



HAL
open science

L'axiomatique dans les preuves d'existence d'un équilibre général, chez Arrow et Debreu

Aurélien Goutsmedt

► **To cite this version:**

Aurélien Goutsmedt. L'axiomatique dans les preuves d'existence d'un équilibre général, chez Arrow et Debreu. Economies et finances. 2013. dumas-00909894

HAL Id: dumas-00909894

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00909894>

Submitted on 27 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris 1

UFR 02 Sciences Economiques

Master THEME (Théorie, Histoire et Méthodes de l'Economie

Spécialité « Economie et Sciences humaines : Epistémologie, Méthodes et Théories »

L'axiomatique dans les preuves d'existence d'un équilibre général, chez Arrow et Debreu

Présenté et soutenu par :

Aurélien Goutsmedt

Juin 2013

Directeur de Recherche :

Jérôme Lallement

L'université de Paris 1 Panthéon Sorbonne n'entend donner aucune approbation, ni désapprobation aux opinions émises dans ce mémoire ; elles doivent être considérées comme propre à leur auteur.

**L'axiomatique dans les preuves
d'existence d'un équilibre général,
chez Arrow et Debreu**

Table des matières

Introduction générale.....	6
Qu'est-ce que l'axiomatique ?.....	10
Quel cadre épistémologique pour étudier les relations entre économie et mathématiques ?	11
<i>L'étude des critères de justification</i>	11
<i>Image du savoir et corps du savoir</i>	12
<i>L'apport du concept de Style de pensée</i>	15
Objet d'études et problématique.....	17
Plan et méthodes.....	18
Chapitre I : Perspectives épistémologiques de l'axiomatisation	20
I – Genèse et développement de l'axiomatique.....	20
A) <i>La rupture d'avec l'axiomatique des Anciens</i>	21
B) <i>Le développement de l'axiomatique des Modernes</i>	23
C) <i>Du programme de recherche Hilbertien au théorème d'incomplétude de Gödel</i>	26
II – L'axiomatisation des mathématiques : l'émergence d'une nouvelle épistémologie.....	31
A) <i>La distinction entre contenu logique et contenu interprétatif</i>	31
B) <i>Le progrès dans une théorie axiomatisée</i>	33
C) <i>L'interprétation d'un système axiomatique</i>	34
Conclusion.....	35
Chapitre II : Le développement de la méthode axiomatique, en économie.....	38
I – Le rôle de Vienne, dans les années 1930, dans le développement de la méthode axiomatique en économie	38
A) <i>Le colloque mathématique de Karl Menger</i>	39
B) <i>Vers le développement de la théorie des jeux</i>	45
II – La « révolution formaliste » aux Etats-Unis à partir des années 1940	50
A) <i>Un mouvement général vers une plus grande « rigueur » logique et mathématique ?</i>	51
B) <i>La Cowles Commission, vecteur du changement</i>	53
III – Les caractéristiques de la méthode axiomatique en économie	57
A) <i>Quel héritage de Hilbert ?</i>	57
B) <i>Les axiomatiques ensemblistes de la science économique</i>	59
C) <i>La cohabitation de deux points de vue divergents ?</i>	61
Conclusion.....	64
Chapitre III : Arrow-Debreu (1954), un article révélateur	66

I – Genèse et description de l'article de 1954	67
A) <i>Arrow et Debreu : deux chemins convergents vers leur collaboration</i>	67
B) <i>Présentation de l'article de 1954</i>	72
II – Les questions épistémologiques soulevées par l'axiomatisation	82
A) <i>Un modèle avec peu de débouchés interprétatifs</i>	82
B) <i>L'article de 1954 : l'expression de premières divergences entre les deux auteurs</i>	87
C) <i>La publication de l'article dans la revue <i>Econometrica</i></i>	91
Conclusion : Pour une étude comparée de l'axiomatique chez Arrow et Debreu	94
Conclusion Générale	99
Annexe : récapitulatif des hypothèses et des interprétations du modèle Arrow-Debreu.....	103
Bibliographie	105

Introduction générale

Dans un colloque organisé à Paris en octobre 1992, sous le thème « L'économie devient-elle une science dure ? », Edmond Malinvaud apporte sa propre réponse : « L'économie s'est rapprochée des sciences dures » (d'Autume et Cartelier, 1995). Après avoir tenté de démontrer son assertion dans le cas de la macroéconomie, il nous livre une digression : « Pour beaucoup d'économistes l'objet principal de la théorie est ailleurs. Il s'agit surtout de comprendre comment fonctionnent les économies de marché où aucune coordination institutionnelle consciente n'assure la cohérence entre les décisions individuelles. Dès lors le cœur de la science économique réside dans la théorie des prix et de l'allocation des ressources, plus précisément même dans la théorie de l'équilibre général concurrentiel. Pour ces économistes les recherches les plus importantes consistent à rendre cette théorie plus rigoureuse et mieux connue dans tous ses aspects et toutes ses conséquences, à fouiller les statistiques et à y découvrir les permanences caractérisant les phénomènes globaux. Si on polarise ainsi l'attention sur la théorie microéconomique, alors on s'aperçoit que la démarche de la recherche diffère fondamentalement de celle adoptée dans les sciences de la nature, malgré la similitude superficielle que le recours aux modélisations mathématiques pourrait suggérer. Les économistes partent de quelques idées simples et solides sur les comportements et sur les marchés, idées qu'ils tirent de l'expérience quotidienne, voire de l'introspection. Ils formalisent ces idées par des hypothèses dont ils admettent le caractère approximatif (donc un peu inexact). Puis ils en déduisent les conséquences logiques afin d'aboutir à des résultats significatifs. Pour juger de la valeur d'une théorie ainsi construite, ils opèrent selon des critères tout autres que ceux employés dans les sciences expérimentales. En particulier le système d'hypothèses doit avoir non seulement un certain réalisme mais aussi la vertu pragmatique d'ouvrir l'accès à une théorie rigoureuse et pertinente » (Malinvaud, 1995, p.14).

Malinvaud accorde ainsi à la théorie de l'équilibre général (TEG) une place particulière. La manière dont celle-ci s'est construite lui donne un statut épistémologique à part. Les rapports à la réalité et à la vérité prennent une dimension particulière en son sein. Travailler sur la TEG implique de travailler sur une théorie abstraite, accordant une place primordiale à la question de la rigueur logique, ce qui pose la question de l'objectif d'une telle théorie, car pour quiconque adopte une vision classique de ce que doit être une science positive, l'étude de la TEG peut sembler déroutante.

Un tel trouble peut se trouver rapidement renforcé par la place qu'y prennent les mathématiques. En effet, la TEG semble avoir été l'un des vecteurs dominants de la mathématisation de l'économie. C'est sans doute pour cette raison que les économistes développant la TEG se sont vus régulièrement rejetés à la marge par leurs pairs

contemporains¹. Bien sûr cet isolement théorique ne dura que jusqu'à la moitié du XX^e siècle. En effet, les travaux de Kenneth Arrow et Gérard Debreu seront récompensés par l'obtention du prix Nobel. L'américain le reçut en 1972 (avec John Hicks) et le français en 1983.

Les preuves de l'existence d'un équilibre général² (telles que formulées par Arrow et Debreu [1954] ou Debreu [1959]) sont d'ailleurs considérées comme des résultats parmi les plus solides de la microéconomie standard : on considère la preuve de l'existence d'un équilibre général comme acquise. Bien entendu, la TEG et plus particulièrement la problématique de l'existence d'un tel équilibre sont bien plus anciennes. Il faut en effet remonter près d'un siècle auparavant, à la publication des *Eléments d'économie politique pure* de Walras (1874), pour étudier leur genèse. Cette histoire de la TEG, richement documentée³, nous offre un angle d'attaque de premier choix pour étudier l'évolution des outils de la discipline économique (ou du moins d'une partie de cette discipline) et ses relations avec les mathématiques.

Le point de départ de Walras est le fait de la valeur d'échange. Il part du prix d'un hectolitre de blé et constate que ce prix est indépendant de la volonté directe des agents. Il s'agit dès lors d'un fait naturel⁴. Ce fait de la valeur est par essence quantitatif et c'est ce qui justifie pour Walras l'utilisation des mathématiques, dans l'optique de bâtir une théorie de la valeur (qui constitue le cœur de ce qu'il nomme « l'économie pure »). Cette affirmation est originale pour l'époque. Trop sans doute, au vu des réactions engendrées par les travaux de Walras, les économistes français lui rétorquant l'impossibilité de mettre la liberté humaine en équations. Du point de vue de la discipline économique, à la fin du XIX^e siècle, l'ouvrage de Walras est relativement élaboré mathématiquement. Il pense prouver l'existence d'un équilibre général par l'égalité entre le nombre d'équations et le nombre d'inconnues du modèle. Cette démonstration s'avérera insuffisante par la suite et c'est en partie pour cette raison que le problème sera repris, un demi-siècle plus tard, par des mathématiciens. Cependant, pour les standards de l'époque, cette égalité représentait une « preuve de la cohérence du mécanisme de la formation des prix sur les marchés de concurrence pure et

¹ L'exemple le plus connu et le plus révélateur étant bien entendu le peu de succès que connurent les *Eléments d'économie politique pure* (1874), dont leur auteur, Léon Walras, ne fut considéré comme l'un des économistes les plus importants du XIX^e siècle qu'à titre posthume. On peut relever également l'attitude de Marshall (dont l'influence fut grande sur toute la discipline, durant la première moitié du XX^e siècle) rejetant ses développements mathématiques (bien limités du point de vue de l'économiste d'aujourd'hui) en appendice.

² De manière rétrospective, on peut aujourd'hui dégager quatre grandes questions au sein de la théorie de l'équilibre général : celle de l'existence d'un équilibre général, celle de l'optimalité de cet équilibre (c'est-à-dire du lien entre équilibre général et optimum de Pareto, ou plus globalement, de l'efficacité d'un tel équilibre), celle de l'unicité de l'équilibre et enfin celle de la stabilité (dans une situation de déséquilibre, existe-t-il un mécanisme économique qui nous conduise automatiquement vers l'équilibre général ?).

³ On peut citer les travaux de Weintraub (1983, 1985, 2002), Ingrao et Israel (1987), Zylberberg (2000), Cot et Lallement (2006) mais aussi ceux des participants mêmes de cette histoire, proposant eux-aussi une certaine historiographie : Arrow et Hahn (1971), Arrow (1974), Debreu (1974).

⁴ Pour expliquer sa méthodologie, Walras part d'une ontologie qui divise les faits en deux catégories : tout d'abord les faits naturels, qui trouvent leurs causes dans des phénomènes indépendants de l'activité humaine ; puis les faits humanitaires dont l'origine se situe dans la volonté de l'homme. Cette deuxième catégorie se subdivise en deux, également, suivant que l'on fait face à des faits concernant l'interaction entre la volonté de l'homme et les choses, ou bien concernant les rapports entre les hommes eux-mêmes.

parfaite » (Zylberberg, 2000, p.171). Cette manière d'envisager l'existence de solutions à un système d'équations (dont on sait aujourd'hui qu'elle est inappropriée puisque l'égalité entre le nombre d'équations et le nombre d'inconnues est une condition qui n'est ni nécessaire, ni suffisante, pour garantir l'existence de solutions) est d'ailleurs restée dominante pendant longtemps en économie. On la retrouve encore dans des manuels de microéconomie, dans les années 1940 (Weintraub et Gayer, 2001).

A Lausanne, Vilfredo Pareto prend la succession de Léon Walras en 1893, enseignant son économie politique pure. Il y apporte cependant de nombreuses modifications. Mais ce qui caractérise le plus leurs différences est leur méthodologie respective. Même s'il en use de manière importante, Pareto ne semble pas accorder la même puissance aux mathématiques que Walras. Il revendique plutôt une méthode logico-expérimentale, donnant une place plus importante à l'empirisme, tentant de complexifier peu à peu le modèle et de réduire son caractère abstrait.

Le véritable tournant mathématique est pris avec la redécouverte, à Vienne, majoritairement par des mathématiciens, du modèle d'équilibre général walrassien. Dans les années 1930, les travaux entrepris au sein du colloque mathématique de Karl Menger (le fils de l'économiste Carl Menger) n'ont à cette époque encore aucun impact sur la discipline économique, qui demeure encore en grande partie « marshallienne » et peu « mathématisé » au regard des canons de rigueur viennois. Mais il n'empêche qu'il s'agit d'une étape décisive pour la résolution du problème de l'existence, telle qu'elle se fera dans les années 1950. En effet de nombreux outils mathématiques y sont intégrés. Dans son article de 1937, Von Neumann applique pour la première fois à un objet économique (un modèle de croissance) le théorème du point fixe de Brouwer⁵. Bruna Ingrao et Giorgio Israel (1987) nous expliquent que « le centre scientifique qui l'a le plus influencé dans ses questionnements constants était Göttingen, où il fut profondément impressionné par l'enseignement et les conceptions axiomatiques de David Hilbert, dont il devint un fervent adepte » (p.184). L'influence de David Hilbert sur l'économie est ainsi palpable à travers le rôle que joua Von Neumann (Punzo, 1991). Plus globalement, Hilbert influença profondément les mathématiques du début du XXème siècle et il est logique que cette influence se soit étendue jusqu'à Vienne⁶.

On la retrouve d'ailleurs chez Wald dont les travaux marquent une première étape dans la voie d'une axiomatisation⁷ du modèle d'équilibre général. Ils présentent en effet trois caractéristiques majeures : « 1° Wald montre sa volonté de définir très soigneusement les hypothèses de telle sorte que la démonstration mathématique soit parfaitement rigoureuse sur

⁵ Chronologiquement, il est important de noter que la démonstration de von Neumann fut présentée bien avant, à Princeton, en 1931. En 1928, von Neumann avait déjà publié un article utilisant le théorème de Brouwer, dans le but de prouver l'existence d'un minimax dans un jeu à somme nulle, à deux joueurs, ce qui constituera un résultat fondamental pour la théorie des jeux.

⁶ L'impact d'Hilbert sur les mathématiques ne porta pas tant sur les résultats et les théorèmes des mathématiques que sur sa philosophie et son épistémologie. Pour anticiper sur un concept que nous utiliserons plus loin, Hilbert influença l'image du savoir des mathématiques, plus que le corps du savoir (Corry, 1989).

⁷ Nous définirons la méthode axiomatique un peu plus bas.

la base des hypothèses initiales (...). 2° Wald recherche les hypothèses mathématiques minimales pour que les systèmes d'équations (mais aussi d'inégalités) aient une solution et que cette solution soit unique (...). 3° Wald conserve toujours à l'esprit que ses hypothèses et ses résultats mathématiques doivent être logiquement rigoureux mais qu'ils doivent aussi avoir une signification économique » (Cot et Lallement, 2006, p.1719). L'usage de la méthode axiomatique tend donc à bouleverser la pratique de l'économie, dans le but d'obtenir une plus grande rigueur logique. Cet usage se généralisera peu à peu en économie, à partir de la fin des années 1940, dans les domaines de la théorie des jeux, de la théorie de la décision, de l'économie normative (Mongin, 2003). Depuis Walras, la place des mathématiques dans l'économie a ainsi considérablement grandit, tant par l'usage d'outils mathématiques que par la pratique d'un raisonnement mathématique, devenant un gage de scientificité.

A ce moment de l'histoire, que « manque-t-il » à Arrow et Debreu pour produire leur résultat ? A en croire l'historiographie dominante (en grande partie déterminée par l'historiographie produite par les deux auteurs eux-mêmes), deux articles vont jouer un rôle déterminant. Celui de Kakutani, tout d'abord, en 1941, généralisant le théorème de Brouwer à des correspondances (le premier théorème du point fixe ne s'appliquait qu'à des fonctions). Celui de Nash (1950) ensuite, généralisant le minimax à un jeu à n-joueurs. En effet, dans l'article de 1954, le problème de l'équilibre concurrentiel est rapporté à celui d'un équilibre d'un jeu non-coopératif de manière à utiliser le résultat de Nash.

Cette histoire de la place des mathématiques dans la TEG conduit à se poser des questions de première importance pour l'épistémologie de la discipline économique. En effet, il s'agit d'un angle d'attaque porteur du point de vue heuristique, pour s'interroger sur l'impact des techniques et des outils mathématiques sur les résultats produits. Tout d'abord, cela implique de clarifier ce dont on parle, quand on utilise l'expression de mathématisation de l'économie. Evoque-t-on l'usage d'un raisonnement et d'une méthode issus des mathématiques ? Dans ce cas, on pourrait parler d'axiomatisation de l'économie. Ou bien évoque-t-on l'usage de théorèmes et de résultats mathématiques ? Il s'agit là d'une démarche différente, quoique liée à la première. Dans ce cas, on pourrait plutôt parler de formalisation de l'économie⁸.

Notre objet concernera plutôt la première forme de mathématisation. L'usage de la méthode axiomatique bouscule la manière de penser la théorie économique. Présenter son impact sur notre discipline permet, selon nous, de remettre en cause l'idée de neutralité de l'application des mathématiques, qui seraient une simple boîte à outil, dans laquelle l'économiste n'aurait qu'à piocher pour produire des résultats qui ne seraient, en aucune manière, influencés par l'usage de tels outils. Nous pensons que dans le cas de l'axiomatique, l'importation d'une telle méthode conduit nécessairement à importer également tout un

⁸ Nous reviendrons sur ce point, plus précisément, dans le second chapitre. La formalisation étant ici entendue au sens que lui donne, par exemple, Mongin (2003).

ensemble de problèmes épistémologiques qui vont de pairs. La rencontre avec une discipline ayant sa propre histoire, ses propres problèmes épistémologiques et philosophiques, conduit à redessiner un ensemble de questionnements sur la méthodologie économique.

Mais avant d'aller plus loin dans la présentation de notre objet, il nous semble important de définir, de manière succincte dans un premier temps, ce qu'est la méthode axiomatique, puis de présenter un ensemble de concepts pour traiter notre objet.

Qu'est-ce que l'axiomatique ?

Robert Nadeau (1999) nous donne une définition standard : la *méthode axiomatique* est une méthode qui consiste à « dériver, grâce aux moyens de la logique formelle, des vérités (les théorèmes) relatives à l'objet sous investigation à partir de termes primitifs et d'une liste d'axiomes. On associe habituellement la méthode axiomatique à la précision, à la rigueur, à la généralité et à la fécondité » (p.405). Il s'agit donc tout d'abord de fixer un ensemble de termes primitifs⁹. On définit ensuite une liste d'axiomes. Cette liste doit répondre à certaines conditions de l'*axiomatisation* : « On dit d'un système théorique qu'il est axiomatisé s'il répond aux conditions suivantes : le système d'axiomes est exempt de contradictions ; aucun axiome ne peut être déduit d'autres axiomes du système ; les axiomes sont nécessaires et suffisants à la déduction de tous les énoncés appartenant au système » (Nadeau, 1999, p.32). La première condition de l'axiomatisation constitue le cœur du projet axiomatique : construire des systèmes cohérents, c'est-à-dire qui écartent toute contradiction. A partir de cette liste d'axiomes, on déduit logiquement des théorèmes, dont on doit fournir la preuve.

La méthode axiomatique est caractérisée ici par quatre points forts : précision, rigueur, généralité et fécondité. On pourrait lui en associer deux supplémentaires : l'élégance et la clarté. L'axiomatisation, en listant tous les axiomes intervenant dans la déduction de théorèmes et en définissant tous les termes de la théorie, permet un exposé clair et précis. La déduction logique de théorèmes, à partir d'hypothèses clairement exposées donne au déroulement du raisonnement une certaine élégance. Mais l'exposition claire des termes primitifs et des axiomes est également nécessaire pour vérifier la validité logique du raisonnement. D'où le caractère rigoureux de la méthode axiomatique. La recherche de la plus grande généralité¹⁰ représente l'idéal de l'axiomaticien : on essaye d'obtenir des théorèmes plus généraux en affaiblissant ou en supprimant des axiomes. Enfin, la méthode axiomatique peut être considérée comme féconde car elle permet de bâtir un programme de recherche : on

⁹ « Terme primitif : 1) dans les sciences formelles, terme ne recevant aucune définition à l'intérieur d'un système (formel) quelconque et servant à définir les autres termes qui y sont introduits » (Nadeau, 1999, p.692).

¹⁰ On entend ici la recherche d'une plus grande généralité par la recherche de l'affaiblissement des contraintes logiques et mathématiques qui pèsent sur un système axiomatisé. Tout axiome énoncé instaure en effet une contrainte sur le raisonnement. Si dans pour démontrer un théorème, on réussit à supprimer un axiome qui auparavant était nécessaire dans la démonstration, alors on pourra dire que l'on a rendu le théorème plus général.

travaille sur la définition des termes primitifs et sur les axiomes pour produire plus de théorèmes. Une théorie fondée sur la méthode axiomatique progresse par affaiblissement des hypothèses, généralisation des théorèmes et simplification de la preuve¹¹. Il est intéressant d'étudier, dès lors, comment cette logique de progression peut se retrouver dans une science positive, telle que l'économie.

Quel cadre épistémologique pour étudier les relations entre économie et mathématiques ?

Comme nous l'avons évoqué plus haut, l'idée récurrente à laquelle on se heurte, quand on traite de l'usage des mathématiques dans une discipline scientifique (que par contraste avec les mathématiques, le chercheur appellera généralement « positive » voire « empirique ») est que l'on pense appliquer un simple outil pour étudier un objet particulier. Cette vision qui assigne aux mathématiques un attribut de neutralité nous semble erronée. Utiliser un outil mathématique implique l'importation de tout un bagage épistémologique et philosophique propre à l'univers initial de cet outil mathématique. Ainsi, l'usage de la méthode axiomatique en économie conduit la discipline économique à importer, implicitement ou explicitement, un ensemble de problématiques propre à l'épistémologie des mathématiques. Mais ces problématiques ne peuvent demeurer dans l'état dans lequel elles se trouvent, une fois introduites dans une discipline, telle que l'économie, qui a sa propre ontologie (entendue comme un ensemble d'objets à étudier), ses propres méthodes et sa propre histoire. Elles se trouvent redessinées, transformées, par cette rencontre. Il semble dès lors nécessaire de mobiliser un certain nombre de concepts épistémologiques pour tenter de décrire cette rencontre entre l'économie et les mathématiques, et plus précisément pour esquisser l'impact de l'intégration de la méthode axiomatique, après la seconde guerre mondiale, dans le développement de la théorie de l'équilibre général.

L'étude des critères de justification

En 1938, dans *Experience and Prediction*, Hans Reichenbach (philosophe des sciences, proche du Cercle de Vienne et partisan du positivisme logique) développe une distinction entre *contexte de la découverte* et *contexte de la justification*. Cette vieille distinction deviendra un élément fondamental du positivisme logique et plus globalement de la philosophie classique des sciences. Popper la reprendra également à son compte. Ce concept vise à séparer les conditions de découverte de connaissances scientifiques de la

¹¹ Il est possible de rendre une preuve plus simple en diminuant le nombre d'axiomes entrant en jeu, ou en utilisant de nouveaux outils pour formuler la preuve plus directement.

manière dont on formule ces connaissances, dont on les défend et les justifie. Le *contexte de la découverte* relèverait du domaine de l'histoire, de la sociologie. Celui de la *justification* de la philosophie des sciences, qui adopterait à son sujet une visée normative. La question centrale serait alors : qu'est-ce qui fait d'un résultat scientifique un résultat valide ?

Cependant, la remise en cause de la conception classique de la philosophie des sciences¹² conduisit à remettre également en cause cette distinction, et ce, de deux manières distinctes. Tout d'abord, à travers l'opposition au cantonnement de la découverte dans la sphère de l'irrationnel, où celle-ci serait le fruit de l'intuition du chercheur ou du hasard. Au contraire, il existerait une véritable logique de la découverte, fondée sur des processus parfaitement rationnels, élaborés méthodologiquement. La seconde critique porte sur la distinction elle-même : la justification d'un résultat scientifique est-elle totalement indépendante du contexte dans lequel ce résultat a émergé ? On peut répondre à cette question par la négative, en expliquant que pour comprendre un résultat scientifique, il faut comprendre dans quelle conception du monde ce résultat s'inscrit, même si cette assertion est plus problématique, pour une discipline comme les mathématiques.. L'*idéologie* (pour reprendre les termes de Canguilhem [1981]) ou l'*épistémè* (pour reprendre ceux de Foucault [1966]) déterminent en partie les connaissances produites en leur sein.

Nous sommes en accord avec ce point de vue et la façon dont nous traiterons notre objet (la TEG) s'inscrit dans cette perspective. Mais ce qui nous intéresse ici n'est pas de savoir si cette distinction est juste ou erronée. Ce qui nous intéresse est plutôt la place qu'elle occupe dans les catégories de pensée des chercheurs. Les scientifiques maintiennent cette séparation entre *justification* et *découverte*. Quelle que soit la démarche conduisant à la découverte d'un résultat, ce dernier est présenté d'une manière formelle et impersonnelle, respectant un certain nombre de règles, et doit répondre à un certain nombre de critères afin d'être jugé valide.

Il est intéressant dès lors de voir la forme que prend ce *contexte de la justification* suivant les disciplines et les époques. Notre hypothèse est que l'intégration de la méthode axiomatique en économie dessine une nouvelle *grammaire de la justification*, c'est-à-dire une nouvelle façon d'évaluer les théories, pour une partie de la discipline économique (l'économie mathématique). Afin de préciser ce que peuvent être ces *critères de la justification*, il est utile d'introduire le concept d'*image du savoir* de Leo Corry.

Image du savoir et corps du savoir

Leo Corry est un historien des mathématiques, professeur à l'université de Tel-Aviv. Il tente de développer un nouveau cadre d'analyse de l'histoire des mathématiques, rejetant l'approche « fondationaliste » (qui considère que les mathématiques produisent un savoir

¹² Par philosophie classique des sciences (on parle souvent de « Received View »), nous entendons le positivisme logique du Cercle de Vienne mais aussi la philosophie des sciences de Popper.

certain, atemporel), intégrant une dimension socio-historique à l'étude de l'évolution de la discipline. Ce cadre d'analyse s'articule autour de deux concepts clés : le *corps du savoir* et l'*image du savoir* (*body of knowledge and image of knowledge*). Cette distinction est désormais bien connue dans les travaux de méthodologie économique, puisqu'on la retrouve sous la plume de Weintraub (2002) et de Giocoli (2005b).

En amont de cette conception, il dégage deux types de questions, présents dans chaque discipline scientifique : « le premier type de questions concerne l'objet de la discipline. Le second type de questions concerne la discipline en tant que discipline, soit des questions de second-ordre. C'est le but de la discipline de répondre aux questions du premier type, mais généralement pas de répondre aux questions du second type. Ces questions de second-ordre concernent la méthodologie, la philosophie, l'histoire ou la sociologie de la discipline et sont en fait traitées par des disciplines auxiliaires »¹³ (Corry, 1989, p.411).

Ces deux types de questions se rapportent à deux strates différentes de la connaissance dans une discipline. Le corps du savoir correspond aux connaissances produites au sein de la discipline ; l'image du savoir désigne les questions relatives au savoir lui-même. « Le corps du savoir inclut les théories, les « faits », les méthodes et les problèmes ouverts. Les images du savoir servent de principes directeurs ou de sélection ; elles posent et résolvent des questions qui sont soulevées par le corps du savoir, mais qui ne font pas partie, ou ne peuvent pas être traitées à l'intérieur du corps du savoir lui-même. Par exemple, les images du savoir aident à résoudre des questions telles que celles qui suivent : parmi les problèmes en question de la discipline, lesquels demandent l'attention la plus urgente ? Comment discrimine-t-on entre des théories concurrentes ? Qu'est-ce qui doit être considéré comme une expérimentation pertinente ? Quelles procédures, individus ou institutions sont investis de l'autorité pour arbitrer les désaccords au sein de la discipline ? Qu'est-ce qui doit être considéré comme la méthodologie légitime ? » (p.411-412). Pour préciser ce que contient l'image du savoir, Corry nous donne ensuite l'exemple des mathématiques grecques qui instituent la nécessité de fournir une preuve pour pouvoir affirmer une proposition. C'est le rôle de l'image du savoir de fournir des critères permettant d'énoncer ce qui est une preuve légitime. Parler de légitimité conduit alors à adopter une démarche historique : l'image du savoir est propre à une époque. La conception des scientifiques sur ce qui est une bonne méthode, une bonne preuve, évolue dans le temps.

L'*image du savoir* joue en quelque sorte le rôle d'un méta-discours épistémologique et méthodologique, encadrant l'accumulation de connaissances au sein d'une discipline. De ce fait, le *corps du savoir* est déterminé par l'*image du savoir* dans laquelle il s'inscrit. On voit bien alors la portée heuristique de ce couple de concepts qui pousse à étudier les interactions étroites entre les connaissances produites au sein d'une discipline et les questions méthodologiques et épistémologiques qu'elle se pose. Au sujet des mathématiques, Corry nous dit que « la découverte d'un nouveau théorème, d'une nouvelle preuve ou d'un nouveau

¹³ Toutes les citations extraites de références bibliographiques non françaises sont traduites par nos soins.

concept ne garantit pas de pouvoir dire que le savoir a changé. Ce sont les *images du savoir* (qui sont déterminées socialement, philosophiquement, en interaction avec d'autres sciences, et ainsi de suite) qui déterminent, comme dans les autres sciences, la manière dont un nouvel objet sera intégré dans le panorama existant de la discipline, s'il sera considéré comme important ou ignoré. Des changements dans les images du savoir peuvent conduire à transformer le statut de parties déjà existantes du savoir et produire un panorama d'ensemble différent dans les mathématiques. Le changement ne se fait pas seulement quantitativement, par l'addition de nouveaux résultats et de concepts. Bien que ces ajouts soient bien entendu fondamentaux au progrès des mathématiques, le changement réel n'opère que dans la mesure où la croissance quantitative est accompagnée par une nouvelle appréciation qualitative du corps du savoir » (p.417-418). Le raisonnement en termes d'*image du savoir* nous permet de comprendre le rejet initial des travaux de Walras. Ce qui lui est reproché n'est pas son objet d'étude en lui-même, mais plutôt la forme que prend son analyse, la revendication qu'une théorie économique valide est une théorie économique formulée mathématiquement.

Leo Corry nous fournit ainsi une ligne de recherche : « détecter et décrire les changements dans les images des mathématiques [de l'économie en ce qui nous concerne], dans un contexte donné, et expliquer la croissance du corps du savoir et les interactions entre les deux strates » (p.436). Conformément à notre hypothèse, l'intégration de l'axiomatique ne peut pas se faire sans l'intégration d'un certain nombre de questions, propres à *l'image du savoir* des mathématiques. La rencontre entre mathématiques et économie est à double sens et dessine une nouvelle *image du savoir*, propre à l'économie mathématique. Le cadre conceptuel de Corry nous invite à tenter de caractériser cette *image du savoir* de l'économie mathématique.

Mais le concept d'*image du savoir* revêt un caractère trop flexible. Ainsi, on peut parler d'*image* des mathématiques, d'*image* de l'économie, d'*image* de l'économie mathématique, ou bien même, comme en atteste l'utilisation qu'en fait Corry, d'*image du savoir* chez Hilbert, Arrow ou Debreu. Chaque savant développe sa propre image du savoir, chaque savant a une idée de ce que sont les critères de validation d'une théorie, de la façon dont la théorie doit être reliée à la réalité, de la méthode qui doit être utilisée pour produire des résultats, des critères qui permettent de comparer des théories. On peut même parler de plusieurs images pour un même chercheur. Il n'est pas exclu que la façon dont ce dernier répond à ces questions évolue au cours de sa carrière.

La flexibilité du concept de Corry conduit dès lors à un certain flou dans son utilisation. On en a un aperçu dans l'utilisation qui en est faite, en économie par exemple, dans les travaux de Weintraub (2002). *L'image du savoir* est utilisée pour l'économie dans son ensemble, puis seulement pour Gérard Debreu. Pour éviter cette trop grande flexibilité, nous n'utiliserons le concept d'*image du savoir* qu'à titre individuel : nous parlerons de *l'image du savoir* respective d'Arrow et de Debreu.

De plus, le concept d'*image* semble être cantonné à une dimension plus restreinte de la

connaissance et véhicule l'idée d'une totale liberté de choix des scientifiques : le développement de leur pensée les conduit à opter pour telle ou telle image. Or, le raisonnement scientifique s'inscrit selon nous dans un cadre de pensée relativement rigide : il ne faut pas nier les processus de socialisation et d'intégration profonde d'habitudes scientifiques qui déterminent en partie la pensée scientifique. Dans le domaine scientifique en général, et dans des disciplines particulières, certaines choses sont pensables, visibles, et d'autres non. Le concept de *style de pensée* conduit à s'intéresser aux catégories de pensée d'une discipline et aux barrières invisibles, aux présupposés tacites, qui l'encadrent.

L'apport du concept de Style de pensée

Dans *Genèse et développement scientifique* (1934), Ludwig Fleck étudie l'évolution du concept de Syphilis, puis celle du test de Wassermann, censé révéler la présence de la maladie, chez l'individu. Il est conduit à développer une analyse épistémologique d'avant-garde (rôle du *collectif de pensée*, étude de la circulation des théories...), qui annonce celles qui seront développées à partir des années 1980 (par exemple, chez Bruno Latour, avec la théorie des acteurs réseaux)¹⁴.

Ce qui caractérise son approche est la mise en valeur de la dimension sociale de l'activité scientifique. Cette dernière ne peut être pensée sur le mode binaire d'une relation entre le savant et son objet. La relation est médiatisée par un ensemble de connaissances passées qui détermine la façon dont le savant étudie l'objet, mais aussi par l'appartenance à un *collectif de pensée* : « une théorie de la connaissance ne doit pas considérer l'acte cognitif comme une relation binaire entre le sujet et l'objet, entre celui qui connaît et ce qui est à connaître. Parce qu'il est un facteur fondamental de toute nouvelle connaissance, l'état du savoir du moment doit être le troisième terme de cette relation (...). Les connexions historiques et empreintes d'un *style* que l'on trouve à l'intérieur du savoir prouvent une interaction entre ce qui est connu et les connaissances en cours d'élaboration ; ce qui est déjà connu influence l'art et la manière dont sont élaborées de nouvelles connaissances, les connaissances en cours d'élaboration élargissent, renouvellent, donnent un sens nouveau à ce qui est déjà connu. C'est pourquoi l'acte cognitif n'est en aucun cas le processus individuel d'une « conscience » théorique « existant de toute façon » ; il est le résultat d'une activité sociale, puisque l'état des connaissances du moment dépasse les limites imposées à un individu » (Fleck, 1934, p.72-73).

Parler de collectif de pensée permet de penser un groupe, plus ou moins fermé, d'individus qui interagissent et développent un langage commun, un mode de compréhension propre. Au sein d'un tel collectif se développe un *style de pensée*, qui lui est propre : « Si nous

¹⁴ C'est d'ailleurs cette nouvelle sociologie des sciences qui a remis au goût du jour et popularisé les travaux de Fleck.

définissons un collectif de pensée comme la communauté des personnes qui échangent des idées ou qui interagissent intellectuellement, alors nous tenons en lui le vecteur du développement historique d'un domaine de pensée, d'un état du savoir déterminé et d'un état de la culture, c'est-à-dire d'un style de pensée particulier » (p.74).

Plus précisément, qu'entend Ludwig Fleck par *style de pensée* ? « Le *style de pensée* n'est ni une quelconque coloration des concepts ni une quelconque manière d'assembler ces derniers. C'est une force contraignante spécifique s'exerçant sur la pensée et plus encore : c'est la totalité de ce qui est intellectuellement disponible, la disposition pour telle manière de voir ou d'appréhender et non pas telle autre. Que les faits scientifiques soient dépendants du style de pensée est évident » (p.115-116). Le *style de pensée* est une disposition contraignante à voir, à comprendre, à raisonner. Les scientifiques sont insérés dans un collectif de pensée où se développe un *style de pensée* qui les détermine à raisonner d'une certaine manière et à produire un certain type de résultats scientifiques. Résultats impensables tels quels dans un *style* différent. De même, si un style de pensée dispose à voir et à raisonner d'une certaine manière, il est évident que certains problèmes, certains objets, sont impensables et invisibles au sein de ce style. « Comme tout style, le style de pensée renvoie à la fois à un état d'esprit particulier et au travail qui permet de donner corps à cet état d'esprit. Une disposition d'esprit a deux aspects étroitement liés : une aptitude à ressentir de manière sélective et une autre à agir de manière correspondante et dirigée (...). *Nous pouvons donc définir le style de pensée comme une perception dirigée associée à l'assimilation intellectuelle et factuelle correspondante de ce qui a été ainsi perçu.* Le style de pensée est caractérisé par les points communs des problèmes qui intéressent un collectif de pensée, par le jugement que ce dernier considère comme allant de soi, par les méthodes qu'il applique pour élaborer des connaissances. Il est éventuellement accompagné par le style technique et littéraire du système de savoir concerné. Comme il appartient à une communauté, le *style de pensée* collectif subit le renforcement social (...) caractéristique de toutes structures sociales et est sujet à un développement indépendant à travers les générations. Il devient une contrainte pour les individus, il détermine « ce qui ne peut pas être pensé autrement » ». (p.172-173).

Nous pensons que l'économie mathématique telle qu'elle se développe après-guerre, autour de la théorie de l'équilibre général, développe un *style de pensée* qui lui est propre, résultat d'un processus d'interaction entre deux disciplines, l'économie et les mathématiques. Ce *style de pensée*, propre à cette discipline, définit ce qui est vrai en son sein, mais aussi, plus profondément encore, ce qui est pensable, ce qui est réalisable. Nous parlerons à ce sujet de *style de pensée axiomatique*.

Cependant, un style de pensée commun ne signifie pas un consensus parfait sur les modalités épistémologiques de l'activité scientifique concernée. Comme l'explique Jean-François Braustein (2002), « parler de « style de pensée scientifique » permet à la fois de désigner des traits communs qui apparaissent à un moment déterminé et perdurent un certain

temps, mais qui en même temps n'excluent pas l'individualisation de chacun des auteurs qui illustrent ce style. Cette notion de style, on l'a montré, a tout à la fois une fonction « individualisante » et une fonction « universalisante » » (p.924). Le concept d'*image du savoir* permet de traiter le versant « individualisant » du *style de pensée axiomatique* et de montrer comment des scientifiques (dans notre cas, il s'agira de Kenneth J. Arrow et de Gérard Debreu) construisent, implicitement ou explicitement, un ensemble de réponses à des questions épistémologiques et méthodologiques fondamentales : Quels sont les *critères de la justification* qui permettent d'évaluer une théorie et de la comparer avec d'autres théories ? Quel *rapport avec la réalité* et les données empiriques cette théorie doit-elle développer ? Comment doit-elle progresser et s'enrichir ?

Objet d'études et problématique

Armé de ces concepts, nous allons nous intéresser aux transformations épistémologiques que connaît une partie de la discipline économique (Mark Blaug [2003] parle de « révolution formaliste » pour caractériser ces transformations), à partir des années 1930. Le vecteur de ces transformations est en grande partie le développement de la théorie de l'équilibre général. Il faut se préserver d'accorder une trop grande place à la TEG dans le *corps du savoir* économique. Même si son utilité est reconnue par une grande partie des économistes, elle ne concerne qu'une frange relativement marginale des connaissances économiques. Parmi les grands noms de la théorie économique d'après-guerre, seuls quelques-uns, tels Arrow, Debreu ou Koopmans se sont directement intéressés à l'équilibre général¹⁵.

Mais l'influence de la TEG s'est faite sentir plus profondément dans la forme du discours économique, en véhiculant un *style de pensée axiomatique* que l'on retrouve encore dans la discipline, en microéconomie bien entendu, mais aussi en macroéconomie, en théorie des jeux ou en économie du bien-être, bien après que les résultats de Sonnenschein, Mantel et Debreu¹⁶ aient profondément remis en question les prétentions analytiques de la TEG. Cette dernière participe au développement d'un nouveau mode de raisonnement, de nouvelles catégories de pensée, pour une partie de l'économie.

¹⁵ Ainsi le résultat d'Arrow et Debreu de 1954 est reconnu par une grande partie de la discipline économique (preuve en est le nombre de références à l'article dans des travaux universitaires), mais on compte très peu de travaux sur cette question par la suite.

¹⁶ Par théorème de Sonnenschein-Mantel-Debreu (1972-1974), on entend la preuve que les fonctions de demande excédentaire ont une forme quelconque. En dehors des hypothèses de continuité, d'homogénéité de degré 0 et d'identité de Walras (la somme des fonctions d'offre et de demande des agents est égale à 0), les hypothèses posées sur les fonctions individuelles ne se retrouvent pas au niveau agrégé. On considère généralement que ce théorème met fin à la prétention de vouloir prouver la stabilité de l'équilibre général en ne posant des conditions que sur les fonctions individuelles.

Notre objectif est donc d'étudier les développements de la TEG, et plus particulièrement des démonstrations d'existence d'un équilibre, afin de relever l'émergence d'un *style de pensée axiomatique* dans l'économie mathématique naissante (dans les années 1950). Ce *style de pensée* sera étudié dans sa dimension « universalisante » et « individualisante ». C'est pourquoi nous porterons notre attention principalement sur Kenneth Arrow et Gérard Debreu. Cette approche par les théoriciens nous permettra, comme l'explique Marion Vorms (2011), de nous détacher de « la perspective « sans propriétaire » qui caractérise les approches classiques en philosophie des sciences. Ces dernières (...) étudient les théories en les concevant comme des « tous » abstraits, dont le contenu est supposé indépendant des esprits qui l'explorent, le développent et l'utilisent. A une conception synoptique de la structure logique d'une théorie, j'oppose une conception qui prend acte du fait que l'utilisation d'une théorie se fait toujours dans une certaine perspective. En effet, on n'accède généralement pas à une théorie comme à un « tout », mais plutôt par telle ou telle représentation particulière (ou tel ou tel ensemble de représentations). (...) Il ne s'agit pas de nier l'existence de théories, au sens d'ensembles systématiques d'hypothèses théoriques, mais de les étudier en tant qu'elles sont comprises et utilisées par les agents, et non comme des entités abstraites » (p.59-60). Par cette approche, nous nous efforcerons de souligner, à travers leur pratique théorique, les engagements épistémologiques propres à Arrow et à Debreu.

Représentant tous deux le *style de pensée axiomatique*, il semble évident que leur démarche n'est pas la même et qu'ils envisagent le travail théorique d'une manière différente. Les tensions épistémologiques que l'on peut soulever, à travers leur article commun de 1954, révéleront les enjeux du *style de pensée axiomatique*.

Au long de ce mémoire, nous tenterons de caractériser l'émergence d'un *style de pensée axiomatique* au sein de la TEG, définissant de nouveaux *critères de justification* et d'en révéler les enjeux, grâce à l'étude approfondie de la preuve d'existence d'un équilibre général concurrentiel, proposée par Arrow et Debreu.

Plan et méthodes

Pour caractériser ce *style de pensée axiomatique* en économie, il est primordial de définir précisément ce qu'est la méthode axiomatique et d'étudier son développement, à partir de la fin du XIX^e siècle. Dans le premier chapitre, nous proposerons une histoire de la méthode axiomatique et tenterons de voir quelles sont les conséquences épistémologiques, pour une théorie, de son utilisation. Tout au long du XIX^e, les critiques envers la géométrie euclidienne se font de plus en plus fortes et conduisent au développement de nouvelles géométries, dites non-euclidiennes. A travers elles, ce sont le statut de l'intuition et le rôle des postulats qui sont transformés. La première doit être totalement bannie des démonstrations des

théorèmes. Ne doivent entrer en jeu que des inférences déductives purement logiques. Les postulats, quant à eux, ne sont plus choisis en fonction de leur pertinence empirique. Ce sont désormais des simples conventions que l'ont fait varier afin de prouver des théorèmes. Ces transformations définissent le passage de l'*axiomatique des Anciens* à l'*axiomatique des Modernes* (Mongin, 2003). Ce nouveau statut des postulats repose sur l'idée que l'on peut clairement distinguer la structure logique d'une théorie de son interprétation, c'est-à-dire de sa signification concrète. Il est dès lors possible de se concentrer uniquement sur la structure logique d'une théorie. L'objectif est alors de chercher la plus grande *généralité mathématique* possible, en *affaiblissant* les axiomes. Néanmoins, la question de l'interprétation d'une théorie demeure cruciale, d'autant plus que celle-ci peut être rendue plus difficile à cause de la généralisation mathématique. On peut avoir alors deux objectifs pour l'axiomaticien : d'un côté une *logique de développement axiomatique*, à travers la recherche d'une plus grande *généralité* (logique et/ou mathématique) du système d'axiomes, de l'autre la recherche d'un *élargissement interprétatif*. Nous parlerons de *querelle de priorité* pour représenter le fait que ces deux objectifs sont parfois contradictoires.

Le statut *conventionnel* des postulats, l'affirmation d'une séparation entre structure logique et interprétations, la concentration sur la *logique de développement axiomatique* et l'existence d'une *querelle de priorité* sont les caractéristiques du *style de pensée axiomatique* en économie. C'est ce que le deuxième et le troisième chapitre permettront de mettre en lumière. Dans le second chapitre, nous nous intéresserons à l'intégration progressive de la méthode axiomatique en économie. Les années 1930 à Vienne constituent une étape fondamentale. Au sein du colloque mathématique, l'axiomatisation de la TEG fait ses premiers pas, grâce aux travaux de Wald et von Neumann. Suite à la seconde guerre mondiale, c'est la *Cowles Commission* aux Etats-Unis, qui assurera la promotion d'une plus grande rigueur logique et mathématique dans les travaux d'économie et qui revendiquera l'utilisation de la méthode axiomatique. Cette analyse historique nous permettra de comprendre ce qu'*est* précisément la méthode axiomatique en économie et la manière dont elle est employée, mais aussi de retrouver les caractéristiques du *style de pensée axiomatique* en économie.

Enfin, le troisième chapitre traitera de l'article de 1954 dans lequel Arrow et Debreu prouvent formellement l'existence d'un équilibre général concurrentiel. Nous montrerons comment Arrow et Debreu arrivent tous deux à s'intéresser à une telle question. Après avoir décrit dans le détail le modèle qu'ils construisent, nous montrerons la pertinence des caractéristiques que nous avons soulevées pour étudier le *style de pensée axiomatique*. L'article de 1954 constitue sans aucun doute un parangon de ce *style*, en dévoilant les enjeux épistémologiques. L'analyse de la correspondance entre Arrow et Debreu, effectuée par Düppe (2012) permettra de constater que cet article est le résultat de négociations entre les deux co-auteurs, révélant ainsi une *image du savoir* propre à chacun.

Chapitre I : Perspectives épistémologiques de l'axiomatisation

Traiter de la rencontre entre deux univers, celui des mathématiques et celui de l'économie, implique de cerner avec le maximum de précision la logique propre à chacun de ces univers. Dans ce chapitre, nous porterons notre attention sur l'histoire des mathématiques et plus particulièrement sur celle de la méthode axiomatique, afin de dégager les caractéristiques du *style de pensée axiomatique*. Fidèle à notre hypothèse selon laquelle la méthode axiomatique ne peut être considérée comme un simple outil technique que l'on peut utiliser dans n'importe quelle théorie, sans que cela ait un impact sur le résultat, et que l'importation de la méthode axiomatique dans une discipline entraîne l'importation d'un ensemble de problèmes épistémologiques qui lui sont propres, nous tenterons de décrire, dans une première partie, l'émergence de l'axiomatique ainsi que son développement et son inscription dans un ensemble de débats philosophiques et épistémologiques qui caractérisèrent la science mathématique entre la fin du XIX^e siècle et la première moitié du XX^e. Nous tâcherons dans une seconde partie de dégager un ensemble de caractéristiques épistémologiques propres à une théorie axiomatisée, dans l'optique d'analyser, dans les chapitres suivants, ce que peut être le *style de pensée axiomatique* en économie.

I – Genèse et développement de l'axiomatique

Pour définir la méthode axiomatique et définir son développement historique, nous appuierons principalement sur l'ouvrage classique de Robert Blanché, *l'Axiomatique* (1955), en suivant la présentation qu'il en fait. Traditionnellement, on situe l'apparition de la méthode axiomatique dans la deuxième moitié du XIX^e siècle. Mais on pourrait, à la manière de Mongin (2003), ne pas réserver le terme d'axiomatique aux seuls développements qui ont eu lieu en mathématiques à partir de cette époque et considérer que la géométrie d'Euclide relève aussi d'une forme d'axiomatique. Mongin distingue ainsi *l'axiomatique des Anciens* et *l'axiomatique des Modernes*. Pour bien comprendre l'apparition de l'axiomatique des Modernes, il est alors nécessaire de partir de *l'axiomatique des Anciens* et de ses faiblesses. Nous pourrions voir ensuite comment se développe l'axiomatisation de la théorie mathématique, à partir des années 1880. Celle-ci conduira à l'émergence du programme formaliste de Hilbert, donnant espoir dans la réalisation d'un vieil idéal : trouver une base solide et absolue à la connaissance. Cette recherche de fondements indubitables conduira des visions épistémologiques différentes des mathématiques à s'opposer (tels l'intuitionnisme et

le formalisme). Le théorème d'incomplétude de Gödel signera alors la fin des espoirs dans une solution à la « crise des fondements » que traversent les mathématiques à cette époque.

A) La rupture d'avec l'axiomatique des Anciens

1) De la géométrie euclidienne...

Tenter de présenter la méthode axiomatique telle qu'elle apparaît dès le XIX^e siècle implique de faire un bond en arrière de plus de deux millénaires. En effet, son apparition s'explique comme une réponse aux insuffisances de la géométrie développée par Euclide, durant l'Antiquité. Ce dernier emploie une structure déductive qui se rapproche en de nombreux points des canons de l'axiomatique moderne. Comme l'explique Blanché, « les termes propres à la théorie n'y sont jamais introduits sans être définis ; les propositions n'y sont jamais avancées sans être démontrées, à l'exception d'un petit nombre d'entre elles qui sont énoncées d'abord à titre de principes : la démonstration ne peut en effet remonter à l'infini et doit bien reposer sur quelques propositions premières » (p.9). Toute proposition doit être démontrée, à partir des principes premiers, selon un rapport de nécessité. En cela, la géométrie d'Euclide se veut déductive plutôt qu'inductive : « Bien que tout ce qu'on affirme soit empiriquement vrai, l'expérience n'est pas invoquée comme justification : le géomètre ne procède que par voie démonstrative » (p.9).

Cependant, la géométrie euclidienne va connaître une profonde remise en cause tout au long du XIX^e siècle. Les exigences pour une plus grande rigueur logique, qui émergent à cette époque, conduisent à une insatisfaction grandissante envers le système déductif construit par Euclide. Il apparaît comme de plus en plus faillible et perfectible. Les attaques contre la géométrie euclidienne s'organisent alors principalement autour de deux axes : le statut donné aux postulats et le rôle de l'intuition dans la déduction.

La mathématique grecque fait la distinction entre l'*axiome*, qui relève d'une évidence intellectuelle dont la négation conduirait à des propositions absurdes, et le *postulat* qui est une « proposition synthétique, dont la contradictoire, difficile ou impossible à imaginer, demeure néanmoins concevable » (p.18). Or, par deux fois, en plein milieu d'une chaîne de déductions, Euclide fait appel à un nouveau postulat, sur une base intuitive, dans le but de réaliser sa démonstration. Une telle proposition, introduite de la sorte, apparaît alors comme parfaitement *ad hoc*, ce qui est fortement insatisfaisant pour quiconque cherche à conquérir une plus grande rigueur logique. L'un des deux postulats invoqués de la sorte est le fameux postulat sur les parallèles (le cinquième postulat) qui énonce que par un point hors d'une droite ne passe qu'une seule parallèle à cette droite. On voit bien là tout l'aspect paradoxal de cette proposition, qui fait appel à une sorte d'évidence intellectuelle mais qui se formule comme un théorème, sans pour autant être démontrée par Euclide. Le second point de blocage auquel la géométrie euclidienne se heurte, selon les standards des *Modernes* sur la question du

statut des postulats, provient du fait qu'un certain nombre de ces postulats est formulé de manière implicite. Certaines démonstrations sont menées à l'aide de propositions non énoncées distinctement, laissées sous forme d'implicite, du fait d'une certaine évidence intuitive.

C'est ce qui nous conduit directement au deuxième axe d'attaques à l'encontre de la géométrie d'Euclide : le rôle de l'intuition. Comme l'explique Poincaré, chez Euclide « toutes les pièces sont dues à l'intuition » (Blanché, 1955, p.15). Les démonstrations d'Euclide reposent en effet sur la représentation mentale ou dessinée des figures géométriques. Ces figures servent d'appui aux démonstrations et sont, de ce fait, indispensables. Euclide fait ainsi constamment appel à l'intuition spatiale du lecteur. Or, cela est difficilement acceptable si notre objectif est de fournir des théorèmes dont les démonstrations sont purement logiques, fondées sur des rapports de nécessité.

Les insatisfactions envers le système d'Euclide, croissantes tout au long du XIX^e siècle, portent principalement au départ sur le postulat des parallèles, d'Euclide. La suppression ou la modification de ce postulat conduit peu à peu au développement de nouvelles géométries, dites non-euclidiennes.

2) ... au développement des géométries non euclidiennes.

Si l'on veut accroître la rigueur logique de la géométrie, il devient nécessaire d'écarter tout recours à l'intuition. Non pas que celle-ci soit nuisible au chercheur. L'intuition joue un rôle primordial dans la *découverte* scientifique, mais elle doit disparaître au moment de la présentation du résultat, qui ne reposera alors que sur la base d'inférences parfaitement logiques¹⁷. Au sein des géométries non-euclidiennes, l'appel à l'intuition est d'ailleurs souvent impossible, tant celles-ci dépassent la perception spatiale intuitive de l'homme.

Ces géométries non-euclidiennes prennent naissance avec la remise en cause du cinquième postulat d'Euclide. Elles respectent en fait tous les postulats du système d'Euclide, sauf celui-ci. On peut citer les géométries de Lobatchevski, Klein ou Poincaré, qui sont des géométries dites « hyperboliques » : par un point extérieur à une droite passe une infinité de parallèles à cette droite. A l'inverse, dans la géométrie « elliptique » de Riemann, aucune parallèle ne passe par un point extérieur à une droite, car toutes les droites sont sécantes.

On a vu plus haut que les grecs distinguaient les axiomes et les postulats, les premiers reposant sur la notion d'évidence. Or, il semble difficile de garantir l'objectivité de cette notion et d'obtenir l'unanimité sur ce qui est évident. L'appel à l'évidence devient inacceptable pour les mathématiciens du XIX^e siècle. Dès lors, les propositions premières de la théorie ne sont plus fondées sur l'évidence intuitive et deviennent des hypothèses. Poincaré

¹⁷ La présentation axiomatique d'une théorie renouvelle ainsi la distinction entre *contexte de la découverte* et *contexte de la justification*. L'intuition occupe une place importante dans le premier, mais doit disparaître dans le second.

parlera de « conventions »¹⁸. Le statut du savoir géométrique est ainsi bouleversé : « On voit alors se dissocier les deux aspects de la vérité géométrique, jusque-là intimement mêlés dans une union étonnante. Un théorème de géométrie était à la fois un renseignement sur les choses et une construction de l'esprit, une loi de physique et une pièce d'un système logique, une vérité de fait et une vérité de raison » (Blanché, 1955, p.14).

Cette dualité conduit à reléguer la vérité empirique au second plan et à privilégier la structure logique du système géométrique construit¹⁹. Les géométries non-euclidiennes ont ainsi « fortement contribué à déplacer le centre d'intérêt de la géométrie spéculative, en le transportant du contenu vers la structure, de la vérité extrinsèque des propositions isolées vers la cohérence interne du système total » (p.13). Ce qui relie les propositions désormais, ce sont seulement les liens logiques qui les unissent. En cela, les systèmes géométriques, axiomatisés selon les nouveaux canons de la rigueur logique, sont des *systèmes hypothético-déductifs*.

B) Le développement de l'axiomatique des Modernes

La remise en cause de la géométrie euclidienne et la naissance des géométries non-euclidiennes marquent l'émergence de l'axiomatique des Modernes. Celle-ci se développe principalement, au départ, par l'axiomatisation de la géométrie et de l'arithmétique. Mais les exigences de rigueur logique ne trouvent pas une fin ultime à cette axiomatisation et il apparaît comme nécessaire d'aller plus loin en axiomatisant les règles utilisées dans les inférences déductives.

1) Les débuts de l'axiomatique moderne

Toute théorie axiomatique part « d'indéfinissables », c'est-à-dire de termes qui ne sont pas définis au sein du système, et « d'indémontrables », c'est-à-dire de propositions non démontrées au sein du système. Certaines définitions sont dites implicites du fait que « leur sens sera fixé par l'usage qu'on en fera dans les postulats, lesquels énoncent quelles relations logiques soutiennent entre elles ces notions » (p.38)²⁰. La théorie déductive se développe ensuite par le biais de deux processus : la définition (on définit de nouveaux termes, à partir de termes antérieurs, avec pour point de départ les indéfinissables) et la démonstration (on énonce de nouvelles propositions en partant des propositions premières, c'est-à-dire des

¹⁸ Blanché nous dit que les principes premiers « sont seulement posés, et non affirmés ; non pas douteux, comme les conjectures du physicien, mais situés par-delà le vrai et le faux, comme une décision ou une convention » (p.14).

¹⁹ Comme nous le verrons dans les chapitres suivants, on constate également que la structure logique est mise au premier plan dans la théorie économique suite à son axiomatisation. Le privilège accordé à la *syntaxe* de la théorie, au détriment de sa *sémantique*, est une caractéristique essentielle du *style de pensée axiomatique* dans la discipline économique.

²⁰ Un bon exemple de définition implicite est la définition de l'équilibre concurrentiel chez Arrow et Debreu (1954). Celui-ci n'est pas défini directement mais il est caractérisé par quatre conditions qu'il doit respecter.

axiomes). On a donc deux moments dans l'axiomatique : le premier, qui fixe les termes non définis et les propositions non démontrées, et le second, qui enchaîne les démonstrations et les définitions à partir des éléments définis comme premiers au sein de la théorie axiomatisée.

A partir de là, il est désormais possible, en suivant Blanché, de distinguer quatre conditions qui font d'un système déductif une théorie axiomatisée : « 1. Que soient énoncés explicitement les termes premiers à l'aide desquels on se propose de définir tous les autres ; 2. Que soient énoncées explicitement les propositions premières à l'aide desquelles on se propose de démontrer toutes les autres ; 3. Que les relations énoncées entre les termes premiers soient de pures relations logiques, et demeurent indépendantes du sens concret qu'on peut donner aux termes ; 4. Que seules ces relations interviennent dans les démonstrations, indépendamment du sens des termes » (p.31)²¹.

Blanché parle de théories « concrètes » ou « matérielles » pour désigner une théorie « demeurée au stade pré-axiomatique, c'est-à-dire qui maintient encore le contact avec les connaissances qu'elle organise, et qui présente un contenu conservant son sens et sa vérité empiriques » (p.45). Au sein d'une théorie concrète peuvent se développer plusieurs axiomatiques, c'est-à-dire plusieurs structures logiques, avec les mêmes propositions et les mêmes termes, mais organisées de manière différente (par exemple, la liste des axiomes et des termes premiers n'est pas la même). Quand deux axiomatiques ont la même structure formelle, on dit alors qu'elles sont *isomorphes*. Si on prend une même axiomatique, on peut généralement en donner plusieurs interprétations. Dans ce cas-là, chaque interprétation représentera un *modèle* de l'axiomatique. On voit ainsi apparaître une hiérarchie de l'organisation logique d'une théorie : « Il y a donc trois niveaux à distinguer, sur lesquels peut se faire la diversification d'une théorie déductive. Revenons toujours à l'exemple de la géométrie euclidienne. En premier lieu, si l'on modifie diversement l'un au moins de ses postulats, on obtiendra, à côté d'elle, d'autres théories (géométrie lobatchevskienne, non archimédienne, etc.) qui lui seront, peut-on dire, *voisines* ou *apparentées* : c'est en ce sens qu'on parle de la pluralité des géométries. Prenons maintenant l'une quelconque de ces géométries : comme il y a plusieurs façons d'en faire la reconstruction logique, elle se diversifiera à son tour en plusieurs axiomatiques, qui seront *équivalentes* entre elles. Enfin, si nous choisissons l'une de ces axiomatiques, nous pourrons généralement lui trouver des interprétations différentes : d'où une nouvelle diversification, selon des modèles qui seront *isomorphes*. A la diversité des géométries se superpose ainsi celle des axiomatiques d'une même géométrie, et à celle-ci, celle des modèles d'une même axiomatique. Le mot de théorie convenant également, soit à la présentation axiomatique, soit à l'une de ses interprétations concrètes, on voit qu'il faudra se garder de confondre entre le cas de théories apparentées,

²¹ Cette définition de Blanché représente un idéal à atteindre. On se doute assez rapidement que la pratique de la méthode axiomatique s'écarte, du moins partiellement, de cet idéal. D'autant plus qu'il n'existe pas une seule manière d'énoncer explicitement les propositions premières et qu'il n'est pas facile de voir si ces propositions sont véritablement *toutes* énoncées explicitement et si les inférences déductives qu'on applique sont *totalem* indépendantes du sens des propositions et des termes. Nous constaterons cet écart entre l'idéal et la pratique au moment d'analyser l'article d'Arrow et Debreu (1954), dans le troisième chapitre.

celui de théories équivalentes, et celui de théories isomorphes » (p.47).

La première axiomatisation recensée de la géométrie est celle que développa l'allemand Moritz Pasch, en 1882. S'exprimant à ce sujet, il explique que « pour que la géométrie devienne vraiment une science déductive, il faut que la manière dont on tire les conséquences soit partout indépendante du sens des concepts géométriques, comme elle doit l'être des figures ; seuls sont à prendre en considération les rapports posés par les propositions (qui font office de définitions) entre les concepts géométriques. Pendant la déduction il peut être convenable et utile de penser à la signification des concepts géométriques utilisés, mais cela n'est aucunement nécessaire ; si bien que c'est précisément lorsque cela devient nécessaire que se manifeste une lacune dans la déduction et (lorsqu'on ne peut supprimer cette lacune en modifiant le raisonnement) l'insuffisance des propositions invoquées comme moyens de preuve » (Pasch, 1882, p.98)²². Est affirmée une fois de plus la nécessité de séparer totalement la structure logique de l'intuition, mais aussi des interprétations de la théorie. La déduction logique doit se faire indépendamment du contenu sémantique de la théorie. C'est la proposition fondamentale du *style de pensée axiomatique* : il est impératif (et donc supposé possible) de séparer très clairement structure logique (ou *syntaxe*) et interprétation de la théorie (ou *sémantique*).

En 1889, l'italien Giuseppe Peano développe son axiomatisation de l'arithmétique. Il définit par exemple la suite des entiers naturels uniquement grâce à cinq axiomes (Peano, 1889). Mais le plus célèbre exemple d'axiomatisation au XIX^e siècle se trouvait sans aucun doute chez David Hilbert (1899), dans ses *Grundlagen der Geometrie (Les fondements de la géométrie)*. Dans son ouvrage, il a dégagé clairement tous les axiomes demeurés implicites au sein de la géométrie euclidienne. Ensuite, « il les a répartis, selon les notions fondamentales qu'ils utilisent, en 5 groupes, et il s'est efforcé pour chacun de ces groupes ou pour leurs combinaisons, de préciser et de délimiter le domaine des théorèmes qu'ils déterminent » (BLANCHE, 1955, p.43). Ernst Zermelo (1908), quant à lui, construira un système d'axiomes pour la théorie des ensembles, en 1908, complété par Abraham A. Fraenkel (1922). Cette axiomatisation est connue aujourd'hui sous le nom de *théorie ZF* (Zermelo-Fraenkel).

Ainsi, au début du XX^e siècle, l'axiomatisation des théories mathématiques trouve sa pleine légitimité. Mais cet ancrage de l'axiomatique dans la discipline mathématique va de pair avec l'exigence d'une rigueur logique toujours plus grande, conduisant au développement des *systèmes formels*.

2) Les systèmes formels

Dans un système axiomatique, en parallèle des propositions propres au système axiomatisé, se trouvent des propositions qui lui sont logiquement antérieures. En effet, les démonstrations, au sein d'un système axiomatique, reposent, par exemple, sur des règles

²² La traduction provient de Blanché (1955, p.30-31).

logiques. Ces règles sont alors dites *antérieures*²³.

Or, qu'en est-il de la rigueur de ces règles ? Lesquelles sont légitimes ? Comment sont-elles organisées ? On exige alors « que les règles de la définition et de la démonstration soient elles-mêmes admises en commun sans la moindre ambiguïté, que la déontologie du travail déductif, c'est-à-dire la logique, soit à la fois parfaitement précise et parfaitement universelle, réglant tous les détails et s'imposant à tous les esprits » (p.58). Ce que l'on avait fait aux postulats des théories mathématiques doit maintenant être fait aux règles qui permettent de travailler sur ces postulats. On énonce clairement les règles de structure, qui concernent les règles pour la formation des propositions, et les règles de déduction, qui concernent les transformations appliquées aux propositions. Par le même processus que pour l'axiomatisation de la géométrie ou de l'arithmétique, « la validité formelle de l'axiomatique recule d'un degré et devient à son tour hypothétique, étant fonction du choix qui a été fait des normes logiques » (p.60).

On parle, au sujet de cette exigence nouvelle, de formalisation. Russel et Whitehead s'en sont fait les hérauts dans leur *Principia Mathematica* (1910), en tentant d'axiomatiser le calcul propositionnel. Comme l'explique Mongin, il s'agit de dégager « des règles morphologiques définissant les formules complexes à partir des formules plus élémentaires et des connecteurs ; un petit nombre d'axiomes liant entre elles certaines formules ; et une règle d'inférence unique (le *modus ponens*). Appliquée de façon répétée aux axiomes, la règle permet de prouver des théorèmes. Comme les autres notions, celles de preuve et de théorèmes sont formellement définies, et il en va de même de celle de conséquence logique. A propos d'un système formel quelconque, on peut poser les questions classiques de la *cohérence* (ou *consistance*), de l'*indépendance*, et de la *décidabilité* » (Mongin, 2003, p.109)²⁴.

Ces trois dernières questions qu'évoquent Mongin sont les questions fondamentales qui seront mises en avant, au sujet de tout système axiomatique. Elles fondent ce que l'on a appelé le « programme formaliste » d'Hilbert.

C) Du programme de recherche Hilbertien au théorème d'incomplétude de Gödel

Le début du XX^e siècle correspond à ce que l'on a appelé, pour les mathématiques, la « crise des fondements ». Cette crise repose sur une révolution du concept d'infini en mathématiques, avec l'infini actuel de Cantor (développé par ce dernier au XIX^e siècle) et sur

²³ « On appellera antérieures à un système axiomatique toutes les connaissances auxquelles ce système fait ainsi appel » (Blanché, 1955, p.32).

²⁴ Le *modus ponens* est une règle élémentaire de raisonnement logique à partir de laquelle on peut en déduire de nombreuses autres. On pose d'abord une implication : A implique B. Ensuite, si on a A, alors on a B.

la mise en valeur de nombreux paradoxes, tel celui de Russel²⁵. Dans les années 1920, David Hilbert présentera un programme de recherche visant à développer des preuves finies de consistance (ou non-contradiction), d'indépendance et de complétude, pour tout système axiomatique, avec l'idée de réussir à chasser ces paradoxes et à trouver un fondement solide à la connaissance mathématique, indépendant de tout recours à l'intuition. Loin de rencontrer l'assentiment de tous (les intuitionnistes s'opposeront à de telles preuves mathématiques), ce programme, fondé sur l'usage de la méthode axiomatique, conduit à une impasse, avec le théorème d'incomplétude de Gödel, en 1933.

1) Le programme de recherche de Hilbert

Dans son discours de 1900, à Paris, au congrès international de mathématiques, Hilbert (1902) définit une liste de 23 problèmes auxquels font face les mathématiciens. Cette liste s'avérera d'une rare préscience et certains problèmes se trouvent encore aujourd'hui non résolus et au cœur des débats. Le second problème est celui de la consistance logique de l'arithmétique. Cette question de la consistance forme avec celle de l'indépendance les deux questions fondamentales que Hilbert tente de traiter, au sujet du système géométrique axiomatisé qu'il a construit dans les *Grundlagen*.

S'interroger sur la consistance revient à se demander si le système d'axiomes est cohérent, c'est-à-dire s'il est non contradictoire. Les exigences de rigueur interdisent au mathématicien de prouver la cohérence de son système par l'intuition. De même, le fait qu'il n'ait rencontré aucune contradiction tout au long des nombreuses démonstrations qu'il a menées ne peut constituer une preuve parfaitement légitime, même si renforçant la croyance dans la consistance de son système. Dans ses *Grundlagen*, Hilbert construit une interprétation arithmétique de son système d'axiomes, « de sorte que toute contradiction qui surgirait dans les conséquences de ses axiomes devrait s'y répercuter : la cohérence de l'arithmétique supposée admise, garantit donc celle de son système d'axiomes » (Blanché, 1955, p.44).

Quant à l'indépendance, Hilbert teste la possibilité de construire un système en enlevant seulement un axiome. Si le système demeure consistant, c'est que cet axiome est indépendant. Dans le cas contraire, cela signifie que l'axiome peut être déduit des autres axiomes présents dans le système axiomatique. Cependant, contrairement à la consistance, l'indépendance ne constitue pas une exigence logique absolue. Un système inconsistant n'a aucune valeur alors que la présence d'axiomes non-indépendants en son sein est tolérable. Mais cela signifie qu'il y a « une surabondance de propositions premières, et l'on juge ordinairement préférable, dans un dessein d'économie, de réduire leur nombre au minimum » (Blanché, 1955, p.52).

²⁵ En 1903, Russel distingue les ensembles qui appartiennent à eux-mêmes et ceux qui n'appartiennent pas à eux-mêmes. Il pose alors la question suivante : l'ensemble des ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes, appartient-il à lui-même ? S'il appartient à lui-même, cela signifie que comme les ensembles qui le composent... il n'appartient pas à lui-même. On a donc une contradiction. Ce paradoxe est plus connu sous le nom de paradoxe du barbier : soit on se rase soi-même, soit on est rasé par le barbier. Dès lors, qui rase le barbier ?

A partir des années 1920, David Hilbert défendra la nécessité de traiter ces questions pour l'ensemble des mathématiques. Si la consistance de la géométrie repose sur celle de l'arithmétique, il devient par exemple primordial de prouver formellement la non-contradiction de celle-ci. Aux questions de la consistance et de l'indépendance s'ajoute celle de la complétude, fondée sur le principe du tiers exclu²⁶. « Un système de postulats est dit *complet* lorsque, de deux propositions contradictoires formulées correctement dans les termes du système, l'une des deux au moins peut toujours être démontrée » (p.50). Si un système est complet et consistant, cela signifie que l'on peut toujours dire si une proposition est vraie ou fausse par rapport à un système de postulats donné. On parle alors de système *catégorique*. Un système dans lequel on peut seulement dire si une proposition est démontrable ou non, est dit *décidable*²⁷. Il est à noter que, comme pour l'indépendance, les questions de complétude, de catégoricité et de décidabilité ne sont pas aussi primordiales que celle de la consistance.

Pour toutes ces questions, il ne s'agit plus de s'intéresser aux objets des mathématiques mais aux propositions qui traitent de ces objets. C'est pour cette raison que l'on parle alors de *métamathématique*. Ce nouveau domaine, dont Hilbert est l'initiateur, permet de développer des approches formelles pour traiter des problèmes de cohérence des systèmes axiomatiques²⁸. Ainsi, avec la métamathématique, « on s'interroge sur la possibilité ou l'impossibilité de construire, à partir des formules symboliques qui énoncent les axiomes d'une théorie et en s'astreignant à un système bien défini de règles, des expressions de telle ou telle forme, par exemple de faire surgir un couple d'expressions propositionnelles différant seulement en ceci, que l'une reproduit l'autre en la faisant précéder du signe de la négation. Si l'on peut démontrer cette possibilité ou cette impossibilité, on aura par là même démontré la contradiction ou la non-contradiction de la théorie » (p.66).

Il nous paraît important de noter cependant que ce programme de recherche, développé par Hilbert, ne fit pas l'unanimité parmi les mathématiciens. *L'intuitionnisme* de Raymond Poincaré et plus particulièrement celui de Luitzen E. J. Brouwer s'opposa au *formalisme* d'Hilbert.

²⁶ Pour une proposition p donnée, si p est faux, alors c'est que non- p est vrai. Et inversement. Cela signifie que « p ou non- p » est nécessairement vrai.

²⁷ Nous verrons plus loin toute l'importance de cette question, pour le programme de recherche d'Hilbert, avec le résultat négatif de Gödel.

²⁸ On voit ainsi apparaître une particularité du savoir mathématique, que met en avant Leo Corry (1989) : « Ce qui installe les mathématiques à une place particulière par rapport à toutes les autres sciences exactes est la nature de ses objets et le fait que les mathématiques elles-mêmes deviennent leur objet. (...) Les mathématiques sont la seule science exacte dont les propositions sur la discipline peuvent rester à l'intérieur de la discipline. J'appellerai cette capacité des mathématiques à s'étudier elle-même mathématiquement, le « caractère réflexif des mathématiques » » (p.413). L'objectif de Hilbert est ainsi de trouver des outils mathématiques, des outils de preuves, pour traiter *mathématiquement* du savoir mathématique. En cela, il est le symbole de la *réflexivité* des mathématiques. Chaque discipline aborde les questions épistémologiques qui se posent à elle à l'aide du langage naturel, c'est-à-dire sans faire appel au langage qu'elle s'est construit pour l'étude de son objet. La particularité des mathématiques est qu'elles tentent d'utiliser son langage pour traiter de questions de second ordre : elles usent du langage mathématique pour étudier le langage mathématique. On retrouve le même processus pour la logique. On parle ainsi de *métamathématique* et de *métalogique*.

2) L'opposition du courant *intuitionniste*

Dans son opposition à ce que l'on appelle généralement le *programme formaliste* de Hilbert, l'*intuitionnisme* se situe également sur le plan des métamathématiques, mais propose une approche *constructiviste* (ou *génétique*), par opposition à la conception *non-constructiviste* de la preuve, propre au formalisme hilbertien²⁹.

Le premier point d'achoppement entre ces deux courants porte sur l'*infini actuel* de Cantor. Ce dernier est le fondateur de la théorie des ensembles, qu'il développe dès 1874. Dans ses premières publications, il démontre que l'ensemble des réels est plus grand que celui des entiers naturels. Ce qui introduit l'idée que des ensembles infinis peuvent être de tailles différentes, bouleversant ainsi la conception classique de l'infini (Dumoncel, 2002).

Le deuxième point d'achoppement, dans la continuité du premier, se porte sur le statut de la preuve. Pour les intuitionnistes, une preuve est une opération mentale, fondée sur l'intuition. Ce qui les conduit à s'opposer au principe du tiers exclu. Même si on démontre que non-p est faux (et donc, par identité, que non-non-p est vrai), il reste encore à prouver que p est vrai, car la double négation est considérée chez les intuitionnistes comme inférieure à l'affirmation. On voit par là, à l'inverse, l'influence du *formalisme* d'Hilbert sur la théorie économique et plus particulièrement sur la théorie de l'équilibre général, où les preuves non-constructives sont prépondérantes. Leur utilisation constitue une des caractéristiques du *style de pensée axiomatique* en économie.

On peut résumer grossièrement la pensée intuitionniste en deux thèses, pour reprendre les propos de Heyting, le successeur de Brouwer : « 1. La mathématique n'a pas seulement une signification formelle mais aussi un contenu. 2. Les objets mathématiques sont saisis immédiatement par l'esprit pensant. La connaissance mathématique est par suite indépendante de l'expérience » (Dumoncel, 2002, p.28). Il en résulte un *rapport à la réalité* différent de celui des formalistes, pour qui les questions concrètes ne doivent pas intervenir dans les développements mathématiques.

L'histoire donnera en partie raison au courant intuitionniste, dans le sens où l'on peut considérer que le programme hilbertien fut un échec, du fait qu'il ne toucha pas au but, ne trouvant pas un fondement formel solide et absolu, et donc indépendant de l'intuition, à toute connaissance mathématique.

3) Le théorème d'incomplétude de Gödel

La course vers une rigueur formelle toujours plus grande, bannissant tout recours à l'intuition, est apparue assez rapidement comme sans fin. Toute présentation axiomatique nécessite d'oublier le sens concret des termes. Pourtant, on conserve tout de même des termes qui ont un sens antérieur à l'axiomatique (par exemple, si l'on fait appel à la logique ou à

²⁹ On parle également, pour Hilbert, d'approche *existentielle*.

l'arithmétique dans l'axiomatisation de la géométrie). Or, l'idéal de l'axiomatique est de ne rien présupposer. La question qui se pose, dès lors, est de savoir si l'on sera capable, « comme l'y invite aussitôt le souci de pureté logique, [de] faire remonter l'axiomatisation de la science jusqu'à un point ultime, de la géométrie à l'arithmétique, de l'arithmétique à la logique, de façon à absorber les connaissances jusque-là utilisées comme antérieures – et par conséquent demeurées extérieures – à l'axiomatique, et à éliminer ainsi toute présupposition intuitive ? » (Blanché, 1955, p.32-33).

C'est cette tentative de réduction vers une base plus solide que l'on retrouve dans les recherches de preuve de la consistance de l'arithmétique et de la logique. Or, l'un des problèmes de ces preuves métamathématiques réside dans le fait que pour que la preuve soit acceptable, il faut qu'elle ne fasse usage que d'enchaînements déductifs simples et acceptés de tous. Ce qui conduit, une fois de plus, à faire nécessairement appel à l'intuition, mais à des intuitions élémentaires, pour que cela soit acceptable en termes de rigueur. Cependant, cette présence récalcitrante de l'intuition pouvait sembler nuisible, une fois de plus, dans une approche formaliste qui voulait s'en détacher.

C'est ce qui explique les tentatives pour formuler les règles de la syntaxe logique, à l'intérieur même de la théorie qui utilisait cette syntaxe (ce qui fut tenté avec l'arithmétisation de la syntaxe logique). Mais l'année 1931 marqua un coup d'arrêt à ce projet. Gödel (1931) démontra avec son théorème d'incomplétude que, premièrement, ni l'arithmétique, ni la logique de Russel et Whitehead, ni la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel ne pouvaient être présentées sous forme d'un système complet, car ce système comporterait nécessairement des énoncés indécidables, et deuxièmement que l'affirmation de la non-contradiction de ces systèmes faisaient justement partie de ces énoncés indécidables. Gödel démontra qu'il existait dans l'arithmétique certaines propositions que l'on savait vraies, mais que l'on était incapables de démontrer à l'intérieur du système axiomatique construit. Ainsi il mettait fin au « vieil idéal d'une démonstration absolue, [qui visait] à constituer un formalisme qui fût susceptible de s'achever en se refermant, en quelque sorte, sur lui-même » (Blanché, 1955, p.68). Les années qui suivirent conduisirent au constat qu'« il est impossible de mener jusqu'à un terme final l'œuvre d'axiomatisation, la réduction de l'intuitif par sa résorption dans le logique : toujours il subsiste quelque chose d'antérieur, un intuitif préalable » (p.73).

On peut donc discerner, au travers du développement de la méthode axiomatique dans les mathématiques, un double mouvement. D'un côté, s'opère une révolution dans la façon de présenter les théories mathématiques. De l'autre côté, cette révolution conduit à se poser de nouvelles questions, qui seront dites métamathématiques et qui déboucheront en partie sur une impasse. Il n'en demeure pas moins que le développement de la méthode axiomatique bouscula profondément les conceptions épistémologiques de la discipline : même si la formalisation au sens strict (qui passe par la construction de *systèmes formels*) ne touche pas

les sciences positives (comme nous le montrerons dans le second chapitre, au sujet de l'économie), puisque celles-ci font appel à des notions antérieures, non définies au sein du système axiomatique, il n'en demeure pas moins que la méthode axiomatique y joue, en économie et en physique, un rôle important dans la formulation des théories.

II – L'axiomatisation des mathématiques : l'émergence d'une nouvelle épistémologie

Dans notre introduction, nous avons mis en avant le concept de *style de pensée axiomatique*. Nous avons alors soulevé un ensemble de questions épistémologiques qui nous semblait revêtir un grand intérêt pour l'analyse de celui-ci (voir p.17) : quels sont les *critères de la justification* qui permettent d'évaluer une théorie et de la comparer avec d'autres théories ? Quel *rapport avec la réalité* et les données empiriques cette théorie doit-elle développer ? Comment doit-elle progresser et s'enrichir ? Nous pensons qu'une réponse (cependant incomplète) peut être apportée à ces questions, au sujet de l'axiomatique, en nous intéressant aux trois points suivants : le principe de séparation entre structure logique et contenu interprétatif d'une théorie ; l'idéal de *généralisation mathématique* ; le rôle de l'interprétation d'un système axiomatique.

A) La distinction entre contenu logique et contenu interprétatif

Nous avons vu que la rupture avec l'*axiomatique des Anciens* s'opère par la remise en cause du cinquième postulat d'Euclide. Cette proposition sur les parallèles reposait sur une sorte d'évidence empirique, mais les tentatives pour essayer de la démontrer, à l'intérieur du système euclidien, furent des échecs. Le développement des géométries non-euclidiennes et les débuts de l'axiomatisation de la géométrie bouleverseront le statut des postulats.

Dans l'*axiomatique des Modernes*, il n'est plus question de partir de principes reposant sur une évidence empirique. Les propositions premières sont vues comme des conventions, au-delà du vrai ou du faux. C'est donc la structure logique qui importe dans ce type d'approche et non plus la vérité empirique : « Le rôle qu'on a longtemps fait jouer à l'évidence est lié à l'idéal d'une mathématique catégorique, où ce qui n'est pas démontré doit cependant, de quelque manière, produire ses titres à la vérité. Il s'amenuise dans une conception hypothético-déductive, axée sur l'idée de cohérence logique plutôt que sur celle de vérité absolue » (Blanché, 1955, p.19).

Cependant, il est possible de se concentrer sur la structure logique du système axiomatisé uniquement car celle-ci est séparée de ses interprétations concrètes possibles. On

fait face ici à un « présupposé caractéristique de toute philosophie des sciences de tradition positiviste » qui affirme que « ce que dit une théorie (son contenu) ne dépend pas de la manière dont elle le dit (sa formulation) » (Vorms, 2011, p.63). A partir du moment où ce présupposé est accepté, on considère alors qu'il est possible « d'isoler le contenu objectif d'une théorie à l'aide d'outils formels. Pour les défenseurs de ces approches, le contenu d'une théorie, c'est précisément ce qui est exprimé par sa reconstruction formelle, cette dernière ne rendant pas compte des aspects des formulations usuelles de cette théorie qui n'en affectent ni n'en modifient la structure logique ou mathématique » (p.63). Dans le cadre du *style de pensée axiomatique* de l'économie, ce présupposé conduit à penser que tout phénomène économique peut être décrit de manière transparente par un système d'équations mathématiques.

Si l'on se concentre sur la structure logique, l'accent est alors mis sur le principe de consistance, cher à David Hilbert. Toute contradiction révélée est la preuve d'une erreur logique. Ce qui est d'une grande importance pour les preuves d'existence d'objets mathématiques, à l'aide de *démonstration par l'absurde*. On parle aussi de *démonstrations non-constructives*, par opposition aux *démonstrations constructives*. Friedrich Waismann, mathématicien autrichien membre du Cercle de Vienne, définit une preuve constructive comme « une procédure, une méthode systématique, ou un algorithme » grâce auquel l'existence « d'un nombre, ou d'une fonction, ou d'une équation (...) peut être trouvée, ou approchée, ou construite d'une manière systématique, selon une règle de procédure » (Punzo, 1992, p.7). A l'inverse, pour les preuves non-constructives « on dit parfois (...) qu'il existe un objet d'une sorte particulière, sans savoir du moins ce qu'il faut faire pour le trouver ou le calculer approximativement. Comment, dès lors, sait-on qu'un tel nombre existe ? Ici l'existence repose sur une preuve essentiellement indirecte : supposons que ce nombre n'existe pas, il peut être prouvé qu'une contradiction survient » (p.7). Si la non-existence d'un objet conduit à des contradictions dans un système axiomatique, c'est que cet objet existe, selon le principe du tiers-exclu³⁰.

Bien entendu, le travail de l'axiomaticien n'est pas un travail totalement détaché d'une base matérielle. La mise en forme axiomatique est le résultat d'un processus dont le point de départ est l'accumulation d'une masse de connaissances concrètes. En ce sens, il existe une double lecture d'une théorie axiomatique, selon que l'on s'intéresse à la cohérence logique ou à la vérité empirique. Mais le but de l'axiomatique est de structurer ces connaissances en dégagant des axiomes. En considérant que la masse de connaissances à la base du contenu de la théorie est fixée, l'axiomatique a sa propre *logique de développement*³¹.

³⁰ Nous reviendrons dans les prochains chapitres sur les preuves non-constructives, car elles sont de toute première importance pour une partie de la théorie économique.

³¹ Ce qui pose la question de l'existence d'un conflit entre cette *logique de développement* de l'axiomatique et une logique d'évolution fondée sur des critères plus empiriques. On peut supposer qu'il existe pour le chercheur une *querelle de priorité* entre le *point de vue axiomatique* et le *point de vue empirique*. C'est cette *querelle* que nous tenterons de révéler dans le troisième chapitre en analysant l'article d'Arrow et Debreu sur l'existence d'un équilibre général concurrentiel.

B) *Le progrès dans une théorie axiomatisée*

L'une des questions épistémologiques majeures qui se pose au sujet d'une théorie axiomatisée est de savoir comment doit progresser cette théorie. Ce qui compte, une fois l'attention portée sur la structure logique, et non le contenu du système, est le nombre d'axiomes que l'on va faire intervenir, pour obtenir des théorèmes. Plus le nombre d'axiomes est grand, plus le système est contraint et déterminé³². L'objectif est alors de rendre minimale la base du système : « Au lieu de modifier, dans un système de postulats compatibles et indépendants, l'un d'eux, on peut aussi essayer de simplement le retirer, sans toucher aux autres. On *affaiblit* ainsi le système, puisqu'on lui ôte certaines déterminations ; par là même on l'élargit, en ouvrant la porte à certaines possibilités que le postulat qu'on vient d'extraire avait précisément pour effet d'exclure. En d'autres termes, le système se trouve ainsi appauvri en compréhension et enrichi en extension » (Blanché, 1955, p.53).

Une fois qu'une théorie concrète a été fixée dans un cadre axiomatique, le progrès de la théorie axiomatisée se fait en jouant sur la liste des axiomes. Et c'est le vieux principe du rasoir d'Occam qui est gage de qualité dans ce domaine : entre deux systèmes jugés équivalents, on choisit celui dont les hypothèses sont moins nombreuses. De l'axiomatique se dégage ainsi une tension vers la réduction du nombre d'axiomes. C'est ce que l'on appelle la généralisation. Mais cette généralisation peut prendre deux formes. On nommera la première forme, *élargissement* : elle concerne les interprétations que l'on donne au système axiomatique (nous y reviendrons dans la prochaine partie). On appellera la seconde forme l'*affaiblissement* : il s'agit soit d'affaiblir la contrainte logique que pose un axiome sur le système, soit de le supprimer tout bonnement³³.

L'axiomaticien est donc à la recherche d'un idéal d'économie de principes et de simplicité. Cependant ce processus d'affaiblissement n'est pas sans effet : « la plus grande simplicité intrinsèque d'un système pourra rendre plus malaisée son utilisation concrète si, dans le domaine considéré, aucune entité ne correspond plus, de façon directe, aux termes premiers du système » (Blanché, 1955, p.53). L'exigence logique pousse à rendre la plus mince possible la liste d'axiomes permettant de démontrer des théorèmes mais on perd en compréhension ce que l'on gagne en généralité. Le système axiomatique est plus général, plus englobant, mais il est plus malaisé de l'utiliser. La *logique de développement* de la méthode

³² Dans le cadre d'un système formulé mathématiquement, nous parlerons de *contrainte mathématique*. Prenons un exemple : si notre objectif, afin de produire un théorème « intéressant », est d'utiliser le théorème du point fixe de Brouwer (nous reviendrons plus en détail, dans les chapitres suivants, sur ce théorème), il est nécessaire qu'un certain nombre de conditions soit présent. Il faut, par exemple, que les ensembles de départ soient non-vides, convexes et compacts. Il sera alors sans doute nécessaire de poser un certain nombre d'hypothèses (ou axiomes) sur ces ensembles de départ, afin d'obtenir les conditions requises pour le théorème du point fixe. Ces hypothèses constitueront des *contraintes mathématiques*.

³³ Cette distinction est en partie inspirée de Walliser (1998). Elle ne se trouve pas chez Blanché. Nous nous permettrons plus loin de parler de *généralisation mathématique* (par opposition à la *généralisation interprétative*) dans le cas de l'*affaiblissement*.

axiomatique peut aller à l'encontre de la puissance interprétative de la théorie axiomatisée en question.

Pour mieux comprendre cet enjeu, il est nécessaire de traiter plus précisément du rôle de l'interprétation d'un système axiomatique.

C) *L'interprétation d'un système axiomatique*

Une théorie axiomatique *s'élargit* quand elle permet d'expliquer de nouveaux phénomènes (dans l'idéal, sans que sa structure logique en soit modifiée). *L'élargissement* correspond en fait à une réduction de la *contrainte interprétative* qui pèse sur la théorie. Nous avons vu plus haut que plusieurs axiomatiques ayant la même structure logique sont dites *isomorphes*. Ainsi, la *généralisation interprétative* permet de regrouper sous la bannière d'une même théorie axiomatique, un ensemble de théories jugées disparates au départ.

Cela est rendu possible par la non-définition préalable des termes premiers. Puisque traiter d'un système axiomatique, c'est traiter de sa structure syntaxique et non de son contenu sémantique, il n'est pas nécessaire de définir les termes premiers, utilisés dans le système. La seule condition préalable est qu'ils respectent les axiomes. Dès lors, cette non-spécification initiale permet de donner tout un ensemble d'interprétations des théorèmes produits par la théorie axiomatique. Le même terme premier peut désigner un ensemble d'objets et de phénomènes différents, du moment que cela correspond à la structure logique développée³⁴.

Cette *équivocité* des éléments d'une axiomatique, qui pouvait paraître un défaut au départ, est en fait jugée comme une qualité par les axiomaticiens : « en dégageant la *structure invariante* commune à des théories apparemment hétérogènes [la méthode axiomatique] permet de les dominer par la pensée et d'embrasser du regard, en une vue plus synthétique, de vastes paysages intellectuels qu'on ne connaissait encore que par fragments » (Blanché, 1955, p.77-78). La richesse des interprétations possibles révèle la fécondité pour la découverte de la méthode axiomatique. Le groupe Bourbaki³⁵ en fit d'ailleurs l'aspect central de sa conception de l'axiomatique : les mathématiques constituent un « réservoir de formes abstraites ».

³⁴ Un bon exemple en est donné avec l'axiomatisation de Peano (1889) qui au départ avait pour but de définir, à l'aide de cinq axiomes seulement, la suite des nombres entiers naturels. On s'est rendu compte assez vite que ces mêmes axiomes pouvaient servir, par exemple, à définir la suite des nombres rationnels.

³⁵ Dans les années 1930, un groupe de jeunes mathématiciens français (dont les plus en vue seront André Weil, Jean Dieudonné, Henri Cartan et Claude Chevalley), étudiants à l'Ecole Normale Supérieure, décide de former un collectif afin de remettre en cause l'enseignement des mathématiques tel qu'il est pratiqué en France à cette époque et de rédiger un traité de mathématiques regroupant de nombreux domaines d'études. Afin de donner un caractère confidentiel et clanique à leur entreprise, le groupe décide de publier sous un nom imaginaire : Nicolas Bourbaki. Le traité s'intitulera *Eléments de Mathématiques*. Un premier « fascicule de résultats » sera publié en 1939, mais les deux premiers chapitres des *Eléments*, intitulés « Description des mathématiques formelles » et « Théorie des ensembles » ne sortiront qu'en 1954 et les chapitres suivants s'étaleront sur plusieurs décennies. Cet ouvrage aura un retentissement important dans le domaine des mathématiques. A noter également que Henri Cartan sera le professeur de Debreu à l'*Ecole Normale Supérieure*.

Cette idée que Bourbaki poussa à son paroxysme était cependant déjà présente auparavant, dès la fin du XIX^e siècle. Elle est au fondement de ce que Giorgio Israel (1996) nomme la *modélisation mathématique*. Il en distingue deux caractéristiques spécifiques : « En premier lieu, le renoncement à toute tentative d'aboutir à une image unifiée de la nature : un modèle mathématique est un fragment de mathématique appliqué à un fragment de réalité. Non seulement un seul modèle peut décrire différentes situations réelles, mais le même fragment de réalité peut être représenté à l'aide de modèles différents. En second lieu, la méthode fondamentale de la modélisation est l'« analogie mathématique » (où le fragment mathématique unifie tous les phénomènes qu'il est censé représenter), et non plus l'« analogie mécanique », qui a été pendant très longtemps le procédé principal de la mathématisation » (p.11). La conception classique, qui fait appel à l'« analogie mécanique », donne une place plus importante aux fondements empiriques et expérimentaux et « les équations mathématiques en découlent » (p.71). Les modèles construits par le scientifique « sont et resteront *séparés* par la nature *spécifique* de leurs objets, par la diversité irréductible des *faits* dont ils parlent » (p.71). Ainsi, un modèle « chimique » ne sera jamais jugé identique à un modèle « biologique ». La situation change à partir du moment où l'on considère les mathématiques utilisées comme des formes « vides » qui peuvent accueillir différents « contenus possibles ».

Dès lors, « c'est la correspondance formelle qui compte » (p.71). On met en avant des isomorphismes logiques, alors même que l'on traite d'objets différents³⁶. Le recours à l'« analogie mathématique » constitue lui aussi un trait majeur du *style de pensée axiomatique*, que revendiqua principalement Gérard Debreu.

Conclusion

A partir du XIX^e siècle, la géométrie euclidienne est jugée insatisfaisante : certains postulats sont invoqués pendant une démonstration, de manière parfaitement *ad hoc* (c'est le cas du fameux cinquième postulat d'Euclide sur les parallèles), d'autres ne sont pas formulés explicitement, mais appuient les démonstrations implicitement. On reproche également au système euclidien de s'appuyer bien trop sur l'intuition. On invoque alors la nécessité d'une plus grande rigueur logique, rigueur qui passerait par le détachement total d'avec toutes formes d'intuitions et par l'énonciation explicite de tous les termes premiers et de toutes les propositions premières. C'est uniquement à partir de ces termes et de ces propositions que

³⁶ Cette concentration sur la structure logique et la recherche d'isomorphisme sont au fondement de l'*image du savoir* de Gérard Debreu. Ce dernier se félicite par exemple, à de nombreuses reprises, que le modèle d'équilibre général concurrentiel ait pu intégrer une nouvelle interprétation des biens (définis suivant les états du monde), sans que la structure formelle du modèle soit changée. Il recherche également un théorème d'existence qui soit suffisamment général pour englober l'existence d'un équilibre concurrentiel et l'existence d'un équilibre pour les jeux non-coopératifs (voir chapitre 3).

peuvent être déduits des théorèmes, par des inférences logiques. Cette revendication de rigueur est le fil conducteur qui poussera à axiomatiser la géométrie, l'arithmétique, la théorie des ensembles, puis l'ensemble des règles de construction des propositions et de déduction. Elle s'étendra même jusqu'à l'économie, dès les années 1930.

Le développement et l'expansion de la méthode axiomatique s'accompagnent de bouleversements épistémologiques profonds. Au fondement de la conception axiomatique se trouve l'idée qu'il est possible et impératif de séparer distinctement la structure logique du contenu sémantique de la théorie axiomatisée. Ce qui donne la possibilité de se concentrer principalement sur la première au détriment du second. La question empirique est reléguée au second plan et l'attention est d'abord portée sur le système d'axiomes que l'on a construit, sur les théorèmes que l'on peut prouver avec ces axiomes et sur les modifications possibles pour établir d'autres résultats. L'axiomatique a dès lors sa propre *logique de développement* : l'axiomaticien recherche la plus grande généralité logique et mathématique. L'objectif est donc de réduire le nombre d'axiomes d'un système ou du moins d'*affaiblir* ces axiomes. L'interprétation de la structure logique n'arrive que dans un second temps. L'idéal de l'axiomatique (dans sa conception la plus stricte, celle du groupe Bourbaki) est alors l'*élargissement* de la théorie, c'est-à-dire l'affaiblissement de sa *contrainte interprétative* et l'explication de plusieurs phénomènes, sans que la structure logique ne soit modifiée. Cependant, en dehors des cas idéaux (l'élargissement du modèle d'équilibre général, avec l'interprétation des biens en termes de biens contingents en est un), on peut penser que l'affaiblissement de la *contrainte interprétative* et celui de la *contrainte mathématique* ne vont pas nécessairement de pairs. Il peut exister un conflit entre ces deux *logiques de développement*, qui manifeste l'existence d'une *querelle de priorité*.

Ces tensions nous font bien sentir que la méthode axiomatique n'est pas une méthode dont l'utilisation est unique et neutre. Cette utilisation peut varier suivant les fins que se donne le scientifique. Au travers de son utilisation (plus ou moins abstraite et formelle) se retrouvent des engagements épistémologiques propres au chercheur. On peut avoir quelques intuitions de cette flexibilité de la méthode axiomatique en s'intéressant aux conceptions épistémologiques respectives de Hilbert et de Bourbaki, à travers les travaux de Corry (1992, 1997), de Peckhaus (2003) ou de Rowe (1997). Les textes du groupe Bourbaki (1950), et ceux de ses membres, (Dieudonné [1962], Cartan [1980]) sont également riches en enseignement sur la conception bourbakiste de l'axiomatique et du rôle des mathématiques. En ce qui concerne Hilbert, il manifeste un réel intérêt pour son application aux sciences empiriques. L'axiomatique est présentée comme un outil de clarification d'une théorie, permettant de dégager le rôle de telle ou telle hypothèse, de mettre en avant les limitations de tel ou tel théorème. Mais la vision de l'axiomatique chez Hilbert semble profondément ambivalente (comme le souligne l'historiographie récente des mathématiques) : en effet, Hilbert est souvent reconnu, à juste titre, pour sa conception formaliste de l'axiomatique. C'est cette vision qui inspira sans doute en grande partie les travaux du groupe Bourbaki, présentés comme un modèle de rigueur. Tout aspect intuitif ou empirique y est absent. Bourbaki

popularise l'idée de mathématiques pour les mathématiques, de mathématiques pures. La méthode axiomatique est le mode de raisonnement qui permet d'unifier toutes les mathématiques en révélant les identités de structures logiques et en dégageant la hiérarchie structurelle propre aux mathématiques. Bien que fondé sur aucun argument formel, cette représentation des mathématiques marqua profondément la discipline à l'époque, en France et aux Etats-Unis.

Un contraste existe alors, entre ces deux représentants de l'*axiomatique des Modernes*, entre d'un côté l'*image empirique du savoir* de David Hilbert et de l'autre l'*image structurelle du savoir* véhiculée par le groupe Bourbaki. Or, nous pensons que les lignes de démarcation au fondement de ce contraste se retrouvent également en économie et permettent de mieux comprendre les travaux de Kenneth J. Arrow et de Gérard Debreu, sur les preuves d'existence d'un équilibre général. Tous deux sont des représentants de premier plan du *style de pensée axiomatique* de l'économie mathématique naissante (dans les années 1950). Il n'en demeure pas moins que chacun défend implicitement une *image du savoir* différente.

Mais avant d'en arriver là, il est nécessaire d'analyser par quel biais et de quelle manière l'axiomatique s'installe peu à peu dans la discipline économique et d'étudier le développement d'un *style de pensée axiomatique* en économie. Ce sera la tâche du second chapitre.

Chapitre II : Le développement de la méthode axiomatique, en économie

Après avoir définies la méthode axiomatique et les questions qu'elle pose au niveau épistémologique, on peut se demander comment elle est utilisée en économie. Comment devient-elle une méthode légitime intégrée à une partie de la théorie économique³⁷ ? Peut-on parler d'un héritage hilbertien ou/et d'un héritage bourbakiste en économie ? Dans quelle mesure l'intégration de la méthode axiomatique renouvelle-t-elle les questions épistémologiques de la discipline ? Sur ce dernier point, on imagine assez facilement que l'axiomatisation de la théorie économique va bouleverser pour ceux qui l'utilisent, la façon de concevoir la valeur d'une théorie et la conception du chemin qu'elle doit suivre, pour progresser.

Pour répondre à ces questions, nous tâcherons de produire une histoire de la genèse de l'axiomatisation de la théorie économique. Le premier acte décisif se déroule à Vienne dans les années 1930, principalement autour du colloque mathématique de Karl Menger. En son sein, on rencontre Abraham Wald, von Neumann ou Morgenstern, trois pionniers dans la recherche d'une plus grande rigueur en économie. Mais les aléas de l'histoire et l'invasion de l'Autriche par l'Allemagne nazie en 1938 conduisent ces derniers à émigrer aux Etats-Unis. C'est donc de l'autre côté de l'Atlantique que rebondit cette histoire, là où se déroulera ce que l'on peut appeler une « révolution formaliste » (Blaug, 2003), toute aussi importante (si ce n'est plus) pour la discipline économique que la fameuse révolution keynésienne. Cette revue d'histoire nous permettra, dans une dernière partie, de dégager les grandes lignes de ce qu'est l'axiomatique en économie et de faire émerger les problèmes épistémologiques qui lui sont liés.

I – Le rôle de Vienne, dans les années 1930, dans le développement de la méthode axiomatique en économie

Au début des années 1930, le modèle walrassien est redécouvert, paradoxalement, par des mathématiciens. Comme l'expliquent Ingrao et Israel, « c'est sans doute la première fois que des travaux d'économie mathématique sont présentés dans un séminaire universitaire de mathématiciens et discutés par une assemblée de mathématiciens » (Ingrao et Israel, 1987, p.190-191). C'est dans ce cadre que se feront les premiers pas de l'axiomatisation de la

³⁷ La méthode axiomatique ne fait pas l'unanimité et son utilisation n'est pas répandue à l'époque (ni aujourd'hui) à l'ensemble de la discipline. On la retrouve néanmoins, comme nous le verrons plus loin, outre dans la TEG, dans la théorie des jeux, dans la théorie de la décision et dans l'économie du bien-être.

théorie de l'équilibre général, principalement au travers des travaux de Wald (1936) et von Neumann (1937). Vienne et le colloque de Karl Menger influencèrent sans doute également les travaux de Morgenstern et von Neumann sur la théorie des jeux (1944), marquant une étape décisive dans le traitement des problèmes économiques : la question de la structure logique semble, dans ce cadre, prendre le pas sur les questions d'interprétations et de pertinence empirique.

A) Le colloque mathématique de Karl Menger

Au début des années 1930, Vienne est le centre philosophique et scientifique le plus fertile d'Europe. Le Cercle de Vienne de Moritz Schlick, Hans Hahn, Rudolf Carnap ou bien encore Otto Neurath, y occupe le tout premier plan, défendant une philosophie nommée *positivisme logique*. Malgré des divergences de pensée, on leur reconnaît un programme commun derrière la volonté d'unifier la science (par un réductionnisme à la science physique) et de cantonner la philosophie à un rôle de vérification et de contrôle des arguments logiques de la science (de ce fait, ils rejettent fermement toute affirmation métaphysique). Autour de ce cercle gravitent, de près ou de loin, des grands noms de la philosophie et de la science du XX^e siècle : Kurt Gödel, Albert Einstein, Ludwig Wittgenstein, David Hilbert, Bertrand Russell ou bien encore Karl Popper. Karl Menger, le fils de l'économiste Carl Menger, fut très proche de Hahn et de Neurath. Le colloque mathématique qu'il anima durant les années 1930 fut à la pointe de la recherche et contribua à produire de nouveaux résultats, par exemple, dans un domaine relativement neuf : la topologie. C'est également en son sein que Gödel présenta son fameux théorème d'incomplétude en 1931. Mais comme nous l'avons expliqué un peu plus haut, le colloque mathématique exercera également une influence de premier plan sur la discipline économique et ce, pour deux raisons : tout d'abord, il remit au goût du jour le modèle walrassien, en s'attaquant aux problèmes d'existence et d'unicité de l'équilibre. Deuxièmement, on s'employa à traiter ces problèmes à l'aide d'outils mathématiques inédits (utilisation de la méthode axiomatique, du théorème du point fixe, de techniques topologiques...), sans commune mesure avec ceux utilisés par les économistes à la même époque (principalement le calcul différentiel).

Pour bien comprendre la révolution formaliste qui s'exercera sur l'économie, dans les années 1950, il nous paraît donc utile de s'intéresser à ce colloque mathématique en étudiant tout d'abord la conception des mathématiques de son créateur, puis en présentant brièvement les travaux d'économie mathématique présentés en son sein.

1) Menger : de l'intuitionnisme à « l'implicationnisme »

La carrière scientifique de Menger prend son envol en tant qu'assistant du célèbre mathématicien Brouwer, de 1925 à 1927, à Amsterdam. Séduit au départ par l'intuitionnisme, il prend vite ses distances avec cette philosophie. Dans un article de 1930, Menger « délivre une critique mordante de Brouwer, condamnant les jugements intuitionnistes sur ce qui est ou non sensé et valide dans les mathématiques. Il affirme que les intuitionnistes, qui ne sont pas en accord (...) sur ce que constituent les mathématiques « constructives », regardent les autres développements comme sans aucune signification, une position qu'il déclare être « dépourvue de tout contenu cognitif » » (Leonard, 2010, p.124).

Menger se lasse rapidement de ces questions métamathématiques qui pour lui revêtaient peu d'intérêt pour le praticien. Ce qui l'intéresse, c'est de produire de nouveaux résultats en mathématiques plutôt que de se cantonner à des débats stériles. Menger défend ainsi « une position *implicationniste*, selon laquelle seuls importent les énoncés mathématiques et les règles explicitement exposées de transformation de ces énoncés (...). Menger rejette ainsi l'intuitionnisme en redéfinissant ce qui constitue le propre de l'activité mathématiques. Les mathématiques légitimes comportent des énoncés de premier-ordres et leur transformation par des règles clairement énoncées ; elles ne comportent pas de propos de second-ordres sur ce qui a une signification ou est acceptable. Ces derniers sont extérieurs aux mathématiques, appartenant aux domaines de la psychologie, de la biographie et de l'histoire » (Leonard, 2010, p.124).

A travers cet « implicationnisme », Menger semble attacher une grande importance à la rigueur du raisonnement et à son organisation logique. Les énoncés mathématiques et les règles qui permettent leurs transformations doivent être clairement énoncés. Peu lui importe les débats philosophiques entourant la discipline. Cette position se retrouve dans son détachement progressif d'avec le Cercle de Vienne et plus particulièrement d'avec son ami Hans Hahn. Il rejette l'attachement de ce dernier pour la pensée de Wittgenstein qui utilise les termes « d'insignifiance » et de « tautologique » pour qualifier la discipline mathématique. Ce qui conduit certains philosophes à adopter des positions très dures sur le rôle des mathématiques, positions bien entendu rejetées par Menger (Leonard, 2010, p.124-125).

La création du colloque mathématique par Karl Menger justifie parfaitement sa vision des mathématiques. Le colloque sera un vecteur de développement de nouveaux domaines mathématiques tels que la topologie. L'accent sera également porté sur la rigueur logique des résultats produits. Un vaste ensemble de problèmes mathématiques y sera présenté et c'est sous cette étiquette de « problème mathématique » que des mathématiciens vont s'attaquer au modèle de Walras-Cassel, pour tenter de trouver une solution à la question de l'existence d'un équilibre général. Les travaux de Wald qui ont donné lieu à quatre articles sur ces questions et

ceux de von Neumann (l'article de 1937) constituent alors un point de rupture fondamental dans le traitement de ce vieux problème économique³⁸.

2) Les articles fondateurs de Wald et Von Neumann : une première pierre dans la révolution formaliste de l'économie

Cette rupture, Menger en est bien conscient quand il affirme qu'avec « les travaux de Wald nous mettons un terme à la période durant laquelle les économistes formulaient simplement des équations, sans s'inquiéter de l'existence ou de l'unicité de leurs solutions, s'assurant au mieux que le nombre d'équations et le nombre d'inconnues étaient égaux (quelque chose qui n'est jamais nécessaire ni suffisant pour la résolution et l'unicité). Dans le futur, quand les économistes formuleront des équations et s'inquiéteront eux-mêmes de l'existence de solutions (comme les physiciens le font depuis longtemps), ils auront à traiter explicitement des problèmes mathématiques fondamentaux de l'existence et de l'unicité » (Ingrao et Israel, 1987, p.203-204). L'égalité entre le nombre d'équations et le nombre d'inconnues qui constituait une preuve de cohérence pour Walras n'a plus aucun intérêt pour les mathématiciens du colloque mathématique de Menger. C'est une fausse piste, dans l'optique de prouver l'existence d'un équilibre général et l'unicité de celui-ci.

Les travaux de Wald constituent un premier effort dans la voie de l'axiomatisation de la théorie de l'équilibre général. Il identifie clairement « le système de conditions sous lequel les thèses poursuivies – dans ce cas l'existence et l'unicité de l'équilibre – peuvent être rigoureusement démontrées, laissant de côté en un certain sens l'interprétation économique de ces conditions » (Ingrao et Israel, 1987, p.208). La signification concrète du modèle n'est pas abandonnée, mais plutôt séparée des développements formels. On retrouve l'idéal de séparation entre structure logique et interprétations. Wald (1936) passe une grande partie de l'article à commenter les hypothèses choisies pour évaluer leur réalisme et leur signification. Il tente de leur trouver une interprétation empirique. Mais comme l'explique Ingrao et Israel, cette tentative d'interprétation constitue une « *justification a posteriori*. Les mathématiques viennent en premier » (p.208). L'accent est mis sur les hypothèses qui permettent de réaliser ces démonstrations : convexité, axiome faible des préférences révélées³⁹, substituabilité

³⁸ Le premier article de Wald est présenté le 19 mars 1934 et propose une solution au système d'équations d'une économie de production proposé par Schlesinger. Un second article est présenté en novembre de la même année et affaiblit les conditions nécessaires à l'existence d'une telle solution. Le troisième article n'a jamais été retrouvé. Mais un quatrième article, synthétisant tous ces travaux (celui qui est cité en bibliographie et qui fut traduit en anglais dans la revue *Econometrica*) laisse penser que Wald aurait utilisé un théorème du point fixe dans son troisième article. Dans ce dernier article il propose également une solution pour un système d'équations d'une économie d'échange (voir Weintraub [1983]).

³⁹ Wald ne nomme pas cet axiome de la sorte. Mais formellement, il est assez semblable à celui que Samuelson formulera quelques années plus tard.

brute... Les hypothèses sont discutées sur le plan des *contraintes mathématiques et interprétatives* qu'elles génèrent⁴⁰.

Cependant, la primauté donnée à l'aspect formel du modèle conduit à choisir des hypothèses permettant des résultats plus puissants mathématiquement mais plus difficiles à interpréter. La *querelle de priorité* penche du côté de la *généralité mathématique* et le modèle d'équilibre général est ainsi rendu très abstrait. Wald s'en défend en expliquant que « dans de nombreux domaines de l'économie mathématique, on recourt à des abstractions à ce point fondamentales, il faut bien l'admettre, qu'on ne peut quasiment plus parler d'une bonne approximation de la réalité. Mais il conviendrait de se rappeler que d'une part l'économie mathématique est une science encore très jeune et que d'autre part, les phénomènes économiques sont d'une nature tellement compliquée, embrouillée, que des abstractions à grande portée doivent être utilisées au tout début afin de pouvoir visualiser le problème et que la transition vers des hypothèses plus réalistes doit se faire progressivement » (Wald, 1936, p.396).⁴¹ Même si tout le poids de l'analyse est mis sur la question formelle de l'existence et de l'unicité, la question de la signification concrète reste présente dans les propos et demeure un but à atteindre.

L'article de von Neumann qui nous intéresse ici (présentant une preuve d'existence pour un modèle d'équilibre général) n'est pas un article typiquement « viennois » dans le sens où ce dernier n'est pas un « permanent » du colloque mathématique de Menger. L'article fut d'ailleurs d'abord présenté aux Etats-Unis à l'université de Princeton en 1932. Mais il sera publié pour la première fois en Allemand en 1937, dans les comptes-rendus du colloque mathématique. Cet article revêt un intérêt de tout premier plan pour trois raisons : « premièrement, le papier contient des techniques et des outils riches tels que la dualité, la convexité, les points fixes, qui sont appliqués pour la première fois en économie. Deuxièmement, le papier présente le premier exemple formel d'un modèle d'analyse d'activité pour la production et d'un modèle de croissance équilibrée. Troisièmement, le papier contient une des toutes premières preuves d'existence d'un équilibre économique général » (Giocoli, 2003, p.7). Le théorème du point fixe va constituer par la suite un outil majeur des preuves d'existence d'un équilibre général, utilisé (indirectement) par Arrow-Debreu (1954) ou par Debreu (1959)⁴².

⁴⁰ Il est intéressant de noter que selon Wolfowitz, évaluant les travaux de Wald, ce dernier était surtout intéressé par la production de nouveaux résultats : « il ne prenait pas le temps de rechercher des preuves plus élégantes (...). Wald s'ennuyait rarement à retravailler ses écrits pour plus d'élégance et de clarté mathématiques » (Ingrao et Israel, 1987, p.204). Dans une présentation axiomatique, la simplification technique et esthétique de la preuve constitue un objectif important même si secondaire. Objectif que ne semblait pas rechercher Abraham Wald.

⁴¹ La traduction est issue de la traduction française de *Three essays on the state of economic science*, de Koopmans (1957), à partir de Abraham Wald, « On Some Systems of Equations of Mathematical Economics », *Econometrica*, 1951, 19(4), p.368-403, traduction anglaise de l'article en allemand de 1936.

⁴² Le théorème du point fixe développé initialement par Brouwer affirme que toute fonction continue appliquée d'un espace non-vide, convexe et compact (c'est-à-dire borné et fermé) dans lui-même, admet un point fixe x^* , tel que $f(x^*) = x^*$. Le théorème sera généralisé par Kakutani en 1941 et s'étend alors aux correspondances, c'est-

Von Neumann commence par réduire son système d'inéquations à un problème de minimax, ce qui lui permet de revenir sur son article de 1928, dans lequel il expose une solution d'équilibre pour un jeu à somme-nulle à deux joueurs. Il applique ensuite le théorème du point fixe de Brouwer qu'il généralise, afin de démontrer l'existence d'une solution à son système d'inégalités, c'est-à-dire l'existence d'un sentier de croissance équilibrée. Avec von Neumann et son article de 1937, on entre alors de plain-pied dans le traitement strictement formel de problèmes économiques. En effet, comme le souligne Giocoli, « dans le papier de 1937, il n'y a pas de place pour une interprétation positive des résultats mathématiques. Von Neumann développe ses arguments sur une base strictement formelle et emploie par deux fois la technique de démonstration appelée « méthode de preuve indirecte » » (Giocoli, 2003, p.8). Giocoli entend par « méthode de preuve indirecte » l'utilisation par von Neumann d'une démonstration non-constructive : « il est seulement démontré qu'en cas de violation du résultat [d'équilibre], une contradiction apparaîtrait » (p.8). Par cette méthode, il prouve qu'une solution d'équilibre existe logiquement, mais il ne donne aucun moyen pour y arriver ou pour calculer cette position d'équilibre. En cela, on peut dire avec Giocoli que le modèle de von Neumann est « non-descriptif », n'expliquant à aucun moment comment un équilibre peut être atteint : « en combinant la technique de modélisation axiomatique avec une preuve non-constructive, le modèle de von Neumann évite tout simplement cette question : l'existence d'un équilibre économique est juste une question de consistance logique, à la base de la démonstration de la validité de la structure formelle supportant le modèle » (p.20). Par cette approche, c'est la conception de l'équilibre économique lui-même qui se métamorphose afin d'être rendu compatible avec une approche axiomatique. Celui-ci est désormais envisagé d'un point de vue formel : son existence est la preuve de la consistance de la structure logique qui est construite pour modéliser un phénomène économique (Punzo, 1991, p.2).

Il semble alors clair qu'avec cet article (et ceux de Wald) s'ouvre une nouvelle voie pour la théorie de l'équilibre général et plus globalement pour la théorie économique. Certes, dans les années 1930, de tels travaux demeurent largement marginaux et souvent ignorés dans la sphère académique de la discipline. Mais les transformations épistémologiques qui s'opèrent à cette époque, principalement au sein du colloque mathématique de Menger, préparent le terrain à un bouleversement profond d'une partie de la discipline économique.

3) Le colloque mathématique : une nouvelle voie pour la théorie de l'équilibre général

La période des années 1930 est sans aucun doute fondamentale dans l'histoire de la théorie de l'équilibre général car elle prédétermine grandement les résultats qui vont être obtenus par la suite. Avec le colloque mathématique de Menger, « la théorie a été « revisitée »

à-dire aux applications qui à un point d'un ensemble de départ associent plusieurs valeurs d'un ensemble d'arrivée (on parle d'applications multivoques par opposition aux applications univoques que constituent les fonctions).

pour la première fois d'un point de vue axiomatique et (...) les concepts et outils clés ont été identifiés, ce qui a rendu possible tous les résultats les plus significatifs » (Ingrao et Israel, 1987, p.176-177). Mais plus profondément, c'est la conception du rôle d'une théorie qui est bouleversée. Ainsi, la théorie de l'équilibre général commence à être appréhendée de deux manières différentes, clairement séparées. Elle a désormais « une double vie » : d'un côté les développements formels et les questions mathématiques ; de l'autre les questions d'interprétation de la théorie et de sa signification concrète (p.175).

L'existence de cette double vie se constate assez clairement dans le dernier article de Wald (1936) où il sépare clairement les développements mathématiques des discussions sur les hypothèses et sur leur signification économique. Mais ces discussions viennent après les énoncés formels : elles tentent de les raccrocher à une « réalité économique », de manière à en tirer quelques conclusions concrètes. Cela montre bien, comme expliqué plus haut, le caractère *a posteriori* du travail interprétatif. Toute dimension empirique est quant à elle absente : il n'est pas question de tester la théorie, de la relier à des données statistiques. Il s'agit uniquement de donner une signification concrète aux énoncés mathématiques proposés.

L'existence de cette double vie ne signifie pas que les deux approches sont posées sur un pied d'égalité. Les travaux mathématiques du colloque de Vienne donnent la primauté aux questions formelles. L'axiomatisation progressive de la théorie de l'équilibre général conduit à privilégier le travail sur la structure logique de la théorie, sur le choix des hypothèses en fonction des restrictions ou de la généralité qu'elles apportent. L'accent est mis clairement sur les aspects qualitatifs des modèles construits : « dans le programme de reformulation de l'économie initié à Vienne, l'usage des mathématiques comme un outil pour atteindre, au moins en principe, l'exacte mesurabilité et la prédiction quantitative des valeurs des variables économiques a été écarté au profit du calcul logique. Un modèle était alors réduit à une manipulation de séquences logiques (...). Ainsi, un accent sans précédent est mis sur les énoncés qualitatif d'existence » (Punzo, 1991, p.4). Les questions empiriques et les questions d'interprétations ne disparaissent pas totalement, mais elles sont reléguées, plus ou moins lointainement, à l'arrière-plan⁴³.

Cette tendance profonde se constate également sur le chemin des premiers développements de la théorie des jeux. Même si le fameux *Theory of Games and Economic Behavior* (1944) de John von Neumann et Oskar Morgenstern a été publié en anglais, aux Etats-Unis, il n'en demeure pas moins qu'il trouve sa source dans l'univers viennois des années 1930, tant Morgenstern et von Neumann semblent influencés par l'esprit scientifique qui s'y développe. L'étude de la genèse de *Theory of Games and Economic Behavior* (désormais *TGEB*) et de son contenu nous semble donc revêtir un certain intérêt dans la mise en valeur des modifications épistémologiques profondes qui se préparent à cette époque, dans la discipline économique.

⁴³ Il est à noter que les premières (les questions empiriques) sont bien plus souvent absentes et ignorées que les secondes (les questions d'interprétation du modèle).

B) Vers le développement de la théorie des jeux

Le développement de la théorie des jeux participe au mouvement vers la recherche d'un traitement jugé plus rigoureux des problèmes économiques. Von Neumann et Morgenstern se font ainsi les défenseurs de l'application de la méthode axiomatique en économie et de l'usage d'outils mathématiques relativement élaborés pour traiter des phénomènes économiques. Préconisations qu'ils mettront en pratique dans *TGEB*, tout en tentant d'articuler leurs travaux avec des considérations sur le *rapport à la réalité* de leur modèle⁴⁴.

1) La défense de l'application de la méthode axiomatique en économie, par Morgenstern et von Neumann

John von Neumann adhère très rapidement à la conception hilbertienne du rôle des mathématiques et de la place que doit y occuper la méthode axiomatique, manifestant ainsi une « foi optimiste dans la mécanique mathématique » (Ingrao et Israel, 1987, p.185). Mais sur les questions de fondations, il adopte une approche pragmatique : plutôt que de démontrer la nature non-contradictoire de l'arithmétique, il s'attaque à l'axiomatisation de la théorie des ensembles et de la théorie quantique. Il tente d'en chasser les antinomies, non pas dans le but d'assurer la consistance logique générale de ces deux théories, mais plutôt dans l'optique de bâtir une base solide à la progression de la recherche scientifique. L'axiomatisation permet ainsi « de dessiner de nouvelles frontières pour la recherche mathématique, au sein desquelles elle peut procéder sûrement et sans perturbation » (p.185). Par ces nombreux travaux, von Neumann participe à la rupture d'avec « les mathématiques du temps »⁴⁵, selon l'expression d'Ingrao et Israel, et au développement de nouveaux outils au sein de l'analyse fonctionnelle, de la théorie de la mesure, de l'analyse convexe et de la topologie, qui joueront un grand rôle dans la théorie économique.

⁴⁴ L'interprétation d'un système d'équations permet de formuler des énoncés concrets sur la façon dont fonctionne le modèle. Par exemple, l'idée d'un commissaire-priseur est une interprétation concrète, réaliste dans le sens où cette possibilité est concevable, pensable. Savoir si le concept de commissaire-priseur est une bonne description de la réalité relève d'un deuxième type de questions, celui de la pertinence empirique des interprétations ou du réalisme, dans un sens différent de celui de notre première utilisation. Quand les économistes parlent de réalisme, c'est d'ailleurs à ce second sens qu'ils font généralement référence : est-ce que le commissaire-priseur représente bien la réalité du mécanisme marchand ? Evidemment, non.

⁴⁵ Cette expression fait surtout référence au calcul différentiel, utilisé en mécanique depuis Newton. Ce dernier en est considéré comme le fondateur, avec le philosophe Leibniz. Tous deux développent l'analyse des fonctions en élaborant des outils qui permettent de dériver des fonctions (afin de trouver des tangentes, des maxima et des minima, des points d'inflexion). Ils développèrent également le calcul d'intégrales (voir Dahan-Dalmedico et Peiffer, 1986, p.190-197). Le calcul différentiel joue un grand rôle en microéconomie, par exemple pour la maximisation des fonctions d'utilité. La topologie, quant à elle, est née avec l'idée de déformer des figures géométriques, afin de voir quelles propriétés étaient conservées. C'est donc au départ une branche de la géométrie, qui ne se soucie pas de la mesure des figures. On a ensuite appliqué la topologie à des ensembles de fonctions (Bouvier, George, Le Lionnais, 2009, p.908). Les propriétés mises en avant sont celles de continuité, de fermeture, de compacité.

Pour von Neumann le domaine d'application des mathématiques est extrêmement large. Cette vision trouve sans doute sa source en partie chez Hilbert, pour qui l'application de la méthode axiomatique devait s'étendre à toute science⁴⁶. Mais on peut penser que cette vision s'explique aussi par les conséquences sur von Neumann du théorème d'incomplétude de Gödel. La présence du premier à Vienne, à l'époque de la publication du résultat du second atteste du fait que von Neumann avait connaissance de ce théorème. Il semblerait que l'impact sur sa pensée scientifique fut grand : « la perte du flambeau de la rigueur absolue » le conduisit à « s'inspirer des phénomènes « empiriques » » (Mirowski, 1992, p.123). Il travaille alors sur les automates, les ordinateurs, la logique probabiliste, les modèles du cerveau et bien entendu, la théorie des jeux. Tout travail d'abstraction, toute recherche de rigueur mathématique doivent tenter « de garder contact avec les problèmes du monde réel » (Giocoli, 2003, p.30).

Cependant, même s'il tire son inspiration de phénomènes concrets, l'objectif premier de von Neumann est tout de même d'y apporter un traitement rigoureux, formellement élaboré. En ce qui concerne l'économie, il se veut alors très critique avec les textes non mathématiques, comme nous l'explique Ingrao et Israel, regardant « le langage familier et imprécis de la théorie économique et les efforts mathématiques maladroits des économistes avec un détachement caustique. Morgenstern lui-même nous parle de son opinion irrévérencieuse envers les productions de l'économie mathématique à la fin des années 1930 (à l'exception des travaux de Wald et Menger) : « tu sais, Oskar, si ces livres étaient déterrés dans quelques années, les gens ne croiront pas qu'ils ont été écrits de notre temps. Ils penseront plutôt qu'ils sont contemporains de Newton, tellement primitives sont leurs mathématiques. L'économie est tout simplement à des millions de miles de l'état dans lequel une science avancée, telle la physique, se trouve » (Ingrao et Israel, 1987, p.197).

Oskar Morgenstern, du fait de l'intérêt qu'il porte à l'axiomatisation de la théorie économique et de son rejet des travaux d'économie de l'époque, trop peu rigoureux à son goût, est proche de von Neumann. Il considère que l'axiomatisation de la géométrie par Hilbert doit être une source d'inspiration qui doit pousser à l'axiomatisation des sciences sociales. Il déclare d'ailleurs : « je crois qu'il est tout à fait possible d'axiomatiser l'économie » (Ingrao et Israel, 1987, p.193). Dans un article de 1935, il critique l'absence de formulation axiomatique de la théorie de l'équilibre général qui « constitue la fierté de l'économie théorique. Les variations, cependant, concernent des problèmes insignifiants, à tel point que, de près ou de loin, on peut parler d'une théorie uniforme, qu'elle soit exprimée en termes verbaux ou mathématiques. Pour cette raison, il est pour le moins curieux que l'on ne puisse trouver, dans l'ensemble de la littérature, un énoncé systématique complet ou exact des

⁴⁶ L'influence de David Hilbert sur ces travaux semble assez évidente du fait même de la présence de von Neumann à Göttingen, pendant une partie de sa carrière. Il y présente d'ailleurs son article sur le minimax en 1928.

hypothèses aux fondements de la théorie de l'équilibre général » (Morgenstern, 1935, p.180-181 de la traduction anglaise).

La défense de l'axiomatisation de la théorie économique de Morgenstern et sa critique de la TEG, telle qu'elle est formulée à l'époque, se retrouvent dans la recension qu'il fait de l'ouvrage de Hicks de 1939, *Valeur et capital*. Morgenstern se montre en effet extrêmement critique envers ce dernier, stigmatisant son manque de rigueur, l'ambiguïté des hypothèses et l'extrême flou de son système théorique (Morgenstern, 1941, p.361-362). La critique se veut même extrêmement mordante quand il déclare que l'ouvrage de Hicks « fait partie des travaux les plus illisibles qui ont été publiés en théorie économique » (p.364). Ce manque de rigueur conduit, selon Morgenstern, à justifier les accusations d'irréalisme à l'encontre de la théorie économique, car il est difficile de savoir à quels phénomènes économiques sont reliés les énoncés de Hicks.

Pour Morgenstern, John Hicks s'ajoute à la longue liste des économistes⁴⁷ qui ont été incapables de résoudre de manière adéquate les problèmes que pose la TEG, « ce qui est regrettable car il a écrit quelques années après les travaux décisifs qui ont été réalisés principalement par J. von Neumann et A. Wald » (p.369). En plus de ne porter que très peu d'attention à la rigueur de son modèle théorique, Hicks continue de penser que l'égalité du nombre d'équations et du nombre d'inconnues suffit à prouver l'existence d'une solution à un système d'équations, demeurant ainsi bien loin des développements techniquement plus élaborés de Wald et von Neumann. Il semble évident pour Morgenstern que les problèmes cruciaux de la TEG ne peuvent se résoudre qu'à l'aide des outils mathématiques les plus récents. On peut s'étonner de la dureté de cette critique envers celui que l'on considère, avec Samuelson, comme le fondateur de la microéconomie moderne. Cette dureté s'explique sans doute par le fait que Morgenstern semble privilégier le *point de vue mathématique*⁴⁸.

Morgenstern est parfaitement conscient du fait que le modèle de base de l'équilibre général est trop abstrait, trop irréaliste. Il se doit d'être complexifié progressivement. Mais il reproche à Hicks de tenter d'introduire des hypothèses « plus réalistes », alors même que le système théorique qui précède l'introduction de ces nouvelles hypothèses n'est pas traité correctement. Avant d'effectuer de nouvelles approximations plus réalistes, il est nécessaire pour Morgenstern de réaliser un traitement rigoureux, grâce à la méthode axiomatique et à des outils mathématiques récents, des problèmes les plus simples de la théorie de l'équilibre général, tel que l'ont pratiqué von Neumann et Wald. En cela, la conception de l'utilisation de la méthode axiomatique dans les sciences, chez Morgenstern, est proche de la conception pragmatique adoptée par Hilbert : il est nécessaire de sécuriser les fondements d'une théorie en explicitant avec le plus de clarté possible les hypothèses à la base du modèle et en testant leurs conséquences logiques. C'est sur cette base solide que pourront être complexifiées les hypothèses, par l'ajout, par exemple, de faits empiriques.

⁴⁷ Il cite Walras, Pareto, Fisher et Cassel (p.369).

⁴⁸ A l'inverse, le rôle crucial de Hicks pour la TEG sera pleinement reconnu par Arrow, à de nombreuses reprises (par exemple dans son discours d'obtention du prix Nobel [1974]).

Von Neumann et Morgenstern revendiquent ainsi l'axiomatisation de la théorie économique qui doit permettre un traitement plus rigoureux des problèmes économiques en formulant explicitement toutes les hypothèses de la théorie en question, en mettant en avant les liens logiques qui unissent les énoncés et en ouvrant la voie, dès lors, à l'utilisation d'outils mathématiques puissants. Malgré cette volonté d'accroître la rigueur de la discipline économique, le réalisme du modèle et son interprétation demeurent des inquiétudes présentes dans leurs propos.

2) *Theory of Games and Economic Behavior* (1944)

L'article de von Neumann de 1928, sur le minimax, constitue sans aucun doute le travail fondateur de *TGEB*. Il s'agit d'un premier effort important pour étendre la formalisation mathématique aux sciences sociales. Dans ce papier, von Neumann tente de fournir « une caractérisation du comportement rationnel, c'est-à-dire de prescrire des règles de comportements pour un agent faisant face à une interaction stratégique et cherchant à obtenir le résultat le plus avantageux » (Giocoli, 2003, p.4). Du fait de cet objectif, il est clair que le projet de von Neumann ne se veut pas descriptif : il ne s'agit pas de proposer une description réaliste du comportement des agents, mais plutôt d'exposer la bonne façon de jouer à un jeu stratégique.

Von Neumann ne propose aucune interprétation. L'utilisation d'une preuve non-constructive ne permet pas de donner un contenu positif à ce résultat. *TGEB* permet de compléter cela : en effet, von Neumann et Morgenstern y proposent une double preuve à l'existence d'un minimax. La seconde étant une preuve directe, elle permet d'obtenir une interprétation positive du modèle, c'est-à-dire que ce dernier « peut être justifié en termes de « comment et pourquoi » un agent choisirait de se comporter de la sorte » (Giocoli, 2003, p.24)⁴⁹.

Ainsi, dans leur démarche de formalisation du comportement économique rationnel, von Neumann et Morgenstern tentent de garder un contact avec les phénomènes du « monde réel ». Du moins, ils affirment la nécessité de développer les fondements empiriques de la théorie économique, tout comme avait su le faire la physique, plusieurs siècles auparavant : « il aurait été absurde en physique d'attendre Kepler et Newton sans Tycho [Brahé] – et il n'y a pas de raison d'espérer un développement plus simple de l'économie » (Ingrao et Israel, 1987, p.197). Cependant, les deux auteurs ne proposent aucune avancée dans ce domaine. L'affirmation de la nécessité de développer la base empirique de la théorie économique n'est pas soutenue en pratique.

Néanmoins, cette place donnée à l'empirisme peut expliquer en partie l'utilisation qu'ils font de la méthode axiomatique. Comme le souligne Giocoli, cette utilisation se veut

⁴⁹ A l'inverse, Nicola Giocoli met en avant le fait que la preuve de l'existence d'un minimax pour un jeu à n-personnes, par Nash en 1951 marque « le triomphe de la logique non-constructive du point fixe » (p.24).

relativement classique, proche des conceptions d'Hilbert : « Dans l'axiomatique classique, le but de l'axiomatisation est de capturer la véritable structure mathématique contenue dans les phénomènes économiques. Il s'agissait en fait (...) également de la propre vision d'Hilbert sur la méthode axiomatique. Tout en déclarant, comme je l'ai dit auparavant, que la consistance était le seul critère pour évaluer l'existence d'une notion mathématique, il croyait aussi que les axiomes étaient simplement des outils puissants à employer uniquement quand un champ de recherche avait atteint un niveau suffisant de développement, et que : « le but de toute science est, avant toute chose, d'assembler un réseau de concepts fondés sur des axiomes vers lesquels l'intuition et l'expérience nous ont naturellement conduit » » (Giocoli, 2003, p.30-31). La conception de la méthode axiomatique présente dans *TGEB* semble donc éloignée de l'*image bourbakiste du savoir* mathématique. Image qui eut une certaine influence sur la discipline économique aux Etats-Unis, principalement à travers la *Cowles Commission*, comme nous allons le voir dans la prochaine section⁵⁰.

Le contexte viennois des années 1930 est riche en enseignement pour comprendre l'intégration progressive de la méthode axiomatique en économie et l'émergence d'un *style de pensée axiomatique*. Le colloque mathématique de Karl Menger joue un rôle déterminant en redécouvrant le système walrassien et en s'y attaquant d'un point de vue strictement formel. Nos quatre personnages principaux (Menger, Wald, Morgenstern, von Neumann) sont à la pointe de l'utilisation des mathématiques dans les sciences sociales. Utilisation qu'ils estiment absolument nécessaire pour rompre avec la théorie économique qu'ils méprisent, quelle qu'elle soit, pour son manque de rigueur. Il est pour eux primordial de faire appel à un raisonnement rigoureux qui met en avant les axiomes fondamentaux d'une théorie et qui déduit formellement des théorèmes à partir de ces axiomes.

Ainsi, l'univers viennois marque une première étape dans la voie de la révolution formaliste qui va bouleverser en profondeur une partie de la discipline économique et les questions épistémologiques fondamentales qui s'y rattachent. On commence à séparer clairement la structure formelle du modèle de son contenu concret. La priorité est mise sur la première, plutôt que sur le second, en concentrant sur elle tous les efforts analytiques. La valeur d'une théorie provient alors des démonstrations et des théorèmes qu'elle est capable de fournir. La *justification* se fait par la présentation de preuves mathématiques valides formellement. Néanmoins, la nécessité de garder un lien avec la « réalité » reste gravée dans les esprits, même si ce lien est plus souvent affirmé que pratiqué (aucun effort n'est véritablement fait pour intégrer des données empiriques permettant, par exemple, de faciliter l'interprétation de la structure formelle).

⁵⁰ La réception de *TGEB* par la discipline économique américaine se concentra d'ailleurs principalement sur les avancées techniques proposées dans l'ouvrage. De nouveaux outils mathématiques y sont mis en avant. La section 16 de l'ouvrage, plus particulièrement, constitue ainsi un véritable mini-manuel de techniques mathématiques présentées dans un style clair et abondant des sujets tel que la géométrie d'espaces à n-dimensions, les opérations sur les vecteurs, les hyperplans, les espaces convexes (Giocoli, 2003, p.9).

Cette concentration sur les aspects formels d'une théorie, tout en insistant sur l'ambivalence épistémologique de la théorie économique, est caractéristique du *style de pensée axiomatique* qui va marquer une partie de la discipline et perdurer dans la suite de l'histoire de la TEG. En effet, cette histoire rebondit aux Etats-Unis, avec l'émigration de nombreux scientifiques d'Europe Centrale.

II – La « révolution formaliste » aux Etats-Unis à partir des années 1940

Cette vague d'immigration scientifique qui touche les Etats-Unis à la fin des années 1930 vient clôturer une période que l'on a qualifié d'« années de haute théorie » (Shackle, 1967). La science économique des années 1940 est donc portée par le large développement théorique qu'a connu la discipline dans les années précédentes. Paradoxalement, dans le même temps, on voit se mettre en place les bases d'une révolution formaliste qui va remettre en cause les méthodes employées dans la théorie économique de l'époque. On peut ainsi s'étonner et s'interroger avec Giocoli : « comment est-il possible qu'une discipline qui vient juste de connaître l'une de ses périodes les plus prolifiques en termes d'inventivité théorique et qui commence à peine à profiter des bénéfices de telles innovations, se trouve elle-même sur le point d'être révolutionnée tant dans ses méthodes que dans ses objectifs par un nombre restreint d'économistes qui ont importé en son sein une nouvelle approche, développée dans un domaine différent ? » (Giocoli, 2003, p.2). Il serait prétentieux de notre part de tenter d'apporter une réponse à cette question et d'expliquer *comment* une telle révolution a pu se répandre (ce qui impliquerait de s'interroger également sur la mesure dans laquelle se sont étendus cette révolution et ce *style de pensée axiomatique*). Notre objectif est plutôt d'étudier l'intégration de la méthode axiomatique à cette époque, aux Etats-Unis, qui se fait au travers de ce que l'on peut appeler avec Mark Blaug (2003) une révolution formaliste.

Blaug utilise cette expression pour qualifier les métamorphoses que connaît la discipline dans les années 1940 et 1950, marquée « non pas par une simple préférence, mais par une préférence absolue de la forme de l'argument économique sur son contenu » (p.145). Mais comment rendre compte de cette préférence absolue et de cette révolution ? Nous allons d'abord nous intéresser à la transformation de la place accordée aux mathématiques. Nous étudierons ensuite plus particulièrement en quoi la *Cowles Commission* constitue le révélateur de ces transformations.

A) Un mouvement général vers une plus grande « rigueur » logique et mathématique ?

Dans son ouvrage *How Economics Became a Mathematical Science*, Roy Weintraub nous propose une histoire de la mathématisation de l'économie. Plus précisément, il tente de nous montrer comment les considérations sur la place que doivent occuper les mathématiques en économie (et sur la façon dont elles doivent être utilisées) connaît une véritable transformation dans la première moitié du XX^e siècle.

Selon lui, ce changement ne peut se comprendre qu'en s'intéressant aux changements de *l'image du savoir* dans les mathématiques et plus particulièrement au changement dans la définition de ce qu'est la rigueur d'une théorie. Au début du siècle, des mathématiciens-physiciens tels Vito Volterra ou Felix Klein défendaient une vision selon laquelle « les mathématiques rigoureuses étaient fondées sur les idées de ce que l'on appellerait aujourd'hui la théorie mathématique appliquée. Les mathématiques étaient profondément liées aux applications de l'analyse, et ces applications elles-mêmes devaient être structurées de manière à faciliter les questions de mesure et de prédiction » (Weintraub, 2002, p.34)⁵¹. Vision qui s'oppose à la conception formaliste de la rigueur en mathématique, qui suppose un développement libre de toutes contraintes en dehors de celle de la rigueur formelle (p.46-47).

Cette modification des *critères de justification* qui définissent ce qu'est une bonne théorie en mathématiques se retrouve parallèlement dans la discipline économique, aux Etats-Unis. C'est ce que tente de montrer Weintraub en étudiant le cas d'un économiste, Griffith C. Evans, qui s'est trouvé peu à peu marginalisé dans la discipline, du fait de sa conception de l'usage des mathématiques en économie. Tout comme Volterra, Evans considérait que « les modèles mathématiques n'étaient pas libres, mais plutôt fermement contraints par les phénomènes naturels que la construction mathématique devait modéliser » (p.70). Evans peut être vu comme pratiquant l'économie appliquée, par opposition à l'économie théorique⁵². Et sa marginalisation résulterait du fait que ce sont les conceptions de la seconde qui deviennent dominantes (du moins en partie) en microéconomie, aux Etats-Unis, dans les années 1940 et 1950.

Peu à peu, certains économistes se concentrent sur la structure logique et les considérations empiriques deviennent secondaires, simples considérations de « façade » (Giocoli, 2005b, p.185). On peut illustrer ce point par deux exemples qui montrent comment des concepts économiques tendent à se transformer du fait de l'importance plus grande donnée à la rigueur formelle. Dans la revue qu'il fait des théories de l'utilité et de la

⁵¹ Klein et Volterra sont clairement des pratiquants de *l'analogie mécanique*, qu'Israel décrit dans *La mathématisation du réel* (1996), en opposition avec *l'analogie mathématique*, au fondement de la *modélisation mathématique*.

⁵² On pourrait en allant plus loin, parler d'économie pure pour reprendre les termes de Walras et faire le parallèle avec les mathématiques pures.

rationalité en économie, Giocoli (2005b) nous montre comment, progressivement, la notion de rationalité change de sens. L'économiste ne cherche plus à apprécier le fonctionnement réel de l'esprit humain, à l'étudier en action. La théorie se détache de tout fondement psychologique. On passe à une « approche par la consistance » (p.180) : le principe de rationalité repose sur un ensemble de conditions formelles (transitivité, réflexivité, complétude...) et on teste l'absence de contradictions du modèle axiomatique ainsi construit. « La recette formaliste pour l'analyse axiomatique commande de commencer par un ensemble de concepts primitifs, d'utiliser ces concepts pour formuler les axiomes de la théorie, de vérifier que les axiomes obéissent aux exigences de l'indépendance, de la consistance et de la complétude, de déduire les implications théoriques des axiomes sous la forme de théorèmes et, finalement, d'interpréter les théorèmes dans les termes des problèmes spécifiques de la discipline en question » (p.190-191).

Le second exemple nous est également donné par Giocoli (2003) et concerne la notion d'équilibre économique. Selon lui, on peut distinguer deux notions d'équilibre en économie : « l'équilibre comme balance des forces et l'équilibre comme conciliation de plans indépendants » (p.15). La première notion est liée à l'analogie mécanique et au principe de loi de l'offre et la demande. Mais c'est le second qui prévaut à partir des années 1940 et implique l'utilisation de nouveaux outils tels que le théorème du point fixe. L'équilibre n'est plus alors conçu comme la représentation d'une économie observée, « mais plutôt comme la réalisation d'une structure théorique abstraite » (p.15). On fixe un ensemble de conditions formelles à l'équilibre et on vérifie à l'aide de la méthode axiomatique si un équilibre existe dans un système axiomatique ainsi construit. C'est ce que feront Arrow et Debreu dans leur article de 1954.

Ces deux exemples illustrent bien le tournant formel que connaît la discipline économique dans les années 1940 et 1950. Ils nous montrent également comment la méthode axiomatique devient la méthode de raisonnement légitimée et légitimante : « les économistes commencent à associer rigueur et développement axiomatique des théories économiques, puisque l'axiomatisation est vue comme le chemin pour découvrir de nouvelles vérités scientifiques » (Weintraub, 2002, p.98). Le véritable changement qui s'opère pour une partie de la discipline, à partir des années 1940, ne relève pas du contenu de la théorie mais plutôt de sa forme, à travers le développement d'un *style de pensée axiomatique*. Ce changement trouve son fondement dans les travaux de Wald, von Neumann et Morgenstern et s'opère réellement, concernant la théorie de l'équilibre général, avec les travaux d'Arrow et Debreu. Dans ce processus de changement, le rôle de la *Cowles Commission* est alors primordial.

B) La Cowles Commission, vecteur du changement

Durant les années 1950, les débats sur l'usage des mathématiques en économie sont très présents aux Etats-Unis. Preuve en est, le numéro spécial que *The Review of Economics and Statistics* y consacre en Novembre 1954 (Mirowski, 2002, p.397, p.403-405). L'éditeur introduit le débat par la publication d'un court article de deux pages d'un économiste peu connu : David Novick (1954). Ce dernier critique l'usage qui est fait des mathématiques en économie. En effet, elles sont utilisées, selon lui, sous la forme d'un langage plutôt que dans un objectif quantitatif de calcul de variables économiques (Novick se réfère à l'utilisation des mathématiques dans les sciences naturelles appliquées). De ce fait, il accuse les économistes qui font un tel usage des mathématiques de n'avoir qu'un objectif rhétorique. L'éditeur charge alors neuf économistes de renom de répondre à ce court propos : Champernowne, Chipman, Dorfman, Duensberry, Klein, Koopmans, Samuelson, Solow et Tinbergen.

Tous s'efforcent de défendre cet usage des mathématiques, peu ou prou avec les mêmes arguments⁵³. Mais derrière cette unanimité apparente demeure une question : de quelles mathématiques parle-t-on ? Est-on sûr que tous ces économistes entendent la même chose quand ils traitent de l'usage des mathématiques en économie ? Dans ce numéro spécial, le terme d'axiomatique n'apparaît à aucun moment, sauf dans l'article de Koopmans (1954). Tinbergen explique d'ailleurs : « Etant moi-même un mathématicien avec un savoir modeste, j'ai souvent fait l'expérience de difficultés considérables à lire les travaux de la Cowles Commission » (Tinbergen, 1954, p.367).

Koopmans montre bien que, derrière le terme de mathématiques, peuvent se cacher différentes logiques et différents objectifs en jeu : dans les mathématiques pures, on recherche « un ensemble de prémisses et d'axiomes non-contradictaires » (Koopmans, 1954, p.378). Pour Mirowski (2002, p.404), cette intervention de Koopmans est la plus intéressante de tout le numéro : Koopmans a bien compris que l'attaque de Novick ne concerne pas les mathématiques en général mais plutôt l'utilisation d'outils plus élaborés tels que l'analyse convexe, la théorie des ensembles ou la méthode axiomatique. Sa réponse dessine la voie suivie par la *Cowles Commission*, qui revendique l'usage de nouveaux instruments mathématiques beaucoup plus complexes et un traitement plus « rigoureux » des théories économiques. Dans cette optique « d'extension du domaine des outils mathématiques qui peuvent aider dans les problèmes économiques, l'économiste mathématicien a besoin d'accorder une grande partie de son temps à l'exploration, à l'apprentissage et à l'évaluation de théories mathématiques non encore utilisées en économie. Pour ce progrès immédiat, il est souvent plus utile de communiquer avec des mathématiciens qu'avec des économistes »

⁵³ On voit régulièrement revenir l'argument selon lequel les mathématiques ne sont qu'un langage, dans lequel il s'agit de traduire les phénomènes économiques.

(Koopmans, 1954, p.379)⁵⁴.

Comme l'explique Giocoli, « dans les trois pages de la réponse de Koopmans, on peut trouver l'une des premières défenses de la soi-disant approche formaliste de l'économie mathématique, préparant déjà son classique de 1957, *Three Essays on the State of Economic Science* » (Giocoli, 2005a, p.4). Koopmans et plus généralement la *Cowles Commission* vont être les vecteurs du développement du *style de pensée axiomatique* dans l'économie mathématique naissante, dans les années 1950. La position de la *Cowles* sur la place des mathématiques en économie est particulière. Elle se veut à la pointe de l'innovation technique par l'utilisation de nouveaux outils mathématiques, par l'application de théorèmes puissants non utilisés auparavant dans la discipline. Le théorème du point fixe est un bon exemple de ces nouveaux théorèmes (même si sa première utilisation pour un problème économique est le fait de von Neumann).

Comment expliquer cet engouement pour des mathématiques pures, qui semblent au départ bien éloignées des problèmes économiques ? L'une des réponses possibles réside dans l'influence que le bourbakisme exercerait sur la *Cowles Commission*. Il est d'abord intéressant de noter que la pensée bourbakiste devient prépondérante, à cette période, dans les mathématiques américaines : « Durant quelques décennies, à la fin des années 1930, dans les années 1940 et au début des années 1950, la vision prédominante dans les cercles mathématiques américains était la même que celle des mathématiques de Bourbaki : les mathématiques sont un sujet abstrait autonome, sans aucun besoin d'intrants provenant du monde réel, avec ses propres critères de consistance et de beauté, et avec sa propre boussole interne pour guider sa croissance future » (Lax, 1989, p.455-456).

Pour Mirowski (2002) et Weintraub (2002), la pensée bourbakiste (entendue ici dans le sens de préférence pour les mathématiques pures, indépendantes de considérations sur les applications possibles de telles mathématiques) s'intègre peu à peu à la discipline économique par le biais de la *Cowles Commission*. Cette intégration s'expliquerait par deux voies. Tout d'abord l'arrivée en 1949 de Gérard Debreu, économiste français formé aux mathématiques à l'*Ecole Normale Supérieure* par Henri Cartan, membre du groupe Bourbaki. Ensuite, Tjalling Koopmans, qui devient directeur de recherche de la *Cowles* en 1948, est proche de Marshall Stone (professeur dans le département de mathématiques de l'université de Chicago), connu pour ses efforts pour populariser la pensée bourbakiste à cette époque⁵⁵ (Mirowski, 2002, p.392-394). Chicago devient alors le fief de la pensée bourbakiste, outre-Atlantique.

Les trois essais sur l'état de la science économique de Koopmans, publiés en 1957, peuvent d'ailleurs être vus comme une sorte de manifeste épistémologique de la *Cowles*. Dans son premier essai, « l'allocation des ressources et le système des prix », il passe en revue les

⁵⁴ Dans ce texte, Koopmans s'oppose également à la critique que fait Samuelson des mathématiques pures qui sont, pour le premier, d'une grande utilité dans la théorie économique (p.379).

⁵⁵ On pourrait introduire une troisième cause pour expliquer cet attrait pour le bourbakisme : à la fin des années 1940, les travaux économétriques de la *Cowles* connaissent quelques échecs. Commence alors à poindre un certain désappointement envers la recherche empirique (Christ, 1952).

développements récents de la théorie économique (existence et optimalité d'un équilibre général, programmation linéaire...). Son second essai, « l'élaboration du savoir économique », qui nous intéresse plus particulièrement ici, préconise « une distinction plus claire, dans l'élaboration de la science économique, entre le raisonnement et la considération des faits (...) [et] propose le recours à la méthode axiomatique comme étant le principal instrument permettant d'assurer cette distinction » (Koopmans, 1957, p.iv). Enfin, le dernier essai traite de l'interaction entre les outils techniques (mathématiques pures, statistiques...) et les problèmes économiques.

L'objectif du second essai est de résoudre « le conflit entre rigueur et réalisme » que Koopmans soulève à la fin de son premier essai. Ce conflit provient directement de la nature duale de la science économique : celle-ci est une science empirique mais, pour traiter les problèmes complexes auxquels elle fait face, elle doit s'astreindre à la plus grande rigueur logique⁵⁶. Selon Koopmans, il est primordial pour la science économique de séparer clairement la structure logique des théories et les faits empiriques sur lesquels elles reposent⁵⁷. La méthode axiomatique doit permettre cette distinction, en séparant le contenu logique de la théorie de ses interprétations possibles.

La méthode axiomatique conduit à se concentrer d'abord sur l'aspect logique : « Un ensemble de postulats une fois adopté, le raisonnement lui-même peut développer selon les règles de la logique et, là où l'usage en est approprié à l'aide d'autres techniques mathématiques, les implications qui nous intéressent » (p.132). Un tel processus permet alors de « dévoiler la contradiction entre différents postulats » (p.132). Le critère dominant de *justification*, du point de vue formel, d'une théorie ainsi construite, est donc la consistance logique.

Selon lui, les postulats de la théorie économique « ne sont pas entièrement évidents de par eux-mêmes » (p.141)⁵⁸. La vision de Koopmans est d'ailleurs empreinte de positivisme : il doit être possible de réfuter la théorie par des tests empiriques. Le progrès de la théorie provient de sa capacité à expliquer des phénomènes du monde réel de plus en plus complexes. Ce qui n'est pas pour autant une raison pour discréditer les modèles qui paraissent les plus abstraits : « il faudrait envisager la théorie économique comme une suite de modèles conceptuels qui cherchent à exprimer, dans une forme simplifiée, différents aspects d'une réalité toujours plus complexe. Tout d'abord ces aspects sont formulés, autant que faire se peut, isolément, puis en combinaisons qui manifestent un réalisme toujours croissant. Chaque

⁵⁶ « Comme dans toute science empirique, les progrès en économie se réalisent grâce à une interaction incessante de l'observation, qui va du fortuit au systématique, et du raisonnement, qui va du particulier au général et au formel » (p.129).

⁵⁷ Koopmans critique « le style mondain et diplomatique adopté par l'économie », incapable de faire la distinction entre les deux, rendant impossible la découverte des « fondements réels sur lesquels repose notre connaissance économique » (p.130).

⁵⁸ Koopmans critique l'épistémologie défendue par Robbins (1932) et l'existence d'axiomes jugés vrais *a priori*. Il s'agit pour Koopmans d'une stratégie conservatrice inacceptable. Il applique le même jugement à l'épistémologie de Friedman (1953), dont l'exigence de non-réalisme des hypothèses et la défense du « comme si » relèvent de la même optique conservatrice.

modèle est défini par un ensemble de postulats, dont les implications sont développées jusqu'au point où cela paraît valoir la peine étant donné les aspects de la réalité dont rendent compte les postulats. L'étude de modèles plus simples est à l'abri du reproche de manque de réalisme vu qu'ils peuvent servir de prototypes pour des modèles qui seront plus réalistes mais aussi plus complexes » (p.141).

Quel est le but de la méthode axiomatique dans tout cela ? Sa première fonction est une fonction de clarification : elle permet de séparer distinctement le contenu logique d'une théorie et de « consigner nos déductions logiques de façon à ce que toute conclusion particulière ou toute implication réfutable par l'observation puisse être rattachée aux postulats sur lesquels elle se fonde » (p.141). La méthode axiomatique permet d'ordonner, de ranger, pour mieux comprendre la structure logique d'une théorie et en renforcer les fondements. L'influence du groupe Bourbaki se fait sentir quelques lignes plus loin quand Koopmans déclare que « parfois, des phénomènes économiques tout à fait dissemblables peuvent être exprimés par des ensembles de postulats dont le contenu logique est similaire ou même identique » (p.143). La méthode axiomatique permet de révéler des isomorphismes de structure logique et conduit ainsi à une « économie de la pensée », en donnant à un modèle tout un ensemble d'interprétations variées. L'exemple parfait de cette multiplicité d'interprétation est, selon Koopmans, le « modèle de l'équilibre concurrentiel » (p.143).

Mais de manière générale, l'inscription dans la droite ligne de la pensée bourbakiste n'est pas si évidente que cela et se révèle surtout à travers la recherche de la richesse des interprétations possibles⁵⁹. Il n'en demeure pas moins que la *Cowles Commission*, à travers les mots de Koopmans, se veut être un vecteur du changement en économie et le promoteur d'une révolution formaliste. En 1957, ce dernier revendique d'ailleurs l'existence d'une telle révolution : « L'économie politique traverse actuellement une phase de turbulence et de transition bien plus dans le domaine de ses instruments que dans celui de ses problèmes et des solutions qui leur sont proposées. L'évolution la plus manifeste est sans doute l'utilisation de plus en plus fréquente d'un nombre croissant de concepts, théories et théorèmes mathématiques dans le raisonnement économique » (p.183). Et ce changement doit être encouragé par l'enrichissement de l'enseignement mathématique de l'économiste, qui ne doit pas se cantonner au calcul infinitésimal : « L'objectif d'un tel enseignement serait de le familiariser avec la structure axiomatique et aux quelques théorèmes de base de chacune des différentes mathématiques » (p.183).

La période des années 1940 et 1950, aux Etats-Unis, est sans aucun doute une période charnière pour la discipline économique. L'utilisation des mathématiques en son sein ne souffre plus vraiment de légitimité. Mais cette utilisation n'est pas unique et elle recouvre tout un ensemble de pratiques diverses. Ce qui est en jeu pour une partie de la discipline, c'est une véritable révolution formaliste qui s'opère à travers la conquête d'une plus grande « rigueur »,

⁵⁹ Cette recherche se retrouve chez Gérard Debreu, comme nous le verrons au chapitre 3.

faisant émerger un *style de pensée axiomatique* : on sépare clairement le contenu logique du contenu empirique et interprétatif des théories économiques ; on s'intéresse au premier pour en tester la consistance ; on produit de nouveaux théorèmes, à partir du système d'axiomes posé, à l'aide de nouveaux outils mathématiques (analyse convexe, topologie, etc...). On tente d'affaiblir les *contraintes mathématiques* de ces systèmes d'axiomes afin d'améliorer la *généralité mathématique*. Les questions formelles semblent alors prendre le pas sur les considérations réalistes.

A partir de ce bref aperçu historique, nous pouvons maintenant esquisser une définition de ce qu'est la méthode axiomatique en économie et soulever les questions épistémologiques posées à l'économie par l'axiomatisation.

III – Les caractéristiques de la méthode axiomatique en économie

Il semble évident que l'axiomatisation de l'économie ne pouvait être identique à l'axiomatisation des mathématiques ou bien de la physique. Ce processus d'axiomatisation de l'économie revêt des caractéristiques et des problèmes qui lui sont propres, tout en résultant des particularités de la méthode axiomatique elle-même. C'est ce que nous allons tenter de mettre en avant dans cette section.

Dans une première partie, nous nous intéresserons à l'héritage hilbertien en économie et nous montrerons que les questions métamathématiques y ont peu d'importance. La seconde partie sera l'occasion de définir le type d'axiomatique qui est utilisé en économie. Avec Vilks (1998) et Mongin (2003), nous parlerons d'« axiomatique ensembliste ». Enfin, dans la dernière partie, nous nous intéresserons plus particulièrement au bouleversement que suscite la rencontre entre mathématiques et économie, en soulevant le problème de la relation entre rigueur logique et *rapport à la réalité*⁶⁰.

A) Quel héritage de Hilbert ?

Traiter de l'intégration de la méthode axiomatique en économie implique de traiter de l'impact de la pensée d'Hilbert sur l'économie, du fait de l'importance des conceptions sur l'axiomatique de ce dernier. Weintraub (2002) défend l'idée que le programme de recherche hilbertien sur les questions de *consistance*, d'*indépendance* et de *complétude*, a eu peu d'échos dans la discipline économique. C'est en fait sa vision pragmatique de l'organisation des sciences à l'aide de la méthode axiomatique qui a connu un certain succès.

⁶⁰ Problème qui sera l'un de nos fils conducteurs dominants dans l'étude que nous mènerons de l'article d'Arrow et Debreu de 1954.

Weintraub distingue deux parties dans les propos de Hilbert sur les mathématiques : « La première qui appelle un changement dans le savoir mathématique (l'attention est portée, par exemple, sur les questions de théorie de la preuve), et l'autre qui appelle à un changement dans l'image des mathématiques (dont la tâche devient de fournir un ensemble riche de systèmes de postulats ou d'axiomes, et de structures mathématiques, pour soutenir la communauté de recherche mathématiques). (...) J'appellerai la première « le programme finitiste pour les fondations de l'arithmétique » (PFFA) d'Hilbert et la seconde « l'approche axiomatique » (AA) (et non le « programme formaliste ») » (p.91). Le premier programme s'attache à découvrir des preuves finies (d'où la qualification de « finitiste »), permettant de démontrer la consistance ou la complétude de l'arithmétique. Le PFFA désigne en fait ce que les philosophes des mathématiques ont appelé « le programme formaliste d'Hilbert ». Le second programme concerne l'application de la méthode axiomatique aux mathématiques et aux sciences positives, pour dégager la structure logique des différentes théories qui y sont produites. Pour Weintraub, seule « l'approche axiomatique » a eu un impact en économie.

Dès lors, quand on parle de formalisation en économie, il s'agit de faire la distinction avec la formalisation en mathématiques, qui concerne les questions relatives au programme formaliste d'Hilbert, comme nous l'avons montré dans le premier chapitre. De ce fait, les bouleversements apportés par Gödel au sein des mathématiques n'ont que peu d'impact sur la discipline économique : « [Gödel] a changé pour toujours l'espoir optimiste dans le PFFA d'Hilbert selon lequel tout savoir scientifique pouvait à la fin être formalisé et développé axiomatiquement sur des fondations sûres, en mathématiques. Le PFFA d'Hilbert, qui appelait la production de résultats mathématiques particuliers qui montreraient la consistance des mathématiques, s'était révélé impossible. Cela ne ruina en rien bien entendu l'optimisme de l'AA d'Hilbert, son appel pour explorer les fondations et développer les théories sur un fondement axiomatique. Ni non plus les arguments d'Hilbert pour l'introduction de la rigueur formelle partout où cela était possible dans le travail scientifique. Le théorème d'impossibilité de Gödel ne toucha pas alors au changement d'image de l'activité (...) et à la manière de poursuivre de nouvelles connaissances scientifiques d'une manière organisée et rigoureuse » (Weintraub, 2002, p.94).

Von Neumann est un bon exemple de cette double approche. Comme nous l'avons vu dans la première section du présent chapitre, il s'intéresse d'abord aux questions de fondements de la logique. Mais très vite, il cherche à axiomatiser la théorie des ensembles et la mécanique quantique de manière à rendre celles-ci utilisables par le chercheur, sur une base solide. Il est donc représentatif de cette « approche axiomatique », qui vise à assurer la poursuite « de nouvelles connaissances scientifiques d'une manière organisée et rigoureuse ». Comme nous l'avons expliqué plus haut, Gödel publie son fameux théorème au sein du colloque mathématique de Menger et von Neumann en est rapidement au courant. Or, cela ne bouscula en rien les recherches entreprises pour reformuler et traiter de manière plus rigoureuse les questions propres à la théorie de l'équilibre général.

B) Les axiomatiques ensemblistes de la science économique

L'axiomatisation des théories économiques, qui prend son envol dans les années 1950, marque une différence claire dans l'organisation des déductions, des théories qui les précèdent. Il suffit d'observer les travaux de Ricardo ou Walras pour se rendre compte de la prépondérance de la déduction. Mais, tout d'abord, le statut des postulats n'est généralement pas le même. Avec le processus d'axiomatisation, on rompt peu à peu avec « *la certitude des principes* » (Mongin, 2003, p.105), dont l'essai de Robbins (1932) en constitue le manifeste, et on envisage la théorie d'un point de vue plus « hypothético-déductif ». De plus, « les économistes classiques et les premiers économistes néo-classiques procèdent sans doute déductivement, mais ils ne font pas d'effort systématique pour isoler l'ensemble des principes qu'ils déclarent certains et pour s'astreindre ensuite à n'employer qu'eux. Au contraire, comme on le voit chez Ricardo, ils font librement et consciemment appel aux principes suivant les besoins du raisonnement » (p.105). La distinction nette entre le contenu interprétatif de la théorie et sa structure logique n'est pas de rigueur.

Comme l'explique Mongin (p.106) et comme peut le laisser penser le contexte viennois que nous avons décrit dans la première section, le positivisme logique a poussé la théorie vers l'organisation axiomatique de son système déductif. On a tendance à assimiler ce processus à celui de la formalisation de l'économie (ce que laisse d'ailleurs entendre l'expression de « révolution formaliste »). Il nous semble utile d'opérer dès lors quelques distinctions. Tout d'abord, avec la formalisation en mathématiques et en logique : dans ce cadre, un système formel (noté S) doit répondre à quatre conditions : 1) que soient définis tous les signes qui apparaissent dans S ; 2) que soient définies toutes les règles de formation des formules dans S , à partir des signes ; 3) que soient définis tous les axiomes (c'est-à-dire les formules premières), constitués à partir des signes de S ; 4) que soient définies toutes les règles d'inférence dans S , permettant de transformer les formules initiales dans de nouvelles formules (Vilks, 1998, p.29).

Or, il est évident que toutes ces règles ne sont pas respectées dans les axiomatiques de l'économie. Les règles de formation et les règles d'inférences sont toujours tacites, se référant à des connaissances antérieures provenant de la logique et surtout des mathématiques. En ce sens, on peut donc dire avec Mongin que la formalisation, en économie, « consiste à traiter les signes en faisant abstraction des significations qu'on leur attribue. Traiter les signes, cela veut dire : les transformer les uns dans les autres, les regrouper, les dissocier, en un mot, effectuer sur eux des opérations » (Mongin, 2003, p.106). L'axiomatisation conduit à dégager la structure logique d'une théorie et à détacher cette structure de l'interprétation de la théorie. Les règles qui permettent d'effectuer des opérations sur la structure logique ne sont pas définies au sein de la théorie axiomatisée, mais sont inspirées du champ des mathématiques. Pour le dire autrement, la formalisation renvoie à l'utilisation d'outils mathématiques, indépendamment du contenu sémantique de la théorie en question.

On voit bien dès lors à quel point, en économie, les processus d'axiomatisation et de formalisation (entendus dans la définition qu'en donne Mongin, pour l'économie) coïncident grandement (même si cela ne constitue pas une nécessité). Sous cet angle, l'expression de « révolution formaliste » revêt pour nous un double sens. Elle induit l'idée d'une focalisation sur la *forme* logique de la théorie au détriment du *contenu* concret. En détachant la structure logique, l'axiomatisation permet de se concentrer uniquement sur celle-ci. Le second sens traduit le processus de formalisation que connaît une partie de la discipline dès la fin des années 1930, avec l'utilisation de nouveaux outils mathématiques puissants, provenant de l'analyse convexe et de la topologie.

Vilks et Mongin notent que les axiomatiques de l'économie reposent sur la théorie des ensembles et sur son axiomatisation par Zermelo et Fraenkel (axiomatisation sur laquelle travailla également von Neumann). Les économistes adoptent ainsi l'attitude du « mathématicien au travail » qui se désintéresse des questions de fondements et de paradoxes au sein de la théorie des ensembles. Vilks et Mongin parlent alors d'« axiomatique ensembliste » pour qualifier les théories axiomatisées, produites en économie : « on se donne un ensemble X , indéterminé ou éventuellement soumis à des conditions peu restrictives, ainsi que certains objets mathématiques définis par rapport à cet ensemble – relations, fonctions, opérations. Ces objets vont être soumis à des conditions particulières qu'on appelle « axiomes ». Dans le cas le plus élémentaire, ils sont de nature directement ensembliste ; dans d'autres cas, on ne peut les décrire sans supposer déjà introduits certains objets mathématiques plus complexes, comme les ensembles mesurables, les topologies, les nombres réels » (Mongin, 2003, p.114-115).

Mongin nous propose ensuite une série d'exemple pour illustrer ces axiomatiques ensemblistes. Exemples qui nous sont fournis tout simplement par les premières axiomatiques apparues dans la théorie économique⁶¹. Dans *TGEB*, von Neumann et Morgenstern partent d'un ensemble X qui matérialise l'ensemble des choix possibles et d'une relation de préférences sur cet ensemble X , qui respecte trois conditions : « préordre, continuité, indépendance » (p.119). Savage (1954) poursuivra cette axiomatisation de la théorie de la décision, en la complexifiant. De même, en théorie du choix social, on prend un ensemble X qui représente l'ensemble des situations sociales, sur lequel sont définies des relations de préférences des n agents. On construit ensuite une fonction F sur X , permettant de faire émerger des préférences sociales, et on applique des axiomes à cette fonction⁶². Enfin, un autre exemple d'axiomatique ensembliste nous intéresse plus particulièrement : celui des modèles construits afin de traiter le problème d'existence d'un équilibre économique. Un bon

⁶¹ Mongin estime que ces axiomatiques ont été influencées par le groupe Bourbaki, qui portait une grande partie de son attention sur la théorie des ensembles.

⁶² Arrow pose quatre conditions que la fonction de choix social doit respecter, selon lui : condition de sensibilité, condition d'indépendance vis-à-vis des alternatives non pertinentes, condition de non-imposition et condition de non-dictature. Il démontre alors, par une preuve non-constructive, qu'il est impossible de trouver une fonction universelle (c'est-à-dire valable quelles que soient les préférences des agents) qui respecte toutes ces conditions. Si on a les trois premières, alors la fonction de choix social sera dictatoriale (Arrow, 1951).

exemple nous est donné par Debreu et sa *Théorie de la valeur* (1959) : R^l représente l'espace des l marchandises. Chaque consommateur choisit un panier de consommation (représenté par un vecteur x), dans son ensemble de consommation X , défini dans l'espace des marchandises, selon un ordre de préférence sur X . De même, chaque producteur choisit un vecteur d'input-output y , dans Y , défini sur R^l .

A travers ces exemples proposés par Mongin, nous pouvons voir que celui-ci fait remonter les premières axiomatiques aux années 1940 et 1950. Mais il nous paraît extrêmement difficile de dater les premières axiomatiques : cela signifierait qu'il existe une frontière claire et précise entre les théories axiomatisées et les théories pré-axiomatiques. Certes, la présentation des articles de Wald (1936) et de von Neumann (1937) contraste avec celle de la *Théorie de la valeur* de Debreu. Il n'empêche qu'il est possible d'y cerner tout un ensemble de caractéristiques propres à l'axiomatique : les hypothèses y sont explicitement énoncées et les interprétations sont détachées du contenu logique (même si cette séparation n'est pas aussi systématique que celle opérée chez Debreu).

Cependant, on peut affirmer sans aucun doute qu'à partir des années 1950 la méthode axiomatique (à travers la construction d'axiomatiques ensemblistes) a fait son nid en économie (même si elle est loin de s'étendre à l'ensemble de la discipline). La question qui se pose alors est de savoir comment une méthode privilégiant l'analyse logique coexiste avec les prétentions positivistes des économistes y ayant recours. Ou plutôt, comment entre en contact un *point de vue logique et mathématique* avec un *point de vue économique* ?

C) La cohabitation de deux points de vue divergents ?

Cette question, de première importance dans une analyse de la rencontre entre les mathématiques et l'économie, nous conduira, dans une première partie, à nous intéresser aux relations entre le mathématicien et l'économiste, afin de soulever les interactions qui peuvent exister entre les deux types d'approche, propres à chacune des deux sciences dont ils sont les pratiquants. Enfin dans une seconde partie, nous essaierons de voir dans quelle mesure l'intérêt pour la rigueur logique est dominant en économie.

1) Entre le mathématicien et l'économiste, deux lectures différentes

Pour apporter un peu plus de consistance à l'idée de dualité des points de vue et de *querelle de priorité*, nous nous appuierons sur un exemple développé par Weintraub (2002), de dialogue entre un mathématicien (Cecil Phipps) et un économiste (Don Patinkin). Cet

exemple aura ici, pour nous, un but principalement heuristique⁶³.

Weintraub s'intéresse à la correspondance qui a lié pendant quelques mois Phipps et Patinkin, au sujet d'un article de l'économiste, paru dans la revue *Econometrica* (1948) : « cette correspondance met en lumière toute la complexité dans la conquête d'un entendement commun [entre mathématiciens et économistes] sur le rôle des hypothèses, sur la nature de la preuve, et sur la signification de la modélisation mathématique – questions qui mettent au défi la croyance que la science économique peut être traduite en langage mathématique » (p.146).

Phipps faisait partie d'un groupe de mathématiciens qui étudiait de manière critique l'usage fait des mathématiques en économie. Dans son article, Patinkin s'intéresse au modèle d'économie monétaire de Walras et Pareto : « il affirme que, si on suppose que les individus n'obtiennent aucune utilité de la détention de monnaie, le modèle classique est cohérent uniquement s'il n'y a aucun stock de monnaie » (p.171). Phipps soulève alors ce qu'il pense être une contradiction mathématique au sujet de la caractérisation de l'utilité de la monnaie : 1) personne ne veut de l'unité monétaire mais 2) le prix de l'unité monétaire est 1. Or, le prix de l'unité monétaire devrait être nul puisque la détention de monnaie ne rapporte aucune utilité. Pour Phipps, c'est le fait que le système d'axiomes soit contradictoire qui permet à Patinkin de prouver l'inconsistance du système si le stock de monnaie détenu est supérieur à zéro.

Patinkin répond assez sévèrement à cette critique (qui passe à côté de ce qu'est un numéraire, en économie), du fait de l'absence de connaissances économiques de la part de Phipps : « votre objectif général d'évaluer la littérature de l'économie mathématique d'un point de vue rigoureux est vraiment louable. Cependant, pour réaliser cet objectif il est nécessaire de comprendre les raisons pour lesquelles les économistes utilisent l'analyse mathématique. Ce qui ne doit pas être mal interprété en disant que le raisonnement économique puisse rendre des mathématiques incorrectes, correctes. Mais cela signifie sans aucun doute que l'impossibilité à comprendre l'arrière-plan économique du problème en question peut conduire (comme cela a été le cas dans les trois papiers que vous m'avez envoyés) à des *erreurs* mathématiques. J'ose imaginer qu'un mathématicien pur hésiterait à prononcer un jugement définitif sur une question de physique mathématique sans avoir au préalable exploré de fond en comble les conditions physiques impliquées ; je pense que la même chose devrait être vraie pour l'économie mathématique » (p.174).

Phipps persiste dans l'idée que des connaissances économiques ne sont pas forcément nécessaires pour traiter des problèmes mathématiques qui sont soulevés par une théorie économique, une fois le modèle mathématique construit. Il considère donc qu'un modèle économique peut être évalué seulement du *point de vue mathématique*. Patinkin lui rétorque que sa critique ne porte pas sur une question mathématique mais sur une question dont la

⁶³ Weintraub a étudié pour cela les *Don Patinkin Papers* de l'université de Duke. Faute de temps, nous n'avons pu y avoir accès. Nous sommes donc dépendant ici des citations extraites par Weintraub, de la correspondance entre Phipps et Patinkin.

signification est économique. De plus, puisque Phipps affirme que c'est le choix d'un ensemble d'axiomes contradictoires qui rend le système inconsistant, comment explique-t-il, se demande Patinkin, que ce système soit consistant si le stock de monnaie possédé est nul ? Phipps répond une nouvelle fois à Patinkin, considérant que ce dernier opère une confusion entre indépendance d'un axiome ou d'un groupe d'axiomes et consistance. Mais il se montre cependant bien peu clair sur ce point.

Il est certain que Phipps ne peut être considéré comme le représentant de toute la communauté mathématique, d'autant plus qu'il n'est sans doute pas l'un des membres les plus brillants de la discipline. Cette correspondance offre néanmoins l'exemple d'un dialogue compliqué entre deux disciplines. « Traduire » la théorie économique en langage mathématique peut conduire à des tensions contradictoires. D'un côté, il est nécessaire d'assurer la non-contradiction et la généralité du modèle construit. Mais ce modèle doit revêtir une signification économique. Le choix des axiomes est constamment pris dans ce tiraillement entre deux priorités. Ce choix peut porter à des débats entre économistes et mathématiciens et même, tout simplement, entre économistes eux-mêmes. Ces débats peuvent s'expliquer par la recherche de différents objectifs, qui sont parfois contradictoires. L'importation d'outils mathématiques en économie, et l'usage de la méthode axiomatique en est un bon exemple, va de pair avec l'importation de tout un bagage épistémologique qui définit la façon dont est évaluée une théorie et la manière de la faire évoluer. Mais ce bagage mathématique ne peut s'appliquer tel quel à l'économie et entre en interaction avec les considérations qui sont propres aux économistes. Toute théorie formelle doit pouvoir être interprétée en termes économiques. L'exemple de la correspondance entre Phipps et Patinkin est enrichissant de ce point de vue, mais cette dualité de l'économie mathématique se retrouve dans les débats entre les économistes eux-mêmes, ce qui pose la question de savoir quelle place est occupée par les considérations formelles et quelle place est occupée par les considérations empiriques et interprétatives⁶⁴.

2) La rigueur logique, un objectif dominant ?

Pour Giocoli, le constat est clair et le développement de la méthode axiomatique a profondément bouleversé la façon d'envisager la discipline : « la connexion avec la réalité a été portée au second plan, qui ne concerne pas nécessairement le mathématicien » (Giocoli, 2003, p.18). Tout comme les mathématiques quelques années auparavant, l'économie a abandonné sa fonction descriptive, sa volonté d'expliquer « le pourquoi et le comment ». L'évaluation d'un modèle se fait par le jugement de sa consistance. Il évolue alors dans deux directions : en gagnant en généralité, par l'affaiblissement de ces hypothèses et en intégrant de

⁶⁴ Cette dualité se retrouve d'ailleurs chez Patinkin qui explique que « comme beaucoup de doctorants (...), j'attribuais trop d'importance à l'analyse mathématique technique et formelle. De ce fait ma thèse donnait trop de place à la dérivation rigoureuse des théorèmes à partir des définitions, hypothèses et lemmes préliminaires, tout en accordant une attention inadéquate à l'interprétation économique de l'analyse » (Weintraub, 2002, p.159)

nouvelles interprétations, pour un même ensemble d'axiomes (p.18). Mais les questions formelles sont toujours premières et ce sont elles qui justifient la construction du modèle au départ. Ainsi, toute théorie économique axiomatisée et formalisée « acquiert une vie mathématique propre et devient l'objet d'un processus inexorable dans lequel la rigueur, la généralité et la simplicité sont poursuivies sans relâche » (Giocoli, 2005a, p.1)⁶⁵.

Cependant, cette focalisation sur l'aspect formel des théories économiques ne peut être imputée directement à la méthode axiomatique. Même si historiquement les deux sont allées de pair, il est possible de penser qu'il aurait pu en être autrement. C'est ce que laisse suggérer Giocoli quand il parle d'une forme de « bigamie » de la méthode axiomatique (Giocoli, 2005a, p.9). Ainsi Frisch proposa des modèles économétriques axiomatisés dont le choix des axiomes reposait sur des tests empiriques (p.13). De même, Punzo insiste sur le fait « qu'il est faux de parler d'une approche axiomatique en opposition à une approche descriptive ou historique. Il est encore plus malvenu d'identifier une version spécifique de l'approche axiomatique, prise comme si elle était la seule disponible, comme étant l'unique approche axiomatique » (Punzo, 1991, p.6). Cette focalisation est plutôt le propre du *style de pensée axiomatique* de l'économie mathématique de l'époque.

Nous pensons que le terme de « bigamie » de Giocoli est réducteur. Il est possible, à notre avis, de faire émerger un continuum de positions épistémologiques (attachant plus ou moins d'importance aux questions formelles et aux questions de « réalisme ») sur l'usage de la méthode axiomatique. La méthode axiomatique est employée différemment suivant l'*image du savoir* propre à l'économiste qui en fait usage. Et ces différences constituent un révélateur des problèmes épistémologiques en jeu, dans l'application de la méthode axiomatique en économie. Au sein du *style de pensée axiomatique*, la concentration sur la structure logique peut être plus ou moins grande. La position de Gérard Debreu constitue par exemple une position extrême de ce *style de pensée*, comme nous le verrons dans le prochain chapitre, en étudiant l'article d'Arrow et Debreu sur l'existence d'un équilibre général concurrentiel.

Conclusion

Le premier chapitre proposait une brève histoire du développement de la méthode axiomatique et un ensemble de questions épistémologiques qui lui sont liées. Ce second chapitre s'est attaqué à l'introduction de cette méthode de *justification* au sein de la discipline

⁶⁵ Giocoli appuie ses affirmations sur un exemple tiré des travaux de Moscati (2003) qui montre que, concernant la théorie de la demande au XX^e siècle, « ce qui dirige réellement l'esprit du scientifique n'est pas l'objectif d'obtenir une représentation toujours améliorée de la réalité, mais plutôt celui de réaliser le plus haut degré de systématisation grâce à l'ordonnance des phénomènes dans un système stable et structuré d'objets théoriques qui exhibent le plus haut degré possible d'exactitude et de généralité » (Giocoli, 2005a, p.15). En dehors de la théorie de la demande, Giocoli s'appuie sur la TEG et la théorie des jeux, ce qui à notre avis est insuffisant pour pouvoir généraliser ses conclusions à l'ensemble de l'économie.

économique. Deux périodes géographiquement et institutionnellement localisées revêtent un caractère explicatif fort. Tout d'abord, les années 1930 à Vienne constituent un contexte scientifique singulier, dominé par le positivisme logique. Le colloque mathématique de Karl Menger encouragea le développement des mathématiques (avec l'accroissement des connaissances dans de nouveaux domaines tels que la topologie) et de ses applications à toutes les sciences empiriques. On y prône l'axiomatisation de la théorie économique, principalement à travers l'axiomatisation de la théorie de l'équilibre général, qui connaîtra ses prémises avec les travaux de Wald et von Neumann.

Mais la guerre pousse de nombreux scientifiques à migrer vers les Etats-Unis, là où rebondit notre histoire de l'intégration de la méthode axiomatique en économie. Cette intégration progressive s'inscrit dans un profond bouleversement méthodologique de la discipline. On utilise de plus en plus des théorèmes mathématiques provenant des mathématiques pures. La rigueur logique prend le pas sur la pertinence factuelle (même si les discours méthodologiques continuent d'affirmer l'économie comme une science positive, c'est-à-dire une science qui en dernier ressort doit traiter des faits économiques). Dans ce bouleversement, la *Cowles Commission* occupe la première place.

A travers ces deux premiers chapitres, nous avons pu soulever un ensemble de questions relatives à l'intégration de la méthode axiomatique en économie, qui va nous permettre de traiter de l'objet qui nous intéresse. Que peut nous apprendre l'étude de la preuve d'existence d'un équilibre général telle qu'elle est développée collectivement par Arrow et Debreu, dans un cadre axiomatique ? L'utilisation de la méthode axiomatique pousse à la focalisation sur la question du choix des axiomes et sur le type de preuve utilisé. L'objectif étant d'atteindre la plus grande généralité et la plus grande simplicité. Mais cet objectif entre en interaction avec des considérations interprétatives. Quelle signification économique doit-on donner à la théorie axiomatique ainsi construite ? Cette *querelle de priorité* matérialise bien la rencontre entre le raisonnement formel des mathématiques et l'économie (entendue comme une science positive). S'intéresser à un problème précis de théorie économique (l'existence d'un équilibre général) et au traitement qui en est proposé par deux auteurs (Arrow et Debreu dans leur article de 1954) doit nous permettre de comprendre comment fonctionne une théorie axiomatique (comment est-elle évaluée ? sur quoi se porte l'attention ? comment doit-elle évoluer ? quel contact avec les interprétations de la théorie et les faits économiques ?).

Chapitre III : Arrow-Debreu (1954), un article révélateur

L'article écrit par Kenneth Arrow et Gérard Debreu (le seul qu'ils écriront ensemble), publié en 1954, constitue sans aucun doute l'un des textes fondamentaux de l'économie contemporaine. Il est considéré comme une référence en termes de rigueur logique. Till Düppe expose cette popularité par trois constats (Düppe, 2012, p.509-510) : premièrement, l'augmentation régulière, jusqu'à la fin des années 1970, puis exponentielle par la suite, des références à l'article de 1954 et ce, dans des domaines de plus en plus variés (macroéconomie, finance, théorie monétaire, commerce international, économie régionale) ; deuxièmement, l'utilisation de l'article dans des manuels (par simple citation, dès 1958, puis par l'exposition de la preuve, dès 1971) ; enfin, tout au long de la seconde moitié du XX^e siècle, l'article de Arrow et Debreu devient la cible privilégiée des critiques de l'économie mathématique.

Mais ce qui nous intéresse plus particulièrement ici est que ce papier de 1954 constitue un véritable révélateur. Révélateur d'abord d'un *style de pensée axiomatique*, qui va caractériser l'économie mathématique à partir des années 1950 et le processus d'axiomatisation qui accompagne son développement. A travers la lecture de l'article, on voit émerger tout un ensemble de questions épistémologiques qui pose le problème de l'articulation entre *contraintes mathématiques* (généralité mathématique des hypothèses, simplicité de la preuve) et *contraintes interprétatives* (quels énoncés économiques significatifs peut-on tirer du modèle Arrow-Debreu ?).

Cet article est révélateur pour une seconde raison : l'analyse de la correspondance entre Arrow et Debreu, précédant la rédaction de l'article, à laquelle nous avons accès grâce à l'article de Düppe (2012), permet de souligner que l'article de 1954 est le résultat d'un compromis suite à de longues négociations entre les deux co-auteurs sur le type de preuve à employer, sur le choix des hypothèses et sur leur interprétation. Une telle analyse permet donc de constater que Kenneth Arrow et Gérard Debreu sont porteurs d'une *image du savoir* différente et encourage à pousser plus en aval le traitement de cette question à travers une étude systématique de leurs travaux et de leurs propos sur l'existence d'un équilibre général. Etude qui permettrait de renforcer l'analyse et la description du *style de pensée axiomatique* de l'économie mathématique, par le biais des économistes qui en sont les vecteurs.

Dans ce chapitre, nous porterons notre attention sur l'article de 1954. Notre analyse se fonde sur l'étude de l'article lui-même, mais aussi sur l'analyse de la correspondance entre les deux auteurs, telle qu'elle est présentée par Düppe et sur l'étude du processus de publication de l'article dans la revue *Econometrica*, présenté par Weintraub et Gayer (2001). Nous nous intéresserons dans une première partie à sa genèse et à son contenu. Nous soulèverons dans une deuxième partie les problèmes épistémologiques qui lui sont consubstantiels (organisation

axiomatique, nature et généralité de la preuve, place de l'interprétation). Enfin, nous tenterons, en guise de conclusion, de montrer tout l'intérêt d'une étude systématique des travaux d'Arrow et de Debreu, pour comprendre le rôle de l'axiomatique en économie.

I – Genèse et description de l'article de 1954

Quand ils publient cet article en juillet 1954⁶⁶, Arrow et Debreu sont encore jeunes et leur carrière universitaire vient à peine de débiter⁶⁷. Issus d'une formation scolaire différente, ils convergent, par des chemins distincts, vers des sujets d'intérêts similaires (l'optimalité et l'existence d'un équilibre économique concurrentiel). Leurs premiers échanges épistolaires (durant l'année 1952) les conduisent à constater qu'ils sont relativement proches au sujet de la preuve de l'existence d'un équilibre. Leur collaboration s'impose alors. Nous décrivons ici l'évolution respective de leur carrière, qui les conduit à s'intéresser au problème de l'existence et à en fournir une solution. Nous nous intéresserons ensuite au fruit de cette collaboration : l'article de 1954.

A) Arrow et Debreu : deux chemins convergents vers leur collaboration

La convergence des trajectoires d'Arrow et de Debreu est d'autant plus intéressante que leur formation initiale et leurs premiers intérêts universitaires sont divergents. On fait face à des profils d'économistes biens différents. Il n'empêche qu'à l'orée des années 1950, ils évoluent dans un espace académique commun, gravitant autour d'une même sphère d'influence, celle de la *Cowles Commission* (même si Arrow n'en fait déjà plus partie à l'époque). C'est ce cadre commun de pensée et de recherche qui les conduit tout deux à être aux premières loges de développements mathématiques de haut niveau (tel la généralisation du théorème du point fixe par Kakutani, ou la généralisation à n-joueur du minimax de von Neumann, par Nash [1950]). Cette position privilégiée sera déterminante dans le processus de découverte d'une preuve d'existence.

1) Deux profils différents

En 1941, Kenneth Arrow obtient un *master* en mathématiques. Mais il décide de s'orienter vers l'économie du fait de son intérêt pour les statistiques mathématiques. Il projette d'ailleurs à l'époque de devenir actuaire. Dès 1946, il devient chercheur associé puis professeur assistant à la *Cowles Commission* (qu'il quittera en 1949). Il poursuit en parallèle son *PhD* à

⁶⁶ Ils l'ont présenté auparavant, en décembre 1952, lors d'une rencontre de la société d'économétrie, à Chicago.

⁶⁷ Tous deux nés en 1921, Arrow termine sa thèse en 1951, Debreu est agrégé de mathématiques en 1945.

l'université de Columbia, sous la direction d'Hotelling, et de son assistant Abraham Wald. Comme l'explique Ingrao et Israel (1987, p.249), Hotelling, devenu professeur à Columbia en 1931, joua un grand rôle dans le développement d'un département de statistiques mathématiques au sein de l'université new-yorkaise. Privilégiant au début des années 1930 les travaux classiques de l'économie tels que la théorie de la demande dans un cadre d'équilibre partiel, il s'intéresse par la suite à la question de la stabilité de l'équilibre dans un duopole de Cournot, puis à celle de l'optimalité d'une économie avec des taxes appliquées aux transports, dans un cadre d'équilibre général.

C'est grâce à Hotelling que Arrow a connaissance de l'ouvrage de Hicks, *Valeur et capital*, et prend conscience du problème de l'existence d'un équilibre général (même si Hicks ne s'intéresse pas à la preuve formelle de l'existence d'un tel équilibre) : « Je suppose que j'avais été exposé à suffisamment de mathématiques pour savoir que quand on a un système d'équations, on doit s'inquiéter de l'existence [d'une solution] » (Feiwel, 1987, p.194). Peu après la guerre, selon Düppe, il prend connaissance des travaux de Wald sur l'existence (travaux qui n'étaient pas encore traduits à l'époque). Cependant, Wald ne l'encourage pas véritablement à poursuivre dans cette voie, comme le raconte Arrow : « je me rappelle l'avoir interrogé sur cela et sur de possibles généralisations (particulièrement concernant les hypothèses sur la production). Il sentait que le domaine était très difficile et il ne m'a pas encouragé à poursuivre mon travail (...). Je ne croyais pas à l'époque que j'étais celui capable d'améliorer sensiblement les résultats » (Weintraub, 1985, p.96).

Respectant l'autorité de Wald, Arrow porta son attention sur d'autres domaines de recherche. Entré à la RAND⁶⁸ en 1948, il travaille alors sur la théorie des jeux et la recherche opérationnelle. Mais c'est son intérêt pour la logique qui le conduisit à s'attaquer aux problèmes du choix social, dans le cadre de sa thèse. Ce qui donnera lieu à la publication du fameux *Social Choice and Individual Values*, en 1951. Ainsi, avant même sa rencontre avec Debreu, « il s'était déjà assuré une publication majeure et un nom dans la communauté » (Düppe, 2012, p.495). Après sa thèse, il obtient un poste à Stanford et commence à travailler sur la preuve de l'optimalité de l'équilibre économique, grâce à l'utilisation du théorème de séparation des ensembles⁶⁹. Une fois posée la question de l'optimalité, il semble cohérent de s'intéresser à celle de l'existence.

Gérard Debreu, quant à lui, est un pur produit de l'enseignement français, formé aux mathématiques à l'Ecole Normale Supérieure, sous la direction d'Henri Cartan (membre du groupe Bourbaki). A cette époque, le jeune Debreu se pose la question de savoir s'il veut persévérer dans les mathématiques pures ou s'il préfère chercher des débouchés à celles-ci, en

⁶⁸ Il s'agit d'une sorte de grand laboratoire d'idées américain, fondé en 1945 dans l'optique d'améliorer les politiques et les processus décisionnels par la mobilisation de nombreux chercheurs, dans des domaines divers. Son rôle en économie fut important (voir Mirowski, 2002).

⁶⁹ Il présente ses travaux sur ce sujet en août 1950, et l'article «An Extension of the Basic Theorems of Classical Welfare Economics » sera publié en 1951.

s'orientant vers une autre discipline : « Après environ une année ou presque (nous entrions dans l'automne 1941), je commençais à me demander si les mathématiques ne devenaient pas trop abstraites, sous l'influence de Bourbaki (...). Je devais décider si je voulais passer ma vie entière à faire de la recherche sur un sujet vraiment abstrait (...). Je pensais alors que la physique serait mon domaine » (Weintraub, 2002, p.116). Debreu se tourne par curiosité vers la discipline économique mais il est rapidement fortement désappointé par ce qu'il y découvre : « Quand j'ai commencé à m'intéresser à l'économie comme une possibilité (...), je me suis attaqué au texte standard pour les étudiants en économie à l'université. Je ne me rappelle plus qui en était l'auteur mais cela était vraiment non-théorique (...). Je sais que le manuel était populaire à l'époque (...) mais dans tous les cas, ma première impression de l'économie fut un profond désappointement car je venais d'un monde très sophistiqué de mathématiques rares et je trouvais ici seulement une approche banale de l'économie » (p.117).

Le premier ouvrage économique qui éveilla vraiment son intérêt fut celui de Allais (1943), constituant une forme de révélation à ses yeux : « Pour la première fois, je voyais que les mathématiques pouvaient être utilisées en économie d'une façon rigoureuse, même s'il ne s'agissait pas des mathématiques auxquelles j'étais le plus habitué. Et je sentais qu'il y avait peut-être beaucoup à réaliser en économie avec des mathématiques plus sophistiquées » (p.117). Il existe très peu de travaux de ce genre en France, à l'époque. Mais Debreu réussit ensuite à se procurer assez rapidement l'ouvrage de von Neumann et Morgenstern, qui semble le déterminer à se destiner à une carrière d'économiste.

De 1946 à 1948, il occupe un poste d'assistant au CNRS. Grâce à une bourse Rockefeller, il peut partir aux Etats-Unis durant l'année 1949. C'est durant ce séjour qu'il effectue son premier passage à la *Cowles Commission*. Passage pour le moins marquant : formé aux mathématiques pures, ses premiers contacts avec l'économie ne l'avaient pas encouragé à persévérer dans cette voie. Mais à Chicago, il découvre une influence bourbakiste et une volonté commune à la sienne : améliorer la sophistication et la rigueur des mathématiques en économie. Et c'est sans aucun doute cette volonté qui le conduit à s'intéresser au problème de l'existence : comme il l'explique lui-même, à cette époque « l'argument standard pour l'existence était l'égalité du nombre d'équations et du nombre d'inconnues. Pour quelqu'un formé à la tradition mathématique de Bourbaki, cela ne convenait pas » (Feiwel, 1987, p.248).

On voit bien par ces deux récits, de quelles manières Arrow et Debreu sont conduits à s'intéresser au problème de l'existence. Mais pour que la publication de leur article soit possible, il fallait la présence d'un certain nombre de réquisits techniques. L'étude de leurs articles respectifs, précédant décembre 1952, permet de voir comment se construisent peu à peu la trame et la structure mathématique de leur article commun.

2) Développement des outils techniques et premiers travaux sur l'optimalité

Il est intéressant de noter en préambule qu'Arrow et Debreu ne reconnaissent pas la même influence aux travaux importants qui précèdent leur article commun. Comme nous l'avons vu plus haut, Arrow est rapidement au courant des travaux de Wald, les lisant même directement en allemand. Il est également l'un des tous premiers à avoir accès à leur traduction anglaise : « J'ai lu les traductions et il en est ressorti en quelque sorte la conviction que Wald utilisait un argument déguisé en termes de point fixe (c'était après avoir lu le papier de Nash) » (Weintraub, 1983, p.427). Sous la double influence des lectures de Wald et Nash, il prend conscience que « l'équilibre concurrentiel pourrait être décrits comme un point d'équilibre d'une suite de jeux en ajoutant des joueurs artificiels qui choisiraient les prix et d'autres qui choisiraient les utilités marginales du revenu pour les individus » (p.427)⁷⁰.

Debreu arrive lui aussi à la même conclusion. Il n'est au courant que très tardivement (1951) des travaux de Wald. Mais l'idée d'une preuve d'existence d'un équilibre économique, formulée en termes de point fixe avait déjà fait son chemin dans son esprit. Selon lui les influences qui le conduisirent à une telle idée sont toutes autres. D'abord ce qu'il nomme « la tradition de l'école de Lausanne », avec Divisia, Hicks et Allais, mais aussi (et surtout) « la théorie des jeux et, en particulier, l'article de J.Nash, le [papier sur les points fixes de] Kakutani et l'article [de 1937] de von Neumann (...) [ainsi que] les modèles économiques linéaires de la monographie de la *Cowles Commission* » (p.427). En ce qui concerne l'article de von Neumann, l'intérêt de Debreu, provient comme il l'explique du fait qu'il conduit au théorème de Kakutani (Feiwel, 1987, p.249).

Arrow et Debreu reconnaissent tout deux le rôle primordial joué par la rencontre de juin 1949, organisée par la *Cowles Commission*, autour de la programmation linéaire et de l'analyse d'activité pour la production et l'allocation des ressources. Comme l'explique Düppe, lors de cette conférence, « tous les ingrédients de l'article d'Arrow et Debreu étaient sur la table, même si trop prématurément pour être associés » (Düppe, 2012, 493). Koopmans fait d'ailleurs explicitement référence à la question de l'existence et aux travaux entrepris au sein du colloque mathématique de Karl Menger. Les débats se concentrent sur le modèle de croissance de von Neumann de 1937. Mais la contribution de Koopmans joua également un rôle influent, comme le reconnaît Arrow : « le papier de Koopmans a joué un rôle essentiel en montrant que les conditions de convexité et compacité pouvaient être supposées sans perte de généralité, donc que le théorème de Nash pouvait être appliqué » (Weintraub, 1983, p.427)⁷¹.

Cette rencontre de 1949 marque l'émergence d'une nouvelle ère où l'utilisation de nouveaux outils mathématiques est revendiquée (analyse convexe, topologie, théorème du

⁷⁰ Du fait de son importance, il nous semble utile d'apporter dès à présent des précisions sur l'article de Nash. Le mathématicien y utilise le théorème du point fixe de Kakutani pour prouver l'existence d'un équilibre dans un jeu à n-joueurs. Un équilibre de Nash est une collection de stratégies des n joueurs de telle sorte qu'aucun des joueurs ne peut améliorer son paiement en changeant simplement sa propre stratégie.

⁷¹ Arrow évoque l'application de ces conditions aux ensembles de production (utilisés dans le modèle d'équilibre général). Or, ces deux conditions sont nécessaires pour obtenir le résultat de Nash.

point fixe...). On retrouve cette influence dans les articles publiés par Arrow et Debreu, avant leur article commun.

Dans son article de 1951, Arrow s'attaque au problème du lien entre équilibre économique et optimum de Pareto. Il part de la condition d'égalité des taux marginaux de substitution de chaque paire de biens, entre chaque agent. Il montre que cette propriété n'est pas nécessaire pour garantir l'optimalité : « Les propriétés d'optimalité d'un système de prix concurrentiel demeurent même quand les optimums sociaux sont atteints pour des maximums en coin. En un sens, le rôle des prix dans l'allocation est plus fondamental que l'égalité des taux marginaux de substitution ou de transformation, auxquels il est d'ordinaire subordonné. D'un point de vue mathématique, l'astuce est le remplacement des méthodes de calcul différentiel par l'usage de théorème élémentaire de la théorie des ensembles convexes dans le développement des critères pour un optimum » (Arrow, 1951b, p.510). Arrow participe bien au tournant mathématique que connaît la discipline économique à cette époque. Et la théorie des ensembles convexes jouera un rôle de premier plan dans l'article de 1954.

La même année, Debreu s'attaque au même problème et développe lui aussi une preuve plus générale de l'optimalité de l'équilibre économique, en ne faisant pas appel aux dérivées, avec une preuve « fondée sur les propriétés de convexité » (Debreu, 1951, p.274). Plus important, pour le modèle Arrow-Debreu, est son article de 1952. Le français introduit son article de la manière suivante : « Dans une vaste classe de systèmes sociaux, chaque agent a un classement d'actions parmi lequel il en choisit une. Cependant, son choix n'est pas entièrement libre et les actions de tous les autres agents déterminent le sous-ensemble dans lequel sa sélection est restreinte. Une fois que l'action de chaque agent est donnée, le résultat de l'activité sociale est connu. Les préférences de chaque agent sont rapportées à un ordre complet de paiements et chacun essaye de choisir l'action, dans son sous-ensemble restreint, qui lui apporte le meilleur paiement, en fonction de ses propres préférences. Le théorème d'existence présenté ici donne les conditions générales sous lesquelles un tel système social a un équilibre, c'est-à-dire, une situation où l'action de chaque agent appartient à son sous-ensemble restreint et où aucun agent n'a d'intérêt à choisir une autre action » (Debreu, 1952, p.887). Pour le dire autrement, chaque agent classe un ensemble de paiements possibles. Il choisit ensuite une action parmi un sous-ensemble de possibilités, contraint par les choix des autres agents, de manière à obtenir le paiement qu'il préfère. On voit bien alors le rapprochement fait avec la théorie des jeux et plus particulièrement avec l'équilibre de Nash. Ce processus permet, pour Debreu, de décrire le comportement des agents dans une économie : chaque agent doit choisir un panier de bien, mais ce choix est contraint par les choix des autres agents (choix qui ont un impact sur les prix). L'équilibre du système social et l'équilibre de Nash sont similaires puisqu'il s'agit d'un équilibre où les agents n'ont pas intérêt à changer leur action, relativement à leur sous-ensemble restreint (Giocoli, 2003, p.12-13).

En plus du rapprochement effectué avec le concept de jeu, la seconde innovation de l'article de Debreu réside dans la preuve qu'il propose pour prouver l'existence d'un équilibre pour un système social. Il cherchait en effet à obtenir la preuve la plus générale possible, à l'aide du théorème du point fixe. Pour cela, « il consulta les bourbakistes les plus importants à Chicago : Saunders Mac Lane et André Weil. Ils l'aidèrent avec une version du théorème de Deane Montgomery et Samuel Eilenberg (...). Debreu apprit une version différente du théorème, celle d'Edward Bègle » (Düppe, 2012, p.497). Cette preuve lui permet d'atteindre la généralité recherchée et d'englober différents résultats, tels que ceux de von Neumann sur le minimax (mais aussi le résultat de von Neumann et Morgenstern sur le même sujet) et sur le modèle de croissance équilibré, ou bien encore celui de Kakutani, utilisant le théorème du point fixe, grâce au remplacement de l'hypothèse de convexité par l'utilisation de polyèdres et de l'hypothèse de contractilité.

On voit émerger ici l'une des caractéristiques fortes de l'*image du savoir* de Gérard Debreu : son attention se porte principalement sur la généralité des hypothèses du système axiomatique construit. En séparant strictement les interprétations du système axiomatique construit, de sa structure formelle, et en cherchant à donner à cette structure un maximum de *généralité mathématique*, Debreu cherche à dégager des isomorphismes de structures et ainsi à englober sous la même structure mathématique des phénomènes concrets divers. On retrouve bien là l'influence bourbakiste qui à l'inverse semble avoir épargné Arrow.

Cet article présenté en août 1952, alors qu'Arrow et Debreu sont en communication épistolaire depuis près de six mois, jouera un grand rôle dans la rédaction de la preuve de l'article de 1954. Cependant, comme nous le verrons dans la seconde section, la preuve utilisée ne sera pas aussi générale que l'aurait souhaité Debreu, ne faisant pas appel aux polyèdres contractiles et gardant l'hypothèse de convexité.

B) Présentation de l'article de 1954

Nous allons nous attacher désormais à présenter en détail l'article de 1954. Durant la majeure partie de l'année 1952, Kenneth Arrow est en voyage en Europe. Il ne rencontrera d'ailleurs Debreu pour la première fois qu'en décembre de la même année, c'est-à-dire juste avant la présentation de leur article devant la société d'économétrie, à Chicago. Comme nous le raconte Düppe (2012), Tjalling Koopmans (alors directeur de la *Cowles Commission*) contacte Debreu, à la fin du mois de janvier 2012, pour s'informer sur l'état de ses recherches. Ce dernier lui apprend qu'il s'intéresse à la question de l'existence d'un équilibre général. Koopmans lui transmet alors un rapport rédigé par Arrow sur cette question. Au début du mois de février, Debreu se permet d'envoyer une note critique sur ce rapport à son auteur (qui se trouve alors à Rome). Il y soulève une erreur et présente à Arrow sa propre démarche. Après quelques échanges, Arrow lui proposera, dès le mois de mars, de collaborer pour écrire

un article en commun. Ce travail sera donc présenté à la fin de l'année 1952. Arrow écrit durant le printemps 1953 l'introduction et la note historique. Le papier est fin prêt au mois de mai et il sera publié au mois de juillet 1954 dans la revue *Econometrica*.

L'article est constitué de six sections. Après avoir énoncé en introduction les objectifs de leur article et les différences de leur modèle avec celui de Wald, Arrow et Debreu présentent dans leur première section leur modèle d'équilibre général et les hypothèses nécessaires à la démonstration de leur premier théorème d'existence d'un équilibre général concurrentiel (concurrentiel car sous un régime de concurrence parfaite⁷²). La seconde section présente un lemme permettant d'effectuer le rapprochement avec le théorème de Nash. La troisième section utilise ce lemme pour démontrer leur premier théorème. La quatrième section présente des hypothèses alternatives (l'hypothèse IVa. que l'on pourra appeler « hypothèse de survie » est remplacée par un ensemble d'hypothèses) et un second théorème d'existence. La section qui suit énonce la preuve formelle de ce second théorème. Enfin une dernière section est consacrée à une « note historique » présentant rapidement les travaux précurseurs de leur propre article, effectués au sein du colloque mathématique de Menger.

Dans l'introduction, Arrow et Debreu affirment⁷³ que « la recherche sur l'existence de solutions a un intérêt tant pour l'économie descriptive que pour l'économie normative. Du point de vue descriptif, l'idée que le modèle concurrentiel est une description raisonnablement précise de la réalité, du moins pour certaines propositions, présuppose que les équations décrivant le modèle sont consistantes les unes avec les autres » (p.265). Autrement dit, si l'on veut décrire un phénomène économique par la construction d'un modèle, ce qui assure la cohérence d'un tel modèle est l'existence d'une solution, c'est-à-dire d'un équilibre, au système d'équations construit pour « traduire » mathématiquement le modèle. Avant d'étudier une économie concurrentielle, il semble raisonnable de s'assurer formellement qu'un équilibre existe dans le modèle représentant cette économie. Arrow et Debreu insistent ensuite sur le caractère prescriptif du modèle qui permet d'identifier les « conditions sous lesquelles les équations de l'équilibre concurrentiel ont une solution » (p.265). On peut s'accorder dès lors avec Benetti qui explique que le modèle d'équilibre général joue le rôle d'une norme à laquelle est comparée la réalité (Benetti, 1997). L'autre intérêt de la recherche d'une solution à la question de l'existence est que cette recherche complète celle entreprise sur la question de l'optimalité de cet équilibre. En effet, que nous importe, à long terme, de savoir qu'un équilibre concurrentiel est un optimum de Pareto, si l'on n'est même pas capable de savoir si cet équilibre existe ?

Arrow et Debreu s'attachent ensuite, toujours dans l'introduction, à marquer la différence entre leur article et ceux de Wald, publiés au sein du colloque mathématique de Menger. Ils jugent leurs hypothèses « plus faibles et plus proches de la réalité économique » (p.266) que

⁷² Pour Arrow et Debreu, la concurrence parfaite a un sens précis. Cela signifie que « chaque producteur et chaque consommateur regardent les prix payés et reçus comme indépendants de leurs propres choix » (p.265). Les agents sont des *price-takers*.

⁷³ Nous verrons dans la section suivante que c'est Arrow qui tenait à une telle affirmation.

celles formulées par Wald. Le modèle qu'ils construisent intègre à la fois la production et l'échange (alors que Wald avait construit deux modèles séparés). Enfin, la preuve qu'ils proposent est, selon eux, plus simple. Cette comparaison est révélatrice des critères d'évaluation (ou *critères de justification*, pour suivre la terminologie employée depuis l'introduction) d'une théorie axiomatisée et du chemin que doit suivre celle-ci pour progresser. L'économiste doit s'attacher à rechercher toujours plus de *généralité mathématique*, de réalisme et de simplicité dans les preuves mathématiques qu'il fournit. Mais un premier problème de signification se pose dès lors : Arrow et Debreu utilisent le terme de « généralité » et le terme correspondant d'« affaiblissement » pour décrire deux processus différents. D'un côté, ils évoquent une plus grande généralité mathématique, c'est-à-dire un *affaiblissement* des hypothèses mathématiques employées⁷⁴. De l'autre, ils entendent l'affaiblissement des hypothèses comme un moyen pour le modèle d'acquiescer un plus grand réalisme et d'élargir sa richesse interprétative. On retrouve alors la distinction que nous avons faite dans le premier chapitre entre *affaiblissement* et *élargissement* d'un modèle théorique. Or, cette distinction est absente des propos d'Arrow et Debreu qui utilisent le terme d'affaiblissement dans les deux cas, comme si l'*affaiblissement* et l'*élargissement* d'un modèle ne pouvaient être contradictoires⁷⁵. Nous retrouverons ce problème un peu plus loin dans leur article.

Nous allons nous attacher dans un premier temps à décrire l'architecture logique du modèle tout en y associant les différentes interprétations des hypothèses et des définitions qui sont données par les deux auteurs⁷⁶. Cette présentation tentera d'être la plus littéraire possible pour en faciliter la lecture. Il suffit bien entendu de se reporter directement à l'article pour obtenir la formulation mathématique complète. Dans un second temps, nous proposerons une description de la preuve utilisée pour démontrer le premier théorème.

1) L'architecture du modèle Arrow-Debreu

La première section s'attaque d'abord à la définition des marchandises. Elles sont au nombre l . On a donc un nombre fini de marchandises. Du point de vue interprétatif, chaque marchandise est définie précisément par ses qualités, par un lieu et par un moment du temps. Le modèle Arrow-Debreu représente donc un *système complet* de marché : il est possible

⁷⁴ A titre d'exemple, le passage d'une hypothèse de convexité forte des préférences à l'hypothèse plus faible de convexité des préférences constitue un affaiblissement de la contrainte mathématique pesant sur le modèle (Quirk et Saposnik, 1968, p.29). Il ne s'agit que d'un exemple, sans rapport direct avec l'article de 1954.

⁷⁵ Il faut ajouter que, quand Arrow et Debreu parlent d'affaiblissement au sens d'affaiblissement de la contrainte interprétative pesant sur le modèle, ils ne cherchent généralement pas à enrichir l'ensemble des interprétations possibles, mais plutôt à favoriser l'émergence d'une interprétation jugée plus réaliste. L'affaiblissement de l'hypothèse IV.a de l'article, qui constitue la clé de la transition entre le théorème 1 et le théorème 2, a pour but d'affaiblir une hypothèse qui conduit à des interprétations profondément irréalistes.

⁷⁶ Nous aurons l'occasion de remarquer qu'interprétation et structure formelle ne sont pas strictement séparées dans l'article, contrairement à ce que voudrait la rigueur axiomatique. Nous proposons en annexe un tableau récapitulatif de manière distincte les différentes définitions, axiomes et interprétations proposées dans l'article, mais aussi en soulignant les interprétations manquantes et les problèmes interprétatifs qui ne sont pas traités.

d'acheter et de vendre dès aujourd'hui n'importe quel bien à n'importe quel moment du temps.

Arrow et Debreu présentent ensuite le secteur de la production. On a un nombre fini n d'unités de production. Y_j est l'ensemble représentant les plans de production possibles pour l'unité de production j . y_j est un vecteur à l composantes dans l'espace des marchandises R^l . Le vecteur représente un plan de production pour l'unité de production j , c'est-à-dire une combinaison d'inputs (représentés par des valeurs réelles négatives) et d'outputs (représentés par des valeurs réelles positives)⁷⁷. L'ensemble Y représente tous les schémas d'inputs-outputs possibles pour l'économie (Y est la somme sur j des n ensembles Y_j). Arrow et Debreu posent alors trois hypothèses (numérotées de I.a à I.c) sur les ensembles de production⁷⁸. Tout d'abord, Y_j est supposé être un sous-ensemble fermé convexe⁷⁹ de R^l (I.a). Economiquement, cela signifie que les rendements de la production peuvent être décroissants ou constants. Deuxièmement, le seul point d'intersection de Y avec l'orthant positif (qui regroupe les points pour lesquels les coordonnées sont toutes égales ou supérieures à 0) est 0 (I.b). C'est-à-dire qu'il est impossible pour une unité de production de produire quelque chose sans input. Enfin, le seul point d'intersection de Y avec son opposé ($-Y$) est 0 (I.c). Ce qui signifie qu'il n'est pas possible d'avoir des ensembles de production qui s'annulent entre eux. La justification de cette hypothèse est que le travail, qui est utilisé en input, ne peut pas être un output. Il est impossible de produire le facteur travail.

Le second secteur du modèle d'économie concurrentiel décrit par Arrow et Debreu est le secteur de la consommation. On y trouve m unités de consommations qui, du point de vue économique, peuvent être des familles, des individus ou des « consommateurs institutionnels » (p.268). x_i est un vecteur dans R^l représentant la quantité consommée des l marchandises de l'économie, par l'unité de consommation i . Si l'un des composants de ce vecteur prend une valeur réelle négative, c'est qu'il s'agit d'un « service en travail ». L'ensemble X_i symbolise l'ensemble de consommation possible pour l'unité de consommation i . Du point de vue interprétatif, l'existence de cet ensemble s'explique premièrement du fait que la quantité de travail proposé par un individu est limitée. Par exemple, l'ensemble des services en travail proposé par un individu se limite à 24 heures par jour. Deuxièmement, les paniers de consommation ne permettant pas la survie de l'individu sont exclus de l'ensemble de consommation possible : l'individu ne peut choisir que parmi

⁷⁷ Du fait de l'interprétation des biens en termes de lieu et de moments du temps, les plans de productions incluent les achats et les ventes futurs.

⁷⁸ Ce sont Arrow et Debreu qui utilisent le terme d'*hypothèses*. Concernant l'équilibre concurrentiel, ils parlent de *conditions* (numérotées de 1 à 4). Il s'agit dans les deux cas des *axiomes* du modèle. Nous verrons que certains axiomes ne sont pas énoncés de manière aussi explicite (pas de numérotation).

⁷⁹ Un ensemble est dit *convexe* si pour tout élément x et x' de cet ensemble et pour tout $0 < t < 1$, si x est préféré à x' alors leur moyenne pondérée, $tx + (1-t)x'$ est préféré à x' . Dans l'espace, cela signifie que si on relie par un segment n'importe quels points de cet ensemble, le segment sera toujours à l'intérieur de l'ensemble (Quirk et Saposnik, 1968, p.29). La *convexité* est un concept algébrique. De nombreux concepts topologiques, tels que la *fermeture*, la *borne* et la *compacité* sont utilisés dans les modèles d'équilibre général. Dans un espace euclidien, un ensemble est *fermé* s'il contient sa propre frontière. Un ensemble est *borné* si la distance de deux points quelconques de l'ensemble est toujours finie. Un ensemble *fermé* et *borné* est dit *compact* (p.47-50).

des paniers dont la quantité de marchandises est suffisante pour assurer sa survie. Cette seconde interprétation est à la source d'un des problèmes majeurs du modèle Arrow-Debreu : qu'advient-il d'un individu qui ne peut consommer aucun panier appartenant à son ensemble de consommation ? De manière moins formelle, cela signifie que cet individu n'est pas en mesure d'acquiescer un panier de marchandises dont la quantité est suffisante pour assurer sa survie. Cette unité de consommation est sans aucun doute condamnée à disparaître. Cependant, d'un point de vue normatif, il est gênant de penser que l'équilibre général puisse être le résultat d'un ajustement démographique, condamnant certaines unités de consommation à la disparition. L'hypothèse IV.a que nous présenterons un peu plus loin servira à pallier cette difficulté. Après cette présentation du secteur de la consommation, Arrow et Debreu posent leur unique hypothèse sur les ensembles de consommation possible : X_i est un sous-ensemble fermé convexe de R^l , borné par en bas (II)⁸⁰.

Les deux auteurs s'attaquent ensuite aux préférences des unités de consommation. Les individus étant capables de classer l'ensemble des paniers de consommation de X_i , il est possible de représenter ce classement à l'aide d'une fonction d'indicateur d'utilité, $u_i(x_i)$ ⁸¹. Trois hypothèses sont énoncées, concernant ces préférences. La fonction $u_i(x_i)$ est une fonction continue sur X_i (III.a). Il y a toujours un panier x'_i appartenant à X_i , préféré à x_i pour tout x_i appartenant à X_i (III.b). Enfin, les surfaces de préférences sont convexes (III.c). La première hypothèse et la troisième ne sont pas interprétées par Arrow et Debreu. Elles constituent les hypothèses standards de la théorie de la demande et ne sont pas à ce titre questionnées au sein de l'article. La seconde hypothèse s'interprète comme une hypothèse de non-saturation : l'individu est parfaitement insatiable et, sans contrainte budgétaire, il cherche toujours à obtenir un panier de biens supérieur⁸².

Enfin, Arrow et Debreu introduisent deux éléments supplémentaires. Tout d'abord, un vecteur ζ_i de R^l , représentant les dotations initiales de l'unité de consommation i . Deuxièmement, un coefficient α_{ij} représentant la part du profit de l'unité de production j , que possède l'unité de consommation i . S'ensuivent deux hypothèses sur chacun de ces deux nouveaux éléments. Il est postulé d'abord que quelques x_i sont strictement inférieurs à ζ_i (IV.a). Cette hypothèse signifie que chaque individu possède suffisamment de dotations initiales pour assurer sa survie, puisque les dotations initiales sont supérieures aux paniers

⁸⁰ C'est-à-dire qu'il existe un vecteur inférieur ou égal à x_i pour tout x_i appartenant à X_i . L'existence de cette borne inférieure provient de l'interprétation selon laquelle un individu ne peut pas consommer un panier qui ne lui permet pas de survivre. Mais elle est aussi un réquisit important pour la démonstration de l'existence d'un équilibre concurrentiel.

⁸¹ Il s'agit bien entendu d'un classement ordinal des paniers de marchandises. L'utilisation d'un indicateur d'utilité suppose que les préférences sont *réflexives*, *transitives* et *complètes*.

⁸² Arrow et Debreu évoquent la possibilité d'« affaiblir » cette hypothèse, par l'introduction de l'ensemble \tilde{X} (l'ensemble de consommation possible dans l'état actuel de la technologie) qui permet de reformuler cette non-saturation : l'unité de consommation est insatiable dans l'état actuel de la technologie. Les changements mathématiques apportés sont mineurs. L'affaiblissement concerne ici la *contrainte interprétative* qui pèse sur le modèle : l'individu n'est plus insatiable en général, il n'est insatiable que dans l'état du monde actuel, ce qui laisse penser à la possibilité d'une satiété à terme. On retrouve donc l'ambivalence de la notion d'« affaiblissement ».

minimums permettant la survie de l'unité de consommation. Autrement dit, l'unité de consommation n'a pas besoin d'échanger pour vivre. L'hypothèse IV.a constitue le véritable pivot de l'article de 1954 : « Cette hypothèse est clairement irréaliste. Cependant, la nécessité de cette hypothèse, ou d'une hypothèse semblable, pour la validité du théorème d'existence souligne un principe important ; pour avoir un équilibre, il est nécessaire que chaque individu possède quelques actifs ou soit capable de proposer quelques services en travail qui aient un prix positif à l'équilibre » (p.270). L'irréalisme de cette hypothèse conduit les deux auteurs à lui substituer un ensemble d'hypothèses, qui conduit à la démonstration (plus complexe) d'un second théorème.

La seconde hypothèse pose *a priori* beaucoup moins de problèmes : il est supposé que α_{ij} est supérieur ou égal à 0 et que sa somme sur i est égale à 1, pour tout j (ce qui signifie tout simplement que l'ensemble du profit de l'entreprise j est distribué). Cette hypothèse est une manière simple d'assurer l'égalité de l'offre et de la demande (il n'est pas question d'investissement du profit, par l'unité de production elle-même). Mais même si elle n'est pas discutée par Arrow et Debreu, elle suggère des interprétations institutionnelles : l'économie concurrentielle ainsi décrite est alors une économie de petits propriétaires d'actions, ce qui n'est pas une évidence première, quand on cherche à décrire une économie concurrentielle. Mais cette hypothèse pose alors également la question du processus de décision au sein de l'unité de production, puisque l'idée de propriété par action conduit à penser que ces propriétaires peuvent être impliqués dans les processus de décision au sein de l'unité de production qu'ils possèdent en partie. Tout un ensemble de questions institutionnelles se pose alors, sans qu'Arrow et Debreu ne proposent une quelconque esquisse de réponses⁸³.

Le modèle d'Arrow-Debreu présente donc neuf hypothèses explicites et numérotées. Mais les deux auteurs dégagent également quatre conditions que doit remplir un équilibre concurrentiel, ce qui permet de donner une définition implicite de celui-ci⁸⁴. Premièrement y^*_j maximise $p^*.y_j$ (c'est-à-dire le profit de la firme j pour une production y_j et pour un vecteur de prix p^*) sur l'ensemble Y_j , pour tout j (1.)⁸⁵. La deuxième condition repose sur le comportement des agents : « La motivation économique basique dans le choix d'un vecteur de consommation est de maximiser l'utilité parmi tous les vecteurs de consommation qui satisfont la contrainte de budget, c'est-à-dire dont le coût aux prix du marché n'excède pas le revenu de l'individu » (p.270). Ce revenu est composé de la valeur des dotations initiales et de la valeur des profits reçus par l'unité de consommation. Autrement dit, l'unité de consommation choisit le panier de marchandises qu'elle préfère (c'est-à-dire celui ou ceux qui maximise $u_i(x_i)$) tout en respectant la contrainte de revenu qui impose que la valeur au prix du marché de ce panier soit inférieure à celle de son revenu (2.). La troisième condition porte sur le vecteur de prix. P est l'ensemble des vecteurs de prix normalisés dont les composantes sont

⁸³ Nous reviendrons sur cette absence d'interprétation institutionnelle dans la section suivante.

⁸⁴ Implicite car l'équilibre concurrentiel est défini par un ensemble d'axiomes à respecter. Il n'est pas défini directement.

⁸⁵ * sert à représenter les valeurs d'équilibre.

supérieures ou égales à 0 et dont une composante au moins est strictement supérieure à 0. Le vecteur d'équilibre p^* appartient à P et la somme des prix de chaque marchandise est égale à 1 (3.). Cette dernière caractéristique est la conséquence de la normalisation des prix. Cette normalisation ne conduit, selon Arrow et Debreu, à « aucune perte de généralité » (p.271). Cette fois-ci il est question de généralité mathématique. La normalisation des prix ne pose aucune véritable contrainte technique supplémentaire et elle permet la démonstration de l'existence d'un équilibre concurrentiel. Cela suppose simplement une hypothèse sous-jacente d'homogénéité de degré 0 des fonctions des prix⁸⁶ : si on multiplie tous les prix par un coefficient k , cela ne modifie en aucun cas les valeurs prises par les fonctions d'offre et de consommation. Du point de vue interprétatif, cela signifie que les agents ne sont pas victimes d'« illusion monétaire » (Guerrien et Pignol, 2000, p.394). Ils sont capables d'apprécier exactement l'inflation, de voir qu'elle concerne toutes les marchandises de manière équivalente. Ils ne modifient donc pas leur comportement. Même si l'on pense que l'absence d'« illusion monétaire » est une manière adéquate de décrire la réalité économique, il n'en demeure pas moins que la normalisation des prix introduit une contrainte interprétative supplémentaire.

Un autre problème interprétatif, plus important, provient de la définition du prix. Ou plus exactement de l'absence de définition de celui-ci. On suppose qu'à chaque marchandise est associé une valeur réelle correspondant à son prix. Mais que représente cette valeur réelle ? On peut penser que, partant de l'idée que tout bien peut jouer le rôle de numéraire, Arrow et Debreu considèrent qu'il revient au même de considérer simplement le prix comme une valeur réelle, sans que cette valeur réelle ne fasse référence à aucun objet économique concret. La monnaie est donc absente du modèle Arrow-Debreu. On distingue généralement trois fonctions à la monnaie : unité de compte, moyen d'échange et réserve de valeur). En ce qui concerne l'unité de compte, tout bien semble pouvoir faire office de numéraire. Arrow et Debreu ne s'intéressant pas aux « modalités des transactions entre les agents » (Guerrien et Pignol, 2000, p.392), comme nous allons le voir dans la section suivante, la fonction de moyen d'échange est laissée de côté. Enfin, la fonction de réserve de valeur est rendu inutile par le fait que l'article de 1954 propose un modèle de système complet de marchés, ce qui « rend la monnaie inutile comme moyen d'affectation intertemporelle des ressources (...) puisque les agents achètent et vendent à « l'instant initial » des biens futurs » (p.393). L'absence de monnaie porte ainsi profondément atteinte aux revendications descriptives du modèle⁸⁷.

La quatrième condition correspond à ce que l'on appelle généralement la loi de Walras. Soit $z = x - y - \zeta$ (où x est le vecteur de demande global, y le vecteur de la production totale et ζ le vecteur de l'ensemble des dotations initiales). A l'équilibre, il faut que toutes les

⁸⁶ Le choix de panier des unités de consommation est fonction des prix, tout comme le choix des plans de production par les unités de production.

⁸⁷ Don Patinkin (1956) tentera d'y remédier en tentant d'intégrer la monnaie dans le modèle Arrow-Debreu. Mais Frank Hahn (1965) soulèvera les nombreuses incohérences de sa tentative.

composantes de z^* soit inférieures ou égales à 0 et que $p^* \cdot z^* = 0$ (4.). Ce qui signifie que si $z_h^* < 0$, alors $p_h^* = 0$. Si à l'équilibre, l'offre du bien h demeure supérieure à la demande, c'est que ce bien est disponible en très grande quantité et que les agents n'ont pas besoin d'en consommer toute la quantité existante. On dit alors que le bien h est un bien libre.

Une fois ces quatre conditions posées, Arrow et Debreu peuvent définir l'équilibre concurrentiel comme suit : « Un ensemble de vecteurs $(x_1^*, \dots, x_m^*, y_1^*, \dots, y_n^*, p^*)$ est dit être un équilibre concurrentiel s'il satisfait les conditions 1-4 » (p.272). Les deux auteurs énoncent dans la foulée leur théorème : « Il existe un équilibre concurrentiel pour tout système économique satisfaisant les hypothèses I-IV » (p.272).

Dans la quatrième section, Arrow et Debreu proposent un modèle alternatif d'économie concurrentielle, fondé sur le remplacement de l'hypothèse IV.a. Plutôt que d'affirmer que les agents possèdent initialement un panier de marchandises supérieur au(x) panier(s) permettant d'assurer leur survie, il est supposé que les agents possèdent des dotations initiales supérieures ou égales à ce panier et que pour au moins un bien h (appartenant à l'ensemble des biens qui sont des services productifs en travail⁸⁸), $x_{hi} < \zeta_{hi}$ (IV'.a). Du point de vue interprétatif, cela signifie que toute unité de consommation est toujours capable de fournir au moins un type de travail productif. Si l'individu ne dispose pas de suffisamment de marchandises pour survivre, il est toujours capable de fournir un travail désiré par les unités de production. La conséquence de cette hypothèse est, qu'en fonction des dotations initiales, une unité de consommation peut être obligée à travailler pour survivre (alors même que d'autres unités de consommation ont suffisamment de ressources pour survivre sans cela)⁸⁹.

Cette hypothèse est un affaiblissement de l'hypothèse IV.a. Mais là encore, il faut entendre affaiblissement au sens d'affaiblissement de la *contrainte interprétative*, plutôt que d'affaiblissement de la *contrainte mathématique* qui pèse sur le modèle. En effet, le remplacement de l'hypothèse IV.a doit permettre d'accroître l'aspect réaliste du modèle. Mais le remplacement de l'hypothèse IV.a par l'hypothèse IV'.a implique d'ajouter à cette dernière trois nouvelles hypothèses (V, VI, VII)⁹⁰. Un plus grand réalisme est acquis au détriment de l'économie d'axiomes et de la simplicité de la preuve. L'article de 1954, avec ces deux théorèmes, constitue un cas exemplaire de *querelle de priorité* au sein de l'économie mathématique. Il est question d'un arbitrage permanent entre la recherche de la plus grande généralité mathématique possible et d'une certaine pertinence empirique. Cet arbitrage entre deux priorités nous semble caractéristique du *style de pensée axiomatique*. D'un côté, on a un

⁸⁸ Productifs car toujours désirés par les unités de production.

⁸⁹ On voit bien que cette hypothèse (plus réaliste que celle d'une dotation initiale assurant la survie sans échanges) pose problème dans l'optique d'une défense de la liberté et de l'autonomie de l'individu. Ce dernier peut se trouver contraint à travailler. Une porte est alors laissée ouverte pour introduire une théorie de l'exploitation, à la façon de Marx.

⁹⁰ Afin de ne pas surcharger l'analyse, nous ne proposons pas de présentation précise des hypothèses nécessaires au second théorème (ces hypothèses sont toutefois présentées en annexe), de même que nous ne nous attaquerons pas à la seconde preuve d'existence.

objectif propre aux mathématiques pures : affaiblir les hypothèses, les réduire au minimum, afin de diminuer les contraintes techniques qui pèsent sur le système axiomatique et de rendre les théorèmes les plus généraux possibles. De l'autre, un objectif propre à une science économique : faire en sorte que les modèles construits et pensés à l'aide d'outils mathématiques soient les plus à même de décrire la (ou une) réalité économique⁹¹.

2) Quelle preuve pour l'existence ?

Le résultat d'existence de l'article de 1954 repose sur la preuve mathématique qui en est donnée. Comme nous l'avons déjà dit plus haut, cette preuve se fonde en grande partie sur une analyse en termes de théorie des jeux. Tout l'objet de la section 2 de l'article est d'effectuer ce rapprochement entre le modèle d'équilibre général et un modèle standard de jeu à n-joueurs : « Dans cette section, le concept d'*économie abstraite*, une généralisation de celui de *jeu*, sera introduit, et une définition de l'équilibre sera donnée. Un lemme donnant les conditions pour l'existence d'un équilibre pour une économie abstraite sera énoncé. Le lemme est central dans les preuves des théorèmes exposés dans ce papier » (p.273).

La principale justification de ce rapprochement provient du comportement du consommateur, qui peut être décrit d'une manière similaire dans un modèle d'équilibre général et dans un jeu : « Ses « actions » peuvent être vues comme des vecteurs alternatifs de consommations ; mais elles sont contraintes par la restriction budgétaire qui veut que la valeur des biens choisis aux prix courants n'excède pas la valeur de son revenu. Mais les prix et quelques composantes de son revenu, voire toutes, sont déterminés par les choix effectués par les autres agents » (p.273). Arrow et Debreu introduisent alors le concept d'équilibre de Nash : « un point d'équilibre est caractérisé par le fait que chaque individu maximise son propre paiement, les actions des autres agents étant fixées, sur l'ensemble des actions qui lui sont permises, par rapport aux actions des autres agents » (p.273).

On constate bien l'isomorphisme structurel entre les concepts de jeu et d'économie abstraite. Le lemme peut alors être introduit, affirmant l'existence d'un point d'équilibre pour une économie abstraite, sous certaines conditions. Tout d'abord, l'ensemble des actions possibles pour chaque agent doit être compact (1) et convexe (2)⁹². La fonction de paiement doit être continue (3) et quasi-concave (4). L'application qui, pour un ensemble d'actions fixé des n-1 agents, associe une ou plusieurs actions du n^e agent (qui choisit donc sous contraintes) est continue (5) et son graphe est fermé (6). La valeur que cette application prend doit être un

⁹¹ C'est à travers le prisme de cette *querelle de priorité* que l'étude des *images du savoir* des économistes, plus particulièrement ici d'Arrow et Debreu, prend tout son sens : l'arbitrage entre ces priorités est le fruit d'engagements épistémiques propres à chacun. Engagements qui se retrouvent dans l'usage de la méthode axiomatique et dans la construction des modèles d'existence d'un équilibre général.

⁹² C'est nous qui numérotions, pour la clarté de la description, les conditions nécessaires à la réalisation du lemme.

ensemble convexe (7) et non-vide (8). Si toutes ces conditions sont respectées, alors on aura un point d'équilibre⁹³.

La seconde étape de la preuve consiste alors à effectuer le rapprochement entre une économie abstraite et une économie de concurrence parfaite (telle qu'elle est présentée dans la première section) et de montrer que le point d'équilibre d'une économie abstraite est un équilibre concurrentiel. Le rapprochement entre économie abstraite et économie de concurrence parfaite se fait assez intuitivement : « on aura $m + n + 1$ participants, les m unités de consommations, les n unités de production et un participant fictif qui choisit les prix, et qui sera nommé le *participant de marché* [*market participant*] » (p.274) ; « chacun des m premiers participants, les unités de consommation, choisit un vecteur x_i dans X_i , soumis à la contrainte que $x_i \in A_i(\bar{x})$, et reçoit un paiement $u_i(x_i)$, le $j^{\text{ème}}$ des n participants suivants, les unités de production, choisit un vecteur y_j de Y_j (non restreint par les actions des autres participants), et reçoit un paiement $p \cdot y_j$; et le dernier agent, le participant de marché, choisit p dans P (là encore le choix n'est pas affecté par le choix des autres participants) et reçoit $p \cdot z$ » (p.274). Pour les besoins de la démonstration est introduit le concept de « participant de marché », qui est absent dans la présentation du modèle de la première section. Introduction qui donnera lieu à de nombreux débats et à de nombreuses interprétations sur la façon dont se font les échanges dans les modèles d'équilibre général. Il est vrai que ce participant ressemble fortement au commissaire-priseur de Walras.

Une fois démontré que l'équilibre d'une économie abstraite est également un équilibre concurrentiel, il s'agit de s'enquérir de la réalisation des conditions nécessaires à l'application du lemme. Sans chercher à rentrer dans les détails, nous allons montrer rapidement grâce à quelles hypothèses les huit conditions du lemme sont démontrées. Tout d'abord, il est nécessaire que les ensembles d'actions (l'ensemble de consommation possible et l'ensemble de production possible) soient compacts (1) (c'est-à-dire bornés et fermés). Leur fermeture est assurée par les hypothèses I.a et II. Arrow et Debreu supposent ensuite que l'ensemble de production possible n'est pas borné et montrent, grâce aux hypothèses I.a à II, que cela conduit à une contradiction. Grâce à une preuve par l'absurde, ils montrent donc que l'ensemble de production est borné. Les ensembles d'actions sont donc compacts (1) et convexes (2)⁹⁴. Les hypothèses III.a et III.c assurent la continuité et la quasi-concavité de la fonction $u_i(x_i)$. Les conditions (6), (7) et (8) ne posent pas de problème particulier. La condition (5) est démontrée grâce à l'hypothèse IV.a.

Toutes ces conditions ont été démontrées pour une économie abstraite \tilde{E} , légèrement différente de l'économie abstraite E , présentée au début de la preuve. Il a donc été prouvé que \tilde{E} a un équilibre. Il s'agit alors, dans une dernière étape, de montrer que le point d'équilibre de \tilde{E} est également un point d'équilibre pour E . Arrow et Debreu montrent que si ce point d'équilibre de \tilde{E} n'était pas un point d'équilibre de E , alors cela conduirait à violer les

⁹³ Pour rappel, John Nash démontre son résultat à l'aide d'un théorème du point fixe.

⁹⁴ Ils sont convexes par hypothèse.

conditions 1 et 2 de l'équilibre concurrentiel. Une nouvelle démonstration par l'absurde permet d'assurer l'existence d'un point d'équilibre pour l'économie abstraite E. Or, comme l'économie abstraite est équivalente à une économie de concurrence parfaite et comme le point d'équilibre de cette économie est également un équilibre concurrentiel, alors on peut affirmer que, sous les hypothèses I-IV, une économie concurrentielle possède un équilibre concurrentiel.

La description que nous avons donnée de l'article de 1954 permet de faire émerger un fil conducteur, celui de l'arbitrage entre la recherche de la *généralité mathématique* et la recherche d'interprétation réaliste. Cet arbitrage est en partie le résultat de l'application de la méthode axiomatique à une science empirique comme l'économie. L'article d'Arrow et Debreu soulève donc un ensemble de questions épistémologiques de premier ordre pour la discipline économique. La seconde section de ce chapitre sera consacrée à l'approfondissement de l'analyse de ces questions.

II – Les questions épistémologiques soulevées par l'axiomatisation

La question de l'interprétation est centrale dans la construction d'un modèle axiomatique. Que peut-on dire concrètement d'un résultat formel ? Plus précisément, concernant l'objet qui nous intéresse : quels énoncés économiques la preuve formelle de l'existence d'un équilibre concurrentiel nous permet-elle d'affirmer ? Il semblerait que ces énoncés soient assez peu nombreux : en effet l'article de 1954 supporte peu de débouchés au niveau interprétatif. Ce qui montre sans doute que l'attention d'Arrow et Debreu se portait principalement sur les questions de rigueur formelle et de généralité mathématique. Cependant cette *querelle de priorité* demeure néanmoins présente, comme nous aurons l'occasion de le constater en étudiant les échanges entre Arrow et Debreu, durant l'écriture de leur article, et le processus de publication de l'article dans la revue *Econometrica*.

A) Un modèle avec peu de débouchés interprétatifs

La pauvreté interprétative de l'article de 1954 peut s'expliquer, selon nous, par trois éléments. Tout d'abord par le type de preuve employé, c'est-à-dire des preuves non-constructives, afin de démontrer l'existence d'un équilibre général concurrentiel. Mais aussi par l'existence d'hypothèses laissées à l'état d'implicite (ou du moins affirmées mais laissées en retrait) et par la non spécification institutionnelle du modèle construit (en dehors du « participant de marché », rien ne nous est dit sur la façon dont se font les échanges).

1) Le poids des preuves non-constructives

Comme nous l'avons vu, la preuve d'existence d'Arrow et Debreu repose sur le rapprochement avec la théorie des jeux et sur l'utilisation du concept d'équilibre de Nash. Or, comme le note Giocoli (2003), « comparée aux efforts de von Neumann et Morgenstern pour fournir une justification positive au comportement rationnel, la contribution de Nash peut légitimement être considérée comme le triomphe de la logique non-constructive du point fixe. Comme on le sait, en fait, la « justification » standard de l'équilibre de Nash est purement une justification négative : rien d'autre qu'un équilibre de Nash ne peut être une solution à un jeu, ou, comme il est dit parfois, un livre de théorie des jeux faisant autorité ne peut recommander de profil de stratégie comme solution d'un jeu à moins qu'il s'agisse d'un équilibre de Nash. Alors, si un jeu non coopératif a une solution, cette solution doit faire partie des équilibres de Nash du jeu. Cependant, quand on pense à la manière de « justifier » le choix d'une stratégie plutôt qu'une autre, il est naturel qu'un joueur cherche une justification positive » (p.24). Autrement dit, pour reprendre les termes de Giocoli lui-même, rien n'explique « le comment et le pourquoi » des choix du joueur. La seule justification existante est négative.

Dès lors, il est difficile de trouver des interprétations à un tel résultat. Nash tenta de donner deux types d'interprétations dans sa thèse. Mais ces passages furent supprimés de la publication définitive, cela étant d'un intérêt moindre pour une thèse de mathématiques (Giocoli, 2003, p.24-25). Même si Arrow et Debreu ne s'intéressent pas au même phénomène économique, leur utilisation du résultat de Nash les inscrit dans la « logique non-constructive du point fixe ». A l'aide de plusieurs démonstrations par l'absurde, les deux auteurs démontrent la présence de toutes les conditions nécessaires à l'utilisation de leur lemme prouvant l'existence d'un point d'équilibre pour une économie abstraite. Grâce aux hypothèses posées et aux conditions que doit remplir un équilibre concurrentiel, on montre que si un équilibre existe pour une économie abstraite, il s'agit nécessairement d'un équilibre respectant les quatre conditions fixées, car sinon cela conduirait à une contradiction.

Ainsi, à aucun moment Arrow et Debreu n'expliquent la manière d'atteindre un tel équilibre. Il n'est pas question d'algorithme permettant de calculer l'équilibre concurrentiel d'une économie. Il nous est juste dit que sous un ensemble de conditions formelles, un équilibre concurrentiel ne peut pas ne pas exister formellement. L'utilisation de preuve non-constructive qui ne permet pas de savoir comment et pourquoi on obtient un équilibre est caractéristique du *style de pensée axiomatique* de l'époque⁹⁵.

Mais plus généralement, c'est le modèle d'Arrow-Debreu dans son ensemble qui ne nous explique aucunement comment se déroule l'échange sur les marchés. De plus, le peu qui nous

⁹⁵ L'analyse de l'opposition entre preuve constructive et preuve non-constructive mériterait d'être approfondie. Approfondissement que nous n'avons pu réaliser faute de temps. Il serait par exemple intéressant de s'interroger sur le lien entre les travaux sur l'existence (fondés sur des preuves non-constructives) et les travaux de Scarf (1973), qui tente de développer des algorithmes pour calculer des équilibres.

est dit repose sur une pertinence empirique douteuse, ou du moins sur de trop grandes simplifications.

2) Contraintes implicites et non-spécification institutionnelle

Donald Walker parle de modèle fonctionnel pour définir les modèles dont les caractéristiques nous permettent de comprendre comment le modèle fonctionne concrètement : « Pour qu'un modèle soit un système fonctionnel, il doit être doté explicitement des caractéristiques structurelles et comportementales qui sont nécessaires pour engendrer un comportement économique. Si le modèle est un système fonctionnel, son fonctionnement peut être examiné et les conséquences des différentes variations des paramètres peuvent être comparées. On peut le convertir en un modèle empirique et l'éprouver, précisément pour découvrir s'il a identifié les aspects importants et les interrelations de l'économie et comment leur influence s'exerce sur la détermination des grandeurs économiques ; et dans ce cas, on peut l'utiliser pour prévoir les conséquences des changements des conditions » (Walker, 1999, p.10-11). Cette définition nous permet de faire la distinction entre trois niveaux distincts. L'économiste, en cherchant à décrire un phénomène économique, construit un modèle représentant ce phénomène. Il construit ensuite un système d'équations censé décrire ce modèle. Un modèle est dit fonctionnel si ses caractéristiques sont suffisamment étoffées pour permettre une description précise de son fonctionnement (la manière dont se comportent les agents, dont évoluent les paramètres, etc...). A partir de ce moment-là, il est possible de comparer les énoncés produits par le modèle avec les phénomènes économiques constatés.

Ainsi Kenneth Arrow et Gérard Debreu construisent un modèle d'économie parfaitement concurrentielle, qu'ils représentent par des objets mathématiques. Ils appliquent ensuite des techniques mathématiques à cette représentation, pour en déduire des résultats. Cependant, leur modèle n'est pas un modèle fonctionnel. Il existe de nombreuses questions auxquelles ils ne répondent pas, principalement concernant les institutions assurant le fonctionnement du marché : « Quels mécanismes font que les participants à l'échange font connaître leurs offres ? Comment est-il possible que le prix varie comme décrit par le théoricien ? Qui change le prix ? Quelles sont les structures et procédures utilisées pour effectuer les changements ? Si les demandes et offres sont additionnées respectivement, qui est responsable de cette opération ? Que fait-on de cette information ? Si elle est transmise aux participants, quand le fait-on par rapport à la cotation en cours, et comment ? » (Walker, 1999, p.12) ; « Comment les agents peuvent-ils savoir avec qui échanger pour réaliser les échanges ? » (p.29) ; « A un prix auquel l'échange est permis, équilibre ou non, comment les travailleurs peuvent-ils savoir qui sont les employeurs ? » (p.31)⁹⁶. Laisant toutes ces questions sans réponse, il est dès lors

⁹⁶ « Dans l'économie réelle, ils le savent parce que le marché où ils sont embauchés est l'endroit où ils travaillent, mais dans les modèles, ils ne connaissent pas l'endroit de l'emploi parce qu'ils ne sont pas en contact

difficile d'analyser la portée concrète du résultat d'existence d'un équilibre. En effet, l'attention d'Arrow et Debreu n'est portée que sur le système d'équations qu'ils ont construit et sur les solutions mathématiques de ce système. C'est ce qui conduit Walker à déclarer que « leur preuve de l'existence d'un ensemble de solutions pour leur système d'équations n'est donc pas la preuve que l'équilibre existe dans un modèle économique » (p.108), car les deux auteurs ne spécifient quasiment aucune « caractéristique structurelle et comportementale » à leur modèle. Les seules spécifications existantes dans leur modèle ne sont présentes qu'à l'état d'implicite (par exemple, le fait que l'information soit parfaite) ou du moins ne sont pas développées et discutées (par exemple, le fait que les agents soient preneurs de prix).

Une étude rapide du modèle Arrow-Debreu conduit à penser que les neuf hypothèses qu'ils posent dans la première section (elles sont au nombre de douze, pour le second théorème) constituent les neuf axiomes de la structure axiomatique soutenant la preuve d'existence. Mais en fait, il est possible de distinguer trois types d'axiomes au sein du modèle Arrow-Debreu. Les axiomes nommés « hypothèses », au nombre de neuf ; les quatre axiomes nommés « conditions » qui permettent de définir l'équilibre concurrentiel ; un troisième type d'axiomes au statut un peu particulier, regroupant des hypothèses présentées dans le corps du texte mais non mises en avant, qui génèrent cependant des *contraintes interprétatives*⁹⁷. En ce qui concerne les hypothèses présentées dans le corps du texte, on peut citer le nombre fini de marchandises (qui implique que toutes les marchandises, même celles qui ne sont pas encore produites, soient connues d'avance) ou dans le même ordre d'idée, le nombre fini d'unité de production qui implique qu'il n'y ait pas de libre entrée sur le marché dans le secteur de la production⁹⁸. La définition de la concurrence parfaite conduit également les agents à se comporter en preneur de prix. A chaque fois qu'un prix est « annoncé », ils font comme si ce prix était un prix d'équilibre. Les hypothèses sur le comportement des agents conduisent à des *contraintes interprétatives* qui ne sont pas évoquées par les deux auteurs. Par exemple, les unités de consommations sont « égoïstes » (Quirk et Saposnik, 1968, p.17-18) : dans leur choix de paniers de marchandises, elles prennent uniquement en compte leur propre satisfaction et ne se soucient pas du comportement des autres unités de consommation (ce qui exclue par exemple les phénomènes de consommation ostentatoire à la Veblen). On parle d'« indépendance » pour l'hypothèse parallèle, concernant les unités de production : seules les contraintes techniques et la maximisation du profit déterminent le plan de production choisi par l'unité de production. Ces dernières ne se préoccupent pas des plans de production des autres unités. Le modèle Arrow-Debreu postule donc une véritable « séparation marchande »

avec les employeurs durant le processus de calcul de la demande excédentaire du marché ; ils sont en communication uniquement avec le fixateur de prix central » (p.31).

⁹⁷ Il existe donc un certain flou autour de l'organisation axiomatique de l'article d'Arrow et Debreu. Contrairement à la définition idéale que donne Blanché (voir plus haut, p.24), les propositions premières ne semblent pas toutes clairement énoncées. Seules certaines sont mises en avant et numérotées. Les axiomes et leurs interprétations sont entremêlés ce qui rend plus difficile de discerner structure logique et signification économique.

⁹⁸ On tentera d'ailleurs par la suite d'affaiblir ces « hypothèses de finitude » (McKenzie, 1981, p.820).

entre les agents (Orléan, 2011). Ils sont parfaitement autonomes et n'agissent qu'au regard de leurs propres contraintes, sans s'inquiéter de ce que font les autres agents autour d'eux. On retrouve ces deux hypothèses dans l'idée d'absence d'externalités : l'action d'un agent n'a pas d'impact sur l'action des autres agents. Le modèle Arrow-Debreu est profondément un modèle sans externalités. Il n'est pas toujours simple de savoir si ces caractéristiques du modèle sont des spécifications désirées ou si elles résultent des objets mathématiques utilisés. L'égoïsme des unités de consommation provient de l'utilisation d'une fonction d'indicateur d'utilité qui ne prend en compte que les préférences de l'unité de consommation en question et du fait que les choix de vecteurs dans l'ensemble de consommation possible ne dépendent que du prix. Mais s'agit-il d'une *contrainte mathématique*, générant une *contrainte interprétative*, dont on voudrait se passer, ou bien s'agit-t-il d'une *contrainte interprétative* que l'on revendique⁹⁹.

Cette idée que des *contraintes mathématiques* génèrent des *contraintes interprétatives* se retrouve dans l'affirmation du début de la première section, selon laquelle il existe *l* marchandises, ce qui implique dans l'interprétation économique, une hypothèse implicite de nomenclature des biens, reposant sur l'idée de *common knowledge*. En effet, chaque agent connaît l'ensemble des biens et les qualités qui leurs sont associées et chaque agent sait que tous les agents savent. Les asymétries d'information sont donc exclues¹⁰⁰.

L'énoncé selon lequel « tout système économique satisfaisant les hypothèses I-IV a un équilibre concurrentiel » est peu satisfaisant car il conduit à penser que le système économique en question n'est défini que par ces seules hypothèses, alors même que d'autres axiomes sont en jeu. Insatisfaction d'autant plus légitime que l'interprétation de ces axiomes supplémentaires n'est pas discutée, alors même qu'ils produisent des *contraintes interprétatives* supplémentaires. Contraintes dont la pertinence empirique peut d'ailleurs être discutée dans un second temps. Ainsi, l'absence de comportement stratégique des unités de production, l'absence d'externalités, l'absence d'asymétrie d'information, mais plus encore l'absence de monnaie et de temporalité (du fait que l'on est dans un système complet de marché) semblent porter préjudice aux prétentions réalistes du modèle.

Quant à certaines interprétations, elles sont tout bonnement absentes du fait du manque de spécification du modèle : on ne sait pas, par exemple, comment se fait l'échange, qui propose le prix ou comment circule l'information. Les seuls éléments de réponses qui émergent d'ailleurs sur ces questions sont également peu satisfaisants du point de vue du réalisme. L'idée d'un participant de marché fixant les prix semble absurde dans une économie de marché qui se veut décentralisée. D'autant plus qu'il devrait être capable de prendre en

⁹⁹ En ce qui concerne Arrow, les propos qu'il tient à ce sujet laissent penser que c'est la première réponse qui prévaut dans son cas, car la question de la consommation ostentatoire (qui signifie que l'individu prend en considération les préférences des autres individus, dans ses choix de consommation), développée par Veblen, lui semble revêtir un certain intérêt (Arrow, 1951, p.528).

¹⁰⁰ On peut imaginer, par exemple, des asymétries d'information sur la qualité d'un bien, entre le vendeur et l'acheteur, comme le suggère le modèle du marché de voiture d'occasion, développé par Akerlof (1970).

compte une quantité d'informations considérables, afin d'ajuster les prix, comme l'ont montré Saari et Simon (1978).

Ces carences interprétatives sont le symptôme du *style de pensée axiomatique* dans lequel s'inscrivaient à l'époque Arrow et Debreu. La *querelle de priorité* semblait pencher en faveur de la rigueur formelle et de la généralité mathématique, au détriment des qualités interprétatives et descriptives du modèle¹⁰¹. Selon Walker, cette relégation au second plan du contenu interprétatif du modèle provenait d'un objectif épistémologique bien précis des théoriciens de l'époque : « le manque de détails de ses textes donnait l'impression d'atteindre la généralité tant recherchée. Le manque de contenu économique de ses textes mettait en valeur le fait qu'il s'agissait d'une structure logique qui pouvait être adoptée et élaborée sans avoir besoin de faire référence aux caractéristiques des marchés réels » (Walker, 1999, p.105).

Nous y reviendrons plus en détail un peu plus loin, mais dans la suite de leur carrière respective, c'est Arrow qui a semblé porter le plus d'attention sur l'aspect interprétatif des questions d'existence. Quant à Gérard Debreu, il représentera l'un des pôles extrêmes de ce *style de pensée*. Mais cette opposition dans les engagements épistémiques de chacun est déjà bien présente à l'époque. L'analyse de la correspondance entre les deux auteurs au sujet de l'écriture de leur article est révélatrice de ces différences dans leur *image du savoir* respective. C'est à cette analyse que nous allons nous atteler dès à présent.

B) L'article de 1954 : l'expression de premières divergences entre les deux auteurs

Durant toute l'année 1952, Kenneth Arrow voyageait à travers l'Europe. Pour cette raison, sa collaboration avec Debreu s'effectua principalement par correspondance. C'est l'analyse de cette correspondance qui permet à Till Düppe (2012) d'étudier les négociations entre Arrow et Debreu sur les choix à effectuer sur la forme et le contenu de leur article¹⁰². Düppe tente de montrer « qu'ils ne partagent pas le même intérêt dans le fait de prouver l'existence d'un équilibre général, qu'ils jouent un rôle différent durant la production de leur travail, et en tirent différentes leçons » (p.492).

¹⁰¹ Ce qui ne veut pas dire qu'il s'agit là d'une fatalité. Certaines des caractéristiques que nous avons déclarées irréalistes ont été modifiées par la suite, ou du moins des tentatives dans ce sens ont été entreprises (voir McKenzie [1981], Arrow et Hahn [1971]). Ce qui montre une fois de plus l'existence d'un arbitrage entre les deux.

¹⁰² Düppe a eu accès à cette correspondance grâce au fait que Debreu avait méticuleusement gardé une copie de tous ses échanges avec Arrow. Ces échanges sont désormais conservés au sein des *Debreu Papers* à la bibliothèque Bancroft (Université de Berkeley), au sein du Carton 10, classeur « Existence of an Equilibrium in a Competitive Economy » et classeur « Competitive Equilibrium ». Faute de temps, nous n'avons malheureusement pu y avoir accès directement.

Comme expliqué plus haut, Debreu contacte Arrow au début du mois de février 1952, après que Koopmans lui ait transmis un rapport écrit par l'américain sur la question de l'existence d'un équilibre général. Dans la note qu'il envoie à Arrow, Debreu propose des modifications précises afin de simplifier la preuve d'existence, « par exemple, en décrivant les possibilités technologiques non par des ensembles convexes, mais par des cônes convexes », ou bien de renoncer à des hypothèses, par exemple en remplaçant la convexité par la contractilité (Düppe, 2012, p.498).

Dans le même temps, il commence à écrire un papier sur le théorème d'existence (dont l'aboutissement sera son article de 1952) en s'inspirant de l'utilisation que fait Begle du théorème du point fixe de Eilenberg et Montgomery. Il en envoie un brouillon à Arrow, tout en lui expliquant que « la théorie économique ne peut plus accepter le raisonnement standard selon lequel si l'équilibre d'un système économique peut être décrit par un ensemble d'équations dont le nombre égalise le nombre d'inconnues, un point d'équilibre existe alors. Une preuve avec une exacte rigueur est désormais nécessaire » (p.499). Son théorème est un exemple de cette « exacte rigueur » englobant ceux de Nash, Kakutani, von Neumann et Arrow lui-même. Comme le note Düppe, la lecture du brouillon de Debreu par Arrow n'a pas dû être de tout repos, l'américain n'étant pas « entraîné aux mathématiques des points fixes après Kakutani » et n'ayant pas eu « le privilège de recevoir des leçons particulières d'André Weil et Saunders Mac Lane » (p.499).

Au sujet du rapport écrit par Arrow, Debreu lui fit remarquer qu'il y avait un problème concernant les dotations factorielles : pour que le théorème fonctionne, il fallait que les dotations initiales soient positives. Arrow reconnaît son erreur mais démontre à Debreu qu'il l'a commise également. Il ajoute que « l'erreur est vraiment triviale d'un point de vue économique, puisque supposer l'existence de variables de travail revient seulement à dire qu'un individu travaillera s'il n'a pas d'autres sources de revenu »¹⁰³ (p.499). Autrement dit, les dotations initiales ne peuvent pas être nulles, car si l'individu ne possède initialement aucune marchandise, il sera disposé à proposer une quantité positive de travail. On sent bien, dès lors, que le *point de vue* adopté par Arrow ne sera pas le même que celui choisit par Debreu.

Arrow propose à Debreu un nouveau théorème (légèrement modifié par rapport à son premier rapport). Il reconnaît que ce théorème n'est qu'un cas particulier de celui de Debreu, mais selon lui, il permet d'éviter une hypothèse de continuité sur la fonction de choix des actions des agents, continuité qui « peut être difficile à vérifier dans des situations données »¹⁰⁴. La démarche d'Arrow dans le choix des hypothèses et de la preuve est particulière et révèle des préoccupations empiriques : « il insista sur son lemme moins général par égard pour sa signification économique et même, à ce moment, pour sa meilleure vérifiabilité ! Il cherchait à faire « marcher » le modèle. Des hypothèses trop fortes

¹⁰³ Nous soulignons.

¹⁰⁴ Nous soulignons.

équivaleraient à un échec » (p.500). On se doute bien que la démarche de Debreu est loin d'être identique : pour ce dernier, le choix des hypothèses est déterminé par une nécessité mathématique. En anticipant sur ce qu'il fera et dira plus tardivement, on peut supposer que déjà à cette époque, Debreu privilégie le versant mathématique du modèle, considérant que le travail d'interprétation vient après la construction du système axiomatique. Construction qui repose sur une *logique de développement* mathématique. Ces deux points de vue antagoniques expliquent les divergences quant au type de preuve à employer : d'un côté un théorème très général, à la pointe de l'innovation mathématique, inspiré de Bègle, de l'autre un théorème plus « classique » inspiré principalement de Nash, tentant de garder contact avec sa signification économique.

Malgré ces divergences, Arrow n'hésite pas à proposer à Debreu une collaboration pour un article commun. Ce dernier accepte volontiers, tout en sachant très bien qu'Arrow ne voudra pas publier sa preuve. D'où l'idée de publier celle-ci à part, dans un journal mathématique : « Il semble y avoir un avantage définitif à exclure le contenu mathématique le plus lourd d'un article écrit pour des économistes dans une revue économique. Deuxièmement, Tucker nous a affirmé que le remplacement de la convexité par la contractilité dans ce type de question est une contribution aux mathématiques suffisamment importante pour faire l'objet d'une publication » (p.500).

L'idée d'une collaboration actée, il s'agit de poursuivre le travail. Dans une de ses lettres, Arrow semble s'inquiéter de l'hypothèse de non-saturation des agents. Du point de vue économique, il semble déraisonnable de penser que les individus ne peuvent être saturés pour aucun bien. C'est sans doute pour cela (mais nous ne pouvons en avoir la certitude) que l'article de 1954 proposera un affaiblissement de la contrainte interprétative pesant sur cette hypothèse, en proposant l'idée d'une non-saturation « dans l'état actuel de la technologie ».

Arrow propose également dans cette lettre de nouveaux arguments pour justifier l'utilisation d'une preuve moins générale : « du *point de vue mathématique*, bien sûr, il n'y a pas de raison de ne pas faire usage de votre théorème, mais pour celui de l'exposition et la séduction d'une audience qui sera des plus limitée, il peut y avoir un avantage à procéder différemment. Les ensembles convexes et le théorème de Kakutani commencent à être familier, et un papier comme le nôtre pourrait accélérer le processus, alors que l'appel à un autre théorème du point fixe, d'une plus grande généralité, pourrait ne pas servir utilement un objectif pédagogique. Nous devons, évidemment, faire référence à votre théorème plus général » (p.501)¹⁰⁵. En plus de faciliter l'interprétation, voire les prétentions empiriques à tester le modèle, la preuve que propose Arrow revêt selon lui de plus grandes qualités pédagogiques¹⁰⁶.

¹⁰⁵ Nous soulignons.

¹⁰⁶ Le processus de publication de l'article de la revue *Econometrica*, tel qu'il est étudié par Weintraub et Gayer (2001) et dont nous discuterons un peu plus loin, semble donner raison à Arrow. On pourrait se demander en effet comment se serait effectuée la réception du résultat de Arrow et Debreu, si la preuve de Debreu avait été

Après avoir présenté leur preuve devant la société d'économétrie en décembre 1952, les deux économistes s'attaquent à la rédaction de leur article. Formé aux mathématiques à la mode bourbakiste, Debreu préconise une séparation nette entre les mathématiques et l'économique : « Nous devrions faire un grand effort pour rendre claire la structure logique des théorèmes et pour distinguer précisément les *hypothèses* des *conditions*. Il est probablement impossible de réussir cela complètement sans une excessive pédanterie » (p.503). Cependant, même si les hypothèses et les conditions seront explicitement séparées et même si un effort sera fait pour détacher la structure logique, cette séparation n'était sans aucun doute pas aussi nette que l'aurait souhaitée Debreu, comme peut le laisser supposer la présentation pour laquelle il optera dans sa *Théorie de la valeur*.

Une séparation claire entre l'économique et les mathématiques doit permettre de distinguer la structure logique du modèle de ses possibles interprétations économiques. Debreu revendique cette séparation pour éviter que le contenu mathématique de l'article ne soit contaminé par les interprétations du modèle. D'autant plus si ces interprétations sont controversées. C'est pour cette raison, suite à la lecture de l'introduction et de la note historique rédigées par Arrow, qu'il lui propose de supprimer les références à Keynes introduites par ce dernier : « la principale raison est que (...) ces raisonnements n'ont pas le caractère certain et la finesse du reste du papier. De plus je pense que nous devrions éviter une controverse avec Wright sur Keynes et nous préserver des interprétations forcées des textes anciens » (p.503). Debreu suggère également d'éviter l'utilisation des termes de la théorie des jeux, afin de ne pas introduire des connotations qui conduiraient à des interprétations non désirées.

Dans sa réponse Arrow reconnaît qu'il a sans doute détaillé un peu trop les interprétations, même s'il pense que ces détails « sont utiles pour relier les idées abstraites aux matières premières de la réalité économique » (p.504). Il précise cependant qu'il a modifié la formulation des dividendes, d'une manière « qui ne complique pas la preuve et qui ajoute au réalisme », et qu'il a remplacé le terme « demande nette » par celui « d'excès de demande » qui semble mieux correspondre avec « l'interprétation de l'équilibre de marché en termes de loi de l'offre et de la demande ». Il continue également de s'inquiéter de l'hypothèse de dotations initiales positives qui ne le satisfait pas.

L'article est alors presque terminé. Quelques négociations s'opèrent encore sur l'introduction et les notes bibliographique. Debreu reproche à Arrow de développer longuement l'introduction, en faisant référence à l'aspect descriptif et normatif de l'article et en mettant en avant le lien avec l'économie du bien-être. Mais pour Arrow, ce passage est

employée, sachant que la grande majorité des économistes de l'époque n'avait déjà pas les compétences suffisantes pour comprendre l'article de 1954.

essentiel et il n'est pas question de le changer. Cependant Debreu réussira à faire supprimer les références à Lange et à Hotelling sur l'optimalité¹⁰⁷.

L'article de Düppe est donc riche en enseignement sur les négociations qui s'opèrent, préalablement à la publication de l'article de 1954. On voit bien comment émerge une distinction nette entre le *point de vue mathématique* et le *point de vue économique*, symbolisant parfaitement ce que nous avons appelé une *querelle de priorité*, propre au *style de pensée axiomatique*, dans l'économie mathématique naissante. Pour Arrow, la construction d'un modèle est le fruit d'une dialectique permanente entre ces deux points de vue. Pour Debreu, il y a d'abord un processus mathématique, cherchant à acquérir une rigueur, une généralité et une simplicité toujours plus grandes. Le point de vue économique arrive ensuite, au moment de l'interprétation *a posteriori*. Dans cette optique, il semblerait absurde pour Debreu de changer une hypothèse mathématique dans le but d'obtenir une meilleure interprétation économique, alors même que ce changement conduirait à une perte de généralité mathématique.

L'étude du processus de publication de l'article dans la revue *Econometrica* devrait permettre de retrouver les caractéristiques de ce *style de pensée axiomatique* et les questions que posent la séparation des mathématiques et de l'économique.

C) La publication de l'article dans la revue Econometrica

« Comment un travail en économie mathématique s'est converti en question économique ? Par quels processus un papier particulier, publié dans une revue lue à l'époque par très peu d'économistes, a été accepté comme ayant établi une vérité fondamentale sur les économies de marché ? » (Weintraub et Gayer, 2001, p.421). C'est à ces questions formulées en introduction que Weintraub et Gayer tentent de répondre dans leur article. Ils cherchent à étudier comment la preuve de 1954 légitime peu à peu l'existence d'un équilibre général concurrentiel. L'une des manières d'étudier cette légitimation est de s'intéresser au processus qui conduisit à la publication de l'article dans la revue *Econometrica*. C'est ce processus qui nous intéresse plus particulièrement¹⁰⁸.

La preuve ayant été présentée devant la société d'économétrie, il était logique qu'elle fasse l'objet d'une publication dans la revue *Econometrica*. Une fois l'article proposé à la revue, il est soumis à la critique de rapporteurs. Concernant l'article d'Arrow et Debreu, le

¹⁰⁷ Debreu lui suggère aussi de supprimer la référence à Eilenberg sur le point-fixe. Pour Düppe, il s'agit d'une stratégie de la part de Debreu : moins il y a de mathématiques dans l'article de 1954, plus Debreu pourra revendiquer pour lui-même un tel contenu mathématique.

¹⁰⁸ Ce processus est connu grâce à la correspondance de Nicholas Georgescu-Roegen, à l'époque éditeur associé à *Econometrica*, chargé de l'organisation des rapports sur l'article d'Arrow et Debreu. Sa correspondance se trouve au sein de l'université de Duke. Là encore, nous n'avons pu y avoir accès directement et nous nous reportons aux citations extraites par Weintraub.

rédacteur en chef d'*Econometrica* avait demandé à Nicholas Georgescu-Roegen de s'occuper du choix des rapporteurs. Mais cette tâche s'avéra relativement compliquée. En effet un bon rapporteur, dans ce cas précis, se devait d'avoir suffisamment de connaissances mathématiques (mais aussi économiques) pour comprendre l'article, tout en étant impartial, c'est-à-dire, ne pas être un proche d'Arrow ou Debreu. La clause d'impartialité impliquait alors d'exclure les économistes de la *Cowles Commission* et de la *RAND*. Le problème étant qu'il ne restait dès lors plus beaucoup d'économistes mathématiciens qualifiés, sachant que la communauté était déjà peu étendue à l'époque. Le choix de Georgescu-Roegen se porta sur William Baumol, du département d'économie de l'université de Princeton et sur Cecil Phipps du département de mathématiques de l'université de Floride. Seul le premier semble alors répondre à tous les critères nécessaires pour être rapporteur de l'article d'Arrow et Debreu, encore qu'il n'est pas sûr que Baumol maîtrisait à l'époque les questions d'ensembles convexes et de théorèmes du point fixe¹⁰⁹.

En plus du choix des rapporteurs, Georgescu-Roegen était chargé lui aussi d'effectuer une lecture critique de l'article. Il rédige dans cette optique une note critique détaillée à l'adresse de Kenneth Arrow et de Gérard Debreu. Il suggère tout d'abord de rendre la preuve moins complexe : « Ne serait-il pas possible de rendre la preuve plus élémentaire et plus simple ou de la présenter comme la conséquence d'autres théorèmes bien connus ? J'ai entendu à Kingston le papier présenté par McKenzie et je fus impressionné par le peu de place occupée par la preuve mathématique technique dans l'argumentation » (p.434). Un second problème pour Georgescu-Roegen réside dans le fait que « les preuves mathématiques des lemmes et des théorèmes » sont insuffisamment séparées de « l'interprétation économique du résultat ». On voit bien à quel point cette question de la séparation entre formalisme mathématique et interprétation économique est décisive dans l'économie mathématique et dans le *style de pensée axiomatique* qui en découle. Georgescu-Roegen considère également que l'interprétation du modèle devrait être discutée par Arrow et Debreu. L'absence d'une telle discussion conduit à une interprétation négative : « Le papier laisse le lecteur avec l'impression définitive que l'existence d'un équilibre pour un système économique requiert des hypothèses très fortes. Si on voulait dériver des conclusions réalistes de cela, la conclusion serait proche de l'idée qu'un système réel serait privé de telles hypothèses et donc d'un équilibre également » (p.435). En résumé, Georgescu-Roegen porte peu son attention sur la preuve mathématique en elle-même, qu'il n'a sans doute pas vérifiée. Il en critique juste la trop grande complexité apparente. Ses commentaires se portent plutôt sur l'interprétation économique et sur l'articulation entre le *point de vue mathématique* et le *point de vue économique*.

¹⁰⁹ Georgescu-Roegen témoigne d'ailleurs de la difficulté pour trouver des rapporteurs : « Ma première impression était que les mathématiques étaient plutôt complexes même pour les meilleurs économétriciens, et cette opinion fut renforcée après avoir lu l'article plus attentivement. De plus, les mathématiques et l'économie étaient tellement entremêlés dans l'argumentation qu'il était difficile de penser à de nombreux rapporteurs qui seraient à la fois économistes et mathématiciens de telle manière que la lecture critique du papier ne leur imposerait pas une tâche immense » (Weintraub et Gayer, 2001, p.234).

Le premier rapporteur, Baumol, semble adopter la même attitude concernant la preuve mathématique. Le résultat est sans aucun doute important mais nécessiterait des précisions supplémentaires au sujet du lemme employé (p.430). Plus intéressante est l'attitude de Phipps. Lui non plus ne s'intéresse pas directement à la preuve mathématique apportée par Arrow et Debreu. Il critique plutôt « la manière dont ils construisent leur modèle d'économie concurrentielle, leur définition de l'équilibre et quelques-unes de leurs hypothèses sur les consommateurs et les entreprises » (p.436). Par exemple, il considère que les entreprises doivent essayer de maximiser leurs profits, quel que soit le vecteur de prix (plutôt que de le maximiser seulement pour un vecteur de prix donné). Il s'oppose également à la normalisation des prix, considérant qu'elle « n'a aucun lien avec la question d'une solution pour ces prix (...) [et] sert simplement à donner une valeur unique aux prix après que la solution pour les prix relatifs a été atteinte » (p.436). En conclusion, Phipps affirme que l'article d'Arrow et Debreu ne devrait pas être publié dans la revue.

Plusieurs réponses vont être apportées à la critique de Phipps. Tout d'abord, Arrow et Debreu considèrent que, pour que les critiques de Phipps soit fondées, il est nécessaire que celui-ci « 1) indique, avec la référence de la page et de la ligne, où nous avons fait une inférence non justifiée par nos hypothèses ou par la logique, [ou] 2) présente un modèle satisfaisant toutes nos hypothèses et démontrant qu'il n'existe pas d'équilibre, tel que nous l'avons défini » (p.438). Ce qui est mis en cause par Arrow et Debreu, c'est le manque de rigueur de la critique de Phipps. Ce dernier ne cherche absolument pas à distinguer argument mathématique et argument économique. Les deux auteurs semblent également se refuser à discuter la justification de leur choix d'hypothèses. On retrouve ici une caractéristique majeure de l'*axiomatique des Modernes* (voir chapitre 1) : ce qui importe n'est pas nécessairement que les hypothèses soient vraies ou fausses, mais plutôt les théorèmes que ces hypothèses permettent de déduire, par le moyen d'inférences logiques et mathématiques.

Strotz, le rédacteur en chef d'*Econometrica*, interroge plusieurs économistes pour avoir leur avis sur la critique de Phipps. Nikaïdo considère que Phipps « n'a pas réussi à comprendre la version et le cadre de base de l'article. En lisant un article tel que celui d'Arrow-Debreu, on doit faire attention au fait que la formulation économique du problème n'est pas la même chose que le procédé mathématique permettant d'obtenir une solution au problème » (p.438). De même, pour Koopmans, Phipps « ne part pas des prémisses pour indiquer des erreurs spécifiques dans leurs chaînes de raisonnement. Il explique plutôt comment il aurait conduit le problème et note quelques différences qu'il décrit ensuite comme des erreurs des auteurs » (p.438).

Il est clair que Phipps ne semble pas comprendre le *style de pensée axiomatique* dans lequel l'article d'Arrow et Debreu s'inscrit. Tout l'enjeu de ce *style* est l'articulation entre le contenu économique et le langage formel qui sert à le décrire, avec l'idée que ces deux entités peuvent être clairement distinguées. On pose d'abord des hypothèses, traduites dans le

langage mathématique, avec pour objectif de produire formellement des théorèmes. Bien entendu, ce *style de pensée axiomatique* peut être appliqué de manière plus ou moins « rigoureuse ». Même si le terme de rigueur revêt une grande part d'arbitraire, on peut considérer que Gérard Debreu constitue un modèle de cette application rigoureuse du *style de pensée axiomatique*. Il en représente un pôle extrême.

Bien évidemment, Kenneth Arrow est lui aussi un vecteur de ce *style de pensée*, mais ses positions épistémologiques diffèrent de celles de Debreu. C'est bien ce qui fait tout l'intérêt d'une étude comparée des travaux d'Arrow et Debreu, afin de mettre au jour les différentes caractéristiques du *style de pensée axiomatique* en économie mathématique, à travers l'analyse de deux de ses héros.

Conclusion : Pour une étude comparée de l'axiomatique chez Arrow et Debreu

La fameuse collaboration entre Kenneth Arrow et Gérard Debreu pourrait laisser croire à l'existence d'un parfait « isomorphisme » épistémologique entre les deux auteurs. L'analyse de leur correspondance est alors un formidable atout pour comprendre que cette croyance est une erreur, car elle occulte les engagements épistémologiques propres à chacun. L'article de 1954 est ainsi doublement révélateur. Il permet d'analyser l'émergence d'un *style de pensée axiomatique*, au sein de l'économie mathématique naissante, dans les années 1950. Mais il permet également de révéler les hétérogénéités épistémologiques au sein de ce *style*. Arrow et Debreu sont porteurs de deux *images du savoir* différentes : leurs réponses aux problèmes de l'évaluation d'une théorie et de son progrès prennent des directions partiellement opposées. Quand nous parlons de réponses, il ne s'agit bien entendu pas de réponses « directes ». Leurs discours méthodologiques laissent entrevoir quelques renseignements mais c'est surtout par leur pratique de la méthode axiomatique et de la construction de modèles économiques qu'ils apportent ces réponses. Pour cette raison, la suite de leurs travaux sur l'existence révèle la différence de ces réponses.

L'histoire de la genèse de l'article de 1954 (telle qu'elle est racontée par ceux qui la font) est une histoire qui semble principalement technique. Elle porte l'attention sur la découverte des différents outils mathématiques qui serviront à la démonstration de l'existence d'un équilibre concurrentiel. On voit également émerger certaines hypothèses qui seront fondamentales dans l'article d'*Econometrica*. Cette histoire met en avant la place prépondérante accordée aux choix des axiomes et à la découverte des meilleures techniques mathématiques dans l'optique d'une preuve d'existence. Le *style de pensée axiomatique* se caractérise par la primauté donnée aux questions formelles, au détriment des questions empiriques.

Mais le problème du *rapport à la réalité* n'en est pas écarté pour autant. L'article de 1954 est le révélateur de la question fondamentale à laquelle se heurte le *style de pensée axiomatique* : celle de l'articulation entre le contenu formel de la théorie et son interprétation économique. L'une des principales critiques que l'on peut adresser est justement l'insuffisance de traitement de l'interprétation économique du modèle, Arrow et Debreu se concentrant principalement sur sa structure logique. Les hypothèses mathématiques choisies posent des *contraintes interprétatives* que les auteurs se refusent en grande partie à discuter. L'absence d'évaluation des interprétations possibles du modèle conduit à ne pas se questionner sur le réalisme du modèle (alors même que les *contraintes interprétatives* font émerger des caractéristiques qui semblent peu réalistes, voire parfois absurdes). De plus, toute spécification institutionnelle du modèle est profondément absente : rien ne nous est dit sur la façon dont les agents procèdent pour échanger, sur la manière dont l'information circule. On est alors conduit à affirmer que le résultat d'existence ne nous dit pas grande chose sur les systèmes économiques réels.

Il n'en demeure pas moins que le souci de l'interprétation économique (même s'il semble réduit à son minimum) reste présent dans l'esprit des auteurs. L'étude de la correspondance entre Arrow et Debreu révèle la présence d'interrogations et de négociations sur l'articulation entre le *point de vue économique* et le *point de vue mathématique*. Pour le premier, cette articulation passe par une interaction constante entre les deux points de vue, dans le but de trouver un compromis adéquat : d'un côté des hypothèses suffisamment générales pour obtenir des théorèmes généraux mathématiquement ; de l'autre, un contact de ces hypothèses avec la « réalité économique », de manière à ce que les théorèmes gardent un sens pour les économistes.

A l'opposé, Debreu semble représenter un pôle extrême du *style de pensée axiomatique*. Il est difficile de nier qu'en ce qui le concerne, les questions mathématiques sont premières. L'objectif pour lui est de construire un système axiomatique le plus général possible. Les interprétations ne viennent que dans un second temps. Elles ne dictent à aucun moment la construction du système axiomatique¹¹⁰. Cette séparation en deux temps du travail théorique est justifiée par la séparation entre le contenu formel de la théorie et les interprétations économiques, qui doivent être clairement distingués dans la formulation du modèle.

C'est à cette tâche que s'est employé Gérard Debreu dans sa *Théorie de la valeur* (1959). Dans son avant-propos, il énonce clairement que « la théorie de la valeur est traitée ici sur le modèle de rigueur de l'école formaliste contemporaine de mathématiques (...). La fidélité à la rigueur dicte la forme axiomatique de l'analyse où la théorie, au sens strict, est logiquement complètement disjointe de ses interprétations. Pour mettre pleinement en relief

¹¹⁰ Cette affirmation est sans doute trop forte. Debreu construisant un système axiomatique pour résoudre un *problème économique*, il est évident que des questions économiques interviennent en amont de la construction du système. Mais ce sont tout de même les considérations formelles qui sont jugées les plus importantes par Debreu.

cette coupure, toutes les définitions, toutes les hypothèses et les principaux résultats de la théorie, au sens strict, sont écrits en italique. En outre la transition entre la discussion non formelle des interprétations et la construction formelle de la théorie est souvent indiquée par l'une des expressions « dans le langage de la théorie », « formellement ». Une telle dichotomie révèle toutes les hypothèses de la structure logique de l'analyse. Elle rend aussi possible des extensions immédiates de cette analyse sans modification de la théorie par une simple réinterprétation des concepts » (Debreu, 1959, p.xliii-xliv).

Cette volonté de séparer clairement le point de vue mathématique du point de vue économique tire sans aucun doute son inspiration du groupe Bourbaki. La structure logique est mise en avant grâce à la méthode axiomatique, indépendamment de ses interprétations. Cette séparation doit permettre de dégager des isomorphismes entre différents phénomènes concrets. C'est là l'une des caractéristiques majeures de l'*image structurelle* du groupe Bourbaki, que reprend Debreu à son compte : une structure axiomatique est d'autant plus valorisée qu'elle permet un ensemble d'interprétations. L'*équivocité* est une des qualités majeures de tout système axiomatique. C'est pour cette raison que Debreu aime à répéter que le modèle de 1954 a pu être élargi avec l'intégration des biens contingents (biens définis en fonction des états du monde possible), sans que la structure logique ne soit modifiée en aucune manière. Celle-ci, une fois construite peut être enrichie par de nouvelles interprétations telles que l'intégration des biens et des marchés contingents.

Cependant, Debreu s'est peu attelé à la découverte de nouvelles interprétations et à la discussion des interprétations déjà existantes. C'est bien entendu le développement de la structure logique qui l'intéressait plus profondément : « Déjà, dès son premier contact avec Arrow, son but était de fournir une preuve d'existence plus générale. Après avoir essayé d'écarter de la publication avec Arrow les allusions à une plus grande généralité, la porte lui était ouverte pour réaliser ce but. Après six mois passés en France, il continua de rechercher une preuve plus générale et, au printemps 1954, il compléta la version qui apparaîtrait plus tard dans sa *Théorie de la valeur* (1959). Mais il n'en était pas satisfait car il considérait cette version comme toujours trop proche de celle réalisée avec Arrow. Ce qu'il recherchait vraiment était une preuve d'existence renonçant complètement au théorème du point fixe. Pour cela, il consulta encore les bourbakistes les plus influents, du campus : Armand Borel, Pierre Samuel et, bien sûr, André Weil » (Düppe, 2012, p.506). Malheureusement pour lui, il ne trouvera jamais une telle preuve.

La recherche d'une plus grande simplicité et d'une plus grande généralité constitue l'objectif que poursuit Debreu de manière permanente. C'est d'ailleurs par ces deux particularités qu'Hildenbrand décrit le travail scientifique de Debreu : « La caractéristique la plus frappante des contributions scientifiques de Debreu est qu'elles sont à la fois générales et simples : générales au sens où elles sont universelles et non pas *ad hoc*, spécifiques, particulières ; simples, non pas évidemment au sens où elles seraient élémentaires, faciles d'accès et ne nécessitant aucun effort de compréhension, mais au sens où elles sont sobres,

non alambiquées et non inutilement complexes » (Hildenbrand, 1983, p.i).

Cependant, il est clair que cette *image du savoir* de Debreu ne fait pas l'unanimité parmi la communauté des économistes, même auprès de ceux qui lui sont le plus proches, c'est-à-dire les économistes de la *Cowles Commission*. Alors que ces derniers cherchent à étendre le champ des phénomènes économiques étudiés par l'économie mathématique, le français continue de porter son attention sur des questions en grande partie purement mathématiques. Cette différence de préoccupations se retrouve dans les critiques prononcées à l'égard de la *Théorie de la valeur* : « Les sept recensions montraient des réserves à propos de la pureté et notaient avec regret l'exclusion des monopoles, des externalités et de la monnaie » (Düppe, 2012, p.507). La recension la plus dure avec Debreu est sans aucun doute celle de Frank Hahn qui reproche à ce dernier de vouloir « fournir si possible un énoncé définitif de la théorie de l'équilibre concurrentiel et de fuir tous les problèmes qui n'ont pas encore été résolus d'une manière également satisfaisante. En cela, il a certainement réussi, mais je crois qu'il a peut-être été mal avisé de dénier au lecteur le bénéfice de ses réflexions sur un certain nombre de problèmes soulevés par son travail » (Hahn, 1961, p.204)¹¹¹.

La critique de Hahn porte les prémisses d'une démarche différente concernant la théorie de l'équilibre général et la question de l'existence. Démarche qu'il entreprendra justement avec Kenneth Arrow, en publiant *General Competitive Analysis* (1971). La principale différence avec l'ouvrage de Debreu est bien entendu qu'Arrow et Hahn ne concentrent pas toute leur attention sur la question de l'existence puisqu'ils abordent également celles de l'unicité et de la stabilité. Mais la question de l'existence y occupe une place prépondérante, concernant six chapitres sur quatorze et près de la moitié des 370 pages. Arrow et Hahn y proposent différents théorèmes¹¹² et font varier de nombreuses hypothèses pour tester les conséquences de ces changements. De ce fait, en comparaison avec Debreu, l'approche axiomatique d'Arrow (et de Hahn) semble plus pragmatique et moins rigide. On retrouve par analogie l'opposition relative que l'on a dessinée rapidement entre Hilbert et Bourbaki dans le premier chapitre, au sujet de leur conception de l'axiomatique.

Arrow et Debreu n'ont pas la même conception des objectifs que doit atteindre la théorie économique. Les critères d'évaluation d'une théorie ne sont pas les mêmes chez l'un et l'autre. Et ces différences se retrouvent dans l'usage qu'ils font de la méthode axiomatique. C'est donc tout l'intérêt d'étudier précisément et de manière systématique leurs différents travaux sur la question de l'existence d'un équilibre général afin d'analyser comment ces différences s'expriment en pratique.

Cette comparaison serait révélatrice des nuances présentes au sein du *style de pensée*

¹¹¹ Hahn fait référence à des questions telles que l'intégration de la monnaie au modèle, la possibilité de se rapprocher d'hypothèses plus réalistes. Hahn se demande ce qu'il se passerait si l'une des hypothèses était rejetée empiriquement ou bien à quoi on « reconnaît » un équilibre.

¹¹² Ils partent d'un marché sans aucune définition institutionnelle (il ne s'agit pas d'un marché de concurrence parfaite) et proposent un théorème d'existence très général, fondé sur trois hypothèses seulement (l'homogénéité de degré 0 des fonctions des prix, la continuité des fonctions des prix, la loi de Walras). Ce théorème est inspiré de Nikaido (1956) et d'Uzawa (1962).

axiomatique, mais aussi des invariants qui la constituent. L'usage de preuves non-constructives est un bon exemple de ces invariants. Il serait dès lors intéressant de tenter d'en analyser les conséquences épistémologiques : quelle valeur peut-on donner à un résultat fondé sur une preuve non-constructive ? Une étude comparée des travaux d'Arrow et Debreu est donc une piste intéressante pour esquisser une description de l'épistémologie de l'économie mathématique et plus particulièrement de la théorie de l'équilibre général.

Conclusion Générale

Notre volonté d'étudier les relations entre économie et mathématiques repose sur une approche qui se veut compréhensive et descriptive. La question n'est pas ici de juger si le processus de formalisation et d'axiomatisation de l'économie est « bon » ou « méchant » mais plutôt d'analyser la forme que cette transformation de la discipline peut prendre et d'en comprendre les conséquences épistémologiques pour la pratique de l'économie. La théorie de l'équilibre général, telle qu'elle se développe dans les années 1950, constitue une forme de cette relation entre économie et mathématiques. Forme d'autant plus particulière qu'il ne s'agit pas ici d'appliquer simplement des outils mathématiques à des problèmes économiques. Plus profondément, c'est la façon de penser et de traiter un problème économique qui est bouleversée par l'utilisation de la méthode axiomatique. Ce mode de pensée particulier, nous l'avons nommé *Style de pensée axiomatique*.

Pour caractériser ce *style de pensée*, il était nécessaire d'attaquer la question par la racine : l'émergence de l'*axiomatique des Modernes*. Notre point de départ résidait donc dans l'histoire des mathématiques. Ce détour nous a permis de dégager les idées fondamentales de la méthode axiomatique, dans le cadre de l'activité théorique : la transformation de la conception des postulats, passant du statut d'évidence empirique à celui de simples *conventions* (ce qui n'implique pas bien entendu que leur choix soit totalement arbitraire) ; la séparation jugée absolument nécessaire (et donc possible) entre la structure logique (l'ensemble des termes et des énoncés formels et les inférences logiques qui lui sont appliquées) d'une théorie et son contenu concret. L'application de la méthode axiomatique est un processus en deux étapes : on construit dans un premier temps une liste de définitions et d'axiomes (souvent sur la base de connaissances concrètes accumulées par la théorie, dans sa forme pré-axiomatique) que l'on transforme ensuite, par des règles purement logiques et mathématiques, afin de produire des théorèmes ; dans un second temps vient l'interprétation concrète du système ainsi axiomatisé.

L'idée d'une séparation claire entre structure logique et interprétations d'une théorie fait peu à peu son nid à l'intérieur d'une partie de la discipline, comme nous avons pu le voir dans le second chapitre. L'attention est portée principalement sur l'aspect formel. C'est d'ailleurs cet aspect qui permit la redécouverte du modèle walrassien dans les années 1930, puisque cette redécouverte s'opéra à Vienne, au sein d'un colloque de mathématiciens. Le *style de pensée axiomatique* de l'économie mathématique, qui se développe dans les années 1950 aux Etats-Unis, après l'immigration de la majorité des scientifiques qui résidaient à Vienne avant-guerre, redessine alors les *critères de la justification* d'un modèle économique : une place primordiale est accordée aux questions de la preuve et du choix des hypothèses mathématiques. L'interprétation du modèle d'équilibre général construit réside alors au

second plan. Mais elle n'en demeure pas moins importante car elle permet de donner une signification économique au modèle formel axiomatisé. Le *style de pensée axiomatique*, en séparant structure logique et contenu économique d'une théorie, conduit à l'émergence d'un double *point de vue* (un *point de vue mathématique* et un *point de vue économique*, chacun avec leur propre *logique de développement*) et manifeste une tension constante entre le choix des hypothèses mathématiques et les conséquences interprétatives auxquelles celles-ci conduisent. L'économiste doit arbitrer entre *contraintes mathématiques* et *contraintes économiques*, révélant ainsi l'existence implicite d'une *querelle de priorité*¹¹³.

C'est à travers cette tension que nous avons analysé l'article d'Arrow et Debreu de 1954, avec l'idée sous-jacente que les deux co-auteurs appartenaient à ce *style de pensée axiomatique* mais ne répondaient pas à la *querelle de priorité* d'une manière identique. Alors que Gérard Debreu constitue un point extrême du *style de pensée axiomatique*, inspiré par l'*image bourbakiste* de l'axiomatique, prônant une absolue séparation entre structure logique et contenu économique et donnant la primauté à la *logique de développement mathématique*, afin d'obtenir la plus grande généralité possible de la preuve d'existence d'un équilibre général concurrentiel, Kenneth Arrow semble porter une attention beaucoup plus soutenue aux questions de significations économiques, comme en atteste sa correspondance avec Debreu.

A travers cette question de l'existence, c'est tout un ensemble de débats épistémologiques implicites qui se dessine dans la pratique de la méthode axiomatique et de la construction de modèles économiques. Le *style de pensée axiomatique*, pour les secteurs de la théorie économique qu'il touche, esquisse une nouvelle manière d'évaluer les théories et la façon dont elles doivent progresser. Nous pensons que ces questions épistémologiques sont également éminemment présentes dans l'opposition de style que constituent la *Théorie de la valeur* de Debreu et l'ouvrage d'Arrow et Hahn, *General Competitive Analysis*, dévoilant ainsi l'*image du savoir* propre à chacun.

Une autre manière de prouver l'existence de ces débats implicites et d'en étudier le contenu serait d'analyser les publications quasi-simultanées des premières preuves d'existence d'un équilibre général (construites de manières indépendantes), c'est-à-dire d'étudier les articles de McKenzie (1954), Arrow et Debreu (1954) et Nikaido (1956). La question de la priorité de la découverte entre McKenzie d'un côté, Arrow et Debreu de l'autre est bien étudiée par Weintraub (2011). Il semble impossible d'établir qui a eu l'idée d'une telle démonstration en premier. L'article de McKenzie et celui de Arrow et Debreu furent présentés tous deux en décembre 1952, devant la société d'économétrie, à Chicago. McKenzie proposa son article à *Econometrica* au début de l'année 1953, alors qu'Arrow et Debreu attendirent le mois de Mai. Des retards dans le processus de publication de l'article de

¹¹³ Implicite car cet arbitrage est souvent nié dans la *formulation* des modèles économiques (c'est-à-dire dans les publications qui présentent ces modèles), comme en atteste la double utilisation que font Arrow et Debreu du terme d'*affaiblissement*.

McKenzie firent que celui-ci ne parût dans la revue *Econometrica* que deux mois avant celui d'Arrow et Debreu, soit en avril 1954.

Face à ce quasi *statu-quo* de la découverte, comment expliquer que les seconds connurent un rapide succès alors que le premier demeura inconnu des non spécialistes de la TEG ? Pour Weintraub, « deux réponses sont possibles : l'une portant sur les détails des preuves elles-mêmes, l'autre sur la sociologie du monde universitaire » (Weintraub, 2011, p.211). Il semble cependant favoriser la deuxième réponse, parlant à cet égard « d'effet Matthieu »¹¹⁴ : Debreu et Arrow appartenant à des universités plus prestigieuses que McKenzie, tout le crédit scientifique de cette « découverte simultanée » alla aux premiers. La reconnaissance scientifique va à ceux qui en ont déjà le plus. Même si nous ne nions pas l'existence de causes sociologiques, ce qui nous intéresse plus particulièrement, dans le cadre des propos développés dans ce mémoire, est la première réponse proposée par Weintraub. Alors que McKenzie considérait qu'il avait été injustement dénigré, Debreu considérait que le succès de son article avec Arrow était dû à une plus grande généralité tant mathématique qu'interprétative de leur modèle. Duffie et Sonnenschein défendent également l'idée que l'article de Arrow et Debreu revêt une plus grande valeur que celui de McKenzie, pour des raisons techniques : « La théorie walrassienne de la valeur a été critiquée pour son incapacité à prendre en compte le fait que les agents pouvaient opérés des jugements sur la qualité par les prix, ou qu'ils pouvaient être incohérents dans leurs choix (comme quand leurs préférences ne sont pas transitives), ou avoir des préférences qui dépendent du choix des autres agents. La preuve originale de Arrow-Debreu, à l'inverse des preuves qui fonctionnent par la construction de fonctions d'excès de demande (comme pour McKenzie 1954), peut être relativement facilement modifiée pour prendre en compte *tous* ces ingrédients » (Duffie et Sonnenschein, 1989, p.571). Ce débat renvoie ainsi à la question de savoir ce qui permet d'évaluer un modèle économique axiomatisé : *généralité mathématique, généralité interprétative*, simplicité de la preuve, élégance...

Le processus de publication de l'article de Nikaido, évoqué par Ikeo (2009), constitue sans aucun doute également un révélateur de ces *critères de justification*. Grâce à Ikeo, on apprend que Nikaido soumit son article à *Econometrica* en décembre 1954. Georgescu-Roegen chargea Arrow d'être rapporteur pour cet article. Ce dernier considéra qu'il fallait refuser l'article car, même si celui-ci apportait une preuve plus simple, il ne s'agissait que de « purs raffinements analytiques » (Ikeo, 2009, p.19). N'apportant rien au niveau du *point de vue économique*, Arrow considère que la revue *Econometrica* n'a pas d'intérêt à publier le papier de Nikaido¹¹⁵.

¹¹⁴ En référence à l'évangile selon Matthieu, dans lequel ce dernier fait dire à un riche : « A celui qui a, il sera beaucoup donné et il vivra dans l'abondance, mais à celui qui n'a rien, il sera tout pris, même ce qu'il possédait ». Le concept d'« effet Matthieu » a été utilisé pour la première fois par Robert Merton, dans *The sociology of Science* (1968), au sujet du crédit scientifique.

¹¹⁵ Ce dernier recevra quelques mois plus tard une lettre d'Arrow qui lui proposera de soumettre son article à la revue *Metroeconomica*. Il y sera publié en 1956.

Les articles d'Arrow et Debreu (1954), McKenzie (1954), Nikaido (1956), mais aussi Gale (1955), dont l'indépendance de la construction de la preuve ne semble pas totale, nous offrent une large panoplie de modèles d'équilibre général et de preuves d'existence permettant d'observer le *style de pensée axiomatique* et ses différentes nuances, à travers les engagements épistémologiques propres à chacun.

Annexe : récapitulatif des hypothèses et des interprétations du modèle Arrow-Debreu

	Définitions	Axiomes	Interprétations (formulées par Arrow et Debreu)	Interprétations non discutées par Arrow et Debreu
Marchandises	R^l l'espace vectoriel des marchandises	Nombre fini l de marchandises	Biens définis par une période de temps et par une localisation	Hypothèse sous-jacente de nomenclature des biens : <ul style="list-style-type: none"> - chaque agent connaît la qualité de chaque bien - chaque agent connaît aujourd'hui tous les biens qui apparaîtront dans le futur. Exclusion des asymétries d'information.
Secteur de la production	<p>Y_j ensemble des plans de production possibles pour j.</p> <p>y_j vecteur d'input-output (= plan de production), dans R^l pour j.</p> <p>Y somme sur j des n unités de production.</p>	<p>Nombre fini n d'unité de production.</p> <p>(I.a) Y_j est un sous-ensemble fermé, convexe dans R^l, contenant 0.</p> <p>(I.b) Le seul point d'intersection de Y avec l'orthant positif est 0.</p> <p>(I.c) Le seul point d'intersection entre Y et $-Y$ est 0.</p>	<p>n peut inclure des producteurs qui ne sont pas encore présents sur le marché.</p> <p>L'interprétation des biens conduit à interpréter les plans de production comme des plans présents et futurs.</p> <p>(I.a) Convexité : Rendements d'échelle non-croissants. 0 appartient à Y_j : une unité de production est libre ne pas produire.</p> <p>(I.b) Pas de production sans inputs.</p> <p>(I.c) Le facteur travail ne peut pas être produit.</p>	<p>L'entrée sur le marché est limitée par le nombre n.</p> <p>Les plans de production se font aujourd'hui, pour toutes les époques futures : il n'y a aucune temporalité.</p> <p>(I.a) Pas de capital fixe car parfaite divisibilité des biens.</p> <p>(I.c) On peut supposer que cette impossibilité de produire le travail peut s'étendre à d'autres ressources rares, ce qui permet d'introduire une dimension environnementale.</p> <p>Hypothèse d'indépendance : les unités de production choisissent un plan de production uniquement en fonction de leur contrainte technologique et des prix, sans tenir compte du comportement des autres unités.</p>
Secteur de la consommation : - Choix des ménages	<p>x_i vecteur du panier de consommation choisi par i (composante négative si service en travail).</p>	<p>Nombre fini m d'unités de consommation</p> <p>(II) X_i est un sous-ensemble fermé, convexe, borné par le bas de R^l.</p>	<p>Unités de consommation : ménages ou organisations.</p> <p>(II) Borné par en bas car :</p> <ul style="list-style-type: none"> - quantité maximale de travail que l'on peut fournir (par exemple 24 heures par jour) - quantité minimale de biens à consommer pour survivre. 	

<p>- Indicateur d'utilité</p> <p>- Contrainte budgétaire</p>	<p>X_i ensemble des consommations possibles. $u_i(x_i)$ une indicateur d'utilité représentant les préférences des agents.</p> <p>ζ_i dotations initiales pour chaque unité de consommation i.</p> <p>α_{ij} la part du profit de l'unité de production j possédée par l'unité de consommation i.</p>	<p>Hypothèses implicites sous-jacentes à l'existence d'une fonction d'utilité : préférences transitives, réflexives et complètes.</p> <p>(III.a) u_i continue sur X_i.</p> <p>(III.b) Il existe $u_i(x'_i) > u_i(x_i)$ pour tout x_i appartenant à X_i.</p> <p>(III.c) Convexité de u_i.</p> <p>(IV.a) Pour quelques x_i appartenant à X_i, $x_i < \zeta_i$.</p> <p>(IV.b) Pour tout j et i, α_{ij} supérieur ou égal à 0, la somme sur i de α_{ij} est égale à 1, pour tout j.</p>	<p>(III.b) Hypothèse de non-saturation des désirs de l'individu. Reformulation possible avec de légères modifications mathématiques : l'unité de consommation est insatiable dans l'état actuel de la technologie.</p> <p>Possibilité d'inclure des dettes et des créances dans les dotations initiales.</p> <p>(IV.a) Hypothèse jugée hautement irréaliste : possibilité de survivre sans échanger, en disposant initialement d'un panier de biens suffisant pour assurer la survie.</p>	<p>(III.c) L'individu n'a pas de préférences « monomaniaques ». Il ne cherche pas à obtenir un bien à tout prix.</p> <p>L'unité de consommation choisit un panier de biens en fonction du prix et de ses préférences. Il ne s'intéresse pas au comportement des autres agents (pas de comportement mimétique et de consommation ostentatoire à la Veblen). Les préférences sont exogènes.</p> <p>Les dotations initiales sont exogènes, comme « tombées du ciel ».</p> <p>L'hypothèse (IV.a) porte fortement atteinte au modèle : à quoi sert-il d'étudier un modèle qui postule que les individus n'ont pas besoin d'échanger pour survivre ?</p> <p>(IV.b) Hypothèse avec un type particulier de propriété privée : quels liens entre consommateurs et producteurs ? Comment se déroule le processus de décision au sein de l'unité de production ?</p>
<p>Equilibre</p>	<p>$z = x - y - \zeta$</p> <p>Définition : un ensemble de vecteurs $(x_1^*, \dots, x_m^*, y_1^*, \dots, y_n^*, p^*)$ est dit être un équilibre concurrentiel s'il satisfait les conditions 1-4</p>	<p>(1) y_j^* maximise $p^* \cdot y_j$ pour tout j.</p> <p>(2) x_i^* maximise $u_i(x_i)$ sur l'ensemble X_i tout en respectant la contrainte budgétaire.</p> <p>(3) p^* appartient à P, l'ensemble des vecteurs normalisés. p supérieur ou égal à 0 et la somme sur h des p_h est 1. La normalisation suppose que les fonctions des prix soient homogènes de degré 0.</p> <p>(4) z^* inférieur ou égal à 0 ; $p^* \cdot z^* = 0$</p>	<p>(4) Il existe des biens libres h (c'est-à-dire disponible en quantités illimitées) pour lesquels $p_h = 0$ et $z_h < 0$.</p>	<p>Les prix sont introduits sans que rien ne soit dit sur ce qu'ils représentent. Il n'y a pas de numéraire, pas de monnaie. Ils sont juste exprimés par des valeurs réelles. Ce qui pose des problèmes pour imaginer comment pourrait se faire l'échange.</p> <p>La normalisation suppose que les agents ne sont pas victimes d'illusion monétaire.</p> <p>Le fait que les prix ne peuvent être négatifs signifie que les agents peuvent se débarrasser librement de n'importe quel bien.</p>

Bibliographie

AKERLOF George A. (1970), « The market for "lemons": Quality uncertainty and the market mechanism », *The quarterly journal of economics*, 84(3), p.488-500.

ALLAIS Maurice (1943), *A la recherche d'une discipline économique*, Paris, Ateliers Industria.

ARROW Kenneth J. (1951), *Social Choice and Individual Values*, New Haven, Yale University, Cowles Foundation Monographs ; trad. fr. *Choix Collectif et preferences individuelles*, Paris, Calmann-Levy, 1974.

_____ (1951b), « An Extension of the Basic Theorems of Classical Welfare Economics », dans L. Neyman (dir.), *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, p.507-532.

_____ (1974), « General economic equilibrium: purpose, analytic techniques, collective choice », *The American Economic Review*, 64(3), p.253-272.

ARROW Kenneth J. et Gerard DEBREU, (1954), « Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy », *Econometrica* 22(3), p.265-290

ARROW Kenneth J. et Frank H. HAHN (1971), *General Competitive Analysis*, 6 Reprint, North Holland, 2004.

AUTUME Antoine d' et Jean CARTELIER (1995), *L'économie devient-elle une science dure ?* Economica.

BENETTI Carlo (1997), « La méthode normative de la théorie économique positive » dans Hubert Brochier, Roger Frydman et Jérôme Lallement, *L'économie normative*, Paris, Economica.

BLANCHE Robert (1955), *L'axiomatique*, Paris, PUF, nouv. Ed., Paris, PUF, coll. « Quadrige », 1990.

BLAUG Mark (2003), « The Formalist Revolution of the 1950s », *Journal of the History of Economic Thought*, 25(2), p.145-156.

BOURBAKI Nicolas (1950), « The Architecture of Mathematics », *The American Mathematical Monthly*, 57(4), p.221-232.

BOUVIER Alain, Michel GEORGE et François LE LIONNAIS (2009), *Dictionnaire des mathématiques*, Paris, Quadrige / PUF.

CARTAN Henri (1980), « Bourbaki and Contemporary Mathematics », *The Mathematical Intelligencer*, 2(4), p.175-180.

CASSEL Gustav (1918), *Theoretische Sozialökonomie*, Leipzig, Winter ; tr. Fr. de la 4^{ème} édition allemande, *Traité d'économie politique*, 2 tomes, Paris, M. Giard, 1929.

CHRIST Carl (1952), « History of the Cowles Commission, 1932-52 », dans *Economic Theory and Measurement : A 20 Year Research Report*, Chicago, Cowles Commission, p.3-45.

CORRY Leo (1989), « Linearity and Reflexivity in the Growth of Mathematical Knowledge », *Science in Context* 3(02), p.409-440.

_____ (1992), « Nicolas Bourbaki and the concept of mathematical structure », *Synthese*, 92(3), p.315-348.

_____ (1997), « The origins of eternal truth in modern mathematics: Hilbert to Bourbaki and beyond », *Science in Context*, 10(2), p.253-296.

COT Annie L. et Jérôme LALLEMENT (2006), « Eléments pour une histoire de l'équilibre général de Walras à Arrow et Debreu », *Economies et sociétés*, « Oeconomia », série PE, 38, p.1705-1752.

DAHAN-DALMEDICO Amy et Jeanne PEIFFER (1986), *Une histoire des mathématiques : Routes et dédales*, Paris, Editions du Seuil.

DEBREU Gérard (1951), « The coefficient of resource utilization », *Econometrica*, 19(3), p.273-292.

_____ (1952) « A social equilibrium existence theorem », *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 38(10), p.886-893.

_____ (1959), *Theory of value*, New-York, Wiley ; trad. Fr. *Théorie de la valeur : Analyse axiomatique de l'équilibre économique, suivi de « Existence d'un équilibre concurrentiel »*. 2e éd., Paris, Dunod, 2002.

_____ (1984), « Economic Theory in the Mathematical Mode », *The Scandinavian Journal of Economics*, 86(4), p.393-410.

DIEUDONNE Jean (1962), « Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques », in. François Le Lionnais (dir.), *Les grands Courants de la Pensée Mathématique*, 2nd éd., F. Le Lionnais, Paris, Blanchard, p.443-555.

DUFFIE Darelle et Hugo SONNENSCHNEIN (1989), « Arrow and General Equilibrium Theory », *Journal of Economic Literature*, 27(2), p.565-598.

DUMONCEL Jean-Claude (2002), *Philosophie des mathématiques*, Paris, Ellipses.

DUPPE Till (2012), « Arrow and Debreu De-homogenized », *Journal of the History of Economic Thought*, 34(04), p.491-514.

FEIWEL George R. (1987), *Arrow and the Ascent of Modern Economic Theory*, (Vol.1), MacMillan.

FLECK Ludwik (1934), *Genèse et développement d'un fait scientifique*, Paris, Flammarion, 2008.

FOUCAULT Michel (1971), *L'ordre du discours*, Paris, Gallimard.

FRAENKEL Abraham Adolf (1922), « Zu der Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengerlehre », 86(3), p.230-237.

FRIEDMAN Milton (1953), « The Methodology of Positive Economics », dans *Essays in Positive Economics*, Chicago, University of Chicago Press.

GALE David (1955), « The law of supply and demand », *Mathematica Scandinavica*, 3, p.33-44.

GIOCOLI Nicola (2003), « Fixing the point: the contribution of early game theory to the toolbox of modern economics », *Journal of Economic Methodology*, 10(1), p.1-39.

_____ (2005a), « In the Sign of the Axiomatic Method: Mathematics as the Role Model for Neoclassical Economics » dans *Blanqui Lecture, European Society for the History of Economic Thought, EHSET, Ninth Annual Conference*.

_____ (2005b) « Modeling rational agents the consistency view of rationality and the changing image of neoclassical economics », *Cahiers d'économie Politique / Papers in Political Economy*, 49(2), p.177-208.

GODEL Kurt (1931), « Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I », *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38(1), p.173-198.

GUERRIEN Bernard et Claire PIGNOL (2000), « La théorie de l'équilibre général depuis 1939 » dans Alain Béraud et Gilbert Faccarello (dir.), *Nouvelle histoire de la pensée économique*, tome 3 : *Des institutionalistes à la période contemporaine*, Paris, La Découverte, p.379-416.

HAHN Frank H. (1961), « Theory of Value : An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium by G. Debreu », *Journal of Political Economy*, 69(2), p.204-205.

_____ (1965), « On some Problems of Proving the Existence of Equilibrium in a Monetary Economy » dans Frank Hahn et Frank P. Brechling, *The Theory of Interest Rates*, Londres, Macmillan, p.126-135.

HICKS John R. (1939), *Value and Capital*, Oxford, Oxford University Press.

HILBERT David (1899), *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, Teubner.

_____ (1902) “Mathematical Problems”, *Bulletin de l’American Mathematical Society*, 8, p.437-479.

HILDENBRAND Werner (1983), *Préface au Mathematical Economics : Twenty Papers of Gérard Debreu*, Cambridge University Press; trad. Française *Préface à Théorie de la valeur de Gérard Debreu*, Paris, Dunod, 2002.

IKEO Aiko (2009), « How Modern Algebra was Used in Economic Science in the 1950s », présenté au History of Economics Society Annual Meeting, tenu du 27 au 29 juin 2009, à Denver, Colorado.

INGRAO Bruna et Giorgio ISRAEL (1987), *The Invisible Hand: Economic Equilibrium in the History of Science*, The MIT Press, 1990.

ISRAEL Giorgio (1996), *La mathématisation du réel : essai sur la modélisation mathématique*, Paris, Editions du Seuil.

KOOPMANS Tjalling C. (1954), « VIII. On the Use of Mathematics in Economics », *The Review of Economics and Statistics*, 36(4), p.377-379.

_____ (1957), *Three essays on the state of economic Science*, McGraw-Hill Book Company, Inc ; trad. Fr. *Trois essais sur la science économique contemporaine*, Paris, Dunod, 1970.

LAX Peter D. (1989), « The Flowering of Applied Mathematics in America », *SIAM Review* 31(4), p.533-541.

LEONARD Robert (2010), *Von Neumann, Morgenstern, and the Creation of Game Theory: From Chess to Social Science, 1900-1960*, Cambridge University Press.

MALINVAUD Edmond (1995), « L’économie s’est rapprochée des sciences dures », dans Antoine d’Autume et Jean Cartelier, *L’économie devient-elle une science dure ?* *Economica*, p.9-17.

McKENZIE Lionel (1954), « On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems », *Econometrica* 22(2), p.147-161.

_____ (1981), « The Classical Theorem on Existence of Competitive Equilibrium », *Econometrica*, 49(4), p.819-841.

MERTON Robert K. (1968), *The Sociology of Science*, University of Chicago Press, 1973.

MIROWSKI Philip (1992), « What were von Neumann and Morgenstern trying to accomplish » dans Weintraub E. Roy, *Toward a History of Game Theory*, Duke University Press.

_____ (2002), *Machine Dreams: Economics Becomes a Cyborg Science*, Cambridge University Press.

MONGIN Philippe (2000), « La méthodologie économique au XXème siècle. Les controverses en théorie de l'entreprise et la théorie des préférences révélées », dans Alain Béraud et Gilbert Faccarello (dir.), *Nouvelle histoire de la pensée économique*, tome 3 : *Des institutionalistes à la période contemporaine*, Paris, La Découverte, p.340-378.

_____ (2003), « L'axiomatisation et les théories économiques ». *Revue économique*, 54(1), p.99-138.

MORGENSTERN Oskar (1935), "Vollkommene Voraussicht und Wirtschaftliches Gleichgewicht", *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 6(3), p.337-357 ; traduction anglais dans Andrew Schotter (dir.), *Selected Economic Writings of Oskar Morgenstern*, New-York, New-York University Press, 1976.

_____ (1941), « Professor Hicks on Value and Capital », *Journal of political economy*, 49(3), p.361-393.

MORGENSTERN Oskar et John Von NEUMANN (1944), *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1947.

MOSCATI Ivan (2003), *Storia della teoria neoclassica del consumatore (1871-1959) : una prospettiva neokantiana*, Ph.D. dissertation, University of Florence.

NADEAU Robert (1999), *Vocabulaire technique et analytique de l'épistémologie*, Presses Universitaires de France - PUF.

NASH John F. (1950), « Equilibrium points in n-person games », *Proceedings of the national academy of sciences*, 36(1), p.48-49.

NEISSER Hans (1932), « Lohnshöle und Beschäftigungsgrad im Marktgleichgewicht », *Weltwirtschaftliches Archiv*, 36(2), p.415-455.

NEUMANN John von (1928), « On the theory of games of strategy », dans Robert D. Luce et Albert W. Tucker (dir.) *Contributions to the Theory of Games*, Princeton, Princeton University Press, vol. IV, p.13-42, 1959.

_____(1937), « Ube rein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes », *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, vol.8, p.76-88 ; traduction anglaise, « A Model of General Equilibrium », *Review of Economic studies*, 13, 1945-1946.

NIKAIDO Hukukane (1956), « On the Classical Multilateral Exchange Problem », *Metroeconomica*, 8(2), p.135-145.

NOVICK David (1954), « Mathematics: logic, quantity, and method », *The Review of Economics and Statistics*, 36(4), p.357-358.

ORLEAN André, 2011, *L'empire de la valeur : refonder l'économie*, Paris, Editions du seuil.

PARETO Vilfredo (1896), *Cours d'économie politique*, Lausanne, Rouge, 2 volumes.

_____(1906), *Manuale di economia politica*, Milan, Società editrice libraria.

PASCH Moritz (1882), *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Teubner.

PATINKIN Don (1948), « Relative Prices, Say's law and the Demand for Money », *Econometrica*, p.135-154.

_____(1956), *Money, Interest and Prices*, Row, Perterson and Company, Evanston.

PEANO Giuseppe (1889), *Arithmetices principia, nova methodo*, Turin, Fratres Bocca.

PECKHAUS Volker (2003), « The pragmatism of Hilbert's programme », *Synthese*, 137(1/2), p.141-156.

PUNZO Lionel F. (1991), « The school of mathematical formalism and the Viennese Circle of mathematical economists », *Journal of the History of Economic Thought*, 13(01), p.1-18.

QUIRK James et Rubin SAPOSNIK (1968), *Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics*, New York, McGraw-Hill Book Company ; trad. Française, *Théorie de l'équilibre general et économie du bien-être*, Paris, PUF, 1974.

REICHENBACH Hans (1938), *Experience and Prediction*, Chicago, University of Chicago Press.

ROBBINS Lionel (1932), *An Essay on the Nature and Significance of Economic Science*, Londres, Macmillan.

ROWE David E. (1997), « Perspective on Hilbert », *Perspectives on Science*, 5(4), p.533-570.

RUSSEL Bertrand et Alfred North WHITEHEAD (1910), *Principia mathematica*, University Press, 1912.

SAARI Donald G. et Carl P. SIMON (1978), « Effective Price Mechanisms », *Econometrica*, 46(5), p.1097-1125.

SAVAGE Leonard J. (1954), *The Foundations of Statistics*, New-York, Wiley.

SCARF H (1973), *The Computation of Economic Equilibria*, Yale University Press, New Haven.

SCHLESINGER Karl (1935), « Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre », *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 1933-1934*, vol. 8, p.10-11, traduction anglaise, « On the production equations of economic value theory », dans William Baumol et Stephen Goldfeld (dir.), *Precursors in mathematical economics : An Anthology*, Londres, London School of Economics and Political Science, 1968, p.278-280.

SHACKLE George L.S. (1967), *The years of High Theory : Invention and Tradition in Economic Theory 1926-1939*, Cambridge, Cambridge University Press.

STACKELBERG Heinrich von (1933), « Zwei kritische Bemerkungen zur Preistheorie Gustav Cassels », *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 4, p.456-472.

TINBERGEN Jan (1954), « IV. The Functions of Mathematical Treatment », *The Review of Economics and Statistics*, 36(4), p.365-369.

UZAWA Hirofumi (1962), « Walras's existence theorem and Brouwer's fixed-point theorem », *Kikan Riron Keizaigaku* (Economic Studies Quarterly), 13, p.59-62.

VILKS Arnis (1998), « Axiomatization », dans John B. Davis, D. Wade Hands et Uskali Mäki, *The handbook of economic methodology*, Edward Elgar Publishing.

VORMS Marion (2011), *Qu'est-ce-qu'une théorie scientifique ?*, Paris, Vuibert.

WALD Abraham (1936), « Über einige Gleichungssysteme der mathematischen Ökonomie », *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 7, p.637-670, traduction anglaise « On Some Systems of Equations of Mathematical Economics », *Econometrica*, 19(4), p.368-403.

WALKER Donald A. (1999), *La théorie de l'équilibre général : de nouveaux éclairages*, Paris, Economica.

WALRAS Léon (1874), *Eléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale*, Lausanne, Corbaz ; réédition in Auguste et Léon Walras, *Œuvres économiques complètes*, vol. VIII, *Eléments d'économie politique pure*, Paris, Economica 1988.

WEINTRAUB E. Roy (1983), « the Existence of a Competitive Equilibrium: 1930–1954 », *Journal of Economic Literature*, 21(1), p.1-39.

_____(1985), *General Equilibrium Analysis : Studies in Appraisal*, University of Michigan Press.

_____(2002), *How Economics Became a Mathematical Science*, Duke University Press Books.

_____(2011), « Lionel W. McKenzie and the Proof of the Existence of a Competitive Equilibrium », *Journal of Economics Perspectives*, 25(2), p.199-215.

WEINTRAUB E. Roy et GAYER Ted (2001), « Equilibrium proofmaking », *Journal of the History of Economic Thought*, 23(4), p.421-442.

ZERMELO Ernst (1908), « Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre », *Mathematische Annalen*, 65(2), p.261-281.

ZEUTHEN Frederik (1933), « Das Prinzip der Knappheit, technische Kombination und ökonomische Qualität », *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 4(1), p.1-24.

ZYLBERBERG André (2000), « La théorie de l'équilibre économique général de 1918 à 1939 », dans Alain Béraud et Gilbert Faccarello (dir.), *Nouvelle histoire de la pensée économique*, tome 3 : *Des institutionalistes à la période contemporaine*, Paris, La Découverte, p.162-191.