

Étude de la longévité du portefeuille vie individuelle d'AXA France

Benjamin Bouskila

▶ **To cite this version:**

Benjamin Bouskila. Étude de la longévité du portefeuille vie individuelle d'AXA France. Gestion des risques [q-fin.RM]. 2013. dumas-00921032

HAL Id: dumas-00921032

https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00921032

Submitted on 19 Dec 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mémoire présenté devant

l'UFR de Mathématique et d'Informatique

pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'Actuaire de Strasbourg

et l'admission à l'Institut des Actuaires

le 02/10/2013

Par : Benjamin BOUSKILA

Titre: Étude de la longévité du portefeuille vie individuelle d'AXA France

Confidentialité : ☐ NON ☑ OUI (Durée : ☐ 1 an ☑ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres du jury de l'Institut des Actuaires signature

Membres du jury de l'UdS :

M. Jacques Franchi
Mme Sandrine Spaeter-Loehrer
M. Karl-Théodor Eisele
M. Jean-Lucien Netzer
Mme Myriam Maumy-Bertrand
M. Bernard Heinkel
M. Patrick Rondé
M. Jean Bérard

Invités :

M. Philippe Artzner
M. Pierre Devolder
M. Jean Modry
Mme Magali Kelle-Vignon
M. Alexandre You

Secrétariat : Mme Maire-Lantz
Mme Fidelin

Bibliothèque : Mme Christine Disdier

Entreprise : AXA France

Nom :

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom :

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels

(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Mémoire présenté devant

la Faculté des Sciences Economiques et de Gestion et l'UFR de Mathématique et Informatique

pour l'obtention du Master de Finance,

spécialité Actuariat et Gestion du Risque

le 02/10/2013

Par : Benjamin BOUSKILA

Titre: Étude de la longévité du portefeuille vie individuelle d'AXA France

Confidentialité : ☐ NON ☑ OUI (Durée : ☐ 1 an ☑ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres du jury de l'Institut des Actuaires

Signature

Entreprise : AXA France

Nom :

Signature :

Membres du jury de l'UdS :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom :

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

M. Jacques Franchi
Mme Sandrine Spaeter-Loehrer
M. Karl-Théodor Eisele
M. Jean-Lucien Netzer
Mme Myriam Maumy-Bertrand
M. Bernard Heinkel
M. Patrick Rondé
M. Jean Bérard

Invités :

M. Philippe Artzner
M. Pierre Devolder
M. Jean Modry
Mme Magali Kelle-Vignon
M. Alexandre You

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Secrétariat : Mme Laura Fidelin
Mme Floriane Maire-Lantz

Bibliothèque : Mme Christine Disdier

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS 4
RÉSUMÉ 5
ABSTRACT 6

INTRODUCTION 7

1. PRÉSENTATION ET ENJEUX DE L'ÉTUDE 9
1.1. Contexte de l'étude 9
1.2. Etude et statistiques descriptives de l'évolution de la mortalité en France 11
1.3. Présentation de l'assurance vie 15
1.4. Actualité de l'assurance vie 19

2. DESCRIPTION, ÉVOLUTION ET RISQUE DE LONGÉVITÉ POUR LES CONTRATS VIE INDIVIDUELLE 22
2.1. Traitements des données 22
2.2. Etude statistique de la mortalité et analyse du portefeuille vie individuelle d'AXA 26

3. CONSTRUCTION D'UNE TABLE DE MORTALITE PROSPECTIVE 32
3.1. Estimation des taux bruts de mortalité 34
3.1.1. Définition des troncatures et censures 34
3.1.2. Méthode de Kaplan Meier 35
3.1.3. Méthode de Nelson Aalen 36
3.1.5. Intervalle de confiance des taux bruts de mortalité 39
3.2. Méthode de lissage des Taux Bruts : La méthode de Whittaker-Henderson 42
3.2.1. Explicitation de la méthode de Whittaker-Henderson 42
3.2.2. Intervalle de confiance des taux bruts de mortalité lissés 48
3.3. Rappel sur le modèle de Lee & Carter 49
3.3.1. Présentation du modèle 49
3.3.2. Critiques du modèle 53
3.4. Le modèle de Bongaarts 54

3.4.1. Présentation du modèle de Bongaarts 54
3.4.2. Application du modèle relationnel sur le portefeuille AXA 70
3.4.3. « Backtesting » 73
3.5. Le modèle de Vaupel 74
3.5.1. Présentation du modèle de Vaupel 74
3.5.2. Application du modèle relationnel sur le portefeuille d'AXA 78
3.5.3. « Backtesting » 78

4. COMPARAISON ENTRE LES TABLES CONSTRUITES 79
4.1. Analyse des taux de mortalité 79
4.2. Analyse qualitative et quantitative sur l'espérance de vie 82

5. OPERATIONNEL - ASPECT PROVISIONNEMENT 83
5.1. La provision mathématique 83
5.2. La provision pour écart Capital constitutif – Provision mathématique 85
5.3. Résultats de l'impact sur le provisionnement 87

CONCLUSION 90

BIBLIOGRAPHIE 92

GLOSSAIRE 94

REMERCIEMENTS

Tout d’abord, je tiens à remercier mon maitre de stage Sandrine Chan Hew Wai pour la qualité exceptionnelle de se son encadrement. Son expertise sur le sujet étudié ainsi que sa pédagogie m’ont permis de mener à bien mon stage de fin d’étude.
Mes remerciements vont également à Caroline Atlani, Manager de mon équipe, pour ses conseils avisés mais aussi pour son savoir vivre.
La qualité de leur encadrement m’a permis de mener à bien l’étude et la mise en œuvre de mon mémoire.

J’aimerais adresser un grand merci à toute l’équipe de la direction technique pour leur accueil chaleureux, leur disponibilité ainsi que leurs conseils sur des problématiques que j’ai pu rencontrer durant toute la durée de mon stage de fin d’étude.

Je remercierais également tout naturellement Monsieur Jacques Franchi, directeur du DUAS et tuteur de mon stage pour tout l’intérêt et l’écoute qu’il a pu apporter à mon mémoire.

RÉSUMÉ

Le but de ce mémoire est la construction d'une table de mortalité prospective pour le portefeuille des rentiers vie individuelle d'AXA.
Il répond à la problématique générale du risque de longévité auquel sont soumis les assureurs. Cette incertitude sur l'espérance de vie future des Hommes couplée au risque d'anti-sélection conduit les assureurs à mettre en place des tables de mortalité prospectives.

Dans un premier temps, est décrit de façon générale le phénomène de l'allongement de la durée de vie des Hommes. Afin de comprendre l'enjeu général de l'étude, est décrit également le fonctionnement de l'assurance vie ainsi que son évolution au cours de ces dernières années.

Après avoir décrit l'enjeu général de l'allongement de la durée de vie, nous donnons la méthodologie du traitement des données puis explicitons alors à travers une étude statistique le risque auquel est soumis le portefeuille.

Nous traitons alors le corps du mémoire où est décrit l'ensemble des étapes de la construction d'une table prospective. Dans un premier temps, les taux bruts de mortalité sont estimés par l'estimateur de Nelson Aalen, puis lissés par la méthode de Whittaker Henderson. Deux tables de mortalité sont alors construites : l'une à partir du modèle de Bongaarts et l'autre à partir d'un modèle inspiré des travaux du démographe J. Vaupel.

Enfin, nous étudions l'impact opérationnel qui représente l'enjeu majeur pour l'assureur du passage de la table réglementaire aux tables construites. Nous décrivons ainsi la comparaison entre les taux de mortalité et les espérances de vie des deux modèles construits, puis comparons alors l'impact possible sur le provisionnement du passage des tables réglementaires aux tables construites.

Mots clefs : modèle de durée, risque de longévité, table de mortalité prospective, Table TGH05-TGF05, modèle de Lee & Carter, modèle de Bongaarts, modèle inspiré des travaux de Vaupel

ABSTRACT

This report is aimed at establishing a forecasting mortality table for the AXA portfolio of individual life annuitants. It addresses the general issue of the anti-selection risk for the insurers. The combination of the uncertainty on the future human life-expectancy, and the anti-selection risk, lead insurers to implement forecasting mortality tables.

In a first phase, the phenomenon of lengthening life expectancy is described, along with the functioning and the recent development of life insurance, in order to understand the purpose of the study.

Once the stakes of the lengthening life expectancy are clarified, a focus on the data processing methodology prefaces a statistical study which make explicit the risk on the portfolio.

Then, the second phase consists of the explanation of the construction stages of a forecasting table, which is the core of the report. The crude mortality rates are first estimated by Nelson-Aalen estimator and smoothed by the Whittaker-Henderson method.

Therefore, two different tables are established, one based on the Bongaarts model, and one based on a model inspired by the study of J.Vaupel, a research scientist in demography.
The replacement of regular tables by built tables, has an operational impact which is the main issue for insurers.

This impact is studied in a last part, due to the comparison of mortality rates and life spans defined from both built models, which allow the comparison of the potential impact of the switching of tables on provisioning.

Key words: duration model, longevity risk, forecasting mortality table, TGH05-TGF05 Table, Lee & Carter model, Bongaarts model, Vaupel-inspired model.

INTRODUCTION

L'évolution de la mortalité dans le monde avec un allongement progressif de l'espérance de vie ces dernières décennies constitue une réelle problématique économique et sociétale.

De manière générale, la France à elle seule comptera 73.6 millions d'habitants en 2060 soit 11.8 millions de plus qu'en 2007. De plus, concernant le nombre de personnes âgées de plus de 60 ans, celui-ci augmentera de 10 millions à lui seul en 2060 selon l'INSEE. En tout état de cause, et quelle que soit l'hypothèse démographique retenue, la forte augmentation des plus de 60 ans pour ces prochaines années ne peut être repoussée au vu de la génération baby-boomers.

En tenant compte de l'impact de la réforme des retraites de 2010 ainsi qu'avec une hypothèse de fécondité forte, selon une récente étude menée par l'INSEE, le ratio de 2.1 actifs pour un inactif en 2010 passerait à 1.5 en 2060. Ceci conduit à une inquiétude des Français (à 83% selon une récente étude de l'institut CSA) sur l'avenir des retraites en France et plus particulièrement sur l'avenir de la Sécurité sociale.

Dans cette logique, les Français, dans une démarche de précaution/prévention vont alors de plus en plus se tourner vers les produits d'assurance vie qui proposent d'ailleurs une fiscalité fortement attractive.

Ce phénomène de longévité couplé à une incertitude sur l'avenir de la Sécurité Sociale, conduit les assureurs à mener une politique de forte croissance à court et moyen terme des produits d'assurance vie pour la retraite et à en faire un sujet majeur de recherche et développement.

Alors que l'espérance de vie à la naissance est passée de 63.4 à 78 ans de 1950 à 2010 pour les hommes, et de 69.2 à 84.72 ans de 1950 à 2010 pour les femmes, cette augmentation expose les assureurs à un risque appelé le risque de longévité. En effet, utiliser une table surestimant la mortalité, conduit à des pertes techniques pour l'assureur puisque les sommes restituées à l'assuré seraient supérieures au sommes versées par ce dernier. Inversement, une table sous-estimant la mortalité entraine des gains techniques, ce qui impacte l'équilibre ALM (gestion actif-passif) de la compagnie.

C'est dans ce contexte que dans le cadre de l'assurance vie individuelle, le risque de longévité couplé au risque d'anti-sélection, conduit les assureurs à réaliser des tables de mortalité prospectives propres à leurs assurés.

Historiquement, l'évolution des tables prospectives en vigueur en montre bien les enjeux. C'est en 1993 qu'apparut la TPG93 (Table Prospective par Génération) appelée également la TPRV 93 (Table Prospective de Rente Viagère). Cette table alors homologuée et obligatoire pour

tout calcul de rente viagère, exceptée une table d'expérience validée par un actuaire agréé, fut abandonnée en aout 2006 au profit de la TGH05 (Table par Génération des Hommes) et TGF05 (Table par Génération des Femmes). Cette perpétuelle évolution montre bien l'importance d'un calibrage réaliste de la mortalité future pour les portefeuilles d'assurance vie individuelle.

De plus, avec la directive de Solvabilité 2 préconisant une approche *best estimate*, les assureurs sont appelés à calibrer leur table de mortalité correspondant au mieux aux similarités avec leur portefeuille.

Aujourd'hui il apparait certes que les portefeuilles des assureurs en vie individuelle sont relativement petits, mais les récentes publications de l'INSEE tendent à annoncer que la retraite deviendra une problématique individuelle et donc que l'assurance vie prendra une place plus importante dans l'épargne des Français, et ce notamment à travers les contrats PERP et Madelin.

Ceci transparait d'autant plus à travers l'actualité en France, notamment avec les différentes réformes des retraites allongeant la durée de cotisation des actifs d'une part, et d'autre part le tout récent rapport Berger-Lefebvre d'avril 2013 préconisant entre autre le renforcement du rôle de l'assurance vie dans le financement de l'économie en favorisant une meilleure allocation de l'épargne vers les secteurs les plus utiles comme celui de l'immobilier.

C'est dans ce contexte à forts enjeux dans le milieu de l'assurance que s'inscrit ce mémoire dont l'objectif sera de présenter et d'étudier l'évolution de la mortalité de la population française et d'y trouver des similarités avec celle du portefeuille d'AXA France afin d'en déduire une tendance à long terme de la mortalité.

A cet effet, nous donnerons dans un premier temps une vision globale de la mortalité en France, en décrivant son évolution, puis nous nous intéresserons plus particulièrement à l'évolution du portefeuille d'AXA ces 10 dernières années.

Dans le corps du mémoire, nous proposerons deux récents modèles apportant une vision nouvelle de la mortalité comparativement au classique modèle de Lee & Carter. Le premier modèle sera le modèle de Bongaarts ou encore appelé « *modèle décalé* ». Puis, sera alors présenté un modèle s'inspirant du modèle de mortalité développé par le démographe James W. Vaupel.

Enfin, après avoir donné une analyse critique des deux modèles proposés, nous nous attarderons sur un aspect plus opérationnel de la mortalité en comparant dans un premier temps les tables de mortalité prospectives, puis dans un deuxième temps nous étudierons l'impact qu'ont les tables construites sur le provisionnement.

Nous choisirons alors, au vu d'éléments statistiques et opérationnels, la table la plus adéquate au portefeuille.

1. PRÉSENTATION ET ENJEUX DE L'ÉTUDE

Dans la présente partie de ce mémoire, nous proposons une étude détaillée de l'évolution de la mortalité en France. Afin de dégager et de comprendre l'enjeu ainsi que la problématique du présent sujet, nous développons le thème relatif à l'assurance vie individuelle à travers tous ses aspects, à savoir son contexte général, son évolution règlementaire ainsi que son aspect technique.

1.1. Contexte de l'étude

L'évolution de la mortalité avec une augmentation de l'espérance de vie est un sujet important de l'actualité. Celle-ci a considérablement augmenté et a été spectaculaire ces dernières décennies.

On lui attribue souvent pour causes principales le progrès de la médecine, de l'hygiène, l'augmentation du niveau de vie ou encore la quasi-inexistence de guerre (en France du moins).

Dans le cadre de notre étude et dans une approche à long terme de l'étude de la mortalité, il serait plus précis de considérer les différentes causes historiques d'une telle évolution. Une étude intéressante de France Meslé et Jacques Vallin explique ce phénomène à travers le concept de transition sanitaire développé par Julio Frenk.

Selon France Meslé et Jacques Valin cette transition sanitaire s'explique de la manière suivante : jusqu'au milieu du 18ème siècle, la population générale connait une mortalité considérable due non seulement aux famines mais aussi aux épidémies ainsi qu'aux maladies infectieuses.

Puis, à partir du milieu du 18ème siècle et jusqu'au début des années 1960, un recul important de la mortalité apparait, notamment à travers la baisse des maladies infectieuses et des épidémies.

Intervient alors la révolution cardio-vasculaire des années 1970 où les maladies infectieuses disparaissent quasiment, où le traitement des maladies cardio-vasculaires devient possible et où les maladies de société deviennent moins importantes.

Enfin, depuis le milieu des années 1970 jusqu'à nos jours apparait la dernière phase de la transition sanitaire avec une réduction de la mortalité chez les personnes âgées, un traitement et une prévention des maladies cérébro-vasculaires. Il est clair que nous sommes encore dans cette phase et qu'à ce titre des interrogations sur l'évolution future de la mortalité interpellent tous les démographes.

Toujours est-il que dans le passé, l'allongement de la durée de vie a été provoqué essentiellement par une avancée de la médecine d'une part, et par l'amélioration de la vie économique et sociale.
Il est donc légitime de se demander si de façon générale ces avancées scientifiques ou sociétales vont perdurer, ou bien encore plus précisément si l'allongement de la durée de vie va continuer sur sa lancée.

De façon plus précise, cette incertitude de l'évolution future de la mortalité demande aux organismes assureurs une attention très particulière sur le choix et sur la modélisation de la table de mortalité. De plus, chaque organisme assureur est soumis au risque d'anti-sélection, appelé aussi risque de sélection adverse. Ce risque se caractérise par le fait que les rentiers ont une mortalité avantageuse par rapport à la population générale. En effet, les individus de catégorie socioprofessionnelle plus élevée, qui ont des conditions de vie et d'accès aux soins privilégiés, auront potentiellement une espérance de vie plus élevée et seront donc plus enclins à souscrire des contrats d'assurance vie.
Ainsi, le risque d'anti-sélection couplé à l'incertitude générale de l'évolution future de la mortalité, conduit les assureurs à adopter leur propre table de mortalité.

C'est dans ce contexte de forte incertitude que prend place le présent travail, dans lequel nous présentons l'approche statistique et descriptive de la mortalité en France ces dernières années.

1.2. Etude et statistiques descriptives de l'évolution de la mortalité en France

Cette partie vise à donner une vision précise de l'évolution de la mortalité en France de ces dernières années.

La présente section se base sur les données des tables de mortalité françaises pour les hommes et les femmes de 1950 à 2010 de la *Human Mortality Database* (HMD). Ces données seront considérées comme fiables et significatives de la mortalité de la population française.

L'étude de la mortalité peut être abordée à partir de différents points de vue.

De façon générale, les différentes études menées à ce sujet se basent sur le taux de mortalité mais une approche en espérance de vie est également envisageable et peut s'avérer plus pertinente pour un aspect plus opérationnel dans le monde de l'entreprise.

On remarque que depuis le milieu du 20ème siècle, l'espérance de vie n'a cessé d'augmenter.

Le graphique ci-dessous confirme et quantifie cette observation.

Fig. 1 : Evolution de l'espérance de vie chez les femmes

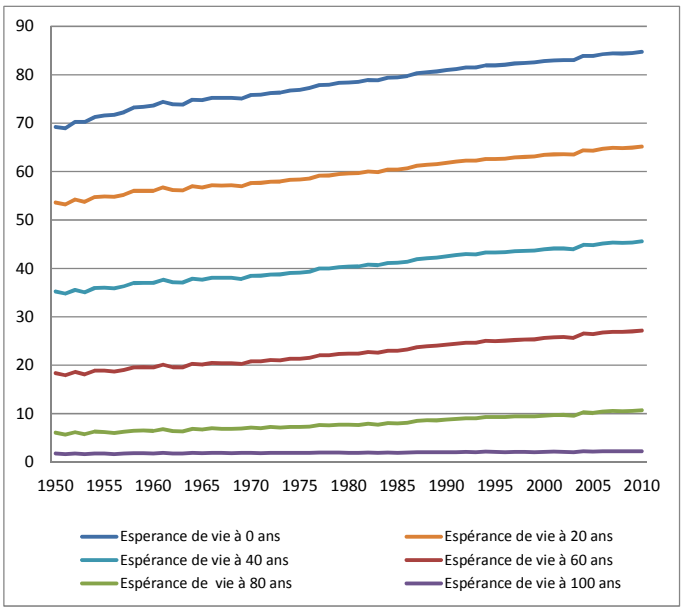
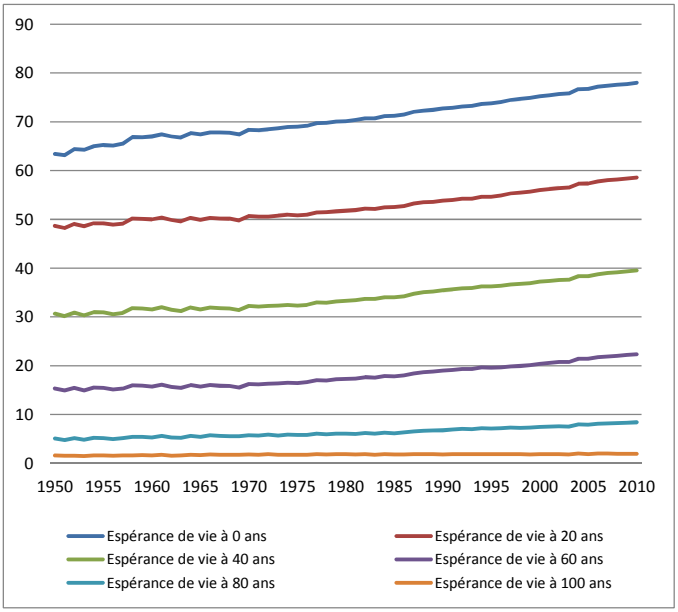


Fig. 2 : Evolution de l'espérance de vie chez les hommes



A la naissance l'espérance de vie chez les hommes est passée de 63.4 ans en 1950 à 78.04 ans en 2010 et pour les femmes de 69.19 ans à 84.72 ans de 1950 à 2010.

On remarque que le gain d'espérance de vie chez les femmes présente une croissance plus faible que pour les hommes.

Fig. 3 : gain d'espérance de vie chez les femmes par décennie

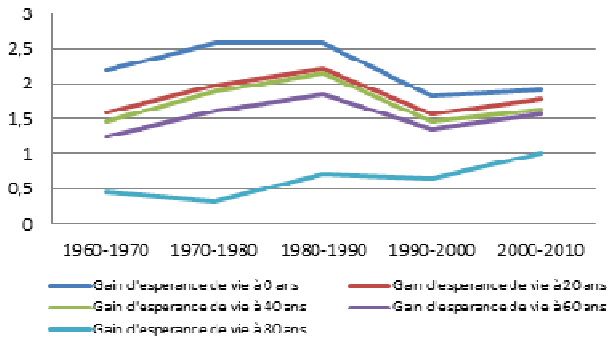
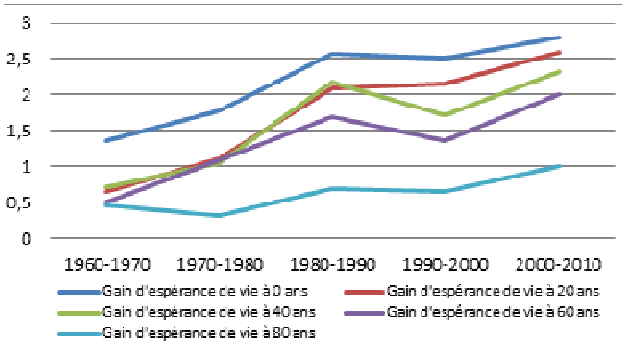


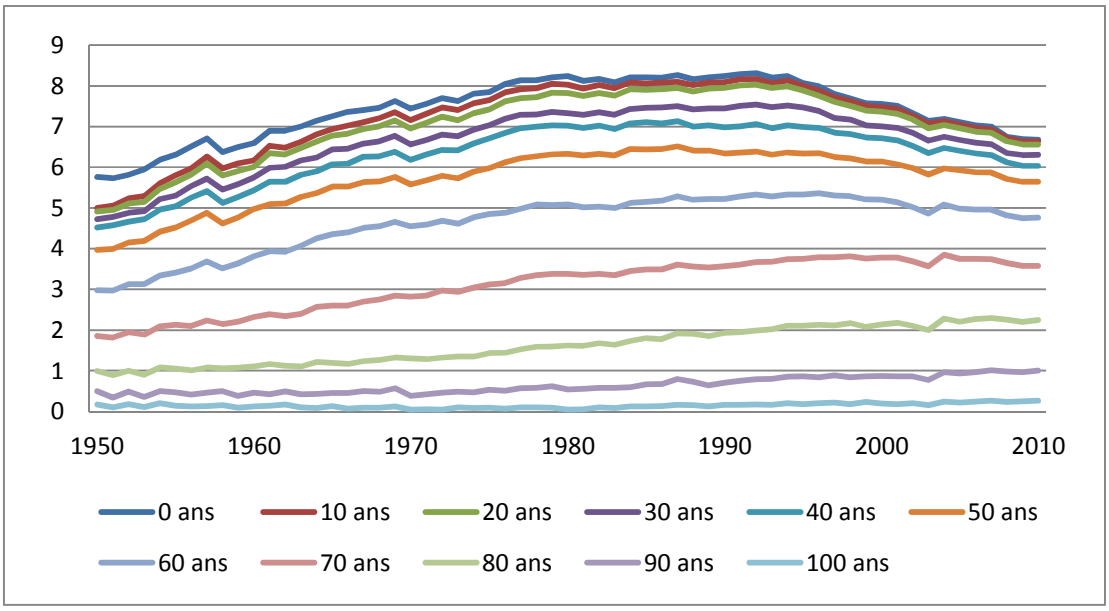
Fig. 4 : gain d'espérance de vie chez les hommes par décennie



Ce graphique montre bien que la tendance par décennie de gain d'espérance de vie varie selon les hommes et les femmes. Alors que les gains par décennie chez les femmes ont une tendance stable, ceux des hommes semblent avoir une tendance à la hausse plus prononcée.

On remarque en parallèle, comme le montre le graphique ci-dessous que l'écart d'espérance de vie entre hommes et femmes a suivi une évolution en cloche ces dernières années.

Fig. 5 : Evolution du différentiel d'espérance de vie entre hommes et femmes



L'écart n'a cessé d'augmenter jusqu'au milieu des années 1990 atteignant un pic de 8.31 ans à la naissance. Puis, une tendance décroissante apparait alors, ce qui peut être expliqué de plusieurs façons. France Meslé dans son article publié en 2004 (« Espérance de vie : un avantage féminin menacé ») explique le phénomène suivant : il considère qu'à la sortie de la guerre il y eut une évolution moins favorable pour les hommes que pour les femmes des maladies cardio-vasculaires et cancéreuses. Puis malgré l'incontestable avantage biologique initial des femmes, celui-ci fut rattrapé avec d'une part une baisse du tabagisme chez les hommes (une hausse du tabagisme

chez les femmes est par ailleurs constatée), et d'autre part l'adoption chez les hommes de comportements féminins positifs pour la santé.

En termes de taux de mortalité, on observe également une décroissance continue de ceux-ci pour les hommes et les femmes depuis 1950.

Fig. 6 : Evolution des taux de mortalité chez les femmes

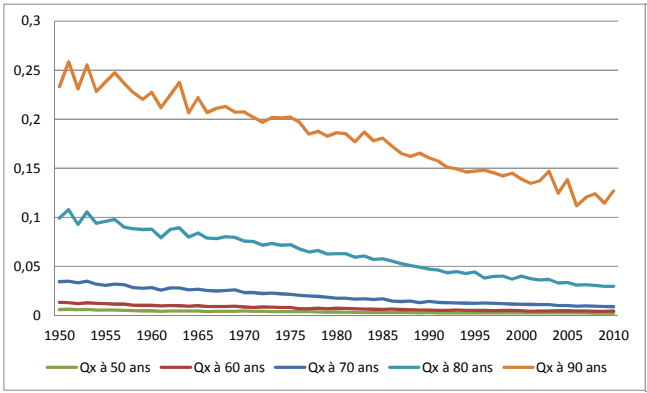
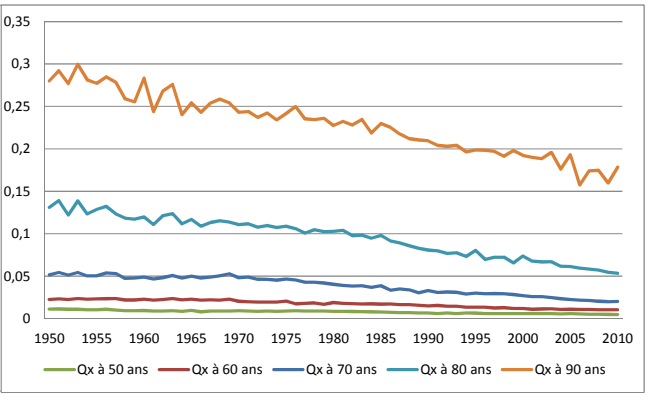


Fig. 7 : Evolution des taux de mortalité chez les hommes



On remarque dans les tableaux 6 et 7 une tendance à la hausse du taux de décroissance moyen des taux de mortalité chez les hommes. Cette tendance à la hausse n'est pas vérifiée chez les femmes où la tendance reste stable ces dernières décennies.

Fig. 8 : Evolution du taux de décroissance moyen chez les femmes

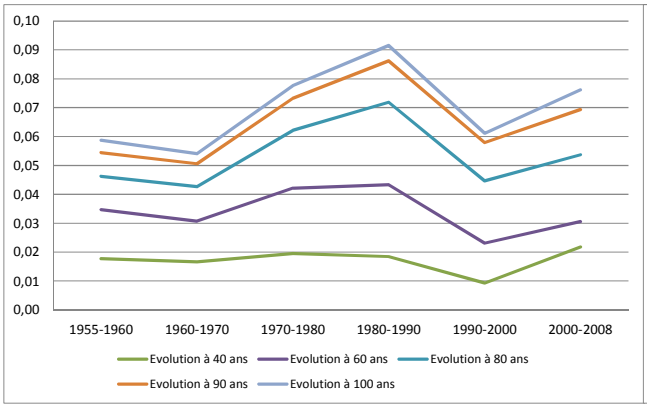
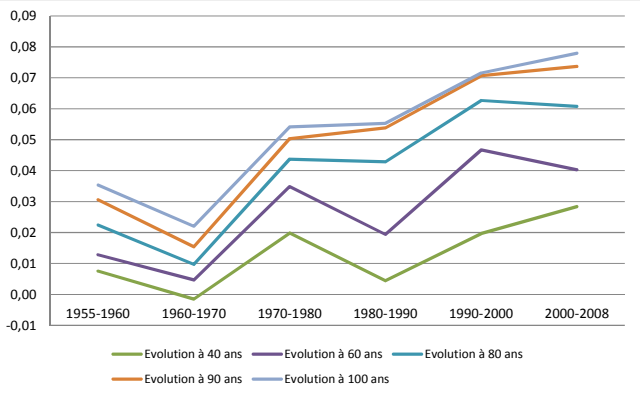


Fig. 9 : Evolution du taux de décroissance moyen chez les hommes



On voit clairement que la tendance décroissante des femmes est plus ou moins stable dans le temps. Celle des hommes présente une croissance plus nette qu'il faudra analyser et expliquer par la suite dans le cadre de la modélisation des tables de mortalité prospectives à partir des tables HMD. Il peut être envisageable d'expliquer cette tendance chez les hommes par l'après-guerre où ceux-ci ont évidemment connu une nette amélioration de mortalité.

Nous avons donc décrit ici l'évolution passée de la mortalité qui présente un changement constant. Cette incertitude pouvant s'expliquer par les différents progrès de la médecine ou encore du niveau de vie n'empêche pas des écarts d'évolution entre hommes et femmes. Il sera donc nécessaire par la suite de créer deux modèles distincts de mortalité pour les hommes et les femmes.

A noter qu'une étude de l'évolution de l'espérance de vie par catégorie socioprofessionnelle aurait également pu être pertinente et présente un intérêt certain pour l'assureur. Toutefois, le portefeuille étudié ne présente pas assez de données pour un échantillonnage robuste selon ce critère. Des résultats trop volatils nous ont donc contraints à ne pas développer cette étude.

1.3. Présentation de l'assurance vie

Après avoir décrit le phénomène de longévité observé ces dernières années, nous présentons dans cette partie de manière succincte les différents éléments clefs de l'assurance vie, à savoir son fonctionnement, son évolution réglementaire, son attraction fiscale mais aussi les enjeux politique et sociétal qu'elle revêt.

Afin de tarifer ses produits d'assurance vie, l'assureur prend comme paramètres deux éléments ; l'un viager avec la table de mortalité et l'autre financier avec le taux technique.

Le calcul de la rente à termes échus pour un individu d'âge x est le suivant :

$$a_x = \sum_{k=1}^{\omega - x} \frac{1}{(1+i)^k} \times {}_kp_x \ ,$$

où :

- ω est l'âge maximum de la table de mortalité,
- ${}_kp_x$ est la probabilité de survie d'un individu d'âge *x* aujourd'hui, lorsqu'il aura atteint l'âge *x+k*

On note ainsi : ${}_kp_x = P(\mathrm{T_x} > k)$

Nous voyons que deux paramètres influent sur le calcul de la rente : le paramètre viager ${}_kp_x$ et le paramètre financier i.

Le taux d'intérêt i

Le paramètre financier dit « taux d'intérêt technique » est l'élément clef dans une optique de rentabilité de produit.

Historiquement, les rendements financiers des actifs des assureurs étaient considérables et leur permettaient de ne pas porter l'attention nécessaire à l'évolution de la mortalité future lors de la tarification des rentes viagères.

Aujourd'hui, l'assureur n'observant plus de performances importantes au niveau de ses actifs financiers, il devient primordial pour lui de s'attacher plus particulièrement au risque de longévité à travers les tables de mortalité. Dans le cas contraire, pourraient survenir de graves conséquences au niveau de sa solvabilité.

C’est dans ce contexte que le rôle de l’actuaire sera primordial. Il est à noter de plus que malgré la baisse de taux technique, le nombre de souscriptions de contrats est allé croissant ces dernières années. Afin d’en comprendre les raisons nous décrivons plus précisément ci-dessous l’assurance vie.

Plusieurs types de contrats

A l’heure actuelle, trois types de contrats d’assurance vie individuelle existent : l’assurance vie classique, le PERP (Plan épargne retraite populaire) et les contrats dits Madelin.

L'assurance vie est un contrat d’épargne par lequel l'assureur s'engage, en contrepartie du paiement d'une ou plusieurs primes par le souscripteur, à verser un capital ou une rente à un bénéficiaire déterminé et à une échéance donnée. Le choix d'une assurance vie s'effectue en considérant différents objectifs patrimoniaux et est considéré comme un placement permettant de financier des projets à plus ou moins long terme (achat d’une maison, voiture, financement des études des enfants,…)

Outre le choix de la couverture du risque, la gestion du contrat est un point primordial car l'assurance vie est également un produit financier dont l'affectation de l'épargne qui peut se faire soit sur un support en euros, soit sur des supports en unités de compte, en fonction de la propension au risque du souscripteur, conditionne la rentabilité. Enfin, l'assurance vie est, sur le plan fiscal, un excellent placement avec de nombreux avantages. Malgré les restrictions mises en place au fil des années, la fiscalité de l'assurance vie reste intéressante tant au niveau des rachats qu'au niveau de la transmission du patrimoine en cas de décès.

Pour tout particulier, le plan d'épargne retraite populaire (PERP) est un contrat d'assurance, souscrit de façon individuelle et facultative, accessible à tous et dédié à la retraite. La préparation de la retraite peut constituer un motif de souscription d'une assurance vie. Quant aux professions libérales, elles peuvent préférer bénéficier des contrats dits Madelin dans l'optique de leur cessation d'activité.

Ces produits ont des points communs : ils peuvent être souscrits sous forme de contrats multi-supports, permettent des versements libres ou programmés et une réversion des rentes servies à l'issue de la phase d'épargne. Pour rappel, la réversion d’une rente correspond au prolongement du paiement de la rente après le décès de l’assuré principal à un bénéficiaire désigné, de façon définitive et irrévocable lors de la conversion en rente. Mais si leurs caractéristiques présentent des similitudes, la fiscalité les différencie ou les rapproche, selon le cas.

Il est juste de dire que de manière générale, l'assurance vie classique se révèle plus souple dans la mesure où elle permet d'effectuer des retraits de manière partielle ou totale sous forme d'avance ou de rachat. De plus, outre le fait qu'elle permet également de choisir la forme de prestation de sortie, elle offre des avantages successoraux que ne proposent pas les PERP et les contrats Madelin.

Plus précisément, il est intéressant de noter qu'alors que la sortie en rente est obligatoire sur les contrats PERP et Madelin, elle ne l'est pas sur les contrats d'assurance vie classique où une sortie en capital est également possible. Cette observation implique que le risque d'anti-sélection défini ci-dessous est plus grand pour les contrats d'assurance vie classique dans la mesure où le bénéficiaire aura le choix de sortir en rente ou non, et qu'il pourra faire un tel choix selon son état de santé ainsi que son appréhension de sa durée de vie future. Nous définissons dans notre contexte le risque d'anti-sélection comme étant l'incertitude des assureurs parmi la représentativité de la mortalité de la population générale par rapport à celle de leurs assurés.

Cependant, une plus grande proportion de contrats PERP et Madelin est envisagée à long terme. Nous présentons ci-après un récapitulatif de ces 3 différents contrats sous forme de tableau :

Caractéristiques	Assurance vie	PERP	Madelin
Fiscalité des cotisations	Cotisations non déductibles. Réduction d'impôt réservée à des contrats spécifiques.	Déduction du revenu net global dans une certaine limite.	Déduction du bénéfice imposable dans une certaine limite.
Disponibilité de l'épargne	Retrait partiel ou total, à tout moment, sous forme d'avance ou de rachat, sous réserve des impacts fiscaux.	Indisponibilité des fonds jusqu'au départ en retraite. 5 cas de déblocage anticipé.	Indisponibilité des fonds, jusqu'au départ en retraite. 5 cas de déblocage anticipé.
Imposition des produits	Barème de l'IR ou prélèvement libératoire variable selon la date du retrait des fonds : - 35 % avant 4 ans, - 15 % entre 4 et 8 ans, - 7,5 % avec abattement de 4 600 € (personne seule) et 9 200 € (couple marié) après une durée de détention de 8 ans. + prélèvements sociaux dans tous les cas, au taux de 15,5 % depuis le 1er juillet 2012.	Epargne capitalisée exonérée des prélèvements sociaux.	Epargne capitalisée exonérée des prélèvements sociaux.
Sortie	Versement de l'épargne sous forme de capital ou rente.	Rente viagère en complément de la retraite. 3 cas de sortie en capital.	Rente obligatoire.
Imposition de la rente	Barème de l'IR + prélèvements sociaux, au taux de 15,5 % depuis le 1er janvier 2012, sur une fraction de la rente.	Barème de l'IR après abattements. + prélèvements sociaux à 7,1 % sur la totalité de la rente servie.	Barème de l'IR après abattements. + prélèvements sociaux à 7,1 % sur la totalité de la rente servie.
Réversion	Rentes réversibles au profit du conjoint survivant.	Sur option : rentes réversibles au profit du bénéficiaire désigné ou, à défaut, du conjoint.	Sur option : rentes réversibles au profit du conjoint survivant.
Avantages successoraux	Transmission du capital hors succession et hors fiscalité pour le conjoint, le partenaire d'un PACS et les frères et soeurs (sous conditions). Pour les autres : - Versements effectués **avant 70 ans** : prélèvement de 20 % (25 % pour la part taxable du contrat excédant un certain seuil) après abattement de 152 500 € par bénéficiaire. - Versements effectués **à partir de 70 ans** : primes intégrées dans la succession de l'assuré après abattement de 30 500 € (intérêts hors succession).	Aucun.	Aucun.

1.4. Actualité de l'assurance vie

L'assurance vie est en constante évolution depuis sa création.
Récemment encore, plusieurs lois et rapports ont été mis en place à travers des réformes structurelles.

Tables unisexes :

Suite à l'arrêt du 1er mars 2011 de la Cour de Justice de l'Union Européenne, la prise en compte du sexe de l'assuré en tant que facteur de risques pour le calcul des primes et des prestations n'est plus possible et constitue une discrimination.
A ce titre, le sexe ne peut plus être retenu comme élément de tarification dans le cadre de contrats d'assurance vie individuelle. Cette règle est applicable pour tous les nouveaux contrats conclus à compter du 21 décembre 2012.
De manière plus précise, dans le cas des contrats d'épargne souscrits avant le 21 décembre 2012, tous produits prévoyant la liquidation de la rente aux conditions en vigueur au moment de la liquidation pourront utiliser une table de mortalité segmentée (aujourd'hui TGH05 et TGF05), et le cas échéant, les produits prévoyant une garantie de table conservent les bénéfices de cette garantie.
Pour les contrats souscrits après le 21 décembre 2012, une table unisexe devra être utilisée pour les hommes et les femmes. Le code des assurances imposant que celle-ci soit la plus prudente, c'est donc la table des femmes (aujourd'hui TGF05) qui est retenue. En effet, à capital égal, l'espérance de vie d'une femme étant plus longue que celle d'un homme, la rente calculée sur la base de la TGF05 sera plus petite que celle calculée sur la base de la TGH05.

A titre illustratif, pour un homme liquidant sa rente à 65 ans en 2010 avec un capital constitutif acquis de 100 000 € et pour un taux technique de 1.25%, celui-ci bénéficiera d'une rente de 2 567 € en utilisant la TGH05 et d'une rente de 2 298€ en utilisant la TGF05.

La liquidation en rente intervient lors du départ en retraite et correspond à la conversion d'un capital constitutif en rente. Lors de la liquidation, le capital constitutif est perdu.

Voici le calcul de la rente viagère versée à 65 ans pour un individu qui a acquis un capital constitutif CC :

$$Rente_{65} = \frac{CC\ acquis}{a_{65}}$$

Où a_{65} est le montant le montant de capital constitutif nécessaire pour le versement d'une rente viagère de 1€ à 65 ans.
a_{65} sera ainsi plus grand en prenant la table des femmes qu'en prenant la table des hommes.

Rapport Berger-Lefebvre sur l'épargne financière

Un rapport parlementaire sur l'épargne financière a été remis, le 2 avril dernier, aux ministres chargés de l'Economie, des Finances et du Budget. Ce document, commandé par le Premier ministre, permettra d'alimenter la réflexion du gouvernement lors de la préparation des prochains textes législatifs, notamment lors de l'élaboration du projet de loi de finances pour 2014. Plusieurs pistes sont évoquées, dans l'optique de réorienter l'épargne à long terme des particuliers vers le financement de l'économie et, plus particulièrement, celui des entreprises et de l'immobilier : durcissement de la fiscalité de l'assurance vie avec en contrepartie des incitations fiscales en cas d'investissement dans ces secteurs, création d'un PEA-PME, etc.

Fiscalité

La réponse ministérielle Bacquet du 29 juin 2010, qui concerne les contrats d'assurance vie non dénoués par le décès de l'un des époux et constitués au moyen de fonds communs, a finalement été reprise le 20 décembre 2012, sans modification, par la nouvelle doctrine administrative accessible depuis le 12 septembre 2012. Malgré l'existence d'une controverse sur la portée de cette réponse, l'administration fiscale confirme ainsi qu'elle attache de l'importance à ce texte.

Recommandation ACP - Recueil des informations relatives au client

L'Autorité de contrôle prudentiel (ACP) a publié le 8 janvier 2013 une recommandation concernant le recueil par les assureurs des informations relatives à la connaissance du client dans le cadre de leur devoir de conseil. Ces derniers doivent collecter, notamment à l'aide de questionnaires, les informations nécessaires pour apprécier le caractère adapté ou non du conseil fourni à leurs

clients. Les préconisations de l'ACP, qui doivent être appliquées à compter du 1er octobre 2013, concernent principalement :

- les modalités de recueil et de traçabilité de l'information,
- le contenu et l'exploitation des informations,
- et les moyens et procédures à mettre en place pour assurer le respect des règles de protection de la clientèle.

Statistiques

D'après les dernières estimations publiées le 29 août 2012 par la FFSA et le GEMA, la collecte nette (i.e. versements perçus déduction faite des rachats) est négative sur les contrats d'assurance vie et atteint -4,2 milliards d'euros depuis le début de l'année 2012, sachant que le montant des cotisations versées aux assureurs au cours des 7 premiers mois de l'année a atteint 69,3 milliards d'euros (contre 81 milliards d'euros l'année précédente à la même période).
Les Français confirment leur attirance pour l'épargne à court terme, puisqu'à titre de comparaison, les livrets A et les livrets de développement durable (LDD) ont connu une collecte nette positive de +15,2 milliards d'euros depuis le mois de janvier.

2. DESCRIPTION, ÉVOLUTION ET RISQUE DE LONGÉVITÉ POUR LES CONTRATS VIE INDIVIDUELLE

La partie 1 du présent mémoire s'attachait à l'aspect général de l'assurance vie et à l'évolution de la mortalité à l'échelle de la France.
Nous décrivons ici ceci à travers une étude statistique et descriptive du portefeuille de rentiers vie individuelle.

2.1. Traitements des données

Ce que nous décrirons dans cette partie est la première étape primordiale à la construction d'une table de mortalité, à savoir la récupération ainsi que le nettoyage des données, qui permet d'éliminer les données aberrantes.

Il est nécessaire de comprendre que les données des rentiers Epargne individuels Axa sont reparties entre deux bases de données :

- La base SARI, qui répertorie les rentes gérées par AXA,
- La base AGIPI, qui répertorie les rentes gérées par l'AGIPI.

Afin d'être le plus pointilleux possible et pour disposer d'une base fiable pour la suite de l'étude, cette partie a été traitée comme un sujet en soit. Le traitement des données est de plus effectué sur chacune des deux bases de façon indépendante. Par souci de simplification, nous explicitons une seule fois les tests effectués sur les deux bases.

La récupération des données des deux bases respectives est effectuée par extraction SAS. Cette récupération se fait sur les données de 2001 à 2011 qui sont considérées comme les plus fiables.
Chacune des deux bases de rentiers est constituée pour chaque ligne d'un client résumé à plusieurs variables telles que le nom, la date de naissance, la date de souscription du contrat mais aussi la date d'effet de la rente ou encore la date de décès ; cette liste n'est pas exhaustive.

Afin de comprendre le nettoyage de données ci-après, on définit les différents types de rentes contenues dans la base.

Sont décrites ici les deux sortes de rentes existantes : les rentes viagères et les rentes non viagères.

Tous les contrats d'assurance vie AXA offrent une sortie en rente viagère, obligatoire ou optionnelle. Par conversion d'un capital acquis, une rente est versée à vie. En fonction de l'âge et du moment de départ en retraite de l'assuré, l'épargne accumulée est convertie en rente et est versée au profit de l'assuré ou de la personne désignée (en cas d'option pour la réversion) pendant toute sa vie.
Plus précisément, les contrats d'épargne avec sortie en rente viagère peuvent comporter des clauses optionnelles comme la rente à annuités garanties : cette option permet de garantir, quoi qu'il arrive, le versement d'une rente sur une durée minimum librement fixée parmi les choix proposés (5, 10, ou 15 ans). En cas de vie après la période d'annuités garanties, le rentier continue de bénéficier de la sécurité d'une rente qui reste viagère. En cas de décès du rentier pendant la période d'annuités garantit, le bénéficiaire désigné continue à percevoir la totalité de la rente durant la période restant à courir.

Une rente temporaire est une rente qui, à l'opposé de la rente viagère, garantit le versement de la rente sur une période donnée et définie dans les clauses du contrat. Cette rente n'est versée que durant la période déterminée, que le bénéficiaire soit toujours en vie à la fin de la période ou non.

On distingue alors deux types de rentes temporaires :

- La rente certaine qui est versée durant la période prévue quel que soit l'état de vie du bénéficiaire
- La rente temporaire versée durant la période prévue mais qui s'arrête au moment du décès du bénéficiaire.

Nous conservons au début du nettoyage l'ensemble des rentes du portefeuille, quelle que soit leur nature. On définit l'ensemble des rentes de la façon suivante : 'CE' pour certaines, 'CM' pour la partie certaine d'une rente viagère à annuités garanties, 'TE' pour temporaires, 'VI' pour viagères et 'VM' pour la partie viagère d'une rente viagère à annuités garanties.
Les différentes étapes du traitement des deux bases distinctes sont décrites de manière succincte dans la partie ci-dessous :

- Suppression des rentes prévoyance ainsi que celles n'appartenant pas au périmètre Epargne Vie Individuelle.
- Modification des variables suivantes :
    - Date de début : pour les réversataires nous prenons en compte la date de réversion au lieu de la date de liquidation de la rente ;

- Date de clôture : on compte la date de décès du premier bénéficiaire comme date de clôture d'une rente réversible (et non la date de clôture de la réversion) ;
- Motif de clôture : on indique le motif 'Décès' pour les rentes réversibles dont le premier bénéficiaire est décédé.

- Différents tests de cohérence sur les dates ont par ailleurs été effectués et nous ont conduits aux corrections suivantes afin de fiabiliser la base:
  - Suppression des rentes dont la date de survenance est antérieure à la date de souscription du contrat ;
  - Suppression des rentes dont la date d'effet (correspondant à la date de liquidation) est antérieure à la date de décès ;
  - Suppression des rentes dont la date de jouissance (i.e. la date de perception du premier arrérage) est supérieure à la date d'effet de plus d'un an ;
  - Test de cohérence entre la date de dernier règlement et la date de clôture. Les données incohérentes ont été supprimées ;
  - Suppression des rentes dont le motif de sortie est le décès et dont la date de décès n'est pas connue. Ces rentes exposent en effet l'assureur au risque de surexposition ou de sous-exposition ;
  - Suppression des rentes dont la date d'effet est antérieure à la date de naissance ;
  - Suppression des rentes dont la date d'effet est supérieure à la date de clôture.
- Traitement des rentes réversibles : après une étude approfondie des deux bases, nous remarquons que les réversions se trouvent sur la même ligne que la rente principale. Nous corrigeons cela de la façon suivante :
  - Copie des lignes où est indiquée une date de réversion ;
  - Sur ces lignes, remplacement des informations concernant le bénéficiaire 1 par celles du bénéficiaire 2 ;
  - Suppression des lignes où le réversataire est décédé en premier.
- Traitement des rentes à annuités garanties : les rentes à annuités garanties sont séparées en deux lignes : une ligne pour la partie certaine de la rente 'CM', et l'autre pour la partie viagère 'VM'.
  - Traitement des rentes qui ne forment pas une paire 'CM'/'VM'. Trois cas possibles :
    - rente avec uniquement la partie certaine correspondant à une rente clôturée (par rachat ou décès) pendant la période certaine
    - rente avec uniquement la partie viagère correspondant à la réversion d'une rente avec annuités garanties dont le décès a eu lieu pendant la phase viagère

- incohérence dans l'une des dates d'effet de la partie 'CM' ou 'VM' → correction manuelle de la date d'effet incohérente afin de créer une paire 'CM'/'VM'

- Traitement des rentes qui forment une paire 'CM'/'VM' :
  - On fusionne les deux rentes en une rente
  - Pour les statistiques descriptives, nous avons également gardé la date de clôture théorique de la partie 'CM', qui correspond à la date de fin des annuités garanties
- Traitement des rentes qui forment plus d'une paire 'CM'/'VM' :
  - Après étude, il s'est avéré que ces rentes correspondaient à de la multi-détention de rentes avec la même date d'effet. Ainsi, nous avons pu établir que nous avions bien des couples uniques de rentes 'CM'/'VM'.
  - Ajout de la date de fin théorique de la rente 'CM' dans la nouvelle rente 'AG' correspondante
  - Suppression des rentes 'CM'

➔ **La base obtenue est la base propre des rentes : Sous la base SARI nous avons ainsi obtenu 23 944 rentes distinctes et sous la base AGPI 4574 rentes distinctes.**

Une fois la base de rentes obtenues, et afin d'obtenir la base des rentiers, nous supprimons les cas de multi-détention de contrats.
Ainsi, pour chaque multi-détenteur, nous gardons :

- La date d'effet la plus ancienne : cette date correspond à sa date d'entrée en exposition ;
- La date de clôture la plus récente : cette date correspond à sa date de sortie d'exposition.

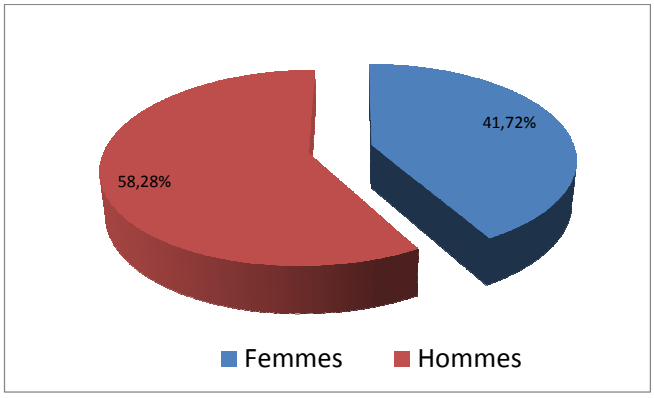
➔ **Nous obtenons au final 18 097 rentiers distincts pour la base SARI et 4167 rentiers distincts pour la base AGIPI**

2.2. Etude statistique de la mortalité et analyse du portefeuille vie individuelle d'AXA

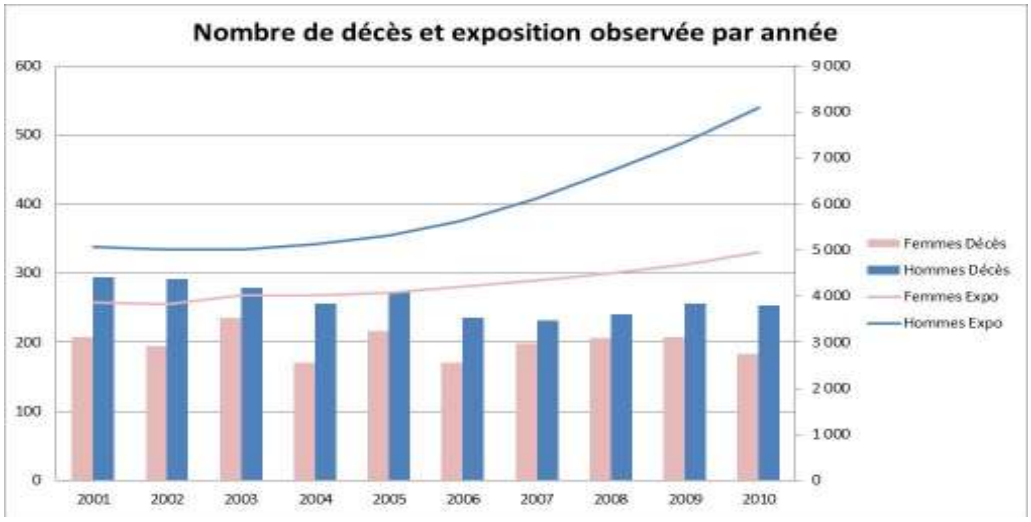
Nous essayons dans cette partie de décrire la mortalité du portefeuille AXA. Cette étude se base sur les données portefeuille de 2001 à 2011.

Concernant le risque de longévité, celui-ci est omniprésent sur le portefeuille de rentiers vie individuelle d'AXA. Celui-ci correspond à l'écart existant entre les taux de mortalité estimés à partir des tables de mortalité en vigueur (ou de la table certifiée construite par l'assureur) avec les taux de mortalité réellement observés.
Cet écart peut être expliqué de plusieurs façons différentes avec d'une part l'incertitude de l'évolution de la mortalité future et d'autre part la non-représentativité de la population française sur l'échantillon des rentiers du portefeuille.

Fig. 10 : Répartition des rentiers en fonction du sexe



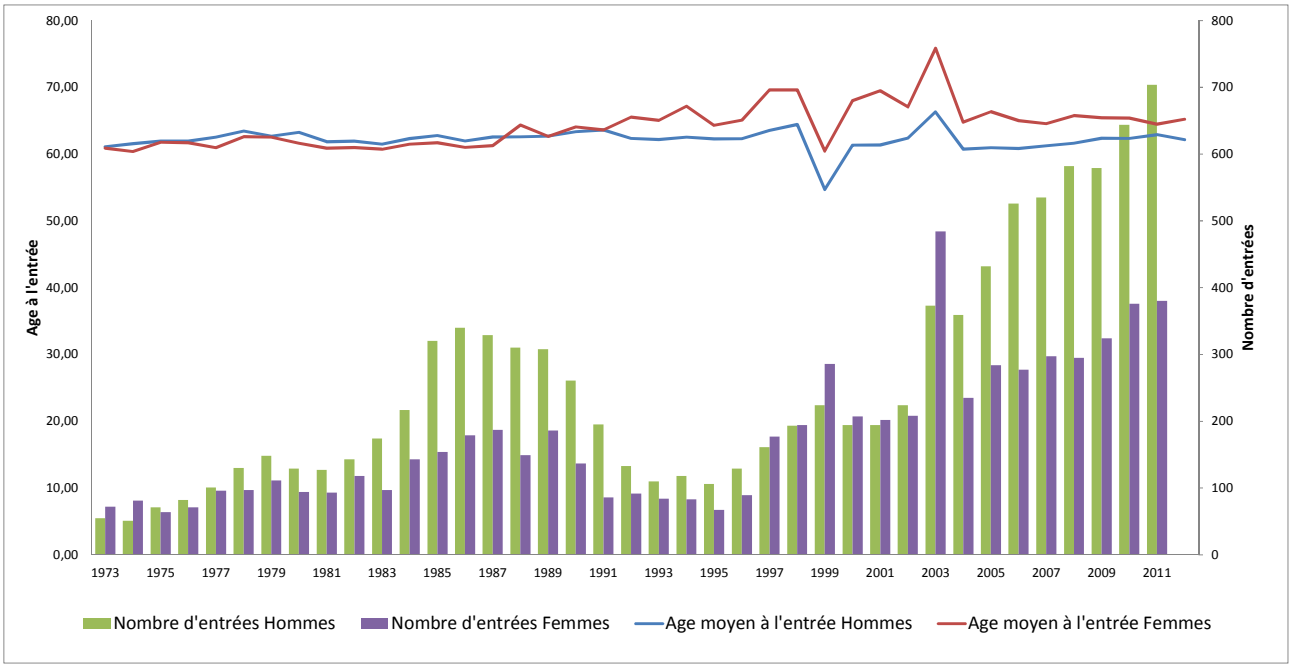
Il apparait ici que les hommes sont plus représentés dans le portefeuille des rentiers d'AXA.
On remarque de plus que le nombre d'hommes à l'entrée dans le portefeuille augmente ces dernières années plus que celui des femmes.



Sur l'ensemble de la période d'observation, nous restons sur un nombre de décès relativement stable quel que soit le sexe de l'assuré (entre 400 et 500 décès par an).

En revanche, si l'exposition des hommes augmente fortement depuis 2001 (+60% en 10 ans), l'exposition des femmes augmente plus progressivement (+20%).

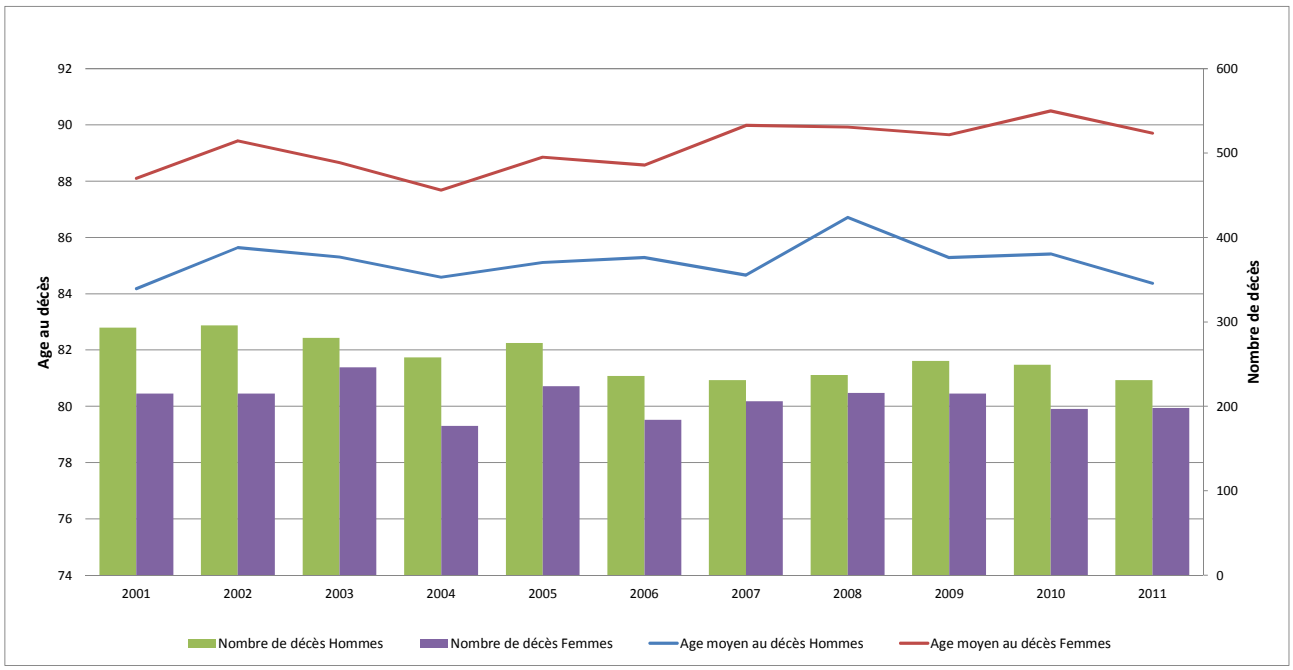
Fig. 11 : Age moyen et nombre d'entrées par génération



L'âge moyen à la sortie en rente reste constant. Le nombre d'entrants est fortement croissant depuis le début des années 1990 avec une disproportion hommes-femmes s'agrandissant. Ceci confirme le postulat de base fait au début de l'étude selon lequel de plus en plus de Français se tournent vers les contrats d'assurance vie dans le cadre d'une prévention de la Sécurité Sociale et dans une optique financièrement intéressante de leur épargne.

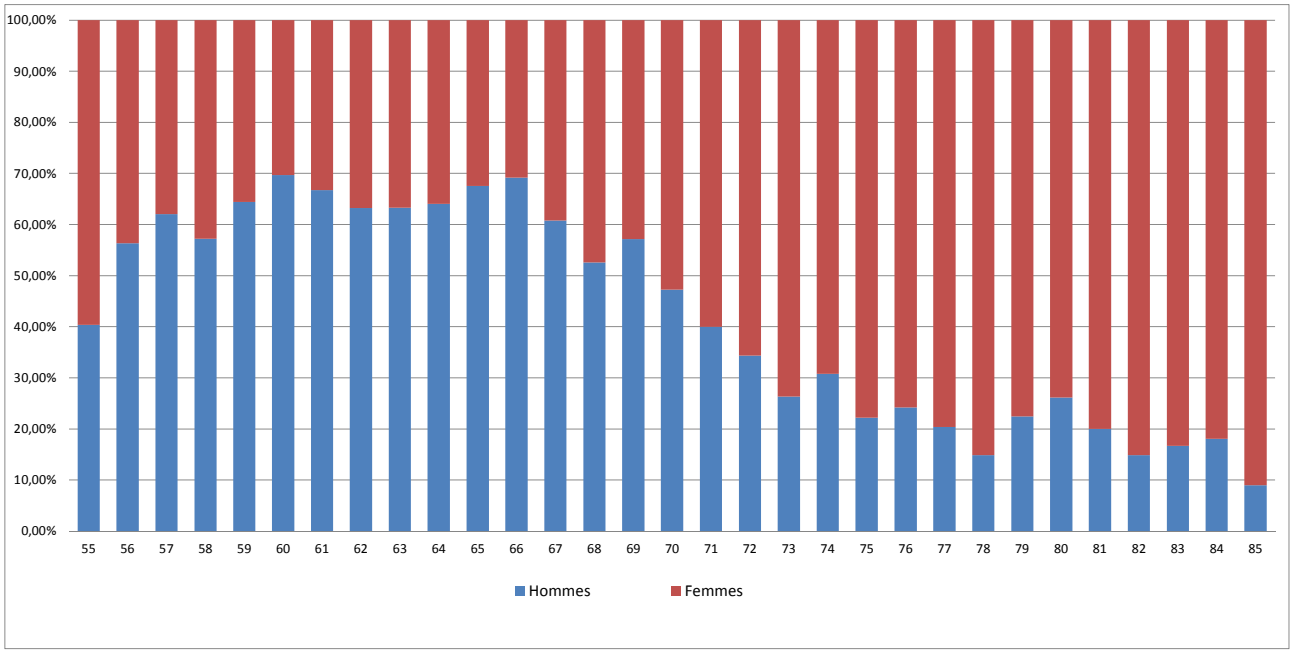
Le pic de 2008 de sortie en rente chez les hommes s'explique par la canicule de cette année.

Fig. 12 : Age moyen et nombre de décès par génération



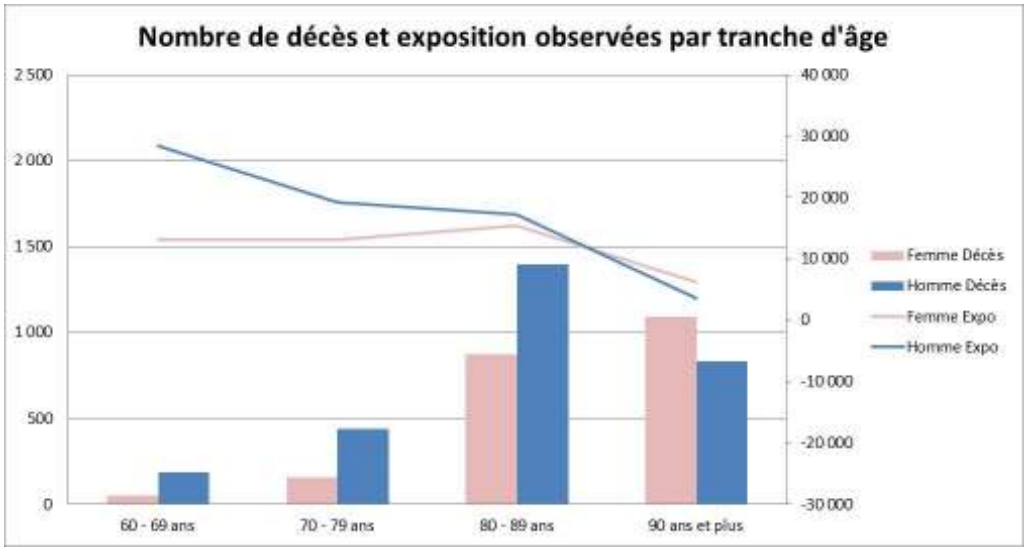
Ce graphique montre que depuis le début des années 2000, l'âge moyen au décès chez les femmes semble augmenter légèrement alors qu'il semble plus stable chez les hommes.

Fig. 13 : Répartition Hommes-Femmes en fonction de l'âge à la liquidation



Ce qui ressort de ce graphique est que si les hommes sont plus nombreux à sortir en rente entre 57 et 67 ans, les femmes semblent sortir en rente plus tardivement.

Il faut cependant tenir compte de la réversion possible qui maximise le nombre réel de sortie en rente des femmes aux âges élevés.



L'exposition au-delà de 90 ans est très faible pour les hommes comme pour les femmes.
Chez les hommes, le plus grand nombre de décès est observé sur la tranche 80 – 89 ans tandis que pour les femmes, il est observé sur la tranche 90 ans et plus.

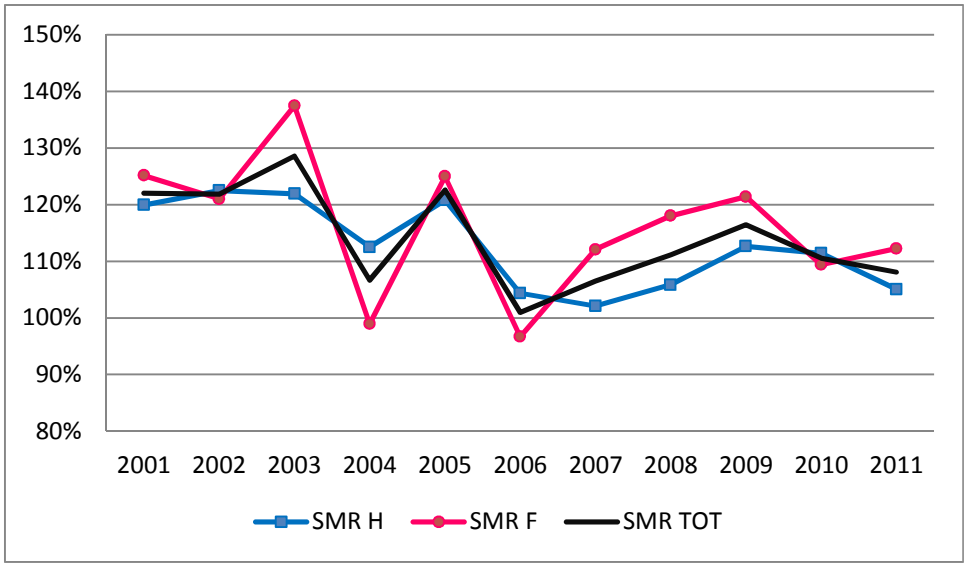
Evolution des SMR

Afin de mesurer l'enjeu grandissant que représente l'utilisation des tables réglementaires actuelles (TGH05 et TGF05), il est pertinent de faire une analyse en SMR. Le SMR qui est le « standardised mortality ratio » représente le rapport entre le nombre de décès observé et le nombre de décès attendu.
Dans le cadre de l'approche en SMR, 3 cas de figures sont envisageables :

- ➔ Si SMR< 1, cela traduit une mortalité plus faible pour le portefeuille comparativement à la mortalité théorique de la table en vigueur,
- ➔ Si SMR=1, alors le nombre de décès observés est équivalent au nombre de décès théoriques,
- ➔ Si SMR>1, alors la mortalité du portefeuille est plus forte que la mortalité théorique de la table en vigueur.

C'est à travers cette approche qu'on perçoit réellement la problématique de notre sujet, à savoir qu'on peut déceler précisément à quels âges apparaissent des déviations de mortalité par rapport aux tables réglementaires, et quelle a été l'évolution de tels écarts à travers le temps.
Ainsi deux approches sont envisageables et sont présentées ici : une par année, l'autre par âge.

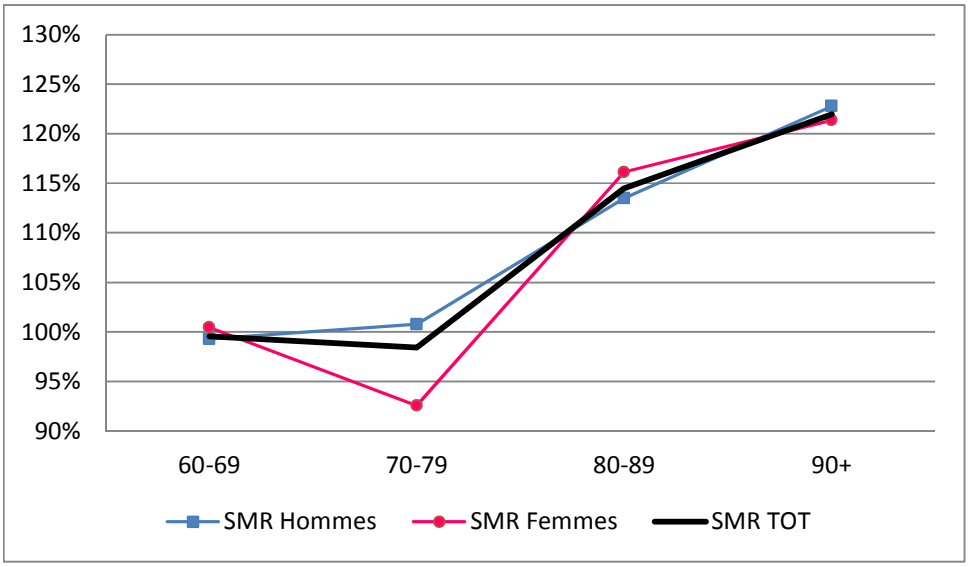
Fig. 14 : Evolution des SMR (TGH05/TGF05) depuis 2001



Sur l'ensemble du portefeuille Vie Individuelle, on observe une surmortalité en nombre par rapport aux tables réglementaires. On note toutefois un rapprochement ces dernières années du nombre de décès observé vers le nombre de décès attendu.

En Vie Individuelle, l'écart entre la mortalité observée et la mortalité théorique est globalement plus faible pour les hommes que pour les femmes

Fig. 15 : Evolution par tranche d'âge des SMR (TGH05/TGF05) depuis 2001



Au-delà de 80 ans, on constate une surmortalité de notre portefeuille par rapport aux tables réglementaires.

En revanche, pour la tranche d'âge 60 - 79 ans, on constate en moyenne une sous-mortalité de notre portefeuille par rapport aux tables réglementaires.

On explique cette sous-mortalité constatée aux âges jeunes du portefeuille par l'anti-sélection possible qui sera plus forte lors de la liquidation en rente pour les contrats d'assurance vie individuelle qui permettent un choix de liquidation en rente.

3. CONSTRUCTION D'UNE TABLE DE MORTALITE PROSPECTIVE

Cette section traite du cœur du sujet. Nous essayons ici de construire une table de mortalité prospective maîtrisant le risque de longévité auquel est soumis le portefeuille.
La démarche mise en œuvre est dans un premier temps l'estimation des taux bruts de mortalité par la méthode de Kaplan Meier et Nelson Aalen.
Dans un second temps, après avoir lissé ces taux bruts par la méthode de Whittaker-Henderson en deux dimensions, et après avoir rappelé la très classique méthode de Lee & Carter avec ses intérêts et limites, sont proposées deux nouvelles approches de modélisation que sont le modèle de Bongaarts et un modèle inspiré des travaux de Vaupel.

Nous utilisons les notations suivantes :

- $S(x)$: Fonction de survie d'un individu d'âge x définie par *S(x) = P(T>x)* avec *T* variable aléatoire de durée de vie

- q_x : Taux de mortalité brut pour un individu entre les âges x et $x+1$

On montre alors facilement pour calculer les q_x que $q_x = 1 - \frac{S(x+1)}{S(x)}$

En effet :

$$q_x = P(x < T \leq x+1 | T > x) = 1 - P(T > x+1 | T > x) = 1 - \frac{P(T>x+1)}{P(T>x)} = 1 - \frac{S(x+1)}{S(x)}$$

- l_{xt} : Nombre de survivants espérés à l'âge x dans la table de mortalité et qui sont de la génération t
- $E_t(x)$: Espérance de vie empirique à l'âge x pour un individu de la génération t défini par la relation suivante :

$$E_t(x) = \frac{\sum_{z=1}^{\omega-x} l_{(x+z)t}}{l_{xt}} + 0.5$$

où ω est l'âge maximum de la table de mortalité.

- $h(t)$: taux de mortalité instantané pour l'âge t défini par :

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{P(t < T_x \leq t + \Delta t \mid T_x > t)}{\Delta t}$$
$$= P(mourir\ entre\ t\ et\ t + \Delta t\ sachant\ qu'on\ est\ vivant\ \text{à}\ l'instant\ t)$$

- H(t) : Fonction de risque cumulé :

$$H(t) = \int_0^t h(s)ds$$

Afin d'obtenir la plus grande précision possible, l'estimateur de la fonction de survie $\tilde{S}(x)$ de Kaplan Meier et de Nelson Aalen ont étés calculés ici sur une base journalière.
Ainsi, en supposant l'âge limite de vie de 100 ans, on a i variant de 0 à $365 \times 100 = 36\,500$ jours.

De plus, au vu de la taille du portefeuille de rentiers étudié, il est clair que pour les âges inférieurs à 60 ans il existe une grande volatilité sur les données. Par conséquent les données utilisées pour la suite du modèle seront celles des âges supérieurs à 60 ans.

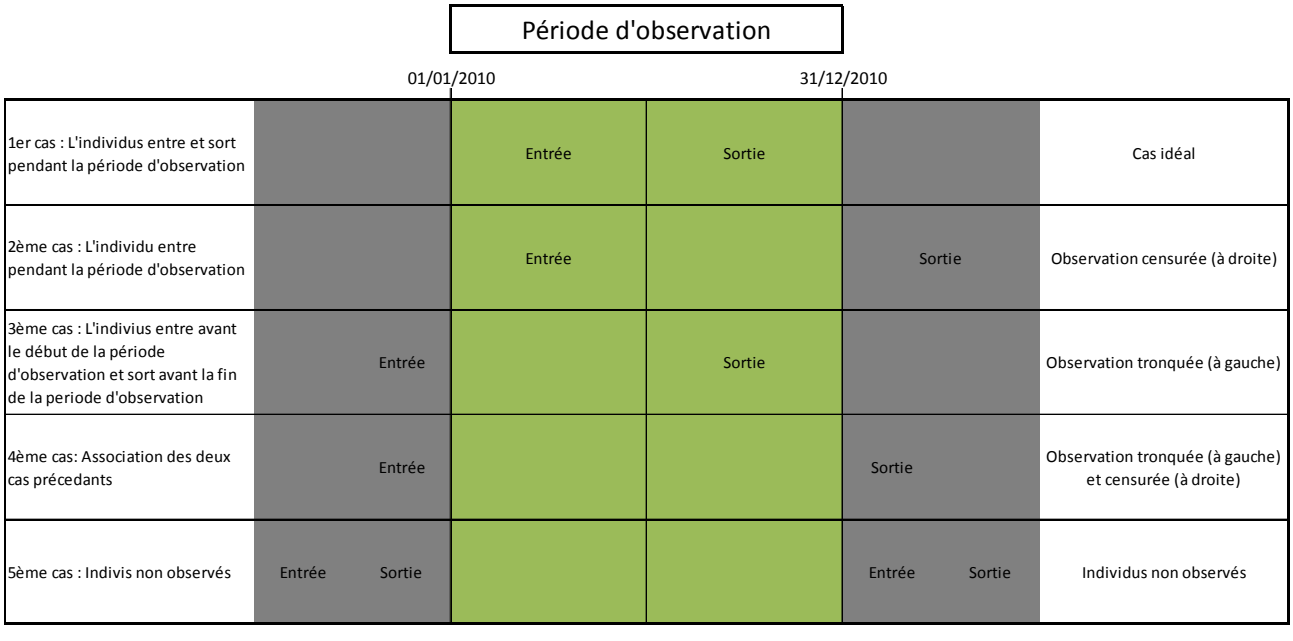
3.1. Estimation des taux bruts de mortalité

Plusieurs méthodes existent pour estimer les taux de mortalité de la population des rentiers. Nous présenterons deux méthodes non paramétriques : la méthode usuelle de Kaplan Meier, puis, moins courante mais tout aussi pertinente, la méthode de Nelson Aalen.

3.1.1. Définition des troncatures et censures

L'approche la plus intuitive de l'estimation de la fonction de survie d'une population serait de considérer le rapport du nombre de sorties pendant une période donnée au nombre d'individus soumis au risque au début de cette période.
Cette approche ne peut être jugée pertinente dans le cadre d'une population qui est observée sur l'ensemble de la plage d'observation.
En effet, dans l'étude de la mortalité de notre portefeuille, il est nécessaire d'introduire la notion de troncature et de censure.

Nous présentons ci-dessous un tableau récapitulatif définissant et résumant ces deux phénomènes.



Ainsi, une quelconque troncature ou censure entrainerait un biais dans l'estimation de la fonction de survie.
Une approche intéressante introduite par Kaplan et Meier propose une solution à ce problème en tenant compte des troncatures et censures.

3.1.2. Méthode de Kaplan Meier

L'estimateur de Kaplan-Meier est un estimateur non paramétrique de la fonction de survie.
Le principe fondamental sur lequel se base cette méthode est de dire que « être toujours vivant à l'instant t c'est être vivant juste avant l'instant t et survivre à l'instant t ».
On introduit ainsi la probabilité conditionnelle de survivre à l'instant t conditionnellement à avoir survécu à l'instant précédant.

En d'autres termes, on a alors :

$$S(t) := P(T > t) = P(T > t-1).P(T > t | T > t-1)$$
$$= S(t-1).P(T > t | T > t-1)$$

On définit alors le nombre d'individus observés à l'instant t = i par récurrence :

$$N_i = N_{i-1} - d_i - c_i + tr_i,$$

où :

- N_{i-1} est le nombre d'individus observés à l'instant $t = i - 1$, avec N_0 le nombre d'individus non tronqué (à gauche) en début d'étude
- d_i est le nombre de décès observés à l'instant $t = i$,
- c_i est le nombre d'individus censurés (qui sortent de la période d'observation en vie),
- tr_i est le nombre de troncatures à gauche.

A noter qu'il n'a pas été tenu compte des entrants dans la mesure où l'étude a été faite en jours et qu'il a été ainsi supposé (et vérifié) qu'il n'existe pas dans notre étude une personne entrant au même instant qu'une personne sortant.

La cohérence de l'estimateur de Kaplan Meier est ainsi de dire que le total des individus soumis au risque est l'ensemble des individus qui mourront ou sortiront de l'observation en t_i ou après.
Avec ces notations la proportion d'individus décédés a la forme suivante :

$$P(décès\ en\ t_i | T > t_{i-1}) = 1 - P(T > t_i | T > t_{i-1}) = \frac{d_i}{N_i}$$

La probabilité de survie empirique devient alors :

$$\hat{S}(t) = \hat{S}(t-1).\left(1 - \frac{d_t}{N_t}\right)$$

i.e. $$\hat{S}(t) = \prod_{i=1}^{t}\left(1 - \frac{d_i}{N_i}\right)$$

3.1.3. Méthode de Nelson Aalen

L'estimateur de Nelson Aalen est un estimateur non paramétrique de la fonction de risque cumulé. Pour $t_{i-1} \leq t < t_i$, on estime facilement le taux de risque instantané par la relation suivante :

$$\hat{h}(t_i) = \frac{d_i}{N_i}$$

On obtient donc la relation suivante pour la fonction de risque cumulé :

$$\hat{H}(t_i) = \sum_{t_j \leq t_i} \frac{d_j}{N_j}$$

Afin d'estimer la fonction de survie, on utilise l'estimateur de Harrington et Fleming :

$$\hat{S}(t) = \exp\left(-\hat{H}(t)\right)$$

Une estimation de la variance de la fonction de risque cumulé par une approximation par une loi de Poisson donne les deux relations suivantes :

$$E\left(\hat{H}(t_i)\right) = H(t_i)$$

$$\widehat{Var}\left(\hat{H}(t_i)\right) = \sum_{t_j \leq t_i} \frac{d_j}{N_j^2}$$

En effet, on a :

$$\hat{H}(t_i) = \sum_{t_j \leq t_i} \frac{D_j}{N_j}$$

Où D_j est le nombre de personnes qui risquent de mourir instantanément. Les D_j sont des variables aléatoires supposées indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\lambda = N_j h(t_j)$.

On montre alors :

$$E\left(\widehat{H}(t_i)\right) = E\left(\sum_{t_j \le t_i} \frac{D_j}{N_j}\right) = \sum_{t_j \le t_i} \frac{1}{N_j} E(D_j) = \sum_{t_j \le t_i} \frac{N_j h(t_j)}{N_j} = \sum_{t_j \le t_i} h(t_j) = H(t_i)$$

$$Var\left(\widehat{H}(t_i)\right) = Var\left(\sum_{t_j \le t_i} \frac{D_j}{N_j}\right) = \sum_{t_j \le t_i} \frac{1}{N_j^2} Var(D_j) = \sum_{t_j \le t_i} \frac{N_j h(t_j)}{N_j^2} = \sum_{t_j \le t_i} \frac{h(t_j)}{N_j} = \sum_{t_j \le t_i} \frac{d_j}{N_j^2}$$

Il peut également être intéressant de calculer la variance de l'estimateur de la fonction de survie. Celle-ci est calculée à l'aide de la fonction de survie par l'estimateur de Fleming et Harrington et de la méthode delta.

Le développement limité de la fonction de survie à l'ordre 1 donne :

$$\widehat{H}t_i := -\ln\left(\hat{S}(t_i)\right) = -\sum_{t_j \le t_i} \ln\left(1 - \frac{d_i}{N_i}\right) = \sum_{t_j \le t_i} \frac{d_i}{N_i} + o\left(\left(\frac{d_i}{N_i}\right)^2\right)$$

On a alors :

$$\hat{S}(t_i) \approx \exp\left(-\sum_{t_j \le t_i} \frac{d_j}{N_j}\right)$$

La forme de Taylor à l'ordre 1 donne :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

De plus, d'après le théorème de la méthode Delta :

Soit ϕ une application deR^k dans R^m différentiable en θ. Soient T_n des vecteurs aléatoires de R^k (correspondant à un estimateur de θ) et $(r_n)_n$ une suite de nombre réels tendant vers ∞. Alors si $r_n(T_n - \theta) \xrightarrow{L} T$, on a :

$$r_n\left(\phi(T_n) - \phi(\theta)\right) \xrightarrow{L} \phi'(\theta)T$$

Ainsi, en considérant l'application ϕ comme l'inverse de la fonction exponentielle, la méthode delta donne la relation suivante :

$$Var\left(f(x)\right) \approx Var\left(f\left(E(x)\right) + f'\left(E(x)\right)\left(x - E(x)\right)\right) = \left[f'\left(E(x)\right)\right]^2 Var(x)$$

On obtient donc la relation de l'estimateur de la variance de l'estimateur de la fonction de survie :

$$\widehat{Var}\left(\hat{S}(t_i)\right) \approx \left(\hat{S}(t_i)\right)^2 \widehat{Var}\left(\hat{H}(t_i)\right) = exp\left(-2\sum_{t_j \le t_i} \frac{d_j}{N_j}\right)\left(\sum_{t_j \le t_i} \frac{d_j}{N_j^2}\right)$$

Où :

$$f(X) = f\left(\hat{H}(t)\right) = \exp\left(-\hat{H}(t)\right)$$

$$E(X) = E\left(\hat{H}(t)\right) = \sum_{t_j \le t_i} \frac{d_j}{N_j}$$

$$\left[f'\left(E(X)\right)\right]^2 = exp\left(-2\sum_{t_j \le t_i} \frac{d_j}{N_j}\right)$$

3.1.4. Choix de l'estimateur

La méthode d'estimation des taux bruts retenue dans notre étude est la méthode de Nelson Aalen. L'estimateur de Kaplan Meier présente l'avantage d'avoir des propriétés intéressantes. Selon Planchet, « il est tout d'abord convergent, asymptotiquement gaussien, cohérent et est également un estimateur du maximum de vraisemblance généralisé. Toutefois cette estimateur est biaisé positivement ». Cela signifie que nous pourrions surestimer la mortalité, ce qui est problématique pour une étude sur la longévité, d'où le choix de la méthode de Nelson Aalen (qui est un estimateur non biaisé).

On montre qu'à l'ordre 2, le taux de hasard cumulé est plus faible avec la méthode proposée par Nelson-Aalen.
Nous avons en effet mathématiquement la relation suivante :

$$\hat{H}(t_i) := -\ln\left(\hat{S}(t_i)\right) = -\sum_{t_j \le t_i} \ln\left(1 - \frac{d_i}{N_i}\right) = \sum_{t_j \le t_i} \frac{d_i}{N_i} + \frac{1}{2}\left(\frac{d_i}{N_i}\right)^2 + o\left(\left(\frac{d_i}{N_i}\right)^2\right)$$

On a donc un taux de survie plus fort qu'avec l'estimation de Kaplan Meier.
Ceci est confirmé par les graphiques que nous exposons ci-dessous.

Fig. 16 : Fonction de survie de la génération 2001 et 2008 des femmes

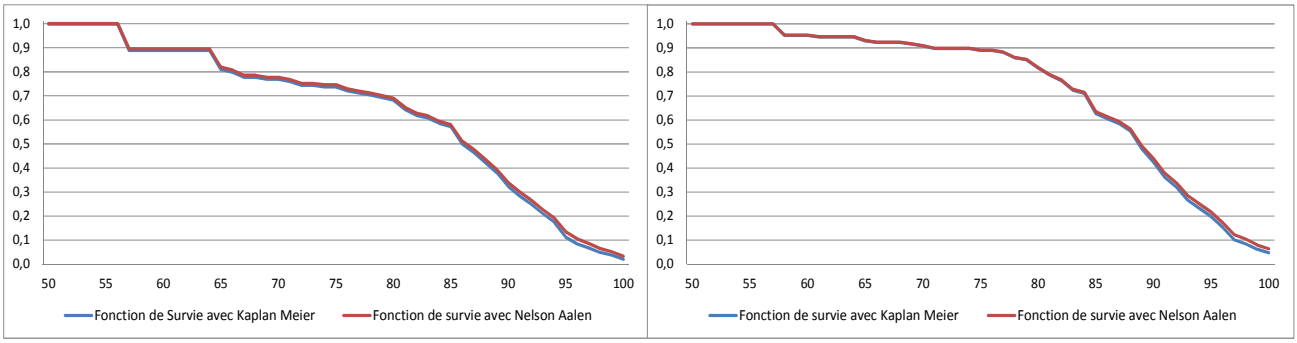
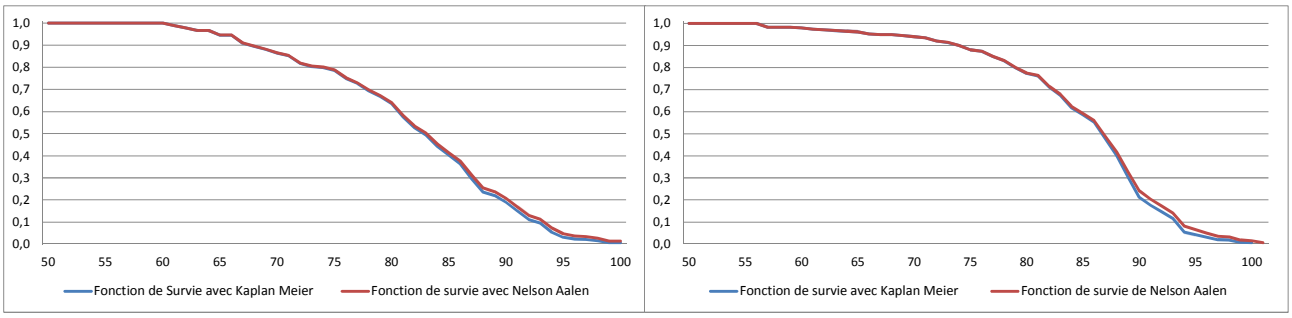


Fig. 17 : Fonction de survie de la génération 2001 et 2008 des hommes



Pour les générations 2001 et 2008, pour les hommes comme pour les femmes, la fonction de survie estimée par la méthode de Nelson Aalen est légèrement plus haute que celle de Kaplan Meier.

Dans un contexte de rente il est donc plus intéressant et plus prudent d'utiliser la méthode de Nelson Aalen. En effet l'utilisation d'une table surestimant la mortalité entraine pour l'organisme assureur des pertes techniques.

3.1.5. Intervalle de confiance des taux bruts de mortalité

Afin de mettre en place la méthode de lissage la plus pertinente, nous nous proposons de présent de calculer les intervalles de confiance.
Comme le souligne Planchet (« Construction de tables de mortalité prospectives sur un groupe restreint : mesure du risque d'estimation), les intervalles de confiance permettent d'encadrer les taux de survie au titre des fluctuations d'échantillonnage.

L'estimateur de Nelson Aalen étant une fonction non paramétrique de la fonction de survie, il est inapproprié de déduire des intervalles de confiance à partir de la variance de celui-ci.

Nous proposons ici de construire un intervalle de confiance de l'estimateur des moments de Hoem des taux de mortalité, nous permettant alors d'encadrer les taux de mortalité issus de la méthode de Nelson Aalen. On considère ainsi que les taux de mortalité suivent une loi de Bernoulli.

Comparativement à la méthode de Nelson Aalen, la censure (c_i) et troncature (tr_i) est calculée en nombre de jours.
Pour rappel, l'estimateur des taux de mortalité par l'estimateur des moments de Hoem est de la forme suivante :

$$\hat{q}_x = \frac{D_x}{\sum_{i=1}^{N_x}(tr_i - c_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{N_x} d_i}{\sum_{i=1}^{N_x}(tr_i - c_i)};$$

Où :

- N_x est le nombre d'individus exposés au risque de décès entre les âges x et x+1,
- $\sum_{i=1}^{N_x}(tr_i - c_i)$ est l'exposition au risque du portefeuille des personnes âgées entre x et x+1,

On montre facilement que :

$$E[\hat{q}_x] = q_x;$$

$$Var(\hat{q}_x) = \frac{\hat{q}_x \sum_{i=1}^{N_x}(tr_i - c_i)(1 - (tr_i - c_i)q_x)}{\left(\sum_{i=1}^{N_x}(tr_i - c_i)\right)^2}$$

En effet :

$$E[\hat{q}_x] = \frac{E[D_x]}{\sum_{i=1}^{N_x}(tr_i - c_i)} = \frac{\sum E[D_i]}{\sum(tr_i - c_i)} = \frac{\sum {}_{(tr_i - c_i)}q_{x+c_i}}{\sum(tr_i - c_i)} = \frac{q_x \sum(tr_i - c_i)}{\sum(tr_i - c_i)} = q_x;$$

$$Var(\hat{q}_x) = \frac{Var[D_x]}{\left(\sum_{i=1}^{N_x}(tr_i - c_i)\right)^2} = \frac{\sum Var[D_i]}{(\sum(tr_i - c_i))^2} \qquad par\ ind\acute{e}pendance\ du\ risque\ de\ d\acute{e}c\grave{e}s$$

$$= \frac{\sum {}_{(tr_i - c_i)}q_{x+c_i}\ \left(1 - {}_{(tr_i - c_i)}q_{x+c_i}\ \right)}{(\sum(tr_i - c_i))^2} = \frac{\hat{q}_x \sum_{i=1}^{N_x}(tr_i - c_i)(1 - (tr_i - c_i)q_x)}{\left(\sum_{i=1}^{N_x}(tr_i - c_i)\right)^2}$$

Les bornes de l'intervalle de confiance I_c pour un quantile $u_{\alpha/2}$ d'ordre $\alpha/2$ sont donc :

$$I_c = \left[\hat{q}_x \pm u_{\alpha/2}\sqrt{\widehat{Var}(\hat{q}_x)}\right]$$

Les résultats obtenus sont satisfaisants pour un quantile de 0.05 puisque pour l'ensemble des générations de 2001 à 2011, que ce soit pour les femmes ou les hommes, pour les âges compris entre 60 et 90 ans, les taux de la fonction de survie sont compris dans les bornes de l'intervalle de confiance.

On illustre cela en comparant les taux de mortalité découlant de la méthode de Nelson Aalen avec les intervalles de confiance construits à l'aide de l'estimateur des moments de Hoem.

Fig. 18 : Taux de mortalité estimés des femmes encadrés par les I_c de 2005, 2007 et 2010

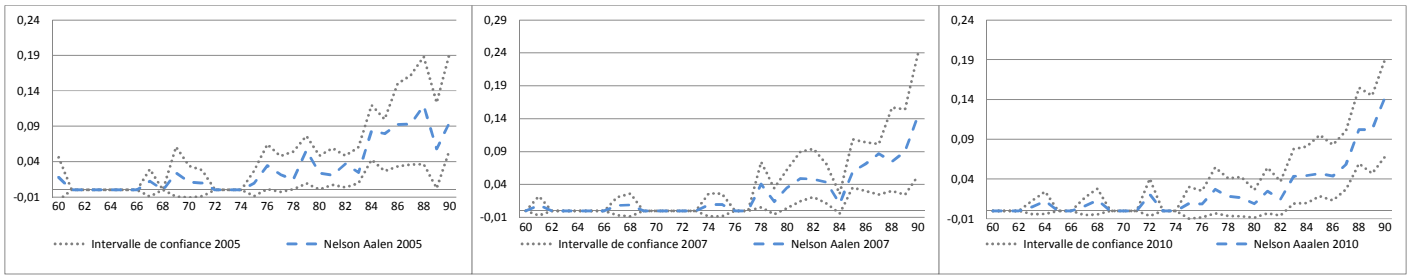
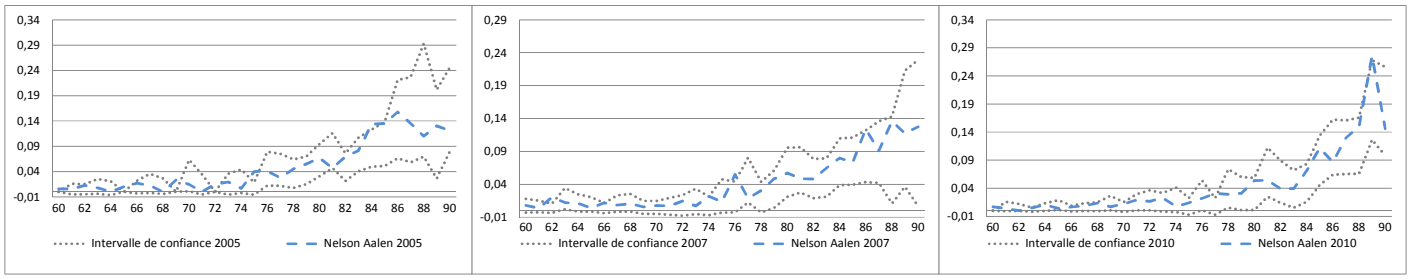


Fig. 19 : Taux de mortalité estimés des hommes encadrés par les I_c de 2005, 2007 et 2010

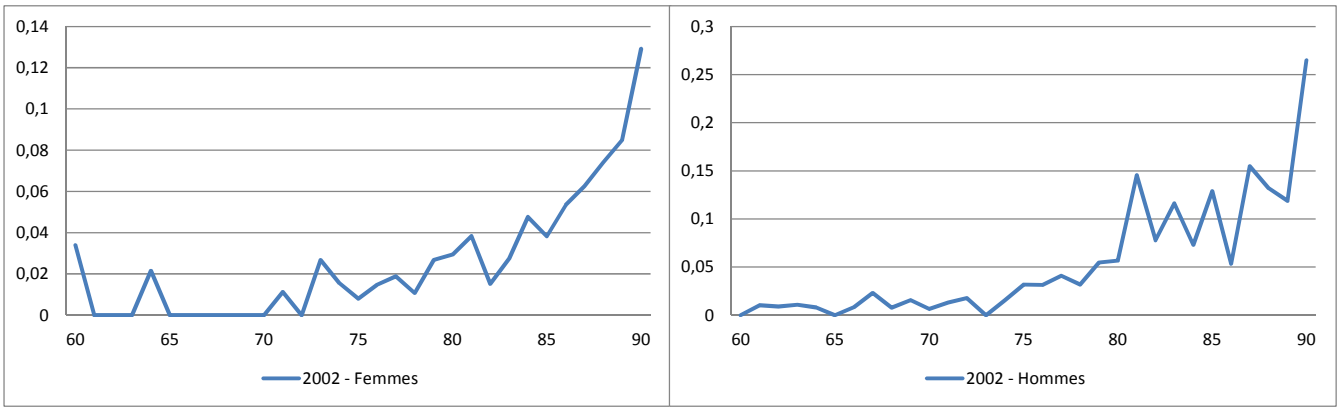


3.2. Méthode de lissage des Taux Bruts : La méthode de Whittaker-Henderson

3.2.1. Explicitation de la méthode de Whittaker-Henderson

On suppose que l'évolution du taux de mortalité est régulière et continue avec l'âge. Ceci correspond à l'intuition que l'Homme a une probabilité de mourir qui croît avec l'âge.
Le manque de données inhérent au portefeuille entraine une grande irrégularité sur les taux de mortalité ; il est ainsi nécessaire de lisser les données.
Par exemple, l'année 2002 présente une irrégularité significative, comme le montre le graphique ci-dessous :

Fig. 20 : Taux de mortalité estimés des femmes et des hommes de 2002



Afin de maitriser la méthode de Whittaker-Henderson en deux dimensions il est légitime de s'intéresser à cette méthode en une dimension et de l'étendre par la suite à deux dimensions.

<u>Méthode de Whittaker-Henderson en dimension 1 :</u>

La méthode de Whittaker-Henderson est fondée sur deux critères : un critère de fidélité entre la courbe de référence et la courbe lissée et un critère de régularité.

<u>CRITÈRE DE FIDÉLITÉ</u>

Le critère de fidélité mesure la distance quadratique entre la mortalité lissée $\tilde{q}_x$ et la mortalité estimée $\tilde{Q}_x$, chaque distance étant pondérée par le poids W_x :

$$\mathrm{F} = \sum_{x=1}^{\omega} w_x \, (\tilde{q}_x - \tilde{Q}_x)^2,$$

ω étant l'âge de vie maximal.

La distance représente l'écart aux valeurs estimées. Les poids eux, sont ajustables selon différentes modalités.

CRITÈRE DE RÉGULARITÉ

Le critère de régularité permet d'évaluer la régularité de la courbe lissée :

$$K = \sum_{x=1}^{n-z} (\Delta^z \tilde{q}_x)^2$$

Où z est un premier paramètre du modèle, un entier positif, et où $\Delta^z \tilde{q}_x := \sum_{k=0}^{z} C_z^k \, (-1)^{z-k} \tilde{q}_{x+k}$.

Plus la forme de la courbe sera régulière, plus la valeur de K diminuera.

La méthode de lissage de Whittaker-Henderson consiste à trouver les valeurs lissées $\tilde{q}_x$ qui minimisent M :

$$M := F + hK,$$

où h est un second paramètre du modèle.

On définit alors les matrices suivantes :

$$Q = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 \\ \tilde{Q}_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \tilde{Q}_n \end{bmatrix}; \qquad V = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \tilde{q}_n \end{bmatrix}; \qquad \mathrm{W} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & w_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & w_n \end{pmatrix}$$

Où W est une matrice diagonale qui correspond aux poids donnés à chaque valeur estimée.

Nous écrivons à présent F en notation matricielle :

$$F = (V - Q)^T \times W \times (V - Q)$$

Concernant le critère de régularité, on définit :

$$\Delta^z V = \begin{pmatrix} \Delta^z \tilde{q}_1 \\ \Delta^z \tilde{q}_2 \\ \cdots \\ \vdots\vdots \\ \Delta^z \tilde{q}_{n-z} \end{pmatrix}$$

Ceci nous permet d'écrire R en notation matricielle

$$R = (\Delta^z V)^T . (\Delta^z V).$$

On introduit alors une matrice spéciale K_z de taille$(n - z, n)$, qui contient les coefficients binomiaux d'ordre z dont le signe alterne et commence positivement pour z pair.

Par exemple pour $z = 2$ et $p = 4$, on aura :

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a ainsi : $\Delta^z V = K_z V$.
Ce qui nous permet d'écrire le critère M sous la forme :

$$\begin{aligned} M &= F + hR \\ &= (V - Q)^T . W . (V - Q) + h(\Delta^z V)^T . (\Delta^z V) \\ &= (V - Q)^T . W . (V - Q) + hV^T . K_z^T . K_z . V. \end{aligned}$$

Après développement puis regroupement des termes, nous obtenons donc :

$$M = V^T . W . V - 2V^T . W . Q + Q^T . W . Q + hV^T . K_z^T . K_z . V.$$

Les $\tilde{q}_x$ lissés sont alors trouvés en annulant la dérivé partielle de M par rapport à chacun des $\tilde{q}_x$.

On dérive donc M vectoriellement :

$$\frac{\Delta M}{\Delta V} = 2W . V - 2W . Q + 2hK_z^T . K_z . V = 0$$

$$\Leftrightarrow W . V + hK_z^T . K_z . V = W . Q.$$

On pose $C = W + hK_z^T . K_z$ et on a alors :

$$C . V = W . Q.$$

Et ainsi, si C est inversible, nous obtenons l'expression suivante des taux lissés :

$$V = C^{-1}.W.Q.$$

Méthode de Whittaker-Henderson en dimension 2 :

En dimension 2, la méthode de Whittaker-Henderson s'effectue avec la même démarche qu'en dimension 1.
On dispose de la matrice $\tilde{Q}_x$ des taux de mortalité bruts. Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\tilde{Q}_x = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_{11} & \cdots & \cdots & \tilde{Q}_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{Q}_{n1} & \cdots & \cdots & \tilde{Q}_{nq} \end{pmatrix}$$

On généralise alors simplement le critère de fidélité de la façon suivante :

$$F = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{q} w_{ij} \left(\tilde{Q}_{ij} - \tilde{q}_{ij}\right)^2.$$

Pour le critère de régularité, on prend en compte la régularité verticale d'une part avec Δ_v^z agissant sur $\tilde{q}_{ij}$ avec j fixé. Ceci permet de déduire la régularité verticale avec :

$$R_v = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{n-z} \left(\Delta_v^z q_{ij}\right)^2$$

En conservant la même méthode pour la régularité horizontale R_h , on a :

$$M = F + \alpha R_v + \beta R_h$$

On cherche à minimiser cette distance.
Comme le préconise Planchet, la résolution du problème d'optimisation s'effectue en réarrangeant les éléments pour se ramener au cas unidimensionnel. Pour cela on définit le vecteur de taille $n \times q$, u tel que $u_{q(i-1)+j} = \tilde{q}_{ij}$; cela revient à prendre pour les q premiers éléments du vecteur u la première ligne de la matrice $\tilde{q}$, puis ensuite les éléments de la seconde ligne, et ainsi de suite. De

même on fabrique une matrice de poids en copiant sur la diagonale les lignes de la matrice (w_{ij}).

On pose donc $w^*_{q(i-1)+j,q(i-1)+j} = w_{ij}$.

On procède de la même manière pour définir les matrices K_z^v et K_y^h.

Les valeurs lissées s'obtiennent alors par :

$$q^* = \left(w^* + \alpha K_z^{v\prime} K_z^v + \beta K_y^{h\prime} K_y^h\right)^{-1} w^* u.$$

Application pratique aux taux de mortalité bruts

Afin de calibrer le lissage de nos données pour les générations de 2001 à 2011 par la méthode de Whittaker Henderson en 2 dimensions, il est nécessaire de rendre compte de la forte volatilité présente dans le portefeuille et donc des taux de mortalité estimés.

Ce problème est illustré par les graphiques suivants qui présentent l'évolution des taux de mortalité de 60 à 90 ans et pour les générations de 2005 et 2008.

Fig. 21 : Taux de mortalité estimés des femmes de 2005 et 2008

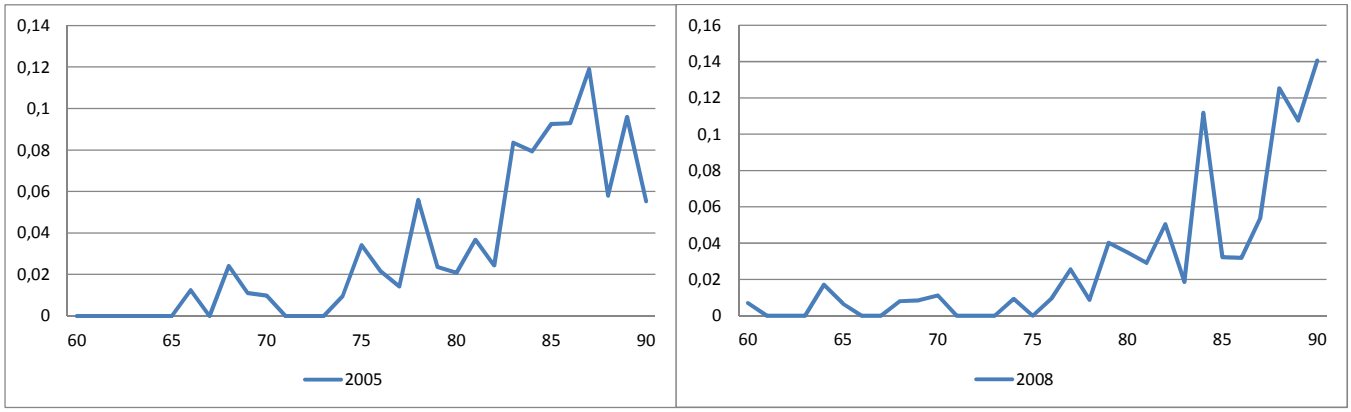
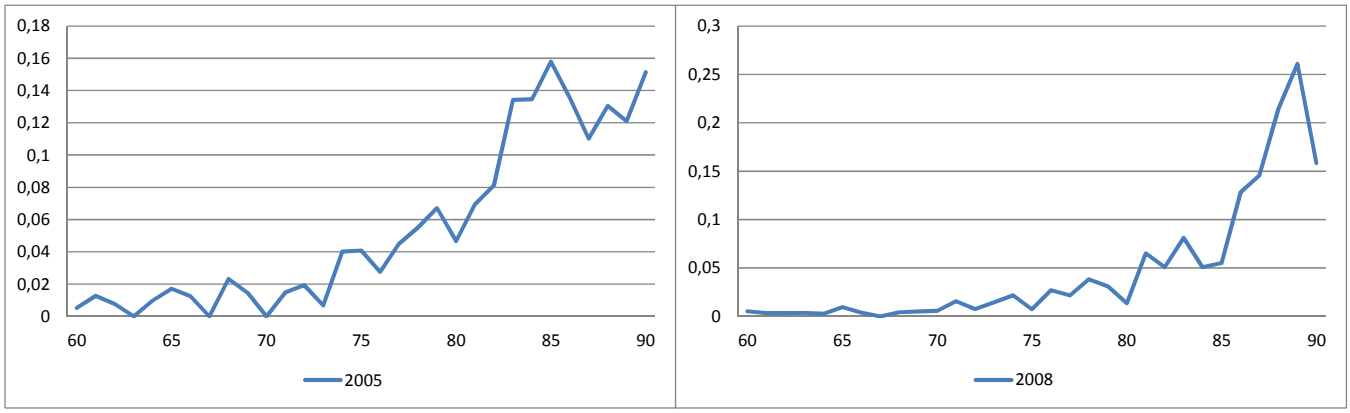


Fig. 22 : Taux de mortalité estimés des hommes de 2005 et 2008



Au vu de cette forte irrégularité, on privilégie dans cette étude la régularité face à la fidélité. En effet, la petite taille de l'échantillon étudié donne une certaine tranche de taux de mortalité qui est soumise à une fluctuation d'échantillonnage importante et qui donne des valeurs aberrantes.

De plus, il parait judicieux de donner un caractère plus important à la régularité horizontale correspondant à la régularité sur une année pour l'ensemble des âges, qu'à la régularité verticale correspondant à la régularité pour un âge sur toutes les années de l'étude. Concernant les poids, on choisit les poids suivants :

$$w_{xj} = \frac{n_{xj}}{\sum_{k=k_{min}}^{k_{max}} \sum_{l=2001}^{2011} n_{kl}}$$

Où n_{xj} représente l'effectif de la population sous risque à l'âge x de la génération j.

Les résultats obtenus sont décrits par les illustrations suivantes des taux de mortalité des hommes et des femmes pour les âges de 60 à 90 ans et pour les générations de 2005 et 2008.

Fig. 23 : Taux de mortalité estimés et lissés des femmes de 2005 et 2008

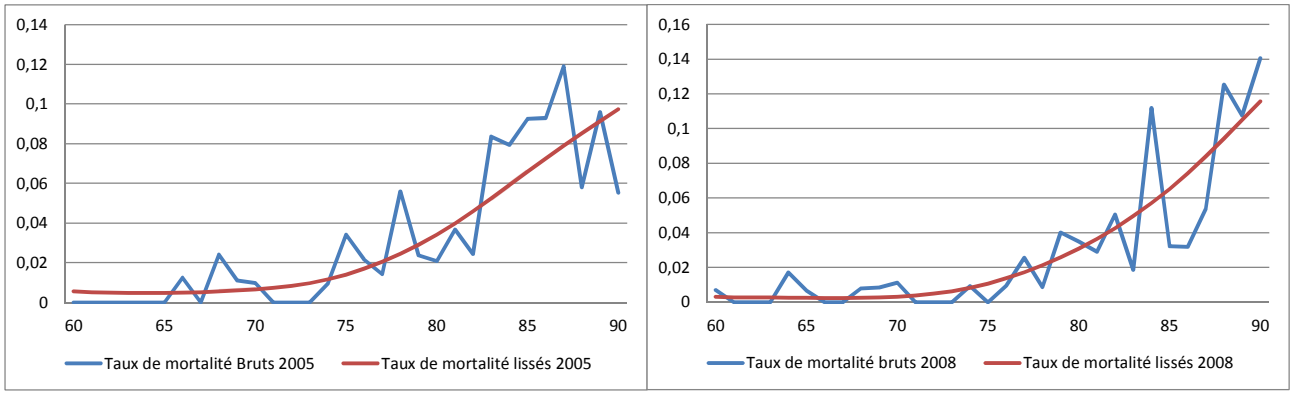
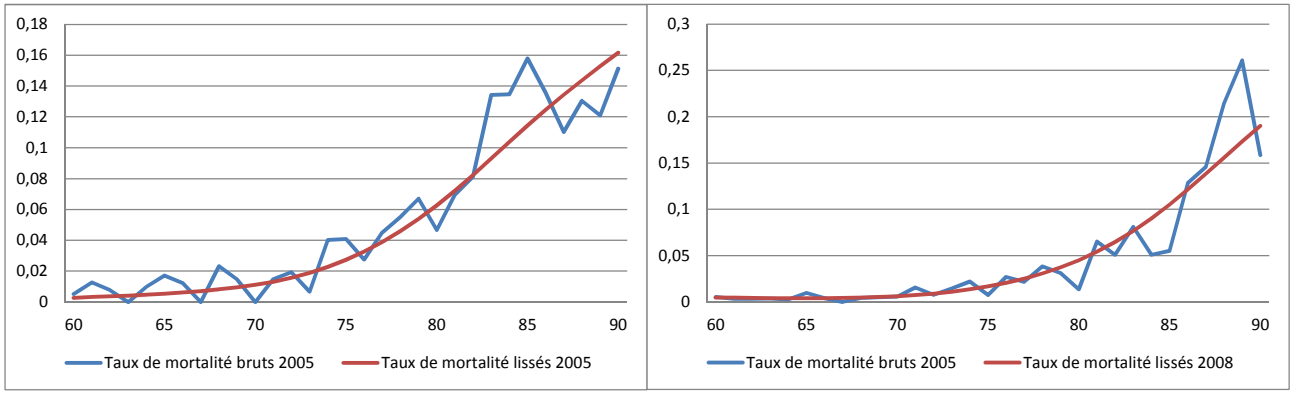


Fig. 24 : Taux de mortalité estimés et lissés des hommes de 2005 et 2008



Nous voyons bien que les taux de mortalité lissés collent bien avec les taux bruts.
Ils nous permettent ainsi d'obtenir une régularité des taux qui est compatible à l'idée que les taux sont croissants et présentent une forme régulière.

3.2.2. Intervalle de confiance des taux bruts de mortalité lissés

Nous essayons d'encadrer dans cette partie les taux de mortalité lissés par un intervalle de confiance à 95%. On utilise l'intervalle de confiance de l'estimateur des moments de Hoem.
Les résultats sont cohérents et permettent de valider le lissage.
Nous illustrons ci-dessous ceci à l'aide des générations de 2005, 2007 et 2010.

Fig. 25 : Taux de mortalité estimés des femmes encadrés des I_c pour la génération de 2005, 2007 et 1010

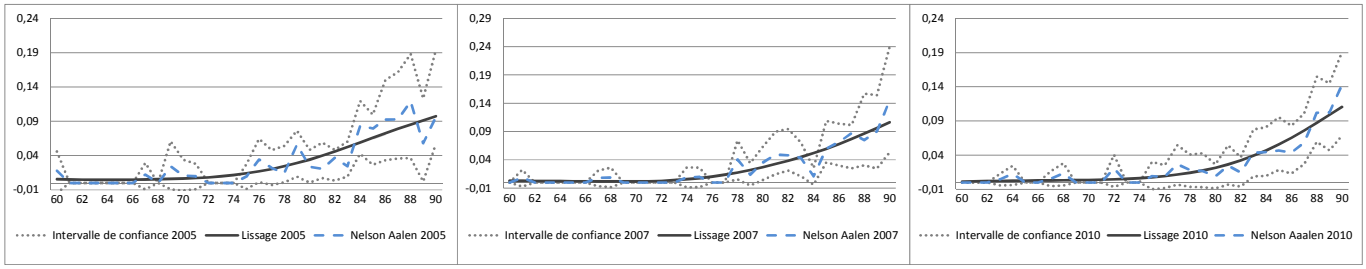
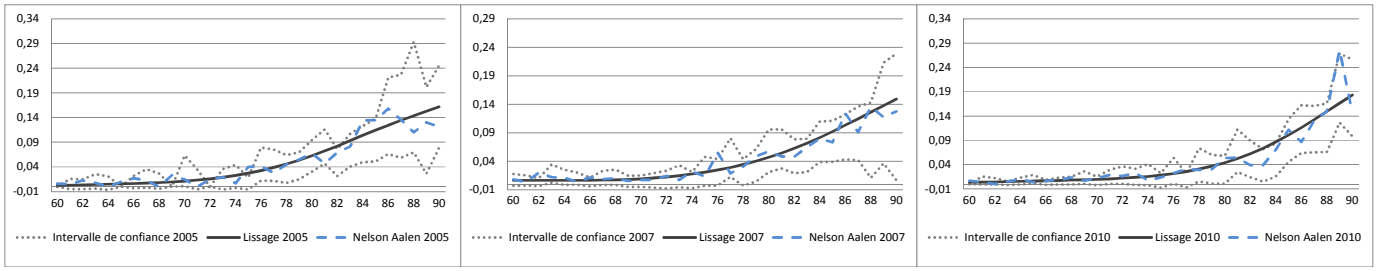


Fig. 26 : Taux de mortalité estimés des hommes encadrés des I_c pour la génération de 2005, 2007 et 1010



Il est clair que les taux lissés pour les générations présentées ci-dessus sont bien dans l'intervalle de confiance. Ceci est vrai également pour l'ensemble des autres générations.
On valide donc le lissage par la méthode de Whittaker Henderson.

3.3. Rappel sur le modèle de Lee & Carter

Dans cette section, le but est de présenter très succinctement le modèle de Lee & Carter mais surtout d'en souligner les faiblesses afin de justifier que nous ayons choisi de développer d'autres modèles de longévité dans ce mémoire.

On définit le taux de mortalité instantané μ_{x+t} ou encore la force de mortalité à l'âge $x+t$ par :

$$\mu_{x+t} = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{P(t < T_x \leq t + \Delta t \mid T_x > t)}{\Delta t}$$

En d'autres termes, le taux de mortalité instantané correspond à la probabilité de décéder subitement à l'âge $x+t$ quand t→0

3.3.1. Présentation du modèle

Le modèle de Lee & Carter présenté en 1992 propose de décomposer la force de mortalité en deux composantes, l'une propre à l'âge et l'autre tendancielle, puis d'extrapoler ensuite la composante relative au temps.
Lee & Carter donnent une estimation du taux instantané de mortalité sur une échelle logarithmique de la forme suivante :

$$\ln \mu_{xt} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{xt}$$

avec :

α_x : Comportement moyen des taux instantanés de décès au cours du temps à l'âge x,

β_x : Ecart des taux instantanés à l'âge x au comportement moyen α_x,

κ_t : Evolution de la mortalité globale au cours du temps,

ϵ_{xt} : Terme d'erreur du modèle correspondant à la particularité propre à chaque âge x et génération – variables aléatoires centrées, indépendantes et identiquement distribuées (hypothèse d'homoscédasticité).

Estimation des paramètres :

Tout d'abord, afin de ne pas rendre possible deux jeux de paramètres distincts entrainant la même valeur de la force de mortalité à un âge donné, Lee & Carter proposent la contrainte suivante sur les paramètres $\beta \; et \; \kappa$:

$$\sum_{a=a_{min}}^{a_{max}} \beta_a = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} \kappa_t = 0.$$

Pour l'estimation des paramètres, plusieurs méthodes sont possibles et ont été développées dans différents articles ces dernières années.
Nous retiendrons ici la méthode la plus couramment utilisée des moindres carrés ordinaires.
Elle conduit à résoudre le programme d'optimisation suivant :

$$\left(\hat{\alpha}\,, \hat{\beta}\,, \hat{\kappa}\right) = \arg\min_{\alpha,\beta,\kappa} \sum_{a_{\min}}^{a_{max}} \sum_{t=t_{min}}^{t=t_{max}} (\ln \hat{\mu}_a\,(t) - \alpha_a - \beta_a \kappa_t)^2.$$

L'estimation des paramètres se décompose en 4 étapes distinctes :

1. Estimation des α_a:

On annule la dérivée du programme d'optimisation décrit ci-dessus sous les contraintes données relatives à $\beta \; et \; \kappa$.
On trouve alors aussitôt la relation suivante :

$$\hat{\alpha}_a = \frac{1}{t_{max} - t_{min} + 1} \sum_{t=t_{min}}^{t=t_{max}} \ln \hat{\mu}_a\,(t)$$

2. Estimation de $\beta_a \; et \; \kappa_t$:

Soit **Z** la matrice de dimensions $(t_{max} - t_{min} + 1)(a_{max} - a_{min} + 1)$ où :

$$z_{a-a_{min}+1,t-t_{min}+1} = ln(\widehat{\mu_{xt}}) - \widehat{\alpha}_a$$

Notant $u_i \; et \; v_i$ les vecteurs propres correspondant à la i[ème] valeur singulière de la matrice **Z** et supposant que $\sum_j v_{1j} \neq 0$, on a :

$$\hat{\beta} = \frac{v_1}{\sum_j v_{1j}}$$

$$\widehat{\kappa} = \sqrt{\lambda_1}\left(\sum_j v_{1j}\right)u_1$$

3. Réajustement des $\widehat{\kappa}_t$:

Après avoir estimé les paramètres du modèle et afin de reproduire plus fidèlement le nombre total de décès observés lors d'une année donnée, Lee & Carter proposent d'affiner les estimations en tenant compte du nombre de décès observés.
Lee & Carter proposent ainsi la contrainte supplémentaire suivante :

$$\sum_{a=a_{min}}^{a=a_{max}} d_{at} = \sum_{a=a_{min}}^{a=a_{max}} er_{at}\exp\left(\hat{\alpha}_a + \hat{\beta}_a\hat{\kappa}_t\right)$$

où er_{at} est le nombre observé de personnes d'âge a durant l'année t appelé également l'exposition au risque).
On estime des nouveaux estimateurs $\widehat{\widehat{\kappa}}$ de $\widehat{\kappa}$ qui sont solutions de l'équation suivante :

$$0 = \sum_{a=a_{min}}^{a=a_{max}} er_{at}\exp\left(\hat{\alpha}_a + \hat{\beta}_a\hat{\kappa}_t\right) - d_{at}$$

$$= \sum_{a=a_{min}}^{a=a_{max}} \left[K_{at}\exp\left(\hat{\beta}_a\hat{\kappa}_t\right)\right] - K_t$$

où :

$$K_{at} = er_{at}\exp\left(\hat{\alpha}_a\right)$$

$$K_t = \sum_{a=a_{min}}^{a=a_{max}} d_{at}$$

4. Extrapolation de la tendance temporelle

La dernière étape décrite ici concerne l'extrapolation de la composante temporelle du modèle. Afin d'extrapoler la série temporelle, on utilise le processus ARIMA (p, d, q) avec la méthodologie de Box et Jenkins. On utilise couramment le modèle ARIMA (0, 1, 0).
Pour mémoire, le principe de base d'une modèle ARIMA est de supposer que chaque valeur de la série est fonction des valeurs qui la précède.

$$\hat{\kappa}_t = \hat{\kappa}_{t-1} + \theta + \zeta_t$$

où :

- θ est un paramètre de tendance et représente la différence moyenne entre deux périodes,
- $\zeta_t \sim Norm(0, \sigma_\zeta^2)$ est le paramètre des erreurs supposées indépendantes et identiquement distribuées

En appliquant la méthode du maximum de vraisemblance, on obtient :

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{\kappa}_{t_{max}} - \hat{\kappa}_{t_{min}}}{t_{max} - t_{min}}$$

$$\hat{\sigma}_\zeta^2 = \frac{1}{t_{max} - t_{min}} \sum_{t=t_{min}}^{t=t_{max}} (\hat{\kappa}_{t+1} - \hat{\kappa}_t - \theta)^2$$

$$Var(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_\zeta^2}{t_{max} - t_{min}}$$

On a alors pour $\mathfrak{t} = 1,2,\ldots$la relation suivante :

$$\hat{\kappa}_{t_{max}+\mathfrak{t}} = \hat{\kappa}_{t_{max}} + \mathfrak{t}\hat{\theta} + \sum_{u=1}^{\mathfrak{t}} \zeta_{t_{max}+u}$$

$\zeta_t \sim Norm(0, \sigma_\zeta^2)$ étant le paramètre des erreurs supposées indépendantes et identiquement distribuées, on a donc :

$$\hat{\kappa}_{t_{max}+\mathfrak{t}} = \hat{\kappa}_{t_{max}} + \mathfrak{t}\hat{\theta} + \sqrt{\mathfrak{t}}\zeta_{t_{max}}$$

On obtient alors le résultat final suivant :

$$E\left(\hat{\kappa}_{t_{max}+\mathfrak{t}} \middle| \hat{\kappa}_{t_{min}}, \ldots, \hat{\kappa}_{t_{max}}\right) = \hat{\kappa}_{t_{max}} + \mathfrak{t}\hat{\theta}$$

$$Var\left(\hat{\kappa}_{t_{max}+\mathfrak{t}} \middle| \hat{\kappa}_{t_{min}}, \ldots, \hat{\kappa}_{t_{max}}\right) = \mathfrak{t}\hat{\sigma}_\zeta^2$$

3.3.2. Critiques du modèle

Opérationnellement, une des critiques faite au modèle de Lee & Carter est le non déplacement des améliorations des taux de mortalité, à savoir que pour un même âge l'évolution de la mortalité dans le temps sera la même pour chaque génération. Or, au vu de l'analyse graphique faite en première partie, la tendance de la mortalité pour les âges inferieurs à 70 ans a tendance à diminuer. Parallèlement, l'espérance de vie à chaque âge a une tendance croissante. Par conséquent, il est évident au vu de la décroissance des améliorations pour les âges inferieurs à 70 ans, que l'amélioration des taux de mortalité se concentre sur des âges supérieurs ; d'où le déplacement attendu des améliorations vers les âges plus élevés.

Une autre limite de la méthode de Lee & Carter est qu'elle ne tient pas compte de paramètres comme l'avis d'un expert, les progrès de la médecine, l'apparition de nouvelles maladies, le changement du style de vie ou de tout autre évènement ayant un fort impact sur la mortalité. L'absence d'approche qualitative peut cependant être considérée plus positivement comme un avantage, au vu des avis divergents d'experts sur cette évolution, en réduisant le biais impossible à contrôler.

De plus, l'hypothèse forte d'homoscedasticité des taux de mortalité (variance des erreurs stochastiques de la régression identique pour toutes les observations) du modèle permettant d'effectuer la méthode des moindres carrés linéaires pour estimer les paramètres peut sembler non pertinente dans le cadre de petits échantillons. En effet la petite taille de l'échantillon étudié conduit à une forte volatilité des données. Planchet considère d'ailleurs que cette méthode n'est optimale qu'à partir d'échantillons dépassant 700 000 rentiers.

Enfin, la projection de la composante temporelle κ_t nécessite un historique de données important dans le cadre d'une projection à long terme. Au vu des données dont nous disposons, réparties sur une période de 2001 à 2011, il est clair que nos projections sur 70 ans seront fortement biaisées.

Il est à noter cependant qu'en appliquant un modèle relationnel entre le modèle crée à partir des tables HMD et celui du portefeuille vie individuelle, les deux dernières limitations citées sont résolues. On définit le modèle relationnel comme étant le modèle permettant de capter la dérive de mortalité entre la mortalité de la population générale et la mortalité du portefeuille étudié.

3.4. Le modèle de Bongaarts

3.4.1. Présentation du modèle de Bongaarts

Afin de comprendre la démarche du modèle de Bongaarts il est intéressant de faire un bref rappel historique sur certains modèles statistiques des taux instantanés de mortalité. Il est à noter que Planchet préconise cette approche dans le cadre de petits échantillons, ce qui correspond à une des problématiques de notre sujet.

En 1825 apparait un modèle simple que Gompertz proposa. Celui-ci se basa sur l'hypothèse simple et heuristique que la mortalité suit une tendance exponentielle.
Gompertz proposa alors l'équation de la mortalité suivante :

$$\mu_x = \alpha\, e^{\beta x}$$

Avec :
α : niveau de la mortalité avec le temps
β : taux de croissance de la mortalité avec l'âge

Constatant une sous-évaluation de la mortalité pour les âges inferieurs à 40 ans, Makeham propose en 1860 un ajustement au modèle de Gompertz en ajoutant une constante γ correspondant à la mortalité des faibles âges.
Il décrit alors la mortalité de la façon suivante :

$$\mu_x = \alpha\, e^{\beta x} + \gamma$$

Un nouveau problème fait surface : celui de la mortalité aux grands âges qui se voit sur-évaluée.
Thatcher (1999) propose une solution en réajustant le modèle de Gompertz et nous donne l'équation modèle suivante :

$$\mu_x = \frac{\alpha e^{\beta x}}{1 + \alpha e^{\beta x}} + \gamma$$

Dans le cadre d'une étude sur plusieurs pays, Bongaarts introduit ensuite la composante temporelle au modèle de Thatcher et propose alors le modèle suivant :

$$\mu_{x,t} = \frac{\alpha_t e^{\beta_t x}}{1 + \alpha_t e^{\beta_t x}} + \gamma_t$$

Bongaarts décompose le taux de mortalité instantané en deux éléments avec d'une part une force de mortalité $\mu_{x,t}^{s}$ augmentant avec l'âge, et d'autre part une force de mortalité constante μ_{t}^{b}.
On a ainsi une force de mortalité totale qui est de la forme :

$$\mu_{x,t} = \mu_{x,t}^{s} + \mu_{t}^{b}$$

Dans le cadre de notre étude, et au vu de la petite taille du portefeuille étudié, l'ajustement du modèle est effectué sur les tables HMD, puis un modèle relationnel permettant de capter les écarts de mortalité entre la population générale et la population du portefeuille d'assurés est appliqué.

On notera tout de même que deux critiques semblables à celles adressées au modèle de Lee & Carter ne sont pas corrigés, à savoir la non prise ne compte d'avis d'expert ainsi que le faible recul historique des données.

Cependant, l'intérêt primordial de ce modèle sera de permettre un déplacement de l'amélioration de la mortalité vers les grands âges.
Il sera ainsi intéressant de constater d'une part l'approche quantitative du modèle avec l'hypothèse statistique d'une forme de mortalité et d'autre part l'approche qualitative où on explique l'amélioration des niveaux de mortalité pour des âges plus élevés.

On décrit ici l'obtention du déplacement des améliorations :
On définit tout d'abord :

$$p^{t} = \frac{\alpha_t}{\alpha_{t_0}},$$

et $$S^{t} = -\frac{ln(p^{t})}{\beta} = -\frac{\ln\left(\frac{\alpha_t}{\alpha_{t_0}}\right)}{\beta}.$$

On a alors :

$$\mu_{x,t}^{s} = \frac{\alpha_{t_0} p^{t} e^{\beta x}}{1+\alpha_{t_0} p^{t} e^{\beta x}} = \frac{\alpha_{t_0} e^{\beta\left(x+\frac{\ln(p^{t})}{\beta}\right)}}{1+\alpha_{t_0} e^{\beta\left(x+\frac{\ln(p^{t})}{\beta}\right)}} = \frac{\alpha_{t_0} e^{\beta(x-S^{t})}}{1+\alpha_{t_0} e^{\beta(x-S^{t})}} = \mu_{x-S^{t},t_0}^{s}$$

$$\mu_{x,t}^{s} = \mu_{x-S^{t},t_0}^{s}$$

3.4.1.1. Estimation des paramètres par la méthode des moindres carrés non linéaires

Cette partie explicite le choix de l'algorithme d'estimation des paramètres qui est utilisé dans ce mémoire.
Le modèle de Bongaarts (et le modèle inspiré des travaux de Vaupel) présentant une forme de mortalité non linéaire, il est nécessaire de choisir l'algorithme le plus pertinent permettant de définir les paramètres du modèle.

Après des recherches approfondies sur le sujet, il a été choisi d'utiliser l'algorithme (itératif) de Levenberg-Marquardt qui permet d'obtenir une solution numérique de la minimisation d'une fonction à plusieurs variables (fonction non linéaire en particulier).

Afin d'expliciter cet algorithme, nous nous sommes basés sur un article de Jean Hare (ENS) qui donne le cheminement et les explications de la résolution numérique par une telle méthode. De plus, nous traiterons dans la logique de l'article de Jean Hare en premier temps le cas d'un modèle linéaire, puis nous extrapolerons alors dans un deuxième temps sur les modèles non linéaires.

<u>Cas linéaire</u> :

On dispose d'un ensemble de N points $(x_i; y_i)$ avec i = 1,…,N.
On suppose qu'il existe un vecteur $\vec{p}^{\nu}$, correspondant au vecteur qui minimise la fonction $y_i - y(x_i; \vec{p}^{\nu})$ correspondant à l'erreur totale du modèle.

On a alors la relation suivante :

$$y_i = y(x_i; \vec{p}^{\nu}) + \varepsilon_i$$

Où :

- ε_i correspond à la déviation,
- $y(x; \vec{p}) = \sum_{k=1}^{M} p_k F_k(x)$ où $F_1(x) \dots F_M(x)$ sont des fonctions linéaires.

On suppose alors que les déviations ε_i sont des variables aléatoires indépendantes et de loi normale centrée et d'écart-type σ_i.
La valeur χ^2 représentant l'erreur totale est définie par :

$$\chi^2(\vec{p}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - y(x_i; \vec{p})}{\sigma_i}\right)^2$$

On minimise donc $\chi^2(\vec{p})$ en annulant $\frac{\partial \chi^2(\vec{p})}{\partial p_k}$ pour k= $1, \dots M$, et on a donc la relation :

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - \sum_{j=1}^{M} p_j F_j(x_i)}{{\sigma_i}^2} \right) . F_k(x_i) = 0 \text{ pour k} = 1, \dots M,$$

On met cette formule sous forme matricielle en posant :

$$[\alpha]_{kj} = \sum_{i=1}^{N} \frac{F_j(x_i) F_k(x_i)}{{\sigma_i}^2} \text{ où } k, j = 1, \dots, M \text{ avec } [\alpha] \text{ matrice symétrique}$$

$$\beta_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i F_k(x_i)}{{\sigma_i}^2}$$

On retrouve le programme de minimisation sous une nouvelle forme :

$$\sum_{j=1}^{M} \alpha_{kj} p_j = \beta_k \quad \Leftrightarrow \quad [\alpha].\vec{p} = \vec{\beta}$$

Le vecteur des paramètres est obtenu en utilisant les méthodes classiques telles que la décomposition en valeurs singulières, la méthode de Gauss Jordan,…

Cas non linéaire :

Les différentes méthodes existantes sont des méthodes itératives permettent de diminuer au fur et à mesure $\chi^2(\vec{p})$ jusqu'à l'obtention d'un minimum.

Après avoir choisi arbitrairement une valeur initiale $\vec{p}^0$, on détermine successivement $\vec{p}^1, \dots, \vec{p}^n$ jusqu'à que $\chi^2(\vec{p})$ cesse de diminuer. A cette fin-là, plusieurs critères de convergence à établir sont possibles. On retiendra le critère de convergence suivant :

$$0 \leq \chi^2(\vec{p}^n) - \chi^2(\vec{p}^{n+1}) \leq \varepsilon_{total}$$

Où $\varepsilon_{total} \ll \chi^2(\vec{p}^n)$

Deux méthodes sont possibles :

La méthode du gradient

Cette méthode consiste à effectuer un « pas » à chaque itération de $\delta\vec{p} = \vec{p}^{n+1} - \vec{p}^{n}$ jusqu'à que $\chi^2(\vec{p})$ cesse de diminuer.

On définit :

$$\delta\vec{p} = -\gamma\nabla\chi^2(\vec{p}^n)$$

Où $\nabla\chi^2(\vec{p}^n)$ est le gradient défini par :

$$(\nabla\chi^2)_k = \frac{\partial\chi^2}{\partial p_k} = -2\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i - y(x_i;\vec{p})}{{\sigma_i}^2}\frac{\partial y(x_i;\vec{p})}{\partial p_k}$$

A noter tout de même l'incertitude sur le choix difficile à établir de γ.
Il est alors nécessaire de prendre en compte la courbure locale de la surface afin de déterminer au mieux la direction $\delta\vec{p}$.
Pour cela, on calcul la matrice hessienne définie comme la dérivée seconde de $\chi^2(\vec{p})$ et qui permet de choisir la direction $\delta\vec{p}$:

$$[H(\vec{p})]_{kl} = \frac{\partial^2\chi^2(\vec{p})}{\partial p_k \partial p_l} = \sum_{i=N}^{M}\frac{2}{{\sigma_i}^2}\left(\frac{\partial y(x_i;\vec{p})}{\partial p_k}\frac{\partial y(x_i;\vec{p})}{\partial p_l} - \left(y_i - y(x_i;\vec{p})\right)\frac{\partial^2 y(x_i;\vec{p})}{\partial p_k \partial p_l}\right)$$

On fait alors un développent limité de $\chi^2(\vec{p})$:

$$\nabla\chi^2(\vec{p}) \approx \chi^2(\vec{p}^n) + \nabla\chi^2(\vec{p}^n).\delta\vec{p} + \frac{1}{2}{}^t\delta.H.\delta\vec{p} + \cdots,$$

On dérive alors la relation précédente et on obtient :

$$\nabla\chi^2(\vec{p}^n) + H.\delta\vec{p} = 0 \Rightarrow \delta\vec{p} = -H^{-1}.\nabla\chi^2(\vec{p}^n)$$

Pour le choix de γ, on prend une valeur variant selon la direction, telle que :

$$\gamma_k \sim \frac{1}{H_{kk}}$$

$$\lambda H_{kk}\delta p_k = \beta_k$$

Où λ est assez grand pour avoir un « pas » relativement grand.

La méthode du gradient n'a pas été retenue dans notre étude. En effet, elle converge très lentement vers un minimum (du fait qu'elle dépend de la direction $\delta\vec{p}$ choisie) et n'est pas robuste puisqu'elle peut conduire à une augmentation de $\chi^2(\vec{p})$.

Méthode du gradient conjugué :

Cette méthode consiste à faire des « pas » $\Delta\vec{p}$ dans la direction de $\delta\vec{p}$ mais de longueurs moins grandes telles que :

$$\Delta\vec{p} = \gamma\delta\vec{p}$$

On retiendra ainsi que, alors que la méthode du gradient est plus sûre quand on est loin de la solution (car la résolution est globale), la méthode du gradient conjugué sera préférable quand on sera proche du minimum puisque l'approximation quadratique est meilleure.
Ces algorithmes ont des limites. En effet, dans le cas de plusieurs minimums locaux, selon le choix de la valeur initiale prise, on ne trouvera pas le minimum global.

L'algorithme de Levenberg-Marquardt :

L'algorithme de Levenberg-Marquardt présente l'avantage de proposer une combinaison des deux méthodes proposées ci-dessus, nous permettant de trouver un minimum global.
Il est nécessaire de définir dans un premier temps $[\alpha]$ et $\vec{\beta}$.

$$\alpha_{kl} = \sum_{i=N}^{M} \frac{1}{{\sigma_i}^2} \frac{\partial y(x_i;\vec{p})}{\partial p_k} \frac{\partial y(x_i;\vec{p})}{\partial p_l};$$

$$\beta_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(y_i - y(x_i;\vec{p})\right)}{{\sigma_i}^2} \frac{\partial y(x_i;\vec{p})}{\partial p_k}.$$

On définit de plus la matrice $[\tilde{\alpha}]$ en augmentant les termes de la diagonale par :

$$[\tilde{\alpha}]_{kk} = [\alpha]_{kk}(1+\lambda)$$

Où $[\alpha]$ représente la matrice hessienne dans laquelle a été négligée la dérivée seconde de $\chi^2(\vec{p})$ (puisque les écarts $y_i - y(x_i;\vec{p})$ sont supposés indépendants et suivant une loi normale).
Dans le cas où λ est grand, on retombe sur l'algorithme du gradient, et sinon sur la méthode du gradient conjugué.

L'algorithme se décompose en plusieurs étapes :

1. Choix d'une valeur initiale $\vec{p}^0$ et calcul de χ^2 avec un tel paramètre ; la valeur du λ initial pris est petite, de l'ordre de 0.001 ;
2. En $\vec{p}^n$, calcul de $[\alpha], [\tilde{\alpha}]\ et\ \vec{\beta}$, puis résolution de l'équation $[\tilde{\alpha}]\delta\vec{p} = \vec{\beta}$;
3. Calcul de la valeur de χ^2avec le vecteur des paramètres $\vec{p}^n + \delta\vec{p}$. Dans le cas où χ^2 augmente, c'est que le gradient conjugué s'éloigne. Il faut alors dans un tel cas, augmenter λ pour renforcer le poids du gradient (et réduire la taille des « pas », et ainsi retourner à l'étape (2) de l'algorithme.

   Dans le cas où χ^2diminue, cela veut dire que l'on s'approche du minimum et qu'on peut alors prendre le nouveau jeu de paramètres $\vec{p}^{n+1} = \vec{p}^n + \delta\vec{p}$ et diminuer également λ.
4. On fait un test de convergence en vérifiant que χ^2 ne diminue plus. Si ce n'est pas vérifié, on retourne alors à l'étape (2) de l'algorithme.

3.4.1.2. Calibrage du modèle

Bongaarts propose une procédure en 4 étapes pour la mise en place du modèle:

1. Estimer les paramètres sur l'ensemble des générations;
2. Fixer le paramètre béta au vu de sa constance sur l'intervalle choisi et recalibrer les paramètres du modèle;
3. Projeter les paramètres alpha et gamma dans le futur sur un horizon choisi;
4. Déduire les taux de mortalité avec beta choisi constant et les paramètres alpha et gamma projetés

1ère étape :

A l'aide de l'algorithme de Marquardt Levenberg, nous estimons les paramètres du modèle sur la plage d'âge de 25 à 90 ans pour l'ensemble de générations des hommes et des femmes sur la période de 1970 à 2010.
On décrit ci-dessous l'évolution des paramètres Alpha Béta et Gamma estimés pour chaque génération:

Fig. 27 : Estimation d'Alpha, Béta et Gamma à partir des données historiques de 1950 à 2010 pour les femmes

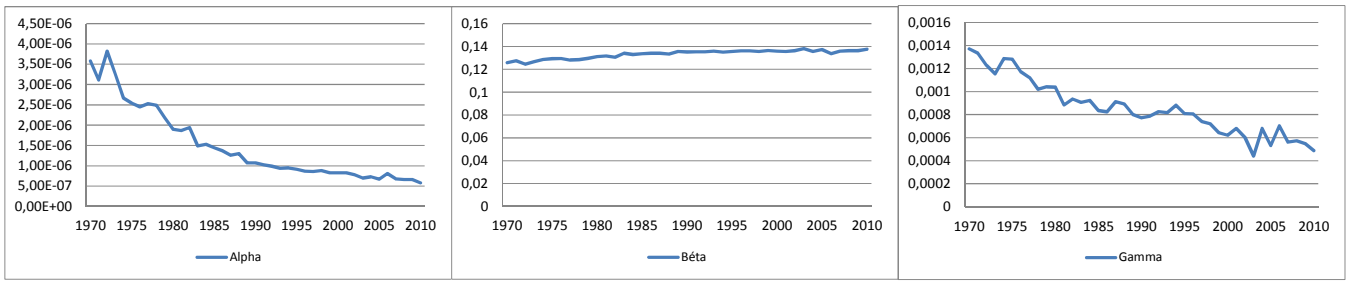
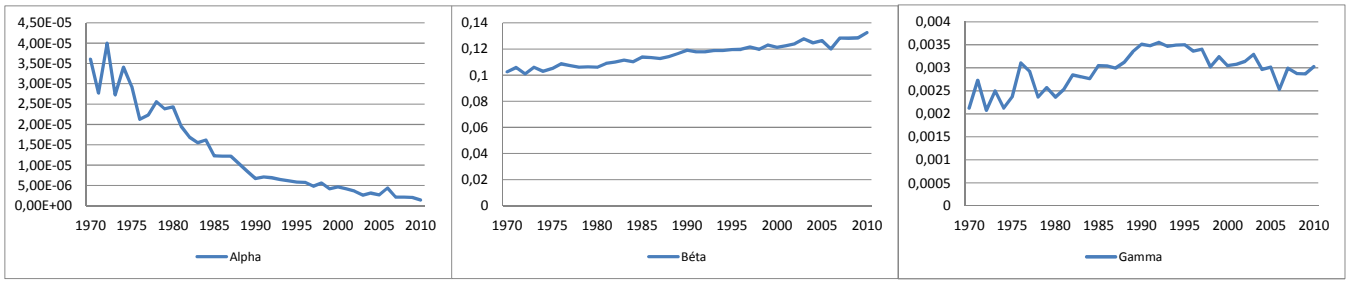


Fig. 28 : Estimation d'Alpha, Béta et Gamma à partir des données historiques de 1950 à 2010 pour les hommes



On remarque que le paramètre Alpha présente une décroissance prononcée pour les hommes et les femmes depuis 1970 qui s'atténue depuis les années 1990. Alpha correspondant au niveau de mortalité, cette tendance s'explique donc par l'allongement constaté de la durée de vie.

Le paramètre Béta présente une tendance croissante sur la période de 1970 à 2010. Plus précisément il est croissant de 1970 à 1990 chez les femmes et les hommes et est plutôt constant par la suite. Correspondant au taux de croissance de mortalité avec l'âge, cette tendance peut s'expliquer par une hypothèse de recul des améliorations des taux de mortalité à des âges plus élevés.

Enfin, Gamma est assez volatile chez les hommes et est décroissant chez les femmes.

Graphiquement, on compare pour chaque décennie l'évolution des taux de mortalité estimés avec les taux de mortalité de la table HMD.

Les résultats sont décrits par les schémas ci-dessous :

Fig. 29 : Taux de mortalité modélisés et constatés chez les femmes

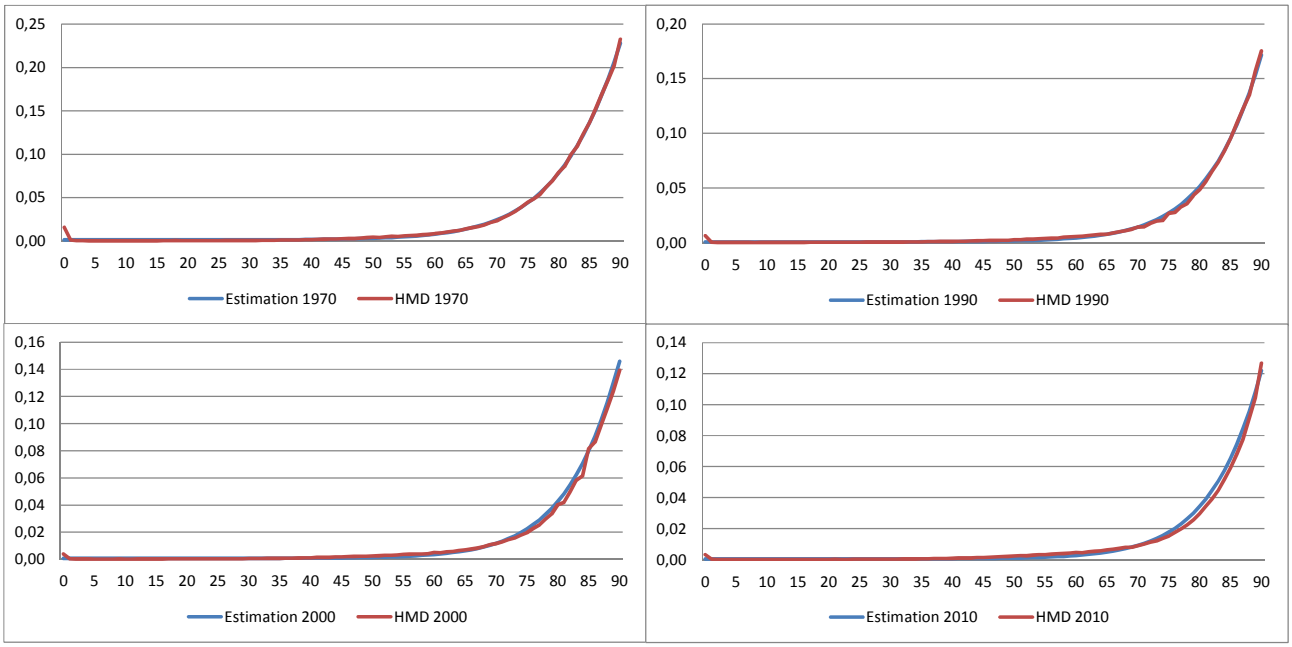
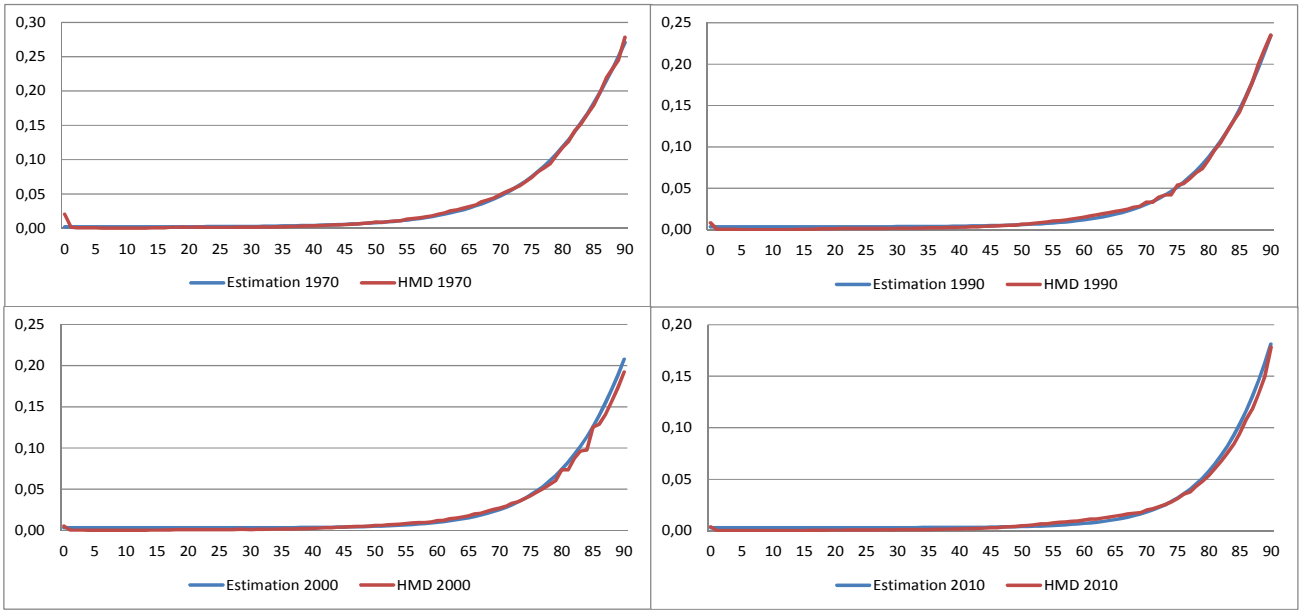


Fig. 30: Taux de mortalité modélisés et constatés chez les hommes



De plus, afin de juger de la robustesse des estimations des paramètres Alpha, Béta et Gamma on effectue un test du Khi 2.
On peut définir dans un premier temps le test d'hypothèse suivant :

H0 : les paramètres estimés nous donnent une estimation de la force de mortalité significativement proche de celle de la table HMD
H1 : les paramètres estimés nous donnent une estimation de la force de mortalité significativement différente de celle de la table HMD

On calcule la distance du χ^2 correspondant à la distance relative entre les taux estimés et les taux HMD, définie par :

$$\chi^2_{observé} = \sum_{x=x_{min}}^{x=x_{max}} \frac{(l_x q_x^{HMD} - l_x \hat{q}_x)^2}{l_x \hat{q}_x}$$

En fixant un seuil α de 5 % on définit la règle de décision :

Si $\chi^2_{observé} \geq c_{\alpha}$, H1 est vraie
Si $\chi^2_{observé} < c_{\alpha}$, H0 est vraie

Pour mémoire, le quantile c_α est obtenu avec les tables de la loi du Khi-deux à $(x_{max} - x_{min} + 1 - 1)$ degrés de liberté, en imposant :

$$P_{H_0}(\chi^2(x_{max} - x_{min}) \leq c_\alpha) = 1 - \alpha$$

Pour les femmes, on obtient une distance du Khi-deux moyenne sur l'ensemble des générations de l'ordre de 4.33 avec un maximum de 21.55 atteint pour la génération de 2006 et un minimum de 0.43 pour la génération de 1972.
Pour les hommes, la distance moyenne du khi deux sur les générations de 1970 à 2010 est de 1.73 avec un maximum de 8.3 pour la génération de 2006 et un minimum de 0.44 pour la génération de 1982.
Avec le seuil alpha de 5%, le quantile d'ordre 99.5 de la loi du Khi-deux à (90-25+1-1) degrés de liberté est de 39.4.
Sur l'ensemble des générations, pour les hommes comme pour les femmes on a donc dans tous les cas la relation suivante qui est vérifiée : $\chi^2_{observé} < c_{\alpha}$,

Par conséquent, l'hypothèse nulle du test du Khi-2 pour les hommes et les femmes est bien remplie.

2ème étape : Estimation des paramètres du modèle avec un Béta constant :

Dans la même démarche proposée par Bongaarts, on remarque pour les femmes que Béta est constant par intervalle avec une tendance croissante sur la période 1970-1990 et une constance observée sur la période de 1990-2010. Pour les hommes, le constat est moins évident mais reste vérifié globalement.

Graphiquement, sur ces intervalles, on a :

Fig. 31 : Evolution de Béta en fonction de la génération chez les femmes

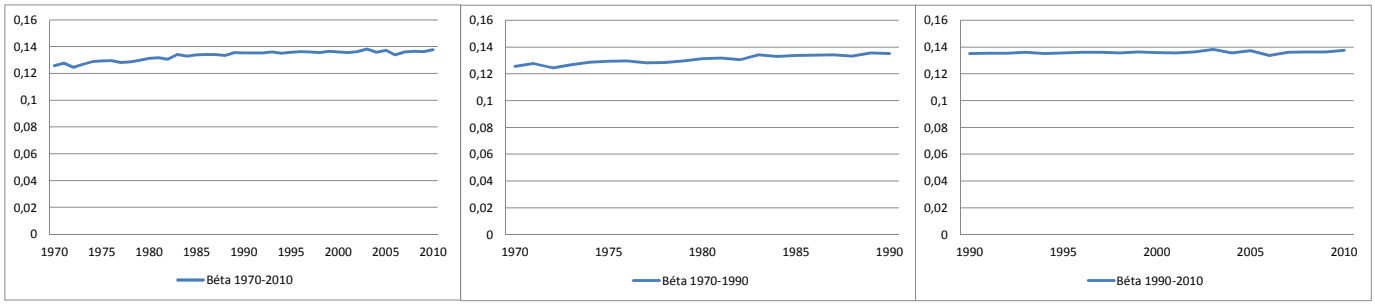
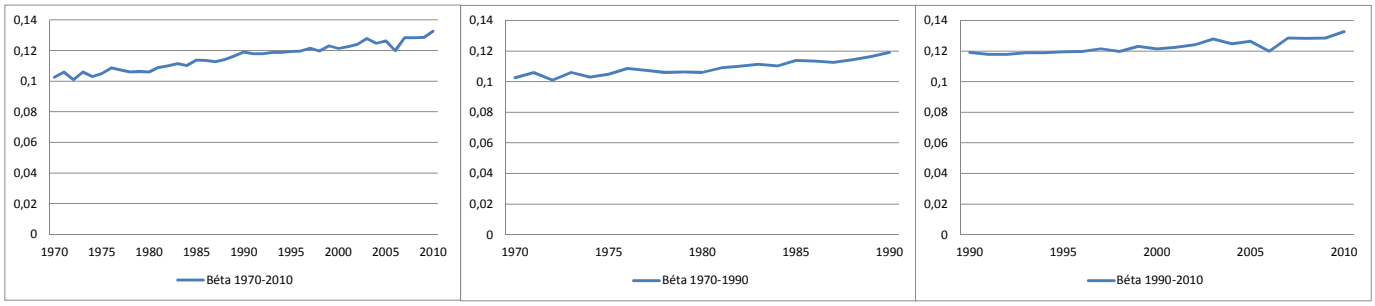


Fig. 32 : Evolution de Béta en fonction de la génération chez les hommes



On fixe la valeur de béta en prenant la moyenne sur l'intervalle choisi et on ré-estime les paramètres Alpha et Gamma avec Béta fixe. Pour les femmes, on prend la moyenne sur l'intervalle de 1990-2010 où la constance du paramètre est observée. Pour les hommes où la constance de Béta est moins évidente, par souci de précision on choisit la moyenne de celui-ci sur 2000-2010. On notera que dans le cadre d'une estimation paramétrique, la force de mortalité impacte l'espérance de vie des âges étudiés du portefeuille (entre 60 et 90 ans) avec un « *effet retard* », c'est-à-dire que la baisse de la mortalité n'impacte l'espérance de vie pour ces personnes que plus tard.

On compare ci-dessous les taux de mortalité estimés avec les paramètres Alpha et Gamma ré-estimés pour les hommes et les femmes à l'aide du graphique ci-dessous :

Fig. 33 : Evolution de taux de mortalité estimés et observés en fonction de la génération chez les femmes

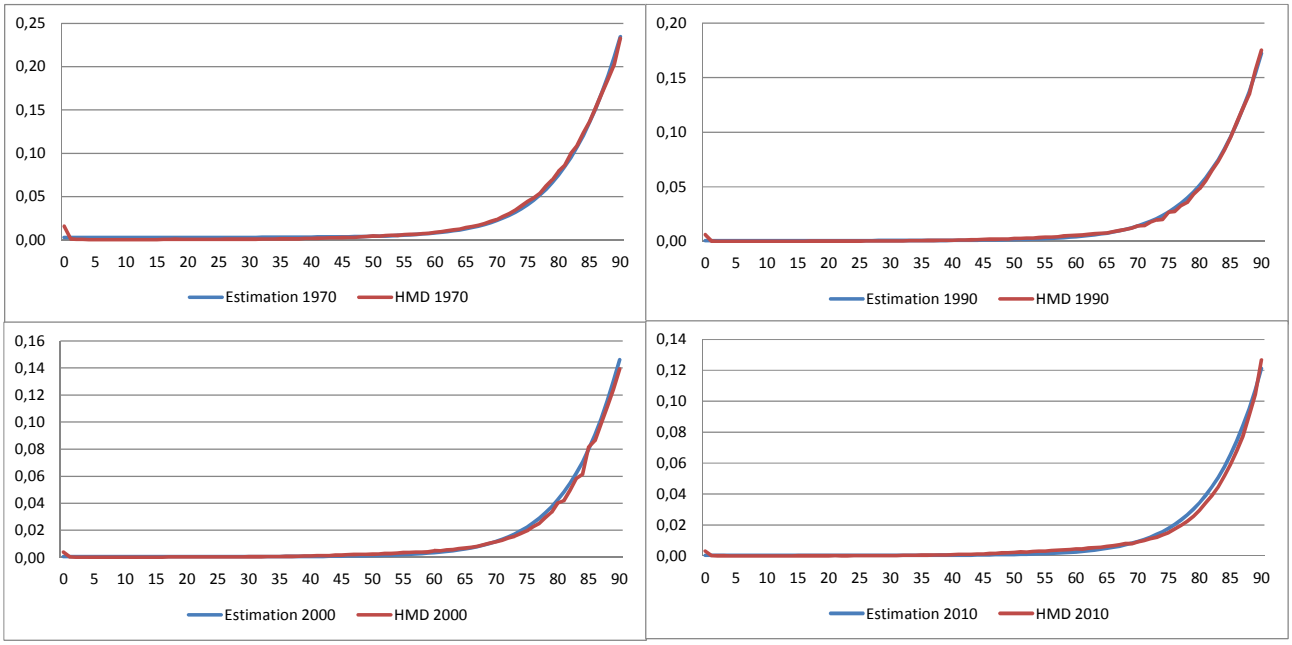
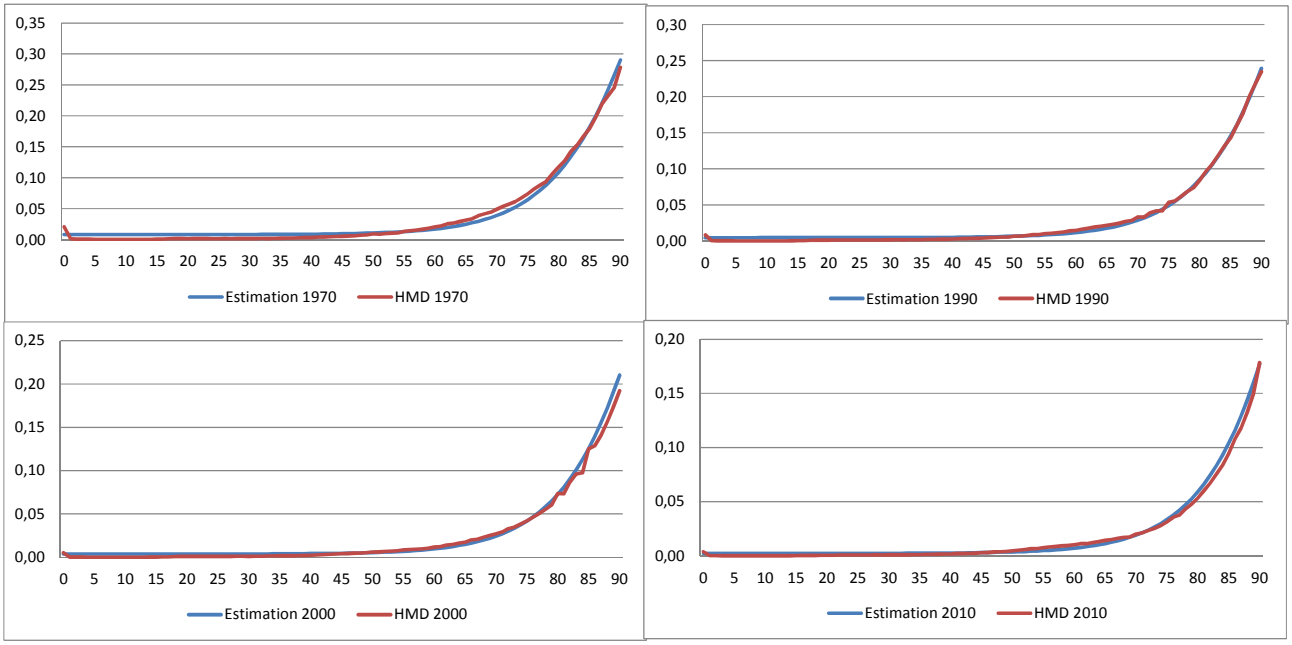


Fig. 34 : Evolution de taux de mortalité estimés et observés en fonction de la génération chez les hommes



L'estimation des taux de mortalité corrobore bien les taux de la table HMD pour l'ensemble des années. On remarque cependant un écart non significatif pour les années de la décennie de 1970 et 1980 chez les hommes pour les faibles âges qui se réduit pour les générations postérieures. Il n'est pas gênant dans le cadre de notre étude, dans la mesure où cet écart est corrigé pour les générations postérieures.

Les résultats du test du Khi-2 sont satisfaisants avec pour les femmes une distance moyenne du Khi-2 de 5.72 avec pour maximum 35.09 pour la génération 2003 et un minimum de 0.6 pour la

génération de 1986. Pour les hommes la distance moyenne est de 3.43 avec un maximum de 8.19 pour la génération de 1972 et un minimum de 0.81 atteint pour la génération de 1994.

3ème étape : Projection des paramètres :

Afin de projeter les paramètres α_t et β_t dans le futur, et au vu de la tendance passée observée, nous supposons deux tendance futures possibles à savoir une tendance linéaire ou une tendance exponentielle. Il est à noter que ces deux tendances supposées correspondent à la même hypothèse faîte par Planchet.
Il peut également être intéressant d'utiliser l'avis d'un expert sur la mortalité future ; mais au vu des avis divergents à ce sujet nous nous limiterons à l'approche statistique.
Supposer une tendance linéaire revient à anticiper une baisse absolue ou encore une décroissance régulière de la mortalité. Au vu de la décroissance passée de cette dernière décennie, cette hypothèse peut paraître trop forte. Cela reviendrait de plus à inférer des paramètres négatifs à long terme et donc des taux de mortalité négatifs !

Une tendance exponentielle quant à elle correspond à une baisse relative de la mortalité et rend donc à long terme impossible la projection de la mortalité sur des valeurs négatives.

Dans le cadre d'une projection à moyen et long terme, nous jugeons ainsi plus pertinent et cohérant de prendre une tendance exponentielle afin d'éviter les aspects paradoxaux de la régression linéaire.

On effectue donc une régression exponentielle sur les données historiques des paramètres Alpha et Gamma en appliquant la méthode des moindres carrés ordinaires.
La régression exponentielle effectuée est de la forme :

$$\alpha_t = ae^{bx}$$
$$\gamma_t = ce^{dx}$$

Le résultat obtenu de la régression est satisfaisant pour α_t et γ_t comme l'atteste le graphique ci-dessous :

Fig. 35 : Evolution d'Alpha et Gamma avec la régression exponentielle chez les femmes

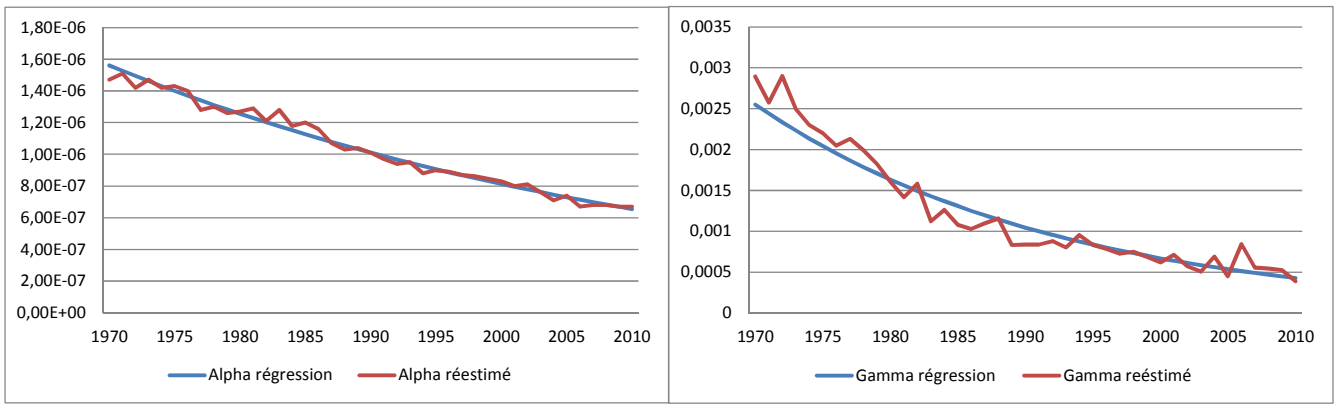
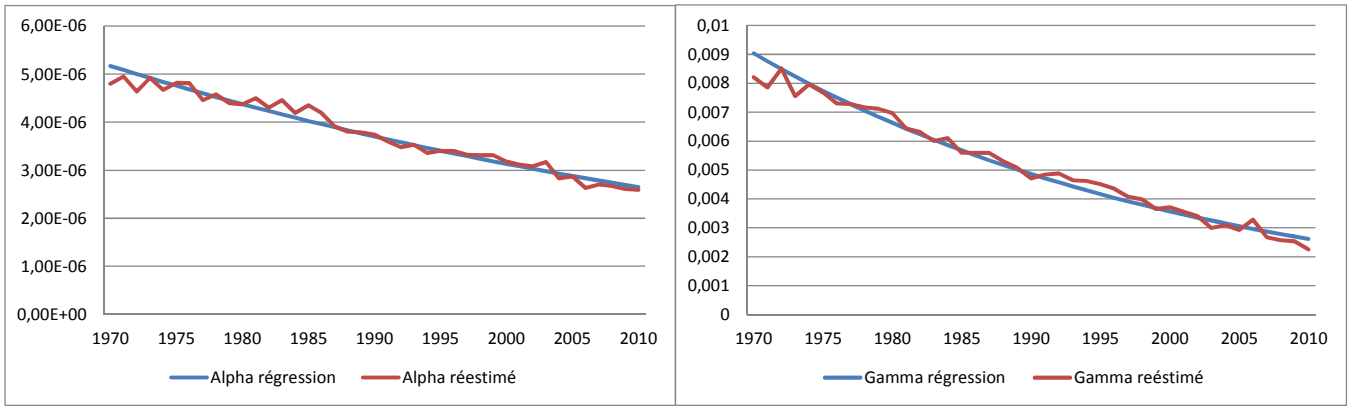


Fig. 36 : Evolution d'Alpha et Gamma avec la régression exponentielle chez les hommes



Analyse statistique sur la régression exponentielle des paramètres Alpha et Gamma :

On rappelle que lorsqu'on projette une variable aléatoire Y. La variation totale de celle-ci peut être décomposée en deux termes de la façon suivante :

$$\text{Variation totale} = \text{Variation expliquée par le modèle} + \text{Variation inexpliquée par le modèle}$$

On a de plus la relation suivante :

$$(y_i - \bar{y}_n) = (\hat{y}_i - \bar{y}_n) + (y_i - \hat{y}_i),$$

où :

$(\hat{y}_i - \bar{y}_n)$ est la différence expliquée par le modèle et

$(y_i - \hat{y}_i)$ est la différence inexpliquée par le modèle.

On peut donc dire que :

$$\sum(y_i - \bar{y}_n)^2 = \sum(\hat{y}_i - \bar{y}_n)^2 + \sum(y_i - \hat{y}_i)^2$$

Somme des totale $= SC_{total}$ = Somme des carrés des résidus (SC_{res}) + Somme des carrés due à la régression SC_{reg}

On définit alors le coefficient de détermination de la façon suivante :

$$R^2 = \frac{Variation\ expliquée}{Variation\ totale} = \frac{SC_{reg}}{SC_{total}}$$

On interprète donc le coefficient de détermination comme la proportion de variabilité du modèle sur les données étudiées.

Plus R^2 est proche de 1, plus la droite de régression est alignée sur les données étudiées.
Le coefficient de détermination R^2 est très proche de 1 chez les femmes pour chacun des paramètres avec un R^2 de 0.98 pour l'ajustement de α_t et de 0.93 pour celui de γ_t.Chez les hommes, le coefficient de détermination est également très satisfaisant avec un R^2 de 0.97 pour l'ajustement de α_t et de 0.98 pour celui de γ_t.

<u>Projection des paramètres Alpha et Gamma</u> :

Une fois l'approche statistique de la régression exponentielle validée par l'analyse du coefficient de détermination, nous effectuons la projection des paramètres du modèle.
Les résultats de la projection sont décrits dans les schémas ci-dessous :

Fig. 37 : Projection d'Alpha et Gamma avec la régression exponentielle chez les femmes

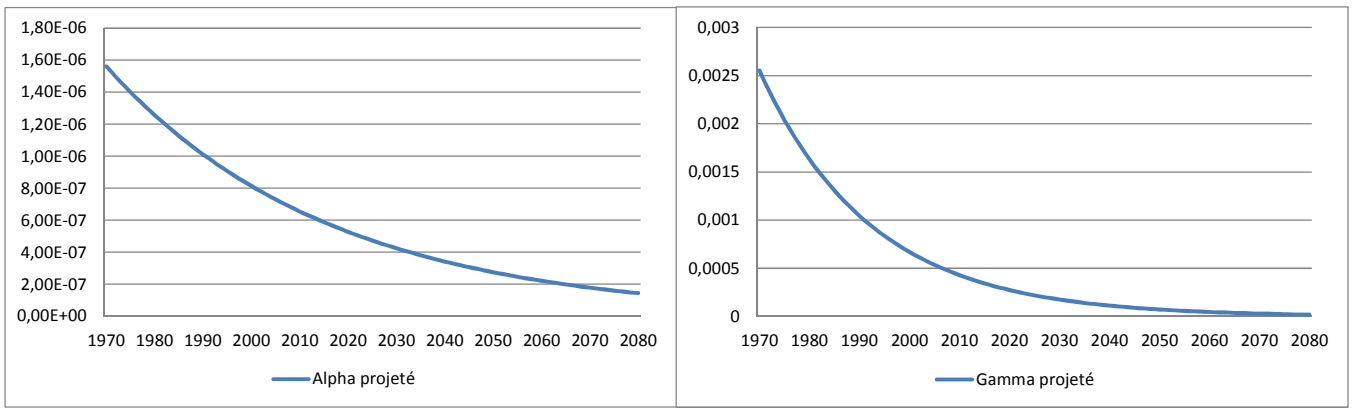
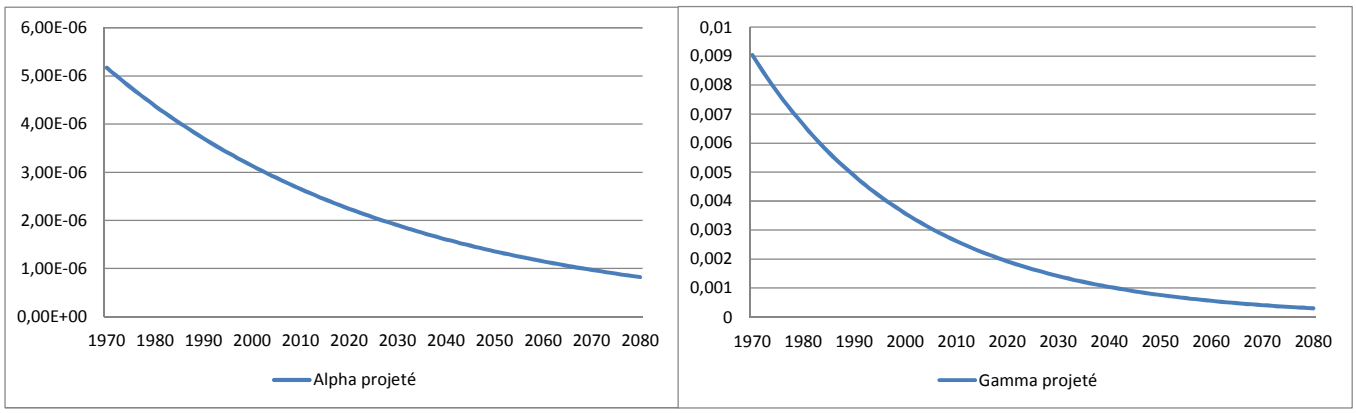


Fig. 38 : Projection d'Alpha et Gamma avec la régression exponentielle chez les hommes



4ème étape : Déduction des taux de mortalités futurs

La dernière étape de l'approche de Bongaarts consiste à projeter les taux de mortalité futurs à l'aide des paramètres projetés.

Fermeture de table :

La méthode utilisée pour la fermeture de table est la méthode de Coale & Kisker développée en 1990.
La formule du taux de mortalité instantanée pour les grands âges supposée est la suivante :

$$\hat{\mu}_a = \hat{\mu}_{65} \exp\big(k_a(a-65)\big) \; pour \; a \geq 65$$

Avec une approche sur les taux de croissance aux grands âges à savoir sur les taux d'augmentation des taux de mortalité, Coale & Kisker constatent un pic jusqu'aux alentours de 80 ans suivi d'une décroissance vaguement linéaire.

Ceci conduit Coale & Kisker à proposer la relation suivante :

$$k_a = k_{80} + s(a-80) \; pour \; a \geq 80$$

où k_a est le taux de croissance de la mortalité à l'âge a.
Coale & Kisker supposent par ailleurs pour fixer l'âge ultime et déterminer le coefficient s de la pente que :

$$\begin{cases} \hat{\mu}_{110} = 1 \; pour \; les \; Hommes \\ \hat{\mu}_{110} = 0{,}8 \; pour \; les \; Femmes \end{cases}$$

On trouve donc les relations suivantes :

$$\hat{\mu}_{110} = \hat{\mu}_{79} exp\left(\sum_{a=80}^{110} k_a\right) = \hat{\mu}_{79} exp\left(\sum_{a=80}^{110} \left(k_a + s(a-80)\right)\right)$$

On en déduit donc la relation suivante :

$$s = -\frac{ln\left(\frac{\hat{\mu}_{79}}{\hat{\mu}_{110}}\right) + 31k_{80}}{465}$$

On calcule donc les taux de mortalité par la relation :

$$\hat{\mu}_a = \hat{\mu}_{79} exp\left(\sum_{j=80}^{a} \left(k_{80} + s(j-80)\right)\right) = \hat{\mu}_{a-1} exp\left(k_{80} + s(a-80)\right) \qquad \boldsymbol{pour\ a \geq 80}$$

De plus à partir de la relation initiale du modèle, on trouve :

$$k_{80} = \frac{ln\left(\frac{\hat{\mu}_{80}}{\hat{\mu}_{65}}\right)}{15}$$

Il est intéressant de constater la continuité observée sur la fermeture de table.

3.4.2. Application du modèle relationnel sur le portefeuille AXA

Apres avoir appliqué le modèle de Bongaarts à la table HMD, on applique un modèle relationnel afin d'ajuster dans la modélisation les caractéristiques et le niveau de mortalité propres au portefeuille des rentiers d'AXA.

Pour mémoire, le modèle relationnel a été développé par Brass en 1971 ou celui-ci définit la relation suivante entre la population de référence et la population de notre portefeuille :

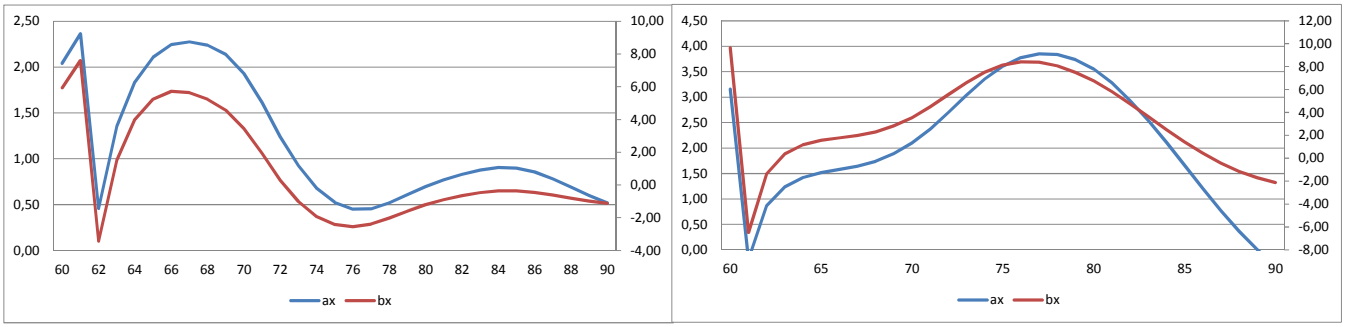
$$logit(q_{xt}) = a_x\ logit\ (q_{xt}^{HMD}) + b_x$$

Où $logit(q_x) = ln\left(\frac{q_x}{1-q_x}\right)$

Cette relation présente l'avantage d'obtenir après modélisation des quantités non contraintes à des bornes prédéfinies, à l'inverse des taux de mortalité qui doivent nécessairement être compris entre 0 et l'unité.

On effectue une régression linéaire pour chaque âge entre 60 et 90 ans. Comme le fait remarquer Planchet dans son article de construction de table, une forte corrélation est observée entre $a_x \; et \; b_x$.
Le graphique ci-dessous montre bien ce phénomène à travers lequel apparaît le fait que les fluctuations de a_x sont proches de celles de b_x.

Fig. 39 : Fluctuation des paramètres de la régression linéaire en fonction de l'âge chez les femmes et les hommes



Planchet propose ainsi la relation du modèle relationnel suivante :

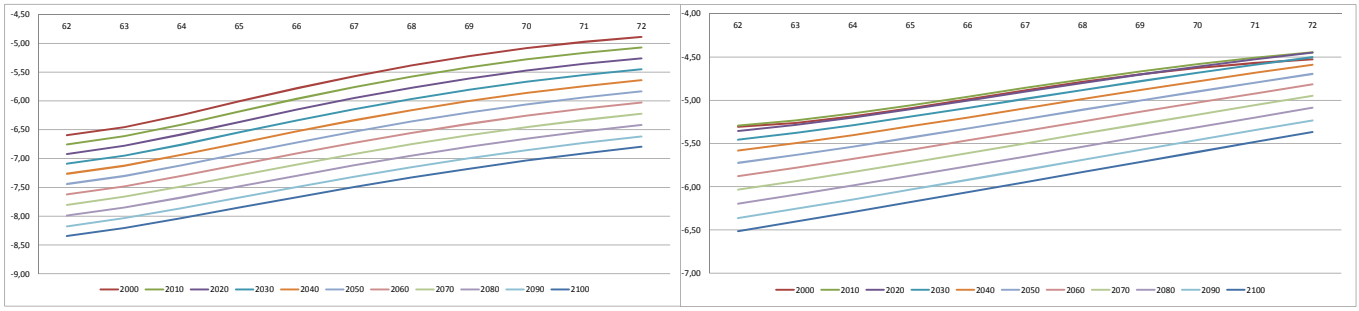
$$logit(q_{xt}) = (\alpha + \beta b_x)\, logit\,(q_{xt}^{HMD}) + b_x$$

Les paramètres sont ici déterminés par l'algorithme de Levenberg-Marquardt.

<u>Ouverture de table</u> :

A la vue des données limitées du portefeuille vie individuelle pour les faibles âges, à savoir pour les âges entre 0 ans et 60 ans, on choisit de prendre les données de la table HMD.
Afin d'ouvrir la table, entre la table HMD et la table modélisée du portefeuille AXA, on effectue une étude sur l'écart temporel de la différence des taux de mortalité du portefeuille et de la table HMD modélisées.
On constate une croissance linéaire de la différence logarithmique entre ces taux en fonction de l'âge sur les âges compris entre 62 ans et 72 ans.

Fig. 40 : Evolution de la différence logarithmique des taux de mortalité en fonction de l'âge pour les femmes et les hommes entre le portefeuille et de la table HMD modélisées.



On constate de plus comme l'atteste le graphique ci-dessus une décroissance des différences entre les différentes générations.

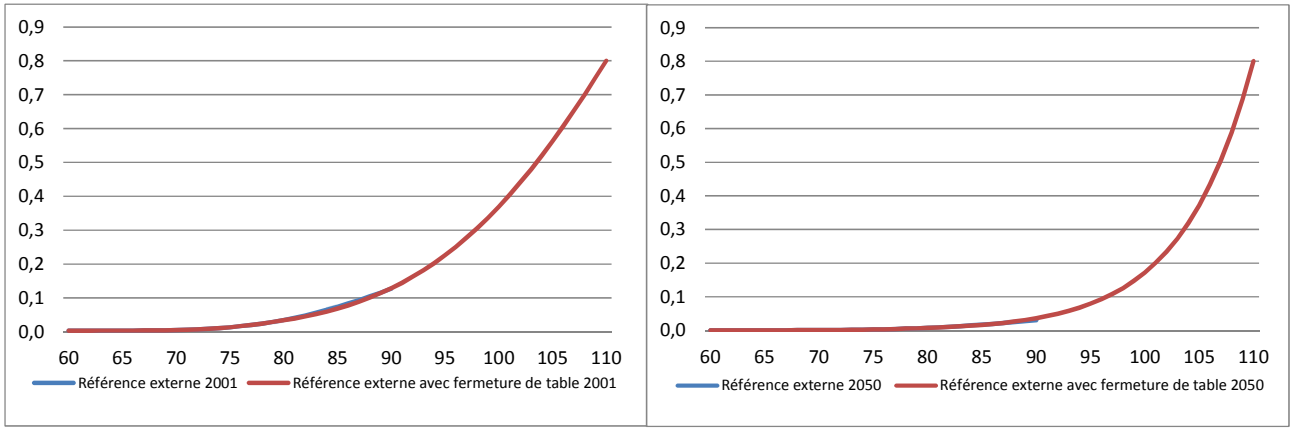
Une fois la régression linéaire effectuée, les résultats obtenus sont satisfaisants avec un R^2 compris entre 0,99 et 1.

Fermeture de table :

Une fois l'ouverture de table appliquée sur la table finale du portefeuille, nous fermons à présent la table finale du portefeuille Axa à l'aide de la méthode de Coale & Kisker.

Nous vérifions la cohérence de l'évolution de la force de mortalité pour les femmes de la génération de 2001 et 2050 et observons que la fermeture de table respecte cette évolution. Ce résultat est vérifié pour les femmes comme pour les hommes sur l'ensemble des générations projetées.

Fig. 41 : Evolution de la force de mortalité avec et sans fermeture de table chez les femmes



Pour le graphique ci-dessus, on observe bien la force de mortalité (en bleu) jusqu'à 90 ans qui est prolongée par la fermeture de table dès 80 ans.

3.4.3. « Backtesting »

Afin de juger de la qualité prédictive du modèle, nous effectuons ici un « backtesting » en prenant les données des tables HMD décalées de 10 ans par rapport au calibrage initial du modèle, à savoir sur les données de 1960 à 1999.

Le « backtesting » est effectué uniquement sur le modèle HMD et non sur le modèle relationnel d'AXA dans la mesure où nous ne disposons pas de données antérieures à 2001.

Nous comparons alors les résultats obtenus sur la période de 2000 à 2010 avec la table HMD.

Les résultats obtenus sont satisfaisants.

En termes de taux de mortalité, on retrouve des taux de mortalité concordant bien avec la table HMD.

Graphiquement :

Fig. 42 : Taux de mortalité de la table HMD et du modèle de Bongaarts chez les femmes

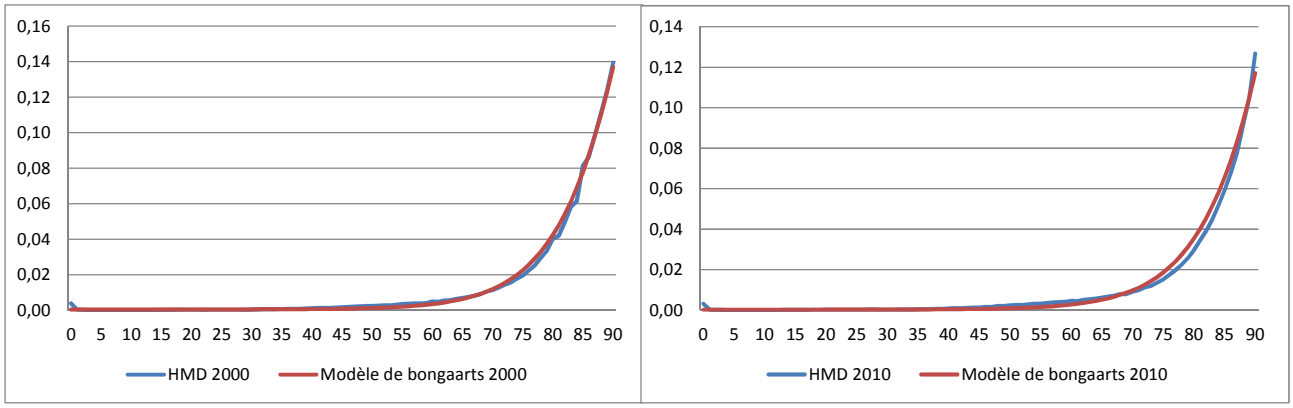
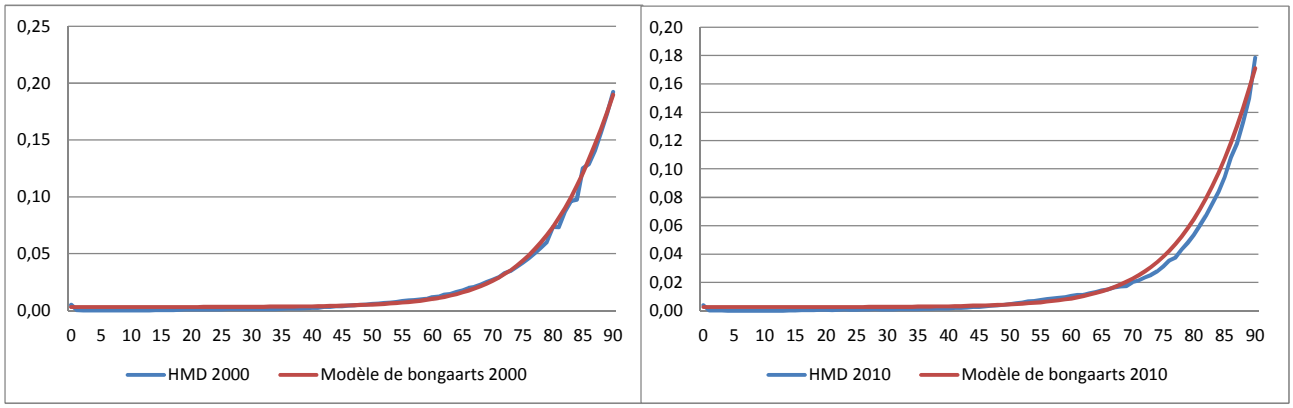


Fig. 43 : Taux de mortalité de la table HMD et du modèle de Bongaarts chez les hommes



On notera que le « backtesting » effectué dans la présente partie n'a qu'une valeur de jugement qualitatif de la modélisation. Il n'est en effet pas pertinent de comparer nos résultats avec une approche en SMR dans la mesure où le modèle relationnel n'a pas été mis en place et qu'ainsi il n'a pas été tenu compte ici du risque d'anti-sélection corrigé par un tel modèle.

3.5. Le modèle de Vaupel

3.5.1. Présentation du modèle de Vaupel

Le modèle présenté ici est un modèle basé sur l'approche du démographe James W. Vaupel qui propose une modélisation statistique de l'espérance de vie à l'échelle de plusieurs pays. Cette approche est d'autant plus pertinente qu'elle concerne directement l'aspect opérationnel pour l'assureur, à savoir l'espérance de vie.
En considérant le pays possédant à la naissance l'espérance de vie la plus élevée et au vu de la tendance passée des dernières décennies de l'évolution de celle-ci, il considère une croissance future linéaire. Voulant modéliser la mortalité pour chacun des pays, il suppose de plus la différence entre le pays ayant l'espérance de vie maximale et le pays étudié constante avec le temps.

Dans cette partie, nous considérons un modèle qui utilise l'approche en espérance de vie proposée par Vaupel. Nous supposons tout comme lui une tendance linéaire de l'évolution de l'espérance de vie future pour chaque âge.
Pour rester cohérent au long de ce travail, nous supposons ici la forme de mortalité donnée par le modèle de Thatcher.
La démarche consiste alors, une fois l'espérance de vie projetée, à minimiser l'écart entre l'espérance projetée de manière linéaire et l'espérance de vie résultant des taux de mortalité du modèle de Thatcher.

Nous proposons ici le calibrage du présent modèle en 4 étapes :

1. Régression linéaire de l'espérance de vie pour chaque âge sur la période de 1970 à 2010 par la méthode des moindres carrés ordinaires;
2. Projection linéaire des espérances de vie pour chaque âge et chaque génération de 1970 à 2080;
3. Estimation des paramètres Alpha Béta et Gamma par la méthode des moindres carré non linéaires (algorithme de Levenberg Marquardt) en minimisant la somme des écarts au carré entre 60 ans et 90 ans (pour chaque génération) entre l'espérance de vie de la projection linéaire et l'espérance de vie résultant des paramètres à estimer ;
4. Déduction des taux de mortalités futurs avec les paramètres estimés du modèle de Thatcher.

1ère étape : Régression linéaire de l'espérance de vie pour chaque âge

La régression linéaire de l'espérance de vie sur la période de 1970 à 2010 s'effectue à partir des données de la table HMD.
Cette régression est de la forme suivante :

$$E_x(t) = a_x t + b_x$$

Fig. 44 : Comparaison de l'évolution de l'espérance de vie projetée et observée avec à 60 ans et 80 ans chez les femmes

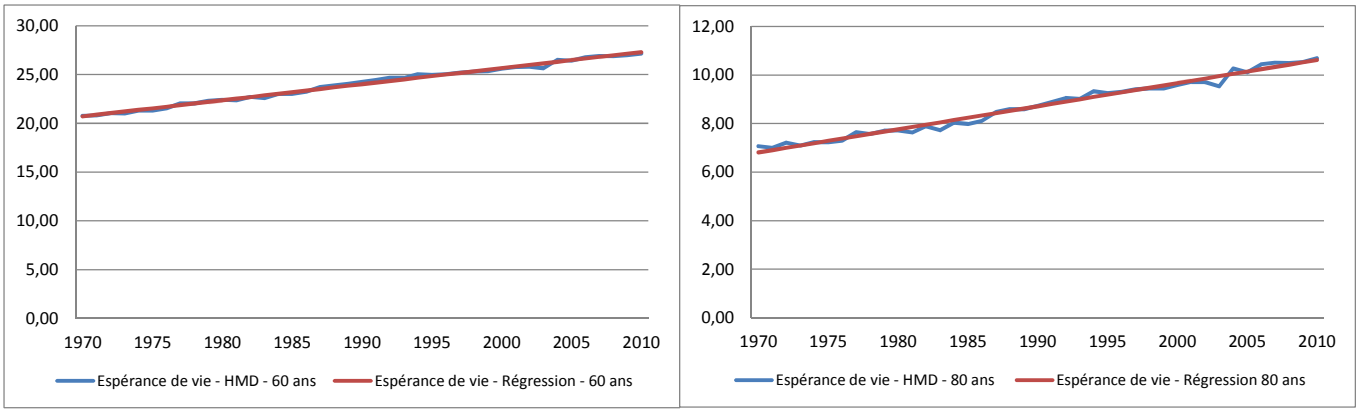
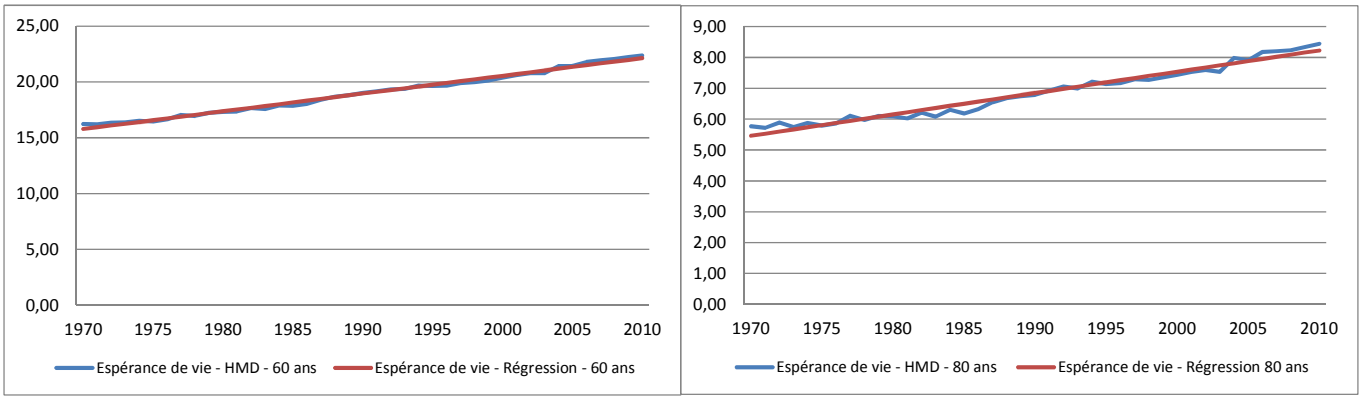
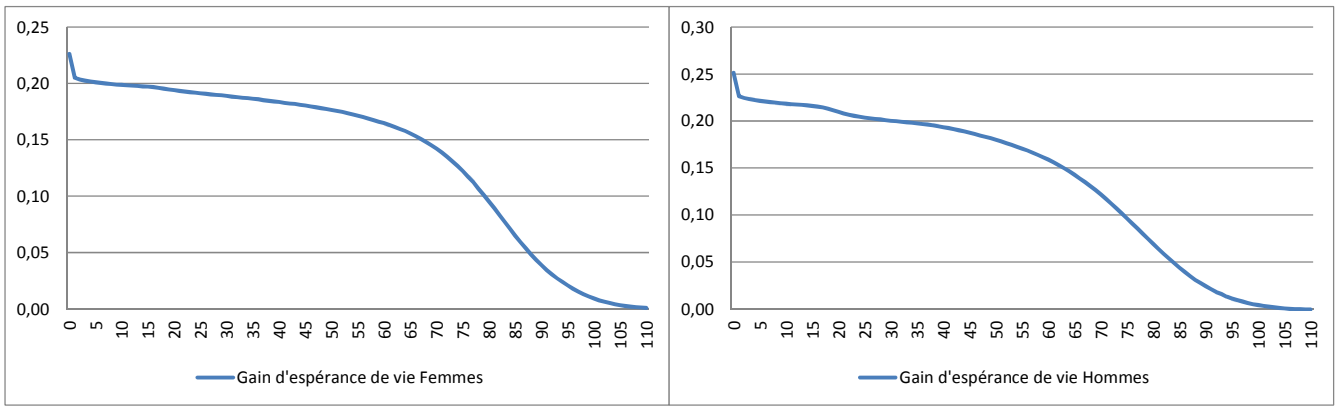


Fig. 45 : Comparaison de l'évolution de l'espérance de vie projetée et observée avec à 60 ans et 80 ans chez les hommes



Les résultats de la régression sont satisfaisants avec un R^2 proche de 1, égal en moyenne sur l'ensemble des âges de 0 à 90 ans à 0,99.
Les gains d'espérance de vie à la naissance sont identiques à ceux supposés par Vaupel, à savoir 0,23 ans d'espérance de vie supplémentaire en moyenne entre les hommes et les femmes à la naissance.
On présente ci-dessous l'évolution du gain d'espérance de vie entre les âges x et $x+1$ pour tous les âges x compris entre 0 et 110 ans chez les hommes et les femmes.

Fig. 46 Evolution du gain d'espérance de vie pour chaque âge chez les femmes et les hommes



Il apparait que le gain d'espérance de vie est décroissant avec l'âge.

2ème étape : Projection linéaire des espérances de vie

Dans cette partie, on projette jusqu'en 2080 les espérances de vie avec les paramètres a_x et b_x de la régression linéaire faite dans la partie 1 du calibrage du modèle.
Les résultats obtenus sont décrits graphiquement ci-dessous pour les hommes et les femmes à 60 et 80 ans, de 1970 à 2080.

Fig. 47 : Evolution de l'espérance de vie projetée par la régression linéaire chez les femmes

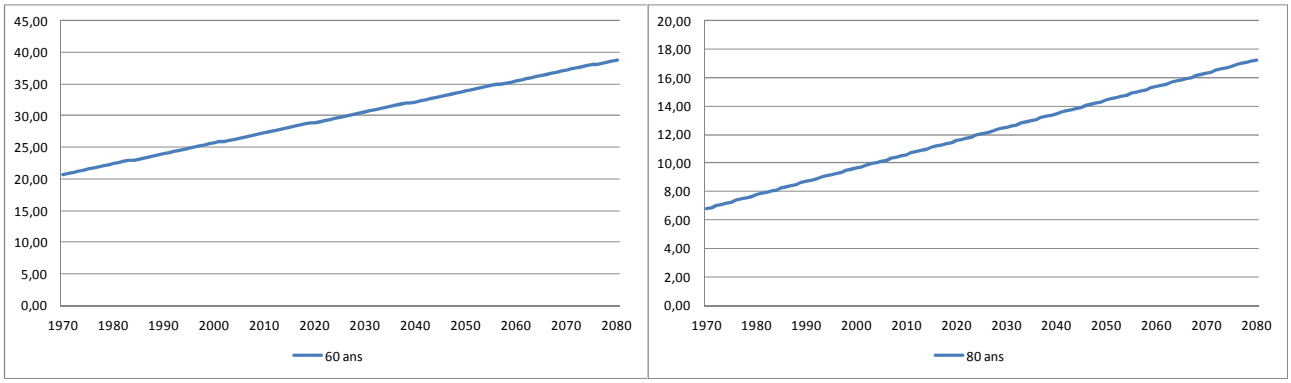
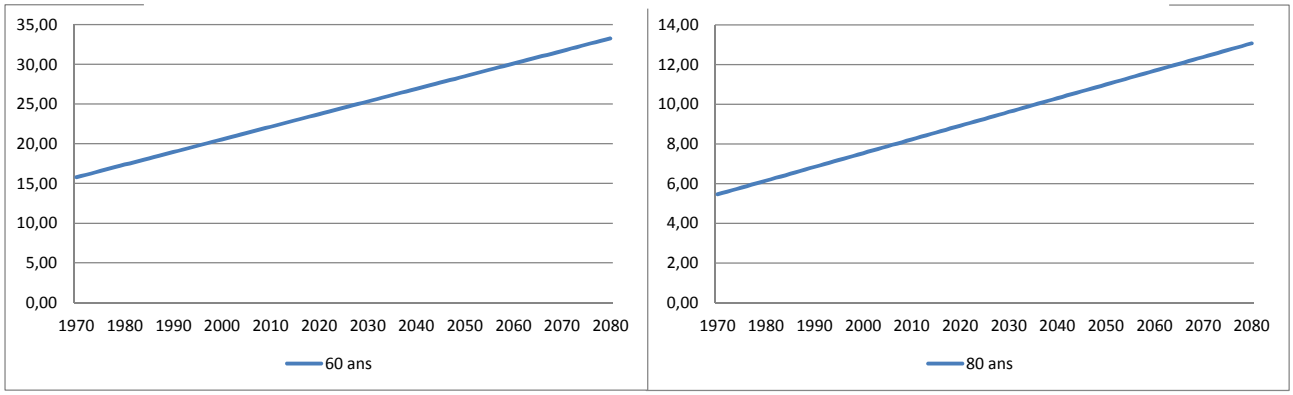


Fig. 48 : Evolution de l'espérance de vie projetée par la régression linéaire chez les hommes



On observe un gain d'espérance de vie de 1,64 et 1,59 an par décennie pour les femmes et les hommes de 1970 à 2080 et de 0,95 et 0,69 par décennie pour les femmes et les hommes de 1970 à 2080.

On effectue alors la 3ème et 4ème étape du calibrage du modèle.
Une fois les taux de mortalité obtenus, on compare les espérances de vies obtenues avec le modèle de Vaupel et celles de la projection linéaire effectuée dans l'étape 2.
Nous présentons les résultats obtenus ci-dessous pour les femmes et les hommes de 60, 70, 75 et 80 ans pour les générations de 1970 à 2080.

Fig. 49 : Evolution de l'espérance de vie du modèle final et celle projetée par la régression linéaire chez les femmes

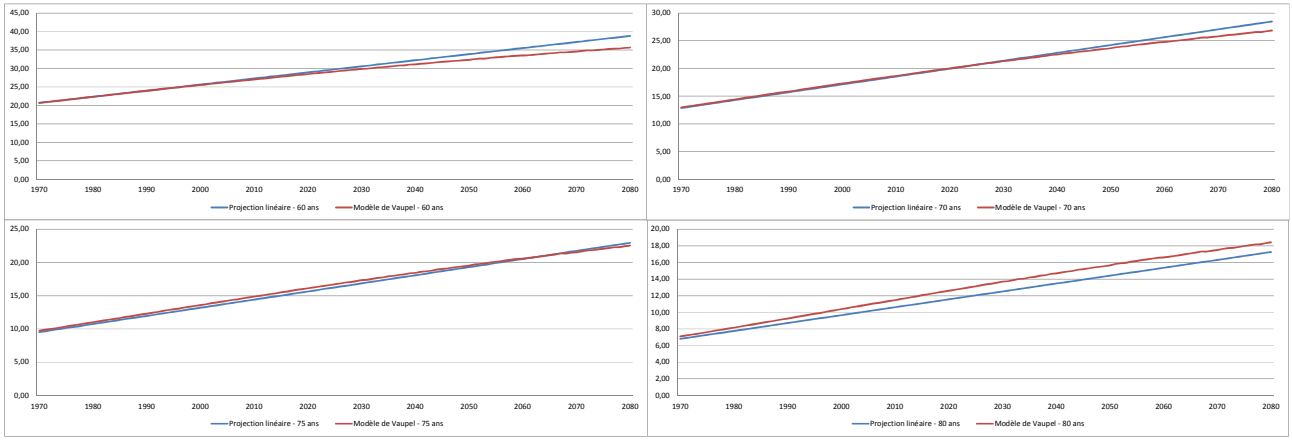
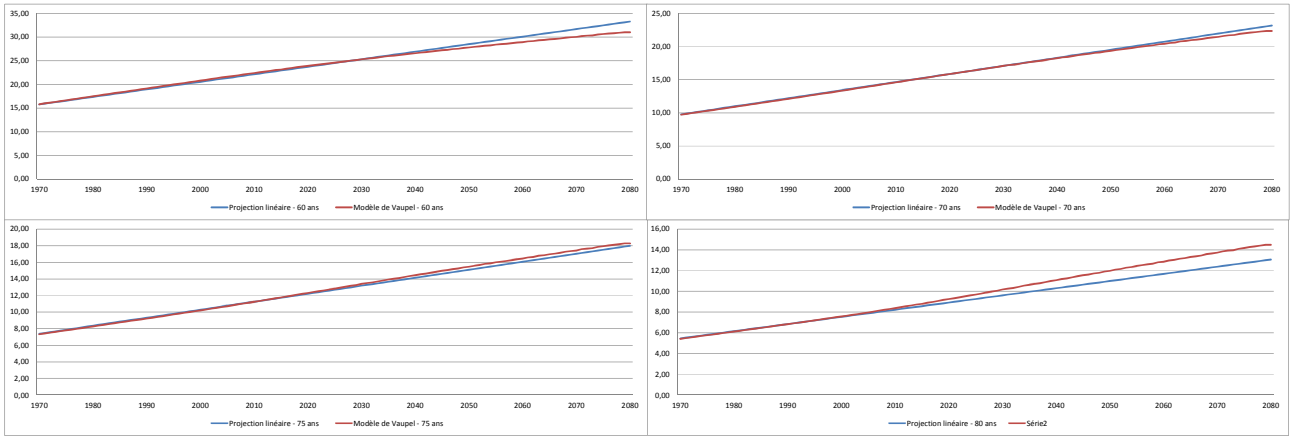


Fig. 50 : Evolution de l'espérance de vie du modèle final et celle projetée par la régression linéaire chez les hommes



Pour les hommes et les femmes, de 60 à 75 ans et pour les générations jusqu'à 2040, les espérances de vie du modèle concordent bien avec celles de la projection linéaire. Pour les générations postérieures, on observe un écart atteignant au maximum près de de 4 ans pour les femmes de 60 ans pour la génération de 2080.
Enfin, pour les plus grands âges, on observe un écart qui s'agrandit avec les générations et qui apparait de plus en plus tôt avec l'âge.

3.5.2. Application du modèle relationnel sur le portefeuille d'AXA

Le modèle relationnel entre la table HMD et le portefeuille AXA est le même que celui proposé dans le modèle de Bongaarts ; l'ouverture ainsi que la fermeture de table également.

3.5.3. « Backtesting »

Dans la même démarche que sur le modèle de Bongaarts, nous effectuons ici un « backtesting » nous permettant de juger de la qualité prédictive du modèle.
On effectue ainsi une régression linéaire sur les espérances de vie des femmes et des hommes de la table HMD de 1960 à 1999, puis nous projections alors les espérances de 2000 à 2010.
Nous construisons 2 tables de mortalité pour les femmes et les hommes avec la méthode du modèle inspiré des travaux de Vaupel décrite plus haut.
Les résultats sont satisfaisants et sont décrits ci-dessous en comparant les taux de mortalité prédits par le modèle avec les taux de mortalité de la table HMD pour les générations de 2000 et 2010.

Fig. 51 : Taux de mortalité de la table HMD et du modèle de Vaupel chez les femmes

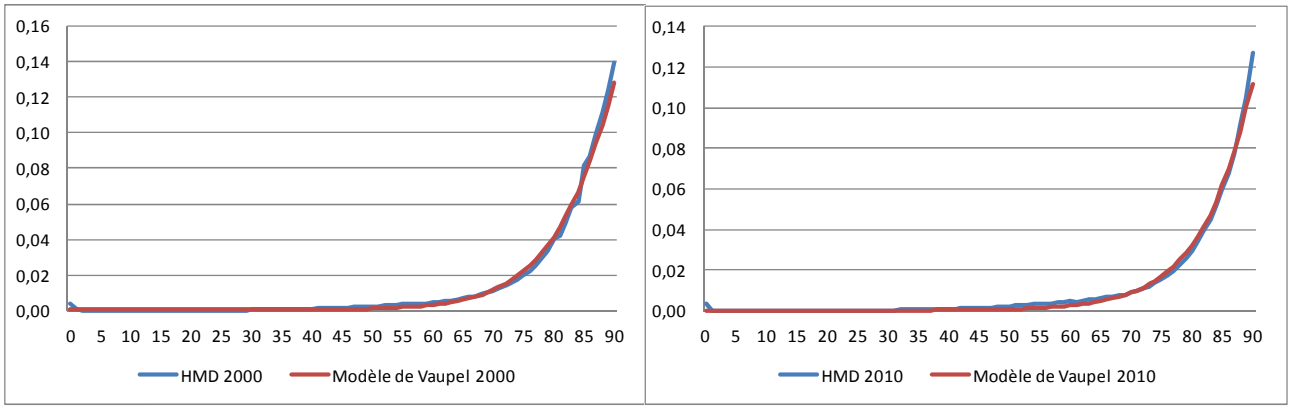
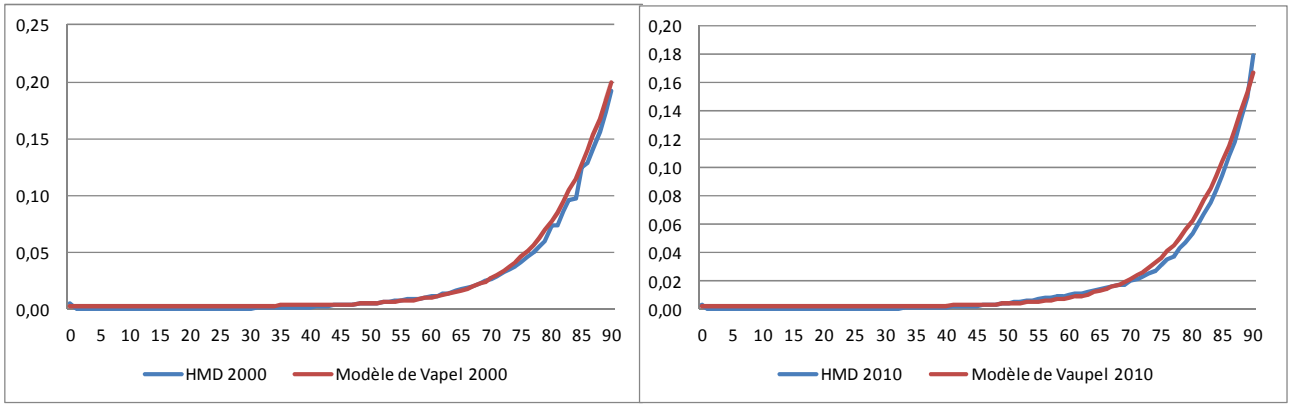


Fig. 52: Taux de mortalité de la table HMD et du modèle de Vaupel chez les hommes



On valide donc le modèle construit pour les femmes. Pour les hommes, le modèle est satisfaisant avec des taux de mortalité estimés qui sont légèrement au dessus de la mortalité observée sur la table HMD.

4. COMPARAISON ENTRE LES TABLES CONSTRUITES

La présente partie vise à établir un comparatif détaillé des tables construites et de dégager l'intérêt de chaque modèle ainsi que ses limites.

Nous présentons à ce titre, et ce pour chacun des deux modèle étudiés, dans un premier temps les taux de mortalité en fonction de l'âge, puis comparons dans un deuxième temps les espérances de vie avec la table réglementaire.

Bien que non pertinent pour un « backtesting », puisqu'ils utilisent les données du portefeuille des années 2001 à 2011, nous présenterons alors l'évolution des SMR sur le portefeuille des rentiers de 2001 à 2011 pour juger de la qualité des deux modèles.

4.1. Analyse des taux de mortalité

Nous comparons dans cette partie les taux de mortalité issus du modèle de Bongaarts avec les taux de mortalités issu du modèle inspiré des travaux de Vaupel.

Fig. 53 : Evolution des taux de mortalité avec l'âge avec le modèle de Bongaarts et le modèle de Vaupel chez les femmes

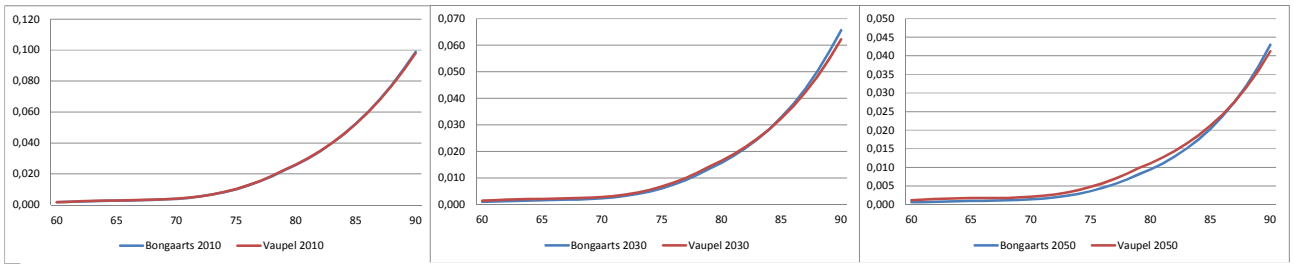
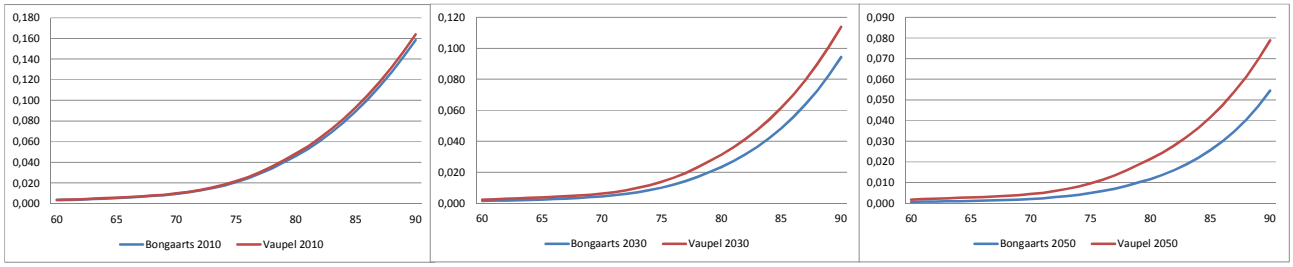


Fig. 54 : Evolution des taux de mortalité avec l'âge avec le modèle de Bongaarts et le modèle de Vaupel chez les hommes



Il apparait que pour les femmes, les deux modèles seront semblables et que les taux de mortalité s'ajustent bien entre eux. On observe cependant pour les générations à partir de 2050 un petit décalage entre les deux modèles où les taux de mortalités du modèle de Bongaarts sont inférieurs

à ceux du modèle inspiré de la démarche de Vaupel ; les espérances de vie du modèle de Bongaarts seront alors plus élevées.

Pour les hommes, ce constat est moins évident puisque les taux de mortalité s'éloignent de plus en plus avec l'âge et les générations.

Il est également intéressant d'observer les écarts existants avec les table TGH05 et TGF05. En effet, tous les assureurs sont d'accord pour dire qu'aujourd'hui les tables réglementaires, à savoir les tables TGH05 et TGF05, surestiment la mortalité. Ainsi, nous vérifions ici que les deux tables construites dans la partie 3 de ce document résolvent ce problème.

Il sera nécessaire dans cette étape de considérer les tables des deux modèles construites en génération et non en année d'observation.

Nous présentons ci-dessous le comparatif des tables pour les âges de 60 à 90 ans qui sont les âges pour lesquels le portefeuille est sous risque. Nous nous restreignons de plus à présenter uniquement les générations de 1950, 1960 et 1980.
En effet, la génération 1950 correspond aux personnes sortant prochainement en rente, la génération 1960 correspondant aux personnes de 50 ans (âge moyen de souscription), et la génération 1980 correspondant aux personnes d'âge cible de 30 ans que les compagnies d'assurance veulent attirer.

Fig. 55 : Evolution des taux de mortalité avec l'âge avec la TGF05, le modèle de Bongaarts et le modèle de Vaupel chez les femmes

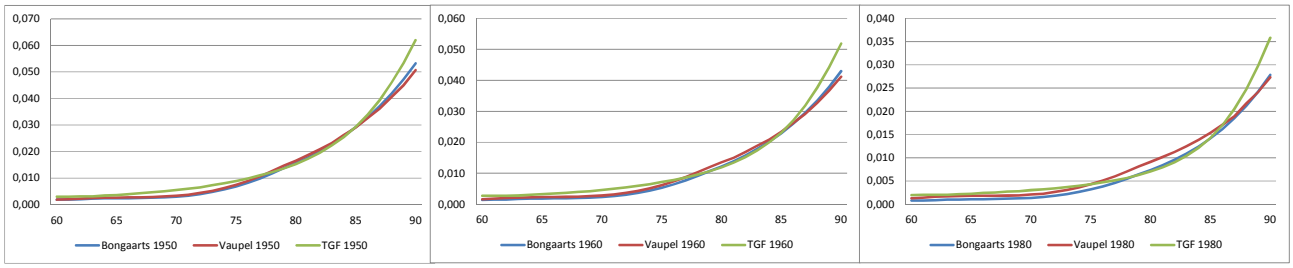
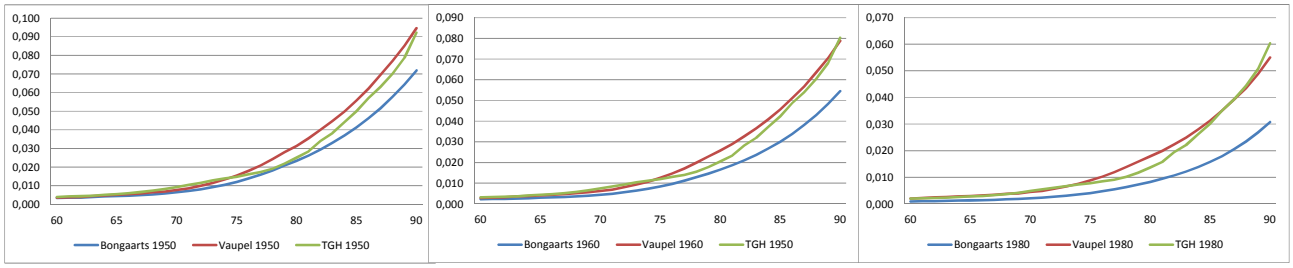


Fig. 56 : Evolution des taux de mortalité avec l'âge avec la TGH05, le modèle de Bongaarts et le modèle de Vaupel chez les hommes



Pour les âges de 60 à 75 ans, la sous-mortalité par rapport à la table réglementaire est vérifiée sur l'ensemble des générations pour les hommes et les femmes.

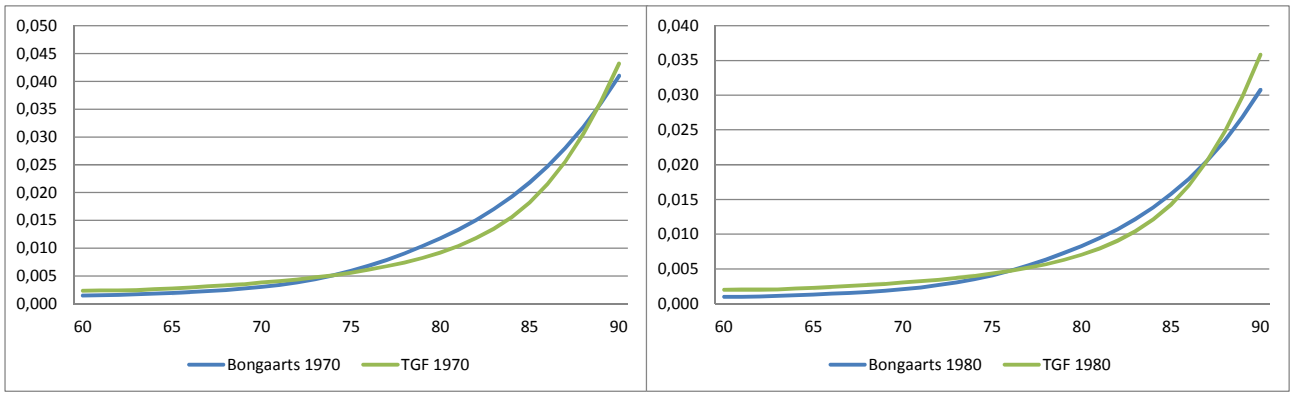
Pour les femmes, sur le modèle de Bongaarts une sous-mortalité est observée sur les 3 générations avec une similitude des taux de mortalité pour les âges de 77 à 85 ans avec la TGF05. On fait le même constat sur le modèle de Vaupel, à l'exception des âges entre 77 et 85 ans où cette fois ci les taux de mortalité du modèle surestiment la mortalité.

Pour les hommes, sur le modèle de Bongaarts, la sous-mortalité est vérifiée pour l'ensemble des générations et des âges ; cette sous-mortalité observée peut paraitre cependant assez grande et fait l'objet de commentaires dans la suite du présent document. Pour le modèle de Vaupel, une surmortalité est observée. Cette surmortalité peut s'expliquer par la faible pente de la régression linéaire faite dans la 1ère étape du calibrage.

En termes de taux de mortalité, les deux modèles pour les hommes et les femmes sont satisfaisants. Pour les hommes, le modèle de Vaupel ne corrige pas le risque de longévité, puisqu'il présente des taux de mortalité supérieurs à la TGH05. Le modèle de Bongaarts quant à lui donne a priori des taux de mortalité très bas par rapport à la TGH05. Nous pouvons cependant atténuer ce résultat en comparant le modèle avec la TGF05.

En effet, dans le cadre d'une réglementation unisexe, les assureurs tarifant les hommes aussi bien que les femmes sur la base de la table des femmes, cette comparaison peut être plus pertinente.

Fig. 57 : Evolution des taux de mortalité avec l'âge avec la TGF05 et le modèle de Bongaarts chez les hommes



Cette fois-ci, l'écart est moindre, entre le modèle de Bongaarts des hommes et la TGF05.
La surmortalité du modèle de Bongaarts pour les âges de 75 à 85 ans sera compensée par les âges de 60 à 75 ans et de 90 à 120 ans (cf. analyse sur l'espérance de vie de la partie 4.2).

On voit donc qu'à terme, pour les générations de 1970 et 1980 par exemple, l'impact d'un changement de table aura des moindres conséquences pour l'assureur.

4.2. Analyse qualitative et quantitative sur l'espérance de vie

On compare ici les espérances de vie générationnelles des modèles construits avec la table réglementaire. Ici encore, on présente les données par génération et non par année d'observation.
Notons que cette sous-partie représente l'aspect opérationnel qui intéresse particulièrement l'assureur puisqu'elle indique directement l'impact des résultats obtenus avec les deux modèles statistiques.
Nous présentons ci-dessous les résultats pour les générations de 1940 à 1980 et pour les personnes de 60, 75 et 90 ans.

Fig. 58 : Evolution des espérances de vie avec les générations avec la TGF05, le modèle de Bongaarts et de Vaupel chez les femmes

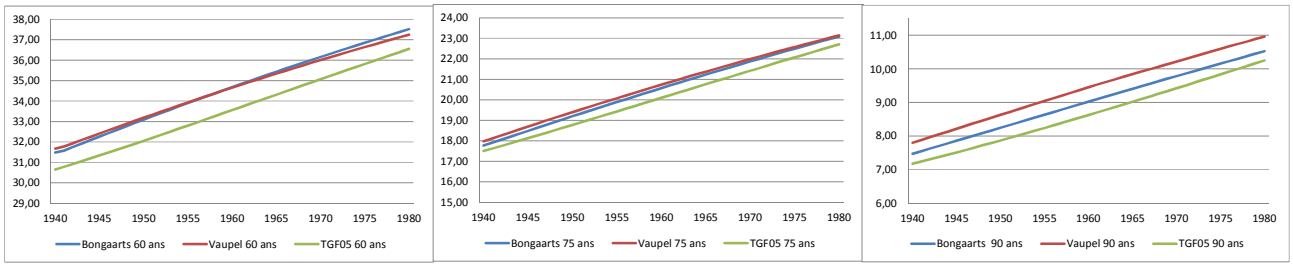
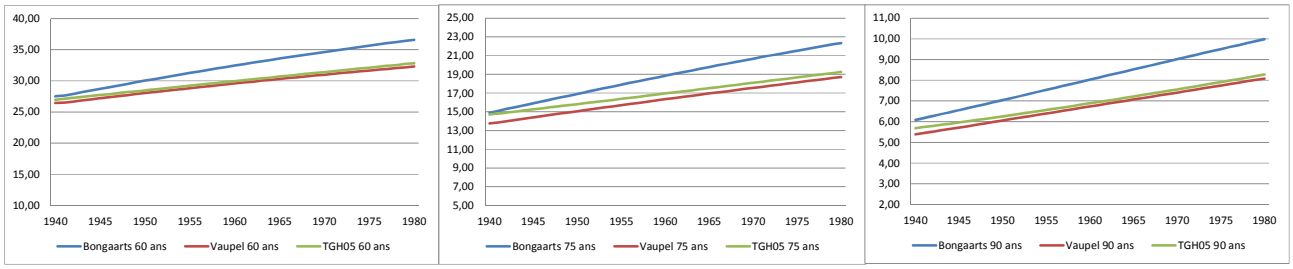


Fig. 59 : Evolution des espérances de vie avec les générations avec la TGH05, le modèle de Bongaarts et de Vaupel chez les hommes



Pour les femmes, les deux modèles ont des espérances de vie supérieures à la TGF05 et corrigent donc directement la limite observée par les assureurs d'une telle table. Plus précisément, pour les personnes de 75 ans et au-delà, la table de Bongaarts a des espérances de vie comprises entre la TGF05 et la table de Vaupel. Avant ces âges-là, les deux modèles ont des espérances de vie qui se croisent.
Pour les hommes, comme vu précédemment avec l'analyse sur les taux de mortalité, nous voyons que les espérances de vie du modèle de Bongaarts sont considérablement plus élevées que celles du modèle de Vaupel et de la TGH05. Plus encore, on voit que les espérances de vies s'éloignent des deux tables pour les générations postérieures. Les espérances de vie du modèle de Vaupel sont quant à elles, en dessous de la table TGH05 et ne corrigent donc pas la problématique initiale du présent document.
Il serait intéressant de faire évoluer un tel modèle en faisant varier la plage de données de la régression linéaire de l'espérance de vie, et vérifier ainsi si une telle limite est constatée.

5. OPERATIONNEL - ASPECT PROVISIONNEMENT

Dans une démarche plus opérationnelle cette fois ci, la présente partie vise à mesurer l'impact financier que peut avoir un changement de table sur le compte de résultat de l'assureur.
A cette fin-là, nous mesurons l'impact d'un changement de table sur les provisions mathématiques mises en place par la compagnie d'assurance.
Nous rappelons ainsi dans un premier temps les notions de base d'une provision mathématique sur un plan technique et réglementaire, puis mesurons alors l'impact financier d'un changement de table.

La présente étude se fera à partir des contrats d'assurance vie proposés par AXA encore en phase d'épargne (pour les contrats offrant une garantie de table, terme qui sera défini plus bas) ou déjà en phase de rente. Nous tiendrons compte de la date de départ en retraite, du taux de revalorisation r de la PM ainsi que du taux technique i prédéfinis lors de la souscription du contrat.

5.1. La provision mathématique

La Provision mathématique (PM) représente l'engagement de l'assureur et est comptabilisé au passif du bilan de l'assureur ; c'est donc une charge comptable.
La PM correspond à la différence entre la valeur actuelle probable (VAP) de l'engagement pris par l'assureur (charge de gestion compris) et la VAP de l'engagement pris par le souscripteur. Lors de la souscription du contrat, ces deux VAP doivent être égales, et par la suite la VAP de l'engagement de l'assureur devra être supérieure ou égale à celle de l'engagement de l'assuré afin de se prémunir du risque de défaut dans le cas d'une rupture de contrat ou d'arrêt du paiement des primes autorisés par la législation conformément à l'article L 132-20 du Code des assurances ainsi qu'à l'article L 223-19 du Code de la mutualité.
La différence des valeurs actuelles présentes entre l'engagement de l'assureur et de l'assuré correspond à la Provision mathématique. Afin de se prémunir d'un rachat éventuel du contrat ou bien d'un arrêt du paiement des primes, c'est cette provision mathématique qui est comptabilisée au passif du bilan, et non la VAP de l'engagement de l'assureur au passif du bilan d'une part et la VAP de l'engagement de l'assuré à l'actif du bilan d'autre part.

A travers un exemple, nous donnons ici la méthodologie du calcul d'une PM pour un cas classique, avec une sortie en rente prévue à l'âge de 65 ans pour un contrat d'un souscripteur âgé de 45 ans avec un taux technique i.

Pour mémoire, nous rappelons ici que pour une prime annuelle PA déterminée lors de la souscription, la montant de la rente R versée dès 65 ans en cas de vie et payable annuellement est celle qui permet d'annuler la VAP de l'engagement de l'assureur avec la VAP de l'engagement de l'assuré.

Mathématiquement, on définit la PM dans le cadre d'une sortie en rentre à 65 ans selon la relation suivante :

$$PM_t = VAP(engagement\ de\ l'assureur) - VAP(engagement\ de\ l'assuré)$$

Où :

$$VAP(engagement\ de\ l'assureur) = R \sum_{k=0}^{\mathrm{w}} (1+i)^{-(k+20)}\ {}_{20+k}p_{45}$$

$$VAP(engagement\ de\ l'assuré) = PA \sum_{k=0}^{(65-45)-1} (1+i)^{-k}\ {}_{k}p_{45} = PA \sum_{k=0}^{19} (1+i)^{-k}\ {}_{k}p_{45}$$
$$= PA\ {}_{|20}\ddot{a}_{45}$$

En phase de rente, la réglementation impose que la PM soit calculée à partir de la probabilité de survie de l'assuré donnée par la table de mortalité en vigueur au moment du calcul. Ainsi, si une nouvelle table réglementaire est publiée en cours d'année, la probabilité de survie de l'assuré sera fortement augmentée entre le début et la fin d'un même exercice comptable (si la nouvelle table est plus prudente que la précédente). En théorie, la PM de fin d'exercice devrait donc être beaucoup plus élevée que la PM de début d'exercice, générant ainsi un déséquilibre dans le compte de résultat de l'assureur. Pour permettre à l'assureur de lisser cette perte technique dans le temps, la réglementation autorise ce dernier à passer dans ses comptes ce « complément de provision » sur 15 ans.

Il est intéressant de noter que dans le cadre de notre étude, il n'apparait pas les bénéfices de l'assureur, le but de la table de mortalité étant uniquement de mesurer le risque de mortalité de son portefeuille sans tenir compte de des bénéfices. A noter cependant qu'en mesurant de manière plus précise son risque, les provisions mathématiques augmenteront et seront néfastes pour le compte de résultat de l'assureur durant les années ou cette augmentation sera comptabilisée, mais à long terme les pertes techniques liées à la longévité seront moindres.

5.2. La provision pour écart Capital constitutif – Provision mathématique

Afin de comprendre l'impact en termes de provisionnement que peut avoir un changement de table, il est important de faire la distinction entre la table de mortalité utilisée pour déterminer le tarif d'une rente (i.e. le taux de conversion qui sera appliqué au capital constitutif pour calculer le montant de la rente) et la table de mortalité utilisée pour le calcul de la provision mathématique de la rente.

Si comme il a été rappelé plus haut, la réglementation impose que la table de mortalité utilisée pour le calcul de la PM soit la table en vigueur dans le Code des Assurances au moment du calcul, deux cas de figure peuvent se présenter pour la table de mortalité utilisée pour déterminer le tarif :

- Soit le contrat d'assurance vie souscrits prévoit une garantie de table
- Soit le contrat d'assurance vie souscrits ne prévoit pas de garantie de table

Un contrat avec garantie de table assure au bénéficiaire lors de la souscription, une conversion du capital constitutif acquis en rente viagère avec la table en vigueur lors de la souscription (aujourd'hui la TGF05). Ainsi, si intervient durant la durée d'épargne du contrat, à savoir durant la période avant la liquidation en rente, un changement de table, alors le bénéficiaire se verra attribuer une rente calculée selon la table garantie lors de la souscription alors que la PM sera déterminée selon la nouvelle table de mortalité. Il en résultera un écart entre le capital constitutif et la PM lors de la mise en place de la rente. En effet, le calcul du montant de l'arrérage R se fait selon la formule :

$$R = \frac{Capital\ constitutif}{\sum_{k=1}^{\omega-x} \frac{1}{(1+i)^k} \times {}_kp_x} ,$$

De plus, le calcul de la PM est le suivant :

$$PM = R \times \sum_{k=1}^{\omega-x} \frac{1}{(1+i)^k} \times {}_kp_x^{'} ,$$

Où ${}_kp_x^{'}$ est la probabilité de survivre (issue de la nouvelle table en vigueur) d'un individu de x ans jusqu'à l'âge $(x+k)$ ans au minimum.

Ainsi, si ${}_kp_x = {}_kp'_x$, alors PM = Capital constitutif lors de la liquidation.

En revanche, si intervient un changement de table, alors la relation ${}_kp_x = {}_kp'_x$ ne sera pas vérifiée et donc il y'aura un écart entre la PM et le CC.

Ce déséquilibre dans les comptes de l'assureur avec une PM supérieure au Capital constitutif (dans le cas d'une table plus prudente) aura un coût pour l'assureur qui devra passer une provision supplémentaire pour combler cet écart.

C'est ainsi que pour un contrat avec garantie de table et en cas de changement de table règlementaire à tout moment de vie du contrat, l'assureur devra mettre en place une provision appelée « provision pour écart CC-PM » permettant à l'assureur d'assurer son engagement.

C'est la Provision pour écart CC-PM qui représente une problématique majeure pour la compagnie d'assurance. En effet, avec l'allongement de la durée de vie de l'Homme, les tables réglementaires réduisent la mortalité avec l'âge, d'où une valeur de PM qui augmente (l'espérance de vie étant plus grande) qui ne pourra pas être compensée par une augmentation de la Prime pure puisque le contrat est en cours.

L'impact d'un changement de table sur la provision à travers la provision pour écart CC-PM est régi par la législation qui laisse aux assureurs, conformément à l'article A 441-4-1 du Code des assurances, 15 ans pour répartir l'impact sur la provision d'un changement de table.

5.3. Résultats de l'impact sur le provisionnement

Nous présentons dans cette partie l'aspect directement opérationnel pour l'assureur, à savoir l'impact d'un changement de table sur la provision mathématique de celui-ci.
Il est alors nécessaire de faire la distinction entre les données.
Nous concaténons tout d'abord l'ensemble des bases du portefeuille, puis distinguons les contrats qui sont en phase d'épargne, et ceux qui sont en phase de rente.

Pour les contrats en phase de rente, bien que suite à un quelconque changement de table le montant de l'arrérage ne changera pas, l'assureur doit tout de même changer le montant de sa PM. La VAP de l'assuré étant nulle à cette période, la nouvelle PM sera égale à la VAP de l'assureur.

Pour les contrats en phase d'épargne, nous traitons ici les contrats avec garantie de table.
La provision est revalorisée chaque année à taux r. Pour exemple, pour un contrat d'une personne qui a aujourd'hui 45 ans et qui sort en rente à 65 ans, avec prime annuelle PA et une PM à 45 ans de PM_{45}, la PM à 65 ans sera :

$$PM_{65} = PM_{45}(1+r)^{20} + PA\sum_{k=1}^{20-1}(1+r)^{k}$$

Nous supposons dans ce cas également le montant de l'arrérage R sans changement de table, puis calculons avec le même montant d'arrérage la nouvelle PM dans le cas d'un changement de table avec la relation suivante :

$$PM_{65}^{nouvelle\ table} = \frac{R}{taux\ de\ conversion^{nouvelle\ table}}$$

Pour mémoire le montant de l'arrérage pour un client qui liquide à 65 ans est le suivant :

$$R = taux\ de\ conversion \times PM_{65}$$

Avec :

$$taux\ de\ conversion = \frac{1}{a_{65}(1 + taux\ de\ frais\ d'arrérage)}$$

Nous présentons ci-dessous l'impact du changement de table, en passant de la table réglementaire aux tables construites. A noter qu'au vu des résultats obtenus dans la partie 4 du présent document, les PM pour les hommes n'ont pas été calculées avec le modèle de Vaupel.

Pour les contrats en phase de rente, on obtient donc les provisions mathématiques suivantes en fonction de la table de mortalité utilisée :

	Total	Femmes	Hommes
TGH - TGF	171 003 871	57 096 024	113 907 847
Modèle de Bongaarts	172 434 001	57 422 520	115 011 481
Modèle de Vaupel	--	57 924 869	--

Dans le cas d'un passage des tables réglementaires aux tables construites dans ce mémoire, on aura donc les variations de PM suivantes :

	Total	Femmes	Hommes
Modèle de Bongaarts	0,84%	0,57%	0,97%
Modèle de Vaupel		0,87%	

L'impact d'un changement de table sur les hommes est plus important que pour les femmes pour le modèle de Bongaarts. On explique cela par le fait que la TGH05 est plus risqué pour les hommes que les femmes, et donc que la sur-mortalité de la TGH05 sur le risque réel est plus fort chez les hommes.

Pour les contrats en phase d'épargne, on obtient les provisions mathématiques suivantes en fonction de la table de mortalité utilisée :

	Total	Femmes	Hommes
TGH – TGF	4 927 332 986	2 554 404 216	2 372 928 770
Modèle de Bongaarts	5 005 864 556	2 584 290 745	2 421 573 810
Modèle de Vaupel		2 581 736 341	

Dans le cas d'un passage des tables réglementaires aux tables construites dans ce mémoire, on aura donc les variations de PM suivantes :

	Total	Femmes	Hommes
Modèle de Bongaarts	1,59%	1,17%	2,05%
Modèle de Vaupel	--	1,07%	--

L'impact d'un changement de table sur le portefeuille des contrats en cours d'épargne est légèrement plus haut que pour le portefeuille des contrats en cours de rente dans la mesure où celui-ci est constitué de clients de générations plus récentes ; la dérive sur la table réglementaire sera ainsi plus grande sur un tel portefeuille.

On notera de plus que l'impact est plus faible chez les femmes pour le modèle des Vaupel puisque celui-ci se rapproche de la TGF05.

En conclusion, sur l'ensemble de ces résultats, l'impact des 2 tables construites reste relativement mesuré et ne semble pas indiquer de dérive majeure de la mortalité par rapport au provisionnement actuel. D'autant plus qu'il est plus grand pour les hommes que les femmes et ce résultat peut être contrasté par le fait qu'à plus long terme, les contrats seront régis par la table des femmes dans le cadre de la réglementation unisexe.

CONCLUSION

Le présent mémoire a pu montrer le caractère important du calibrage des tables de mortalité prospectives pour chaque compagnie d'assurance. Il est en effet de notoriété publique, d'après les différentes études et l'expérience des compagnies de ces dernières décennies, que les tables de mortalité en vigueur aujourd'hui, à savoir la TGH5 et la TGF05, surestiment la mortalité de leurs assurés dans la modélisation prospective. Il a donc été nécessaire de construire une table de mortalité prospective répondant à une telle dérive.
Il a été montré que ce calibrage répond à deux risques auxquels sont soumis l'assureur, à savoir le risque de longévité et le risque d'anti-sélection.
Ces deux risques revêtent une extrême importance dans la mesure où ce sont eux qui peuvent impacter directement la solvabilité de l'assureur. C'est ainsi qu'il a été nécessaire d'analyser l'évolution de l'allongement de la durée de vie chez les Hommes de la population générale et du portefeuille étudié.

Après avoir rendu la base de données le plus fiable possible, nous avons pu estimer les taux bruts de mortalité, qui ont alors été lissés par la méthode de Whittaker Henderson.

Nous avons ensuite développer deux modèles de table de mortalité : le modèle de Bongaarts et le modèle inspiré des travaux de Vaupel.

Le présent mémoire a montré que dans le cadre de la construction de table, 2 approches opposées sont possibles : l'une purement statistique proposant de modéliser les taux de mortalité à partir d'un modèle statistique connu, l'autre plus opérationnelle proposant d'accorder un caractère prépondérant à la modélisation de l'espérance de vie, et donc à l'aspect opérationnel.

Il a alors été intéressant de constater les dérives de mortalité entre les modèles construits et la table réglementaire en vigueur aujourd'hui (TGH05 et TGF05). Nous avons alors pu remarquer que le modèle de Bongaarts pour les hommes et les femmes augmente le niveau d'espérance de vie, et répond ainsi à la limite de la TGH05 et TGF05. Ce constat a pu être verifié chez les femmes uniquement sur le modèle inspiré des travaux de Vaupel.
Cette limite accordée au deuxième modèle montre qu'il aurait pu être éventuellement possible de le développer en le calibrant à partir d'une plage de données différente, puisque il a été calibré ici à partir de la plage de données de 1970 à 2010.
De plus, ce résultat pessimiste peut être nuancé en tenant compte de la réglementation actuelle sur l'utilisation des tables des femmes uniquement pour la tarification.

Nous avons pu finalement montrer dans un aspect plus opérationnel que l'impact en termes de provisionnement du passage des tables en vigeur aux tables de mortalité construites pourrait garantir à l'assureur une plus grande solvabilité à un coût marginal.

Enfin, il est nécessaire également de relativiser l'ensemble de ces résultats. Nous sommes aujourd'hui en effet dans un contexte d'incertitude sur l'évolution future du contexte environnemental et social. A titre d'exemple, alors que les conséquences de l'obésité aux USA ont été sans précédent, ce phénomène prend place progressivement dans les pays européens et ajoute une incertitude supplémentaire aux assureurs sur le risque de longévité.

BIBLIOGRAPHIE

Livres

- M. Denuit et A. Delwarde, 2006, Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives, Economica
- M.Denuit et A.Quashie, 2005, Modèles d'extrapolations de la mortalité aux grand âges, ISFA et Université Catholique de Louvain
- P.Petauton, 1996, Théorie et pratique de l'assurance vie, Dunod
- Planchet et Thérond, 2006, Modèles de durée, Economica

Articles

- John Bongaarts, 2004, Long-Range Trends in Adult Mortality: Models and Projection Methods
- A.R. Thatcher, 1999, The long-term pattern of adult mortality and the highest attained age
- Frédéric Planchet, Aymric Kamega, 2001, Mortalité prospective à partir d'informations externes en utilisant l'approche de Bongaarts
- F. Planchet et A.Kamega : Construction de tables de mortalité sur un groupe restreint : mesure du risque d'estimation
- F. Planchet et A.Kamega, 2010, Mesure du risque d'estimation associé à une table d'expérience
- J.W. Vaupel et K.F. Andreev, 2006, Forecast of Cohort Mortality after Age 50
- Newsletter SCOR VIE, 2004, Projection de mortalité et rentes viagères, Interview avec J.W Vaupel
- SCOR in FORM, 2011, Espérance de vie dans le monde et scénarios prospectifs sur la longévité
- J. Hare, 2009, Ajustements au sens des moindres carrés, Université Pierre et Marie Curie
- Younes Hassan, Estimation pour des données modifiées, cours dispensés à l'Université du Quebec à Montréal

- P.Saint Pierre, 2013, Introduction à l'analyse des durées de survie
- Université de Toulouse, Cours de statistique asymptotique
- M. Maumy Bertrand, 2001, Association de variables qualitatives, Université de Strasbourg
- M. Maumy Bertrand, 2012-2013, Régression linéaire simple, Université de Strasbourg
- Article de l'ACP, 2006, Lignes directives mortalité de la Commission d'Agrément
- Article INSEE, 2010, Projections de population à l'horizon 2060
- Article INSEE, 2011, L'espérance de vie s'accroit, les inégalités sociales face à la mort demeurent

Mémoires

- Marjorie Giroux, 201, Mortalité prospective et couverture du risque de longévité
- Rolland et I. Aubin, 2005, Comparaison des méthodes de construction des lois de maintien en incapacité de travail et en invalidité, et analyse de l'impact du choix sur les niveaux de provisionnement et de charge ultime
- S. Chan Hew Way,2009, Modélisation des lois de rachat dynamique et étude de rentabilité d'un portefeuille d'assurance vie
- M.B. Viville, Comparaison de méthodes d'ajustement de la mortalité des rentiers dans un but prospectif
- Lahbabi, Construction de tables de mortalité prospectives pour la CIMR
- Documents internes AXA France

Sites internet

- http://www.mortality.org/
- http://www.legifrance.gouv.fr/
- http://www.wikipedia.org/
- http://www.csa-fr.com/

GLOSSAIRE

Sortie en rente / Liquidation en rente : L'épargne constituée par un contrat d'assurance vie a, selon les modalités du contrat, une possibilité de sortie en rente où de sortie en capital. Dans le cas d'une sortie en rente, où encore lors de liquidation en rente, le capital épargné n'appartient plus à l'assuré qui se voit alors reversé une rente à vie (assurance vie entière). A noter que la liquidation en rente est irréversible.

ALM (Asset and Liability Management) : « Terme anglais désignant la gestion actif-passif consistant à l'analyse du bilan et son évolution probable sur un horizon de planification en fonction de variables vis-à-vis desquelles elle précise des anticipations (taux d'intérêt, Provision Mathématique,…) ».

TGH05- TGF05 : Table de mortalité réglementaire à compter du 1er janvier 2007 pour le calcul des rentes viagères pour les hommes et les femmes.

Notations actuarielles :

- $\mathrm{T_x}$: Variable aléatoire qui représente la durée de vie restante d'une personne d'âge x
- ${}_tq_x = P(\mathrm{T_x} \leq \mathrm{t})$
- ${}_tp_x = P(\mathrm{T_x} > t) = 1 - \ {}_tq_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$
- $q_x = P(x < \ \mathrm{T_0} \leq \mathrm{x} + 1 | \ \mathrm{T_0} > x)$
- μ_{x+t} est la force de mortalité définit par :

$$\mu_{x+t} = \lim_{h \to 0} \frac{{}_hq_x}{h}$$

Table de mortalité : Une table de mortalité représente une projection de l'évolution d'une population selon ses taux de mortalité.

En notant x un âge entier, on a :

- l_x : Nombre de personnes toujours vivantes à l'âge x
- d_x : Nombre de personne vivantes à x qui décèdent avant l'âge $x + 1$
- ω : Age ultime représentant le plus jeune âge que personne n'atteint. A cet âge $l_x = 0$

Relations actuarielles :

- $d_x = l_x \ q_x$
- $l_x = l_{x-1} - d_{x-1}$
- Rente viagère payable à termes échus : $a_x = \sum_{k=1}^{\omega - x} \frac{l_{x+k}}{l_x} (1 + i)^{-k}$