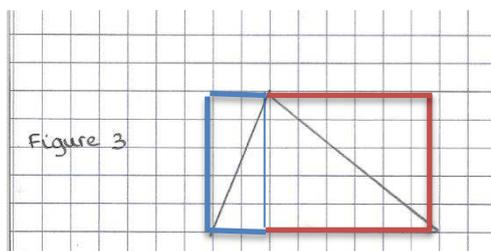


Nous obtenons 2 rectangles. La figure 2 est composée du rectangle noir et du demi-rectangle rouge.

Aire du rectangle noir : 24 carreaux.

Aire du rectangle rouge : 20 carreaux.

**Donc aire de la figure 2 :  $24 + 10 = 34$  carreaux.**



Nous obtenons 2 rectangles. La figure 3 est composée du demi-rectangle bleu et du demi-rectangle rouge.

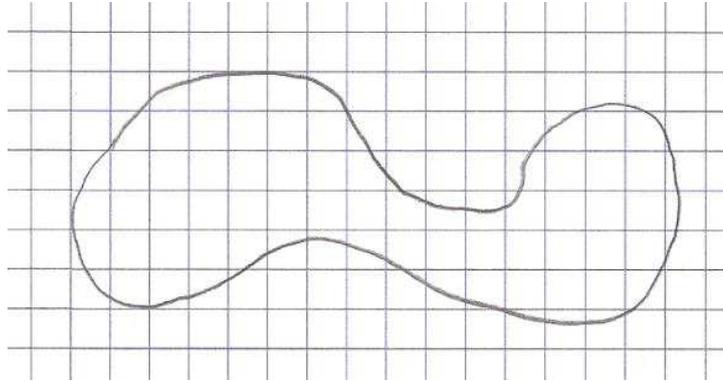
Aire du rectangle bleu : 10 carreaux.

Aire du rectangle rouge : 30 carreaux.

**Donc aire de la figure 3 :  $5 + 15 = 20$  carreaux.**

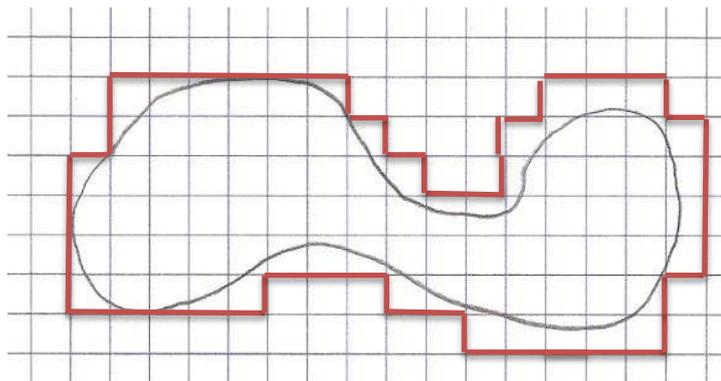
Exercice 3 :

Donner un encadrement de l'aire de la figure.

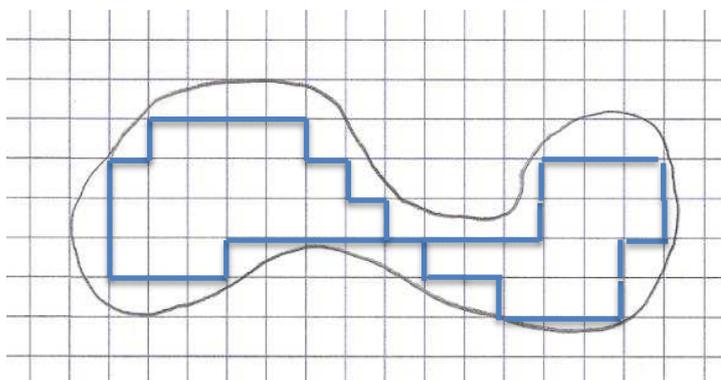


Réponse :

On peut dessiner une figure (en rouge) qui contient la première figure. L'aire de la figure rouge est supérieure à l'aire de la figure noire.



On peut dessiner une figure (en bleu) qui est incluse dans la première figure. L'aire de la figure bleue est inférieure à l'aire de la figure noire.



Aire de la figure rouge : 84 carreaux

Aire de la figure bleue : 34 carreaux

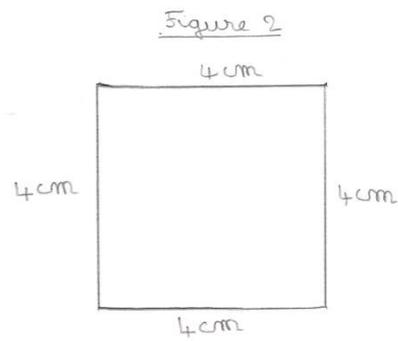
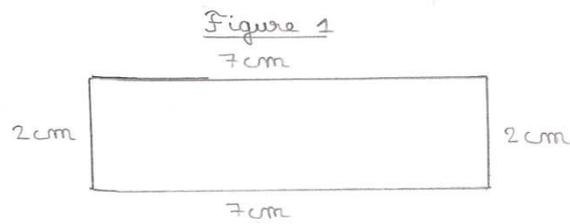
**34 carreaux < Aire de la figure noire < 84 carreaux**

## Exercices séance 4 (groupe 2)

### Exercice 1 :

Calculez le périmètre des deux figures.

Quelle figure a le périmètre le plus grand ?

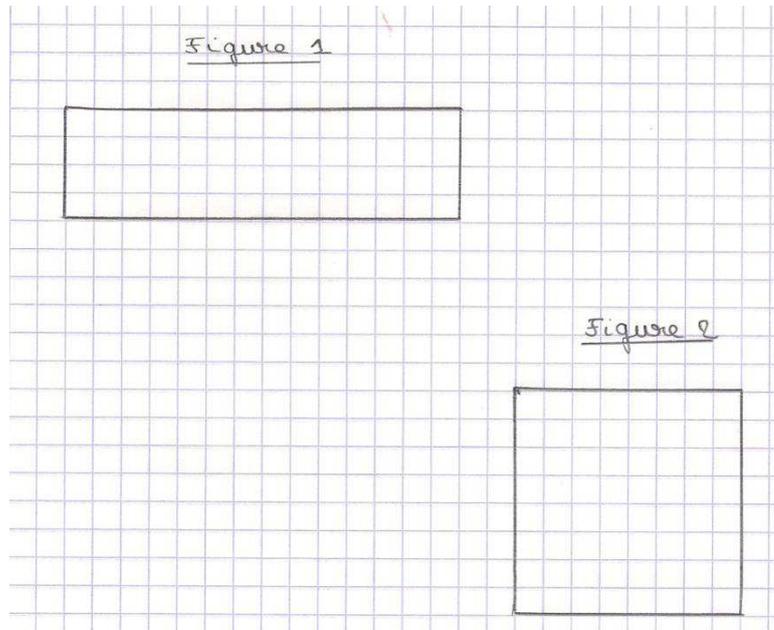


Réponse :

Exercice 2 :

Donnez les aires des deux figures.

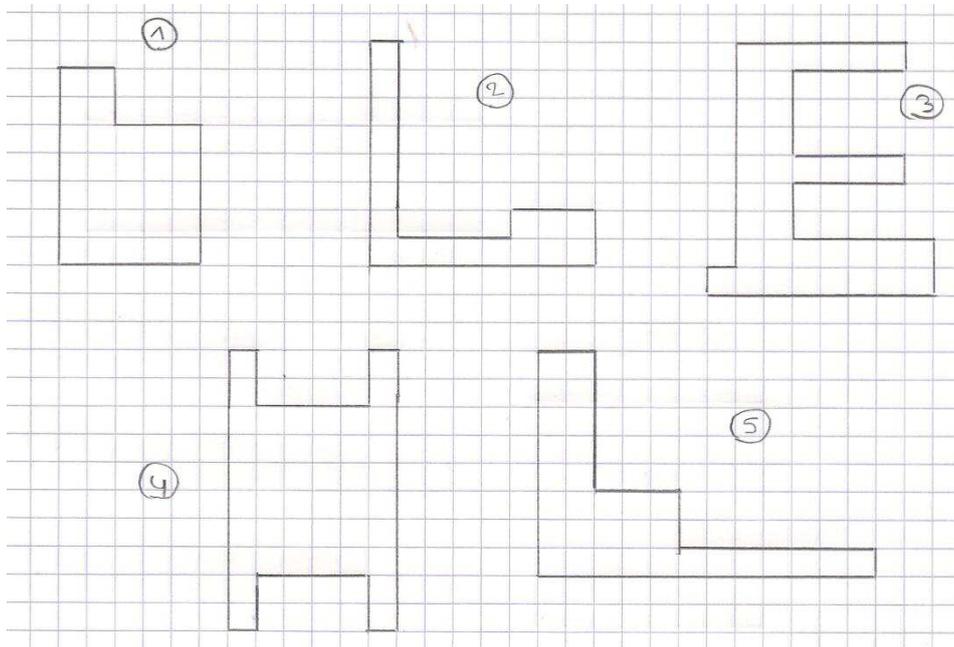
Quelle figure a l'aire la plus grande ?



Réponse :

Exercice 3 :

Donnez l'aire de chaque figure, puis rangez-les par ordre décroissant.



Réponse :

Aire de la figure 1 : \_\_\_\_\_

Aire de la figure 2 : \_\_\_\_\_

Aire de la figure 3 : \_\_\_\_\_

Aire de la figure 4 : \_\_\_\_\_

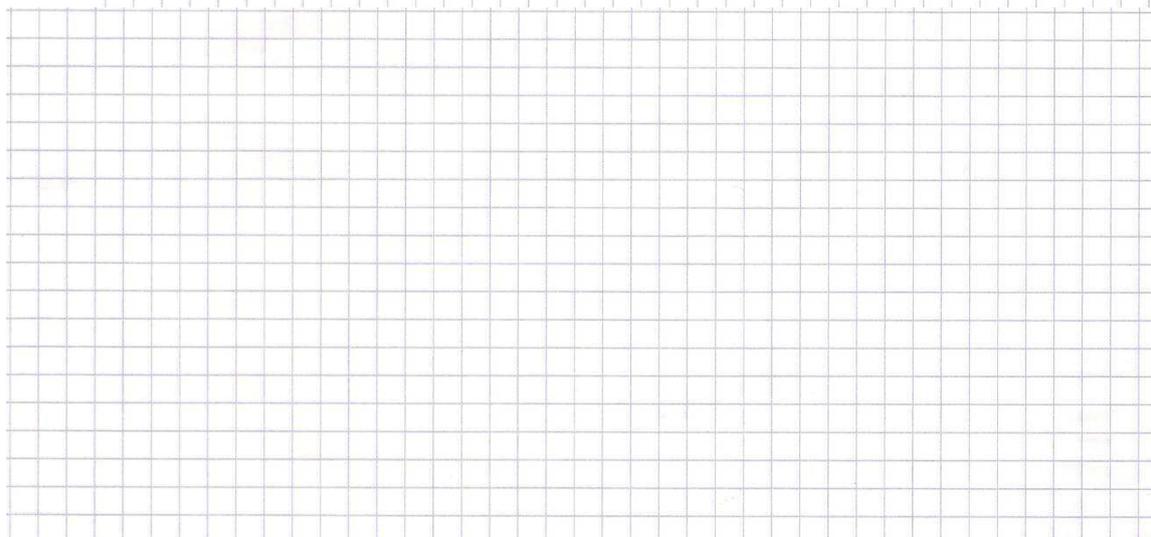
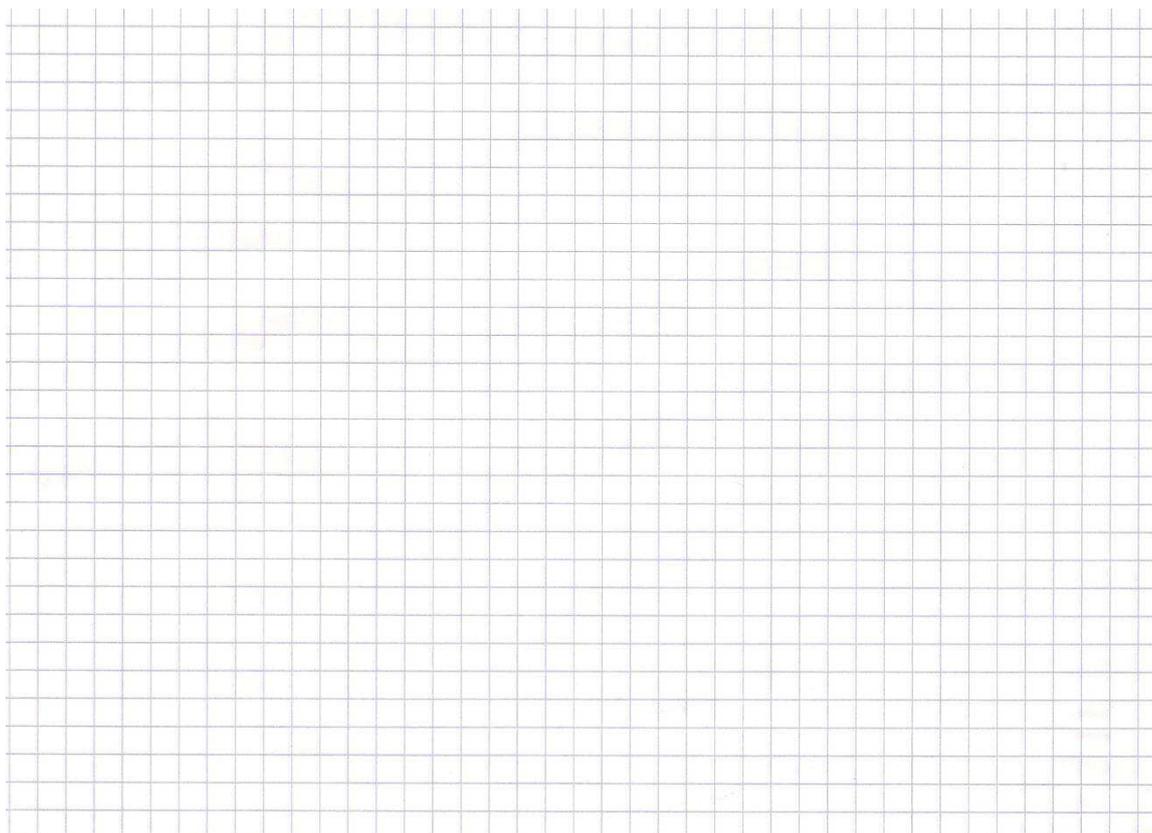
Aire de la figure 5 : \_\_\_\_\_

Rangement par ordre décroissant :

Exercice 4 :

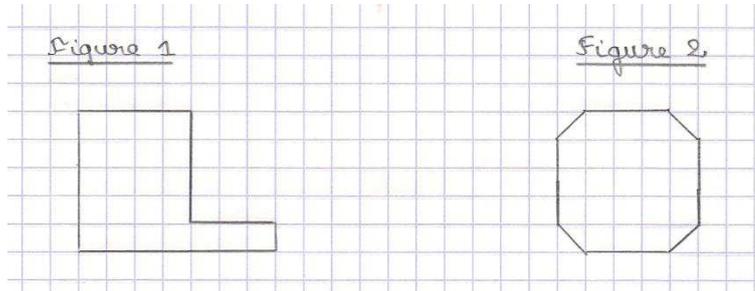
Dessinez sur le quadrillage :

- Une figure rouge d'aire 16 carreaux,
- Une figure bleue d'aire 21 carreaux,
- Une figure verte d'aire 28 carreaux.



Exercice 5 :

Quelle figure a l'aire la plus grande ?



## Exercices séance 4 (groupe 3)

Exercice 1 (comparaison par découpage)

Figure 1:

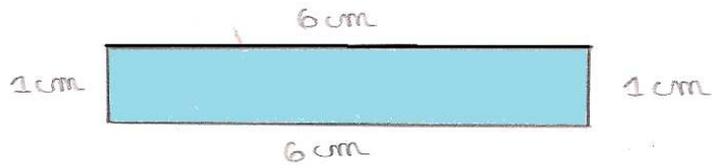
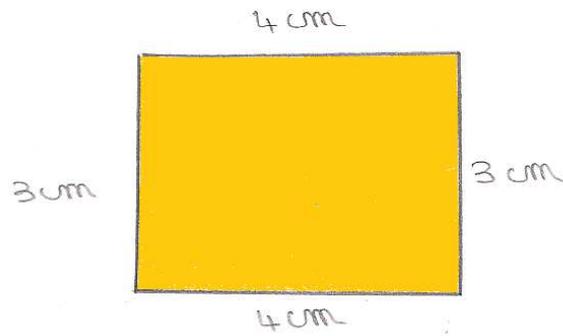
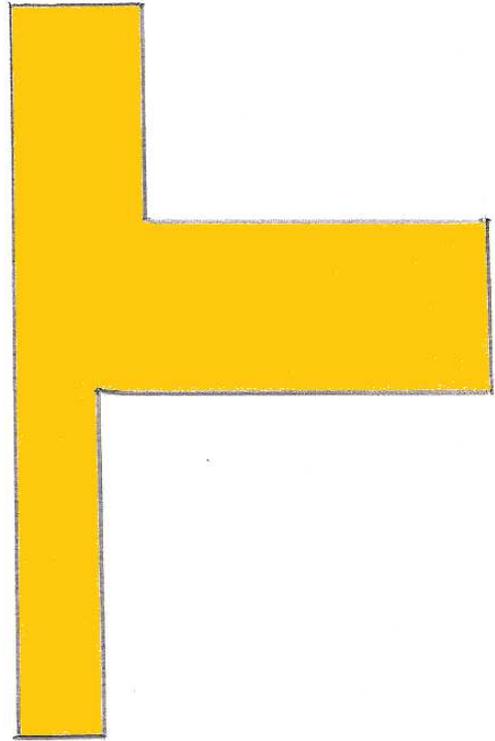
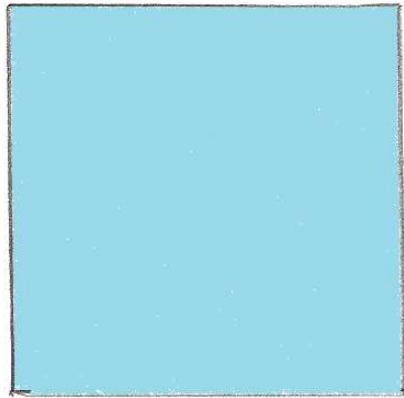


Figure 2:

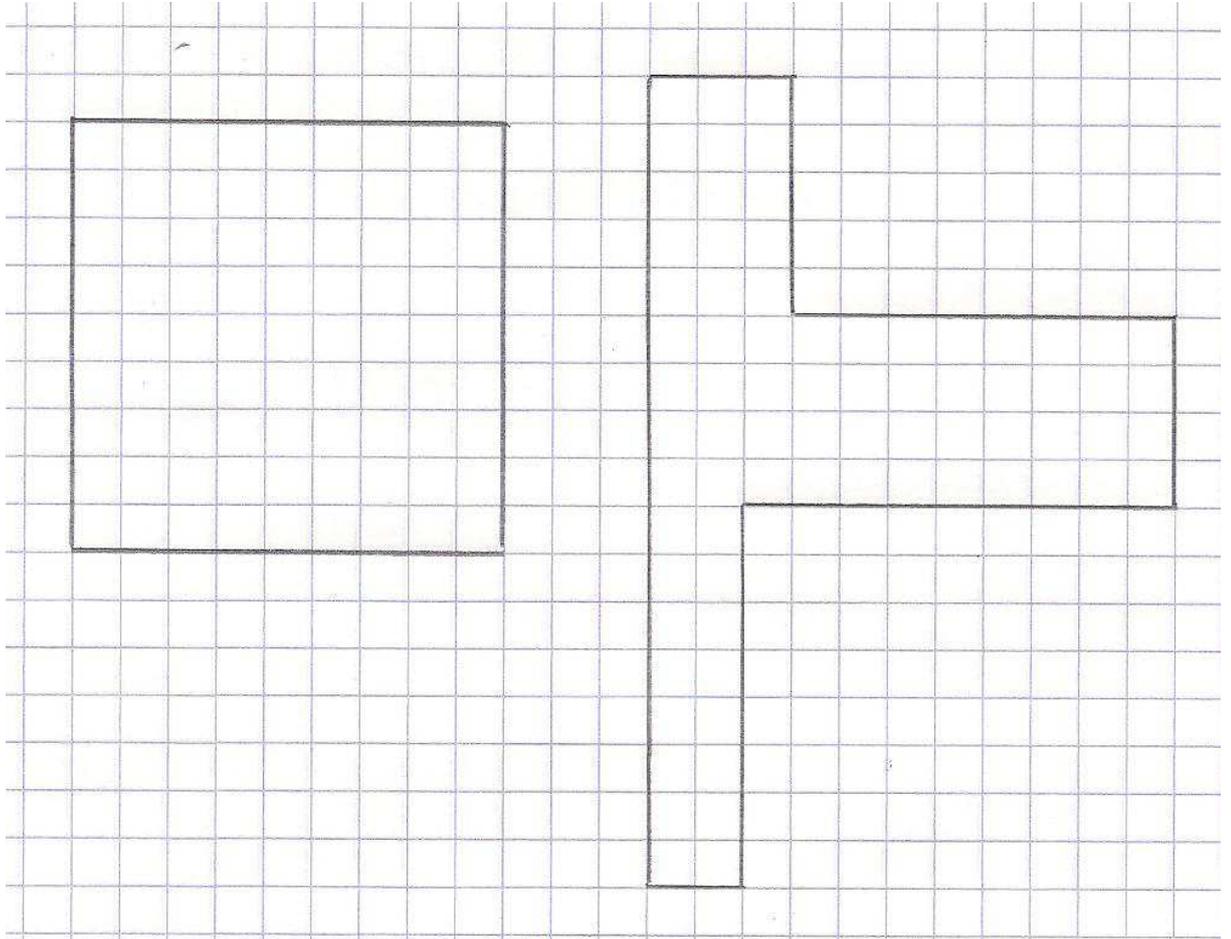


Exercice 2 (comparaison par découpage)



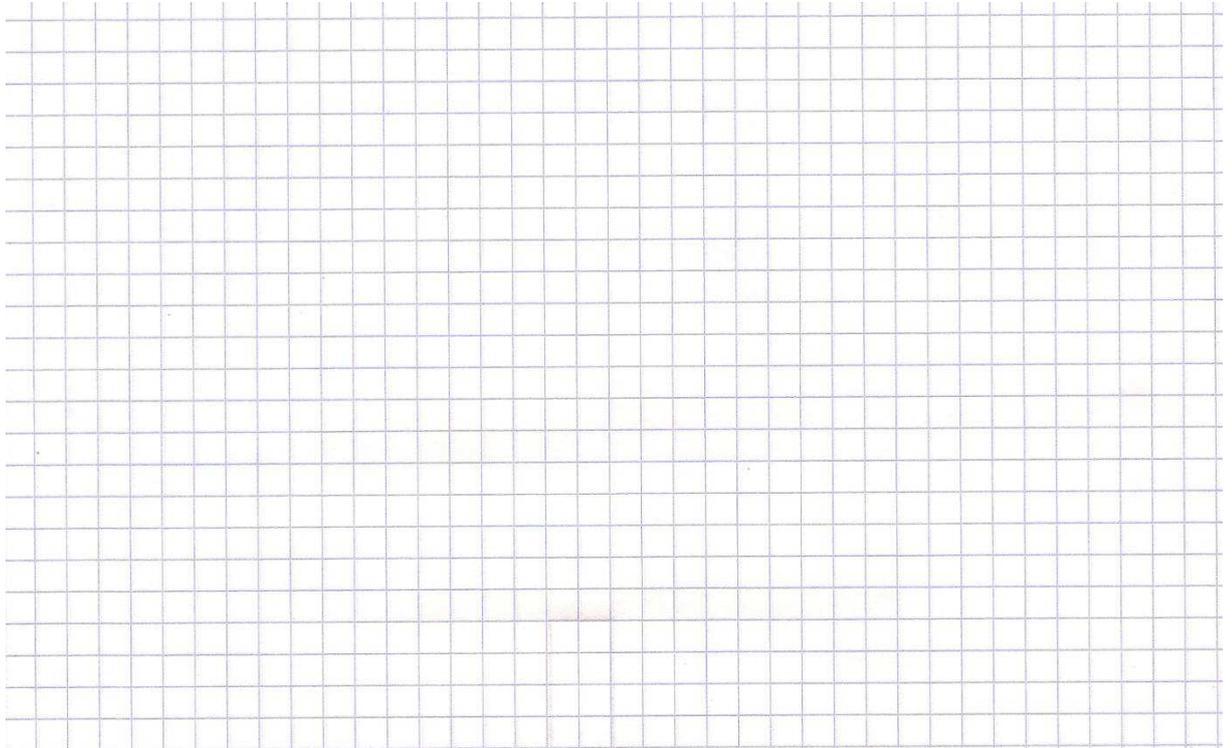
Exercice 3

Quelle figure a la plus grande aire ?



Exercice 4

Dessiner des figures d'aire : 15 carreaux, 18 carreaux et 22 carreaux.



# Résumé

---

Ce mémoire de recherche en mathématiques, s'oriente vers l'introduction de la notion d'aire, et montre, entre autres, comment ne pas confondre cette grandeur avec le périmètre.

Une étude pratique, filmée dans une classe de CM1, puis analysée à l'aide de compléments théoriques, a permis de répondre à ces questions.

Vous pourrez ainsi lire une première partie théorique, qui fixe les différentes notions primordiales, puis une seconde partie plus complexe. Dans un premier temps, vous aurez une présentation détaillée de la situation initialement prévue. Par la suite, vous lirez l'analyse a priori des différentes séances. Pour finir, vous pourrez constater, dans l'analyse à posteriori, les changements opérés et les difficultés constatées.

Véritable travail dans la durée, ce mémoire de recherche témoigne des difficultés et procédures des élèves, ainsi que des variables didactiques qu'il est possible d'employer.

Mots clés : mathématiques, aire, introduction, périmètre, comparaison directe, comparaison indirecte, grandeur, mesure, pavage, découpage, estimation, rangement.