



**HAL**  
open science

# Tarification des traités en excédant de sinistres de la branche Responsabilité Civile: une approche entre expérience et exposition

El Madhi Belhoudji

► **To cite this version:**

El Madhi Belhoudji. Tarification des traités en excédant de sinistres de la branche Responsabilité Civile: une approche entre expérience et exposition. Gestion des risques [q-fin.RM]. 2013. dumas-00921005

**HAL Id: dumas-00921005**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00921005>**

Submitted on 6 Jan 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mémoire présenté devant  
la Faculté des Sciences Economiques et de Gestion et l'UFR de Mathématique et Informatique  
pour l'obtention du Master de Finance,  
spécialité Actuariat et Gestion du Risque  
le 03/10/2013

Par : BELHOUI EI Mahdi

Titre: Tarification des traités en excédant de sinistres de la branche

Responsabilité Civile : une approche entre expérience et exposition

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

Membres du jury de l'Institut des  
Actuaires

signature

Entreprise : Transatlantic  
Reinsurance Company

Nom :

Bertrand Lévy

Signature :

*Bertrand Lévy*

Membres du jury de l'UdS :

- M. Jacques Franchi
- Mme Sandrine Spaeter-Loehrer
- M. Karl-Théodor Eisele
- M. Jean-Lucien Netzer
- Mme Myriam Maumy-Bertrand
- M. Bernard Heinkel
- M. Patrick Rondé
- M. Jean Bérard
- Invités :
- M. Philippe Artzner
- M. Pierre Devolder
- M. Jean Modry
- Mme Magali Kelle-Vignon
- M. Alexandre You

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : MARTINI Laurence

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de  
mise en ligne sur un site de  
diffusion de documents**

**actuariels** (après expiration de  
l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

**TransRe**

Transatlantic Reinsurance Company  
21 Boulevard Haussmann  
75009 Paris  
Tél. (33) 1 40 06 12 00  
Fax (33) 1 40 06 96 10

*Bertrand Lévy*

Signature du candidat

Secrétariat : Mme Laura Fidelin

Mme Floriane Maire-Lantz

Bibliothèque : Mme Christine Disdier

*Bertrand Lévy*

## **Remerciements**

Tout d'abord, je tiens à remercier ma maitre de stage Laurence MARTINI pour sa sympathie, sa disponibilité ainsi que pour ses précieux conseils, aussi bien lors de ces six mois que durant la rédaction de mon mémoire.

Je tiens également à remercier chaleureusement toute l'équipe actuarielle de Transatlantic Reinsurance Company : Stéphane BRISSON et Sarah DEGBEY, avec qui j'ai eu la chance de travailler, pour leurs conseils et surtout leur accueil amical.

A l'équipe de la souscription: Robert JOHNSTON, Nicole VEYRIE, Muriel HEBERT, Marie-Claude Vassal, Dominique LEMONNIER, Pascal BONHOURE, Corinne HEPNER-BRAFMAN merci pour tout le temps qu'ils ont eu la gentillesse de me consacrer.

Merci infiniment à Didier DUMAINE, Jérôme THYS, Emilie MOIZARD, Mario MONDOLONI et Delphine PRZYBYLSKI, ainsi que Nicolas TABACCHI.

Je voudrais exprimer tout ma reconnaissance à ceux et celles –familles et amis - qui tout au long de ce travail m'ont soutenu aidé et encouragé.

Enfin, j'adresse un grand merci à tous les professeurs du **DUAS** et en particulier mon tuteur universitaire de mémoire Monsieur Karl Théodore Eisele pour son soutien et ses conseils.



## ***Résumé***

La responsabilité civile des entreprises concerne des portefeuilles d'assurance dont les polices sont souscrites par les sociétés.

Les deux principales méthodes de tarification en réassurance sont la méthode par exposition et la méthode par expérience. La méthode par exposition tient compte des éléments du portefeuille actuel alors que la méthode par expérience reste influencée par le profil du risque des portefeuilles du passé et où il est difficile de faire une revalorisation (un AS If).

Traditionnellement, les actuaires intègrent les résultats des deux méthodes dans leurs tarifications finales. En accordant plus de poids à la méthode par expérience sur les tranches travaillantes, et plus de poids à la méthode par exposition sur les autres tranches.

Il s'agit dans ce mémoire de trouver une méthode de tarification alternative basée sur les données du passé afin de simuler un nouveau couple fréquence/sévérité en vue de l'appliquer sur le portefeuille actuel.

### *Mots-clés*

Sinistre, fréquence, sévérité, Monte Carlo, expérience, exposition.

## ***Abstract***

General third party liability for company deals with insurance portfolio who's insured are companies.

The two main pricing methods in the reinsurance are the exposure method and experience method. However on the long-tailed risks, we prefer the exposure method which considers the elements of the current portfolio, while the experience based method is influenced by the risk profile of past portfolio.

Traditionally, actuaries incorporate results of the two methods in their final pricing.

In this project we try to find an alternative pricing method based on prior data to simulate a new set of frequency / severity to apply to the current portfolio.

### *Keywords*

Claim, frequency, severity, Monte Carlo, experience, exposure.

# SOMMAIRE

<b>I. Introduction</b>	<b>8</b>
<b>II. Contexte de l'étude et présentation des données</b>	<b>9</b>
<b>A. Transatlantic Reinsurance Company</b>	<b>9</b>
<b>B. La réassurance</b>	<b>9</b>
1. L'esprit de la réassurance	9
2. Les formes non-proportionnelles	10
3. Les Facultatives	10
4. Méthodes de tarification en réassurance	11
5. Réassurance	12
6. Clause de limitation	12
i. Exemple	13
ii. La corrélation entre la prime pure d'un traité en XS sinistres et l'AAL et l'AAD (approche probabiliste)	14
iii. La prime pure d'un contrat en excédent de sinistres	15
7. Les sinistres à développement long	15
i. Les sinistres Payés (SP ou Paid Loss) et les Provisions Restant à Payer	15
i. Sinistres IBNER (Incurred But not Enough Reserved)	16
ii. Sinistres IBNR (Incurred But Not Reported)	16
<b>C. Chaîne de production</b>	<b>16</b>
1. Le souscripteur	17
2. Le Risk Manager	17
3. Gestionnaire de sinistre	17
4. L'Actuaire	18
5. Comptabilité	18
6. Le courtage	18
<b>D. Le contexte actuel de la réassurance</b>	<b>18</b>
<b>E. Responsabilité Civile</b>	<b>20</b>
1. Définition générale	20
2. Législation de la RC	21
i. Principe	21
ii. Code civil	21
iii. Lois spéciales	22
iv. Un aperçu sur la fiscalité des compagnies de réassurance	22
<b>F. Présentation de données</b>	<b>24</b>
1. Données de la cédantes	25
i. Présentation des données du portefeuille	25
ii. Les données des sinistres	28

3.	Modèle et lien entre les sinistres et le portefeuille	28
i.	Complément	31
	Explication de lien entre sinistres et portefeuille	31
	Exemple de lien entre le sinistre à la part de la cédante et le sinistre complet	31
	Problème des sinistres à 100%	31
3.	Analyse des données	32
4.	Motivation	34

### **III. TARIFICATION DES TRAITES RC en XS** **36**

#### **A. Expérience** **36**

1.	Mise en AS-IF	36
i.	Outils de revalorisation	36
ii.	Escompter des données des sinistres à la part de la cédante au-delà du seuil $S_1$	37
2.	Extrapolation des sinistres individuels à l'ultime	41
i.	Calcul des IBNER	41
ii.	Application des facteurs pour développer les sinistres	41
7.	Fit par une loi de probabilité	43
i.	Moments	44
ii.	Vraisemblance	44
iii.	Le test sur les paramètres : Kolmogorov-Smirnov	46
iv.	Autres ajustements des lois	46
v.	La Mean excess fonction	46
vi.	QQ Plot	47
8.	La cadence de paiement	48
9.	L'estimation du nombre de sinistres à l'ultime	49

#### **B. Calcul de la Prime Pure** **51**

1.	Le Burning Cost	51
2.	Modèles mathématiques : méthode de simulation	52
3.	Cash-flow	52
5.	Application de la tarification avec la méthode de simulation	52
i.	Modélisation des montants de sinistres	52
ii.	Modélisation de la loi de fréquence	53
iii.	Tarification avec les clauses du traité	54

#### **C. La méthode par exposition** **55**

1.	L'approche ILF	56
i.	Formalisation mathématique	56
ii.	Application sur un traité C XS D	57
iii.	Exemple numérique	58

### **IV. Tentative d'une nouvelle approche** **60**

#### **A. Le principe de la nouvelle méthode de tarification** **60**

#### **B. Simulation de Monte Carlo** **61**

#### **C. Distribution des polices** **63**

<b>D. Analyse statistique du portefeuille</b>	<b>66</b>
<b>E. Sélection d'une distribution des sinistres à la part observés</b>	<b>67</b>
<b>F. Simulation</b>	<b>69</b>
1. Simulation du nombre de sinistre dans l'année	69
2. Simulation du sinistre à la part moyen en fonction du seuil	69
i. Simulation (Pareto/LogNormal) pour calculer les sinistres à 100%	70
ii. Formalisation	70
Une seule simulation :	70
Pour M simulation :	71
<b>G. Résultats</b>	<b>71</b>
1. Pour le seuil <b>S1 = 1,500,000</b>	72
i. Distribution des polices à la part de la cédante uniforme	72
ii. Distribution des polices proportionnelle à la part de la cédante	74
2. Pour le seuil <b>S1 = 1,800,000</b>	76
3. Pour les seuils <b>2,000,000 , 3,000,000 , 4,500,000</b>	77
4. Fit des sinistres FGU	77
5. Pour le seuil <b>S1 = 1,500,000</b>	78
<b>H. Problème de seuil : on va descendre à S1 = 1,400,000</b>	<b>80</b>
1. Le nombre de sinistre pour le nouveau seuil <b>S1 *</b>	80
1. Les paramètres de la simulation des sinistres à la part pour le nouveau seuil <b>S1 *</b>	83
2. Résultats de la simulation avec le nouveau seuil <b>S1 *</b>	83
<b>I. Les portefeuilles 2010 et 2011</b>	<b>85</b>
1. Portefeuille 2010 :	85
2. Portefeuille 2011 :	86
<b>I. Conclusion</b>	<b>87</b>
1. La fréquence :	87
2. La sévérité :	88
<b>K. Simulation sur le portefeuille de 2012</b>	<b>88</b>
1. L'idée	88
2. La clause de stabilisation	90
<b>L. Résultats et comparaison avec les données d'avant</b>	<b>90</b>
1. Résultats de la prime pure	91
1. Ecart type	93
2. Conclusion	93
<b>V. Conclusion Générale</b>	<b>94</b>
<b>VI. Bibliographie</b>	<b>95</b>
<b>VII. Annexe : Définition des lois</b>	<b>96</b>

## I. Introduction

Il faut remonter au 14<sup>ème</sup> siècle pour voir apparaître les premiers contrats de réassurance, lorsque les transferts de marchandises transcontinentaux s'effectuent par voie maritime.

Dès lors, de nombreuses compagnies spécialisées dans la réassurance ont vu le jour et couvrent toutes les branches et tout le marché de l'assurance mondiale. Au fur et à mesure du développement de ce secteur d'activité, les réassureurs ont dû s'adapter à la nouveauté des problématiques, aux nouvelles méthodes mathématiques et technologiques.

Cependant, le problème majeur du réassureur reste la tarification juste, qui intègre des modèles mathématiques solides et une bonne connaissance du marché.

Dans un premier temps, on a fait le choix de présenter le contexte du travail d'une nouvelle manière de façon à ne pas l'enfermer dans un modèle prédéfini. Il s'agit de parler de la Responsabilité civile, l'environnement actuel de la réassurance, la législation mais aussi s'intéresser à la chaîne de production de la réassurance à savoir les souscripteurs, les gestionnaires du risque, les risk-managers en passant par la comptabilité technique. Voulant une entrée en matière dépersonnalisée qui peut faire l'objet d'un article argumenté par plusieurs entretiens sur le terrain et qui donne une vision macro-économique de l'activité de la réassurance sans pour autant perdre notre objectivité.

Dans la deuxième partie, on va introduire notre champ d'intervention c'est-à-dire la tarification d'une tranche d'un programme de réassurance en Responsabilité Civile Générale pour les entreprises. Dans cette partie, on va aussi présenter les données de notre portefeuille avec le profil du risque correspondant et les sinistres observés. Il sera ainsi question de faire le lien entre le montant des sinistres à la part de la cédante et le montant à 100% du sinistre, c'est-à-dire le montant communiqué par l'assuré à la cédante directement.

La troisième partie consistera à faire le point autour des méthodes déjà existantes pour la tarification des traités en réassurance à savoir la méthode par expérience et la méthode par exposition. La mise en AS IF des données observées, le calcul des *IBNER* et des *IBNR* consisteront des étapes importantes à traiter avant le calcul de la prime pure pour la méthode d'expérience. Pour la méthode d'exposition on va présenter la méthode « Increased Limit Factors » ou (ILF), et la difficulté de déterminer une distribution de la sévérité individuelle.

La quatrième partie consistera à exhiber notre nouvelle approche de la tarification qui sera un mélange de la méthode par expérience et la méthode par exposition. Après avoir cité les motivations de notre recherche on va proposer un modèle de simulation basé sur Monte Carlo. Ce modèle aura pour objectif l'étude statistique de nos portefeuilles historiques pour en déduire une fréquence et une sévérité. Les éléments estimés vont être la base de la tarification de notre portefeuille actuel.

Malgré la solidité mathématique de notre étude, cette dernière reste une étude statistique sujette à plusieurs hypothèses techniques et pratiques.

## **II. Contexte de l'étude et présentation des données**

### **A. Transatlantic Reinsurance Company**

TransRe est une compagnie de réassurance américaine créée en 1980 et spécialisée uniquement dans les affaires Non-Vie. Avec plus de 4 milliards de dollars (3,5 milliards d'euro) de primes par an et une capitalisation boursière de 22 milliards de dollars, elle occupe le 10<sup>ème</sup> rang mondial des compagnies de réassurance et le 9<sup>ème</sup> rang mondial dans la réassurance Non-Vie. Grâce à sa solidité financière (4,2 milliards de dollars de capital) et sa stratégie à long terme, TransRe est notée triple A par les différentes agences de notation.

La maison mère de TransRe se situe à New York, et possède des succursales et des filiales partout dans le monde. Elle offre une panoplie de produits de réassurance entre traités et facultatives.

### **B. La réassurance**

La réassurance par définition est l'assurance des compagnies d'assurance. C'est une transaction financière impliquant principalement un transfert de risque (cession) d'une compagnie d'assurance (la cédante) vers une compagnie de réassurance en contrepartie d'un échange de prime de réassurance.

Il existe deux formes principales de réassurance pour les traités, la réassurance proportionnelle et la réassurance non proportionnelle.

#### **1. L'esprit de la réassurance**

La réassurance présente bien des avantages aux cédantes. Le moteur principal reste le transfert de risque, et par conséquent une augmentation de la capacité de souscription. En effet, les cédantes peuvent parfois accepter de souscrire des affaires qui dépassent leur solidité financière, et pour accepter la totalité des risques, elles cherchent à souscrire des contrats de réassurance.

La réassurance offre aussi à l'assureur la possibilité de diversifier son portefeuille de risque, et se couvrir contre les conséquences d'événements extrêmes, notamment les catastrophes naturelles telles que les inondations.

Même si la réassurance diminue le risque technique qui pèse sur l'assurance, elle introduit un risque de contrepartie, celui de la défaillance de la compagnie réassurance.

## 2. Les formes non-proportionnelles

En réassurance non-proportionnelle on trouve une grande catégorie de couverture :

1) L'excédent de sinistres :

L'une des protections les plus utilisées en réassurance non-proportionnelle est « *XS par sinistre* ». Le réassureur prend en charge les montants de sinistres de la cédante à partir d'une franchise appelé *Priorité D*, jusqu'à hauteur d'une limite, noté *L*. *C* la capacité, est le montant maximal couvert par le réassureur  $C = L - D$ .

La convention pour nommer la tranche est *C XS D*

L'engagement de la réassurance est  $Min(C ; Max(0 ; X - D))$  avec *X* le sinistre *FGU*.

2) L'excédent par Risque :

L'*XS Par Risque* est lié à la survenance d'un sinistre sur un seul risque du portefeuille, par exemple une seule police.

3) *XS* par événement :

Est lié à la survenance d'un événement de même cause sur plusieurs risques réputés non indépendants dans le portefeuille de l'assureur

4) *XS Clash* :

Quand le réassureur est confronté à une accumulation non anticipée de sinistres, l'*XS Clash* est lié à la survenance de même origine sur plusieurs risques, pourtant réputés indépendants du portefeuille de l'assureur.

## 3. Les Facultatives

Contrairement aux traités qui sont des couvertures sur des portefeuilles, les facultatives constituent des couvertures spécifiques pour des risques particuliers. Elles traitent au cas par cas sans mutualisation des risques.

Les facultatives sont applicables à toutes lignes de produits et touchent généralement des branches qui impliquent d'importants capitaux. On peut trouver ce type de couvertures en réassurance proportionnelle (*Quote Part*) mais aussi en réassurance non-proportionnelle.

Les cédantes ont recours aux facultatives pour plusieurs raisons :

1) une limitation de capacité dans ses traités.

2) par type d'activité, par exemple sur les risques les plus sensibles en dommage : pétrochimie, industries du bois et textiles.

3) pour quelques activités exclues dans les traités par exemple la couverture des mines souterraines.

Une nouvelle tendance commence à se dégager sur ce marché, ce sont les Spot-FAC. Pour protéger leurs traités, des grands acteurs du marché en risque industriel cèdent en FAC des usines au cas par cas d'un programme global ne remplissant pas leurs standards de niveau de protection. La même procédure s'applique parfois au titre d'une garantie spécifique par exemple tremblement de terre.

Malgré une souplesse dans les contrats en facultatives, ces dernières ne représentent qu'une part minimale dans le marché de la réassurance, elles sont considérées actuellement par les cédantes comme une charge financière plutôt qu'une couverture.

#### 4. Méthodes de tarification en réassurance

L'Approche par la fréquence et la sévérité :

Cette approche représente clairement la réalité des risques analysés. On peut déterminer de la prime pure en multipliant l'espérance de la fréquence et d'un calcul d'intégrale sur la distribution de sévérité.

Soit  $N$  la variable aléatoire de la fréquence,  $C$  et  $D$  respectivement la capacité et la priorité d'un traité en  $XS$  par Sinistre.  $N$  et  $X$  sont deux variables aléatoires indépendantes. Avec un  $AAD = 0$  et un  $AAL = +\infty$ , donc :

$$PP = E(N) * \int_D^{C+D} (1 - F_X(x)) dx \quad \text{avec } F \text{ la fonction de répartition de la sévérité.}$$

Cette modélisation garantit également la cohérence des primes pures entre les tranches de réassurance de hauteur et d'amplitude différentes. Et enfin, elle donne la possibilité de construire une distribution des sinistres à la charge de la réassurance.

Méthode par expérience :

Cette méthode est aussi appelée Méthode Burning Cost basée sur la sinistralité observée dans le passé comme reflet du comportement du portefeuille. D'un point de vue statistique, il s'agit simplement d'une approche par la méthode des moments.

Elle présente deux étapes :

- Mise en place d'une statistique AS IF.
- Cotation relative en pourcentage d'une assiette contractuellement définie.

Méthode par exposition :

Au lieu d'estimer le tarif de l'*XS* sur la base unique des sinistres, on va essayer de le faire sur la base du portefeuille qui les génère (détail des sommes assurées, nombre de polices par tranches des capitaux...)

La fonction d'exposition représente la probabilité pour qu'un sinistre coûte moins de  $x\%$  de la somme assurée.

Et la prime pure :  $P_{pure} = F_{exposition} \left( \frac{\text{priorité de l}'XS}{\text{capitaux exposés}} \right) * \text{Prime directe nette de chargement}$

## 5. Réassurance

On s'intéresse aux traités non-proportionnels de réassurance en Responsabilité Civile Générale pour les Entreprises en *XS* sinistre. Le réassureur s'engage à payer dans une période déterminée, un montant inférieur ou égal à la portée, à chaque fois qu'une police est sinistrée, pour un montant supérieur à la franchise (la priorité *D*).

La prime de réassurance est souvent exprimée en taux de l'assiette de la prime d'assurance. Le taux peut être fixe ou variable.

## 6. Clause de limitation

Une tranche *XS* peut être assortie de clauses supplémentaires de la limitation d'engagement. Les plus courantes sont les suivantes:

-Une clause de la limitation annuelle notée *AAL (Annual Aggregate Limit)* dans l'année, le réassureur ne paiera jamais plus que ce montant.

-Une Clause de franchise annuelle notée *AAD (Annual Aggregate Deductible)*, le réassureur ne commencera à prendre en charge les sinistres que lorsque la charge annuelle à la tranche dépassera ce montant.

-Des clauses de reconstitution de capacité, gratuites ou payantes: lorsque la portée *C* est consommée, le réassureur mettra à disposition une autre portée *C* (gratuite ou payante) et ainsi de suite selon le nombre de reconstitutions définies aux traités. Ce nombre de reconstitutions peut être illimité ce qui est l'habitude en RC. Si la couverture est illimitée, les reconstitutions sont illimitées.

- Clause de stabilisation exprime la volonté de la cédante et du réassureur de conserver dans le partage des sinistres, les proportions qu'il aurait eu sans inflation sur le coût des sinistres : le but de la clause est de répartir entre l'assureur et le réassureur la charge supplémentaire générée lors du développement du sinistre par l'inflation (réajuster la portée et la priorité au fur et à mesure des années du développement des sinistres). On utilise alors des clauses de stabilisation avec seuil.

En réalité, on convient souvent contractuellement que le réassureur prenne une part de l'inflation plus importante que l'assureur. Pour ce faire, on choisit :

- 1) de prendre en considération l'inflation que si elle atteint un seuil déterminé contractuellement *Seuil Atteint* ou *Full Index Clause (FIC)*.
- 2) de prendre qu'une part de l'inflation dépassant un seuil contractuellement défini ; *Seuil Déduit* ou *Severe Inflation Clause (SIC)*.

Explication :

Soit  $I_j$  l'indice de l'inflation réelle de l'année j ou l'indice de référence.

Soit V le Seuil Atteint et R le Seuil Déduit.

Et le  $I_j^*$  le taux pris en compte dans l'année j (qui satisfait la clause de stabilisation).

Pour la clause FIC : 
$$I_j^* = \text{Min}(100(1 + V); I_j)$$

Pour la clause SIC : 
$$I_j^* = \text{Max}(100(1 + R); I_j)$$

### *i. Exemple*

Année	2005	2006	2007	2008	2009
Incidé de l'inflation réelle	100	109	118	127	136
Seuil Atteint à 10%	100	100	118	127	136
Seuil Déduit à 20%	120	120	120	127	136

Ce taux  $I_j^*$  va être multiplié chaque année par la portée et la priorité pour réajuster le traité à l'inflation.

La clause de stabilisation s'accompagne fréquemment d'une clause d'indexation. La clause d'indexation a pour but de conserver aux bornes du traité leur niveau par rapport aux sinistres potentiels pour des exercices de survenance successifs alors que la clause de stabilisation a pour but de partager les conséquences de l'inflation dans un traité à bornes fixes pour un exercice donné.

### **Complément d'explication**

Le but de la clause de stabilisation est de conserver dans le partage du sinistre les proportions qu'il y a aurait eu sans inflation économique.

Notation :

Soit  $I_n$  l'indice de l'année n (l'année de règlement).

Soit  $I_0$  l'indice de l'année 0 (l'année de survenance).

Soit  $S_n$  le paiement effectué à l'année  $n$ .

On obtient le paiement théorique en valeur d'origine en concluant  $S_0$  tel que :  $S_0 = S_n \left(\frac{I_0}{I_n}\right)$

Soit  $S$  la somme des paiements réels effectués ( $S$  est la valeur totale du sinistre sans tenir compte de la clause).

Soit  $S_0$  la somme des paiements théoriques, c'est-à-dire la valeur totale du sinistre théorique et qui n'ont pas subi l'inflation économique après leur survenance.

On considère un traité  $XS$  par sinistre du type *illimité XS D avec  $S > F$*  :

Sans clause de stabilité : La charge de l'assureur= $D$  et la charge du réassureur= $S - F$

Avec la clause de stabilité : la charge de l'assureur  $S\left(\frac{F}{S_0}\right)$  et la charge du réassureur= $S(S_0 - F)/S_0$

## *ii. La corrélation entre la prime pure d'un traité en XS sinistres et l'AAL et l'AAD (approche probabiliste)*

Un portefeuille de réassurance est caractérisé par deux composantes, le nombre de sinistres par année appelé fréquence (notée  $N$ ), et le coût de chaque sinistres individuel appelé sévérité ( $X_i$  étant le  $i$ ème sinistre).  $N$  et  $X_i$  sont deux variables aléatoire considérées comme indépendantes. Le montants de sinistres  $X_i$  sont eux considérés indépendants et identiquement distribués.

Les lois de  $N$  et de  $X_i$  sont déterminées à partir d'un seuil  $S_0$  (choisi au cours de la tarification technique), car on réassurance on s'intéresse principalement aux gros sinistres.

Le calcul de la prime pure est directement déduit des distributions de fréquence et de sévérité avec:

- $S_0$  le seuil fixé.

- $N_{/S_0}$  le nombre annuel de sinistres supérieur à  $S_0$ .

- $X_{/S_0}$  la sévérité des sinistres individuels compris dans l'intervalle  $[X_0, +\infty[$ .

Par définition la fonction de distribution vaut pour tout  $x \in [S_0, +\infty[$  :

$$F_{X_{/S_0}}(x) = \frac{F_X(x) - F_X(S_0)}{1 - F_X(X_0)}$$

Avec  $F_X$  la fonction de distribution de la variable aléatoire du montant de sinistre individuel à la base  $X$ .

Si on note  $Y$ , la charge de sinistre à la tranche  $C XS D$ , elle peut alors s'écrire de la manière suivante:

$$Y = \text{Min}[C, \text{Max}(0, X_{i/S_0} - D)]$$

Et  $Z$  la variable aléatoire associée à la sinistralité annuelle dans la tranche avant application des clauses de limitation annuelle  $AAD$  et  $AAL$  :

$$Z = \sum_{i=1}^{N/S_0} Y_i = \sum_{i=1}^{N/S_0} \text{Min}[C, \text{Max}(0, X_{i/S_0} - D)]$$

Et  $Z'$  la sinistralité annuelle après clauses annuelles :

$$z' = \text{Min}[AAL, \text{Max}(0, Z - AAD)]$$

### iii. La prime pure d'un contrat en excédent de sinistres

-Si on considère sans un premier temps que le traité ne comporte pas de clause de limitation annuelle ( $AAD = 0$  et  $AAL = +\infty$ ), la prime pure  $PP$  vaut :

$$PP = E(Z) = E(N) * \int_D^{C+D} (1 - F_X(x)) dx$$

-Si où le traité comporte une clause de limitation annuelle ( $AAD > 0$  et  $AAL < +\infty$ ) :

$$PP = E(Z') = E(\text{Min}[AAL, \text{Max}(0, Z - AAD)]) = \int_{AAD}^{AAD+AAL} (1 - F_Z(x)) dx$$

## 7. Les sinistres à développement long

Les sinistres qui intéressent la réassurance non proportionnelle sont ceux dont le montant est suffisamment important pour que la cédante juge prudent, voir salutaire, de les écrêter.

En responsabilité civile (RC), ce type de grands sinistres se règle souvent en un temps très long. De plus, ils sont liés à des préjudices dont le cout de la réparation est difficile à évaluer.

Ainsi, entre la survenance (ou la déclaration, ou le fait générateur...) du sinistre et son règlement complet, de nombreuses années peuvent passer.

Les sinistres payés, en suspens,  $IBNR$ , et  $IBNER$  :

Ces notions sont centrales dans l'explication du montant de sinistres à développement long.

### i. Les sinistres Payés (SP ou Paid Loss) et les Provisions Restant à Payer

Lorsqu'un sinistre est déclaré à une compagnie d'Assurance, cette dernière a tout intérêt à appréhender au plus juste les conséquences qui en résulteront.

La compagnie constitue ainsi un dossier sinistre, dans lequel elle consigne tous les éléments utiles à décrire le sinistres que son assuré vient de subir. Une composante importante de cette description est l'évaluation pécuniaire du sinistre.

Pour les sinistres à développement long, la première évaluation est rendue difficilement puisque le montant dû lui sera payé le plus souvent en plusieurs fois et sur une longue période.

Pour faciliter l'analyse du montant de sinistre, l'assureur sépare donc la part payée (connue) et la part restant à payer. Avec le temps, l'évaluation s'affinera.

Dans la réalité, l'évaluation initiale n'est pratiquement jamais exactement égale à la somme de tous paiements. Ainsi, l'évaluation totale du sinistre, c'est-à-dire la somme des parts de sinistres payée et en suspens évolue au cours du temps.

#### *i. Sinistres IBNER (Incurred But not Enough Reserved)*

À la clôture d'un exercice, la somme de tous les sinistres payés et des sinistres rattachés dans une période donnée ne sera donc qu'une estimation imparfaite de l'évaluation finale (ultime) de ces sinistres.

On définit les IBNER qu'on pourrait traduire par « sinistres survenus mais sous-provisionnés » comme la différence entre le montant ultime des sinistres rattachés et observables dans la période étudiée et le montant courant de leur évaluation (Payés + Suspens).

#### *ii. Sinistres IBNR (Incurred But Not Reported)*

Lorsqu'on observe les sinistres survenus dans une période donnée, on n'observe que les sinistres survenus dans la période et ouverts avant le moment de l'observation.

Il convient donc de définir un terme, les IBNR qui représente le montant des sinistres survenus dans la période de référence mais non encore observable.

### **C. Chaîne de production**

Il nous paraît indispensable de faire un rappel sur le corps de l'activité. Cela nous permettra par la suite de se situer dans une structure de réassurance et de faire le lien entre le démarrage d'un processus de tarification jusqu'à l'échéance des contrats. Nous voulons que ces paragraphes offrent une vision

schématique et globale afin de cerner au mieux les enjeux, les contraintes et les paramètres d'ajustements.

## **1. Le souscripteur**

D'après Corinne Hepner-Brafman souscriptrice en Responsabilité Civile lors de notre entretien le 08/04/2013 : « Un souscripteur en réassurance est un mélange de technique-commercial et un gestionnaire de risque ».

C'est le principal interlocuteur entre la compagnie de réassurance et les clients (courtiers ou clients directs). Il s'occupe de toutes les démarches commerciales et administratives, mais aussi des négociations qui peuvent avoir lieu pour conclure les traités.

Il dispose d'un « guide de souscription » qui reflète la politique de l'entreprise dans les choix des risques à supporter, les capacités ou les priorités à ne pas dépasser.

Il est amené à réaliser une analyse de risque des traités, c'est-à-dire la tendance des portefeuilles, la sinistralité et la politique de souscription.

En collaboration avec les actuaires et le service sinistre, le souscripteur demeure informé de l'augmentation des sinistres dans le temps et par conséquent, l'augmentation des primes.

## **2. Le Risk Manager**

Il couvre tous les aspects des activités de l'entreprise, son objectif est de faire un état des lieux général afin d'offrir une vision globale. Il réalise des audits internes pour :

- S'assurer du respect de la norme.
- Imaginer les cas extrêmes tels que les risques terroristes.
- un travail de coordination entre tous les départements de l'entité et les autres entités du groupe.

## **3. Gestionnaire de sinistre**

Le gestionnaire de sinistres intervient généralement dans un second temps, après les actuaires et les souscripteurs. Il reçoit les avis de sinistres des courtiers ou des clients directs, et procède par la suite à une vérification afin de savoir si les sinistres rentrent dans les termes de chaque contrat en vue de réaliser des rapports de paiement. De manière générale, il gère toute la vie d'un sinistre dans les termes du contrat correspondant.

Le gestionnaire du risque participe à la vie d'un contrat par le calcul des primes de reconstitution qui est un renouvellement de la garantie si le client a consommé tout son traité.

Il calcule aussi les « *AAD* » (annual Aggregate deductible) sur le total de la charge de la réassurance. C'est un moyen pour limiter le risque en posant une franchise supplémentaire (contractuelle) sur les montants à payer. On cumule le montant de sinistres à payer et on en déduit la « *AAD* ».

Le « *AAL* » (Annual Aggregate Limit) sur les montants payés par la réassurance. Le principe reste le même que pour l'*AAD* à savoir limiter les risques, mais sous une autre forme. Après avoir cumulé tous les sinistres à payer, on ne paye que ce qui est inférieur à la « *AAL* ». La charge au-delà de la « *AAL* » reste à la charge de la cédante.

#### 4. L'Actuaire

Il reste le moteur principal des activités des compagnies d'assurance et de réassurance. A l'aide de ses modèles mathématiques, il assure la création et la tarification des produits de l'industrie. Il s'occupe du pilotage technique des projets en garantissant le respect des normes et de la déontologie. Il réalise des études de rentabilité et constitue des réserves pour tous les contrats souscrits.

En réassurance, l'actuaire joue un rôle conséquent dans la création du budget et dans ses choix des méthodes de tarifications des contrats. C'est un soutien nécessaire à la souscription et la direction. Il est amené à s'adapter et se remettre en cause continuellement concernant ses calculs pour les ajuster aux nouvelles dispositions du marché ainsi qu'à la conjoncture.

#### 5. Comptabilité

Le service comptabilité technique réalise les écritures comptables relatives aux encaissements de primes et aux paiements de sinistres. Il est aussi en charge du calcul des provisions comptables.

Le service comptabilité générale gère toute la comptabilité relative aux frais de fonctionnement de la succursale (rémunération des employés, prise en charges des voyages d'affaire, loyer et entretien des locaux...).

#### 6. Le courtage

Le courtage est destiné à rémunérer l'intermédiaire de réassurance, il s'exprime en pourcentage de la prime payée par la cédante.

Si le courtage est de 5%, alors le réassureur :

-récupérera 95% de la prime pour payer ses frais, les sinistres et générer des profits.

-versera 5% de la prime au courtier intermédiaire.

### D. Le contexte actuel de la réassurance

Prisonnière de son caractère cyclique, la réassurance est en évolution permanente. Le marché devient de plus en plus en surabondance de capacité, par conséquent le monde de la réassurance doit s'adapter. D'après Pascal Bonhoure souscripteur dommage en facultative, lors de notre entretien le 19/04/2013 : « les entreprises s'adaptent ou disparaissent ».

Le monde de la réassurance s'est modifié en termes de qualité et de quantité, il en découle un marché avec une assez forte concentration.

Cela est dû en partie à un appétit d'acquisition des petits, à l'image de plusieurs compagnies qui depuis quelques années sont sur un rythme effréné d'acquisition absorbant toutes les petites structures.

L'autre raison principale est que l'on dispose de plus en plus de concentration industrielle par périmètre et par secteur d'activité, par conséquent les besoins de capitaux sont importants. Les marchés apportent des capitaux à travers des Cat.Bound intéressant des acteurs en dehors de la réassurance et non corrélés à tous les risques de la réassurance ex : placement des fonds de pension. Le Capital Market apporte aussi des solutions comme la titrisation avec des prix qui rivalisent avec la réassurance mais des frais exorbitants.

Par conséquent, le marché se retrouve avec un déséquilibre entre la surface financière de la réassurance et les risques couverts.

Tous ces éléments aspirent à une nouvelle manière de concevoir l'activité de la réassurance. D'une part les cessions et les acceptations d'autre part :

Les grands groupes d'assurance sont devenus très sophistiqués et innovateurs, commencent de plus en plus à accorder de l'importance au problème de l'optimisation de la cession. Forts de leur solidité financière, ils n'hésitent pas à investir au sein de leur groupe dans des équipes spécialisées dans l'optimisation de la rétrocession. Leurs défis résident dans la construction d'une réassurance intelligente en vue d'un gain maximum de leur portefeuille.

Dans ce contexte concurrentiel inédit entre la technicité de l'assureur et du réassureur, on va avoir de moins en moins de cession, ainsi que de moins en moins de réassurance proportionnelle. D'après Dominique Lemonnier souscripteur manger : « On va demander à la réassurance de prendre des risques » d'après notre entretien le 10/05/2013.

La réassurance sous ses formes traditionnelles est susceptible de disparaître, ce changement est accru avec l'annonce de solvabilité 2. L'une des premières manifestations de ce changement est que les groupes demandent de plus en plus des Aggregate XL et des Clash (couvertures si un sinistres affecte toutes les couvertures). A partir de ce moment on crée un problème de tarification et de définition des contrats. D'après Robert Johnston vice-directeur général : « la réassurance non traditionnel est un état d'esprit » lors de notre entretien le 22/04/2013.

La réassurance va beaucoup jouer sur l'arbitrage dans la rétrocession. S'alignant sur l'esprit Anglo-Saxon, elle va devoir réaliser des montages ingénieux pour partager les grands risques supportés et aussi optimiser l'immobilisation du capital.

Ce changement d'attitude des parties prenantes, n'est pas sans répercussion sur les courtiers de réassurance qui participent sur 90% des affaires. Alors que jusqu'à présent il était juste un intermédiaire, le rôle du courtier de réassurance va évoluer vers le conseil.

## E. Responsabilité Civile

### 1. Définition générale

La responsabilité civile est un risque à développement long. De ce point de vue, les formes de réassurance proportionnelle ne permettent pas à l'assureur de limiter son engagement sur un risque. Seul un traité en Excédent de sinistre garantit cette limitation. C'est pour cette raison que l'XS est la forme principale de la réassurance de la responsabilité civile, de plus l'XS représente des frais de gestions faibles pour l'assureur. Par contre pour le réassureur, les recettes sont faibles et le risque est important. Il en résulte un vrai problème de tarification et surtout de méthodes de tarification, la méthode par exposition ? La méthode par expérience ? D'où la motivation principale de ce mémoire qui est de mettre en place une méthode alternative de tarification.

La responsabilité civile prend différentes formes de couvertures.

-la RC générale : l'assurance du dommage causé à autrui

-la RC Vie privé : supplément d'assurance habitation

-la RC générale d'entreprise, c'est sur cette partie qu'on articule les études du mémoire.

-RC médicale : pour les hôpitaux et les médecins pour les fautes professionnelles.

-RC professionnelle : pour les avocats et les architectes.

-RC mandataire sociaux : une couverture des dirigeants des entreprises pour mauvaise décision causant un dommage financier.

Dans ce mémoire en se replaçant du point de vue du réassureur, on travaille sur un portefeuille d'une grande compagnie d'assurance qui traite de la RC d'Entreprise. Transatlatic Re traite avec cette cédante à travers un courtier de réassurance. Ce qui soulève le problème de l'authenticité et la transparence des données fournis à Transatlatic Re en vue de contacter des programmes de réassurance et la tarification de renouvellement des contrats. Une difficulté qui se traduit clairement dans le traitement des données obtenues. Nous consacrerons une grande partie de ce mémoire à expliquer les hypothèses requis pour avoir infime des données exploitables.

## 2. Législation de la RC

Entre la législation européenne et la législation française, les lois relatives à la responsabilité restent diverses et variées. Soit en consultant [www.legifrance.gouv.fr](http://www.legifrance.gouv.fr) pour la France ou [www.europa.eu](http://www.europa.eu) pour l'union européenne.

Cependant, on estime nécessaire de faire un bref rappel sur les principes et les lois les plus sollicités en assurance.

### *i. Principe*

En France selon l'article L121-1 et l'arrêté 98, l'assurance de responsabilité civile suit le principe fondamental : le principe indemnitaire, c'est-à-dire que l'indemnité peut être inférieure au dommage mais en aucun cas supérieure au montant du dommage. Le but est d'éviter les dommages volontaires qui relèvent de la spéculation et des paris.

### *ii. Code civil*

Mais d'abord pour qu'une assurance fasse effet, il faut deux conditions : La première est relative à la responsabilité civile de l'assuré et la seconde à la garantie. Il doit y avoir coïncidence entre la garantie et la responsabilité civile pour que l'assureur soit tenu d'indemniser.

Pour savoir si la responsabilité de l'assurance est engagée il faut se référer au droit introduit par le code civil de la RC délictuelle ou contractuelle. La Responsabilité délictuelle existe entre personnes non liées par un contrat et le contraire est valable pour la RC contractuelle.

La RC délictuelle d'après l'article 1-382 du Code Civil suppose :

- un fait générateur
- un lien de causalité
- et un dommage subit par la victime

Le lien de causalité relie le fait générateur et le dommage. Le fait générateur peut être soit un acte de faire de non faire. L'auteur de la chose est responsable vis-à-vis de la victime et le gardien de la chose celui qui exerce un pouvoir de contrôle et de direction.

Exemple : Le conducteur d'un véhicule est le gardien de ce véhicule.

S'agissant de la RC contractuelle d'après l'article 1 147 du Code Civil qui suppose l'existence d'un contrat entre la victime et l'auteur du dommage.

### *iii. Lois spéciales*

Une des célèbres lois en responsabilité civile est la loi du 5 juillet 1985, dite Loi Badinter. Elle crée un régime spécial d'indemnisation des victimes d'accident de la circulation (c'est une loi spéciale de responsabilité civile- l'assurance responsabilité civile automobile). Elle a pour objectif de faciliter et d'accélérer l'indemnisation des victimes.

La Loi n° 2002-303 du 4 mars 2002 relative aux droits des malades et à la qualité du système de santé (aussi appelée loi Kouchner) traite directement de la responsabilité médicale. Etablissant la notion juridique de droit des malades, elle instaure :

- une meilleure représentation des usagers au sein des grandes institutions de la santé et des hôpitaux.
- le principe d'obligation d'assurance pour les professions de santé.
- le principe de base de la réclamation.
- le droit des patients d'accéder directement (sans passer par un médecin) et de disposer de la totalité de leur dossier médical. Le dossier médical personnel, créé par la loi de 2004, reste la propriété des patients.
- une indemnisation de l'aléa thérapeutique, c'est-à-dire d'un accident médical sans faute du professionnel.

On cite aussi la loi 1998 (article 1-386 du Code Civil) qui est une transposition d'une directive européenne de 1985 sur la responsabilité du fait des produits défectueux.

### *iv. Un aperçu sur la fiscalité des compagnies de réassurance*

#### Principes général

Conformément aux principes de la territorialité de l'impôt sur les sociétés, sont taxables en France les bénéficiaires des entreprises exploitées en France et ceux dont l'imposition est attribuée à la France par une convention internationale relative aux doubles impositions (art. 209-1 du CGI).

La règle générale est qu'une activité de réassurance en France est taxable en France.

En Réassurance le principe est que l'on taxe immédiatement le bénéfice du contrat.

Transatlantic Re Paris est une succursale.

Une succursale est un établissement stable et adhère à la directive de l'OCDE, c'est-à-dire qu'elle est taxée sur le sol du pays où elle pratique son activité.

Cependant lorsqu'une succursale souscrit, c'est en fait la société mère qui s'engage. Par conséquent les impôts payés par la succursale sont déduits de la maison mère.

Par suite, le bénéfice industriel à retenir englobe l'ensemble des profits d'exploitation sous déduction des résultats obtenus par les agences ou succursales établies à l'étranger, quand elles présentent le caractère d'entreprises exploitées hors de France.

#### Particularités

- Assurance et réassurance maritime : lieu d'émission de la police
- Acceptation en réassurance : La loi n° 59-1472 du 28 décembre 1959 a stipulé que sont passibles en France de l'impôt sur les sociétés tous les revenus dont l'imposition lui est attribuée par une convention internationale.

Les résultats des opérations libellées en devises des pays ayant signé de telles conventions avec la France sont donc rattachés au secteur France. Il est entendu que pour que ces règles soient applicables, il est nécessaire que les opérations concernées ne soient pas réalisées par l'intermédiaire d'un établissement stable à l'étranger, ou d'un représentant, à l'exception éventuellement d'un simple représentant accrédité auprès des administrations locales dont l'activité soit suffisante pour caractériser l'exercice d'une activité commerciale habituelle.

Les principales taxes ou exonérations touchant directement les réassurances sont :

- Les plus-values de l'Actif c'est-à-dire le cash investi pour couvrir les réserves du Passif, sont taxés dans les comptes en fin d'année.
- Les dotations aux réserves sont déductible des bénéfices.
- En France, il existe une taxe de 7% sur les réserves de capital, qui est une taxe sur les plus-values d'une obligation avant l'échéance sur les réserves financières. Ces réserves apparaissent dans les comptes et non pas sur les résultats.
- La réserve d'égalisation qui représente un manque à gagner pour les actionnaires, représente pour la réassurance une opportunité pour réduire son imposition. Mais une réserve qui reste strictement encadrée par les autorités de tutelle.
- L'année des élections de François Hollande, il avait instauré une EXITAX en une seule fois appliquée sur le stock de capital non utilisé depuis 2010.

D'après la fiscaliste de TransRe : « Quand on lance un produit on est toujours soumis à des risques fiscaux » lors de notre entretien le 03/05/2013.

## F. Présentation de données

### 1) Périmètre :

Un portefeuille de Responsabilité Civile générale pour les entreprises. Un portefeuille avec un profil spécifique à la cédante.

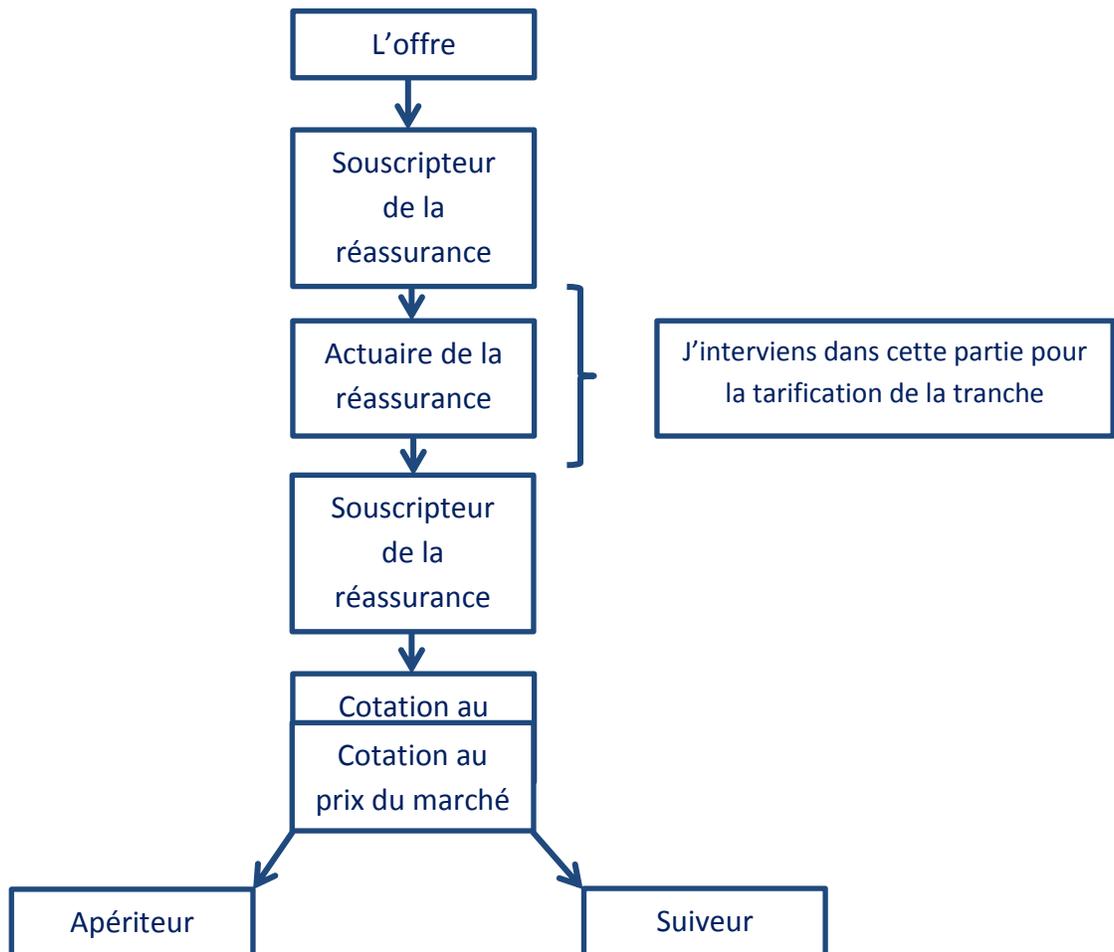
### 2) Excédent de sinistre :

Ce portefeuille va être réassuré sous forme de Excédant de sinistre (XS non-proportionnel).

### 3) Objet de l'étude :

Tarification d'un programme de réassurance en XS 25 Millions.

### Procédure de décision pour le réassureur :



Apériteur est celui qui a la meilleure cotation, et par conséquent c'est celui qui va imposer les conditions. On l'appelle aussi le LEADER.

Le suiveur est celui qui va se soumettre aux conditions de l'apérateur.

#### Explication complémentaire :

L'assureur possède plusieurs portefeuilles dans une branche d'assurance. En fonction de sa capacité à supporter les risques, il va céder une partie aux réassureurs sous forme de programme de réassurance.

Le programme de réassurance est l'ensemble des risques d'un ou plusieurs portefeuilles de la cédante, cédé sur le marché de la réassurance. Les réassureurs vont se répartir ce programme en tranches (selon la capacité financière de chaque réassureur). Ils vont élaborer un prix à partir duquel ils sont prêts à couvrir leurs tranches. C'est le processus de tarification.

Vient par la suite la période de négociations entre la cédante, le courtier et les réassureurs pour déterminer un prix final qui, après l'accord de tous les protagonistes, va donner naissance aux traités de réassurance (effet de la concurrence).

Le traité est le contrat juridique et technique qui va lier le destin de l'assureur à celui du réassureur pendant la durée de couverture comportant des conditions spécifiques et des conditions générales.

### **1. Données de la cédantes**

#### *i. Présentation des données du portefeuille*

#### Le profil de risque du portefeuille :

Les données du portefeuille de chaque année sont présentées de la manière suivante (un exemple d'une petite partie d'un portefeuille):

Numero de programme	Assuré	Secteur d'activité	Cover form	Policy Rank	Cover	date du debut du contrat	date de la fin du contrat	Priorité	Prime totale @ 100%	Limite @ 100%	Prime à la part de la cédante	Limite à la part de la cédante	Le taux de retention
29	BB	Chemical	G	1	Produit	01/01/2009	01/01/2010	0	33,864	33,042,560	33,864	33,042,560	100%
63	FF	Engine cons	P	1	Produit	01/04/2009	01/04/2010	14184398	2676951	21276597	1338475	10638299	50%
63	FF	Engine cons	L	2	Produit	01/04/2009	01/04/2010	35460995	45075	35460955	3155318291	24922697	70%
63	FF	Engine cons	L	3	Produit	01/04/2009	01/04/2010	70921990	18291	35460955	18291	35460995	100%

-L'assuré : l'assuré au sens de l'assurance directe.

Pour les couvertures on peut avoir : Environmental, Professional Indemnity, Employer. Ou un mélange des couvertures, par exemple : Public / Products / Environmental.

-Cover Form : pour signaler si la tranche est une police locale c'est-à-dire une Primary ou bien une police Master c'est-à-dire qui chapote plusieurs contrats. Ces deux notions vont être expliquées dans le paragraphe suivant.

Donc chaque tranche de programme est représenté par : *Limite à 100% XS Priorité.*

-Prime à 100% : la prime d'assurance payée par l'assuré à l'assureur.

-le taux de rétention : le pourcentage pris en charge par la cédante.

-Prime à la part de la cédante: Prime 100% \*le taux de rétention, c'est la prime encaissée par la cédante. C'est la prime à la part de la cédante.

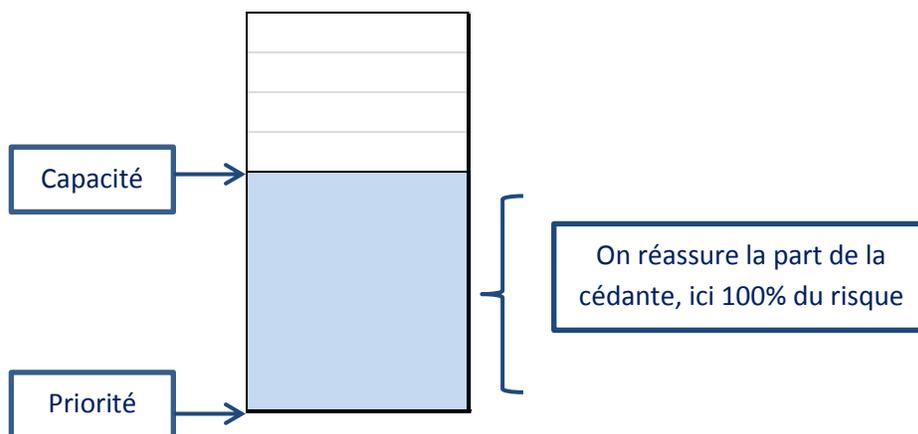
-Limite à la part : Limite à 100%\*le taux de rétention, c'est la limite prise en charge par la cédante.

Le principe des programmes consiste à ce que chaque entreprise va s'assurer sur le marché de l'assurance directe. Sachant que les risques sont importants, ils vont être partagés par différentes compagnies, c'est le principe de la coassurance. Par exemple une entreprise **X** va émettre ses risques sur le marché, trois assureurs (A, B, C) vont prendre chacun une portion, la compagnie **A** va prendre 20%, **B** va prendre 35% et **C** va prendre 30% (selon la capacité financière de chaque compagnie d'assurance et l'effet de la concurrence).

TransRe va réassurer uniquement la partie à la charge de sa cédante. Par exemple, Si la cédante est la compagnie A, TransRe va réassurer juste les 20% du risque ou une partie de ces 20% du risque (en fonction du taux de rétention de la cédante).

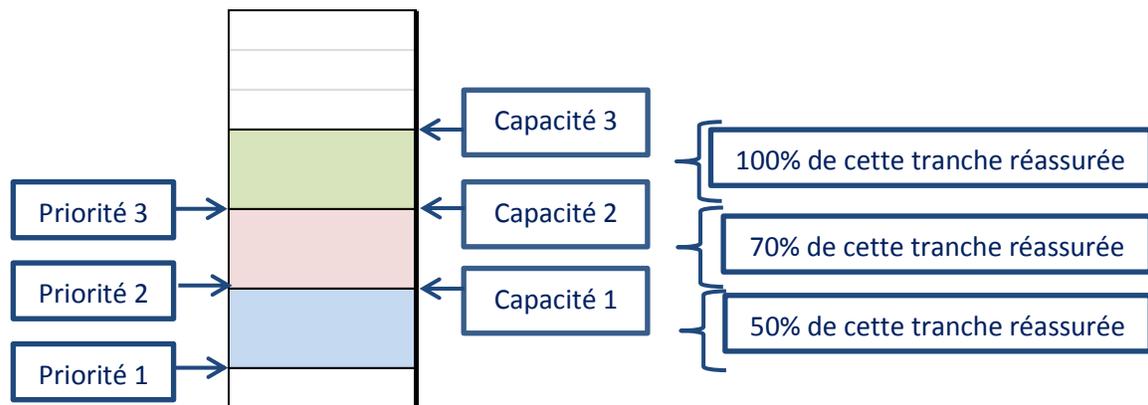
On a des polices locales sous forme d'une seule tranche qu'on appelle PRIMARY, par exemple :

Numero de programme	Assuré	Secteur d'activité	Cover form	Policy Rank	Cover	date du debut du contrat	date de la fin du contrat	Priorité	Prime totale @ 100%	Limite @ 100%	Prime à la part de la cédante	Limite à la part de la cédante	Le taux de rétention
29	BB	Chemical	G	1	Produit	01/01/2009	01/01/2010	0	33,864	33,042,560	33,864	33,042,560	100%

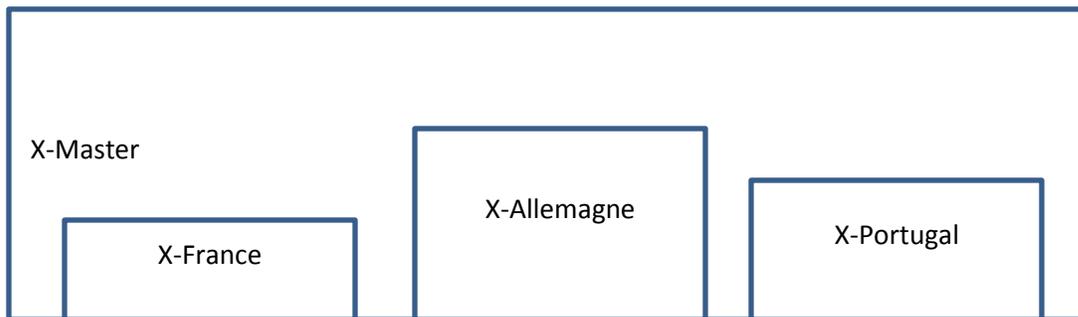


On a aussi des tranches XS par exemple :

Numero de programme	Assuré	Secteur d'activité	Cover form	Policy Rank	Cover	date du debut du	date de la fin du contra	Priorité	Prime totale @ 100%	Limite @ 100%	Prime à la part de la cédante	Limite à la part de la cédante	Le taux de retention
63	FF	Engine cons	P	1	Produ	#####	#####	1E+07	2,676,951	21,276,597	1,338,475	10,638,299	50%
63	FF	Engine cons	L	2	Produ	#####	#####	4E+07	45,075	35,460,955	3,155,318,291	24,922,697	70%
63	FF	Engine cons	L	3	Produ	#####	#####	7E+07	18,291	35,460,955	18,291	35,460,995	100%



Cependant, un contrat peut avoir plusieurs couvertures et plusieurs programmes selon la branche. Exemple : une compagnie X, va avoir plusieurs programme XS par sinistres pour ses différentes filières (X France, X Allemagne) appelées Primary ou Polices locales et on va avoir des polices qui vont venir chapoter toutes les autres traités appelés Master.



Les déclarations de sinistre des courtiers et des cédantes pour la compagnie X ne précisent pas laquelle des polices est touchées. Est-ce X-France ? Est-ce X-Allemagne ? Est-ce les deux en même temps ?...etc.

On travaille sur les portefeuilles de 2008 jusqu'au portefeuille 2012, car ce sont les seuls dont on dispose.

## ii. Les données des sinistres

On dispose d'un fichier où tous les sinistres sont recensés par années de développement. Mais aussi par année de survenance. En voilà un exemple :

Loss	AY		2007	2008	2009	2010	2011	2012
XXXXXXXX	2010	Paid				276	619	698
XXXXXXXX		O/S				1,404	1,061	983

Ce sont les données du développement du sinistre pour un contrat du portefeuille de 2010 pour l'assuré XXXXXX. Les Paid sont les montants déjà payés, et *O/S* sont les montants en suspens. Pour avoir le sinistre total à la part de la cédante, il faut se placer à la dernière année du développement et faire la somme du Paid et l'*O/S* correspondant. Ici par exemple, on se place en 2012 et on a le sinistre à la part de la cédante et qui a touché le police de l'assuré XXXX est  $698+983=1681$ .

Il faut savoir que les informations obtenues par la cédante concernant les sinistres à sa part, ne représentent que les sinistres dépassant un certain seuil. Du moment que les sinistres qui affectent le portefeuille de la cédante sont inférieurs à ce seuil, ils ne sont pas déclarés par l'assureur à la réassurance.

### Les portefeuilles et les données des sinistres utilisés pour la tarification:

Pour notre tarification, on prendre les portefeuilles historiques depuis 2008 jusqu'au portefeuille de 2012, et les données de sinistres observés de 2005-2012 car on remarque une certaine stabilité au niveau des montants de sinistres lié à ces 5 dernières années.

### 3. Modèle et lien entre les sinistres et le portefeuille

Soit  $X_{i,k_i}$  les sinistres complets déclarés directement par l'assuré attribué à une police  $k$ .

Soit  $k_i$  = la kème police du portefeuille de l'année  $i$

Soit  $K = \{k_i \dots k_n\}$  l'ensemble des polices de tous les portefeuilles dont on dispose.

$l_{i,k_i,v}$  = la vème limite du programme d'assurance de la cedante

de la police  $k$  du portefeuille  $i$ .

avec  $v = 1 \dots V_{k_i}$  le nombre de tranche dans le programme d'assurance

de la police  $k$  du portefeuille  $i$

$V_{k_i}$  = Dernière tranche dans le programme d'assurance sur la police  $k$  du portefeuille  $i$

$s_{i,k_i,v}$  = la part (ou %) de la cedante sur la tranche  $v$  sur la police  $k$  du portefeuille  $i$

$d_{i,k_i,v}$  = la priorité de la cedante sur la tranche  $v$  sur la police  $k$  du portefeuille  $i$

Les  $l_{i,k_i,v}$ ,  $s_{i,k_i,v}$  et  $d_{i,k_i,v}$  ce sont des variables connues pour chaque police.

Soit  $Y_{i,k_i,v}$  les sinistres à la part de la cédante pour chaque sinistre  $X_{i,k_i}$ .

Soit  $Z_{i,k_i}$  les sinistres à la part de la réassurance pour chaque sinistre  $Z_{i,k_i}$ .

Soit  $X_{i,k_i}$  les sinistres survenus déclarés par l'assuré, ou sinistre complet (FGU) pour le portefeuille de l'année  $i$ . les  $(X_i)_i$  sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées dont la fonction de répartition est inconnue.

Soit  $Y_{i,k_i}$  les sinistres à la part de la cédante qui touche les polices  $k$ , et dont la  $l_{i,k_i,v}$  et  $d_{i,k_i,v}$  la priorité et la capacité lié à la police  $k$ . les  $((Y_{i,k_i})_i)_K$  sont une fonction linéaire des  $((X_{i,k_i})_i)_K$ , par conséquent ils sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées.

$$Y_{i,k_i,v,\infty} = \text{Min}[l_{i,k_i,v}; \text{Max}(0; X_{i,k_i,v} - d_{i,k_i,v})]$$

$$\text{avec } Y_{i,k_i} = \sum_{v=1}^{V_{k_i}} Y_{i,k_i,v}$$

Si on connait la loi de  $(Y_{i,k_i})_i$  on pourra déterminer la loi des  $(X_{i,k_i})_i$  des sinistres FGU.

Le nombre de sinistre pour la cédante de l'année  $i$  est de  $N_i = \sum_{v=1}^{k_i} I_{\{Y_{i,k_i,v} > 0\}}$

Soit  $Z_{i,k_i} = \text{Min}[(Y_{i,k_i} - D)^+; C]$  les sinistres à la part de la réassurance, dont  $D$  et  $C$  la priorité et la capacité du traité de la réassurance ( $C \leq X \leq D$ ). Les  $(Z_{i,k_i})_i$  sont une fonction linéaire des  $(Y_{i,k_i})_i$ , par conséquent ils sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées.

Le nombre des sinistres pour la réassurance de l'année  $i$  est de  $F_i = \sum_{v=1}^{k_i} I_{\{Z_{i,k_i,v} > 0\}}$

Le cout moyen des sinistres pour la réassurance de l'année  $i$  est de  $S_i = \frac{1}{F_i} \sum_{v=1}^{k_i} Z_{i,k_i,v} * I_{\{Z_{i,k_i,v} > 0\}}$

A partir des observés :

Si on a les  $Y_{i,k}$  et une connaissance sur le programme de la police  $k$ , on pourra en déduire les  $X_{i,k}$  c'est-à-dire les sinistres complets observés.

Les observés escomptés :

Soit  $Y_{i,k,j}$  les sinistres à la part de la cédante développés à l'année  $j$ .

Soit  $Y_{i,k,\infty}$  les sinistres à la part de la cédante escomptés.

Avec la méthode LDF, on calcule les sinistres extrapolés à l'ultime (méthode LDF exposé plus loin dans le mémoire).

On ajuste une loi de probabilité sur les  $Y_{i,k,\infty}$  :

$$\mathbb{P}(Y_{i,k,\infty}/Y_{i,k,\infty} > Y_{\min}) \text{ avec } Y_{\min} = \text{Min}[(X_{i,k} - 0,8 * S_{\min})^+ ; (C_{\max})]$$

Où  $S_{\min} = \min \{S_{i,k} \text{ avec } \{k \leq k_i\}\}$  ;  $C_{\min} = \max \{C_{i,k} \text{ avec } \{k \leq k_i\}\}$  , et  $S_{i,k}$  le seuil de déclaration du sinistre.

Estimations des paramètres de la loi de probabilité d'ajustement avec la méthode du maximum de vraisemblance.

Simulation :

**-Sur les portefeuilles historiques**

Pour chaque portefeuille de l'année  $i$ , on va générer des  $Y_{i,k,\infty}$  pour calculer les  $X_{i,k,\infty}$

Et ajuster une loi de probabilité sur les  $X_{i,k,\infty}$  :

$$\mathbb{P}(X_{i,k,\infty} \leq x_{i,k,\infty} / X_{i,k,\infty} > S_2) = \frac{\mathbb{P}(S_1 < X_{i,k,\infty} \leq x_{i,k,\infty})}{\mathbb{P}(X_{i,k,\infty} \geq x_{i,k,\infty})}$$

avec  $S_2$  le seuil à partir duquel on applique le programme d'assurance sur les polices de son portefeuille

L'estimation des paramètres de la loi de probabilité d'ajustement se fait par la méthode du maximum de vraisemblance.

Le seuil  $S_2$  est inconnu, et reste à déterminer.

**-Sur le portefeuille actuel**

On va générer des  $X_{i,k,\infty}$  qui suivent la loi de probabilité ajustée auparavant.

On applique le programme d'assurance pour chaque police pour calculer les nouveaux  $Y_{i,k,\infty}$

Et par la suite le programme de réassurance pour calculer le montant de sinistre à la charge de la réassurance  $Z_{i,k,\infty}$  :

$$Z_{i,k,\infty} = \text{Min}[(Y_{i,k,\infty} - D)^+; C]$$

Pour enfin calculer la prime pure en faisant la moyenne de sinistres à la charge de la réassurance.

### i. Complément

#### Explication de lien entre sinistres et portefeuille

*FGU* signifie « *From Ground Up* » c'est-à-dire au premier euro, sans application de la franchise de la réassurance et l'assurance. Le sinistre *FGU* est le montant du sinistre complet qui a touché l'assuré. Dans ce mémoire, les trois expressions sont équivalentes : le sinistre *FGU*, le sinistre à 100% et le sinistre complet.

Avant de choisir nos échantillons de base, il faudra reproduire nos sinistres à 100%. L'information donnée à la part ne peut établir des renseignements solides sur les portefeuilles. Par conséquent, on essaye d'extraire tous les sinistres répertoriés dans l'année par polices afin de les affecter au programme touché. A partir du moment où nous disposons de tous les sinistres à la part correspondant aux polices touchées, on va reproduire les sinistres *FGU* c'est à dire à les sinistres complets.

#### Exemple de lien entre le sinistre à la part de la cédante et le sinistre complet

numero de programme	Assuré	Numero du secteur d'activité	Secteur d'activité	Cover Form	Policy Rank	Cover	Date du debut du contrat	Date de la fin du contrat	Priorité	Prime totale à 100%	Limite @ 100%	Prime à la part de la cédante	Limite à la part de la cédante	Le taux de rétention
9	XX	60	Engine constructio	P	1	Public / Product	01/04/2009	01/04/2010	0	595,000	2,500,000	12,000	1,000,000	40.00%
10	YY	60	Engine constructio	L	2	Public / Product	01/04/2009	01/04/2010	0	45,075	15,000,000	238,000	6,000,000	40.00%

Si on prend la police locale numéro 9 qui est une 1,000,000 XS 0. Si la cédante a un sinistre à la part de 200,000 euro, donc le sinistre *FGU* est de  $[200,000 * 100\% / 40\%] + \text{la priorité de la police} = 500,000$

De manière générale sur chaque tranche :

$\text{Le sinistre } FGU = [\text{Sinistre à la part} * 1 / \text{taux de rétention}] + \text{Priorité}$

#### Problème des sinistres à 100%

Parfois sur une police de portefeuille, la cédante n'a pas de part sur toutes les tranche par exemple la police suivante :

numero de programme	l'assuré	Inception Date	Expiry Date	Priorité à 100%	Capacité à 100%	Limite à la part de la cédante	La part de la cédante sur chaque tranche de la police
263	XXXX	31/03/2008	01/04/2009	25,000,000	25,000,000	5,000,000	20.00%
263	XXXX	31/03/2008	01/04/2009	50,000,000	50,000,000	25,000,000	50.00%
263	XXXX	31/03/2008	01/04/2009	100,000,000	100,000,000	30,000,000	30.00%
263	XXXX	31/03/2008	01/04/2009	200,000,000	150,000,000	78,000,000	52.00%
263	XXXX	31/03/2008	01/04/2009	350,000,000	150,000,000	12,000,000	8.00%
263	XXXX	31/03/2008	01/04/2009	500,000,000	100,000,000	0	0.00%
263	XXXX	31/03/2008	01/04/2009	764,500,000	40,000,000	0	0.00%

C'est la raison pour laquelle on a calculé le facteur de consommation à 100% pour chaque police (c'est le rapport du sinistres *FGU* et la couverture globale de la police à 100%).

Donc il est possible que le sinistre *FGU* calculé à partir du sinistre à la part, soit inférieur aux les sinistres complets réels.

Mais on a remarqué qu'il n'y a qu'une seule police dans tout le portefeuille, qui présente un facteur de consommation de 100%. Le reste des polices du portefeuille ne sont pas entièrement consommés.

Donc l'impact est très négligeable sur notre étude des sinistres *FGU*.

### 3. Analyse des données

Il est important de faire des études sur les données observées, car ce sont elles qui vont valider la stabilité de notre modèle par la suite. On va introduire les outils important qu'on va utiliser.

Etudes de fréquence et de sévérité sur les données observées :

Pour chaque portefeuille on va déterminer les fréquences et la sévérité sur données observées à partir des certains seuils basés sur les années passées. Sur le portefeuille 2009 :

On va compter le nombre de sinistres à la part dépassant à chaque fois le seuil (*S1*).

On va faire la moyenne des sinistres à la part dépassant à chaque fois le seuil (*S1*).

Exemple réalisé sur le portefeuille de 2009 :

Sinistre à la part de la cedante		
Seuil S1	nbre de	le cout moyen
1,400,000	32	6,403,592
1,500,000	31	6,657,086
1,800,000	28	7,674,937
2,000,000	23	8,360,993
3,000,000	17	11,811,195
4,500,000	8	21,129,567

Par la suite, on va retenir ces nombres de sinistres pour les différents seuils, afin de modéliser le nombre de sinistre par une loi de Poisson. Donc les lambdas seront le nombre de sinistres moyens observés pour chaque seuil S1. Exemple :

<b>ptf</b>	<b>2009</b>			
<b>S1</b>	<b>1,500,000</b>			
<b>Nbre de sinistre</b>	<b>30.08</b>	=> paramètre Lambda pour la loi de Poisson		
<b>Cout moyen</b>	<b>6,657,086</b>			

Pour la fréquence sur les sinistres à 100% : on va sélectionner les sinistres à la part de la cédante supérieurs au seuil S1, dont les sinistres à 100% sont supérieurs à un autre seuil S2. On obtient une fréquence

Pour la sévérité sur les sinistres à 100% on va sélectionner les sinistres à la part supérieurs au seuil S1, dont les sinistres à 100% sont supérieurs à un autre seuil S2. On calcule le coût moyen par seuil.

Exemple du portefeuille de 2009 :

Remarque : On a sélectionné les seuils S2 en fonction du programme de réassurance. Le seuil maximum qu'on peut retenir est de 25 millions.

Pour un seuil S1 = 1,400,000 et des seuils S2 = 5,000,000 jusqu'à 25,000,00 on obtient

Seuil S2	sinistres à 100%	
	le nombre	le cout moyen
5,000,000	14	36,979,947
10,000,000	8	56,940,469
15,000,000	6	72,020,370
20,000,000	5	84,237,938
25,000,000	5	93,922,643.68

Pour le facteur de consommation : après avoir extrait la limite moyenne à 100% des traités réalisant les deux précédentes conditions (soit la condition sur le sinistre à la part et la condition sur les sinistres à

100%) on va avoir la sévérité moyenne en divisant la sévérité moyenne à 100% sur la limite moyenne à 100%.

#### 4. Motivation

Dans le traité *XS 25 millions*, on n'a pas beaucoup de d'information sur les sinistres à la part de la cédante qui dépassent le seuil  $S_2$ , donc la volatilité sur la méthode par expérience risque d'être très grande.

#					
Report Year	5,000,000	10,000,000	15,000,000	20,000,000	25,000,000
2003	10	7	5	5	3
2004	15	7	6	3	1
2005	4	0	0	0	0
2006	6	3	3	3	3
2007	5	4	2	2	1
2008	4	2	1	1	1
2009	4	2	1	1	1
2010	4	1	0	0	0
2011	1	0	0	0	0
2012	0	0	0	0	0

Si on prend un seuil de 5,000,000, on va sous-estimer la queue de la distribution des sinistres. Donc on n'aura pas d'information crédible sur les sinistres complets qui dépassent le seuil  $S_2 = 25 \text{ millions}$ .

Si on prend un seuil plus grand on n'aura pas beaucoup de sinistres à la part de la cédante.

D'où l'idée de remettre les sinistres complets et étudier leurs comportements.

#### Objectif

-D'estimer un nombre de fréquence et de sévérité pour les sinistres complet sur l'ensemble des portefeuilles historiques :

$$\mathbb{P}(X_{i,k,\infty} \leq x_{i,k,\infty} / X_{i,k,\infty} > S_2) = \frac{\mathbb{P}(S_1 < X_{i,k,\infty} \leq x_{i,k,\infty})}{\mathbb{P}(X_{i,k,\infty} \geq x_{i,k,\infty})}$$

Le seuil  $S_2$  est inconnu, et reste à déterminer.

Problématique du seuil  $S_2$  : on n'a pas de seuils précis pour avoir le maximum d'information sur les sinistres complets. On va devoir essayer plusieurs seuils (proches de la priorité  $D$  du traité) pour en tirer une fréquence et sévérité crédibles.

-pour ensuite simuler le portefeuille actuel :

On va simuler des sinistres  $X_{i,k}$  estimés, calculer les  $Y_{i,k}$  en fonction du programme d'assurance pour chaque police touchée.

Et appliquer le programme de la réassurance sur les sinistres à la charge de la réassurance :

$$Z_{i,k,\infty} = \text{Min}[(Y_{i,k,\infty} - D)^+; C]$$

Pour enfin calculer la prime pure en faisant la moyenne de sinistres à la charge de la réassurance.

### III. TARIFICATION DES TRAITES RC en XS

Les principales composantes pour déterminer la prime chez un réassureur restent la fréquence et la sévérité. Cette tâche n'est pas si simple quand il faut introduire toutes les variables des traités à savoir la capacité, la priorité et les différentes clauses du contrat. En plus si on veut tenir compte des prix proposés sur le marché de la réassurance pour des profils de risque comparable, la tâche peut s'avérer très compliqué.

#### A. Expérience

La méthode de tarification par expérience se fonde sur les sinistres survenus dans le passé. Après correction, les sinistres antérieurs permettent au réassureur de se faire une idée de la charge de sinistres attendus.

De manière plus simple, cette méthode repose sur les informations passées des portefeuilles et des sinistres dans le cas où le réassureur dispose d'une bonne expérience antérieure.

##### 1. Mise en AS-IF

L'une des difficultés essentielles en tarification est de prendre correctement en compte l'environnement socio-économique, c'est-à-dire l'inflation et l'hyperinflation (complément d'inflation lié à plusieurs facteurs, ce qu'on appelle dans ce mémoire « inflation sociale »).

Dans un fichier on a mis tous les sinistres depuis 2003, avec les données observées des sinistres à la part de la cédante.

##### *i. Outils de revalorisation*

Avant toutes études sur les données des portefeuilles historiques, on doit escompter toutes les données des sinistres afin de les actualiser à la date d'aujourd'hui.

La question : si le sinistre survenu dans le passé à l'année  $i$ , survient aujourd'hui, c'est-à-dire en 2013, qu'elle serait sa valeur ?

La valeur de la revalorisation à la date d'aujourd'hui des montants globaux des sinistres va être la somme de deux indices :

-l'indice de salaire à savoir l'inflation. C'est un indice récupéré sur les sites du Fond Monétaire International (FMI).

-l'indice de l'inflation sociale. C'est un indice d'ajustement.

On n'a pas fait le choix d'une discrimination des deux indices, c'est-à-dire qu'on va faire la somme pure et simple des deux indices précités sans pondérer le poids d'aucun des deux.

On appelle l'indice de revalorisation intégrant les deux indices, indice FMI et indice de l'inflation social, le Total Index.

	Total Index		Threshold
<b>1998</b>	100.00	0.03	1,250,000
<b>1999</b>	103.71	4%	1,250,000
<b>2000</b>	107.79	4%	1,250,000
<b>2001</b>	112.47	4%	1,250,000
<b>2002</b>	117.03	4%	1,250,000
<b>2003</b>	119.63	2%	1,250,000
<b>2004</b>	122.90	3%	1,284,149
<b>2005</b>	125.77	2%	1,314,168
<b>2006</b>	128.63	2%	1,344,000
<b>2007</b>	131.93	3%	1,378,542
<b>2008</b>	136.91	4%	1,430,523
<b>2009</b>	142.58	4%	1,489,756
<b>2010</b>	143.13	0%	1,495,499
<b>2011</b>	148.68	4%	1,553,514
<b>2012</b>	152.40	2%	1,592,352
<b>2013</b>	156.21	2%	1,632,161

On a revalorisé aussi les seuils qu'on va utiliser pour calculer le nombre des sinistres et les fréquences (seul S1, car on revalorise les sinistres, mais S2 ne sera pas revalorisé car on le choisi)

## ii. *Escompter des données des sinistres à la part de la cédante au-delà du seuil S1*

Dans un fichier on a réuni toutes les données des sinistres des portefeuilles, de 2003 jusqu'à 2012, où on a séparé le développement des sinistres entres « sinistres payés » et « suspens ». Ainsi le montant total de chaque sinistre est la somme des deux.

Soit  $S_i$  le montant total d'un sinistre survenu à la date  $i$

$P_i$  une somme payée dans l'année  $i$

$OS_i$  le suspend du sinistre à l'année  $i$

Le montant total du sinistre est :  $S_i = \sum P_i + OS_i$

Exemple :

Paid						
Year	Claim Ref	1	2	3	4	5
2,008	XXXXXX	5,000	47,000	74,000	581,000	581,000

+

OS						
Year	Claim Ref	1	2	3	4	5
2,008	XXXXXX	3,000,000	3,055,000	3,028,000	-	-

=

Incurred @ share						
Year	Claim Ref	1	2	3	4	5
2,008	XXXXXX	3,005,000	3,102,000	3,102,000	581,000	581,000

L'idée :

Est de revaloriser les montants de sinistres de la façon suivante :  $S_i' = \sum P_i' + OS_i'$

Avec  $S_i'$  le montant total d'un sinistre survenu à la date  $i$  et escompté à la date d'aujourd'hui

$P_i$  Une somme payée dans l'année  $i$  et escompté à la date d'aujourd'hui

$OS_i$  Le suspen du sinistre à l'année  $i$  et escompté à la date d'aujourd'hui.

Les suspens seront escomptés normalement c'est-à-dire :

$$OS_i' = OS_i * \frac{Total\ index_{2013}}{Total\ index_i}$$

Or, les sinistres payés vont être escomptés en décumulés c'est-à-dire :

$$P_i' = P_{i-1}' + (P_i - P_{i-1}) * \frac{Total\ index_{2013}}{Total\ index_i}$$

Exemple :

Incurred Paid						
Year	Claim Ref	1	2	3	4	5
2,008	XXXXXX	5,705	51,720	81,187	613,854	613,854

+

Incurred OS						
Year	Claim Ref	1	2	3	4	5
2,008	XXXXXX	3,422,861	3,347,024	3,304,704	-	-

=

Indexed Incurred						
Year	Claim Ref	1	2	3	4	5
2,008	XXXXXX	3,428,566	3,398,744	3,385,891	613,854	613,854

**Remarques :**

-toutes les données des montants de sinistres développés sont des montants à la part de la cédante, c'est-à-dire elles dépassent le seuil  $S1 = 1,500,000 \text{ euro}$ . On rappelle que  $S1$  est le seuil qui nous permet de calculer le nombre des sinistres, c'est aussi un seuil revalorisé depuis 2003.

-La mise en AS IF doit tenir compte de la revalorisation des primes. Pour cela, il faudra analyser la composition du portefeuille afin de revaloriser risque par risque selon les primes originales.

Exemple le portefeuille de 2008 :

Développement brut des montants de sinistres :

Incurred @ Share													
Acc Year	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Incurred	Avg Cost	
2003	12,278,000	27,868,000	31,718,000	55,807,000	144,766,000	175,070,000	163,051,000	161,984,000	218,256,000	248,911,000	248,911,000	8,297,033	
2004	79,303,000	84,044,000	119,596,000	160,221,000	199,075,000	179,288,000	172,301,000	218,391,000	228,995,000		228,995,000	6,939,242	
2005	16,244,000	35,662,000	30,922,000	47,798,000	52,887,000	54,252,000	53,315,000	54,902,000			54,902,000	2,495,545	
2006	40,850,000	69,544,000	75,114,000	191,303,000	223,970,000	228,578,000	226,068,000				226,068,000	5,796,615	
2007	22,237,000	106,261,000	195,361,000	240,293,000	258,746,000	271,118,000					271,118,000	5,768,468	
2008	69,876,000	69,193,000	63,884,000	94,309,000	98,492,000						98,492,000	3,177,161	
2009	69,277,000	104,342,000	237,806,000	245,832,000							245,832,000	7,023,771	
2010	50,614,000	68,219,000	81,797,000								81,797,000	3,556,391	
2011	33,322,000	35,476,000									35,476,000	2,728,923	
2012	5,192,000										5,192,000	2,596,000	

Revalorisation à la date d'aujourd'hui :

Indexed Incurred @ Share													
Acc Year	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Incurred	Avg Cost	
2003	16,031,735	35,475,305	39,519,517	67,969,469	172,095,062	201,399,180	181,587,137	179,893,825	236,705,111	265,570,110	265,570,110	8,852,337	
2004	100,794,526	104,391,137	145,430,937	190,364,575	229,161,065	202,271,104	194,365,481	240,626,272	249,020,535		249,020,535	7,546,077	
2005	20,174,596	43,308,420	36,742,457	54,930,102	58,707,207	60,012,404	57,387,181	58,165,156			58,165,156	2,643,871	
2006	49,608,451	82,339,327	85,977,735	211,414,122	246,440,997	244,267,623	238,820,133				238,820,133	6,123,593	
2007	26,328,080	121,340,326	214,969,928	263,504,191	278,652,015	289,885,579					289,885,579	6,167,778	
2008	79,725,279	76,796,084	70,893,027	102,245,473	105,609,754						105,609,754	3,406,766	
2009	75,899,117	113,876,969	250,036,983	252,675,308							252,675,308	7,219,295	
2010	55,239,199	71,946,880	84,435,557								84,435,557	3,671,111	
2011	35,008,926	36,478,033									36,478,033	2,806,003	
2012	5,321,800										5,321,800	2,660,900	

Et aussi le développement du nombre de sinistres dépassant le seuil S1 :

#												
Acc Year	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Incurred	
2003	5	11	13	17	21	24	25	26	28	30	30	
2004	11	14	17	23	28	29	30	32	33		33	
2005	6	11	13	17	19	21	22	22			22	
2006	4	23	29	37	38	39	39				39	
2007	11	25	30	40	45	47					47	
2008	11	15	18	29	31						31	
2009	6	20	29	35							35	
2010	11	19	23								23	
2011	12	13									13	
2012	2										2	
	28.7%	55.3%	66.2%	83.5%	90.1%	93.6%	93.5%	94.1%	96.8%	100.0%		

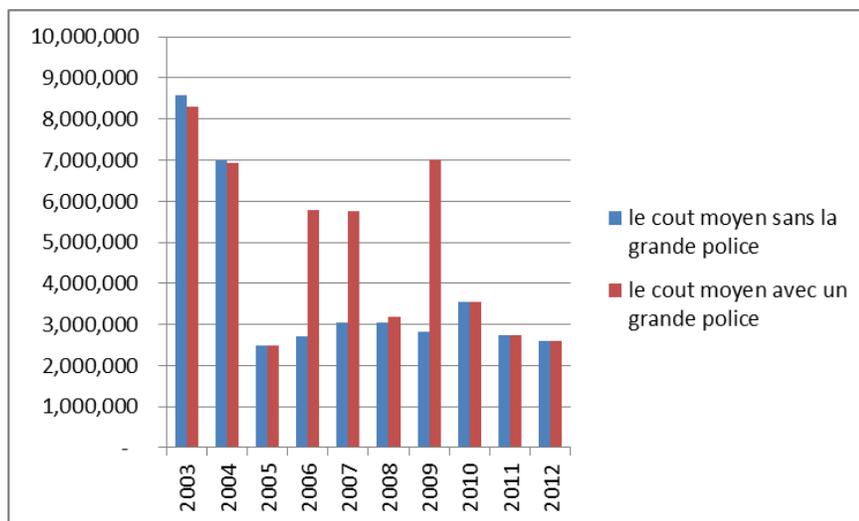
Explication :

Soit  $Y_{i,j}$  = les sinistres escomptés à la part de la cédante pour l'année de souscription i et l'année de développement j.

Soit  $N_{i,j}$  = le nombre de sinistre dépassant le seuil  $S1=1,5$  Millions euros pour l'année de souscription i et l'année de développement j.

Donc 
$$N_{i,j} = \sum I_{\{Y_{i,j} > S1\}}$$

On a remarqué que dans le portefeuille, chaque année, la présence régulière d'un gros sinistre survenant sur une police. On remarque aussi qu'à partir de 2005 le cout moyen des sinistres, hors une grande police, est relativement stable.



## 2. Extrapolation des sinistres individuels à l'ultime

### i. Calcul des IBNER

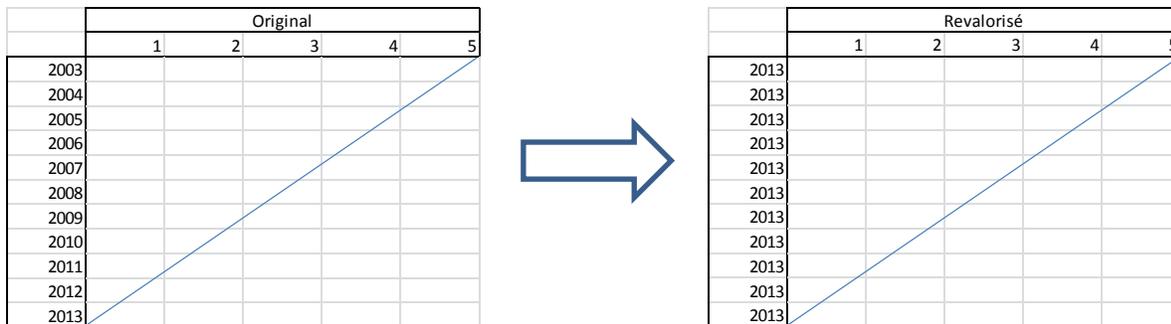
Une incertitude est liée au sinistres déclaré mais non suffisamment provisionnés (en anglais : Incurred But Not Enough Reserved)

On s'intéresse aux montants de sinistres à la part de la cédante qui dépassent un certain seuil et qui sont susceptibles de se développer. On applique la méthode Loss Development Factor.

De manière générale après avoir développé les montants de sinistres à la part brut pour chaque portefeuille et revalorisés ce développement à la date d'aujourd'hui (2013) par année de souscription, on va détailler le développement par année de survenance de sinistres avec la méthode de « triangles des IBNR avec chain Ladder, à partir d'un seuil  $S1$  » ou ce qu'on appelle aussi « Loss Development Factor ou LDF ». On ne prend en compte dans notre construction des triangles des IBNR que les montants de sinistres dépassants  $S1 = 1,500,000 \text{ euro}$ .

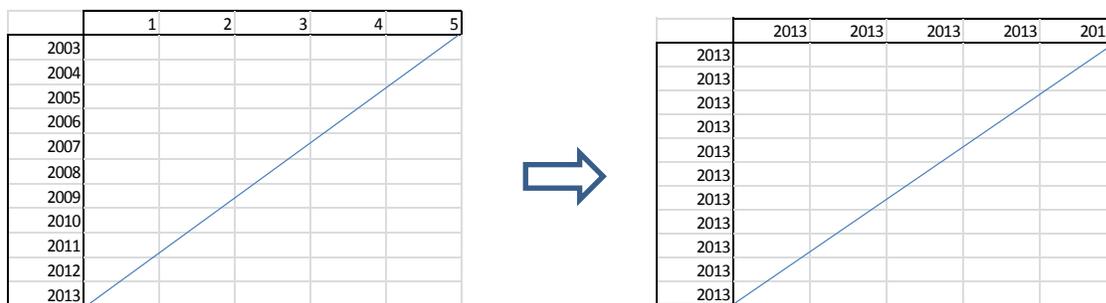
### ii. Application des facteurs pour développer les sinistres

L'idée principale est de passer d'un développement des sinistres jusqu'en 2013 à un développement des sinistres qui commence en 2013 :



**1<sup>ère</sup> étape :**

Essayer d'utiliser le développement historique des sinistres des portefeuilles depuis la date de souscription jusqu'à l'année 2013 :



On réalise un LDF (Chain Ladder avec le seuil  $S1$ ). On choisit le seuil  $S1 = 1,600,000$  qui n'est que les 1,250,000 (en 2003) revalorisé à la date d'aujourd'hui. On réalise le LDF dont le but d'obtenir des coefficients de passage entre les années de développement.

**Nouvelle approche :**

On ne s'intéresse au sinistre à la part de la cédante qu'à partir du moment où il dépasse le seuil. S'il dépasse le seuil, le sinistre sera pris en compte dans le développement, sinon on l'ignore.

Explication :

Soit  $Y_{i,j}$  = les sinistres revalorisés à la part de la cédante pour l'année de souscription  $i$  et l'année de développement  $j$ .

Soit  $A_{i,j}$  = les coefficients de passage pour le développement du LDF.

Soit  $i$  fixé, si quelque soit  $j$   $Y_{i,j} > S1$  alors :

Donc  $A_{i,j} = \frac{Y_{i,j+1}}{Y_{i,j}}$  est les coefficients de passages entre les années de développement sont :

Above	1.100									
Below	0.900									
LDF										
Report Year	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2003	0.7156	0.9052	0.7287	1.4170	1.0195	0.9728	0.7659	0.9830	0.9891	
2004	0.9652	0.8588	0.9691	0.7964	0.9039	0.9610	0.8810	0.9733		
2005	1.0760	0.8343	0.8922	0.9871	0.9988	0.9687	0.9953			
2006	1.3027	0.8633	0.9557	0.9680	0.9793	0.9960				
2007	1.3198	0.8658	0.9428	0.9996	0.9437					
2008	1.2144	0.9238	0.9783	0.9919						
2009	1.1890	1.4010	0.9717							
2010	1.1525	0.9902								
2011	1.0192									
2012										

A partir de ce tableau, il nous faut choisir un coefficient de passage adéquat. On a fait le choix de ne pas prendre les coefficients très bas (en vert), ni les coefficients très hauts (en violet) car cela représente des valeurs extrêmes et non significatives. On veut des coefficients significatifs par rapport au reste du triangle, on ne veut pas qu'une valeur atypique viennent influencer notre rapport.

On s'est fixé une fourchette entre 0.9 et 1.1.

Ce qui nous donne l'extrapolation suivante:

Wgt Aveg Incl Diag	1.1636	1.0037	0.9623	0.9673	0.9550	0.9833	0.8951	0.9745	0.9891	1.0000
Wgt Aveg Excl Diag	1.1899	1.0058	0.9577	0.9518	0.9616	0.9640	0.8645	0.9830	1.0000	1.0000
Spl Aveg Incl Diag	1.1060	0.9553	0.9198	1.0267	0.9691	0.9746	0.8807	0.9782	0.9891	1.0000
Spl Aveg Excl Diag	1.1169	0.9503	0.9111	1.0336	0.9754	0.9675	0.8235	0.9830	1.0000	1.0000
Selected	1.1899	1.0058	0.9645	0.9874	0.9616	0.9640	0.9500	0.9830	1.0000	1.0000
Cumulated	0.9868	0.8293	0.8245	0.8549	0.8658	0.9003	0.9339	0.9830	1.0000	1.0000
	101%	121%	121%	117%	116%	111%	107%	102%	100%	100%

Explication :

Pour chaque  $A_{i,j}$  se trouvant entre les valeurs ]0,9 ; 1.1[ :

$$\text{Coefficient de passage incluant les diagonale} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^n Z_{i,j}}$$

$$\text{Coefficient de passage excluant les diagonale} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} Y_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-1} Z_{i,j}}$$

Soit  $Y'_i$  = les sinistres à la part escomptés et extrapolés à l'ultime.

### 7. Fit par une loi de probabilité

Afin d'utiliser la méthode de Monte Carlo pour la modélisation de la sévérité, il nous faut déterminer les paramètres de de chaque loi utilisé. Pareto, LogNormal, Exponentiel, Weibull, Pareto Généralisé, Gamma.

Pour cela, on a recours à des tests d'ajustement de loi.

L'ajustement d'une loi de distribution à un échantillon de données consiste, une fois le type de loi choisi, à estimer les paramètres de la loi de telle sorte que l'échantillon soit le plus vraisemblable possible (au sens du maximum de vraisemblance) ou qu'au moins certaines statistiques de l'échantillon (moyenne, variance par exemple) correspondent le mieux possible à celles de la loi.

Les deux méthodes d'ajustement sont :

### *i. Moments*

Cette méthode simple utilise la définition des moments de la loi en fonction des paramètres afin de déterminer ces derniers. Pour la plupart des lois, l'utilisation de la moyenne et de la variance est suffisante. Cependant, pour certaines lois la moyenne suffit (par exemple, la loi de Poisson), ou, au contraire, le coefficient d'asymétrie est aussi nécessaire (loi de Weibull par exemple).

#### Formalisation mathématiques

Soit  $(X_i)_{i=1\dots n}$  sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi paramétriques, paramétrée par  $\alpha$ , et une fonction de répartition  $F_X$ .

On sélectionne alors  $s$  moments  $[m_1(\alpha), \dots, m_s(\alpha)]$ , qui définissent un vecteur  $s * 1$ . Il existe donc une fonction  $G$  telle que :  $G(\alpha) = [m_1(\alpha), \dots, m_s(\alpha)]$ . L'équivalent empirique du vecteur  $G$  et le vecteur composé des  $s$  moments noté  $\hat{G}$ . Cela signifie que :

$$\hat{m}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^i$$

L'estimateur de  $\alpha$  par la méthode des moments, noté  $\hat{\alpha}$ , consiste à résoudre l'équation vectorielle :

$$\hat{G} = G(\hat{\alpha})$$

### *ii. Vraisemblance*

Les paramètres de la loi sont estimés en maximisant la vraisemblance de l'échantillon. Cette méthode, plus complexe, présente l'avantage d'être rigoureuse pour toutes les lois, et de permettre d'obtenir des écart-types approximatifs pour les estimateurs des paramètres.

On a estimé à l'aide d'un outil interne les paramètres des différentes Lois : Pareto, Exponentielle, Log-Normale, Weibull et Pareto Généralisé. Après on va réaliser un test Kolmogorov-Smirnov pour savoir laquelle de nos lois correspond le mieux au données observées.

## Formalisation mathématiques

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle, de loi discrète ou continue, dont on veut estimer un paramètre  $\alpha$ . Alors on définit une fonction  $f$  telle que :

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} f_\alpha(x) & \text{si } X \text{ est une v. a continue} \\ P_\alpha(X = x) & \text{si } X \text{ est une v. a discrète} \end{cases}$$

$f_\alpha(x)$  représente la densité de  $X$  (où  $\alpha$  apparaît) et  $P_\alpha(X = x)$  représente une probabilité discrète (où  $\alpha$  apparaît).

On appelle vraisemblance de  $\alpha$  au vu des observations  $(x_1 \dots x_n)$  d'un n-échantillon indépendamment et identiquement distribué, le nombre :

$$L(x_1, \dots, x_n, \alpha) = f(x_1, \alpha) * \dots * f(x_n, \alpha) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \alpha)$$

On cherche à trouver le maximum de cette vraisemblance pour que les probabilités des réalisations observées soient aussi maximum. Ceci est un problème d'optimisation. On utilise généralement le fait que si  $L$  est dérivable (ce qui n'est pas toujours le cas) et si  $L$  admet un maximum global en une valeur  $\alpha = \hat{\alpha}$ , alors la dérivée première s'annule en  $\alpha = \hat{\alpha}$  et que la dérivée seconde est négative. Réciproquement, si la dérivée première s'annule en  $\alpha = \hat{\alpha}$  et que la dérivée seconde est négative en  $\alpha = \hat{\alpha}$ , alors  $\alpha = \hat{\alpha}$  est un maximum local (et non global) de  $L(x_1, \dots, x_n, \alpha)$ . Il est alors nécessaire de vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum global. La vraisemblance étant positive et le logarithme népérien une fonction croissante, il est équivalent et souvent plus simple de maximiser le logarithme népérien de la vraisemblance :

La condition nécessaire

$$\frac{dL(x_1, \dots, x_n, \alpha)}{d\alpha} = 0$$

Où

$$\frac{dLn[L(x_1, \dots, x_n, \alpha)]}{d\alpha} = 0$$

Permet de trouver la valeur  $\alpha = \hat{\alpha}$ .

$\alpha = \hat{\alpha}$  est un maximum local si la condition suffisante est remplie au point critique  $\alpha = \hat{\alpha}$  :

$$\frac{d^2L(x_1, \dots, x_n, \alpha)}{d^2\alpha} \leq 0$$

Où

$$\frac{d^2Ln[L(x_1, \dots, x_n, \alpha)]}{d^2\alpha} \leq 0$$

### iii. Le test sur les paramètres : Kolmogorov-Smirnov

Ce test repose sur les propriétés des fonctions de répartition empiriques : si  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est un échantillon de variable aléatoire indépendantes à valeurs réelles, alors la fonction de répartition empirique de cet échantillon est définie par :

$$F_n(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i \leq x} \text{ avec } \delta_{x_i \leq x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction de répartition empirique est un processus qui prend ses valeurs dans l'espace des fonctions croissantes comprises entre 0 et 1.

$\sqrt{n}(F_n(X) - F(X))$  Converge en loi vers un « mouvement brownien attaché entre 0 et 1 »  $\alpha(c)$  avec :

$$\alpha(c) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \exp(-2k^2 c^2) \text{ Avec } c \text{ une constante.}$$

Il est ainsi facile de proposer un test d'hypothèse pour décider si un échantillon provient bien d'une loi donnée, ou si deux échantillons ont la même loi, lorsque leurs fonctions de répartition sont continues.

### iv. Autres ajustements des lois

Les données de sinistres reçus par les réassureurs ne sont pas complètes, dans la mesure où ils ne reçoivent que les montants de sinistres supérieurs à un seuil, c'est-à-dire la priorité de leur tranche du programme de réassurance. Les outils les plus utilisés pour déterminer une distribution raisonnable qui permet d'ajuster une loi réaliste aux données des sinistres sont :

### v. La Mean excess fonction

La Mean Excess fonction où  $e(u)$  est la moyenne au-delà du seuil  $u$ , définit par

$$e(u) = E(Y/X > u)$$

Elle correspond à une fonction de  $u$ , c'est-à-dire du seuil.

En pratique la fonction moyenne des excès  $e$  est estimée par  $\hat{e}_n$  :

$$\hat{e}_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i I_{(u, \infty)}(x_i)}{\sum_{i=1}^n I_{(u, \infty)}(x_i)} - u$$

Telles que  $I_{(u, \infty)} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i > u \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

En réassurance avec  $X$  la variable aléatoire de montant de sinistre,  $e_X(p)$  est interprétée comme la moyenne des sinistres attendue au-delà de la priorité  $D$  (seuil  $D$ ).

Dans un traité de réassurance où le réassureur ne prend en charge que les montants de sinistres au-delà de la priorité de sa tranche et ne dispose d'aucune information sur les sinistres en dessous de la priorité, la Mean Excess fonction lui donne une idée sur le profil de risque de sa tranche dans le programme de réassurance.

## vi. QQ Plot

Le Quantile-Quantile Plot est outil graphique qui va permettre d'évaluer la pertinence d'un ajustement de donnée. Le terme Q-Q Plot provient du fait qu'on va comparer la position de certain quantile dans les données observés avec les données des données théorique, c'est-à-dire loi théorique attribué au données.

Si on a une fonction de distribution  $F$ , la fonction inverse :

$$F^{\leftarrow}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}, 0 < t < 1$$

Est la fonction de Quantile pour la distribution  $F$ . La quantité  $x_t = F^{\leftarrow}(t)$  est le t-Quantile.

Nous pouvons définir la fonction de distribution inverse empirique de la fonction de distribution  $F_n$  pour des variables aléatoires  $X_1 \dots X_n$ :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, x]}(X_i), x \in \mathbb{R}$$

Si on fait l'hypothèse de simplification que  $X_1 < X_2 < \dots < X_n$  des variables aléatoires indépendants iniquement distribuables :

$$F_n(X_k) = \frac{k}{n}, k = 1 \dots n$$

Avec un pas de  $\frac{1}{n}$  entre chaque entre  $\llbracket X_k, X_{k+1} \rrbracket$

On en déduit la fonction quantile empirique  $F_n^{\leftarrow}$  :

$$F_n^{\leftarrow}(t) = \begin{cases} X_k, t \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], k = 1 \dots n-1 \\ X_n, t \in \left(\frac{n-1}{n}, 1\right) \end{cases}$$

Après on dessine le graphe :  $\{(X_n, F_n^{\leftarrow}(\frac{k}{n+1}))\}, k = 1 \dots n$  pour comparer avec la fonction théorique.

## 8. La cadence de paiement

On va s'intéresser à l'allure du paiement des sinistres

Soit  $P_{i,j}$  la cadence de paiement pour l'année de souscription  $i$  et les années de développement  $j$ .

Soit  $Y_{i,j}$  les sinistres payés et revalorisés pour l'année de souscription  $i$  et l'année de développement  $j$ .

Soit  $Y'_i$  les sinistres à la part revalorisé à l'ultimes, c'est-à-dire à la dernière année de développement.

On rappelle que les  $Y'_i$  ont été déterminé par le développement LDF.

$$\text{Donc si } Y_i > S1 \text{ donc } P_{i,j} = \frac{\sum Y_{i,j}}{\sum Y'_i}$$

Report Year	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1998	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1999	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2001	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2002	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2003	2,055,217	3,033,891	3,033,891	3,033,891	3,033,891	3,139,999	3,172,867	4,406,129	4,406,129	4,406,129
2004	380,031	8,054,177	13,851,747	18,104,589	23,751,169	27,250,480	27,912,949	30,340,944	30,368,619	-
2005	3,726	11,859,964	13,223,904	16,806,499	16,981,793	17,057,098	19,158,348	19,158,348	-	-
2006	14,617,795	38,306,792	61,942,788	62,900,333	122,342,443	126,960,990	126,980,465	-	-	-
2007	5,932,905	65,283,033	98,464,041	105,118,196	110,064,538	110,984,988	-	-	-	-
2008	44,554,241	130,750,799	189,818,565	248,438,187	248,511,987	-	-	-	-	-
2009	12,329,758	15,827,637	87,635,754	127,208,954	-	-	-	-	-	-
2010	40,117,012	51,187,448	76,339,923	-	-	-	-	-	-	-
2011	32,684,944	54,931,544	-	-	-	-	-	-	-	-
2012	15,145,400	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Threshold	1,600,000										
Payment Pattern											
Report Year	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Ultimate
2003	46.6%	68.9%	68.9%	68.9%	68.9%	71.3%	72.0%	100.0%	100.0%	100.0%	4,406,129
2004	0.7%	15.1%	26.0%	34.0%	44.6%	51.2%	52.5%	57.0%	57.1%		53,202,544
2005	0.0%	53.1%	59.2%	75.2%	76.0%	76.4%	85.8%	85.8%			22,339,993
2006	9.4%	24.6%	39.8%	40.5%	78.7%	81.7%	81.7%				155,478,532
2007	4.4%	48.7%	73.5%	78.5%	82.2%	82.9%					133,924,040
2008	16.3%	47.9%	69.6%	91.1%	91.1%						272,738,471
2009	3.9%	5.0%	27.6%	40.0%							318,070,940
2010	27.6%	35.2%	52.5%								145,346,499
2011	19.1%	32.1%									171,170,367
2012	18.4%										82,235,715

Par la suite on calcule le pourcentage du paiement moyen par année de développement.

Wgt Ave Incl Diag	12.3%	29.7%	49.2%	60.6%	81.7%	77.3%	75.3%	67.4%	60.4%	100.0%
Wgt Ave Excl Diag	12.0%	29.3%	48.7%	70.8%	74.8%	74.1%	62.8%	60.3%	100.0%	100.0%
Spl Ave Incl Diag	14.7%	36.7%	52.1%	61.2%	73.6%	72.7%	73.0%	80.9%	78.5%	100.0%
Spl Ave Excl Diag	14.2%	37.3%	52.1%	64.7%	70.1%	70.1%	70.1%	78.5%	100.0%	100.0%
Selected	12.3%	29.7%	49.2%	60.6%	81.7%	77.3%	75.3%	67.4%	60.4%	100.0%
Incremental	12.3%	17.4%	19.5%	11.3%	21.1%	-4.4%	-2.0%	-7.9%	-7.1%	39.6%

2<sup>ème</sup> étape :

	1	2	3	4	5	2013=Ultimat
2,003						
2,004						
2,005						
2,006						
2,007						
2,008						
2,009						
2,010						
2,011						
2,012						

On va compléter la partie manquant du triangle (la partie jaune) à l'aide de la cadence de règlement.

On applique de l'inflation sur notre développement passé pour projeter notre triangle au-delà de 2013.

	2,013	2,014	2,015	2,016	2,017	ultimat
2,003						
2,004						
2,005						
2,006						
2,007						
2,008						
2,009						
2,010						
2,011						
2,012						

### 9. L'estimation du nombre de sinistres à l'ultime

On a le nombre de sinistre des observés qui est de :

#	1,500,000
2,008	25
2,009	21
2,010	14
2,011	8
2,012	3

Si on utilise les sinistres payés, alors la quantité à estimer est le total des provisions

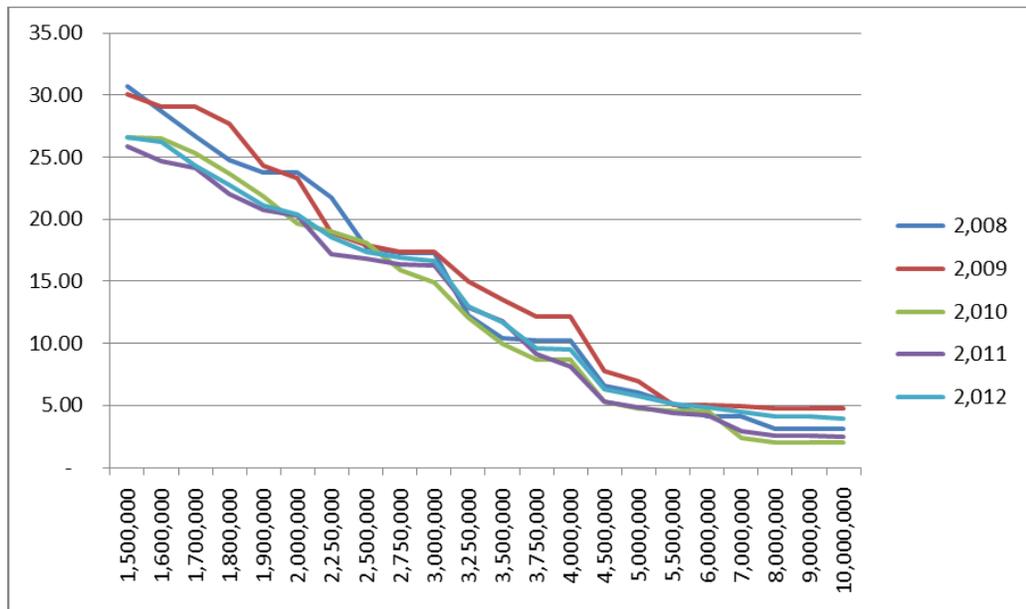
Le calcul des réserves IBNR : Incurred But Not Reported).

Threshold	1,500,000															Premium	# of claims	Extrapolated #
# of Claims	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15			
UWY																		
2003											0.0	0.0	0.0	0.0	0.0			-
2004										0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0			-
2005										0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0			-
2006										0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0			-
2007										0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0			-
2008	7	6	2	9	1	2.1	2.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	526,081,903	25	30.7
2009	5	8	3	5	2.4	1.6	1.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	404,146,288	21	30.1
2010	4	6	4	6.3	2.2	1.5	1.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	367,189,092	14	26.6
2011	7	1	2.7	6.7	2.3	1.5	1.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	391,280,777	8	25.9
2012	3	6.1	2.7	6.7	2.3	1.6	1.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	392,604,546	3	26.6
Weighted With Diag	1.36E-08	1.24E-08	6.94E-09	1.51E-08	1.90E-09	0.00E+00		71	139.93									
Weighted without Diag	1.36E-08	1.54E-08	5.38E-09	1.71E-08	0.00E+00													
Selected	1.36E-08	1.54E-08	6.94E-09	1.71E-08	5.93E-09	3.95E-09	3.95E-09	0.00E+00										

Le nombre de sinistre à l'ultime selon le seuil  $S1 = 1,500,000$  et différents portefeuilles suivant :

Ultimate #	1,500,000
2,008	30.7
2,009	30.1
2,010	26.6
2,011	25.9
2,012	26.6

Voilà une courbe de représentation de l'allure des nombre de sinistres à l'ultime pour tous les portefeuilles.



## B. Calcul de la Prime Pure

Il existe deux approches : soit le Burning Cost (ou le taux de flambage) ou bien la méthode de simulation :

### 1. Le Burning Cost

La tarification par *BC* est basée sur la sinistralité observée dans le passé comme le reflet du comportement du portefeuille. Elle présente deux étapes :

-La Mise en AS IF : chaque élément statistique est actualisé en vue d'être utilisé comme élément AS IF de l'exercice au cours duquel l'*XS* couvrira le risque.

-Cotation relative en pourcentage d'une assiette contractuellement définie : la cotation n'est pas réalisée sous forme d'un montant absolu de prime mais sous la forme d'un taux appelé taux pur de l'*XS* appliqué à une assiette, généralement le montant de primes de la branche considérée perçu à la source par la cédante.

#### Explication

On considère un traité en *C XS D*

Soit  $X_{i,j}$  le montant en « as if » du *i*ème sinistre à la *j*ème année.

Soit  $N_j$  le nombre de sinistre observés l'année *j*.

Soit  $S_{j,as\ if}$  le montant à la charge de l'*XS* l'année *j*.

On a : 
$$S_{j,as\ if} = \sum_{i=1}^{N_j} \text{Min}(C, X_{i,j} - D) I_{\{X_j \geq P\}}$$

Soient  $a_j$  l'assiette de prime relative à l'année *j* et  $a_{estimée}$  l'assiette de prime estimée pour l'année à venir (l'année de la cotation)

Soit *n* désigne le nombre d'année de données statistique utilisées.

Le calcul du taux pure ou le taux pu ( $BC_{pur}$ ) de l'*XS* appelé aussi Burning Cost, est donnée par la formule :

$$BC_{pur} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{S_{j,as\ if}}{a_j}$$

La prime pure correspondant est donc :

$$PP = BC_{pur} * a_{estimée}$$

Ainsi cette prime pure correspond à la moyenne des charges observées pour le réassureur, mises en AS IF, et pondérées par les coefficients de variation d'assiettes reflétant les variations du portefeuille.

## 2. Modèles mathématiques : méthode de simulation

On utilise le modèle linéaire généralisé (GLM)  $S = X_1 + \dots + X_n$  avec  $X_i = \sum_{j=1}^{N_i} X_{i,j}$  avec  $N_i$  la fréquence et  $X_{i,j}$  la sévérité du jème sinistre du contrat  $i$ . avec la condition de l'indépendance des sinistres individuels on obtient :

$$E(S) = E(N_k) * E(X_k)$$

Les modèles classiques sont :

**La fréquence** :  $N \sim Poisson(\lambda)$  car il s'agit d'un processus de renouvellement ayant des propriétés remarquables (absence de mémoire des durées inter-occurrence, propriété de Markov)

**La Sévérité** :  $X \sim Pareto(\alpha, \lambda)$  la loi de Pareto représente l'avantage d'avoir une queue de distribution assez épaisse et conduit à des calculs mathématiques simple. En revanche pour prendre en compte les valeurs extrêmes on va avoir recours à la fonction de Pareto Généralisé.

La simulation prend en compte toutes les clauses et données du traité. On obtient une distribution du risque agrégée. Mais le problème de l'efficacité et de la précision de cette méthode se pose dans la mesure où le choix de la loi reste approximatif lié au degré de précisions des estimateurs.

## 3. Cash-flow

Il faut estimer le cout corrigé à l'inflation et prenant en compte les IBNR (on peut utiliser le données telles quelles ou leur appliquer un modèle paramétrique : simulation de la fréquence et de la sévérité). Estimer la cadence de règlement pour l'utiliser à estimer les cash flows.

L'estimation finale des Cash-Flows permettent d'appliquer les termes contractuels de la réassurance : priorité, capacité, clause de stabilité...etc.

## 5. Application de la tarification avec la méthode de simulation

### i. Modélisation des montants de sinistres

Toute approche probabiliste de la tarification nécessite au préalable une modélisation de la loi du montant de sinistre :

### Estimation des paramètres de la loi Pareto pour les montants de sinistres :

Les estimateurs retenus sont obtenus à partir de l'une ou l'autre des deux méthodes classiques d'estimation, la méthode du maximum de vraisemblance ou la méthode des moments :

La loi Pareto : possède la propriété remarquable d'être stable par tancature.

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une distribution de Pareto de paramètres  $(x_{min}, \alpha)$  :

$$P(X > x) = \left(\frac{x}{x_{min}}\right)^{-\alpha} \text{ avec } x \geq x_{min}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\alpha$  est :

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i) - \ln(x_{min})}$$

D'après les sinistres à la part de la cédante observés de 2005 à 2012, avec un  $S1 = 1,500,000$  et un nombre de sinistres=136

$$\hat{\alpha} = 1,22$$

Year of Portfolio	2009
Prem Dist	@ share
Threshold	1,500,000
# claims retain	30.08
#Claims>Threshold	136
Distribution	p1
Pareto	1.22

### ii. Modélisation de la loi de fréquence

D'après les paragraphes précédents, on a pu développer le nombre de sinistre à l'ultime après avoir mise en AS IF les sinistres observés en fonction de la cadence règlement chaque année. On a obtenu les nombres de sinistres suivant :

Ultimate #	1,500,000	1,600,000	1,700,000	1,800,000	1,900,000	2,000,000	2,250,000	2,500,000	2,750,000	3,000,000
2,008	30.73	28.73	26.73	24.73	23.73	23.73	21.73	17.73	17.26	17.26
2,009	30.08	29.08	29.08	27.69	24.30	23.30	18.91	17.91	17.33	17.33
2,010	26.65	26.50	25.36	23.66	21.82	19.68	18.98	18.12	15.89	14.89
2,011	25.86	24.71	24.11	22.06	20.71	20.26	17.21	16.85	16.38	16.23
2,012	26.62	26.27	24.36	22.77	21.12	20.40	18.58	17.34	16.91	16.61

Les seuils  $S1 = \{1,500,000 ; 1,600,000 ; \dots ; 3,000,000, \}$ .

On simule cela fréquence avec un tirage uniforme entre  $[0,1]$  sur la loi (discrète) de Poisson, dont la moyenne  $\lambda$  seront déduits du tableau du final du nombre de sinistre par année en fonction des seuils.

Donc on va créer une loi de poisson dont la moyenne est Lambda.

Par exemple si on simule le portefeuille de 2009 avec le seuil 1,500,00 on aura :

# of simulation	2000
ptf	2009
Threshold @ sh:	1,500,000
#	30.08
Average Cost	6,657,086

Si  $U$  est une loi Uniforme distribué sur  $[0,1]$ , alors on redéfinit  $N$  par :

$$N = K * I_{\{p_{k-1} \leq U < p_k\}}$$

En fonction de la variation de  $U$  sur l'intervalle  $[0,1]$ , on déduira à chaque fois le nombre de sinistre  $X$  de façon aléatoire.

### iii. Tarification avec les clauses du traité

On tarifie un traité en  $C XS D$ , avec une franchise de  $D$  et une portée de  $C$  . et  $l = D + C$  la limite de la tranche.

- $X$  la variable le montant des sinistres FGU après simulation.

- $Z$  la variable aléatoire du sinistres individuel à la charge du réassureur telle que :

$$Z = p_1 I_{(X>l)} + (X - D) I_{(p \leq X \leq l)}$$

- $N$  la variable aléatoire du nombre de sinistres dans l'année.  $N$  suit une loi de Poisson( $\lambda$ ). Et  $N$  et  $X$  sont deux variables aléatoires indépendantes.

- $S_N = \sum_{i=1}^n Z_i$  la variable aléatoire du montant totale à la charge du réassureur.

D'après le modèle linéaire généralisé et l'indépendance entre  $X$  et  $N$ , on a :

$$E(S_N) = E\left(\sum_{i=1}^n Z_i\right) = E(N) * E(Z)$$

Avec  $E(Z) = l * P(X > l) - D * P(X \geq D) + E(X * I_{(p \leq X \leq l)})$

Or  $X$  est de loi Pareto  $(x_{min}, \alpha)$ . La prime pure est de :

$$E(S_N) = \begin{cases} \lambda * \frac{x_{min}^\alpha}{\alpha - 1} * P^{1-\alpha} & \text{si } c \text{ est illimité} \\ \lambda * \frac{x_{min}^\alpha}{\alpha - 1} * (P^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}) & \text{sinon} \end{cases}$$

### C. La méthode par exposition

S'il ne dispose pas de statistiques adéquates sur les sinistres, le réassureur essaie de trouver un portefeuille comparable, pour lequel il dispose d'expérience sur le sinistre suffisante. Il peut alors estimer la charge de sinistre attendu en quantifiant les différences entre le portefeuille à tarifer et le portefeuille de référence. S'il ne s'intéresse plus au premier lieu aux sinistres qui sont effectivement survenus, mais à ceux qui sont envisageables compte tenu des informations disponible sur les portefeuilles.

Généralement la méthode par exposition intervient lorsque le réassureur ne dispose pas d'une bonne expérience passée sur l portfeuille qu'il veut tarifer.

La méthode par exposition tient compte uniquement des informations disponibles dans le portefeuille actuel à tarifer. Cette méthode est un excellent complément dans le processus de tarification d'un portefeuille dans la mesure où elle peut conforter, remplacer ou même parachever la tarification par la méthode d'expérience.

Le profil de risque du portefeuille va être découpé en plusieurs bandes de sommes assurées. Dans cette étape, on fait l'hypothèse que chaque bande contienne des sommes assurées homogènes, c'est-à-dire de même ordre de grandeur. Cette hypothèse va nous permettre de travailler avec une seule distribution de sinistres individuels pour chaque bande. C'est donc une hypothèse de simplification, car il est très difficile de modéliser risque par risque dans un grand portefeuille.

Après le découpage du profil de risque du portefeuille, il est nécessaire de connaître les ratios de sinistres (Loss Ratio) et les allocations de la prime à 100% de l'assurance pour chaque tranche. Les données précitées vont nous permettre d'avoir une prime pure pour chaque bande comme espérance des sinistres annuels de la bande en question.

Soit un découpage du profil de risque de n bandes.

Soit La prime à 100% de l'assurance pour le portefeuille de P.

Soient  $\{w_k\}_{k=1..n}$  et  $\{LR_k\}_{k=1..n}$  respectivement l'allocation de la prime à 100% de l'assurance P et le Loss Ratio pour chaque tranche.

Soit  $\{S_k\}_{k=1..n}$  les sinistres annuels de chaque bande.

Donc la prime pure liée à chaque bande du découpage est :

$$PP_k = E(S_k) = Pw_kLR_k$$

## 1. L'approche ILF

« Increased Limit Factors » dite ILF est la méthode de tarification par exposition pour les traités de la Responsabilité Civile. Cette méthode ne détermine pas le prix de prime de réassurance, mais un pourcentage que le réassureur va prendre sur la prime pure totale encaissés par la cédante, pour couvrir une portion de somme assuré.

### i. Formalisation mathématique

Soit  $N$  la fréquence de sinistres annuelle par l'assuré.

Soit  $X$  le montant des sinistres,  $X_i, i \in \{1, \dots, N\}$  et  $X_i$  des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées.  $(X, N)$  sont deux variables aléatoires indépendantes.

En assurance de RC, la police couvre généralement jusqu'à une certain limite : la somme assuré. Soit  $k$  cette limite.

La prime pure pour une somme assurée standard  $b$  :  $PP = E(\min(X, b)) * E(N)$

La prime pure d'assurance pour une somme assurée  $k$  :  $PP = E(\min(X, k)) * E(N)$

On appelle ILF au point  $k$ , le rapport entre la prime pure d'assurance pour une somme assurée  $k$  et la prime pure d'assurance pour une somme assurée standard  $b$  :

$$I(k) = \frac{E(\min(X, k)) * E(N)}{E(\min(X, b)) * E(N)} = \frac{E(\min(X, k))}{E(\min(X, b))}$$

Avec  $E(\min(X, k)) * E(N) = \int_0^\infty \min(X, k) dF(X) = \int_0^k X dF(x) + k[1 - F(X)]$  et  $F(X)$  la fonction de distribution de la sévérité.

Les ILF sont indépendants de la fréquence et ne dépendent que de la distribution de la sévérité.

Avec une intégration par parties on obtient :

$$I(k) = \frac{\int_0^k (1 - F(x)) dx}{\int_0^b (1 - F(x)) dx}$$

Exemple de la loi Pareto :

Si  $X$  suit une loi de Pareto  $(x_{min}, \alpha)$  alors :

$$\begin{aligned} E(\min(X, k)) &= \int_{x_{min}}^{\alpha} x * \frac{\alpha * x_{min}^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} dx + k \left(\frac{x_{min}}{k}\right)^{\alpha} \\ &= \alpha * x_{min}^{\alpha} * \int_{x_{min}}^k \frac{dx}{x^{\alpha}} + k \left(\frac{x_{min}}{k}\right)^{\alpha} \end{aligned}$$

Si  $\alpha = 1$ , alors :

$$E(\min(X, k)) = x_{min} \left[ \ln\left(\frac{k}{x_{min}}\right) + 1 \right]$$

Et

$$I(k) = \frac{\ln\left(\frac{k}{x_{min}}\right) + 1}{\ln\left(\frac{b}{x_{min}}\right) + 1}$$

Si  $\alpha \neq 0$ , alors :

$$E(\min(X, k)) = \frac{x_{min}^{\alpha}}{1 - \alpha} [k^{1-\alpha} - \alpha x_{min}^{1-\alpha}]$$

Et

$$I(k) = \frac{k^{1-\alpha} - \alpha x_{min}^{1-\alpha}}{b^{1-\alpha} - \alpha x_{min}^{1-\alpha}}$$

## ii. Application sur un traité $CXS D$

Si l'on pose  $L = C + D$  la charge d'une tranche  $CXS D$  peut s'écrire comme la fonction  $h$  :

$$h(x, D, C) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < D \\ x - D & \text{si } D \leq x \leq C \\ C & \text{si } C \leq x \end{cases}$$

La prime pure de la couverture  $CXS D$  peut se décomposer classiquement comme la différence de deux couvertures illimitées :

$$E[h(x, D, C)] = E[\min(X, L)] - E[\min(X, D)]$$

Notons  $l_{ass}$  et  $d_{ass}$  respectivement la somme assurée de la police et la franchise à charge de l'assuré.

La prime pure total est égale à :  $E[X] * E[N]$

La prime pure de la police de somme assurée  $l_{ass}$  et de franchise  $d_{ass}$  :

$$PP = E[\min(X, l_{ass})] - E[\min(X, d_{ass})] * E[N]$$

Si l'on note  $t$  le taux à appliquer à la prime pure  $PP$  :

$$t = \frac{E[\min(X, l_{ass})] - E[\min(X, d_{ass})] * E[N]}{E[\min(X, L)] - E[\min(X, D)] * E[N]}$$

### iii. Exemple numérique

On désire tarifier la tranche de réassurance 250 millions XS 250 millions, donc  $L = 500$  millions et  $P = 250$  millions

Soit le tableau ILF suivant :

k (million)	I(k)
-	-
50	1.217
250	1.759
400	1.902
450	1.936
500	1.966
1,000	2.143
1,050	2.153
5,000	2.443
5,050	2.444

-pour une police de somme assurée 400 :

Si  $d_{ass} = 0$  alors :

$$t = \frac{I(400) - I(250)}{I(400)} = 7,4828\%$$

Si  $d_{ass} = 50$  alors :

$$t = \frac{I(450) - I(250)}{I(450) - I(50)} = 24,5576\%$$

-pour une police de somme assurée 5000 :

Si  $d_{ass} = 0$  alors :

$$t = \frac{I(500) - I(250)}{I(5000)} = 8,4737\%$$

Si  $d_{ass} = 50$  alors :

$$t = \frac{I(500) - I(250)}{I(5050) - I(50)} = 16,8720\%$$

## IV. Tentative d'une nouvelle approche

### A. Le principe de la nouvelle méthode de tarification

L'objectif est de trouver une nouvelle méthode de tarification qui soit un mélange des méthodes de tarification habituelle à savoir l'exposition et l'expérience.

Depuis plusieurs années, on remarque une grande différence entre les résultats des méthodes de tarification citées auparavant, car il est difficile de réaliser un AS IF sur les sinistres historiques pour la méthode par expérience, et les courbes d'exposition dont on dispose sont des courbes adaptées au marché américain donc pas du tout représentatifs de la sinistralité européenne. Un problème qui soulève des interrogations sur la crédibilité et l'efficacité de notre tarification. Seul un travail mathématique et stochastique basé sur les données historiques des portefeuilles en RC est capable de donner une vision panoramique sur la tarification, notamment l'estimation des paramètres tels que la fréquence et la sévérité. Pour rappel, la fréquence est associée à la distribution du nombre de sinistres ultimes dépassant un certain seuil pour la période de couverture et l'exposition en question. La sévérité du montant des sinistres ultimes est la distribution définie au-delà de ce même seuil. Un esprit d'initiative et un goût de la recherche demeurent néanmoins primordiaux pour le traitement d'un tel sujet afin d'apporter des réponses proches de la réalité qui tiennent compte du peu de données dont on dispose.

Face au manque d'information fournie par les courtiers sur la sinistralité qui touche les programmes des portefeuilles, une intuition fait surface et se positionne comme la plus plausible pour engager notre processus de simulation et d'estimation. Cette dernière consiste à créer de « nouveaux échantillons » obtenus par tirage avec remise à partir de l'échantillon initial (on parle de rééchantillonnage) ne nécessitant donc pas d'informations supplémentaires que celles disponibles dans l'échantillon initial.

Mais avant tout, où peut-on constituer cet échantillon initial ? À partir des portefeuilles historiques existants ? Ou bien la sinistralité historique ? Et pourquoi pas par les informations obtenues à travers les courtiers et les collaborateurs ? Sont-elles fiables et complètes ?

Ces questions posées, une tâche de traitement de données se manifeste soulevant des incertitudes sur la nature des hypothèses que l'on va retenir. En effet, la cédante ou le courtier ne fournissent les montants de sinistres qu'à partir du seuil. Donc on n'aura aucune idée sur les sinistres qui se sont produits en dessous de ce seuil. Par exemple, dans certains traités la cédante ou le courtier va faire connaître à la compagnie de réassurance l'ensemble des sinistres dépassant la priorité sans pour autant nous donner des indications sur les petits sinistres survenus en dessous de ce seuil contractuel. Dès lors, nous disposons des sinistres à la part supérieurs à un seuil, néanmoins ceux-ci ne donnent pas d'indication sur les sinistres à 100%. D'autres difficultés qui vont être décrites au fur et à mesure de cette étude.

L'idée :

**La première étape :**

Est de reprendre tous les sinistres de la cédante depuis 2008 jusqu'à 2012 et de reconstituer les sinistres FGU, le nombre au-delà d'un certain seuil, une fréquence moyenne et un cout moyen. Cela va nous permettre d'ajuster une loi sur les sinistres FGU.

La difficulté ici va être la manière d'estimer un seuil à partir duquel on a tous les sinistres FGU.

L'objectif est d'avoir plus d'informations concernant les sinistres non déclarés et qui sont inférieurs au seuil (les sinistres qui nous manquent).

**La deuxième étape :**

On va faire une simulation dans le sens inverse pour le portefeuille actuel. Après avoir ajusté la loi sur les sinistres FGU historiques. On va simuler des sinistres FGU sur les polices afin de calculer les sinistres à la part correspondants à chaque police.

## **B. Simulation de Monte Carlo**

### La méthode de Monte Carlo

On va simuler une loi uniforme entre 0 et 1 pour générer des variables aléatoires qui obéissent à des lois de probabilités.

### Simulation de la loi Pareto

Si  $U$  est une loi Uniforme distribué sur  $[0,1]$ , et j'attribue à  $x_{min}$  un seuil  $S_0$  parmi ceux cité auparavant,  $F^{-1}(U)$  va générer une variable aléatoire qui suit une loi de Pareto.

$$F(X) = 1 - \left(\frac{x_{min}}{x}\right)^{-\alpha}$$

$$\frac{x_{min}}{x} = (1 - F(X))^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$$x = x_{min}(1 - F(X))^{-\frac{1}{\alpha}}$$

On obtient alors, des montants de sinistres moyens en fonction de chaque seuil. Ce montant va suivre une loi de Pareto.

### Simulation de la loi exponentielle :

Si  $U$  est une loi Uniforme distribué sur  $[0,1]$ , et  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

$F^{-1}(U)$  Va générer une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle.

$$F(X) = 1 - \exp(-\lambda x) \text{ avec } x \geq 0$$

$$F(x) - 1 = -\exp(-\lambda x)$$

$$\text{Log}(1 - F(x)) = -\lambda x$$

$$X = -\frac{\text{Log}(1 - F(x))}{\lambda}$$

$X$  va suivre une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

#### Simulation de la loi de Weibull :

Si  $U$  est une loi Uniforme distribué sur  $[0,1]$ , et  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi Weibull de paramètres  $\lambda, k$ .

$F^{-1}(U)$  Va générer une variable aléatoire qui suit une loi Weibull.

$$F(x, k, \lambda) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right) \text{ avec } k > 0 \text{ et } \lambda > 0$$

$$\text{Log}(1 - F(x, k, \lambda)) = -\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k$$

$$\lambda * \text{Log}\left(\frac{1}{1 - F(x, k, \lambda)}\right)^{1/k} = X$$

Donc  $X$  suit une loi de Weibull de paramètre  $\lambda, k$ .

#### Simulation de Pareto Généralisée.

Si  $U$  est une loi Uniforme distribué sur  $[0,1]$ , et  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi Pareto Généralisée de paramètres  $\xi, \sigma, \mu$ .

$G^{-1}(U)$  Va générer une variable aléatoire qui suit une loi Weibull.

$$G_{\xi, \sigma, \mu}(X) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Pour  $\xi \neq 0$

$$G_{\xi, \sigma, \mu}(X) = 1 - \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}$$

$$X = \mu + \frac{\sigma}{\xi} \left[ \left( 1 - G_{\xi, \sigma, \mu}(X) \right)^{-\xi} - 1 \right]$$

Pour  $\xi = 0$

$$G_{\xi, \sigma, \mu}(X) = 1 - \exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$X = \mu + \text{Log}(1 - G_{\xi, \sigma, \mu}(X))$$

Donc  $X$  suit la loi Pareto Généralisée de paramètres  $\xi, \sigma, \mu$ .

Simulation de LogNormal.

$X$  une variable aléatoire qui suit la loi LogNormal de paramètres  $\sigma, \mu$ .

$$X = \text{Exp}(\mu + \sigma Z)$$

Avec  $Z$  une variable aléatoire qui suit une loi Normale Centrée réduite.

### C. Distribution des polices

Pour chaque portefeuille on va déterminer la distribution des polices en fonction de la distribution de la prime à la part.

Si  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est un échantillon de variable aléatoire indépendante à valeurs réelles, alors **la fonction de répartition empirique** de cet échantillon est définie par :

$$F_n(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i \leq x} \text{ avec } \delta_{x_i \leq x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

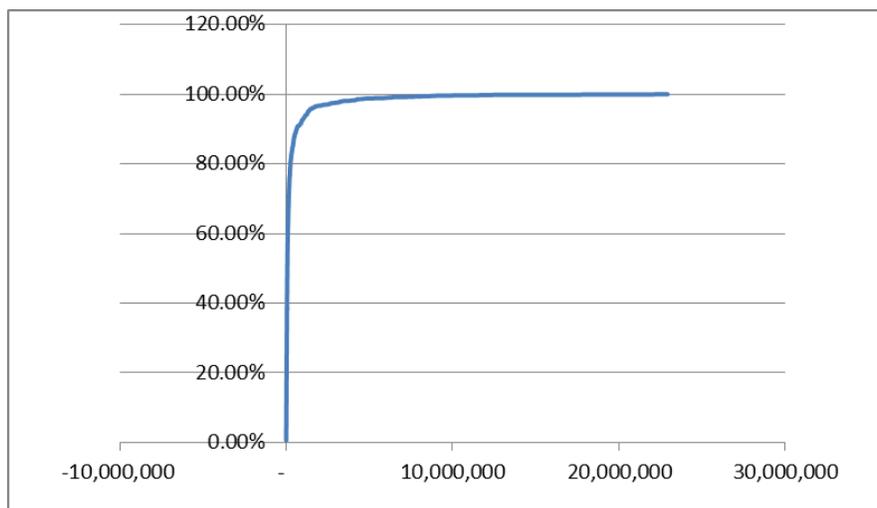
**La fonction de répartition non uniforme ou répartition proportionnelle** de cet échantillon est :

$$F_n(X) = \sum \frac{x_i}{\sum_1^n x_i}$$

Dans notre étude, on a fait le choix de travailler avec deux fonctions de répartition pour les polices en fonction de la prime à la part de la cédante :

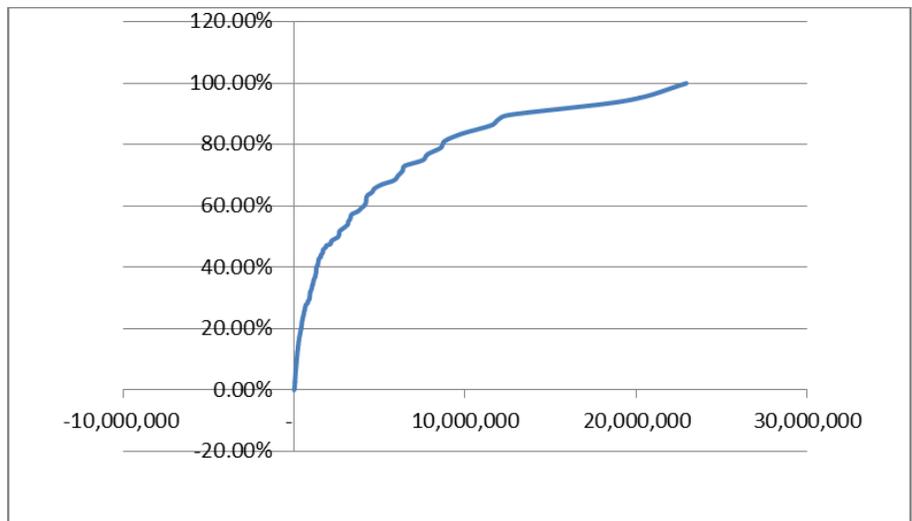
-Si on choisit la fonction empirique : on fait l'hypothèse que toutes les polices du portefeuille ont la même probabilité d'être touchées par un sinistre dans l'année.

Numero de classement des polices	Nemro du programme	Prime à la part de la cédante	Fonction de réparti	Limite à la part
1	A	22,927,521	100.00%	142,500,000
2	B	19,400,659	99.91%	150,000,000
3	C	12,413,824	99.82%	149,999,950
4	D	11,595,739	99.73%	56,000,000
5	E	9,818,050	99.64%	150,000,000
6	F	8,800,955	99.55%	150,000,000
7	G	8,576,244	99.46%	121,250,000
.....				
1115	AAAA	-	0.63%	20,000,000
1116	AAAB	-	0.63%	20,000,000
1117	AAAC	-	0.63%	16,012,290
1118	AAAD	-	0.63%	17,500,000
1119	AAAE	-	0.63%	28,416,602
1120	AAAF	-	0.63%	24,704,676

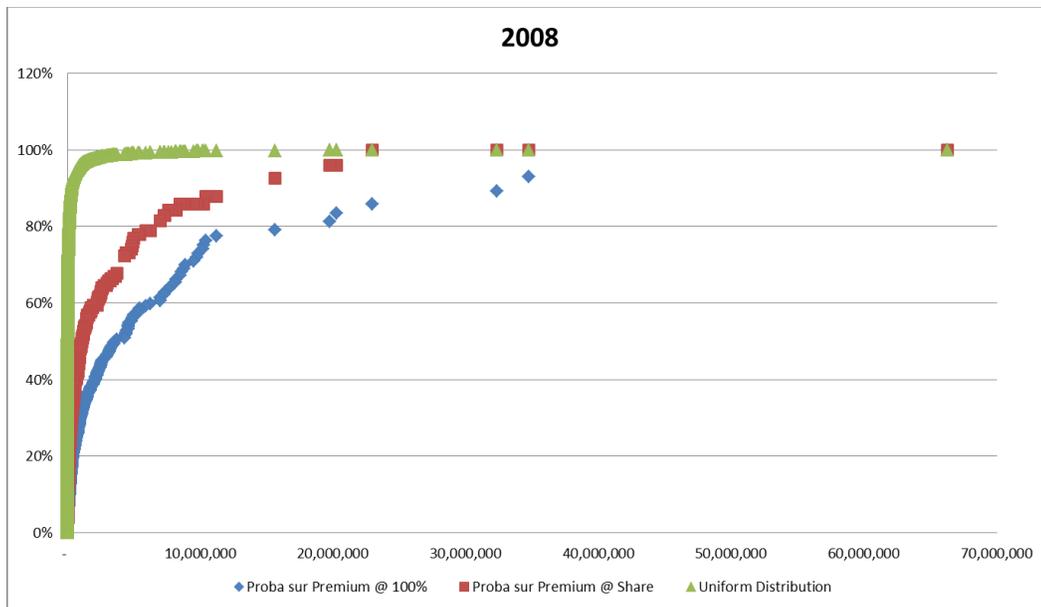


-Si on choisit la fonction de répartition non uniforme ou proportionnelle : on attribue une grande probabilité au polices dont les primes à la part sont les plus grandes. Si la prime d'une police est grande, alors cette police a plus de chance d'être touchée par un sinistre dans l'année.

Numero de classement des polices	Nemro du programme	Prime à la part de la cédante	Fonction de réparti	Limite à la part
1	A	22,927,521	100.00%	142,500,000
2	B	19,400,659	94.33%	150,000,000
3	C	12,413,824	89.53%	149,999,950
4	D	11,595,739	86.45%	56,000,000
5	E	9,818,050	83.59%	150,000,000
6	F	8,800,955	81.16%	150,000,000
7	G	8,576,244	78.98%	121,250,000
.....				
1115	AAAA	-	0.00%	20,000,000
1116	AAAB	-	0.00%	20,000,000
1117	AAAC	-	0.00%	16,012,290
1118	AAAD	-	0.00%	17,500,000
1119	AAAE	-	0.00%	28,416,602
1120	AAAF	-	0.00%	24,704,676



Par exemple pour le portefeuille de 2008, avec la fonction de répartition décumulé sur primes à la part, celle sur les primes à 100% et la fonction de répartition empirique on obtient :

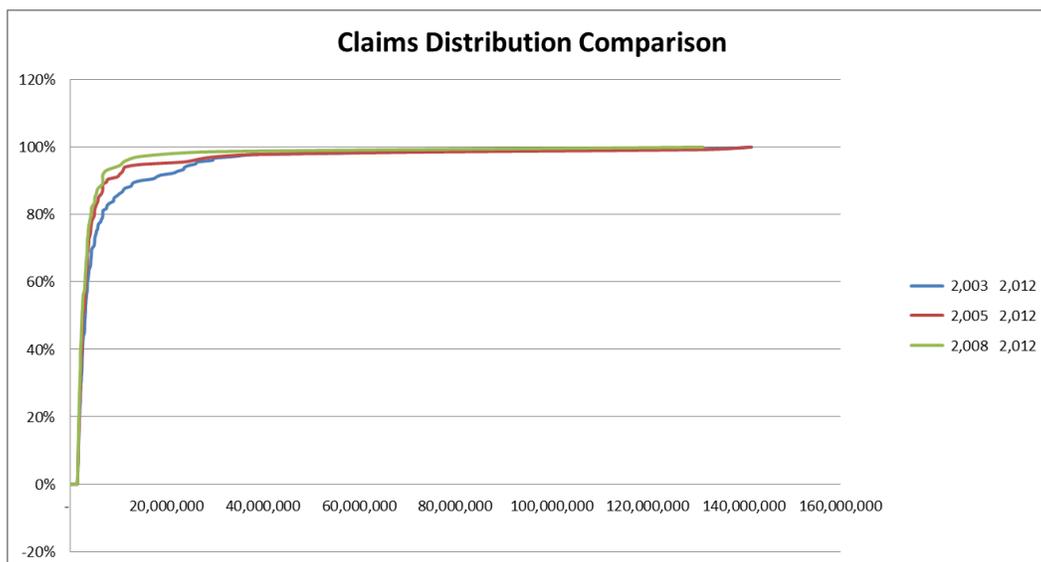


### D. Analyse statistique du portefeuille

Comme précité, on remarque qu'à partir de 2005 le cout moyen des sinistres, hors un gros sinistre récurrent chaque année, est relativement stable. Cette hypothèse va être confirmée par le paragraphe suivant.

#### La fonction de distribution des sinistres à la part de la cédante

On trace les courbes de la distribution empirique des sinistres à la part de la cédante, à partir de 2003, à partir de 2005 et à partir de 2008.



Le but est d'ajuster une loi de probabilité sur les sinistres à la part de la cédante (loi de Pareto, loi Lognormal...etc.) des sinistres supérieurs au seuil  $S1$  et revalorisés à la date d'aujourd'hui.

L'ajustement des lois de probabilité passe nécessairement par le calcul des estimateurs des paramètres de chaque loi. C'est estimateur sont déterminés à partir des méthodes de maximum de vraisemblance et des moments.

On sélectionnera deux lois qui semblent les plus proche de la courbe des observés par le test de Kolmogorov-Smirnov.

Voilà une table des statistiques du Teste de Kolmogorov-Smirnov, avec  $n = 1, \dots, 100$  l'effectif de l'échantillon, et  $c = 0.10, 0.05, 0.01$  le risque d'erreur :

	0.1	0.05	0.01
n	1,223/raci	1,358/racine(n)	1,629/racine(n)

Dans notre échantillon des sinistres à la part historique :

#	276	213	105
From	2,003	2,005	2,008
To	2,012	2,012	2,012

Donc on n'accepte hypothèse du test des lois que si, la valeur du test de Kolmogorov-Smirnov est inférieur aux valeurs suivantes :

	0.1	0.05	0.01
105	0.119059809	0.13252723	0.158974122
276	0.07343537	0.081741994	0.098054277
213	0.083593023	0.093048627	0.111617241

## E. Sélection d'une distribution des sinistres à la part observés

On va prendre les sinistres à la part ultime (la dernière colonne du développement de chaque sinistre effectué auparavant), escomptés à la date d'aujourd'hui.

On sélectionne tous les sinistres à la part de la cédante depuis 2005 observés et revalorisés à la date actuelle.

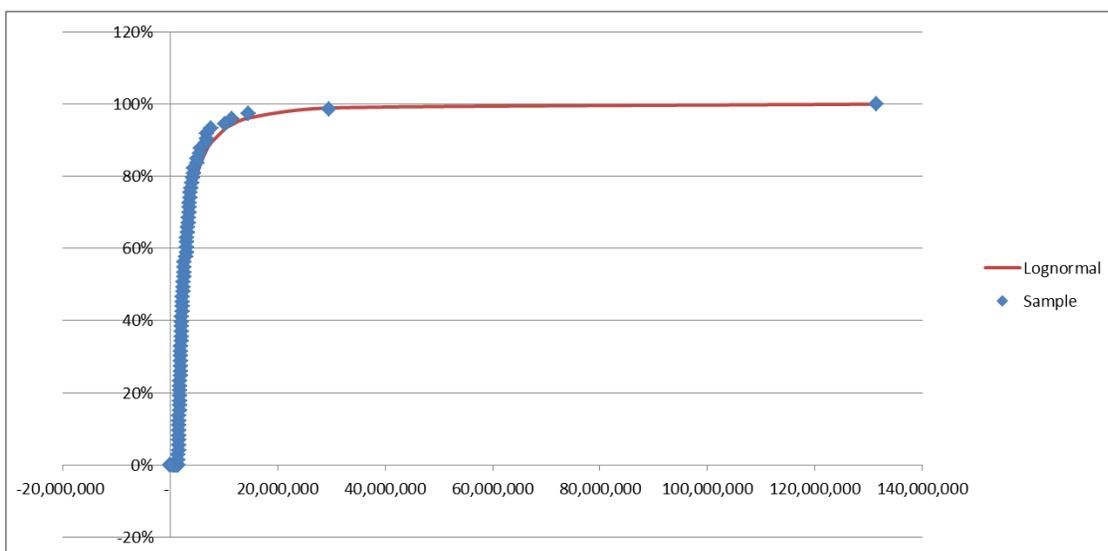
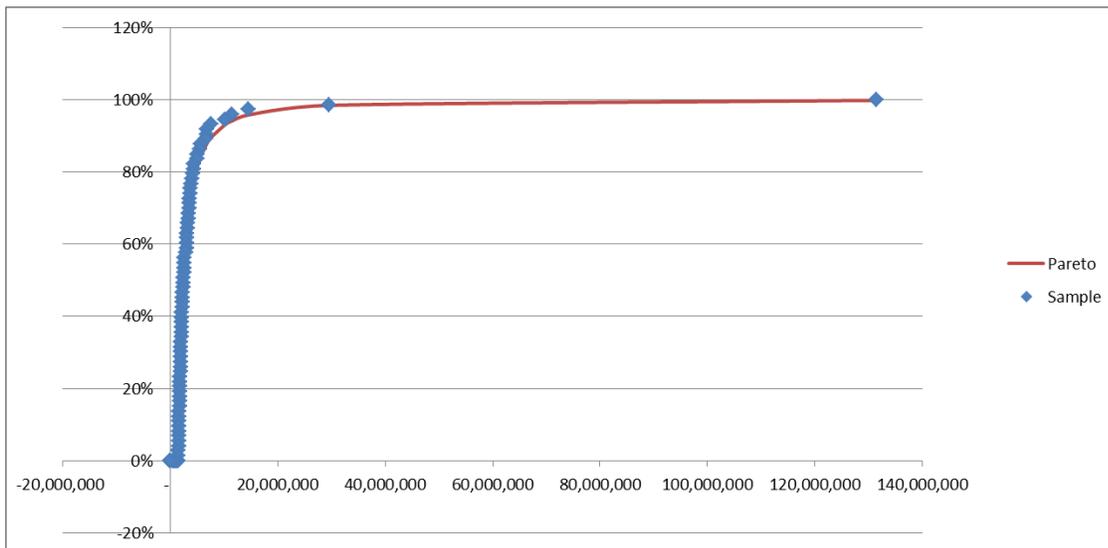
On retient le seuil  $S1$  qui correspond au seuil avec lequel on va déterminer le nombre de sinistre.

<b>Threshold</b>	<b>1,500,000</b>
<b># claims retain</b>	<b>30.08</b>
<b>#Claims&gt;Threshold</b>	<b>136</b>
<b>Average cost</b>	<b>6,657,086</b>
<b>Min</b>	<b>-</b>
<b>Max</b>	<b>141,524,456</b>

On estime les paramètres de différentes lois et on effectue un test de Kolmogorov Smirnov :

Distribution	p1	p2	kolmogorov-smirnov
Pareto	1.22		0.0653
Exponential	0.00		0.3595
Weibull	0.59	2,654,582	0.1243
Lognormal	14.00	1.55	0.0612
Generalized Pareto	0.46	2,798,145	0.2167
Gamma	0.09	60,553,904	0.5637

D'après les graphes suivants et le test de Kolmogorov-Smirnov, l'ajustement avec la loi de Pareto et la loi LogNormal sont les plus adéquats à notre échantillon.



Donc on choisit dans notre processus de tarification de modéliser les sinistres à la part de la cédante par les deux lois Pareto et LogNormal.

On a pris une distribution des sinistres à la part observés, car on a un nombre important de sinistre.

Si on avait pris les sinistres observés de chaque portefeuille et essayait d'ajuster une loi dessus, cela reviendrait à ajuster une loi sur moins de 10 sinistres par an, ce qui n'est pas du tout significatif.

## F. Simulation

### 1. Simulation du nombre de sinistre dans l'année

On simule cette variable avec un tirage uniforme entre [0,1] sur la loi (discrète) de Poisson, dont la moyenne  $\lambda$  sera déduite de l'étude précédant sur la fréquence de sinistres observés en fonction des seuils.

Ultimate #	1,500,000	1,600,000	1,700,000	1,800,000	1,900,000	2,000,000	2,250,000	2,500,000	2,750,000	3,000,000
2,008	30.73	28.73	26.73	24.73	23.73	23.73	21.73	17.73	17.26	17.26
2,009	30.08	29.08	29.08	27.69	24.30	23.30	18.91	17.91	17.33	17.33
2,010	26.65	26.50	25.36	23.66	21.82	19.68	18.98	18.12	15.89	14.89
2,011	25.86	24.71	24.11	22.06	20.71	20.26	17.21	16.85	16.38	16.23
2,012	26.62	26.27	24.36	22.77	21.12	20.40	18.58	17.34	16.91	16.61

# of simulation	2000
ptf	2009
Threshold @ sh	1,500,000
#	30.08
Average Cost	6,657,086

Donc on va créer une loi de poisson dont la moyenne est Lambda.

Si  $U$  est une loi Uniforme distribué sur [0,1], alors on redéfinit  $N$  par :

$$N = K * I_{\{p_{k-1} \leq U < p_k\}}$$

En fonction de la variation de  $U$  sur l'intervalle [0,1], on déduira à chaque fois le nombre de sinistre  $X$  de façon aléatoire.

### 2. Simulation du sinistre à la part moyen en fonction du seuil

On va simuler des sinistres à la part de la cédante qui obéissent aux deux lois qu'on avait sélectionnés auparavant, à savoir Pareto et LogNormal.

### *i.*      **Simulation (Pareto/LogNormal) pour calculer les sinistres à 100%**

Maintenant on va générer des montants de sinistre à la part qui obéissent à une loi de Pareto/LogNormal. Le nombre de sinistres généré va être régi par la loi de Poisson comme cité auparavant.

Donc pour avoir nos échantillons et faire des études de fréquence et de sévérité, on sélectionne les polices dont la limite à la part est supérieure au sinistre à la part simulé. On attribue une nouvelle probabilité conditionnelle à ces programmes avec une fonction de répartition empirique ou proportionnelle des polices.

Par la suite, on va faire un tirage aléatoire sur ces polices sélectionnées pour leur affecter les sinistres aux parts simulés et calculer les sinistres FGU correspondant.

Une fois cette opération terminée, on va transposer ces données simulées dans un autre fichier pour faire des études de fréquence et de sévérité qui suivent le même principe que les études de fréquence et de sévérité sur les données observées. Et on va ajuster des lois de probabilité sur les sinistres à 100% et assurer le test de Kolmogorov-Smirnov.

Cette opération de simulation va se poursuivre pour chaque seuil, par conséquent pour chaque Lambda et chaque nombre de sinistre. Aussi pour chaque Alpha utilisé pour le tirage sur la loi de Pareto.

Le but est d'avoir un maximum de simulation pour avoir le maximum d'études sur la sévérité et la fréquence pour avoir des résultats stables pour chaque portefeuille, et comparer ces résultats avec les données observées.

### *ii.*      **Formalisation**

Une seule simulation :

On générer :

$N_i$ : Le nombre de sinistre est générer par une loi de Poisson( $\lambda$ ).

$Y_{i,k,j,\infty}$ : Un sinistre à la part de la cédante qui suit une loi de Pareto ou Log normal en tenant compte du seuil  $S1$ , c'est-à-dire des lois tronquées.

Avec  $(Y_{i,k,j,\infty})_{j=1\dots N_i}$  l'ensemble des sinistres générés dans une simulation, avec un nombre de sinistres  $N_i$  généré.

Remarque : Pour la Pareto c'est plus simple, car c'est une loi stable par troncature, le  $x_{min} = S1$ .

Pour chaque  $Y_{i,k,j,\infty}$  :

On note  $\{k_m, \text{avec } L_{k_m, v}\}_{m=1 \dots i; v=1 \dots V_{k_i}}$  l'ensemble des polices qui constituent un portefeuille, ou  $L_{k_m, v}$  la limite à la part de la cédante pour la police  $k_m$

Donc  $\{k_m^*, L_{k_m, v}\}_{m=1 \dots i; v=1 \dots V_{k_i}} = \{k_m, \text{avec } L_{k_m, v} > Y_{i, k, j, \infty}\}_{m=1 \dots i; v=1 \dots V_{k_i}}$  l'ensemble des polices du portefeuille dont la limite à la part est supérieure au sinistre à la part  $X$  généré auparavant.

On attribue une fonction de répartition  $F_{k_i^*}$  (empirique ou proportionnelle) à l'ensemble  $\{k_m^*, L_{k_m, v}\}_{m=1 \dots i; v=1 \dots V_{k_i}}$ .

Soit  $U$  une loi uniforme entre 0 et 1.

On fait un tirage aléatoire sur l'ensemble  $\{k_m^*, L_{k_m, v}\}_{m=1 \dots i; v=1 \dots V_{k_i}}$  en fonction de la fonction de répartition  $F_{k_i^*}$  :

$$k'_m = k_m^* = p_{k_{i-1}} \leq u < p_{k_i} \text{ avec } p_{k_i} \text{ la probabilité de la police } k_i$$

Avec  $(k'_m)_{m=1 \dots N_i}$  les polices sélectionnées pour une simulation, avec un nombre de sinistre  $N_i$ . Et chaque sinistre  $Y_{i, k, j, \infty}$  va être affecté à la police  $k'_m$ .

On calcule les  $(X_{i, k, j, \infty})_{j=1 \dots N}$  les sinistres FGU (sinistres complets) correspondant aux sinistres à la part  $Y_{i, k, j, \infty}$  qui affectent les polices  $k'_m$

Sur les  $(X_{i, k, j, \infty})_{j=1 \dots N_i}$ , on va calculer la fréquence et la sévérité avec un seuil  $S_2$  ( $S_2$  est choisi en fonction du portefeuille). La fréquence étant le nombre de sinistre FGU qui dépassent le seuil  $S_2$ , et la sévérité correspond au cout moyen des sinistres FGU dépassant le seuil  $S_2$ .

Pour  $M$  simulation :

Soit  $M$  un nombre entier strictement supérieur à 1.

On va reprendre tous les sinistres complets calculés  $\{(X_{i, k, j, \infty})_{j=1 \dots N_i, l}\}_{l=1 \dots M}$ . On va ajuster les paramètres des lois de probabilité (comme les paramètres de Pareto, Weibul, Lognormal, Gamma). Et on va faire un test de Kolmogorov Smirnov sur la justesse des paramètres estimés.

## G. Résultats

On dispose de de 5 portefeuilles : {2008, 2009, 2010, 2011}.

Pour chaque portefeuille on va choisir 5 seuils  $S_1$  {1,500,000 ; 1,800,000 ; 2,000,000 ; 3,000,000 ; 4,500,000} , car au vu de notre analyse des sinistres observés, ces seuils nous paraissent les plus pertinents.

Pour chaque  $S1$ , on va modéliser les sinistres à la part  $(Y_j)_{j=1\dots N}$  avec deux lois de probabilité Pareto et LogNormal.

Et pour chaque loi de probabilité (Pareto ou LogNormal), on va attribuer deux fonctions de répartition aux  $\{k_i^*, L_i\}_{i=1\dots n}$ , soit la fonction de répartition empirique ou la fonction de répartition proportionnelle.

C'est-à-dire qu'on a 20 possibilités de simulation par portefeuille. Sachant que pour chaque possibilité, on va faire 2000 simulations (2000 simulations représentent le nombre de simulation à partir desquels on a des résultats stables et qui varient très peu).

### **Portefeuille 2009**

Par soucis de simplification, on va présenter les résultats les plus importants du portefeuille 2009.

2009 est un portefeuille dans lequel on a le plus d'information sur la sinistralité historique.

On va présenter les résultats du portefeuille 2009, un portefeuille où on a plus d'informations sur les sinistres observés.

Les résultats de la fréquence et de la sévérité des simulations vont être comparés aux résultats de la fréquence et la sévérité observées, qui sont des résultats basés sur des valeurs de sinistres escomptés à la date d'aujourd'hui. Pour la fréquence observé : on garde des valeurs non extrapolés à l'ultime, car c'est une fréquence observé sur des sinistres réel. Pour La sévérité observée, ce sont des valeurs extrapolées à l'ultime, donc sujettes à une comparaison avec les résultats de la sévérité simulé, si notre l'hypothèse du développement de nos triangles est juste, à savoir tous les IBNR ont le même cout moyen que les sinistres connus.

#### **1. Pour le seuil $S1 = 1,500,000$**

On réalise 2000 simulations en choisissant un seuil  $S1 = 1,500,000$

##### ***i. Distribution des polices à la part de la cédante uniforme***

La distribution des primes est importante dans le processus de simulation, car après avoir généré un sinistre à la part de la cédante qui suit une loi Pareto ou une loi Lognormal, la distribution des primes détermine l'allure de nos tirages aléatoires des polices du portefeuille comme expliqué auparavant. En fonction de chaque distribution, les résultats concernant la fréquence et la sévérité changent tout en gardant le même seuil  $S1$ .

Pour une distribution uniforme des polices et des sinistres à la part qui suivent une loi Pareto :

# of simulation	2000
ptf	2009
Threshold @ share	1,500,000
#	30.08
Average Cost	6,657,086
Select Dist	Pareto
p1	1.22
p2	0

Avec  $P1 = 1,22$  la valeur estimé du paramètre  $\alpha$  pour la loi Pareto ; 30,08 le paramètre  $\lambda$  pour la loi de poisson (pour générer un nombre de sinistre)

On a les résultats de 2000 simulations de fréquence et sévérité suivants, et on met à coté les résultats de la fréquence et de la sévérité observés :

Threshold @ 100%	#	Average Cost	stv clm
5,000,000	13.12	40,265,709	106,725,329
10,000,000	8.05	61,199,109	167,464,547
15,000,000	6.13	76,843,698	214,499,539
20,000,000	5.15	88,932,868	250,980,163
25,000,000	4.524	99,224,685.91	294250156.5

S2	#	Average Cost
5,000,000	11	94,449,114
10,000,000	10	103,200,182
15,000,000	7.5	133,587,372
20,000,000	6.5	151,213,515
25,000,000	6	161,757,189

Pour une distribution uniforme des polices et des sinistres à la part qui suivent une loi LogNormal :

# of simulation	2000
ptf	2009
Threshold @ share	1,500,000
#	30.08
Average Cost	6,657,086
Select Dist	Lognormal
p1	14.00
p2	1.550192501

Avec  $P1 = 1,22$  et  $P2 = 1,550192501$  la valeur estimé des paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  pour la loi LogNormal ; 30,08 le paramètre  $\lambda$  pour la loi de Poisson (pour générer un nombre de sinistre)

On a les résultats de 2000 simulations de fréquence et sévérité suivants, et on met à coté les résultats de la fréquence et de la sévérité observés :

Threshold @ 100%	#	Average Cost	stv clm
5,000,000	13.46	38,351,972	100,378,350
10,000,000	8.14	58,824,696	157,566,564
15,000,000	6.17	73,907,426	200,480,951
20,000,000	5.12	86,437,252	237,576,087
25,000,000	4.5055	96,858,480.67	286864694.4

S2	#	Average Cost
5,000,000	11	94,449,114
10,000,000	10	103,200,182
15,000,000	7.5	133,587,372
20,000,000	6.5	151,213,515
25,000,000	6	161,757,189

Au niveau de la fréquence :

On estime qu'on est plus proche des observés sur les seuils les plus hauts (à partir de 15,000,000). On surestime la fréquence pour le seuil de 5,000,000.

Pour le seuil 25,000,000 , on sous-estime la fréquence des sinistres par rapport au observés.

25,000,000 est un seuil très important pour nous, car il consiste la priorité de notre traité de réassurance.

Les résultats obtenus avec des sinistres à la part qui suivent la loi Pareto ou la loi LogNormal sont similaires.

## ii. *Distribution des polices proportionnelle à la part de la cédante*

Pour une distribution des polices proportionnelle et des sinistres à la part qui suivent une loi Pareto :

# of simulation	2000
ptf	2009
Threshold @ share	1,500,000
#	30.08
Average Cost	6,657,086
Select Dist	Pareto
p1	1.22
p2	0

Avec  $P1 = 1,22$  la valeur estimé du paramètre  $\alpha$  pour la loi Pareto ; 30,08 le paramètre  $\lambda$  pour la loi de poisson (pour générer un nombre de sinistre)

On a les résultats de 2000 simulations de fréquence et sévérité suivants, et on met à coté les résultats de la fréquence et de la sévérité observés :

Threshold @ 100%	#	Average Cost	stv cdm
5,000,000	19.25	72,189,476	154,520,283
10,000,000	13.64	98,923,602	208,030,490
15,000,000	11.29	116,964,259	241,976,829
20,000,000	9.76	132,567,847	269,234,768
25,000,000	8.7595	145,184,700.18	292634706.4

S2	#	Average Cost
5,000,000	11	94,449,114
10,000,000	10	103,200,182
15,000,000	7.5	133,587,372
20,000,000	6.5	151,213,515
25,000,000	6	161,757,189

Pour une distribution proportionnelle des polices et des sinistres à la part qui suivent une loi LogNormal :

# of simulation	2000
ptf	2009
Threshold @ share	1,500,000
#	30.08
Average Cost	6,657,086
Select Dist	Lognormal
p1	14.00
p2	1.550192501

Avec  $P1 = 1,22$  et  $P2 = 1,550192501$  la valeur estimé des paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  pour la loi LogNormal ; 30,08 le paramètre  $\lambda$  pour la loi de poisson (pour générer un nombre de sinistre)

On a les résultats de 2000 simulations de fréquence et sévérité suivants, et on met à coté les résultats de la fréquence et de la sévérité observés :

Threshold @ 100%	#	Average Cost	stv cdm
5,000,000	19.62	69,850,050	147,148,598
10,000,000	13.97	95,231,113	197,075,525
15,000,000	11.46	113,364,920	231,754,201
20,000,000	9.86	128,949,315	260,449,181
25,000,000	8.8325	141,369,918.22	283202881.6

S2	#	Average Cost
5,000,000	11	94,449,114
10,000,000	10	103,200,182
15,000,000	7.5	133,587,372
20,000,000	6.5	151,213,515
25,000,000	6	161,757,189

Au niveau de la fréquence :

On estime qu'on est plus proche des observés sur les seuils les plus hauts (à partir de 15,000,000). On surestime la fréquence pour le seuil de 5,000,000.

Pour le seuil 25,000,000 , on surestime la fréquence des sinistres par rapport au observés.

25,000,000 est un seuil très important pour nous, car il consiste la priorité de notre traité de réassurance.

Il est normal d'avoir des résultats de fréquence supérieur aux observés, car la fréquence observées n'est pas extrapolée à l'ultime.

## 2. Pour le seuil $S1 = 1,800,000$

On obtient des résultats très proches du seuil 1,500,000 , par exemple pour une distribution des polices uniforme et des sinistres à la part qui suivent une loi Pareto on obtient :

Threshold @ 100%	#	Average Cost	stv clm
5,000,000	13.34	39,270,610	101,704,804
10,000,000	8.01	60,850,480	162,401,805
15,000,000	6.10	76,241,099	205,962,669
20,000,000	5.08	88,916,105	242,241,511
25,000,000	4.5195	99,640,458.41	279195397.9

On constate qu'on a quasiment la même fréquence pour les deux seuils.

Les observés sont aussi les même pour les deux seuils :

	#	Average Cost
5,000,000	11	94,449,114
10,000,000	10	103,200,182
15,000,000	7.5	133,587,372
20,000,000	6.5	151,213,515
25,000,000	6	161,757,189

Donc la conclusions et la même pour les deux seuil ( $S1 = 1,500,000$  et  $S1 = 1,800,000$ ), pour le seuil 25,000,000 , on sous-estime la fréquence des sinistres par rapport au observés.

Pour une distribution des polices proportionnelle et des sinistres à la part qui suivent une loi Pareto on obtient :

Threshold @ 100%	#	Average Cost	stv clm
5,000,000	19.08	68,913,280	144,701,277
10,000,000	13.60	93,779,414	194,374,399
15,000,000	11.04	112,766,835	231,608,925
20,000,000	9.53	127,858,487	261,130,512
25,000,000	8.4705	141,008,356.73	284073051.3

Le constat est le même pour les deux seuil ( $S1 = 1,500,000$  et  $S1 = 1,800,000$ ), pour le seuil 25,000,000 , on surestime la fréquence des sinistres par rapport au observés.

### 3. Pour les seuils 2,000,000 , 3,000,000 , 4,500,000

Les résultats de la fréquence changent, par exemple pour le seuil 4,500,000 , une distribution des polices non uniforme (proportionnelle) et des sinistres à la part qui suivent une loi Pareto on obtient :

Threshold @ 100%	#	Average Cost	stv clm
5,000,000	8.61	70,689,889	110,930,992
10,000,000	6.83	87,324,020	137,364,323
15,000,000	5.65	103,957,566	162,221,687
20,000,000	4.97	117,530,158	183,671,082
25,000,000	4.4705	127,608,899.37	200749844.3

Pour le seuil 25,000,000 , on surestime beaucoup moins la fréquence des sinistres par rapport au observés.

Par contre les résultats des observés ne changent pas énormément :

	#	Average Cost
5,000,000	5	165,317,395
10,000,000	5	165,317,395
15,000,000	4	203,923,509
20,000,000	4	203,923,509
25,000,000	4	203,923,509

Conclusions sur la fréquence :

Les simulations effectuées avec la distribution des polices proportionnelle sont les plus proches des observés.

### 4. Fit des sinistres FGU

On prend les résultats de nos simulations réalisés, avec une distribution des primes non uniforme, concernant tous les sinistres FGU qu'on a calculés et qui ont constitués la base de nos études de fréquence.

On va ajuster des lois de probabilité sur les sinistres FGU simulés en utilisant la méthode des moments et le maximum de vraisemblance pour l'estimation des paramètres. L'ajustement est fait à partir du seuil  $S_2 = 25,000,000$  qui est la priorité de notre traité.

## 5. Pour le seuil $S1 = 1,500,000$

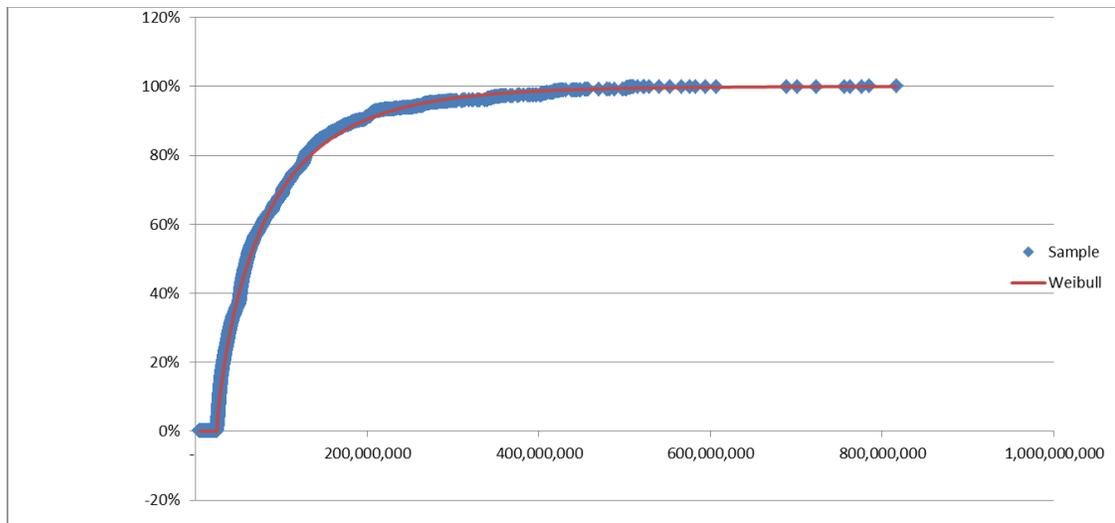
Pour une simulation des sinistres à la part des sinistres à la part avec la loi de Pareto on obtient les paramètres estimés pour l'ajustement de lois sur les sinistres complets à partir du seuil  $S2 = 25,000,000$  suivants :

Distributi	p1	p2	test de Koglmorov
Pareto	0.75		0.1648
Exponenti	8.17E-09		0.1448
Weibull	0.7701	104,573,889	0.0760
Lognorma	17.73	1.575341621	0.0903
Generaliz	0.178	100,546,434	0.1033
Gamma	0.6437	190,078,526	0.0804

Avec le test de Kolmogorov Smirnov :

n	0.1	0.05	0.01
18139	0.009081	0.010083077	0.012095238

On remarque que les lois les plus proches de notre distribution des sinistres FGU sont : Weibull et LogNormal.



Pour une simulation des sinistres à la part des sinistres à la part avec la loi LogNormal on obtient les paramètres estimés pour l'ajustement de lois sur les sinistres complets à partir du seuil  $S2 = 25,000,000$  suivants :

Distribution	p1	p2	test de Koglmorov
Pareto	0.76		0.1577
Exponential	8.37E-09		0.1499
Weibull	0.7568	100,732,433	0.0760
Lognormal	17.68	1.601583581	0.0915
Generalized Pareto	0.187	97,140,257	0.1088
Gamma	0.6254	191,109,434	0.0808

Avec le test de Kolmogorov Smirnov :

n	0.1	0.05	0.01
144525600.9	0.000102	0.000112961	0.000135503

On remarque que les lois les plus proches de notre distribution des sinistres FGU sont : Weibull et LogNormal.

Les paramètres estimés ont quasiment les mêmes valeurs peu importe la loi de simulation de sinistres à la part de la cédante (Pareto ou LogNormal).

On remarque aussi que le paramètre  $\sigma$  de la loi Lognormal est de 1,527, on peut en déduire que la distribution est assez lourde.

Pour les autres seuils  $S_1$  (1,800,000 , 2,000,000 , 3 , 000,000 , 4,500,000), on a le même constat à savoir que les lois Weibull et Lognormal sont les plus proches de la distribution de sinistres FGU simulés.

Donc on retient les valeurs de paramètres estimés pour ces deux lois, afin de les réutiliser dans les simulations qui vont être faites pour le portefeuille actuel.

**Conclusion** : on va retenir les paramètres estimés des lois Weibull et Lognormal, avec la loi LogNormal pour la simulation de sinistres à la part, car elle présente le meilleur test pour Kolmogorov Smirnov.

Cela dit, la loi choisie pour simuler les sinistres à la part (loi de Pareto ou loi LogNormal), n'a pas beaucoup d'impact sur les sinistres à 100% et l'ajustement des lois sur les sinistres à 100%. Il suffit de regarder les paramètres estimés pour les sinistres FGU pour en déduire qu'ils sont très proches.

## H. Problème de seuil : on va descendre à $S1 = 1,400,000$

On sait que les informations fournis par la cédante concernant les sinistres à sa part, ne sont que les montants de sinistre dépassant un certain seuil  $S1$ . Le réassureur n'a aucune vision sur la fréquence ni la sévérité des sinistres en dessous ce seuil  $S1$ .

Notre motivation est d'obtenir des résultats stable, d'où le fait de tester des seuils plus bas. Cela va nous permettre d'avoir une idée assez complète sur le profil du risque du portefeuille à étudier.

On sait que si on baisse le seuil  $S1$  de 10% de sa valeur, la courbe des sinistres à la part de la cédante reste relativement juste. Et par conséquent les informations qu'on peut en déduire sur les sinistres FGU restent relativement justes.

Le  $S1$  le plus petit est de la valeur 1,500,000. Donc on pourrait baisser le seuil jusqu'à

$$S1^* = 1,500,000 * (1 - 10\%) = 1,350,000$$

Dans notre étude on va choisir le seuil de  $S1^* = 1,400,000$

### 1. Le nombre de sinistre pour le nouveau seuil $S1^*$

Le nombre de sinistre pour le nouveau seuil  $S1^*$ , c'est-à-dire le lambda utilisé pour simuler le nombre de sinistre avec la loi de Poisson, est obtenu par une extrapolation des nombres de sinistres ultime historique en fonction de leur seuil initial  $S1$ .

#### Explication :

Pour le portefeuille de 2009, on va réunir les nombre de sinistres développés à l'ultime on fonction de leur seuil :

Portefeuille	2,009	
Seuil S1	Incurred	Ultimate
1.40		
1.50	21.00	30.08
1.60	20.00	29.08
1.70	20.00	29.08
1.80	19.00	27.69
1.90	16.00	24.30
2.00	15.00	23.30
2.25	11.00	18.91
2.50	10.00	17.91
2.75	9.00	17.33
3.00	9.00	17.33
3.25	9.00	14.95
3.50	8.00	13.54
3.75	7.00	12.18
4.00	7.00	12.18
4.50	5.00	7.78
5.00	5.00	6.98
5.50	3.00	4.99
6.00	3.00	4.99
7.00	3.00	4.98
8.00	3.00	4.79
9.00	3.00	4.79
10.00	3.00	4.79

Avec la méthode des Moindres Carrés, on va ajuster une fonction exponentielle sur les ultimes.

Soit  $(N_i)_{i=1..22}$  les nombres de sinistres développés à l'ultime en fonction des seuils  $(S1_i)_{i=1..22}$

Soit la fonction exponentielle :  $f(s1_i, a, b, c) = a + \exp(b * s1_i + c)$

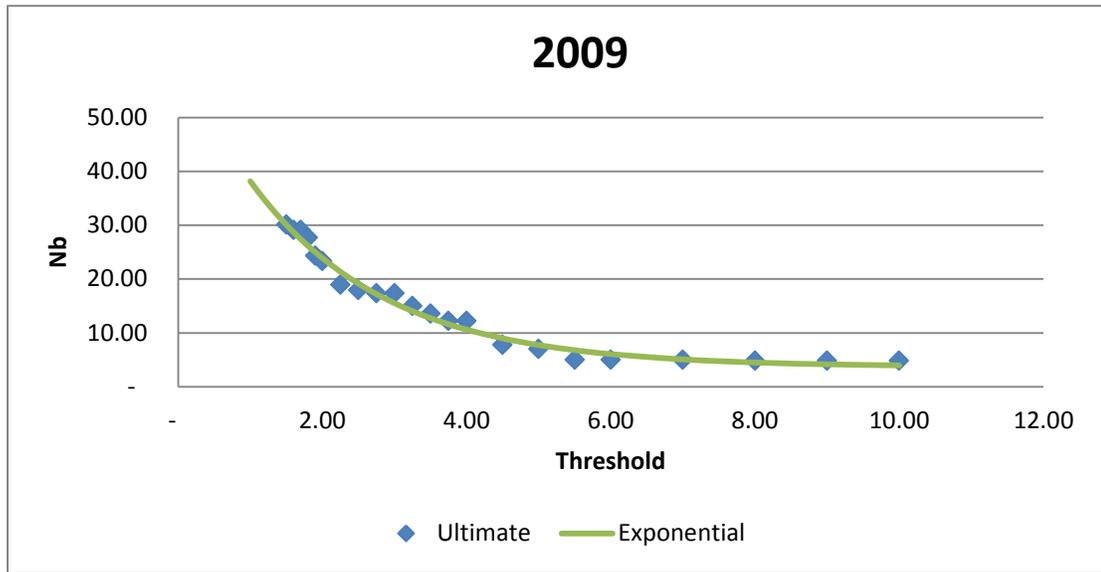
Les paramètres  $a, b$  et  $c$  au sens de la méthode des Moindres Carrés sont ceux qui minimisent l'expression suivante :

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^N (n_i - f(s1_i, a, b, c))^2$$

Et on obtient les valeurs de la courbe de la fonction exponentielle :

Portefeuille		2,009		
Seuil S1		Incurred	Ultimate	Exp
1.00				43.21
1.10				39.74
1.20				36.79
1.30				34.25
1.40				32.03
1.50		21.00	30.08	30.08
1.60		20.00	29.08	28.34
1.70		20.00	29.08	26.79
1.80		19.00	27.69	25.40
1.90		16.00	24.30	24.13
2.00		15.00	23.30	22.98
2.25		11.00	18.91	20.50
2.50		10.00	17.91	18.47
2.75		9.00	17.33	16.77
3.00		9.00	17.33	15.33
3.25		9.00	14.95	14.08
3.50		8.00	13.54	13.00
3.75		7.00	12.18	12.04
4.00		7.00	12.18	11.20
4.50		5.00	7.78	9.75
5.00		5.00	6.98	8.57
5.50		3.00	4.99	7.58
6.00		3.00	4.99	6.74
7.00		3.00	4.98	5.38
8.00		3.00	4.79	4.33
9.00		3.00	4.79	3.49
10.00		3.00	4.79	2.80

Pour illustrer cette ajustement on fait dessine la courbe des ultimes et la courbe de la fonction exponentielle :



Donc pour le nouveau seuil  $S1^* = 1,400,000$  , le nombre de sinistres va être de 32,03 d’après la fonction exponentielle.

### 1. Les paramètres de la simulation des sinistres à la part pour le nouveau seuil $S1^*$

Pour les paramètres de la modélisation des sinistres à la part  $(Y_j)_{j=1...N}$  , soit avec la loi Pareto ou la loi LogNormal, on va garder les meme paramètres estimés que pour le seuil  $S1 = 1,500,000$ , c’est-à-dire :

Distribution	p1	p2	
Pareto		1.18	
Exponential		0.00	
Weibull		0.59	2,609,353
Lognormal		14.04	1.45
Generalized Pareto		0.46	2,711,808
Gamma		0.08	59,605,906

### 2. Résultats de la simulation avec le nouveau seuil $S1^*$

Pour une distribution des polices proportionnelle et des sinistres à la part qui suivent une loi Pareto :

# of simulation	2000
ptf	2009
Threshold @ share	1,400,000
#	31.53
Average Cost	6,403,592
Select Dist	Pareto
p1	1.18
p2	0

Avec  $P1 = 1,18$  la valeur estimé du paramètre  $\alpha$  pour la loi Pareto ; 31,53 le paramètre  $\lambda$  pour la loi de poisson (pour générer un nombre de sinistre)

On a les résultats de 2000 simulations de fréquence et sévérité suivants, et on met à coté les résultats de la fréquence et de la sévérité observés :

Threshold @ 100%	#	Average Cost	stv clm
5,000,000	19.74	74,057,478	160,038,519
10,000,000	14.00	101,450,762	212,335,544
15,000,000	11.61	119,842,645	246,597,799
20,000,000	10.09	135,307,471	274,840,846
25,000,000	9.1025	147,510,953.71	296078579.5

S2	#	Average Cost
5,000,000	11	94,449,114
10,000,000	10	103,200,182
15,000,000	7.5	133,587,372
20,000,000	6.5	151,213,515
25,000,000	6	161,757,189

Pour une distribution uniforme des pplices et des sinistres à la part qui suivent une loi LogNormal :

# of simulation	2000
ptf	2009
Threshold @ share	1,400,000
#	31.53
Average Cost	6,403,592
Select Dist	Lognormal
p1	14.04
p2	1.446059109

Avec  $P1 = 14,04$  et  $P2 = 1,4460591091$  la valeur estimé des paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  pour la loi LogNormal ; 31,53 le paramètre  $\lambda$  pour la loi de poisson (pour générer un nombre de sinistre)

On a les résultats de 2000 simulations de fréquence et sévérité suivants, et on met à coté les résultats de la fréquence et de la sévérité observés :

Threshold @ 100%	#	Average Cost	stv clm
5,000,000	20.03	68,919,804	150,491,947
10,000,000	13.99	95,539,761	203,856,982
15,000,000	11.48	113,757,526	238,836,937
20,000,000	9.94	128,774,719	268,313,505
25,000,000	8.861	141,714,660.94	292308762.6

S2	#	Average Cost
5,000,000	11	94,449,114
10,000,000	10	103,200,182
15,000,000	7.5	133,587,372
20,000,000	6.5	151,213,515
25,000,000	6	161,757,189

La fréquence :

Les résultats sont assez proches de ceux trouvés avec le seuil  $S1 = 1,500,000$

La sévérité :

Les paramètres ajustés pour les sinistres à 100% avec le nouveau seuil  $S1^* = 1,400,000$  et à partir du seuil  $S2=25,000,000$ :

Distributio	p1	p2	test de Koglmorov
Pareto	0.75		0.1648
Exponenti	8.17E-09		0.1448
Weibull	0.7701	104,573,889	0.0760
Lognorma	17.73	1.575341621	0.0903
Generaliz	0.178	100,546,434	0.1033
Gamma	0.6437	190,078,526	0.0804

Encore une fois les paramètres estimés avec le seuil  $S1^* = 1,400,000$  sont très proche de ceux obtenus par le seuil  $S1 = 1,500,000$ .

## I. Les portefeuilles 2010 et 2011

Sur les portefeuilles de 2010 et 2011, on n'a pas beaucoup de sinistres observés. Ce sont des portefeuilles récents et par conséquent on n'a pas beaucoup de recul dessus.

### 1. Portefeuille 2010 :

Pour une distribution proportionnelle des polices et des sinistres à la part, dépassant le seuil  $S1 = 1,500,000$ , qui suivent une loi LogNormal :

# of simulation	2000
ptf	2010
Threshold @ share	1,500,000
#	26.65
Average Cost	6,657,086
Select Dist	Lognormal
p1	14.00
p2	1.550192501

Avec  $P1 = 14$  et  $P2 = 1,550192501$  la valeur estimé des paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  pour la loi LogNormal ; 26,65 le paramètre  $\lambda$  pour la loi de poisson (pour générer un nombre de sinistre)

Threshold @ 100%	#	Average Cost	stv clm		#	Average Cost
5,000,000	21.75	40,561,373	72,257,739	5,000,000	5	6,912,146
10,000,000	12.78	64,116,651	115,992,395	10,000,000	1	10,114,348
15,000,000	9.90	79,177,879	141,111,571	15,000,000	0	0
20,000,000	8.10	92,950,971	161,953,960	20,000,000	0	0
25,000,000	7.006	103,967,892.29	177307071.6	25,000,000	0	0

On remarque qu'il y a beaucoup de différence entre les simulés et les observés.

## 2. Portefeuille 2011 :

Pour une distribution proportionnelle des polices et des sinistres à la part, dépassant le seuil  $S1 = 1,500,000$  qui suivent une loi LogNormal :

# of simulation	2000
ptf	2011
Threshold @ share	1,500,000
#	25.86
Average Cost	6,657,086
Select Dist	Lognormal
p1	14.00
p2	1.550192501

Avec  $P1 = 14$  et  $P2 = 1,550192501$  la valeur estimé des paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  pour la loi LogNormal ; 25,86 le paramètre  $\lambda$  pour la loi de poisson (pour générer un nombre de sinistre)

Threshold @ 100%	#	Average Cost	stv clm		#	Average Cost
5,000,000	20.90	53,953,519	125,459,043	5,000,000	3	8158243.464
10,000,000	12.84	83,483,127	194,675,715	10,000,000	1	10114347.7
15,000,000	9.90	104,576,061	244,703,841	15,000,000	0	0
20,000,000	7.95	126,678,062	294,270,044	20,000,000	0	0
25,000,000	6.676	146,083,508.83	341081554.7	25,000,000	0	0

On remarque qu'il y a beaucoup de différence entre les simulés et les observés.

## I. Conclusion

### 1. La fréquence :

Pour le seuil  $S1 = 1,500,000$

On a la moyenne de la fréquence observées (la moyenne de sinistres par an qui dépassent le seuil  $S2 = 25,000,000$ ) sur les 3 dernières années de  $(6 + 0 + 0)/3 = 2$

#	2009	2010	2011
5,000,000	11	5	3
10,000,000	10	1	1
15,000,000	7.5	0	0
20,000,000	6.5	0	0
25,000,000	6	0	0

Si pour nos simulations on retient les résultats avec la distribution uniforme des polices, on a :

#	2009	2010	2011
5,000,000	13.46	11.7	10.8
10,000,000	8.14	7.2	6.5
15,000,000	6.17	5.5	5.0
20,000,000	5.12	4.6	4.3
25,000,000	4.51	4.2	3.5

On est entre 4,5 et 3,5 de nombre de fréquence sur les 3 dernières années. Donc on a une moyenne de 4 sinistres par an qui dépassent le seuil  $S2 = 25,000,000$ .

Si pour nos simulations on retient les résultats avec la distribution uniforme des polices, on a :

#	2009	2010	2011
5,000,000	19.74	17.07	16.87
10,000,000	14.00	11.92	11.86
15,000,000	11.61	9.38	9.23
20,000,000	10.09	8.07	7.84
25,000,000	9.1025	7.381	7.037

On est entre 9 et 7 de nombre de fréquence sur les 3 dernières années. Donc on a une moyenne de 8 sinistres par an qui dépassent le seuil  $S_2 = 25,000,000$

La médiane entre les deux simulations avec des distributions de polices uniforme et proportionnelle est de :  $(4 + 8)/2 = 6$

Donc pour la simulation du portefeuille actuel, on va tester la sensibilité sur les hypothèses retenues, à savoir, générer un nombre de sinistres avec la loi de *Poisson*( $\lambda$ ), à savoir un  $\lambda = 4, 8$  et  $6$ .

## 2. La sévérité :

On va garder les mêmes paramètres d'ajustement de loi sur les sinistres complets (la loi Weibull et LogNormal) retenu auparavant pour le seuil  $S_1 = 1,500,000$  et à partir du seuil  $S_2 = 25,000,000$  sur le portefeuille 2009 :

Distributi	p1	p2	test de Koglorov
Pareto	0.98		0.1380
Exponenti	1.46E-08		0.0961
Weibull	0.7973	59,891,956	0.0357
Lognorma	17.20	1.527681663	0.1016
Generaliz	0.200	54,601,046	0.0682
Gamma	0.5997	113,819,681	0.0581

## K. Simulation sur le portefeuille de 2012

On va tarifier 5 tranches du traité de la réassurance :

### 1. L'idée

Après avoir choisi les deux lois d'ajustement des sinistres FGU pour les portefeuilles historiques (la loi LogNormal et la loi Weibull), on va simuler sur le portefeuille actuel, des sinistres à 100% c'est-à-dire les  $X_{i,k}$  qui suivent ces lois (Avec les paramètres estimés précédemment).

On va simuler  $N_M$  un nombre de sinistres à 100% qui suit une loi de *Poisson*( $\lambda$ ), dont le *Lambda* = 4, 8 et 6 comme déterminé auparavant. M= le nombre de simulations

**Pour une seule simulation M=1**

On attribue une fonction de répartition uniforme et une répartition proportionnelle aux polices du portefeuille, à l' aide des primes à 100% des polices.

On va générer un nombre de sinistre.

Pour chaque sinistre  $X_{i,2012}$  , on fait un tirage aléatoire sur toutes les polices du portefeuille actuel.

Si on tire la police k, on va calculer les sinistres à la part de la cédante à l'aide du programme d'assurance sur la police k :

$$Y_{i,k_{2012},v} = \text{Min}[l_{i,k_{2012},v}; \text{Max}(0; X_{i,2012} - d_{i,k_{2012},v})]$$

$$\text{avec } Y_{i,k_{2012}} = \sum_{v=1}^{V_{k_i}} Y_{i,k_{2012},v}$$

Sur lequel on va appliquer directement le programme de réassurance :

$$Z_{i,k_{2012}} = \text{Min}[(Y_{i,k_{2012}} - D)^+ ; C]$$

Et on continue ainsi pour avoir le montant des sinistres à la charge de la réassurance pour chaque sinistre à 100% généré.

$$Z_{i,k_{2012},total_M} = \sum_{r=1}^{N_M} Z_{i,k_{2012},r}$$

**Pour M simulation (M>1)**

On fait la moyenne de tous les montants de sinistres à la part pour toutes les simulations :

$$Z_{i,k_{2012},total} = \sum_{m=1}^M Z_{i,k_{2012},total_M} = \sum_{m=1}^M \sum_{r=1}^{N_M} Z_{i,k_{2012},r}$$

La prime pure va être la moyenne :

$$\text{PrimePure} = \frac{Z_{i,k_{2012},total}}{M}$$

## 2. La clause de stabilisation

Pour le traité *XS* sinistres RC 2012 qu'on va tarifier avec notre nouvelle approche, on a une clause de stabilisation *SIC* 30%.

La Clause de stabilisation *SIC* :

année	2008	20.09	2010	2011	2012	20.13
indice réel	100%	104%	105%	109%	111%	114%
SIC 30%	130%	130%	130%	130%	130%	130%

On a le seuil 25,000,000 qui est trop élevé, et l'indice de l'inflation assez faible. Et d'après la cadence de règlement calculé auparavant, l'impact de la clause de stabilisation est nul. Nos indices d'inflation futur restent stables.

## L. Résultats et comparaison avec les données d'avant

On va exposer les résultats de la prime pure (en millions) pour les tranches du traité sur le portefeuille actuel réalisés à l'aide des deux méthodes classiques : Exposition et Expérience

	Tranche 1	Tranche 2	Tranche 3	Tranche 4	Tranche 5
Expérience	21.5	12.5	5.1	3.3	3.1
Exposure	13.1	9.7	6.0	4.8	3.7

On remarque que la méthode par expérience, les primes pure pour les deux premières tranches sont supérieures à celles obtenus par la méthode d'exposition. Les tranches 1 et 2 sont les plus travaillantes dans notre programme de réassurance. En revanche, pour les tranches 3,4 et 5 (les plus hautes), la prime pure calculée avec la méthode d'expérience a une décroissance plus rapide au profit de la méthode d'exposition.

Ces résultats vont constituer un référentiel pour comparer nos résultats de la prime pure avec notre méthode alternative.

Comme expliqué auparavant, on va simuler des sinistres complets sur le portefeuille actuel avec les deux lois : Weibull et LogNormal, dont les paramètres sont estimés à partir de la simulation des portefeuilles historiques. Pour chaque sinistre complet, on va faire un tirage aléatoire sur les polices du portefeuille afin de calculer les sinistres à la part de la cédante (en appliquant le programme d'assurance de la police tiré), et calculer les sinistres à la charge du réassureur en appliquant le programme de réassurance. Cela va nous permettre de calculer la prime pure.

Le tirage aléatoire des polices du portefeuille se fait après avoir attribué une fonction de répartition des polices uniforme ou proportionnelle à l'aide des primes complètes.

Pour chaque simulation, on va générer un nombre de sinistres avec la loi de  $Poisson(\lambda)$  avec des Lambda égaux à 4, 6 et 8 sinistres.

## 1. Résultats de la prime pure

Si on calcule la prime pure en attribuant une fonction de répartition uniforme aux polices du portefeuille actuel, on a un résultat très sous-estimé de la prime pure.

Fonction de répartition uniforme des polices					
Lambda pour le nombre de sinistres	Tranche 1	Tranche 2	Tranche 3	Tranche 4	Tranche 5
6	13.6	3.0	1.3	0.5	0.2
8	17.8	4.2	1.6	0.6	0.3
4	9.7	2.3	0.9	0.3	0.1

Aussi, on sous-estime nettement, le nombre de sinistres qui dépassent la priorité chaque année, par exemple sur la tranche 1 :

La méthode par expérience nous indique que le nombre de sinistres annuel qui touchent la priorité est de 3,30 sinistres par an qui touche la première tranche. Or avec cette simulation on a :

Fonction de répartition uniforme des polices	
Lambda pour le nombre de sinistres	Nombre de sinistres dépassant la priorité de la Tranche 1
6	2.08
8	2.6864
4	1.5034

Il faut générer un nombre de sinistre (les lambda pour simulé les  $N_M$ ) très supérieur pour s'approcher de ce qu'on cote.

Ce résultat est valable pour la simulation des sinistres complets avec les deux lois : Weibull et LogNormal. Donc, le tirage des polices avec la fonction de répartition uniforme n'est pas adapté à notre simulation.

Si on calcule la prime pure en attribuant une fonction de répartition proportionnelle aux polices du portefeuille actuel, on a les résultats de la prime pure en millions :

Sinistres FGU simulés avec la Weibull					
Fonction de répartition Proportionnelle des polices					
Lambda pour le nombre de sinistres	Tranche 1	Tranche 2	Tranche 3	Tranche 4	Tranche 5
6	28.2	13.3	7.1	4.5	2.2
8	36.2	16.6	9.4	5.7	2.6
4	20.0	9.7	5.4	3.2	1.5

Avec 4 sinistres FGU générés par an, la Weibull est la loi la mieux adaptée pour calculer les primes pures des tranches basses. Par contre elle présente une décroissance rapide pour les tranches hautes.

Les résultats de la prime pure (avec des sinistres simulés avec la loi LogNormal) en millions sont les suivant :

Sinistres FGU simulés avec la LogNormal					
Fonction de répartition Proportionnelle des polices					
Lambda pour le nombre de sinistres	Tranche 1	Tranche 2	Tranche 3	Tranche 4	Tranche 5
6	26.0	12.6	7.8	5.3	3.2
8	33.7	16.2	9.7	6.7	4.1
4	18.7	9.2	5.6	3.7	2.2

On remarque que la loi LogNormal pour générer des sinistres complets sur le portefeuille actuel est la plus adaptée pour les tranches hautes, et sa décroissance est moins rapide que celle de la loi Weibull.

Avec la simulation LogNormal et la simulation Weibull sur les tranches hautes, on a énormément de différence. On constate un écart de 50% en moyenne sur la tranche 5 par exemple (le tableau représente les primes pures en millions) :

Fonction de répartition Proportionnelle des polices			
Lambda pour le nombre de sinistres	Tranche 5 avec LogNormal	Tranche 5 avec Weibull	Ecart
6	3.2	2.2	45%
8	4.1	2.6	58%
4	2.2	1.5	47%
		Moyenne	50%

Toujours sur les tranches hautes, on a un peu plus de sinistres qui touchent avec la simulation LogNormal par rapport à la simulation Weibull (le tableau suivant représente le nombre de sinistres qui touchent la tranche dans l'année) :

Fonction de répartition Proportionnelle des polices			
Lambda pour le nombre de sinistres	Tranche 5 avec LogNormal	Tranche 5 avec Weibull	Ecart
6	0.34	0.26	31%
8	0.43	0.32	34%
4	0.24	0.18	33%
		Moyenne	33%

-Pour un nombre sinistres (Lambda de la loi Poisson( $\lambda$ )) de 6 :

La simulation LogNormal génère 1 sinistres tous les 3ans, et la Weibull 1 sinistres tous les 4ans.

-Pour un nombre sinistres (Lambda de la loi Poisson( $\lambda$ )) de 8 :

La simulation LogNormal génère 1 sinistres tous les 2 ans, et la Weibull 1 sinistres tous les 3ans.

-Pour un nombre sinistres (Lambda de la loi Poisson( $\lambda$ )) de 4 :

La simulation LogNormal génère 1 sinistres tous les 4ans, et la Weibull 1 sinistres tous les 5 ans.

## 1. Ecart type

Les écarts type (avec une simulation des sinistres complets avec les lois Weibull et LogNormal) sont les suivants :

Sinistres FGU simulés avec la Weibull						
Fonction de répartition Proportionnelle des polices						
Ecart type de la prime pure						
Lambda pour le nombre de sinistres	Tranche 1	Tranche 2	Tranche 3	Tranche 4	Tranche 5	
6	16.8	12.0	7.0	7.2	4.8	
8	19.4	13.2	10.3	8.1	5.3	
4	13.9	10.4	7.8	6.0	4.1	

Sinistres FGU simulés avec la LogNormal						
Fonction de répartition Proportionnelle des polices						
Ecart type de la prime pure						
Lambda pour le nombre de sinistres	Tranche 1	Tranche 2	Tranche 3	Tranche 4	Tranche 5	
6	16.3	12.0	9.4	7.9	5.9	
8	18.6	13.4	10.3	8.7	6.6	
4	13.4	10.0	8.1	6.5	4.9	

On remarque que les écarts type (si on simule nos sinistres FGU avec la Weibull ou la LogNormal) sont du même ordre de grandeur.

On remarque aussi que sur la simulation Weibull, l'écart type est plus important sur les tranches basses, et moins important sur les tranches hautes.

## 2. Conclusion

On déduit que la loi LogNormal est mieux adaptée pour tarifier nos tranches hautes du programme de réassurance.

Pour les tranches basses, il est difficile d'établir une tendance. Il est difficile d'aboutir à un résultat stable en utilisant une seule loi pour ajuster nos sinistres FGU historiques à chaque fois. Une loi de distribution mélangée avec deux seuils pourrait être intéressante à utiliser, une loi pour les tranches basses et une autre pour les tranches hautes.

## V. Conclusion Générale

Traditionnellement en réassurance Non -Vie, on utilise deux principales méthodes pour tarifier des traités en excédant de sinistres : La méthode par expérience, qui utilise les sinistres historiques, et la méthode d'exposition qui tient compte du profil du portefeuille actuel du réassureur.

Face au manque de données observées, l'utilisation de la méthode par expérience introduit une forte volatilité dans la tarification. En effet les tranches du programme de réassurance sont souvent peu ou pas travaillantes. Sur ce type de portefeuille, la méthode d'exposition est la plus raisonnable. Celle-ci est basée sur des courbes d'exposition calculée à partir de données américaines, donc pas toujours adaptées au marché européen. De plus, il y a souvent une forte différence entre les résultats des deux méthodes.

D'où notre motivation pour trouver une nouvelle méthode de tarification alternative.

Grace à notre étude sur les portefeuilles historiques, on a pu s'affranchir des contraintes liées au manque de données observées de sinistralité. Avec la méthode Monte Carlo, on a pu simuler des sinistres qui reflètent le comportement du portefeuille et avoir le maximum d'information sur les sinistres complets.

Nos simulations permettent de prendre en compte l'information du profil du risque du portefeuille. Ceci est important dans la branche de responsabilité civile générale.

Après avoir tiré une fréquence basée sur les sinistres historiques, et une courbe de sévérité, on a pu affecter au portefeuille actuel le comportement des sinistres observés du passé en simulant des sinistres FGU, et ainsi reconstituer les sinistres à la charge du réassureur et calculer la prime pure.

L'étude réalisée ci-avant permet d'aboutir à une méthode de tarification relativement adaptée à notre portefeuille de la branche de RC. On a obtenu des résultats comparables à ceux obtenus par les méthodes classiques. On déduit que la loi LogNormal est la mieux adaptée pour tarifier nos tranches hautes du programme de réassurance. Par contre il est difficile de dégager une tendance sur les tranches basses, c'est-à-dire les tranches travaillantes car on n'a pas réussi à trouver une seule distribution avec un seul nombre de sinistres ( $\lambda$ ) qui soient valables pour tout le programme.

Au travers des exemples de ce mémoire, nous avons vu à quel point l'incertitude des paramètres de fréquence et de sévérité peuvent avoir un impact sur le résultat de la prime pure. A cela s'ajoute le manque de données observées dont disposent généralement les actuaires sur ce type de traité.

Il serait intéressant dans une prochaine étape de traiter indépendamment les sinistres observés sur chaque année et chaque portefeuille au lieu de les rassembler tous dans une seule étude. Il serait également intéressant de réaliser un meilleur ajustement de lois sur les sinistres FGU simulés en prenant une distribution mélangée avec deux seuils différents, afin de mieux ajuster les tranches hautes.

## VI. Bibliographie

Jacques Blondeau et Christian Partrat (2003), *La Réassurance: Approche Technique*, Ed-Economica.

Paul Embrechts, Claudia Kluppelberg et Thomas Mikosch (1997), *Modelling Extremal Events for insurance and Finance*, Ed-Springer.

Benjamin Jourdain (2009), *Probabilités et Statistique*, Ed-Ellipses.

Monsieur Mathieu Poulin sous la direction de Madame Sophie Picard (2012), *Analyse des solutions actuarielles en tarification des traités de réassurance non-proportionnels Non-Vie*, Mémoire CEA.

Monsieur Thomas Boyer sous la direction de Monsieur Simon Banquière (2010), *la modélisation de la responsabilité civile générale par des courbes d'exposition*, Mémoire Dauphine.

Monsieur Mignot (2012), *Droits des Assurances*, l'Université de Strasbourg.

Le site de la **Fédération Française des Sociétés d'Assurance** [www.ffsa.fr](http://www.ffsa.fr).

Le site web officiel du **Gouvernement français** pour la diffusion des **textes législatifs** et réglementaires [www.legifrance.fr](http://www.legifrance.fr) .

## VII. Annexe : Définition des lois

### Pareto

Soit X une variable aléatoire qui suit une distribution de Pareto de paramètres  $(x_{min}, \alpha)$  :

$$P(X > x) = \left(\frac{x}{x_{min}}\right)^{-\alpha} \text{ avec } x \geq x_{min}$$

X suit la densité de probabilité :  $f(x, \alpha, x_{min}) = \alpha \frac{x_{min}^\alpha}{x^{\alpha+1}}$  pour  $x \geq x_{min}$

$$E(X) = \frac{\alpha x_{min}}{\alpha - 1} \text{ et } VAR(X) = \left(\frac{x_{min}}{\alpha - 1}\right)^2 \frac{\alpha}{\alpha - 2}$$

Le moment d'ordre n est :

$$E(X^n) = \frac{\alpha x_{min}^n}{\alpha - n}$$

La vraisemblance :

On a la formule suivante,

$$l(X, \alpha, x_{min}) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \alpha, x_{min})$$

Donc,

$$l(X, \alpha, x_{min}) = (\alpha x_{min}^\alpha)^n \prod_{i=1}^n (x_i)^{-(\alpha+1)}$$

La Log-vraisemblance :

On a

$$L(X, \alpha, x_{min}) = \text{Log}[l(X, \alpha, x_{min})]$$

$$\text{Log}[l(X, \alpha, x_{min})] = \sum_{i=1}^n \text{Log}[f(x, \alpha, x_{min})]$$

Donc

$$\text{Log}[l(X, \alpha, x_{min})] = n \text{Log}(\alpha) + n\alpha \text{Log}(x_{min}) - (1 + \alpha) \sum_{i=1}^n \text{Log}(x_i)$$

La distribution de Pareto est à queue lourde (heavytailed), ce phénomène étant causé par une variable pouvant atteindre des valeurs très grandes, valeurs pour lesquelles le nombre d'observations devient très petit. En revanche le nombre d'observations pour les petites valeurs de la taille analysée sont souvent très élevées

On remarque que dans nos données observées on a un très grand sinistre qui dépasse les 450Millions. Alors on se pose la question de la significativité de sinistre.

-on estime les paramètres de la Pareto en tenant compte du gros sinistres ce qui va alourdir la courbe et sa probabilité va être très forte.

-on estime les paramètres sans tenir compte de ce gros sinistres et ainsi la probabilité d'avoir des gros sinistres va être très petite.

## Exponentielle

Soit X une variable aléatoire qui suit une distribution Exponentielle de paramètre  $\lambda$  :

$$f(x, \lambda) = \lambda \exp(-\lambda x) \text{ avec } x \geq 0$$

$$F(x, \lambda) = 1 - \exp(-\lambda x) \text{ avec } x \geq 0$$

D'espérance et de Variance :  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$  et  $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Le moment d'ordre n :

$$E(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}$$

On a la fonction de vraisemblance et la Log-vraisemblance :

On a

$$l(\lambda, X) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \lambda)$$

Donc,

$$l(\lambda, X) = \lambda^n \exp(-\lambda \sum_{i=1}^n x_i)$$

On a

$$L(X, \lambda) = \text{Log}[l(X, \lambda)]$$

Alors on obtient,

$$L(\lambda, X) = n \text{Log}(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

## **Log-Normale**

Soit X une variable aléatoire qui suit une distribution Log-Normale de paramètres  $(\mu, \sigma)$  :

$$f(x, \sigma, \mu) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Par intégration de la fonction de densité, il vient que la fonction de répartition s'exprime en fonction de la fonction d'erreur :

$$F(x, \sigma, \mu) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

Avec la fonction d'erreur erf :

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

D'espérance et de Variance :

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \text{ et } \text{Var}(X) = \exp(\sigma^2 - 1) \exp(2\mu + \sigma^2)$$

Le moment d'ordre n :

$$E(X^n) = \exp\left(n\mu + n^2 \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

On a la fonction de vraisemblance et la Log-vraisemblance :

$$l(x, \sigma, \mu) = \prod_{i=1}^n \phi_X\left(\frac{\log(x_i) - \mu}{\sigma}\right)$$

$$L(x, \sigma, \mu) = \sum_{i=1}^n \text{Log} \left\{ \left( \frac{\log(x_i) - \mu}{\sigma} \right) \right\}$$

Cette loi de distribution est particulièrement utilisée en analyse quantitative.

## Weibull

Soit X une variable aléatoire qui suit une distribution Weibull de paramètres (k,λ) :

$$f(x, k, \lambda) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right)$$

Où  $k > 0$  et  $\lambda > 0$

$$F(x, k, \lambda) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right)$$

D'espérance et de Variance :

$$E(X) = \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \text{ et } \text{Var}(X) = \lambda^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - E(X)^2$$

Le moment d'ordre n :

$$E(X^n) = \lambda^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{k}\right)$$

On a la fonction de vraisemblance et la Log-vraisemblance :

$$l(x, k, \lambda) = \frac{k^n}{\lambda^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^k}{\lambda^k}\right) \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{k-1}$$

$$L(x, k, \lambda) = n \text{Log}(k) - n \text{Log}(\lambda) - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^k}{\lambda^k} + (k-1) \sum_{i=1}^n \text{Log}\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)$$

## Pareto Généralisé ou GPD

Soit X une variable aléatoire qui suit une distribution de Pareto Généralisé de paramètres (σ,ξ,μ) :

$$G_{\xi, \sigma, \mu}(X) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Si  $\xi=0$  et  $\sigma=0$  la GPD devient une loi exponentielle.

Si  $\xi>0$  et  $\mu=\sigma/\xi$ , la GPD devient une loi de Pareto.

D'espérance et de Variance :

$$E(X) = \mu - \frac{\sigma}{1-\xi} \text{ avec } \xi < 1 \text{ et } \text{VAR}(X) = \frac{\sigma}{(1-\xi)^2(1-2\xi)} \text{ avec } \xi < \frac{1}{2}$$

Dans le cas  $\xi=0$ , la Log-vraisemblance est :

$$L(X, \xi, \sigma, \mu) = -n \text{Log}(\sigma) - \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$