



**HAL**  
open science

# Modélisation par exposition des sinistres extrêmes pour la branche Marine Cargo

Aminat Toutakova

► **To cite this version:**

Aminat Toutakova. Modélisation par exposition des sinistres extrêmes pour la branche Marine Cargo. Gestion des risques [q-fin.RM]. 2014. dumas-00940269

**HAL Id: dumas-00940269**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00940269v1>**

Submitted on 14 Feb 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Mémoire présenté devant  
l'UFR de Mathématique et d'Informatique  
pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'Actuaire de Strasbourg  
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

le \_\_\_\_\_

Par : Aminat TOUTAKOVA

Titre: Modélisation par exposition des sinistres extrêmes pour la branche Marine Cargo

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

*Membres du jury de l'Institut des  
Actuaires* Florence PICARD

Gérard CROSET

signature

*Entreprise :*

Nom : AXA Corporate Solutions

Signature :

*Directeur de mémoire en entreprise :*

Nom : Stanislas LEGAIT

Signature :

*Membres du jury de l'UdS :*

- M. Jacques Franchi
- Mme Sandrine Spaeter-Loehrer
- M. Karl-Théodor Eisele
- M. Jean-Lucien Netzer
- Mme Myriam Maumy-Bertrand
- M. Bernard Heinkel
- M. Patrick Rondé
- M. Jean Bérard

*Invités :*

- M. Philippe Artzner
- M. Pierre Devolder
- M. Jean Modry
- Mme Magali Kelle-Vignon
- M. Alexandre You

Invité : Jean-Lucien Netzer

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de  
mise en ligne sur un site de**

**diffusion de documents actuariels**

*(après expiration de l'éventuel délai de  
confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

*Secrétariat : Mme Maire-Lantz  
Mme Fidelin*

*Bibliothèque : Mme Christine Disdier*

Signature du candidat

Mémoire présenté devant  
la Faculté des Sciences Economiques et de Gestion et l'UFR de Mathématique et Informatique  
pour l'obtention du Master de Finance,  
spécialité Actuariat et Gestion du Risque

le \_\_\_\_\_

Par : Aminat TOUTAKOVA

Titre: Modélisation par exposition des sinistres extrêmes pour la branche Marine  
Cargo

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

*Membres du jury de l'Institut des  
Actuaires*

Florence PICARD  
Gérard CROSET

signature

*Entreprise :*

Nom : AXA Corporate Solutions

*Signature :*

*Membres du jury de l'UdS :*

M. Jacques Franchi  
Mme Sandrine Spaeter-Loehrer  
M. Karl-Théodor Eisele  
M. Jean-Lucien Netzer  
Mme Myriam Maumy-Bertrand  
M. Bernard Heinkel  
M. Patrick Rondé  
M. Jean Bérard  
*Invités :*  
M. Philippe Artzner  
M. Pierre Devolder  
M. Jean Modry  
Mme Magali Kelle-Vignon  
M. Alexandre You

*Directeur de mémoire en entreprise :*

*Nom : Stanislas LEGAIT*

*Signature :*

*Invité : Jean-Lucien Netzer*

*Nom :*

*Signature :*

**Autorisation de publication et de  
mise en ligne sur un site de  
diffusion de documents**

**actuariels** (après expiration de  
l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

*Secrétariat : Mme Laura Fidelin*

*Mme Floriane Maire-Lantz*

*Bibliothèque : Mme Christine Disdier*

Signature du candidat

<b>RESUME .....</b>	<b>3</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>4</b>
<b>REMERCIEMENTS .....</b>	<b>5</b>
<b>I. INTRODUCTION.....</b>	<b>6</b>
A. CONTEXTE DE L'ÉTUDE .....	6
1) <i>Présentation de l'entreprise.....</i>	6
2) <i>La Branche Marine.....</i>	10
i. Histoire.....	10
ii. Les sous-branches .....	10
iii. Quelques chiffres en Marine.....	10
3) <i>Marine Facultés (Cargo) .....</i>	11
i. Les garanties .....	11
ii. Les formules de garantie .....	12
iii. Les risques assurés .....	12
iv. Types de polices .....	12
v. Trade Sectors .....	13
vi. Les faits majeurs.....	15
1) <i>Solvabilité II et le capital économique .....</i>	15
2) <i>Value at Risk .....</i>	18
3) <i>Tail Value at Risk.....</i>	20
i. La réassurance proportionnelle .....	21
ii. La réassurance non proportionnelle .....	23
5) <i>L'assurance facultative et la coassurance .....</i>	24
i. La coassurance .....	24
ii. L'assurance facultative .....	24
4) <i>Sinistres graves .....</i>	25
C. INTRODUCTION AU SUJET.....	26
<b>II. L'APPROCHE ET LES COMPOSANTES DE LA MODELISATION .....</b>	<b>28</b>
A. MODELE .....	28
1) <i>Introduction à la modélisation.....</i>	28
2) <i>Modèle historique.....</i>	29
3) <i>Modèle par exposition .....</i>	29
4) <i>L'apport du modèle par exposition .....</i>	30
B. DONNEES .....	30
1) <i>Base de données historique du portefeuille AXA CS .....</i>	30
2) <i>Base de données marché .....</i>	32
3) <i>Analyse de données .....</i>	33
4) <i>Analyse comparative AXA CS – Lloyd's .....</i>	36
5) <i>Données retenues .....</i>	39
C. REGROUPEMENT DES TRADE SECTORS.....	40
1) <i>Analyse en Composantes Principales (ACP) .....</i>	40
2) <i>Analyse Factorielle des Correspondances (AFC) et Classification Ascendante Hiérarchique (CAH) .....</i>	45
3) <i>Vision des TS par Contrôle de gestion et par la Souscription .....</i>	47
4) <i>Analyse de l'exposition des TS dans le cadre de regroupement. ....</i>	48
5) <i>Regroupement final .....</i>	57
D. CHOIX DU SEUIL .....	58
1) <i>Deux méthodes de détermination du seuil de la Théorie des valeurs extrêmes (TVE).....</i>	59
i. Méthode par blocs .....	59

ii.	La méthode POT (Peaks Over Threshold).....	61
2)	<i>Choix du seuil de la modélisation pour les données de la Marine Cargo</i> .....	66
<b>III.</b>	<b>MODELE</b> .....	<b>71</b>
A.	INDEPENDANCE ENTRE LA FREQUENCE ET LE COUT .....	71
1)	<i>Test de Spearman</i> .....	71
2)	<i>Application du test aux données de la Marine Cargo</i> .....	72
B.	SCHEMA GLOBAL DU MODELE .....	73
C.	MODELISATION DE LA FREQUENCE .....	75
1)	<i>Lois de fréquence</i> .....	75
2)	<i>Estimation des paramètres</i> .....	76
3)	<i>Application au portefeuille Marine Cargo</i> .....	77
D.	MODELISATION DU COUT.....	81
1)	<i>La démarche</i> .....	81
2)	<i>Construction d'une loi de coût pour les faibles périodes de retour</i> .....	82
i.	Les lois de coût.....	82
a)	L'estimation des paramètres.....	82
b)	Tests d'adéquation.....	85
ii.	Application au portefeuille Marine Cargo .....	86
3)	<i>Scénarii</i> .....	92
i.	La démarche de simulation .....	93
ii.	Application : Simulation des scénarii pour le TS X.....	95
a.	Naufrage d'un porte-conteneur .....	96
b.	Construction d'une OEP à partir de sinistres Marché.....	101
4)	<i>Loi de coût finale</i> .....	103
i.	Raccord de deux lois .....	103
ii.	Tirage de la part .....	104
E.	LA CHARGE SINISTRE .....	106
1)	<i>ReMetrica : modélisation de la charge sinistre pour le TS X</i> .....	106
i.	ReMetrica.....	106
ii.	Simulation de la Charge sinistre pour le TS X .....	106
2)	<i>Résultats</i> .....	107
3)	<i>Comparaison entre la Var à 99,5 et la TVaR à 99,5</i> .....	108
	<b>BIBLIOGRAPHIE</b> .....	<b>113</b>
	<b>ANNEXES</b> .....	<b>114</b>

# RESUME

L'objectif de ce mémoire est le développement d'un modèle par exposition dans le cadre de l'évolution du modèle interne d'AXA Corporate Solutions, afin de modéliser les sinistres extrêmes hors catastrophes naturelles pour la branche Marine Cargo. Ce modèle a pour but l'évaluation du capital économique nécessaire dans le cadre du pilier I de la directive Solvabilité 2 et challengera le modèle historique actuellement utilisé. Il sera également utilisé dans le cadre des calculs d'efficience des traités de réassurance Marine d'Axa Corporate Solutions.

Ce modèle ne va prendre en compte que les sinistres extrêmes, le modèle de sinistres attritionnels étant géré séparément. En effet il existe une séparation en sinistres attritionnels et en sinistres graves. Les sinistres graves ou les sinistres extrêmes sont ceux supérieurs à un certain seuil fixé et les sinistres attritionnels, ceux inférieurs à ce seuil. Cette séparation est très importante car la modélisation de ces deux types de sinistres ne se fait pas de la même manière. Les sinistres extrêmes sont caractérisés par une faible fréquence et une sévérité élevée. Ce sont les catastrophes d'origine humaine qui seront le sujet de ce modèle, nous excluons la partie des sinistres due aux catastrophes naturelles qui ne seront pas traités dans le cadre de ce mémoire.

De par leur nature, les sinistres extrêmes ont une faible fréquence, ce qui représente un challenge pour leur analyse, notamment du fait du manque d'observations des sinistres de très faible fréquence et de sévérité très élevée.

Ce modèle par exposition devra prendre en compte les particularités du portefeuille Marine Cargo d'AXA Corporate Solutions, via une séparation du portefeuille en trade secteurs. De plus notre modèle sera sensible aux changements d'exposition et de la politique des parts d'AXA CS afin de refléter au plus juste la réalité du risque. Cette spécificité du portefeuille sera prise en compte par notre modèle car il sera propre à chaque secteur.

Contrairement au modèle historique utilisé jusqu'à présent dans le cadre de la modélisation des sinistres graves du modèle interne d'Axa Corporate Solutions, qui modélise le risque de la branche Marine Cargo sans prendre en compte la spécificité de chaque secteur, nous allons proposer un modèle qui se concentre sur l'ajustement du modèle qui est propre à chaque secteur.

Mots-clés : Modèle par exposition, sinistres graves, Marine Cargo, théorie des valeurs extrêmes, modèle interne, approche fréquence-coût, simulations stochastiques, Value at Risk, Tail Value at Risk.

# ABSTRACT

The goal of this thesis is the development of the model by exposure for the evolution of the existing internal model, in order to modelize the large claims without taking into account natural hazards for the Marine Cargo branch. The aim of this model is the evaluation of the economic capital required by the first pillar of Solvency 2 and the challenge of the existing historical model. It will also be used for the efficiency study of the Marine reinsurance for AXA Corporate Solutions.

This model will take into account only large claims, as attritional losses are modeled separately. There is in fact a separation into attritional and large losses. Large losses are those which are over a certain fixed amount and attritional losses are the losses below this fixed amount. Large losses' particularity consists in a very low frequency and in a very high severity. This separation is very important because the modelling of those two types of losses is not the same. It's the man-made catastrophes that will be modeled by this study; losses caused by natural disasters will not be studied in this thesis.

The low frequency nature of extreme losses represents a challenge for their analysis, especially due to the lack of empirical observations of losses of low frequency and very high severity.

This exposure model will have to take into account the specificity of AXA Corporate Solutions' portfolio for the Marine Cargo branch by the split of the portfolio in different trade sectors. In addition to that, our model will be sensitive to the change of the exposure and shares policy in order to reflect in the best way the reality of the risk of this portfolio. This particularity will be taken into account by a costumed model for each sector.

Contrary to the historical model used until now for the large loss modeling of the internal model of AXA Corporate Solutions, which modelize the risk of Marine cargo portfolio without taking into account the specificity of each trade sector, we will propose a model that is concentrated on the fitting of the model for each sector.

Keywords: Model by exposure, large losses, Marine Cargo, Extreme Value Theory, internal model, frequency-cost approach, stochastic simulations, Value at Risk, Tail Value at Risk.

# REMERCIEMENTS

Avant de commencer mon mémoire, je souhaiterais remercier toutes les personnes qui m'ont aidé et ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Tout d'abord je voudrais remercier l'équipe pédagogique de la formation d'Actuariat et Gestion du risque de Strasbourg pour m'avoir donné les connaissances théoriques nécessaires pour effectuer ce travail. Je remercie notamment Jean-Lucien NETZER pour ses conseils et son encadrement.

Je souhaiterais remercier particulièrement Monsieur Stanislas LEGAIT, conseiller d'études actuarielles au sein de l'équipe de Risque Cat, Modèle interne & Réassurance, qui s'est toujours montré à l'écoute, patient et disponible tout au long de la période du stage.

J'adresse également mes remerciements à Monsieur Jérémie DEVUN, le responsable du département capital économique pour son accueil et la confiance qu'il m'a accordé.

Je voudrais également remercier Madame Isabelle VAYER, responsable de la direction technique pour m'avoir permis d'intégrer l'équipe d'actuariat et réaliser mon stage.

Enfin, je voudrais remercier les équipes de Risque Cat, Réassurance & Modèle interne et de Tarification pour leurs conseils, l'aide qu'ils ont pu m'apporter et leur accueil pendant la période de mon stage.



# I. INTRODUCTION

Les sinistres extrêmes, étant difficiles à modéliser, étaient toujours un challenge pour un actuair. En effet, la particularité de ces sinistres réside dans le fait qu'ils sont caractérisés par une faible fréquence et une sévérité élevée. De ce fait la modélisation des sinistres extrêmes se fait séparément de la modélisation des sinistres attritionnels.

Dans le cadre des exigences quantitatives de Solvabilité II, une compagnie d'assurance doit mettre en réserve un capital économique qui sert à éponger les pertes en cas de sinistralité extrême à l'horizon d'un an.

Le but de ce mémoire est alors un développement du modèle par exposition des sinistres extrêmes pour la branche Marine Cargo en utilisant le modèle fréquence- coût moyen, afin de calculer le niveau de capital économique requis. Le calcul de ce montant retenu par Solvabilité II s'effectue à partir de la mesure de risque, appelée Value at Risk. Cette mesure de risque n'étant pas parfaite, nous allons comparer les montants obtenus à par la VaR et la TVaR (Tail Value at Risk) qui est une alternative à la VaR et comme on le verra plus tard est une mesure de risque cohérente<sup>1</sup> au sens de Artzner contrairement à la VaR.

Enfin, ce modèle nous permettra d'effectuer une étude d'efficacité de réassurance du portefeuille de la branche Marine Cargo afin d'avoir une vision de l'intérêt des programmes de réassurance souscrites.

## A. CONTEXTE DE L'ETUDE

Dans ce chapitre nous allons présenter le cadre de notre étude et plus particulièrement l'entreprise, AXA Corporate Solutions, en précisant ses différentes branches. Ensuite nous allons introduire la branche Marine avec quelques chiffres clés et nous allons présenter la sous-branche sur laquelle portera notre étude, la Marine Cargo ou Facultés.

### 1) Présentation de l'entreprise

AXA Corporate Solutions (AXA CS) est une entité du Groupe AXA France qui emploie 1400 personnes pour répondre aux besoins d'assurance des grandes entreprises multinationales. C'est une filiale d'AXA dédiée au segment des entreprises internationales pour la prévention, la souscription et la gestion des risques IARD, et aux marchés spécialisés comme Marine, Aviation et Spatial.

AXA CS offre ses services à travers le monde entier avec les succursales à Hong Kong, à Singapour, au Royaume-Uni, en Allemagne, en Italie, en Australie et en Suisse.

Son chiffre d'affaires a atteint 2,069 milliards d'euros en 2012 et elle a obtenu A+ par l'agence de notation Standard & Poor's avec des perspectives stables. Son résultat opérationnel s'élève à 145 millions d'euros.

---

<sup>1</sup> *Coherent Measures of Risk*, Artzner, Delbaen, Eber et Heath. 1998. p.13

Les différentes branches d'AXA CS sont :

- Property
- Liability
- Motor
- Construction
- Human protection
- D&O
- Marine
- Aviation
- Spatial

**La branche Property:** Nous y trouvons deux garanties, la garantie dommage aux biens et la garantie perte d'exploitation. C'est une branche à déroulement court car l'indemnisation d'un sinistre, lorsqu'il survient, s'effectue assez rapidement par rapport à la perception de la prime.

**La branche Liability :** Elle vise à couvrir la responsabilité des entreprises envers des tiers (RC produit, RC professionnelle = Financial Lines et autre). Les procédures judiciaires liées à cette garantie en font une branche longue.

**La branche Motor :** Elle assure la flotte automobile des entreprises, les dommages corporels ainsi que la responsabilité civile matérielle et corporelle, c'est une branche mi- longue.

**La branche Construction :** Elle comprend la garantie dommage appelée « tous risques chantier » (TRC) et la garantie Décennale liée aux indemnités versées au tiers.

**La branche Human protection :** Nous y trouvons les garanties de Décès/Invalidité, Coma, Soutien psychologique, aménagement du domicile du véhicule et du lieu de travail et Broken Bones. C'est une branche à développement long.

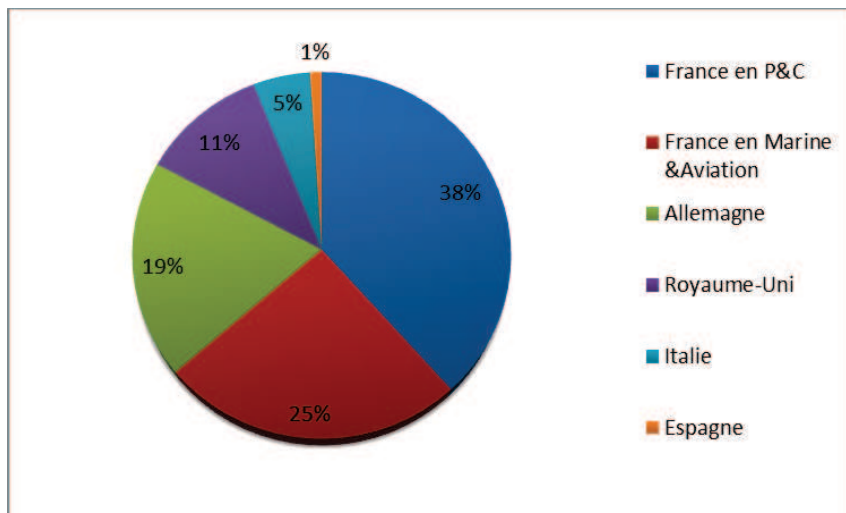
**La branche D&O (Directors and Officers) :** Elle comprend la garantie Employment Protection Legislation qui vise à couvrir les sinistres portant atteintes aux employés (harcèlement, non-respect du droit de travail...) et Wrongful Act qui traite les erreurs de gestion liées à la responsabilité du dirigeant (mauvaise communication, violation des statuts ou des lois). Les procédures judiciaires en font une branche longue.

**La branche Aviation :** Nous y trouvons la responsabilité civile matérielle, l'indemnisation corporelle, et la responsabilité civile au sol. C'est une branche mi- longue.

**La branche Spatial :** Elle comprend l'assurance qui couvre le lancement des satellites, leur mise sur orbite et leur vie. Elle comporte deux garanties potentielles : la garantie dommage (perte de capacité opérationnelle, perte d'exploitation) et la garantie de type responsabilité civile

**La branche Marine :** Elle assure les corps des bateaux (Hull) ainsi que la cargaison à bord (Cargo). C'est une branche à développement court. Nous trouverons davantage d'informations sur cette branche et ces garanties dans la section suivante.

La répartition de son chiffre d'affaire géographiquement d'activité en 2012 était la suivante :



**Tableau 1 : Répartition du chiffre d'affaire par pays**

Nous avons cependant 25% du chiffre d'affaire de 2012 d'AXA CS qui provient des contrats assurant le territoire français par le biais de l'assurance Marine&Aviation et nous avons 38% du chiffre d'affaire provenant des contrats assurant le territoire français en Property & Casualty. Ainsi, 65% du chiffre d'affaire de 2012 d'AXA CS provient des contrats qui portent sur le territoire français.

La répartition du chiffre d'affaire 2012 par branche d'activité d'AXA CS était :

#### 2012 turnover spread by lines of business



Nous constatons ainsi que la part de la branche Marine dans le chiffre d'affaire 2012 d'AXA CS s'élevait à 483 millions d'euros ce qui représente 23% du CA.

Son réseau international est représenté ci-dessus :



Nous remarquons qu'AXA Corporate Solutions s'étend dans le monde entier, étant présente sur tous les continents du globe.

## 2) La Branche Marine

### i. Histoire

La Marine est le plus ancien domaine de l'assurance. Dès l'Antiquité, les peuples qui pratiquaient le commerce maritime ont cherché les moyens de se procurer la sécurité indispensable à leurs entreprises. Ce sont les périls de la mer qui ont révélé aux hommes la nécessité d'une assistance mutuelle, fondement du principe de l'assurance. Les Phéniciens pratiquaient une convention aux termes de laquelle, en cas de perte par fortune de mer, l'emprunteur était dispensé du remboursement de la somme prêtée sur le navire ou la cargaison, à charge de verser au prêteur, en plus de la restitution du principal, un intérêt extraordinaire, si l'expédition arrivait à bonne fin.

Aujourd'hui, l'assurance du transport maritime joue un rôle très important car 90% du commerce mondial est transporté par la voie maritime.

### ii. Les sous-branches

La branche Marine est divisée en deux sous-branches : Hull (assurance du corps de navire) et Cargo (assurance de la marchandise).

#### ✓ Hull

Cette sous-branche couvre le corps du navire assuré. Chez AXA CS elle contient 6 garanties :

- **Hull & Machinery** : couvre les dommages causés au corps du navire ou à son moteur
- **Loss of Hire** couvre la perte d'exploitation
- **Increased Value** couvre le propriétaire du navire contre la différence entre la valeur assurée et la valeur du marché du navire
- **War risks** couvre les risques de guerre ainsi que le risque de piraterie
- **Gear, Equipment** couvre les dommages causés à l'équipement du navire
- **Freight** couvre la perte d'exploitation future du propriétaire du bateau en cas de la perte totale de celui-ci

#### ✓ La sous-branche Cargo

L'assurance Cargo est la forme la plus ancienne de l'assurance maritime. Elle couvre l'assuré contre le risque de perte de la marchandise qui est transportée d'une destination à une autre. Généralement l'assurance Cargo couvre aussi le transport sur terre et les stockages. En effet, la marchandise assurée par Marine Cargo peut être transportée que par la voie terrestre et ne jamais voir l'eau.

### iii. Quelques chiffres en Marine

- 483 millions d'euros de chiffre d'affaire pour 2012 dont 76% en Marine Cargo (367,08 millions d'euros)
- 23% de chiffre d'affaire d'AXA CS en 2012

- 70% du portefeuille souscrit comme leader
- Marine Cargo couvre 25% de 100 plus grosses sociétés du monde
- Marine Hull couvre 25% du tonnage mondial

### 3) Marine Facultés (Cargo)

L'assurance Facultés couvre la marchandise en tant que telle lors de son transport ou stockage. L'assureur vérifie que le sinistre s'est produit dans les conditions prévues par la police et indemnise le bénéficiaire de l'indemnité d'assurance sans s'interroger sur la responsabilité du transporteur. D'où l'intérêt de ce type d'assurance « Ad valorem », qui permet au bénéficiaire de l'indemnité d'obtenir indemnisation de son préjudice lorsque dans certains cas le transporteur est mis, totalement ou partiellement, hors de cause : soit par les limites de responsabilité (2,71€ par kilogramme de marchandise transportée par bateau et 23,06€ par kilogramme de marchandise transportée par avion) , soit par les exonérations de responsabilité du transporteur (vice caché, faute nautique et propre du navire, grève, incendie).

#### i. Les garanties

Chez AXA CS la marchandise est généralement assurée de porte à porte, c'est-à-dire dès sa sortie de l'usine (même si elle reste dans les prémisses de l'usine) jusqu'au moment où la marchandise est reçue par son destinataire. Ceci implique qu'au risque du transit s'ajoute le risque de stockage. L'assurance Marine Cargo est étroitement liée à l'Assurance dommage car elle couvre en général la partie dommage à la marchandise. Cette couverture étant moins chère que l'assurance dommage, de plus en plus de polices couvre la marchandise jusqu'au stockage devant l'usine et dans l'entrepôt.

L'assurance Cargo contient deux garanties : garantie Dommage et quelques garanties Responsabilité Civile.

- La garantie Dommage n'a pas de limites ni d'exonérations qui sont présentes dans la garantie Responsabilité Civile et elle permet de se protéger contre le défaut de garantie de transport. La garantie dommage à la part AXA CS est néanmoins limitée à 60 millions d'euros.
- La garantie Responsabilité Civile couvre la responsabilité des transporteurs. Ce type de garantie a des limites. Ces limites sont mesurées par les DTS.

**DTS** (Droit de Tirage Spécial) en transport, désigne une unité de compte du Fonds Monétaire International (FMI) dont la valeur est déterminée périodiquement par ce dernier, à partir du cours de plusieurs monnaies de référence. A titre d'illustration, le cours de DTS au 23.08.2013 était 1 DTS = 1,3356 €

La responsabilité d'un transporteur est donc limitée à 2 DTS (2,71€) par kilogramme de marchandise transportée par bateau et à 17 DTS (23,06) par kilogramme de marchandise transportée par avion. Nous trouvons aussi dans la garantie Responsabilité Civile les exonérations qui portent sur la force majeure, la faute de l'expéditeur et le vice propre de la marchandise.

Dans le portefeuille d'AXA CS nous trouvons majoritairement la garantie Dommage sauf quelques cas exceptionnels, quand il s'agit d'assurer les déménageurs et les transporteurs où on peut avoir la garantie Responsabilité Civile.

## ii. Les formules de garantie

Les assureurs maritimes proposent deux types de garantie :

- L'assurance « tous risques » couvre tous les dommages et pertes matériels causés aux objets assurés pendant le voyage (y compris les pertes de poids ou de quantité), sous réserve des exclusions et limitations du contrat
- L'assurance « FAP sauf » (Franc d'Avaries Particulières sauf celles résultant d'un événement majeur énuméré dans la police) est plus restrictive et couvre seulement les risques qui sont cités dans le contrat. Il s'agit de tous les « événements majeurs » du transport : naufrage, abordage, catastrophe naturelle, etc.

## iii. Les risques assurés

Les contrats d'assurance Marine Cargo peuvent porter sur les différents risques affectant la marchandise transportée :

- *Les avaries particulières* sont les dommages et pertes matériels, manquants, pertes de poids ou de quantité subis par les marchandises résultant de :
  - événement « majeur » qui frappe le Hull et le Cargo
  - accident affectant uniquement la marchandise (casse, mouille, désarrimage, souillure, vol, disparition)
  - manutentions (chargement/déchargement, manipulation en cale, transbordement), des séjours à quai ou en entrepôts
- *Les avaries communes* sont un risque spécial. En droit maritime, l'avarie commune est une règle qui a pour but de répartir entre les propriétaires du navire et de la cargaison les sacrifices (dommages ou dépenses) résultant de mesures prises volontairement et raisonnablement par le capitaine pour le salut commun de l'expédition et qui ont eu un résultat utile<sup>2</sup>. Donc, en cas de dommage au navire ou de perte totale de celui-ci et de la perte de la cargaison, si le navire a été déclaré en état d'avarie commune l'assureur devra s'acquitter de la valeur assurée de la cargaison et de payer une contribution pour le navire au prorata de la valeur de ses marchandises. Il arrive parfois que la cargaison a été livrée en parfait état mais le navire a été déclaré en avarie commune et donc l'assureur de la cargaison payera la contribution pour le navire.

## iv. Types de polices

Nous distinguons trois types de polices en assurance Cargo, autrement appelé Facultés :

- Police au voyage
- Police à alimenter
- Police d'abonnement ou police flottante

---

<sup>2</sup> Fédération Française des Sociétés d'Assurances

**Police au voyage** couvre des marchandises et un trajet déterminés et convient donc plutôt pour les expéditions occasionnelles.

**Police à alimenter** couvre la quantité déterminée de marchandise pour la durée indéterminée, ce qui signifie qu'elle couvre les expéditions échelonnées sur une période indéterminée. Avant chaque envoi l'assureur est informé de la nature, de la composition et de la valeur de l'expédition.

**Police d'abonnement ou police flottante** est conclue d'avance et pour une période déterminée. Ce type de police a pour objet essentiel de couvrir tous les envois faits par le même expéditeur quels que soient les marchandises, les modes de transports et les lieux de départ ou de destination. Parfois, les limites des envois sont fixées à la demande de l'assuré lui-même.

Dans le portefeuille d'AXA CS nous trouvons principalement 2 types de polices :

- Police d'abonnement à l'année
- Police au voyage

La limite de souscription est de 60 millions d'euros par expédition.

## v. Trade Sectors

Pour mieux répondre aux besoins de ses clients AXA Corporate Solutions a instauré l'approche par Trade Sectors. Ainsi, chaque contrat est classé dans un secteur et un client peut intervenir sur différents secteurs.

Ces Trade Sectors (TS) sont les suivants :

- Automotive
- High Tech
- Industrial Products
- JB/Luxury/Valuable
- Logistics
- Oil
- Pharma/Chemistry
- Pre-launch
- Project Cargo
- Removals
- Trading Commodities except Oil

**TS Automotive** : Ce secteur regroupe les constructeurs de véhicules légers (voitures, motos, etc...), les fournisseurs des produits industriels relatifs aux véhicules et les importateurs indépendants. La valeur assurée est la valeur de marché est non la valeur de production.

**TS High Tech** : Nous trouvons dans ce secteur des produits de haute technologie comme les ordinateurs, téléphones portables etc...

**TS Industrial Products (Produits Industriels)** : Les marchandises qui n'ont pas pu être classé dans aucun des autres Trade Sectors se trouvent dans ce secteur.

**TS JB/Luxury/Valuable** : JB (Jewelry Block) couvre le transport des bijoux, Luxury couvre le transport des produits de luxe comme les vêtements, les sacs les accessoires, etc. Et enfin Valuable couvre le transport des billets, de l'or.



**TS Logistics :** Nous trouvons dans ce secteur les sociétés de transport qui proposent leurs services aux entreprises. Dans ce secteur on peut transporter n'importe quelle marchandise.

**TS Oil :** Ce TS couvre le transport du pétrole, gaz, GPL (Gaz de Pétrole Liquéfié) et LNG (Liquified Natural Gas). La police ne couvre pas les pipelines et les plateformes pétrolières, en revanche elle couvre les raffineries.

**TS Pharma/Chemistry :** Les produits pharmaceutiques et certains produits chimiques finis

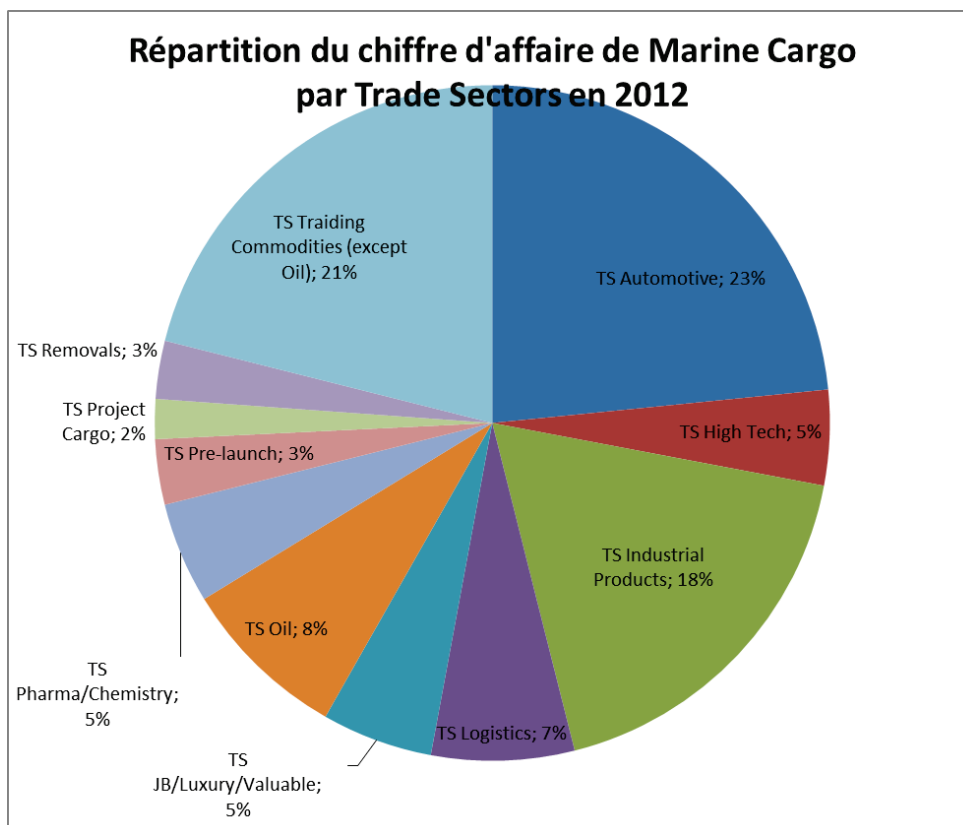
**TS Pre-launch :** Le transport des satellites, des fusées jusqu'à leur lancement est assuré par ce secteur.

**TS Project cargo :** Nous trouvons dans ce secteur le transport des marchandises nécessaires pour le projet de construction (par exemple usine, aéroport, etc.).

**TS Removals :** Ce type de secteur représente les déménageurs, c'est-à-dire les sociétés qui s'engagent à déménager les biens des particuliers et des entreprises.

**TS Trading Commodities except Oil :** Ce secteur contient deux subdivisions: Hard Commodities (minéraux, produits chimiques non finis) et Soft Commodities (riz, grain, engrais, sucre, cacao, etc...). Les traders en tant que négociateurs dans ce domaine sont aussi couverts par ce type de secteur.

La répartition du chiffre d'affaire de la branche Marine Cargo par Trade Sectors en 2012 était la suivante :



**Figure 1** La répartition du chiffre d'affaire de la branche Marine Cargo de 2012 par Trade Sectors

AU vu de ce camembert, nous remarquons que les secteurs qui ont participé le plus au chiffre d'affaire de 2012 de la Marine Cargo d'AXA CS sont Automotive (avec 23% du CA), Trading

Commodities except Oil (avec 21% du CA) et Industrial Products (avec 18% du CA). A eux seuls, ces secteurs représentent 62% du chiffre d'affaire de 2012 de la sous-branche Marine Cargo d'AXA CS.

## vi. Les faits majeurs

D'après le rapport de 2012 publié par Willis sur la Marine, il y a eu cette année de gros sinistres, notamment la disparition et dommage aux radars militaires en Afrique du Nord coutant 140 millions de dollars. Il y a eu lieu également un détournement de 140 000 MT de soja en Indonésie ayant couté 93M de dollars.<sup>3</sup>

Nous avons également eu un vol de bijoux dans l'hôtel Carlton à Cannes le 28 juillet 2013. La perte est estimée à 103 millions d'euros.

## B. Notions

Dans ce paragraphe nous allons présenter les notions qui définissent le cadre de notre étude et qui serviront d'appui. Nous introduirons les notions du capital économique de Solvabilité II, la value at Risk et la Tail Value at Risk, la réassurance et les différents types de réassurance, l'assurance facultative, la coassurance et la notion de sinistres graves qui est au centre de notre étude.

### 1) Solvabilité II et le capital économique

Le premier pilier de la nouvelle directive Solvabilité II impose l'immobilisation du capital nécessaire pour absorber les chocs exceptionnels. Les assureurs doivent donc mesurer et maîtriser les risques qu'ils encourent. Pour ce faire, ils doivent évaluer le SCR (Solvency Capital Requirement) qui représente le capital cible nécessaire pour absorber le choc provoqué par une sinistralité exceptionnelle qui se produit tous les 200 ans. Ce calcul peut se faire par deux méthodes, soit par la formule standard, définie par les directives, soit par un modèle interne mieux adapté au profil de risque de la compagnie.

Ainsi, notre modèle des sinistres graves pour la Marine Cargo a été développé dans le cadre du développement du modèle interne afin d'estimer le STEC (Short Term Economic Capital), le capital à immobiliser pour les sinistres de la branche Marine Cargo pour l'année 2014.

Selon CEIOPS (Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors) la formule standard pour calculer le montant global du SCR est la suivante<sup>4</sup> :

$$SCR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j}$$

---

<sup>3</sup> Willis, *Marine Market Review - Beyond the Horizon*, April 2012, [http://www.willis.com/Documents/Publications/Industries/Marine/10412\\_MARINE\\_MARKET\\_REVIEW\\_2012\\_Low\\_res.pdf](http://www.willis.com/Documents/Publications/Industries/Marine/10412_MARINE_MARKET_REVIEW_2012_Low_res.pdf)

<sup>4</sup> CEIOPS' *Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II : SCR Standard Formula*, CEIOPS, janvier 2010, p.4

Où  $SCR_i$  est le Solvency Capital Requirement pour le module de risque  $i$ ,  $SCR_j$  est le SCR pour le module de risque  $j$  et  $Corr_{i,j}$  est une matrice de corrélation des combinaisons de modules de risque  $i$  et  $j$  de sorte que toutes les combinaisons de  $i$  et  $j$  sont prises en compte. Un exemple de module de risque est le module Non-Life (Non Vie)

La matrice des corrélations de la formule Standard est représentée comme suit :

i,j	Market	Default	Life	Health	Non-Life
Market	1	0.25	0.25	0.25	0.25
Default	0.25	1	0.25	0.25	0.5
Life	0.25	0.25	1	0.25	0
Health	0.25	0.25	0.25	1	0
Non-Life	0.25	0.5	0	0	1

Dans cette matrice chaque chiffre correspond au coefficient de corrélation  $\rho$  défini comme suit pour les deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  :

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

Où  $Cov(X,Y)$  est la covariance entre  $X$  et  $Y$ ,  $Var(X)$  est la variance de  $X$  et  $Var(Y)$  est la variance de  $Y$ .

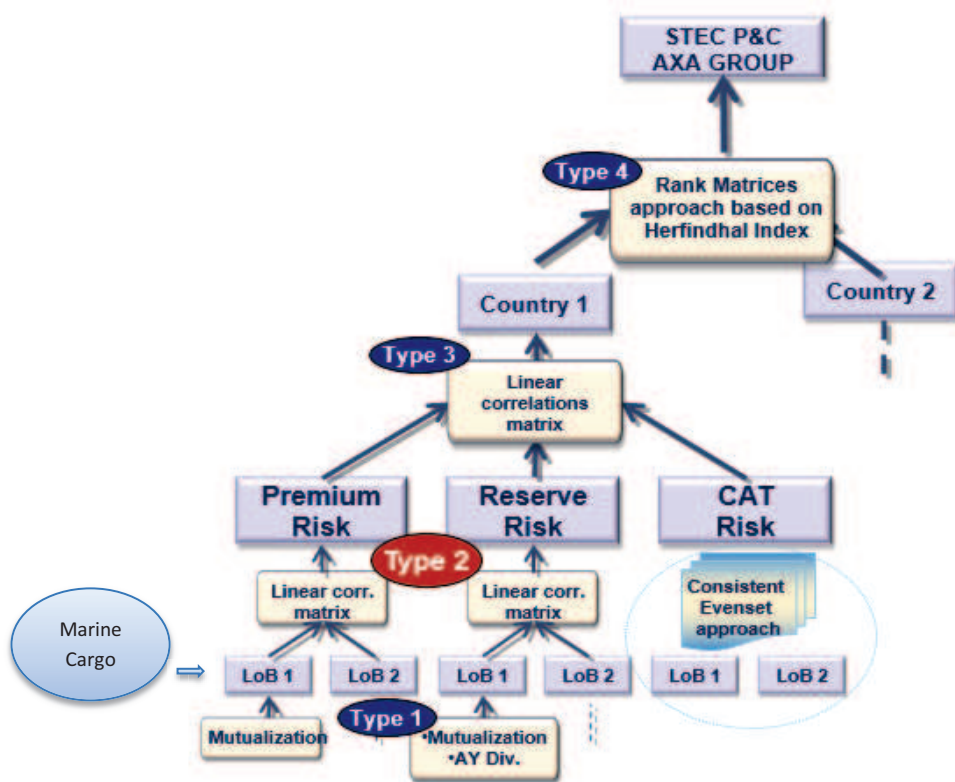
Ensuite, le SCR de chaque module de risque est calculé selon la formule :

$$SCR_{Non-Life} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j}$$

Où  $SCR_i$  dans cette formule représente un sous-module de risque  $i$  et  $SCR_j$  un sous-module de risque  $j$ .  $Corr_{i,j}$  est une matrice de corrélations du module Non-Life comprenant toutes les combinaisons de  $i$  et  $j$ . Par exemple,  $SCR_{Non-Life\ premiums}$  est un sous-module de risque de primes.

Le  $SCR_{Non-Life}$  à son tour se décompose en  $SCR_{Non-Life\ premiums\ and\ reserves}$  (le module Non-Vie pour le risque de primes et de réserves) et en  $SCR_{Non-Life\ catastrophe}$  (le module Non-Vie comprenant le risque de catastrophe).

Dans le cadre du modèle interne, le STEC global de Property and Casualty chez AXA CS dont fait partie la branche Marine Cargo est calculé selon le schéma ci-dessous :



Ainsi, selon le schéma, tout d'abord la simulation de 10 000 années s'effectue au niveau de LoB (Line of Business), dans notre cas c'est la Marine Cargo. Suite aux simulations, le montant du STEC est calculé à partir du quantile à 99,5%:

$$STEC = q_{99,5\%}(X) - E(X)$$

Où X est une variable aléatoire mesurant la perte

Ensuite, les montants du STEC obtenus pour les différents Lines of Business qui font partie du risque des primes servent à calculer le STEC du risque de primes selon la formule suivante :

$$STEC_{Premium} = \sqrt{{}^t(STEC_{Premium, LoB i})\Sigma(STEC_{Premium, LoB i})}$$

Où  $\Sigma(STEC_{Premium, LoB i})$  est la matrice de corrélations qui est fournie par le régulateur obtenue par les QIS5 (Quantative Impact Studies) et  ${}^t(STEC_{Premium, LoB i})$  est le vecteur des montants de STEC pour le risque de primes pour chaque Line of Business (LoB) le composant.

En remontant plus haut dans le schéma, le  $STEC_{pays}$  est calculé selon la formule suivante :

$$STEC_{pays} = \sqrt{{}^t(STEC_{pays, risk type})\Sigma(STEC_{pays, Risk type})}$$

Où  $STEC_{pays, Risk type}$  est le SCR d'un pays et d'un type de risque et  $\Sigma(STEC_{pays, Risk type})$  est la matrice de corrélations entre les types de risque (primes, réserves et catastrophe) et  ${}^t(STEC_{pays, Risk type})$  est le vecteur des montants de STEC pour le payé donné pour chaque type de risque.

Enfin, nous obtenons le STEC global de P&C en intégrant l'index de Herfindhal qui est un indice mesurant la concentration du marché. Il est de la forme suivante :

$$H = \sum_{i=1}^n s_i^2$$

Où  $s_i$  est la taille de marché de l'entreprise  $i$  et  $n$  est le nombre d'entreprise sur le marché.

## 2) Value at Risk

Le montant de capital économique à immobiliser en cas de sinistralité extrême calculé via le modèle interne représente le montant minimum de fonds propres que la compagnie doit posséder afin de faire face à la ruine à l'horizon d'un an avec une probabilité de 99,5%.

Si nous notons  $X$  la variable aléatoire de coût des sinistres de la branche Marine Cargo nous pouvons définir le quantile 99,5% de la distribution de la variable aléatoire  $X$  représentant le montant des pertes comme une valeur  $x$  telle que:

$$P(X \leq x) \geq 99,5\%$$

En d'autres termes cette inéquation signifie que dans 99,5% des cas les pertes éventuelles du portefeuille ne dépasseront pas le montant du quantile à 99,5%

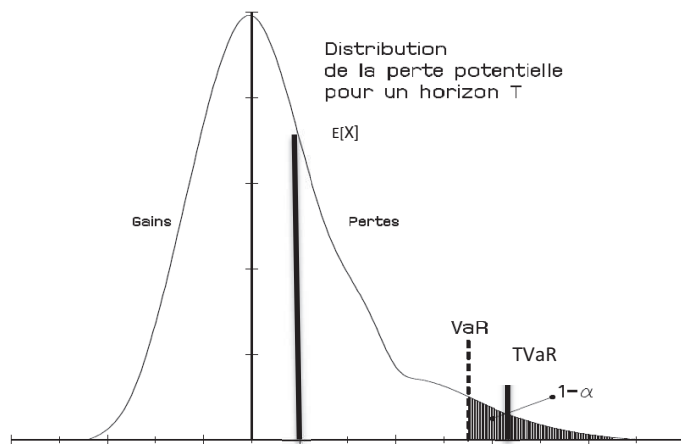
Ce montant est égal à **la Value at Risk** à 0,5%

**Définition :** Nous définissons la Value at Risk pour un niveau de risque  $X$  et un niveau de probabilité  $\alpha \in (0, 1)$  étant :

$$VaR[X; \alpha] = F_X^{\leftarrow}(\alpha) = \inf\{x, \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\} = q_{99,5\%}(X)$$

où  $F$  est la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$  qui mesure les pertes.

La VaR indique le niveau qui est dépassé dans les  $(1 - \alpha)\%$  des cas.



Sur cet exemple nous distinguons bien l'espérance des pertes ( $E[X]$ ), la Value at Risk et la Tail Value at Risk qui est supérieure à la VaR.

Nous souhaitons ainsi estimer le montant de capital minimum nécessaire à AXA CS pour pouvoir continuer son activité. Donc le but principal de cette modélisation est l'estimation du SCR pour la branche Marine Cargo.

En supposant que nous connaissons la loi de coût de X, nous pouvons calculer le SCR de manière suivante :

$$SCR = q_{99,5\%}(X) - E(X)$$

Avec  $q_{99,5\%}(X)$  le quantile à 99,5% et  $E(X)$  l'espérance de X

D'après la formule le SCR correspond au montant qui doit être mis en réserve en plus des provisions pour absorber le sinistre se produisant 1 fois dans 200 ans. Pour ce faire nous calculons le quantile à 99,5% et nous enlevons de ce montant l'espérance qui correspond au montant des provisions pour les sinistres de risque moyen.

Le STEC est l'indicateur du risque de notre portefeuille. Il correspond à la déviation de la charge sinistres par rapport au risque moyen selon le pire des scénarii de durée 1 an et dont la fréquence est de 1 fois sur 200 ans (quantile à 99,5%). Un événement qui se produit une fois en 200 ans est appelé un **événement bicentenaire**.

Dans notre modèle notre but est de calculer le montant du STEC de l'atypique qui représente le montant à mettre en réserve pour pouvoir absorber la déviation de la sinistralité moyenne due à un événement bicentenaire affectant l'atypique.

Ainsi, STEC représente le SCR sous Solvabilité II. En effet, le SCR est une appellation réservée à la formule standard, alors que le STEC est utilisé par le modèle interne.

Malgré la simplicité relative de la VaR ce n'est pas une mesure parfaite du risque. Cela est dû aux différentes raisons :

- La VaR mesure le risque en utilisant qu'un seul nombre et ne nous donne pas d'information sur la sévérité au-dessus de la VaR
- La Value at Risk ne vérifie pas la propriété<sup>5</sup> de sous-additivité

Les mesures de risques possèdent un certain nombre de propriétés :

- Invariance par translation  
Soit  $X$  un risque alors  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  nous avons:  $\rho(X + \alpha) = \rho(X) - \alpha$
- Sous-additivité  
Soient  $X_1, X_2$  deux risques  $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$
- Homogénéité positive  
 $\forall \lambda \geq 0$  et  $\forall X$   $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$
- Monotonie  
Soient  $X$  et  $Y$  deux risques avec  $X \leq Y$  alors  $\rho(X) \leq \rho(Y)$

Une mesure de risque est considérée comme *une mesure de risque cohérente* au sens d'Artzner, si elle possède les 4 propriétés citées ci-dessus. Donc, la Value at Risk n'est pas une mesure de risque cohérente.

### 3) Tail Value at Risk

La VaR présente certaines limitations, en particulier, la VaR à 99,5% nous indique le niveau qui est dépassé dans les 5% des cas. Mais cela ne nous donne aucune indication sur la distribution des pertes au-delà de ce seuil. De plus, la VaR n'est pas sous-additive. La Tail Value et Risk est une alternative à la VaR dans le sens où elle nous donne une idée sur la sévérité de la distribution au-delà de VaR. TVaR est la perte moyenne au-delà d'un seuil fixé  $\alpha$ . Elle est définie par :

$$TVaR[X; \alpha] = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 VaR[X; \beta] d\beta$$

Où  $X$  est un niveau de risque et  $\alpha$  un niveau de probabilité compris entre 0 et 1.

La raison pour laquelle la VaR n'est pas une mesure cohérente du risque est la non sous-additivité. Or, la TVaR satisfait cette propriété ce qui fait d'elle une mesure de risque cohérente satisfaisant les 4 propriétés (la monotonie, l'invariance par translation, l'homogénéité positive et la sous-additivité).

### 4) La réassurance

En vue de réduire la probabilité de faillite, l'assureur peut souscrire un traité de réassurance.

*La réassurance* est une opération de transfert de risque par une compagnie d'assurance vers une compagnie de réassurance en échange d'une prime. Elle peut se faire de façon obligatoire ou facultative.

---

<sup>5</sup> *Coherent Measures of Risk*, Artzner, Delbaen, Eber et Heath. 1998. p.13

La réassurance donc permet à l'assureur :

- de se couvrir contre les risques les plus dommageables comme les risques de catastrophes et de lisser son résultat
- de transférer les risques de fréquence et de sévérité
- d'optimiser ses fonds propres
- de mieux répondre aux contraintes de marge de solvabilité
- d'avoir une Expertise en risk management
- de financer les coûts d'acquisition

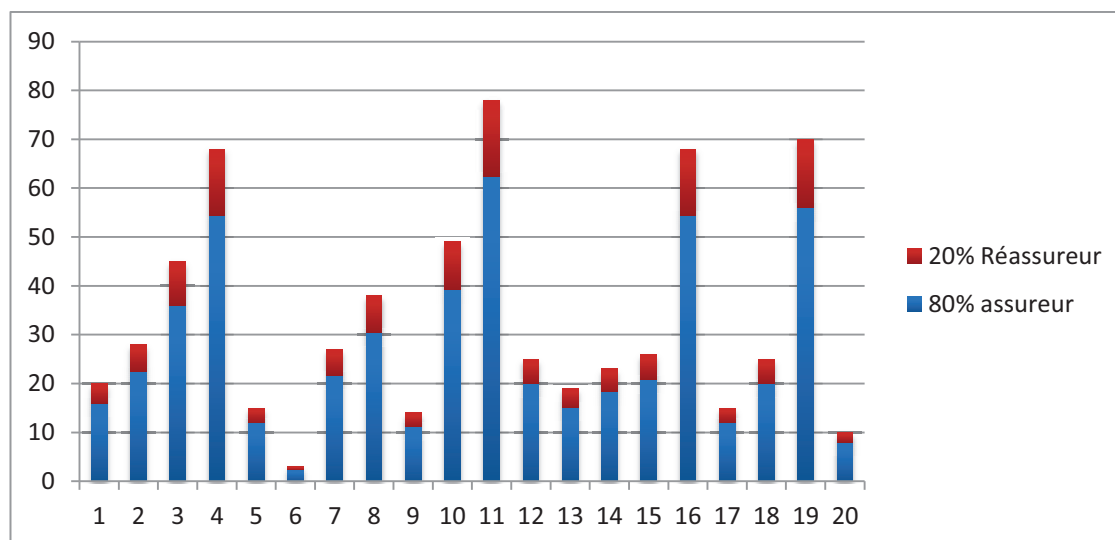
L'utilité de la réassurance pour la société est indéniable, car elle permet de diversifier les risques à l'échelle mondiale.

Nous pouvons diviser la réassurance selon la forme en proportionnelle et non proportionnelle.

### i. La réassurance proportionnelle

Dans le cas de la réassurance proportionnelle, l'assureur cède une partie (x %) du risque au réassureur et lui verse en contrepartie le même pourcentage (x%) de prime. La réassurance proportionnelle se divise en Quote Part (Quota Share) et en Excédent de Plein(Surplus).

- ✓ En Quote Part, l'assureur cède le même pourcentage du risque pour chaque police dans son portefeuille et paye pour chaque police le même pourcentage de prime au réassureur



**Figure 2 La réassurance en Quote Part avec la cession de 20% de risque au réassureur**

Sur ce graphique nous avons présenté un exemple de Quote Part avec le taux de cession de 20%. Par exemple, pour un sinistre de 70 000 € le réassureur prend en charge que 20% de 70 000 € ce qui correspond à 14 000 € le reste étant à charge de l'assureur (56000 euros). Il en va de même pour la



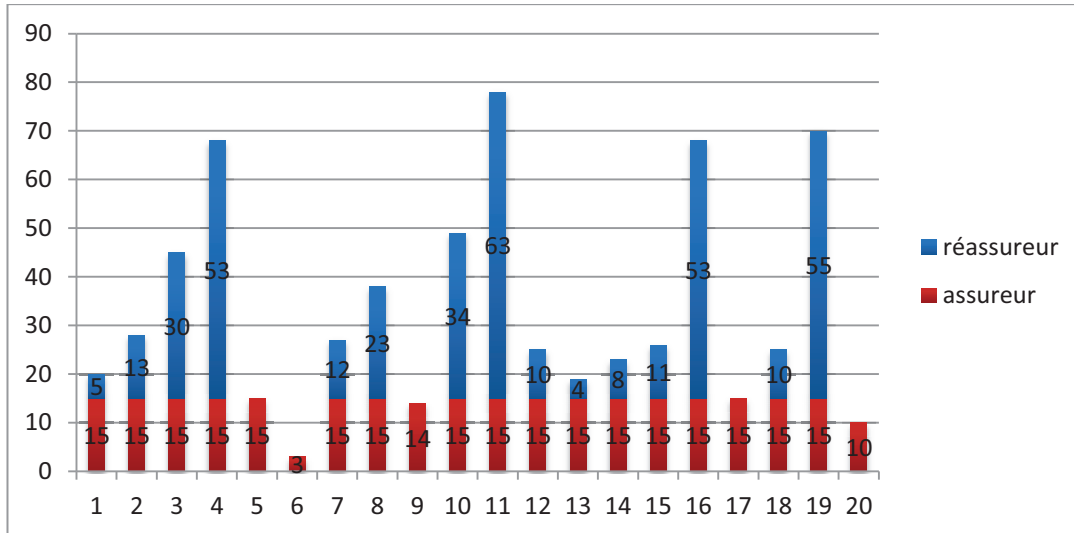
prime, si la prime s'élève à 1 000 €, alors la partie de prime, cédée au réassureur s'élève à 200 € le reste allant à l'assureur (800 €).

- ✓ En Excédent de Plein, l'assureur cède pour chaque police une part de risque excédant un seuil appelé la rétention et jusqu'au maximum.  
Maximum = Rétention\*Nombre de layers

Layer 9	120
Layer 8	105
Layer 7	90
Layer 6	75
Layer 5	60
Layer 4	45
Layer 3	30
Layer 2	15
Layer 1	0

Ce schéma nous illustre la présentation des layers chacun étant à 15 millions.

Nous déduisons le pourcentage cédé en faisant le rapport entre la rétention et la cession en réassurance.



**Figure 3 La réassurance en Excédent de plein, Rétention =15 M**

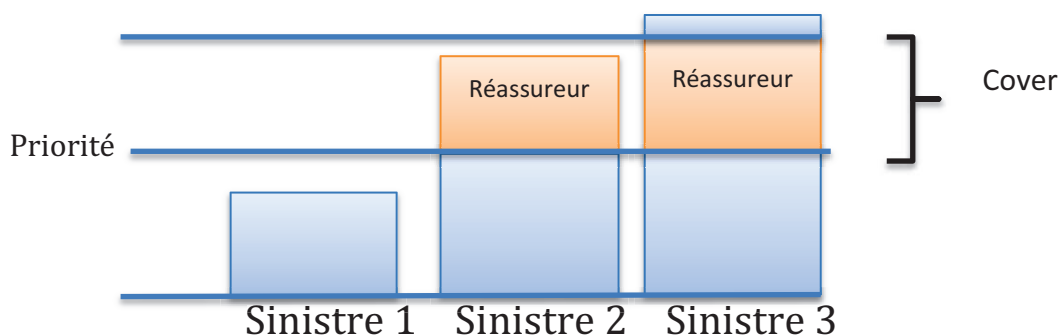
Par exemple, sur ce graphique nous avons les sinistres avec le programme de réassurance Excédent de plein avec la rétention de 15 millions, ce qui veut dire que la partie du sinistre supérieure à 15millions reste à la charge de réassureur. L'assureur, en revanche prend en charge le montant inférieur ou égal à 15 millions de chaque sinistre.

## ii. La réassurance non proportionnelle

Comme le nom indique, dans le cas de réassurance non proportionnelle la cession se fait de façon non proportionnelle. Nous y trouvons la réassurance en Excédent de sinistre (Excess of Loss) et Stop Loss.

### ✓ Excédent de sinistre (Excess of Loss)

Lors de la survenance d'un sinistre le réassureur paye une partie du montant qui excède un seuil appelé la Priorité (Deductible) et dans la limite de la Capacité (Cover ou Portée)



Nous notons Capacité XL Priorité. Par exemple, un programme de réassurance 10 XL 5 correspond au programme où en cas de sinistre du montant supérieur à 5 millions d'euros, l'assureur prend en charge la partie du montant supérieur à 5 millions et il payera au maximum 10 millions d'euros.

### ✓ Stop Loss

En stop Loss, la réassurance s'applique de la même manière qu'en Excess of Loss, mais sur le montant annuel des sinistres. Nous notons Portée Stop Loss Priorité. La portée et la priorité peuvent s'exprimer en montants, en pourcentage de primes ou en pourcentage de la somme assurée totale. Cette couverture est très fréquente en Agriculture (grêle, etc.) car elle couvre la fréquence et la sévérité en même temps.

## 5) L'assurance facultative et la coassurance

L'assureur ne peut souscrire une police couvrant au-delà d'un certain montant. S'il veut tout de même souscrire le risque, il se présente deux solutions : la coassurance et l'assurance facultative.

### i. La coassurance

➤ *La coassurance* est une opération permettant aux plusieurs compagnies d'assurance de souscrire un ou plusieurs risques en faisant recours au seul contrat.

La coassurance permet, alors, de diviser le risque en parts entre les différents assureurs. Ceci implique que chaque compagnie d'assurance participant dans ce contrat, percevra une part de prime qui correspondra au pourcentage de son engagement dans la couverture totale du risque. Donc, en cas de survenance de sinistre chaque coassureur sera tenu d'indemniser le bénéficiaire du contrat le montant correspondant à la part de son engagement dans le montant du sinistre total. De plus, si un des coassureurs ne paye pas sa part, les autres coassureurs ne seront pas tenus de régler ce montant à sa place.

Pour illustrer l'opération de coassurance prenons un exemple de 3 compagnies d'assurance, A, B et C qui coassurent le risque de grêle dans le parking en transport des voitures. La compagnie A s'engage sur 40% du risque, B sur 50% et C sur 10%. Si la prime totale s'élève à 10000 euros, alors A reçoit 4000 euros de prime, B reçoit 5000 euros et C en reçoit 1000. Le parking coassuré subit un orage accompagné de grêle et le dommage aux voitures stockées s'élève à 1 million d'euros. Alors, A va payer 400 000 euros d'indemnité, B va devoir payer 500 000 euros et C 100 000 euros.

### ii. L'assurance facultative

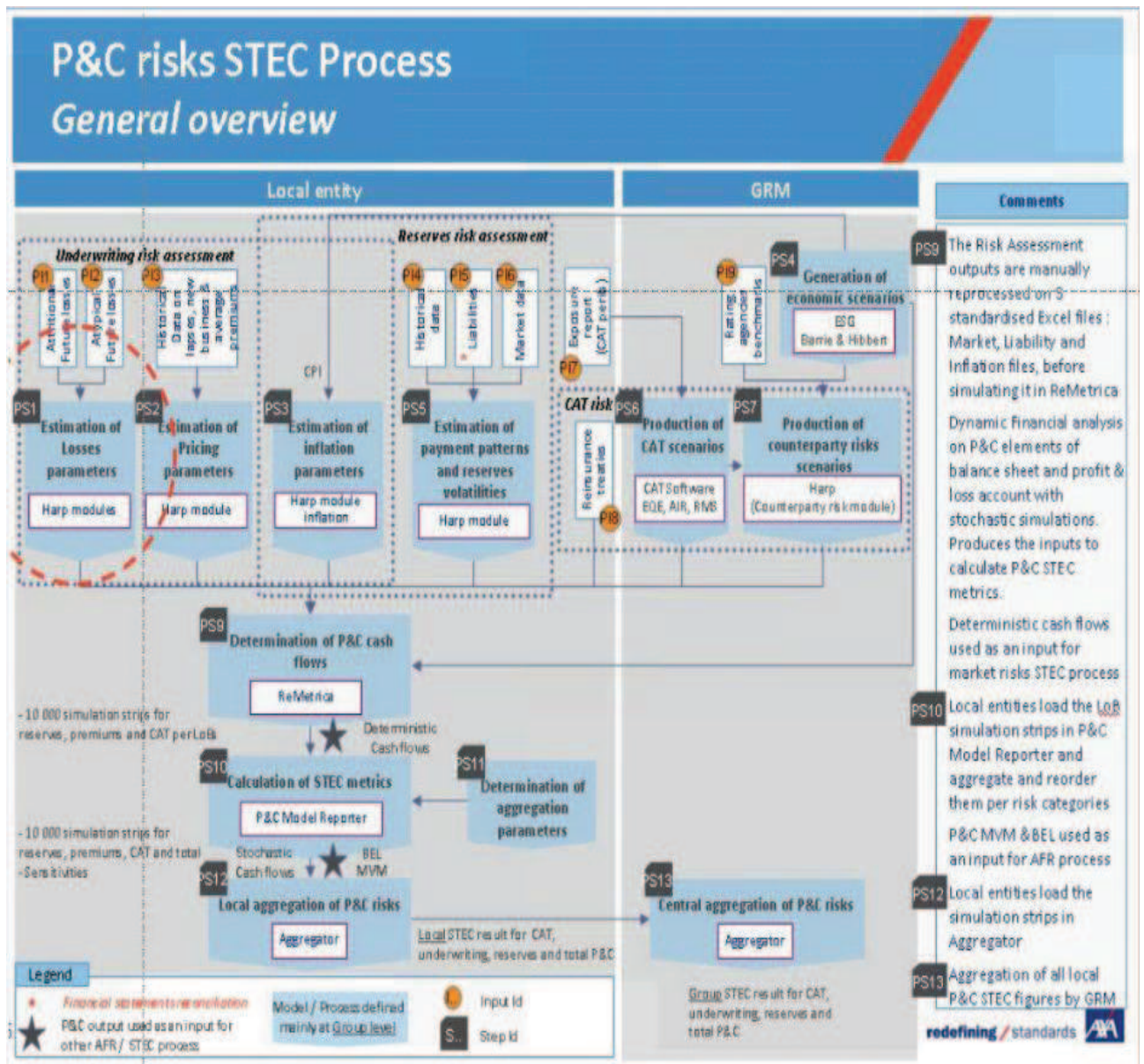
Elle consiste en sélection par l'assureur de certains clients couverts par la police et en rétrocession d'une partie de leur garantie à d'autres assureurs. Ceci peut se faire de manière proportionnelle ou non proportionnelle par le moyen d'un traité de réassurance Excess of Loss vu dans le paragraphe sur la réassurance proportionnelle.

## 4) Sinistres graves

Au sein du service Modèle Interne nous distinguons les sinistres par l'importance de leur sévérité en sinistres dits « attritionnels » et les sinistres dits « graves ». Les sinistres attritionnels sont les sinistres, dont le montant est inférieur à un certain seuil fixé par le modèle interne et les sinistres graves sont ceux au-dessus de ce seuil. Cette séparation est très importante les sinistres attritionnels ne suivent pas la même loi de fréquence et de coût que les sinistres graves.

Chez AXA CS, le seuil de la séparation des sinistres entre attritionnels et graves se situe à 3 millions d'euros net de facultatives et de captives. La notion des sinistres graves est au cœur de notre modélisation. En effet, la charge sinistre que nous allons calculer par la suite ne concerne que les sinistres de sévérité extrême.

Le processus de l'évaluation du risque qui intègre une modélisation des sinistres atypiques ou graves est représenté par ce schéma :



Ce schéma représente le processus du calcul du STEC (Short Term Economic Capital) d'AXA CS. En ce qui est l'évaluation du risque des extrêmes, nous nous situons en module PI2 au-dessus du cercle rouge qui correspond à l'évaluation du risque de souscription pour les sinistres atypiques. Nous remarquons que le STEC des sinistres attritionnels (module PI1) est calculé à part. Ainsi, les résultats de la modélisation des sinistres graves serviront de base de la simulation de 10 000 années pour en déterminer ensuite le montant du STEC et pour étudier l'efficacité de réassurance. Dans le module PI3 nous retrouvons le risque portfolio qui correspond au risque lié aux primes.

## C. Introduction au sujet

Le but de ce mémoire est de mesurer le risque des sinistres extrêmes hors les catastrophes naturelles via la méthode par exposition pour la branche Marine Cargo. Cette modélisation a pour but de calculer le capital économique à immobiliser dans le cadre des exigences du pilier I de la Solvabilité II. Le calcul de ce capital à immobiliser imposé par l'ACP se base sur le calcul de la Value at Risk à 99,5%. Or cette mesure de risque n'étant pas cohérente, il serait intéressant de calculer le capital économique à immobiliser via la Tail Value at Risk, qui est une mesure de risque cohérente.

Dans un premier temps, nous allons faire une modélisation du risque par exposition qui consiste en modélisation séparée des deux paramètres, la fréquence et le coût moyen. Cette méthode repose sur l'hypothèse de l'indépendance entre ces deux paramètres qui est nécessaire d'être vérifiée par le test de Spearman. Comme nous faisons notre modèle en affinant par trade secteurs, alors nous allons modéliser chaque paramètre du modèle par trade secteur afin d'obtenir un modèle plus fin et de challenger le modèle historique qui modélise les sinistres atypiques au global sans distinction par secteurs d'activité. Comme pour certains secteurs d'activité nous n'avons pas suffisamment de sinistres nous allons faire un regroupement de ces secteurs en utilisant les différents outils de l'analyse de données et les vision des différents équipes ( souscription, tarification, contrôle de gestion) afin de pouvoir tenir compte de la sinistralité et la nature du risque de chaque secteur.

Avant de procéder à la modélisation de la fréquence et de coût nous allons déterminer le seuil des sinistres graves grâce à la théorie des valeurs extrêmes qui propose la méthode de calcul du seuil POT (Peaks Over Threshold) qui sera explicitée dans la deuxième partie du mémoire. Nous ferons notre modélisation à partir des sinistres dont le coût dépasse le seuil déterminé en prenant en compte le coût à 100% net d'inflation, brut de franchise et de réassurance.

Afin de modéliser la fréquence, nous allons retraiter le nombre de sinistres moyen annuel des sinistres inconnus par l'assureur mais qui sont déjà survenus (IBNYR). De plus nous ferons un rescaling de la fréquence par rapport aux primes (calcul Aslf 2013). Nous faisons remarquer que dans la suite du mémoire nous appellerons la fréquence le nombre de sinistres. Nous allons ensuite déterminer pour chaque secteur ou un groupe de secteurs la loi de fréquence associée parmi la loi e

Poisson et la loi Binomiale Négative qui sont les lois classiques utilisées dans la modélisation des événements rares.

En ce qui concerne le coût moyen des sinistres graves, nous allons retraiter les montants par rapport à l'inflation en affinant par secteur d'activité les taux d'inflation de la période d'observation de 2006 à 2012. Nous allons donc estimer les paramètres afin de pouvoir déterminer pour chaque secteur la loi de probabilité. Pour faire notre choix nous allons nous baser sur les résultats des tests d'adéquation, des QQ-plots, la variance et la moyenne. Une fois que nous allons choisir nos lois de coût, nous allons en déterminer les Occurrence Exceedence Probability (OEP 1) courbes. Ces courbes vont former la première partie de nos OEP finales et donc seront utilisées pour les périodes de retour faibles. Par la suite nous allons faire des simulations de sinistres pour chaque trade secteur ou chaque groupe de trade secteurs en partant des données fournies par l'équipe de souscription.

Pour effectuer ces simulations nous allons déterminer pour chaque trade secteur le risque le plus impactant et en fonction du profil de risque de chaque secteur nous allons simuler 10 milles années et en déduire les courbes OEP 2. Ces OEP2 feront partie de nos OEP finales pour les périodes de retour élevées. Ceci va nous permettre d'obtenir la loi de coût finale à 100%.

Ensuite, nous allons procéder à la détermination de la loi de coût à part AXA CS en effectuant un tirage de la part en prenant en compte nos facteurs d'exposition (les primes et l'engagement). Cette procédure nous permettra d'obtenir une loi de coût à part AXA CS pour chaque trade secteur ou un groupe de trade secteurs.

L'étape suivante de notre modèle consistera en simulation de la fréquence et du coût grâce à l'outil ReMetrica. Une fois que la simulation sera achevée nous calculerons les montants de la VaR et de la TVaR pour pouvoir faire une comparaison entre ces deux mesures du risque et analyser l'impact du fait de calculer le STEC en prenant la TVaR.

## II. L'approche et les composantes de la modélisation

Dans cette partie de notre mémoire nous allons tout d'abord présenter les deux modèles principaux utilisés pour la modélisation, le modèle historique et le modèle par exposition. Nous analyserons les différences en explicitant pourquoi nous avons choisi le modèle par exposition.

Ensuite, nous allons préciser les données dont nous disposons pour développer notre modèle en attirant attention sur les bases de données propres à AXA CS et celles de Marché. Nous les analyserons afin de juger si toutes les bases de données sont utilisables.

Puis, comme nous ne disposons pas de suffisamment de données pour chaque trade secteur nous devons regrouper les secteurs avec peu de données. Nous allons utiliser les différentes méthodes de l'analyse de données comme l'ACP (Analyse en Composantes Principales), l'AFC (Analyse Factorielle des Correspondances) et la CAH (Classification Ascendante Hiérarchique). Nous allons aussi analyser la vision exposition pour l'intégrer dans notre choix de regroupement final.

Enfin, nous allons utiliser la théorie des valeurs extrêmes afin de déterminer le seuil de modélisation des sinistres graves. Pour cela nous allons présenter deux méthodes, la méthode par blocs et la méthode POT (Peaks Over Threshold). Nous allons comparer les deux méthodes et expliquer pourquoi nous avons choisi d'utiliser la méthode POT et nous allons appliquer cette méthode aux données de la Marine Cargo afin d'estimer le seuil de modélisations des sinistres graves.

### A. Modèle

#### 1) Introduction à la modélisation

Dans le cadre de la nouvelle réglementation Solvabilité II chaque assureur doit être capable de comprendre et de maîtriser les risques liés à son activité pour pouvoir mettre en réserve le montant minimum du capital nécessaire pour les couvrir.

Notre modélisation pourra répondre à cette nécessité de calculer le risque et évaluer le capital économique à immobiliser dans le cadre de modèle interne de la branche Marine Cargo.

Nous rencontrons deux types de modélisation : la modélisation historique et la modélisation par exposition. La modélisation historique tient compte de la sinistralité passée du portefeuille se reposant sur l'hypothèse que l'expérience passée est homogène dans le temps et le restera dans l'avenir. La modélisation par exposition, en revanche, se base sur le profil de risque actuel du portefeuille qui peut changer si l'assureur veut se débarrasser des mauvais risques par exemple. On modélise par exposition les profils de risque assez différents dans leur nature en les différenciant. Le modèle par exposition permet d'ajuster le modèle au changement potentiel des parts souscrites, ce qui n'est pas pris en compte par le modèle historique.

Dans les deux types de modélisation l'approche consiste en modélisation de la fréquence des sinistres et du coût moyen. La charge sinistre s'obtient ensuite en multipliant ses deux composantes. La différence repose dans le calcul de la fréquence et de coût



## 2) Modèle historique

Jusqu'à présent le modèle utilisé par AXA CS pour la branche Marine Cargo était un modèle historique qui se basait sur les sinistres passés. Ce modèle permettait de déterminer la charge sinistre par le produit de fréquence et de coût moyen. La fréquence et le coût étaient calculés à partir des données historiques en tenant compte des IBNR

Les *IBNR (Incurred But Not Reported)* sont des sinistres qui sont déjà survenus mais ne sont pas encore connus par l'assureur au moment de l'arrêté des comptes. L'assureur est tenu donc de constituer une provision pour ces sinistres et donc de les évaluer. Les IBNR sont composé de :

- ✓ *IBNER (Incurred But Not Enough Reported)* qui correspondent aux sinistres survenus et dont la survenance est connue mais dont le montant n'est pas assez provisionné. Ses IBNER affectent notamment le coût des sinistres. Les IBNER sont la différence entre le montant projeté à l'ultime et le montant estimé initialement.
- ✓ *IBNYR (Incurred But Not Yet Reported)* qui correspondent aux sinistres survenus mais non encore déclarés et donc de ce fait ne sont pas connus par l'assureur. Les IBNYR impactent notamment la fréquence des sinistres.

Dans le modèle historique utilisé, la détermination de la fréquence se faisait par le moyen des triangles d'IBNYR par la méthode de Schnieper.

Cette approche se base sur une hypothèse très forte de l'homogénéité du profil de risque dans le temps. De plus, l'échantillon considéré doit être suffisamment grand pour pouvoir fournir les données. Or, ce n'est pas toujours le cas, surtout pour les sinistres extrêmes dont on peut ne pas avoir dans notre historique.

## 3) Modèle par exposition

Le modèle par exposition se base sur le portefeuille actuel de l'entreprise et non plus que sur l'expérience passée. Dans la modélisation par exposition nous pouvons avoir les profils de risques différents par leur nature et par leur importance. Ce modèle capte donc l'évolution du risque du portefeuille en question dans le temps.

La démarche de la modélisation par exposition est :

- Détermination de la loi de fréquence pour le profil de risque considéré
- Détermination de la loi de coût
- Ajout des scénarios
- Simulation de la fréquence
- Simulation de coût

Cette approche se base sur l'hypothèse d'indépendance de la fréquence et de coût. Cette hypothèse doit être vérifié an amont.

L'avantage de l'approche par exposition consiste en utilisation non seulement des données historiques du portefeuille mais aussi des données marché. Ceci nous donne une information supplémentaire sur les sinistres extrêmes. Car ces sinistres catastrophiques se caractérisent par la fréquence très faible et la sévérité très importante et donc il se peut que notre portefeuille n'ait jamais enregistré de tels évènements. De plus, comme certains événements rares pouvant se produire ne sont jamais survenus il est nécessaire d'en tenir compte dans notre modèle. Il s'agit donc de rajouter les scénarios maximum possibles lors de la calibration de la loi de coût.



La simulation des lois de fréquence et de coût se fait généralement par le moyen de la simulation de Monte Carlo qui consiste en génération d'un nombre suffisamment grand de nombres aléatoires en inversion de la fonction de répartition de notre loi.

#### 4) L'apport du modèle par exposition

En comparant les deux types de modélisation nous remarquons que la modélisation par exposition est nettement préférée pour les portefeuilles qui ont très peu de sinistres passés ou pour les affaires nouvelles. Dans la modélisation historique l'échantillon du portefeuille doit être suffisamment grand pour pouvoir se baser dessus lors de la détermination des lois de fréquence et de coût.

La spécificité de la branche Marine Cargo chez AXA CS est dans la séparation du risque en Trade Sectors. Dans le portefeuille Marine Cargo on trouve les profils de risque très différents par leur nature ce qui pose un problème d'homogénéité pour le modèle historique.

## B. Données

Pour réaliser notre modèle par exposition nous avons besoins de données. Nous pouvons faire intervenir dans le modèle par exposition deux types de données : les données historiques du portefeuille Marine Cargo et les données marché.

### 1) Base de données historique du portefeuille AXA CS

AXA CS dispose d'une base de données historique du portefeuille de la branche Marine Cargo. Nous disposons des données sur les sinistres attritionnels et sur les sinistres graves (atypiques). Le seuil de séparation entre les sinistres attritionnels et graves est à 3 millions d'euros.

Nous ne disposons pas des mêmes informations pour les sinistres attritionnels et pour les sinistres atypiques. En effet, il existe une description plus ou moins détaillée pour les sinistres au-dessus de 3 millions et peu d'information pour les sinistres en-dessous de ce seuil.

Nous parlons d'un avis de sinistre, lorsqu'il s'agit des sinistres graves. Un avis de sinistre est une notification envoyée aux départements de contrôle de gestion, d'actuariat, de la direction financière par les souscripteurs pour alerter ces départements sur la survenance d'un sinistre qui risque d'impacter le portefeuille. Chez AXA CS, il existe un seuil de réception des avis de sinistres. C'est-à-dire, pour les sinistres ayant le coût supérieur à ce seuil, AXA CS reçoit un avis de sinistre. Jusqu'à 2012 ce seuil était fixé à 200 000 euros à part AXA net de franchise et brut de réassurance. A partir de 2012 ce seuil est passé à 2 millions d'euros à part AXA net de franchise et brut de réassurance.

Les avis de sinistre reçus avant 2010 sont stockés dans la base technique qui est une base de données dans laquelle nous récupérons tous les sinistres. Après 2010, lors de la connaissance de la survenance d'un sinistre au-dessus du seuil de la réception d'avis de sinistre un Major Loss Advice (MLA) est envoyé dans plusieurs services d'AXA CS (Direction Générale, Contrôle de gestion, etc.). Ce MLA est un fichier Excel contenant plusieurs champs renseignés. Nous y trouvons le nom de l'assuré, le montant de sinistre, la franchise, la part AXA, l'engagement AXA, le programme de réassurance et

la description du sinistre. Parfois, la description du sinistre est assez pauvre en information pour déterminer exactement la cause du sinistre.

En revanche, pour les sinistres attritionnels, nous n'avons pas de description aussi détaillée comme pour les sinistres graves. Nous ne pouvons connaître que la somme du sinistre, la part AXA et le nom d'assuré.

Le périmètre temporel de nos observations a été choisi de sorte à avoir des données fiables et homogènes. C'est la période de 2006 à 2012. Nous disposons de 641 observations de sinistres au-dessus d'un seuil de 500 000 d'euros brut de la franchise et de la réassurance.

Les variables issues de nos observations sont :

- Nom de l'assuré
- Cause du sinistre
- Le Trade Sector (marchandise transportée)
- Montant de l'indemnisation à 100% (net de franchise)
- Montant de l'indemnisation part AXA
- La date de survenance du sinistre
- Part AXA
- Franchise
- Limite
- Réassurance (la part appliqué et la prime de réassurance)

Certaines de ces variables peuvent être obtenues à partir d'une combinaison linéaire d'autres variables, comme par exemple le montant de l'indemnisation part AXA. Ce montant peut être obtenu en multipliant la part AXA par le montant de l'indemnisation à 100%.

Nous retenons alors que les variables dites explicatives pour ne pas avoir les variables redondantes. De plus, certaines variables ne sont pas utilisées lors de notre modélisation, comme la réassurance, car nous allons modéliser le coût des sinistres graves à 100%. Enfin, les variables dont nous allons nous servir par la suite sont les suivantes :

- Trade Sector
- Cause du sinistre
- Montant de l'indemnisation à 100% brut de franchise = Montant de l'indemnisation à 100% + franchise
- Date de survenance du sinistre

Certaines variables possèdent plusieurs modalités, comme la variable cause du sinistre. Les différentes modalités de cette variable sont :

- CATNAT : les catastrophes naturelles (ouragan, tempête, grêle, tsunami, tremblement de terre, inondation, montée des eaux, typhon, tornade, orage, éruption volcanique, etc.)
- Contamination : dommage causé par la température, par l'eau, corrosion, offspec (quand la marchandise ne présente les caractéristiques décrites dans le contrat, comme par exemple la densité du pétrole), oxydation, moisissure, etc.
- Fall : tout sinistre impliquant la marchandise tombée que ce soit sur place ou dans la mer
- Fire : Incendie ou explosion
- Other Than Marine Transport : tout accident de transport sauf le transport maritime (accident de camion, d'avion, de train, etc.)
- Theft : Vol, piraterie, disparition, détournement, non-retour de la cargaison, manquants

- Vessel accident : tout sinistre causé par un accident de navire (Echouement, collision, surcharge, naufrage, chavirement, etc.)
- War : la guerre (effets directes et indirectes), grèves, manifestations et mouvements populaires
- Damage : un dommage à un bien suite à la manipulation
- Other : tout autre type de sinistre qui n'a pas pu être classé dans une de ces classes (confiscation par le gouvernement, le compte bancaire gelé, faillite, les confiscation par la douane, etc. .)
- Unknown : les sinistres dont la cause est inconnue

Ces variables nous seront utiles tout d'abord pour faire une analyse de deux bases de données, historique d'AXA CS et base de données marché. Ensuite, ces variables seront utilisées pour effectuer une analyse plus approfondie afin de pouvoir regrouper certains secteurs.

## 2) Base de données marché

Nous disposons également d'une base de données de sinistres Marché qui est représentée par les données de Lloyd's. Lloyd's est un marché britannique où les assureurs se réunissent pour assurer les risques différents. Ils représentaient 6,8% du marché mondial de la Marine Cargo en 2011<sup>6</sup>.

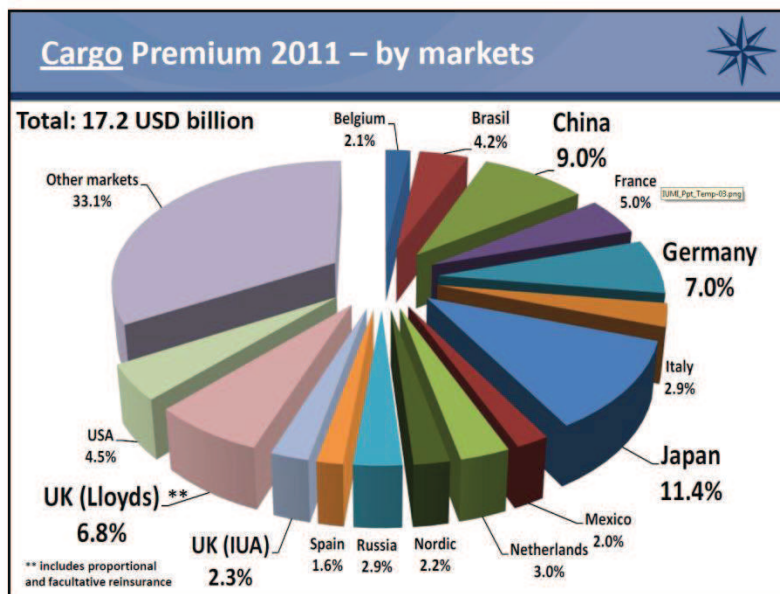


Figure 4 La répartition des primes 2011 par marchés

Nous disposons donc des sinistres de Lloyd's de 2006 jusqu'au 2012 dont le coût à 100% est supérieur à 500 000 \$<sup>7</sup>. C'est aussi pour cette raison là que notre période d'observation a été choisie de sorte d'avoir les données des deux bases de données, du portefeuille AXA CS et marché. Grace à ces données nous avons les variables suivantes :

- La date de survenance du sinistre

<sup>6</sup> GIRO Conference and Exhibition 2012, Global Statistics from the International Union of Marine Insurance Facts and Figures Committee

<sup>7</sup> Joint Cargo Committee, Lloyd's

- Montant de l'indemnisation à 100% brut de franchise
- Cause du sinistre
- Le Trade Sector
- La localisation du sinistre

### 3) Analyse de données

Nous procédons à l'analyse de données afin d'estimer si les données d'AXA CS et de marché de Lloyd's sont comparables. Comme la notion de Trade Sector est la spécificité d'AXA CS, nous retraitions les données de Lloyd's afin d'avoir la séparation en Trade Sectors selon la nature de la marchandise transportée lors d'un sinistre.

Afin de pouvoir comparer les deux bases de données nous allons utiliser les variables qui sont communes aux deux bases de données. Ces variables sont les suivantes :

- Trade Sector
- Cause du sinistre
- Montant de l'indemnisation à 100%

Les hypothèses choisies pour le traitement des données :

- ✓ En ce qui concerne les données d'AXA CS, nous prenons le coût de sinistre à 100%, brut de franchise, de réassurance et de captives.
- ✓ Nous prenons les sinistres dites « par événement », c'est-à-dire s'il y a un événement qui cause plusieurs dégâts nous considérons cela comme étant un sinistre. Nous retenons cette vision « par événement » car les traités de réassurance appliquées à notre portefeuille s'appliquent par événement, notamment pour l'Excédent de Sinistre par événement
- ✓ Afin d'utiliser le coût de sinistres graves adéquat nous avons besoin de retraiter nos coûts de l'inflation. Pour ce faire, nous allons appliquer le taux d'inflation propre à chaque trade secteur selon l'historique de l'inflation<sup>8</sup>.

Voici le tableau récapitulatif du taux d'inflation utilisé :

TS	Inflation						
	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Auto	0,60%	0,60%	1,10%	0,40%	3,80%	4,70%	0,20%
High Tech	-8,01%	2,70%	-11,50%	-11,70%	-0,90%	-1,10%	1,20%
Industrial Products	1,60%	1,50%	2,80%	0,10%	1,50%	2,10%	1,30%
Luxe/Pharma	-1,25%	2,65%	-0,72%	-0,24%	1,17%	1,31%	1,30%
Project Cargo/Pre-launch	1,60%	1,50%	2,80%	0,10%	1,50%	2,10%	1,30%
Oil	15,44%	12,06%	7,76%	8,30%	6,74%	3,49%	1,41%
Trading	32,90%	-4,24%	-28,36%	45,78%	32,10%	-14,69%	1,36%

Nous remarquons que le taux d'inflation varie beaucoup pour le secteur de Trading qui regroupe les métaux et les soft commodities comme le grain ou le cacao et dont les prix varient fortement. Les coûts de sinistres d'Oil seront aussi fortement impactés par le taux d'inflation très élevé pour les années 2006-2007. Nous constatons aussi que pour le secteur High Tech le taux d'inflation est souvent négatif, ce qui correspond à la baisse des prix pour ces biens.

Lors de la détermination du taux d'inflation, nous avons choisi les activités représentatives par rapport aux biens que nous assurons.

<sup>8</sup> FMI( Fond Monétaire International), IndexMundi et INSEE

En analysant les données de Lloyd's nous avons pu classer les sinistres en 11 classes :

- CATNAT : les catastrophes naturelles (ouragan, tempête, grêle, tsunami, tremblement de terre, inondation, montée des eaux, typhon, tornade, orage, éruption volcanique, etc.)
- Contamination : dommage causé par la température, par l'eau, corrosion, offspec (quand la marchandise ne présente les caractéristiques décrites dans le contrat, comme par exemple la densité du pétrole), oxydation, moisissure, etc.
- Fall : tout sinistre impliquant la marchandise tombée que ce soit sur place ou dans la mer
- Fire : Incendie ou explosion
- Lawsuits : Le coût qui est associé à la fraude, dispute ou la non livraison
- Other Than Marine Transport : tout accident de transport sauf le transport maritime (accident de camion, d'avion, de train, etc.)
- Theft : Vol, piraterie, disparition, détournement, non-retour de la cargaison, manquants
- Vessel accident : tout sinistre causé par un accident de navire (Echouement, collision, surcharge, naufrage, chavirement, etc.)
- War : la guerre (effets directes et indirectes), grèves, manifestations et mouvements populaires
- Other : tout autre type de sinistre qui n'a pas pu être classé dans une de ces classes (confiscation par le gouvernement, le compte bancaire gelé, faillite, les confiscation par la douane, etc. .)
- Unknown : les sinistres dont la cause est inconnue

Nous représentons la fréquence moyenne, le coût moyen et la variance corrigée pour la fréquence et le coût des sinistres marché dans les tableaux de contingence par type de sinistre et par type de Trade Sector.

IL faut noter que pour alléger le langage nous allons appeler la fréquence le nombre de sinistres.

Soit  $X_i$  la variable aléatoire qui compte le nombre de sinistres graves pendant l'année

$i \in [1 ; n]$

Soit  $n$  le nombre d'années d'observation

Nous obtenons la fréquence moyenne  $m$  suivant la formule :

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

Nous calculons la variance corrigée ci-dessous :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2$$

Soit  $Y_i$  le coût total de l'année  $i$ . Le coût moyen  $c$  est calculé de la manière suivante :

$$c = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{m}$$

Fréquence moyenne	Type of loss											Market	
	Trade sector	CATNAT	contaminati on	fall	fire	lawsuits	other	other than marine transport	theft	unknown	vessel accident		war
auto	2,14	0,14	0,14	0,29	0,00	0,00	0,14	0,00	0,14	0,29	0,00	0,00	3,29
cash	0,00	0,00	0,00	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	11,43	0,00	0,14	0,00	12,14
hard commodities	0,71	4,00	0,43	0,86	0,14	0,29	0,00	0,00	11,00	1,71	2,00	0,00	21,14
high tech	0,00	0,71	0,14	0,43	0,14	0,00	0,57	0,00	3,00	0,71	0,00	0,14	5,86
industrial products	1,29	0,57	1,29	1,29	0,00	0,00	0,57	0,00	1,43	2,14	0,71	0,00	9,29
luxe	0,71	0,71	0,14	0,57	0,00	0,14	0,00	0,00	4,29	2,57	0,14	0,00	9,29
other	1,29	0,14	0,29	0,29	0,29	0,14	0,14	0,14	1,14	0,57	0,00	0,14	4,43
pharma	0,00	2,14	0,14	0,14	0,00	0,00	0,29	0,00	0,57	0,29	0,00	0,00	3,57
pre launch	0,29	0,00	0,29	0,14	0,00	0,00	0,29	0,00	0,14	0,57	0,00	0,00	1,71
project cargo	0,00	0,29	0,29	0,29	0,00	0,00	0,00	0,00	0,14	0,43	0,00	0,00	1,43
removals	0,00	0,00	0,14	0,14	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,29
soft commodities	1,00	4,14	0,14	2,57	0,00	0,00	0,14	0,00	1,71	0,43	0,43	0,00	10,57
unknown	1,57	1,00	0,57	3,43	0,14	0,57	0,14	0,00	10,43	1,43	1,43	0,00	20,71
Total	9,00	13,86	4,00	10,57	0,86	1,29	2,43	0,00	45,29	11,00	5,14	0,29	103,71

Figure 5 La fréquence moyenne des sinistres marché par type de sinistre et par Trade Secteur

Nous remarquons que le sinistre le plus fréquent dans la base de données marché est le vol avec la fréquence moyenne de 45,29 sinistres par an toute marchandise confondue. Le vol est suivi par la contamination et l'incendie ayant comme fréquence moyenne 13,86 et 10,57 sinistres en moyenne par an respectivement. Le type de marchandise subissant le plus de sinistres par an (sans prendre en compte Unknown) est Hard Commodities ( métaux, charbon, etc.) qui a la sinistralité moyenne de 21,14 sinistres en moyenne par an toutes causes de sinistres confondues.

Variance corrigée	Type of loss											Market	
	Trade sector	CATNAT	contaminati on	fall	fire	lawsuits	other	other than marine transport	theft	unknown	vessel accident		war
auto	4,48	0,14	0,14	0,24	0,00	0,00	0,14	0,00	0,00	0,14	0,57	0,00	
cash	0,00	0,00	0,00	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	19,62	0,00	0,14	0,00	
hard commodities	0,57	3,00	0,29	1,14	0,14	0,24	0,00	0,00	25,67	1,57	1,67	0,00	
high tech	0,00	0,57	0,14	0,62	0,14	0,00	0,62	0,00	3,33	0,57	0,00	0,14	
industrial products	3,24	1,29	0,24	2,24	0,00	0,00	0,62	0,00	0,95	3,48	0,57	0,00	
luxe	0,24	0,57	0,14	0,29	0,00	0,14	0,00	0,00	1,90	8,95	0,14	0,00	
other	1,57	0,14	0,24	0,57	0,57	0,14	0,14	0,14	1,81	1,29	0,00	0,14	
pharma	0,00	4,14	0,14	0,14	0,00	0,00	0,24	0,00	0,29	0,24	0,00	0,00	
pre launch	0,24	0,00	0,24	0,14	0,00	0,00	0,24	0,00	0,14	0,62	0,00	0,00	
project cargo	0,00	0,24	0,24	0,24	0,00	0,00	0,00	0,00	0,14	0,62	0,00	0,00	
removals	0,00	0,00	0,14	0,14	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
soft commodities	2,33	3,81	0,14	6,62	0,00	0,00	0,14	0,00	0,57	0,62	0,29	0,00	
unknown	1,95	2,00	1,29	20,95	0,14	0,62	0,14	0,00	6,95	2,62	2,95	0,00	
Total													

Figure 6 La variance corrigée de la fréquence des sinistres marché par type de sinistre et par type de marchandise

Au vu de la variance corrigée, le vol d'argent durant le transport de hard commodities représente les sinistres les plus dispersés en termes de la fréquence moyenne ( variance de 19,62 et 25,67 respectivement). Cela signifie que nous pouvons avoir une sinistralité très différente d'une année à l'autre.



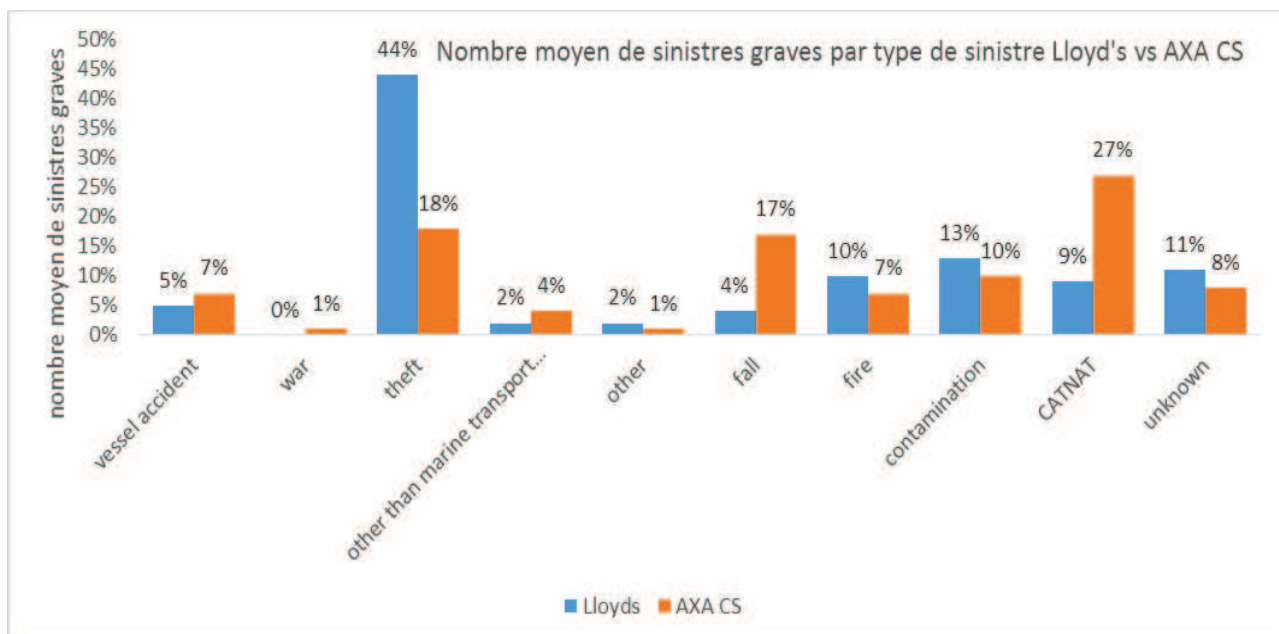
Coût moyen	Type of loss											Market	
	Trade sector	CATNAT	contaminati on	fall	fire	lawsuits	other	other than marine transport	theft	unknown	vessel accident		war
auto	49 624 879	9 332 805	4 506 386	7 972 252	0	0	4 188 171	0	4 827 835	8 997 929	0	0	34 833 423
cash	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
hard commodities	20 434 818	12 363 183	8 109 584	87 311 427	60 664 925	9 162 010	0	46 887 875	264 907 245	32 340 284	0	0	56 199 640
high tech	0	9 299 645	3 747 505	13 739 103	9 173 409	0	5 833 510	35 484 420	164 629 287	0	756 985 668	0	59 738 424
industrial products	19 465 130	8 593 083	51 904 580	42 385 138	0	0	8 201 732	9 030 726	12 711 280	49 356 817	0	0	24 903 592
luxe	59 127 064	6 936 779	23 705 706	14 766 139	0	7 058 009	0	17 319 326	13 383 478	4 237 116	0	0	18 228 723
other	150 946 323	5 107 544	4 746 970	13 956 663	21 736 034	8 718 453	21 223 896	65 249 417	7 464 688	0	30 688 970	0	66 354 490
pharma	0	17 735 001	3 989 310	14 351 915	0	0	28 959 543	32 329 267	10 859 650	0	0	0	19 732 868
pre launch	14 274 247	0	92 836 972	32 126 174	0	0	6 288 010	6 321 522	6 654 513	0	0	0	24 322 017
project cargo	0	11 617 547	29 886 154	27 512 850	0	0	0	4 107 412	9 223 745	0	0	0	16 981 175
removals	0	0	3 801 913	5 410 966	0	0	0	0	0	0	0	0	4 606 439
soft commodities	9 722 504	13 948 300	5 169 341	17 367 639	0	0	5 005 258	77 493 925	196 039 885	32 024 000	0	0	32 560 393
unknown	14 887 189	7 338 329	6 520 557	16 915 779	6 618 689	625 388 999	18 897 971	31 803 959	9 921 138	12 809 489	0	0	39 470 732
Total	46 607 155	12 590 650	29 193 305	25 337 641	19 988 182	281 739 609	10 350 081	28 008 781	67 943 265	26 276 331	393 837 319	0	941 872 319

Figure 7 Le coût moyen des sinistres marché par type de sinistre et par type de marchandise

Pour le coût moyen de la base de données le sinistre War pour les produits de High Tech ont le coût moyen le plus élevé (757 millions d'euros). Ceci est dû au fait qu'on a eu seulement un sinistre durant toute la période d'observation. En regardant la colonne Totale, où on a le coût moyen tous types de sinistres confondus, le coût moyen le plus élevé est enregistré pour Other (c'est le type de cargaison que nous n'avons pas pu classer) avec 66,3 millions d'euros de coût en moyenne par sinistre. High Tech, Hard Commodities et Soft Commodities subissent des sinistres d'une sévérité de l'ordre de 59,7, 56,2 et 32,6 millions d'euros respectivement.

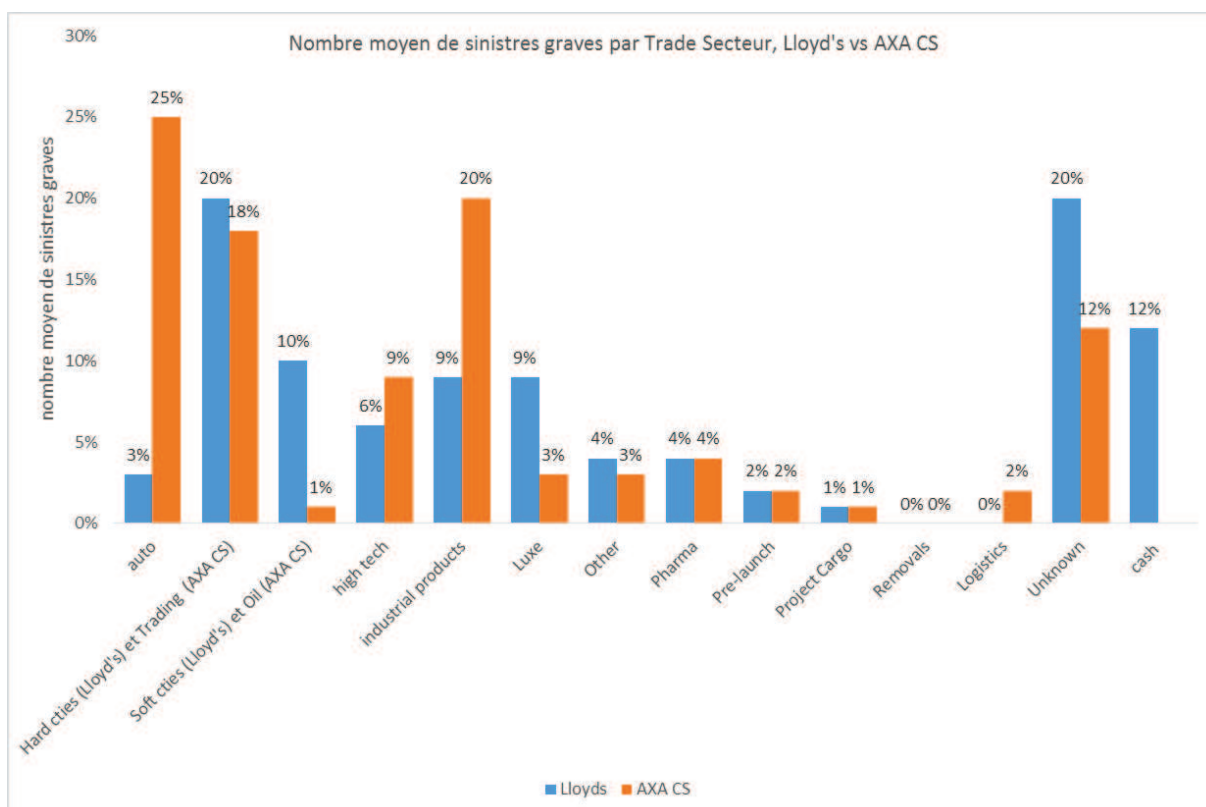
#### 4) Analyse comparative AXA CS – Lloyd's

Nous pouvons à présent comparer nos deux bases de données. Nous remarquons qu'une partie importante de nos observations est inconnue, c'est-à-dire que nous avons un grand nombre d'observations de sinistres dont la cause est inconnue. De plus nous avons également les observations où la nature des biens assurés n'est pas connue. Il n'est donc pas possible de classer ces observations ni par cause de sinistre ni par Trade Secteur et nous ne pouvons pas les utiliser à cause du problème de fiabilité de ces données. De ce fait, nous n'allons pas prendre en compte ces observations pour construire notre modèle.



**Figure 8** La répartition du nombre moyen de sinistres graves par type de sinistre, sinistres Lloyd's et AXA CS

Au vu de cet histogramme, nous remarquons que le sinistre le plus courant dans le portefeuille de Lloyd's est le vol (44% de tous les sinistres graves), alors que dans le portefeuille AXA CS c'est les catastrophes naturelles qui sont en tête avec 27% de tous les sinistres graves.

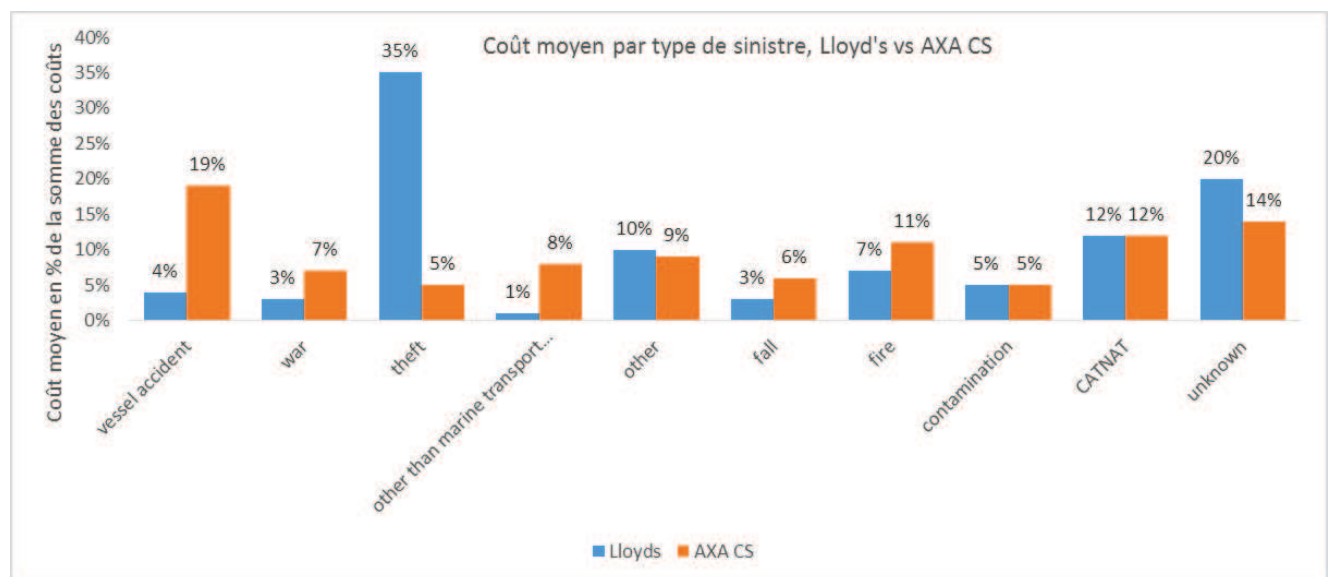


**Figure 9** La répartition du nombre moyen de sinistres graves par type de marchandise, données Lloyd's et AXA CS



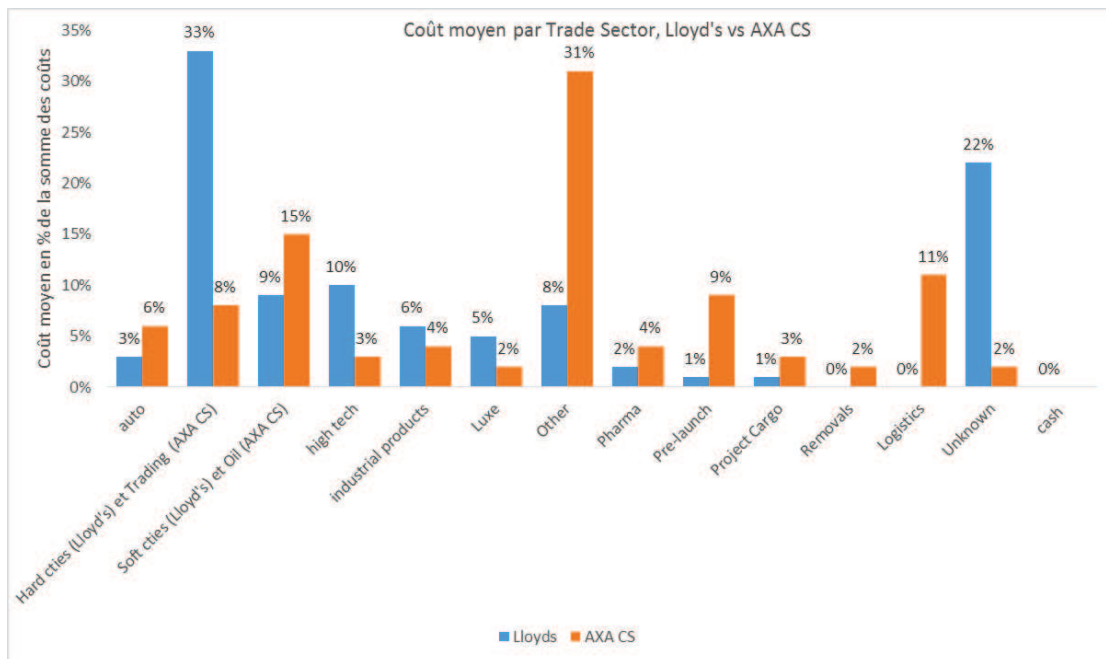
Nous constatons que la plupart des sinistres de Lloyd's frappent le secteur des Soft et Hard Commodities (10% et 20% respectivement), Unknown et Cash (le transport d'argent, de billets de valeur, etc. avec 20% et 12% respectivement). Soft et Hard Commodities sont représentés chez AXA CS par le Trade Sector Oil et Trading Commodities (except Oil). Donc si nous comparons leur part dans la répartition de la fréquence, dans la base de données marché ils représentent 30 % de la fréquence moyenne et dans la base de données AXA CS 19%. Nous constatons que pour AXA CS les secteurs qui ont le plus de sinistres en moyenne sont Automotive (25%) et Industrial Products (20%). En revanche, pour Lloyd's les secteurs connaissant la fréquence moyenne la plus élevée sont Unknown (20%), Hard Commodities (20%). Pour Lloyd's le secteur Automotive représente seulement 3% de la fréquence moyenne.

Les différences entre nos deux bases de données sont évidentes. Nous allons comparer à présent le coût moyen pour tirer nos conclusions.



**Figure 10 Coût moyen en % de la somme des coûts par type de sinistre, Lloyd's et AXA CS**

Au vu des graphiques de la répartition de coût moyen par type de sinistre nous remarquons que dans les sinistres Lloyd's le vol est très coûteux (35% du coût moyen) par rapport au cout moyen des autres types de sinistres, alors que chez AXA CS il représente seulement 5 %. Le type de sinistre le plus cher chez AXA CS est celui affectant le navire (vessel accident) avec 19% de coût moyen et chez Lloyd's ce type de sinistre représente seulement 4%.



**Figure 11 Coût moyen en % de la somme des coûts par Trade Scteur, Lloyd's et AXA CS**

Nous observons également des différences significatives entre les deux bases de données pour le coût moyen par Trade Sector. En effet, les sinistres à coût moyen le plus cher pour Lloyd's ont causé des dégâts à Hard et Soft Commodities (42%) et High Tech (10%), alors que pour AXA CS les sinistres dont le coût moyen est le plus élevé ont été répertorié par les secteurs Oil et Trading Commodities (except Oil) avec 23% et Logistics (11%).

## 5) Données retenues

Nous pouvons donc conclure que les données de sinistres de Lloyd's sont très différentes des données d'AXA CS en termes de répartition de la fréquence moyenne et du coût moyen ce qui rend problématique l'utilisation de cette base marché.

Suite à l'analyse des données à notre disposition nous avons consulté l'équipe de souscription afin de savoir si les données de Lloyd's peuvent être incluses dans notre modèle. Il s'avère que comme Lloyd's n'ont pas la séparation en Trade Sectors semblable à celle d'AXA CS, nous ne pouvons rien conclure sur la répartition en Trade secteurs chez Lloyd's.

De plus, nous savons que Lloyd's souscrivent beaucoup de risques que les autres marchés ne veulent pas prendre. Donc, naturellement, leur base de données contient plus de sinistres et ils sont plus coûteux. D'ailleurs, l'exposition de Lloyd's n'est pas connue non plus. La seule information que nous avons pu collecter est que les Lloyd's ont un portefeuille très diversifié et sont aussi très flexibles et contrairement à AXA CS ils peuvent souscrire du stockage sans transit. Le poids des Etats-Unis dans le portefeuille de Lloyd's tourne autour de 50%, alors que chez AXA CS il est de 25%.

En prenant en compte tous ces différences nous décidons d'exclure la base de données Lloyd's de notre modèle. Mais nous allons utiliser quelques sinistres de marché Mondial pour les simulations des scénarii.

L'utilisation de la base de données avait pour but de challenger les données historiques AXA CS et d'y affecter des scénarii complémentaires. Du fait de l'inhomogénéité constatée, les données marché ne pourront être utilisées dans ce but.

Un regroupement de Trade Sectors peut être une alternative afin d'utiliser une quantité de données suffisante. C'est l'objet du paragraphe suivant.

## C. Regroupement des Trade Sectors

Le but de notre étude étant la modélisation des sinistres graves pour chaque secteur d'activité, nous avons besoin de suffisamment de données d'observation pour chaque secteur d'activité pour pouvoir calibrer une loi de coût et de fréquence. Or, pour certains secteurs comme Removals, Project Cargo, Pre-launch et JB/Luxury/Valuable nous n'avons pas suffisamment de données et donc ne sommes pas en mesure d'effectuer une modélisation efficace. Pour ce faire, nous avons décidé de regrouper certains secteurs d'activité afin de pouvoir modéliser au plus juste. Une analyse de données préalable est nécessaire pour effectuer le regroupement de données.

Dans un premier temps, nous allons faire une Analyse en Composantes Principales (ACP), une Analyse Factorielle des Correspondances (AFC) avec une Classification Ascendante Hierarchique (CAH) afin de prendre en compte la sinistralité propre à chaque Trade Secteur. Nous avons choisi de faire l'ACP car elle permet de synthétiser l'information apportée par les variables quantitatives dont nous disposons et de pouvoir regrouper certains secteurs en se basant sur la vision sinistralité.

L'AFC est une analyse spécifique aux tableaux de contingence, ce qui est notre cas, car nous avons les Trade Sectors en lignes et les variables (nombre moyen de sinistres graves rapporté à la prime avec les IBNYR Asif 2013 et le coût moyen des sinistres graves à 100% brut) en colonnes. Nous avons choisi de prendre en compte le nombre moyen de sinistres graves rapporté à la prime pour avoir la fréquence de sinistres graves au sens propre du terme par unité d'exposition, l'euro. Le coût moyen à 100% brut est le coût moyen des sinistres graves brut de franchise, de réassurance et de captives, veut dire le coût avant l'application de programmes de réassurance et de franchise divisé par le nombre de sinistres.

Nous allons effectuer une CAH par la suite afin d'obtenir la classification hiérarchique proposée suite à l'AFC en se basant sur la sinistralité.

Ensuite, nous allons regarder la vision « exposition » de chaque secteur fournie par Contrôle de gestion, Souscription et une analyse de l'exposition du portefeuille Marine Cargo par secteurs d'activité.

### 1) Analyse en Composantes Principales (ACP)

L'Analyse en Composantes Principales est un outil descriptif qui permet de synthétiser l'information. Cette analyse ne peut s'appliquer qu'aux variables quantitatives. Son but est de rechercher la première composante qui représente au mieux les individus, c'est-à-dire celui pour lequel la variance des individus est maximale. Par la suite, une seconde composante est recherchée avec le même but d'apporter le maximum d'information mais en plus ayant une corrélation nulle avec la première composante.

La disposition des modalités de chaque variable les unes par rapport aux autres aide à donner un sens à chaque axe. Plus une modalité est éloignée de l'axe, plus elle contribue à son explication.

Les deux premières composantes constituent le plan principal à deux dimensions.

#### Application au portefeuille Marine Cargo

Dans notre analyse, les Trade Sectors jouent le rôle des individus et la fréquence moyenne et le coût moyen jouent le rôle des variables. La fréquence moyenne ici est le nombre de sinistre moyen par an.

Nous voulons prendre en compte les IBNYR dans notre fréquence moyenne. Comme nous n'avons pas l'information sur le déroulement des paiements pour nos données, nous utilisons les coefficients d'IBNYR du modèle historique de la branche Marine Cargo calibré en 2012 dans le cadre du modèle interne. Les IBNYR nous permettent de prendre en compte les sinistres qui sont déjà survenus mais non pas encore connus par l'assureur notamment pour les années récentes comme 2011 et 2012.

Les voici :

	Nombre de sinistres historique	Nombre d'IBNYR	Part du nombre de sinistre d'IBNYR
2006	6,25	0,0	0,00
2007	17,5	1,4	0,08
2008	8,75	1,4	0,16
2009	16,25	2,0	0,12
2010	17,5	2,7	0,16
2011	8,75	5,5	0,63
2012	1,25	15,1	12,11

Le Ratio est obtenu en divisant le nombre d'IBNYR par le nombre historique de sinistres. En effet, nous observons le nombre d'IBNYR important pour les années 2011 et 2012. Ainsi, pour cet exemple, nous nous attendons que le nombre de sinistre de l'année 2012 passe de 1,25 à 16,35 (1,25+15,1) à l'ultime.

Ensuite nous appliquons les Ratios à nos fréquences en décalant d'une année car les ratios présentés sont ceux du modèle interne de 2012.

Ensuite, afin de prendre en compte les différences en sinistralités dues aux différences en exposition de nos secteurs, nous effectuons le calcul AsIf 2013 de la fréquence.

La formule de revalorisation As If 2013 est la suivante :

$$fréquence\ n\ AsIf\ 2013 = fréquence\ n \times \frac{Prime\ 2013}{Prime\ n}$$

Ensuite nous rapportons notre fréquence moyenne à la prime 2013 pour avoir la probabilité de sinistre pour 1 euro de prime. Ceci nous permettra de comparer des fréquences relatives entre les secteurs.

#### Individus (Trade Sectors) :

1. Auto
2. High Tech

3. Industrial Products
4. Logistics
5. Luxe
6. Oil
7. Pharma
8. Pre-launch
9. Project Cargo
10. Removals
11. Trading Commodities except Oil

Variables (pour chaque Trade Secteur) :

- Fréquence moyenne avec IBNYR AsIf 2013 rapportée à la prime par type de sinistre
- Coût moyen par type de sinistre

Les modalités de la variable fréquence pour chaque Trade Secteur:

- CATNAT
- Contamination
- Damage
- Fall
- Fire
- Other
- Other.than.marine.transport.accident
- Theft
- Unknown
- Vessel.accident
- War

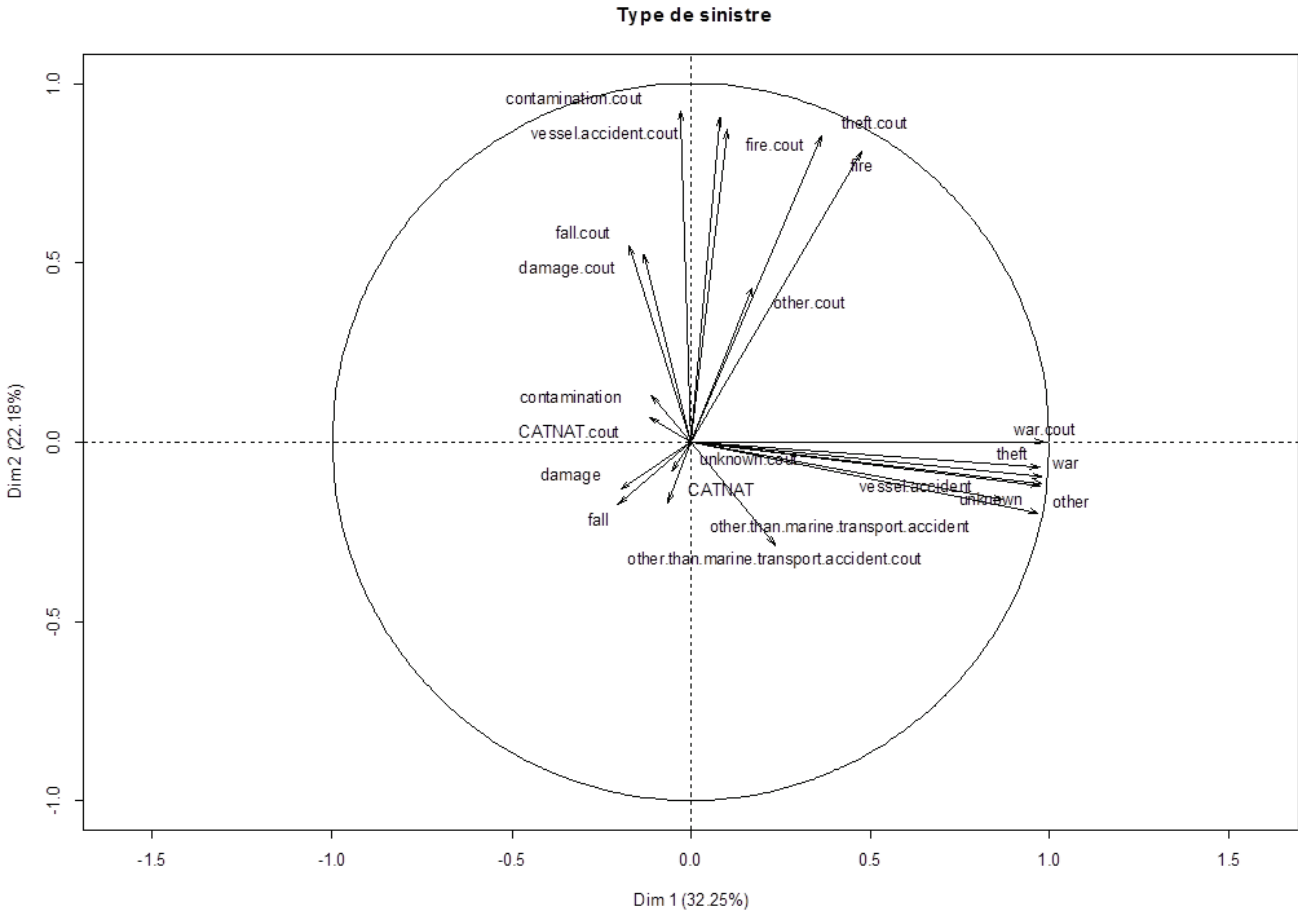
Les modalités de la variable coût pour chaque Trade Secteur:

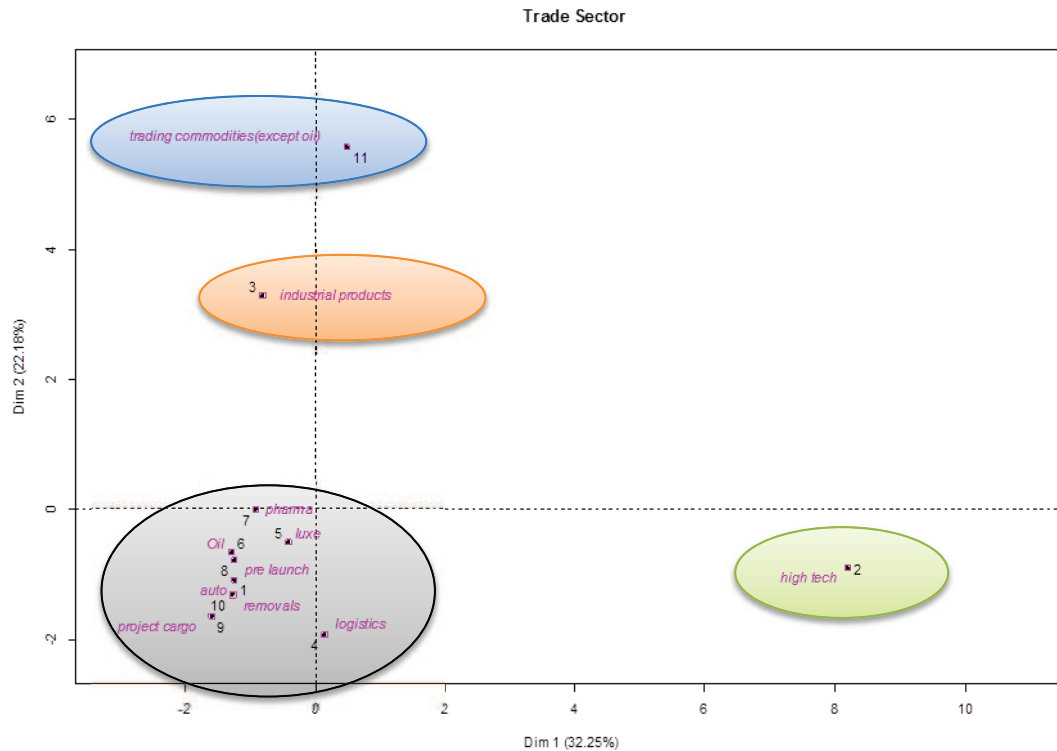
- CATNAT.cout
- Contamination.cout
- Damage.cout
- Fall.cout
- Fire.cout
- Other.cout
- Other.than.marine.transport.accident.cout
- Theft.cout
- Unknown.cout
- Vessel.accident.cout
- War.cout

Ainsi nous avons choisi comme première variable la fréquence moyenne avec les IBNYR AsIf 2013 et on l'a rapporté à la prime afin d'obtenir une probabilité d'avoir un sinistre pour 1€ de prime. De plus, cette variable est divisée en plusieurs modalités (11) qui sont la cause du sinistre. Donc pour chaque secteur nous aurons une probabilité d'avoir un type de sinistre spécifique pour 1€ de prime. Ceci nous permettra d'être plus précis dans notre analyse et notre regroupement par la suite.

En ce qui concerne la variable de coût, nous l'avons aussi divisé en 11 modalités (types de sinistre) comme la fréquence.

Après avoir effectué une ACP nous obtenons le cercle de corrélations suivant :





### Commentaire du plan factoriel

Le premier plan factoriel engendré par les axes 1 et 2 représente 54,43% de l'inertie totale. Nous considérons que si une variable est située près de la circonférence du cercle de corrélations, alors elle est bien représentée par les deux dimensions. Ainsi, les variables CATNAT.cout, Fall, Unknown.cout, Contamination, CATNAT, Damage, Other.than.marine.transport.accident et Other.than.marine.transport.accident.cout ne sont pas bien représentées par ces deux premières composantes. Ceci est dû en partie aux données manquantes pour cette catégorie de cause de sinistre.

Sur le plan factoriel des individus, nous notons que les Trade Sectors High Tech, Trading Commodities (except Oil) et Industrial Products sont mis à l'écart. Ceci s'explique par le coût moyen élevé de ces trade sectors.

### Commentaire du cercle des corrélations

Le TS Trading Commodities (except Oil) prend les valeurs supérieures à la moyenne pour les variables Fire .cout et Vessel. accident.cout. En effet le coût moyen de ces types de sinistre est le plus élevé pour ce Trade sector.

Le TS Industrial Products prend les valeurs au-dessus de la moyenne pour les variables Fall.cout et Damage.cout. En ce qui concerne le TS High Tech les variables pour lesquelles il prend les valeurs au-dessus de la moyenne sont Theft, War, Unknown, Other, Vessel accident et War.cout.

Le regroupement que nous pouvons faire au vu de ce plan factoriel est de constituer 4 groupes de Trade Sectors :

1	Trading Commodities except Oil
2	Industrial Products
3	High Tech
4	Luxe Oil Pre-launch Auto Pharma Logistics Removals Project Cargo

Le 4eme groupe est composé de 8 Trade Secteurs qui sont à proximité relative dans le plan factoriel.

Parmi nos Trade Secteurs, nous avons suffisamment d'observations pour effectuer une modélisation pour les secteurs : Trading Commodities except Oil, Industrial Products, High Tech, Oil, Auto, Logistics, Pharma

En revanche, les secteurs nécessitant le regroupement du fait de manque de données sont : Luxe, Pre-launch, Project Cargo, Removals.

En conclusion, les secteurs Industrial Products, High Tech et Trading commodities except Oil ne peuvent pas être regroupées et doivent être considérées à part d'après l'ACP.

## 2) Analyse Factorielle des Correspondances (AFC) et Classification Ascendante Hiérarchique (CAH)

Cette analyse sert à détecter les liaisons qui existent entre deux variables. Elle s'applique surtout aux tableaux de contingence croisés. L'AFC vise à rassembler en un nombre réduit de dimensions la plus grande partie de l'information initiale en s'attachant non pas aux valeurs absolues, mais aux correspondances entre variables, c'est-à-dire aux valeurs relatives.

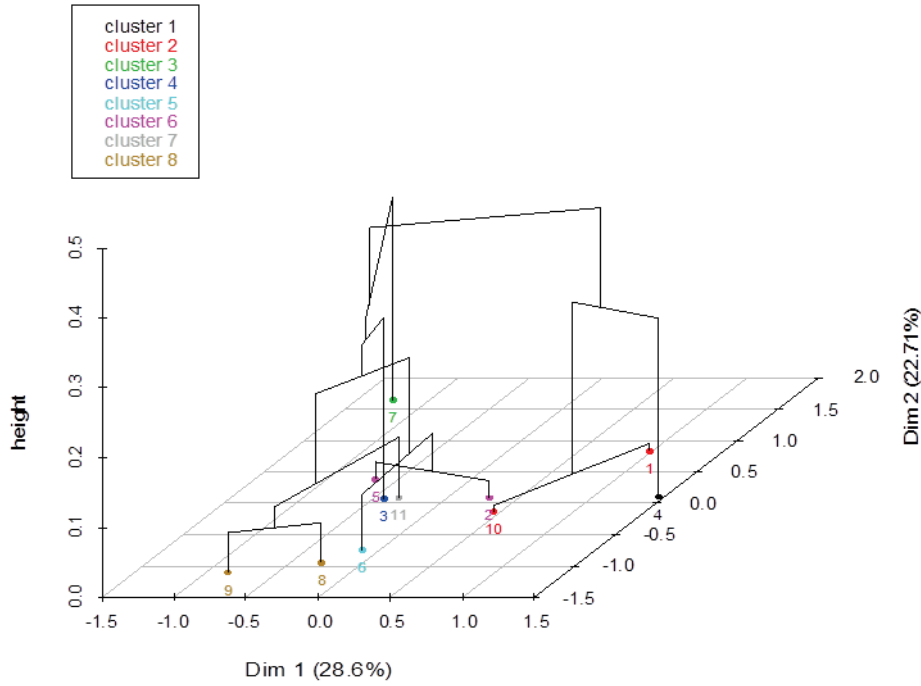
De plus, nous pouvons effectuer une Classification Ascendante Hiérarchique (CAH) sur nos données. CAH organise les observations définies par un certain nombre de variables, en les regroupant de façon hiérarchique. Le processus de classification commence par le regroupement des variables qui sont les plus semblables entre elles et ensuite CAH regroupe les observations qui sont moins semblables et ainsi de suite jusqu'à l'obtention d'un seul groupe. Nous avons la possibilité de « couper » l'arbre hiérarchique au plus bas pour que les classes formées soient le plus homogènes possibles.

### ➤ Application aux données Marine Cargo

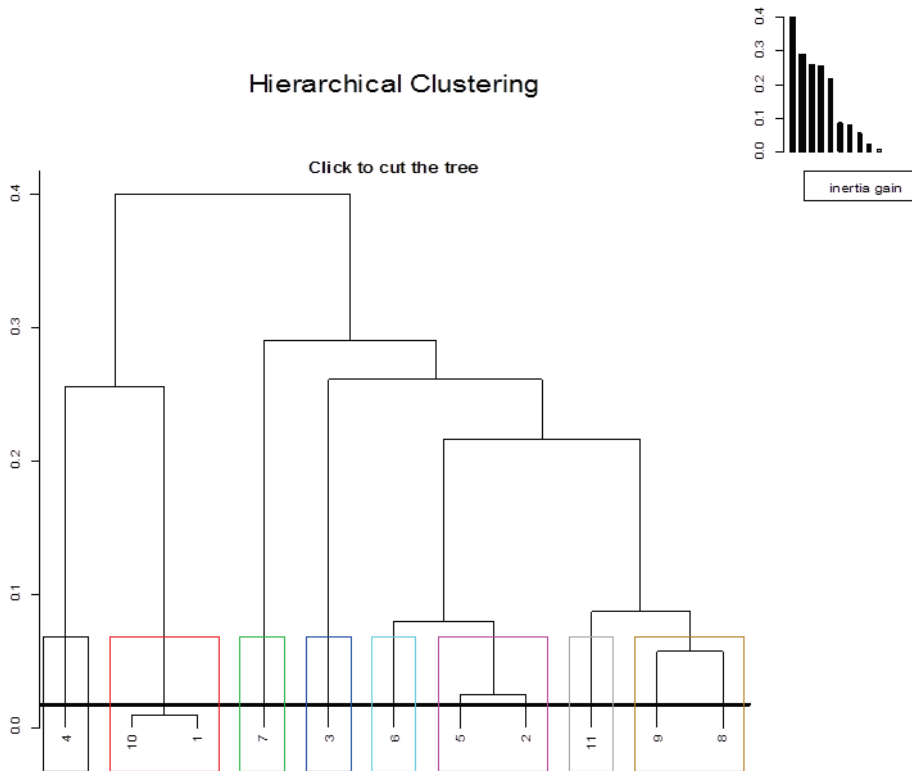
Les données entrées pour l'AFC sont les mêmes que pour l'ACP : les Trade Sectors (individus) et la fréquence moyenne avec IBNYR Aslf 2013 rapportée à la prime avec le coût moyen (variables). Nous obtenons les résultats suivants :



### Hierarchical clustering on the factor map



### Hierarchical Clustering



Ainsi le regroupement proposé par la CAH après avoir effectué l'AFC est décrit dans le tableau suivant :

TS	Cluster
Logistics	1
Removals	2
Automotive	2
Pharma/Chemistry	3
Industrial Product	4
Oil	5
JB/Luxury/Valuable	6
High Tech	6
Trading Commodities except Oil	7
Project Cargo	8
Pre-launch	8

La CAH propose de regrouper ensemble les secteurs Removals et Automotive, JB/Luxury/Valuable et High Tech, Project Cargo et Pre-launch.

Nous rappelons que la CAH a une vision « sinistres » et ne dispose pas de la vision exposition proprement dite de l'engagement et de la répartition de la part moyenne. Elle considère seulement qu'une partie de l'exposition, les primes qui sont incluses dans le calcul Aslf 2013 de la fréquence. De plus, pour certains secteurs d'activité il y a très peu de données ce qui rend la CAH en quelque sorte « aveugle » d'où la différence entre ces regroupements. Nous allons compléter ce manque par l'analyse de l'exposition.

### 3) Vision des TS par Contrôle de gestion et par la Souscription

Afin de pouvoir regrouper au plus juste nos secteurs d'activité, nous utilisons une vision du contrôle de gestion de ces secteurs. Cette vision consiste en caractérisation de chaque TS en fonction de la fréquence et de sévérité.

Selon le service du contrôle de gestion nous pouvons classer les Trade Sectors en trois groupes : premier groupe avec les TS qui ont une **fréquence faible et sévérité importante(1)**, deuxième groupe avec les TS **de forte fréquence et de faible sévérité(2)** et le dernier groupe qui inclut ceux TS qui ont **une fréquence et sévérité importantes(3)**.

Ainsi on trouve dans le premier groupe : TS Automotive, TS Oil, TS JB/Luxury/Valuable, TS Pharma/Chemistry, TS Project Cargo et TS Pre-launch.

Dans le deuxième groupe on trouve : TS Removals et TS Logistics

Et enfin dans le troisième groupe on a : TS High Tech, TS Trading Commodities except Oil et TS Industrial Products.

Groupe	TS
1	Automotive
1	JB/Luxury/Valuable
1	Oil
1	Pharma/chemistry
1	Pre-launch
1	Project Cargo
2	Logistics
2	Removals
3	High Tech
3	Industrial Products
3	Trading Commodities except Oil

Ce regroupement nous sert comme aide au regroupement car si on regroupe les TS de deux groupes différents le regroupement ne sera pas homogène.

La souscription effectue son regroupement en se basant sur l'homogénéité du risque et sur les types de garanties). Le regroupement proposé est :

TS	Groupe
Auto	1
High Tech	2
Industrial Products	3
Oil	4
Trading Commodities except Oil	5
JB/Luxury/Valuable	6
Pharma/Chemistry	6
Logistics	7
Removals	7
Pre-launch	8
Project Cargo	8

#### 4) Analyse de l'exposition des TS dans le cadre de regroupement.

Pour valider notre regroupement nous nous intéressons à la distribution de l'engagement moyen par police Master pondéré par la prime de chaque police locale. En fait, chaque client ayant souscrit un contrat d'assurance auprès d'AXA CS a une police Master qui regroupe toute l'activité assurée de ce client. Par contre les clients ont souvent des succursales localisées en peu partout dans le monde et de ce fait la police du client sera divisée en polices locales pour chaque pays. Ainsi, plusieurs sites industriels ou commerciaux sont assurés par la même police locale s'ils sont situés dans le même pays. Ainsi, chaque police locale a une prime, un engagement et une part différents. La prime du programme Master correspond à la somme des primes des polices locales.

Pour faire un regroupement entre les secteurs homogènes nous devons nous assurer que les secteurs sont homogènes en termes d'engagement moyen et de la part moyenne. En effet, nous avons calculé un engagement pour chaque police Master (sachant que nous disposons des données que pour les polices locales, mais nous avons fait le tri par le nom de l'assuré) pondéré par la prime locale. Ensuite nous calculons tout simplement la moyenne des polices Master par TS. Nous

procédons de la même manière pour calculer la part moyenne. Les résultats sont présentés dans le graphique ci-dessous :

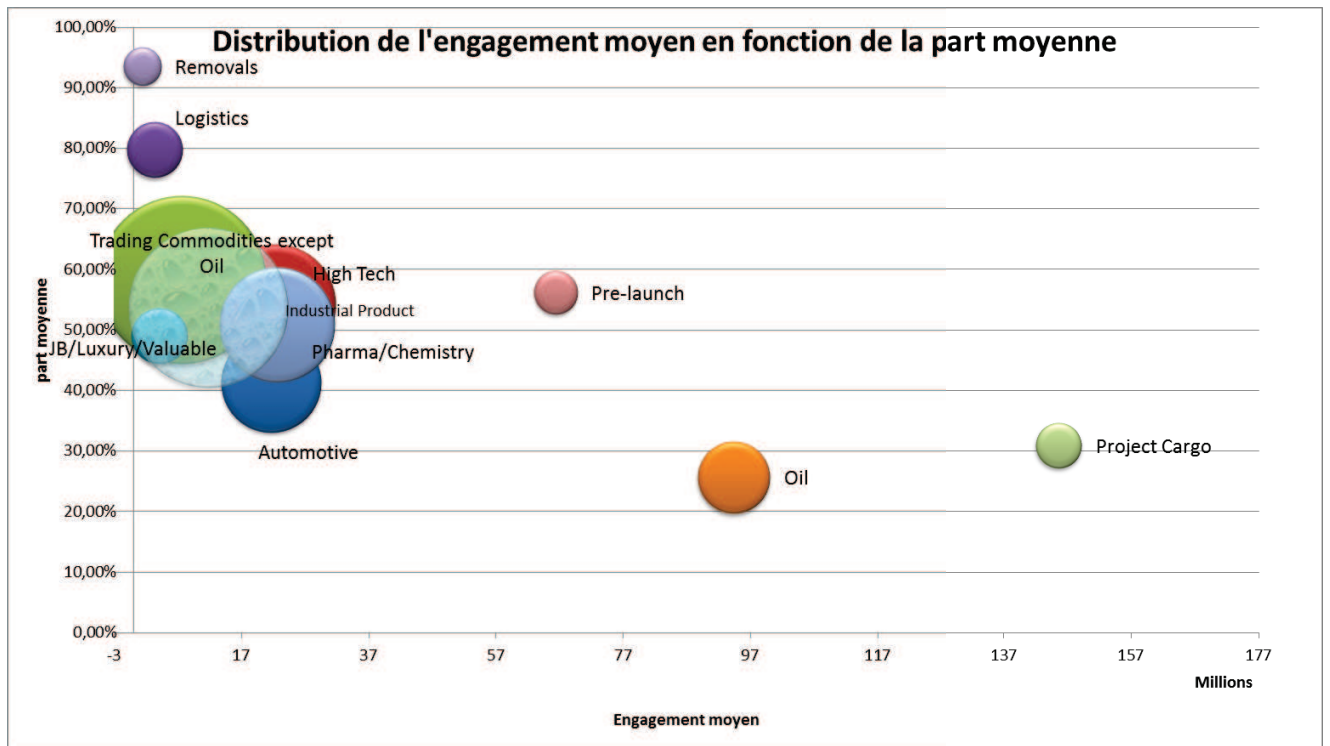
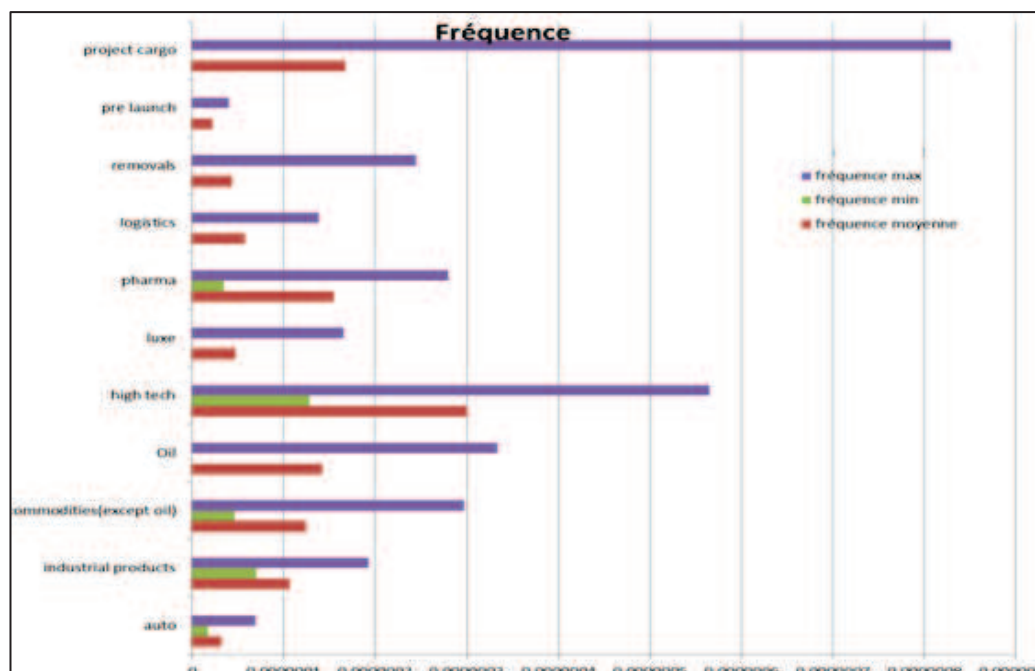


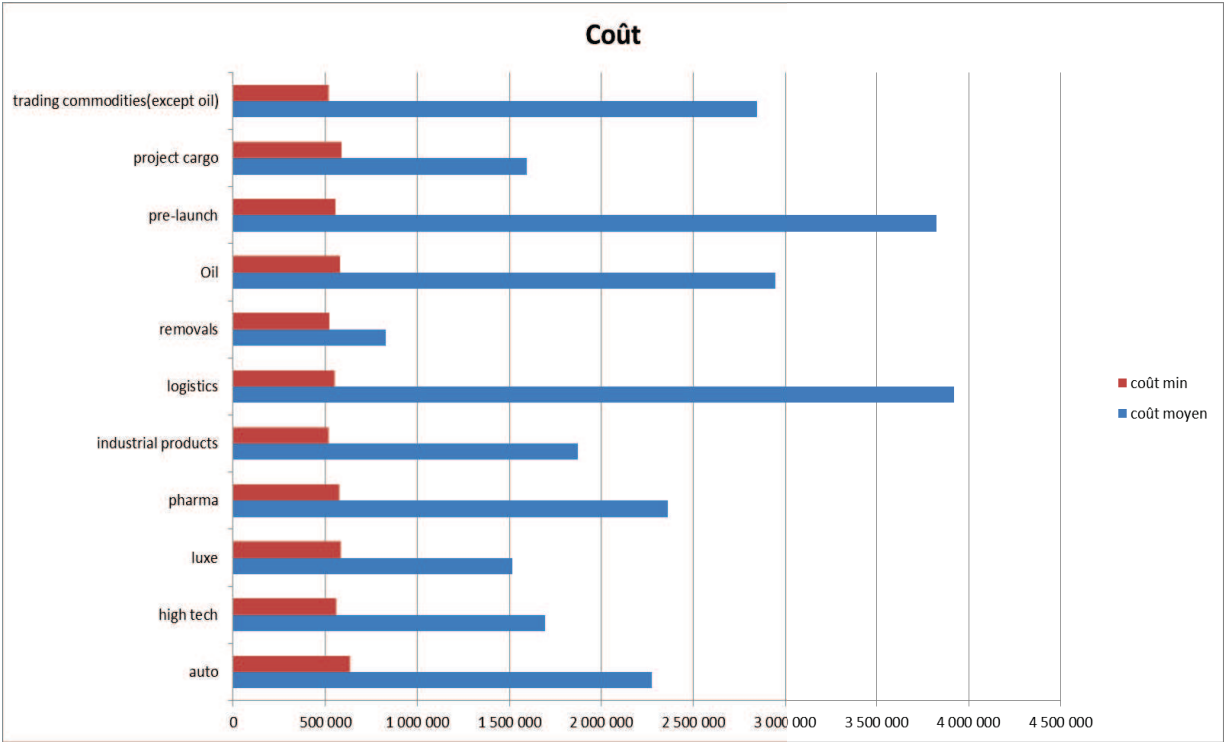
Figure 13 Distribution de l'engagement moyen en fonction de la part moyenne par Trade Sector

La taille des boules est fonction du nombre de sinistres au-dessus de 500 000 € qui ont eu lieu durant la période d'observation.

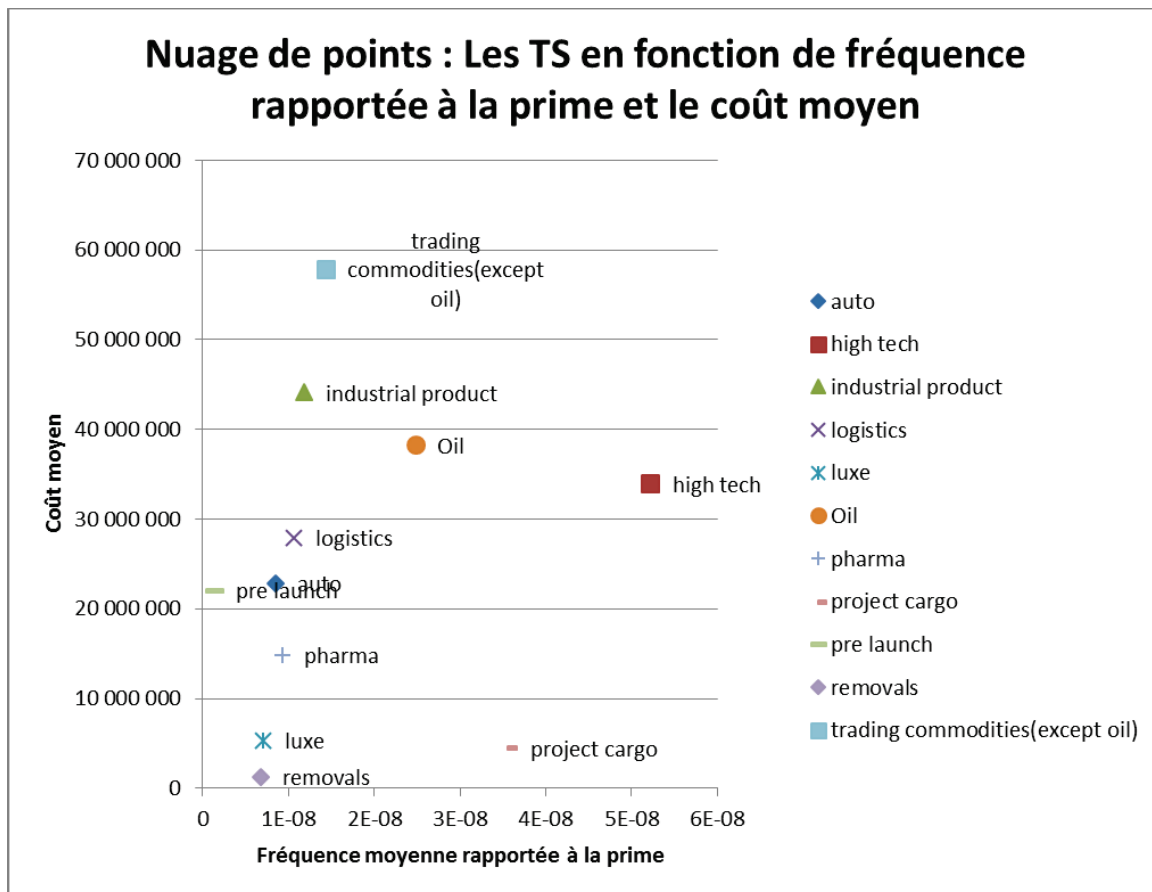


Nous observons le nombre de sinistres moyen rapporté à la prime assez petite pour les secteurs Logistics et Removals. Les fréquences moyennes des secteurs Luxe et Pharma sont assez proches.

Nous allons par la suite commenter plus en détail chaque graphique pour chaque candidats au regroupement.



En ce qui est le coût moyen, les secteurs Pre-launch et Oil se rapprochent, de même pour les secteurs Luxe et Pharma. Les secteurs Logistics et Removals n’ont pas les coûts moyens proches, mais cette différence se rattrape par la fréquence.

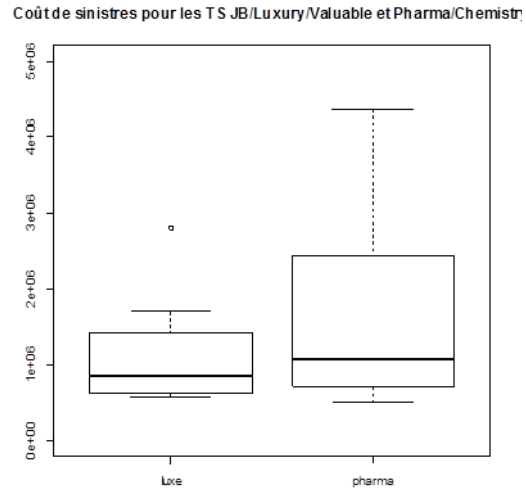
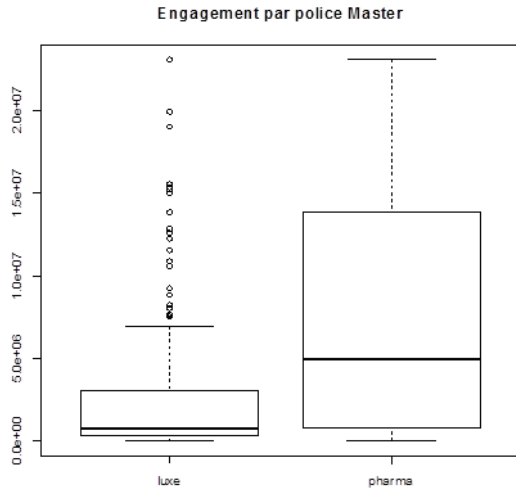


Nous observons sur ce graphique qui réunit la fréquence moyenne rapportée à la prime avec le coût moyen que les secteurs Luxe et Pharma sont assez proches. En effet, en termes de fréquence moyenne Removals admet plus de sinistres, par contre en termes de coût moyen c'est Logistics qui est plus cher. Ceci se compense quand nous calculons la charge moyenne sinistre qui est calculé en multipliant la fréquence moyenne par le coût moyen. Nous observons le même effet pour Project Cargo et Pre-launch.

Ainsi nous distinguons trois groupes –candidats au regroupement : JB/Luxury/Valuable avec Pharma/Chemistry, Logistics avec Removals et Project Cargo avec Pre-launch. Nous allons alors détailler plus précisément notre analyse en se concentrant sur ces candidats.

#### ➤ JB/Luxury/Valuable et Pharma/Chemistry

- Nous remarquons que les secteurs JB/Luxury/Valuable et Pharma/Chemistry ont les parts moyennes presque identiques (49% pour JB/Luxury/Valuable et 50,8% pour Pharma/Chemistry). Les engagements moyens sont assez proches (4 114 454€ pour JB/Luxury/Valuable et 22 569 746€ pour Pharma/Chemistry). Quant à la taille des boules le secteur Pharma/Chemistry est beaucoup plus sinistré (64 sinistres) que JB/Luxury/Valuable (15 sinistres).
- La fréquence maximale des deux secteurs est relativement proche. La fréquence moyenne de JB/Luxury/Valuable est approximativement deux fois plus élevée que celle de Pharma/Chemistry.
- Le coût moyen de ces deux secteurs est très proche, il en est de même pour le coût minimum. En revanche le coût maximum de Pharma/Chemistry est deux fois plus élevé que celui de JB/Luxury/Valuable.



- Les coûts de sinistres de Luxe sont moins dispersés car les moustaches sont très proches de la boîte, en revanche pour Pharma, ils sont plus dispersés car la moustache supérieure est très éloignée de la boîte. L'emplacement des boîtes en bas nous indique que la plupart des coûts sont bas. Il faut noter que les quantiles de la boîte sont 20% et 80%.
- Nous comparons également la répartition des polices par classes d'engagement et des parts. Pour cela nous divisons les engagements et les parts en 10 classes. Ensuite nous construisons un tableau contenant les engagements et les parts par police Master. Nous obtenons donc, dans les cases le nombre de polices Master pour le croisement donné de l'engagement et de la part.

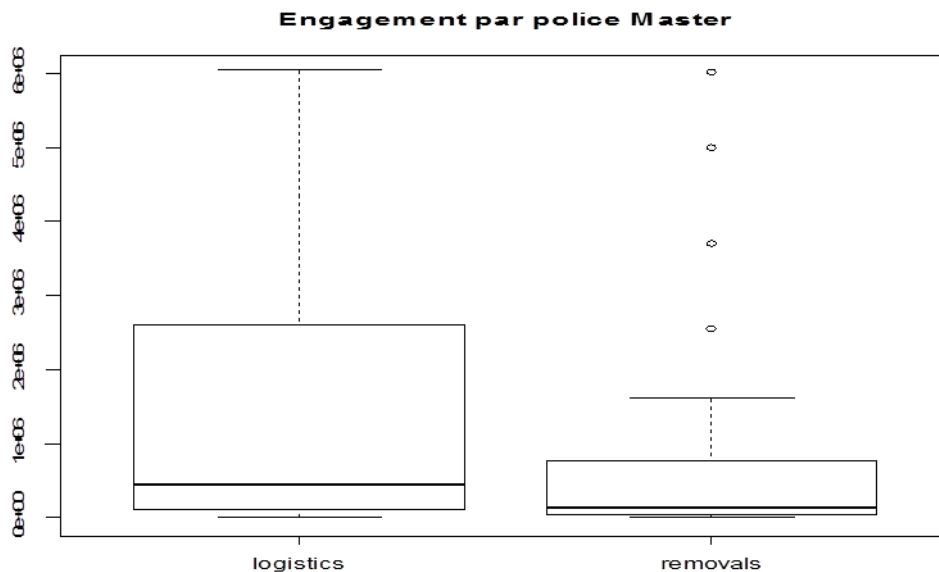
Engagement en €	Luxe	Part AXA en %										Total général
		[0:10]	[10:20]	[20:30]	[30:40]	[40:50]	[50:60]	[60:70]	[70:80]	[80:90]	[90:100]	
0 ; 250k	1			5	6		14	1		1	10	37
250k ; 500k	2			7	8		17				6	38
500k ; 1M	3			7	12	4	10	1	1		2	37
1M ; 5M	4		2	18	13	5	9			1	11	59
5M ; 10M	5		1	2	4		3				5	15
10M ; 20M	6		3	2	3	1				2	3	14
20M ; 30M	7		1	1			1					3
30M ; 40M	8											0
40M ; 50M	9		1									1
50M ; ∞	10	2										2
<b>Total général</b>		2	8	42	46	10	54	2	1	4	37	<b>206</b>

Engagement en €	Pharma	Part AXA en %										Total général
		[0:10]	[10:20]	[20:30]	[30:40]	[40:50]	[50:60]	[60:70]	[70:80]	[80:90]	[90:100]	
0 ; 250k	1			1		1					2	4
250k ; 500k	2				1					1	1	3
500k ; 1M	3							1			1	2
1M ; 5M	4		1	2		2					1	6
5M ; 10M	5	1	1				1		2		1	6
10M ; 20M	6			1		1		1			3	6
20M ; 30M	7	1										1
30M ; 40M	8											0
40M ; 50M	9	1	1									2
50M ; ∞	10	2	1									3
<b>Total général</b>		5	4	4	1	4	1	2	2	1	9	<b>33</b>

Nous observons une certaine ressemblance quant à la répartition des polices Master. Dans les deux secteurs la répartition des engagements par rapport aux parts est très proche entre ces deux trade secteurs.

### ➤ Logistics et Removals

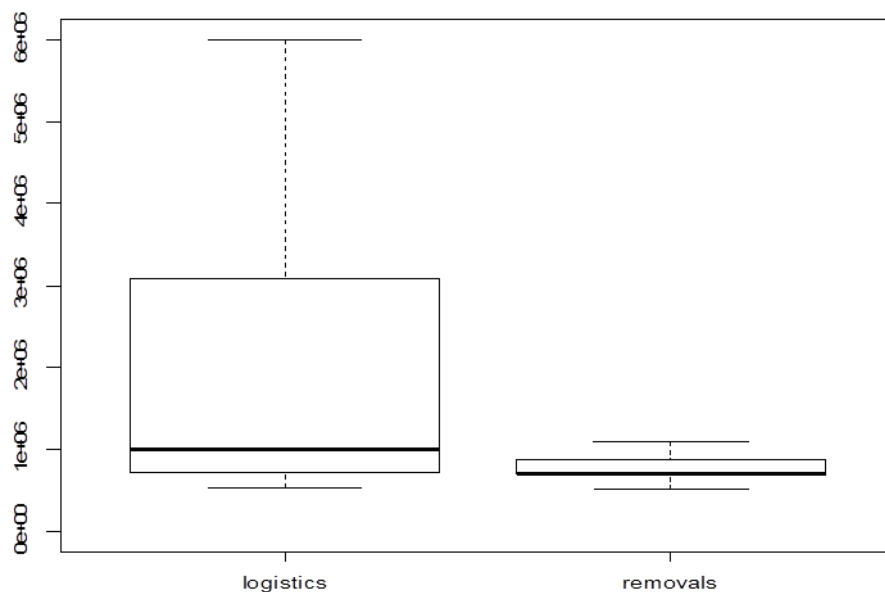
- Les secteurs Logistics et Removals sont très proches en engagement moyen (3 342 382€ pour Logistics et 1 418 793€ pour Removals) et en part AXA (79,7% et 93,5% pour Logistics et Removals respectivement). La ressemblance est présente aussi en sinistralité.



- En termes de fréquence ces deux secteurs sont très proches. La fréquence maximum enregistrée est celle de Removals et est en peu plus élevée que celle de Logistics (2,4477E-07 pour Removals et 1,3814E-07 pour Logistics).
- En ce qui concerne le coût, le secteur Removals a connu des sinistres beaucoup moins élevés en termes de coût que le secteur Logistics. Ainsi le coût maximum pour ces deux secteurs est 27 884 208 pour Logistics et 1 314 055 pour Removals. Ceci pose un problème pour modéliser la loi de coût car lors de la simulation de la loi de coût on peut avoir un sinistre très élevé alors que ce n'est pas possible pour le secteur Removals. Mais nous notons que le coût moyen reste relativement proche pour ces deux secteurs.



### Coût de sinistres pour les TS Logistics et Removals



- Nous pouvons constater que le TS Removals est moins dispersé en termes de coût de sinistres que le TS Logistics, la médiane est autour de 800k€ pour Removals et de 1M€ pour Logistics. Le fait que les deux corps des boites sont situés en bas signifie que la plupart des coûts sont bas pour ces deux trade sectors.

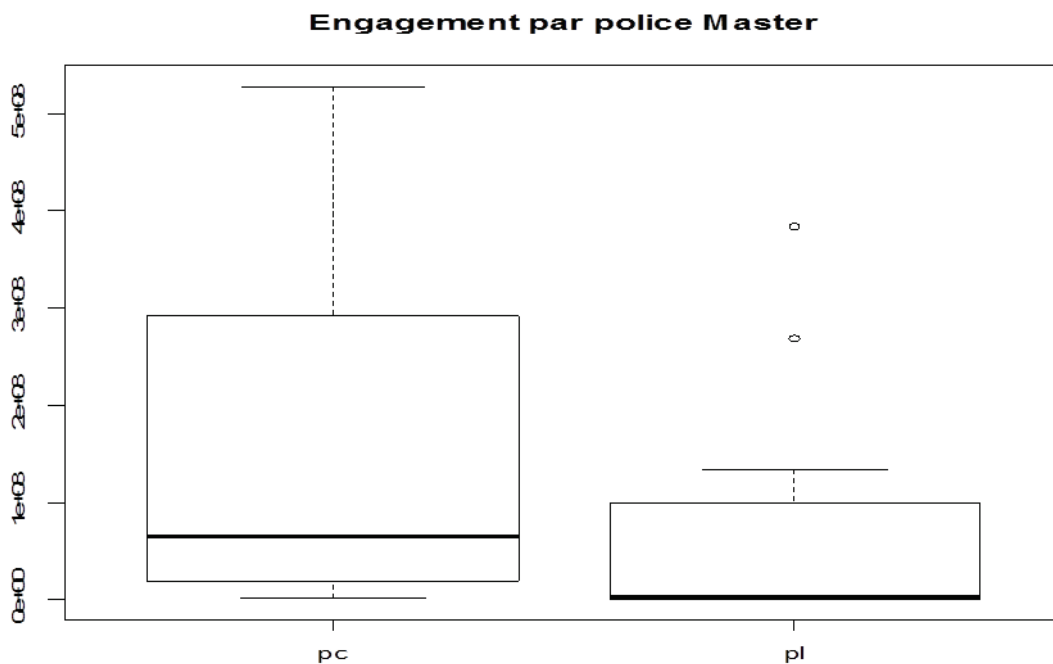
Engagement en €	Logistics	Part AXA en %										Total général
		[0:10]	[10:20]	[20:30]	[30:40]	[40:50]	[50:60]	[60:70]	[70:80]	[80:90]	[90:100]	
0 ; 250k	1			1	2	2	4				51	60
250k ; 500k	2				4	2		2			17	25
500k ; 1M	3			2	2		1				10	15
1M ; 5M	4		2	5	3	2	3	2	1	2	23	43
5M ; 10M	5			1	1	3		1			6	14
10M ; 20M	6		1		2					1	2	6
20M ; 30M	7	1	1	1							1	4
30M ; 40M	8										1	1
40M ; 50M	9											
50M ; ∞	10				1							1
Total général		1	4	10	15	9	8	5	1	5	111	169

Engagement en €	Removals	Part AXA en %										Total général
		[0:10]	[10:20]	[20:30]	[30:40]	[40:50]	[50:60]	[60:70]	[70:80]	[80:90]	[90:100]	
0 ; 250k	1			1							22	23
250k ; 500k	2										3	3
500k ; 1M	3			1							6	7
1M ; 5M	4										6	6
5M ; 10M	5			1							1	2
10M ; 20M	6							1			1	2
20M ; 30M	7											0
30M ; 40M	8											0
40M ; 50M	9											0
50M ; ∞	10											0
Total général				3				1			39	43

- Quant à la répartition des polices Master par engagement et par la part il nous manque des observations pour Removals mais néanmoins nous constatons avec le peu de données que nous avons que le nombre maximum de polices est toujours pour les engagements de 0 à 250k€ pour la part de 90% à 100%.

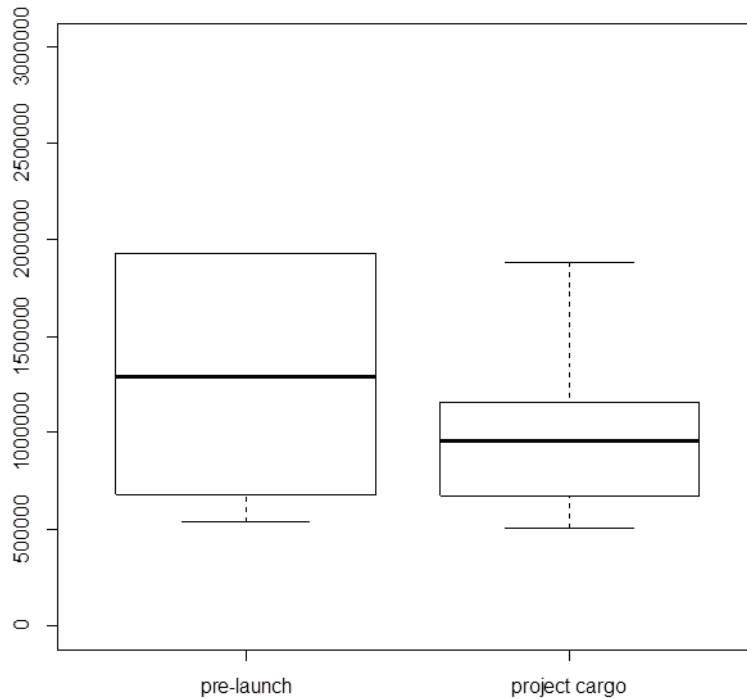
### ➤ Project Cargo et Pre-launch

Au vu de la distribution par rapport à l'engagement moyen et la part moyenne ces deux secteurs sont assez éloignés. Mais si Project Cargo a un engagement moyen très élevé (145 325 576€) et une petite part (30.9%), Pre-launch a un engagement moyen moins élevé (66 399 324€) mais sa part moyenne est plus grande (56.1%). Cela signifie que l'engagement moyen à la part AXA CS est très proche pour ces deux trade secteurs.



- Pour la fréquence moyenne, ces deux secteurs n'ont pas de grande ressemblance ( $2,16912E-08$  pour Pre-launch et  $1,66969E-07$  pour Project Cargo). Il s'agit bien sûr de la fréquence rapportée à la prime. La moyenne générale est sensible aux valeurs aberrantes, c'est pour cette raison là que notre fréquence moyenne rapportée à la prime de Project Cargo est très élevée. Ceci est dû au fait que la fréquence maximale rapportée à la prime enregistrée pour Project Cargo est de  $8,29E-07$ , alors que Pre-launch a vu sa fréquence augmenter au maximum jusqu'au  $4,05E-08$ . (Les tableaux avec la fréquence et le coût sont consultables en annexe)

### Coût de sinistres pour TS Project Cargo et Pre-launch



- Au vu des boîtes à moustaches construites nous déduisons que la plupart de sinistres ont un coût entre 750 000€ et 2 000 000€ pour Pre-Launch et entre 750 000€ et 1 250 000€ pour Project Cargo. Les données ne sont pas très dispersées pour le secteur Pre-launch, quant au secteur Project Cargo, la moustache supérieure est assez éloignée du corps de la boîte, ce qui signifie que la dispersion des coûts élevés est grande.

Nous pouvons conclure que Project Cargo a des sinistres beaucoup plus fréquents mais au coût moyen moins élevés que ceux de Pre-launch. Donc, après l'application de la part AXA et lors de calcul de la charge totale nous auront les montants de même ordre de grandeur.

	Part AXA en											
Engagement en €	Project Cargo	[0:10]	[10:20]	[20:30]	[30:40]	[40:50]	[50:60]	[60:70]	[70:80]	[80:90]	[90:100]	Total général
	Étiquettes d	1	2	3	4	5	6	8	10			
0 ; 250k	1											0
250k ; 500k	2											0
500k ; 1M	3											0
1M ; 5M	4								1		2	3
5M ; 10M	5	1	1								4	6
10M ; 20M	6			1	2	1						4
20M ; 30M	7			2	1					1		4
30M ; 40M	8			1								1
40M ; 50M	9		1		1							2
50M ; ∞	10	13	9	2	1	1	1					27
	Total général	14	11	6	5	2	1	0	1	0	7	47

		Part AXA en										
Engagement en €	Pre-launch	[0:10]	[10:20]	[20:30]	[30:40]	[40:50]	[50:60]	[60:70]	[70:80]	[80:90]	[90:100]	Total général
	Étiquettes d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0 ; 250k	1					1					6	7
250k ; 500k	2						1				2	3
500k ; 1M	3						1				1	2
1M ; 5M	4						1					1
5M ; 10M	5									1		1
10M ; 20M	6					1	1					2
20M ; 30M	7											0
30M ; 40M	8											0
40M ; 50M	9		1	1								2
50M ; ∞	10	4	2	1								7
Total général		4	3	2	0	2	4	0	0	0	10	25

La manque de données pour ces trade secteurs ne nous permet pas de tirer de grandes conclusions de ces deux tableaux, mais néanmoins nous pouvons remarquer la ressemblance en distribution de polices Master pour ces deux secteurs. Le plus grand nombre de police a un engagement de plus de 50 millions d'euros et a les parts de 0% à 20%.

### Synthèse des Méthodes :

Sinistralité		Exposition	
ACP	AFC (CAH)	Souscription	Contrôle de gestion
Trading	Trading	Trading	Trading
Industrial Products	Industrial Products	Industrial Products	Industrial Products
High Tech	High Tech	High Tech	High Tech
Luxe	Luxe	Luxe	Logistics
Pharma	Pharma	Pharma	Removals
Removals	Removals	Removals	Auto
Auto	Auto	Logistics	Luxe
Oil	Oil	Auto	Pharma
Logistics	Logistics	Oil	Pre-launch
Pre-launch	Pre-launch	Pre-launch	Project Cargo
Project Cargo	Project Cargo	Project Cargo	Oil

Nous avons synthétisé le regroupement proposé par chaque méthode dans ce tableau. Ainsi, nous avons une vision Sinistralité qui est utilisée par l'ACP et l'AFC (CAH) et de l'autre côté nous avons une vision Exposition utilisée par le Contrôle de Gestion et par la Souscription. Les différents groupes de regroupement sont mis en couleur. Les secteurs sans aucune coloration de cellule ne sont regroupés avec aucun secteur. Les secteurs qui doivent forcément se retrouver dans un groupe sont : Luxe, Project cargo, Pre-launch et Removals.

## 5) Regroupement final

Compte tenu de l'analyse de données de sinistres et l'analyse de l'exposition de chaque Trade Sector (candidat au regroupement) que nous avons effectué nous décidons de retenir le regroupement suivant :

TS	Groupe
Auto	1
High Tech	2
Industrial Products	3
Oil	4
Trading Commodities except Oil	5
JB/Luxury/Valuable	6
Pharma/Chemistry	6
Logistics	7
Removals	7
Pre-launch	8
Project Cargo	8

Ce regroupement garde le regroupement proposé par CAH des secteurs Pre-launch et Project Cargo en un groupe qui coïncide avec la vision de souscription et de contrôle de gestion.

Nous regroupons aussi JB/Luxury/Valuable et Pharma/Chemistry ensemble car ces deux secteurs se ressemblent en termes d'exposition et notamment ils ont la part moyenne très proche ainsi que l'engagement moyen.

Le regroupement des secteurs Logistics et Removals se base aussi sur la répartition de la part moyenne et de l'engagement moyen. En effet, ces deux valeurs sont très proches pour les deux secteurs d'activité. De plus la répartition des polices en fonction de l'engagement et la part est très semblable.

Ainsi, nous nous basons pour faire notre choix de regroupement sur la vision exposition, car la vision sinistralité peut varier en fonction de l'exposition de notre portefeuille. Notre modèle, étant un modèle par exposition, nous portons plus d'importance à l'exposition et donc nous regroupons les secteurs Project Cargo avec Pre-launch, JB/Luxury /Valuable avec Pharma/Chemistry et Logistics avec Removals. Les autres secteurs possèdent suffisamment d'observations pour effectuer notre modélisation et nous les laissons tels qu'ils sont.

## D. Choix du seuil

Nous avons établi que la seule base de données historique d'AXA CS serait utilisée dans notre modèle. Pour cela nous allons procéder à la détermination du seuil des sinistres graves pour extraire les données qui nous intéressent. Cette détermination a pour but de séparer les sinistres graves et les sinistres attritionnels. Nous rappelons que le seuil de séparation entre les sinistres graves et attritionnels au sein du département Modèle interne, réassurance et Risque Cat est de 3 millions pour toutes les branches. Une étude du département a pu démontrer que même si on pouvait avoir des seuils différents pour chaque branche, le seuil commun de 3 millions est optimal.

A présent nous allons déterminer le seuil pour chaque Trade Sector et ensuite en déduire le seuil pour la branche Marine Cargo. Pour ce faire nous allons utiliser la théorie des valeurs extrêmes et les deux méthodes proposées par celle-ci, la méthode par blocs et la méthode POT (Peaks Over Threshold).

# 1) Deux méthodes de détermination du seuil de la Théorie des valeurs extrêmes (TVE)

La TVE, comme son nom l'indique, s'intéresse avant tout à des quantités qui dépendent des queues de distribution et à la loi des observations au-delà d'un certain seuil élevé. Mais quand nous avons la distribution de sinistres, à quel moment commence la queue de distribution ? Pour répondre à cette question deux approches ont été développées.

La TVE vise à séparer les sinistres hétérogènes en deux groupes de sinistres homogènes, les sinistres attritionnels et les sinistres graves. Le but de cette séparation repose dans la recherche du seuil de séparation de sorte que les deux groupes soient les plus homogènes possibles. Il existe deux méthodes d'estimation du seuil : la méthode par blocs et la méthode POT (Peaks Over Threshold).

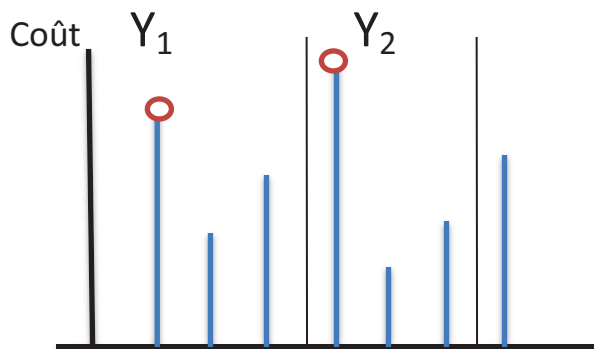
## i. Méthode par blocs

- Les hypothèses

Nous considérons une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées (iid)  $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$  de loi  $F$  inconnue. Ce sont nos sinistres. Nous les rangeons dans l'ordre chronologique. On divise cet échantillon de taille  $N$  en  $m$  blocs de taille  $n$ .

$$\underbrace{X_1 \dots X_n}_{1^{\text{er}} \text{ bloc}} \quad \underbrace{X_{n+1} \dots X_{2n}}_{2^{\text{ème}} \text{ bloc}} \quad \dots$$

Si  $m \times n > N$  alors le dernier bloc contiendra un nombre de valeurs inférieur à  $n$ . Pour chaque bloc, nous retenons le coût de sinistre maximum observé. Ainsi, nous obtenons un vecteur de  $m$  maximums  $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$ .



La méthode par bloc utilise le théorème fondamental de Fisher, Tippett et Gnedenko de la théorie des valeurs extrêmes.

### **Théorème fondamental de Fisher, Tippett et Gnedenko :**

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi  $F$  inconnue.

Et soit  $M_n = \max (X_1, X_2, \dots, X_n)$

S'il existe une suite  $(a_n) > 0$  et  $(b_n) \in \mathbb{R}$  et une fonction  $G$  non dégénérée, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = G(x)$$

Alors  $G$  est de la forme:

$$G(x) = \begin{cases} \exp\left(-[1 + \gamma x]^{-\frac{1}{\gamma}}\right) & \text{si } 1 + \gamma x > 0, \gamma \neq 0 \\ \exp(-\exp(-x)) & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$$

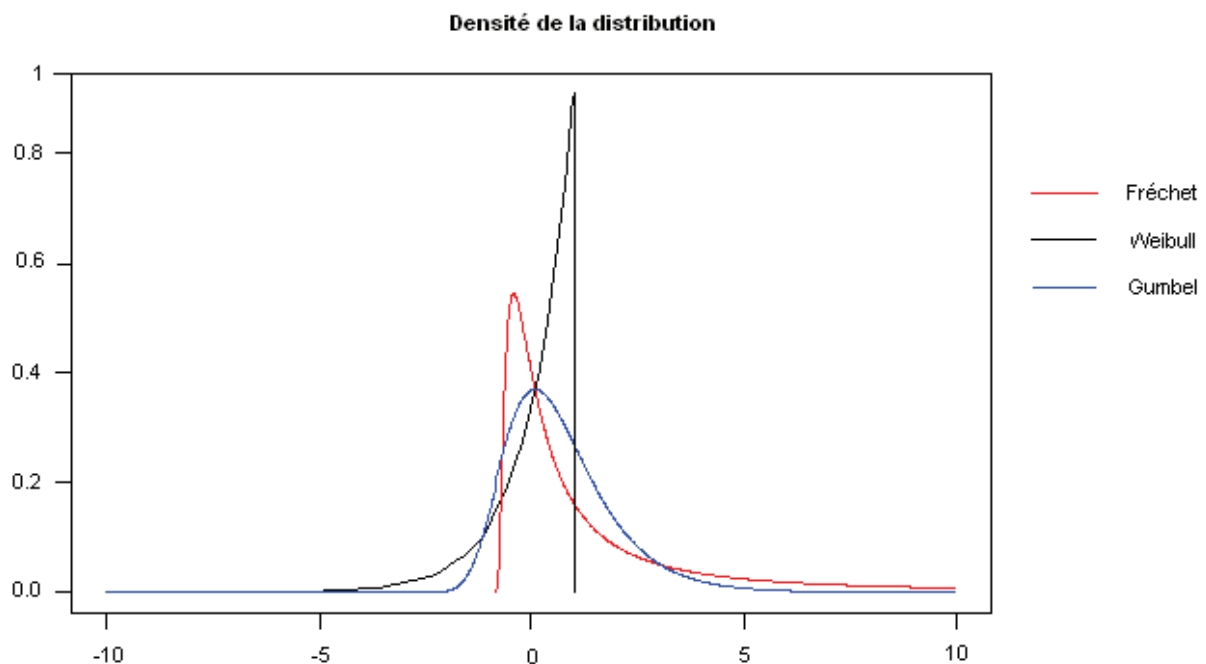
où  $G$  appartient soit à la famille de Gumbel, Fréchet ou Weibull.

$\gamma$  est un indice des valeurs extrêmes (indice de queue) qui indique la forme de la queue de distribution.

Si  $\gamma > 0$  on est dans le domaine d'attraction de Fréchet

Si  $\gamma = 0$  on est dans le domaine d'attraction de Weibull

Si  $\gamma < 0$  on est dans le domaine d'attraction de Gumbel

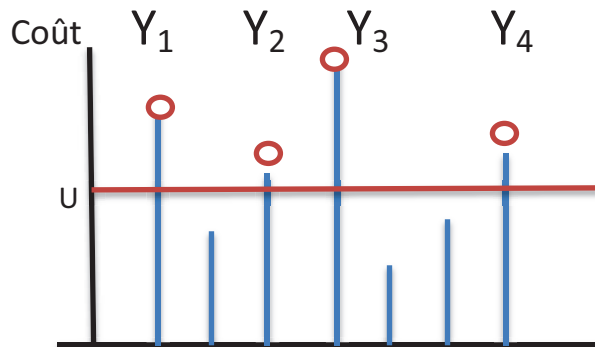


Sur ce graphique nous avons un exemple de la densité de distribution des trois domaines : Fréchet, Weibull et Gumbel.

Cette première approche est très controversée car elle se base uniquement sur la loi des maximums de chaque bloc. Or, dans un bloc nous pouvons avoir deux sinistres ayant un coût très élevés mais l'approche n'en considère qu'un seul. Donc nous perdons toute l'information fournie par le deuxième sinistre que nous ne prenons pas ou au contraire de biaiser notre analyse en prenant en compte le sinistre avec un coût faible.

## ii. La méthode POT (Peaks Over Threshold)

La deuxième méthode de détermination du seuil de sinistres graves est la méthode Peaks Over Threshold proposée par Pickands, Balkema et de Haan. Contrairement à la première méthode, nous nous fixons un seuil  $U$  et nous nous intéressons uniquement aux observations qui excèdent ce seuil. Cette méthode modélise l'excès de  $X$  d'un sinistre extrême ce qui correspond à la différence entre le coût de ce sinistre et le seuil  $U$ .



Nous considérons une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées (iid)  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  de loi  $F$  inconnue qui sont nos sinistres rangés chronologiquement. Soit  $U$  un réel qui joue le rôle du seuil. Nous définissons les excès au-delà du seuil  $U$  par les variables aléatoires  $Y_j$  telles que :

$$Y_j = X_{ij} - U, X_{ij} > U$$

La loi de  $Y_j$  conditionnellement à  $U$  est celle des variables aléatoires iid de loi :

$$\begin{aligned} F_U(x) &= P(Y_j < x | X > U) = P(X < x + U | X > U) = \\ &= \frac{P(U < X \leq x + U)}{P(X > U)} = \frac{F(x+U) - F(U)}{1 - F(U)} \quad \text{pour } x \geq 0 \end{aligned}$$

On appelle *point terminal* de la fonction de répartition  $F$ , le point  $\tau_F$  tel que

$$\tau_F := \sup\{x | F(x) < 1\}$$

Le point terminal est alors un dernier point du support.

### **Théorème de Pickands :**

Soit  $F_U$  est la densité conditionnelle par rapport au seuil  $U$  de la fonction de répartition  $F$ . Alors nous avons :

$$\sup_{x \leq \tau - U} |F_U(x) - G_{\gamma, \sigma_U}(x)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Où  $G$  est Generalized Pareto Distribution (GPD) de la forme :



$$G_{\gamma,\sigma}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\gamma x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} & \text{si } 1 + \frac{\gamma x}{\sigma} > 0, \gamma \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right) & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$$

$\gamma$  est l'indice des valeurs extrêmes qui détermine le comportement de la queue de distribution et  $\sigma$  est le paramètre de la dispersion des valeurs extrêmes.

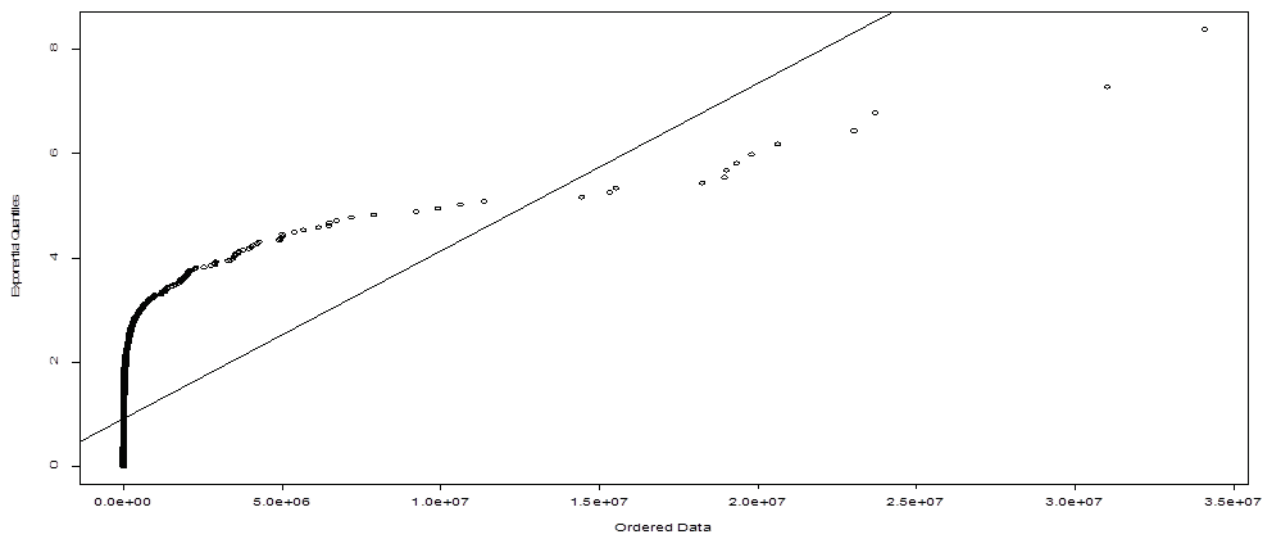
Autrement dit, la distribution des excès au-delà d'un seuil peut être uniformément approchée par une GPD.

## ➤ QQ-plot

En général le Quantile-Quantile Plot sert à vérifier que les observations suivent une loi connue. Pour ce faire le QQ-plot est construit de façon à ce que les quantiles de l'observation soient sur l'axe des abscisses et les quantiles de la loi théorique en question sur l'axe des ordonnées. Si les données suivent cette loi théorique alors les points doivent être alignés en une droite.

Ce paragraphe vise avant tout à vérifier que la théorie des valeurs extrêmes s'applique bien à nos données. Dans notre cas, le QQ-plot sert à vérifier que la loi de coût est bien à queue épaisse. Pour cela, nous allons construire un QQ-plot où sur l'axe des abscisses nous avons les quantiles empiriques et sur l'axe des ordonnées les quantiles de la loi exponentielle.

Si les coûts croissent suivant une loi exponentielle, les points seront alignés en une droite. Si les points ont une forme convexe, alors la queue de la loi est légère. Et enfin, si les points sont présentés de manière concave, la queue est épaisse.



**Figure 12 QQ-plot avec les quantiles empiriques d'une loi à queue de distribution épaisse en abscisse et les quantiles théoriques de la loi Exp en ordonnée**

Nous avons au titre d'exemple sur ce QQ-plot, les quantiles d'une loi qui a la queue de distribution épaisse sur l'axe des abscisses et les quantiles théoriques de la loi Exponentielle sur l'axe des ordonnées. Les points sont alignés et ont une forme concave donc cette loi est bien à queue épaisse.

## ➤ L'estimateur de Hill

La première étape pour déterminer le seuil de la modélisation des sinistres graves est de regarder le Hill-plot qui trace la valeur de l'indice de la queue de distribution ( $\alpha$ ) avec des intervalles de confiance en fonction de la statistique d'ordre. La statistique d'ordre est tout simplement nos observations classées par ordre croissant.

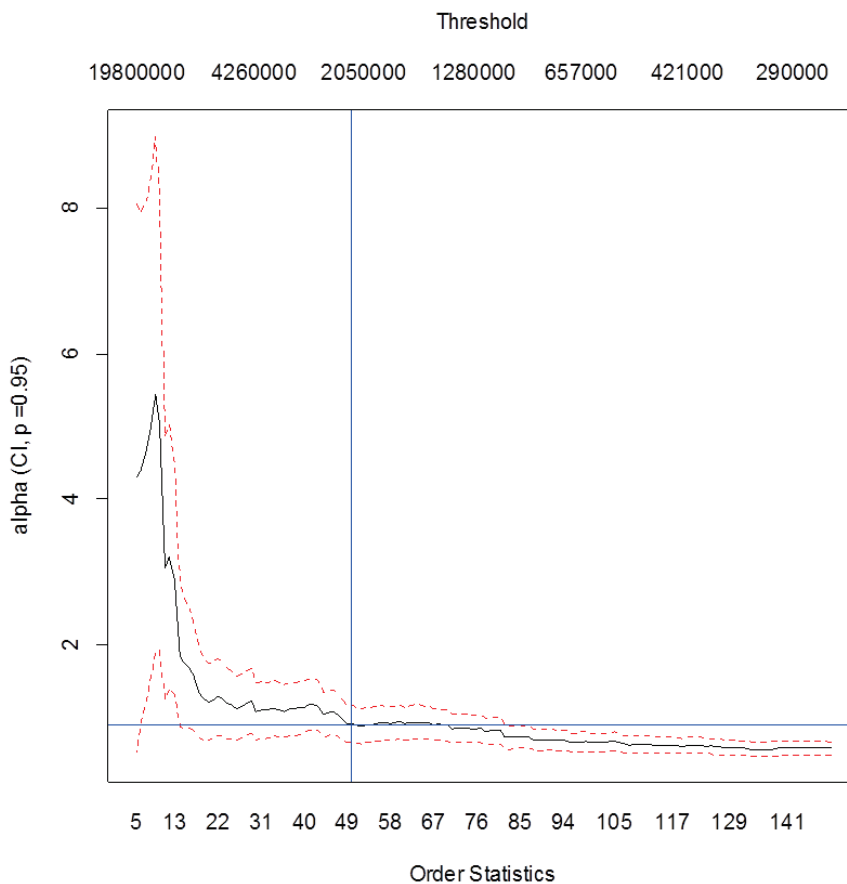
L'estimateur de Hill est l'estimateur le plus connu de l'indice de distribution  $\gamma$  est de la forme :

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\ln X_{n-j+1,n} - \ln X_{n-k,n}) \text{ pour } k \geq 1$$

Où  $k$  est l'ordre statistique le plus élevé (le nombre des excès),  $n$  est la taille de l'échantillon et  $\alpha = 1/\gamma$

Plus  $|\hat{\gamma}|$  est élevé plus le poids des extrêmes dans la distribution initiale est important.

Le paramètre de forme explique la forme générale de la distribution, i.e. sa dispersion relative. En somme, ce paramètre représente l'épaisseur de la queue de distribution.



**Figure 13 Hill-plot d'un exemple d'observations des coûts de sinistres**

Ce graphique Hill-plot nous permet d'avoir des estimations du paramètre  $\alpha$  en fonction de la statistique. En observant ce paramètre en fonction du seuil, nous remarquons qu'en deçà d'un certain seuil, la stabilité de ce paramètre est atteinte, c'est-à-dire la représentation de la queue de distribution des sinistres graves à partir de ce seuil est stable. En déterminant le seuil nous devons faire un compromis entre deux conditions : d'une part nous devons choisir le seuil lorsque

l'estimateur de Hill devient stable, mais de l'autre côté nous ne devons pas choisir un seuil trop bas pour ne pas prendre en compte les sinistres à coût faible qui risquent d'impacter fortement notre modélisation par la suite.

Au vu du graphique 14 qui présente le Hill-plot d'un exemple des observations de coût de sinistres, nous pouvons choisir le seuil de la modélisation à 2 millions d'euros.

## ➤ Mean Excess Function

Dans le cadre de la théorie des valeurs extrêmes, un critère utilisé consiste à regarder le graphique de l'espérance résiduelle (Mean Excess Function).

### **Définition :**

*Mean Excess Function* ou la *Fonction Moyenne des Excès (FME)* notée  $e(u)$  est par définition la somme des excès dépassant un certain seuil élevé  $U$ , divisé par le nombre de points des observations qui dépassent ce seuil.

Cette fonction est définie pour une variable aléatoire  $X$  de loi  $F$  par :

$$e_X(u) = E[X - u | X > u]$$

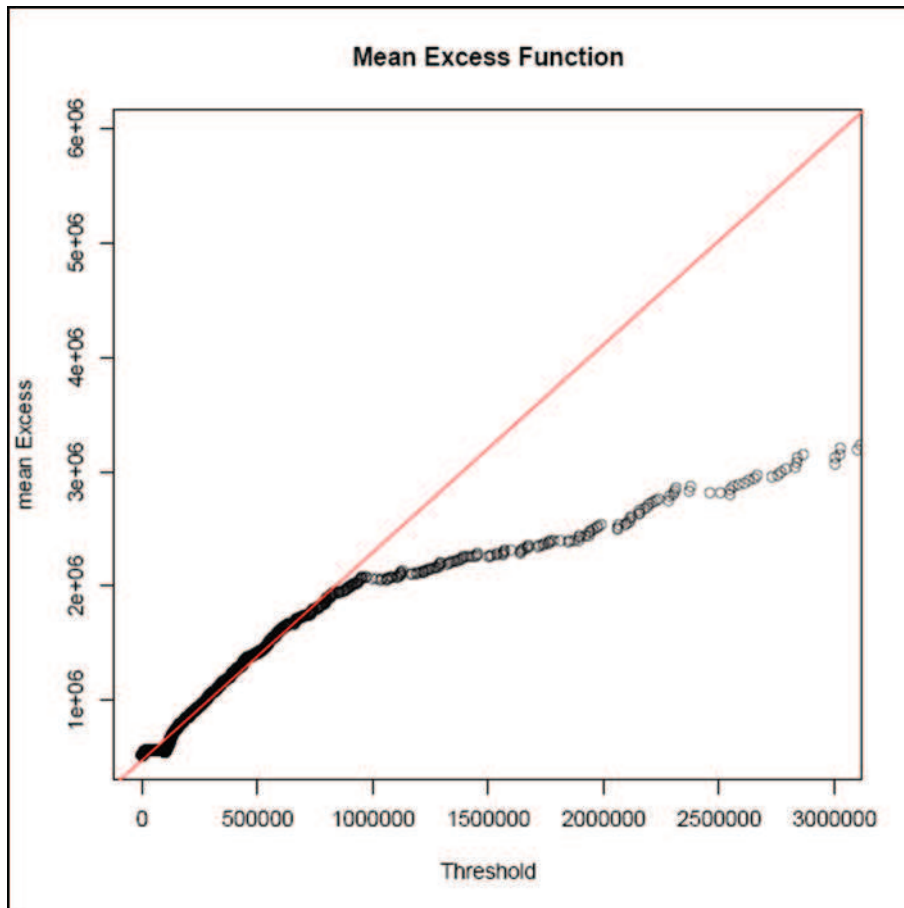
Son estimateur empirique est donné par :

$$\hat{e}_X(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u)}{\sum_{i=1}^n I_{\{X_i > u\}}}$$

Avec  $I_{\{X_i > u\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i > u \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Nous pouvons avoir trois cas de figure :

- Si à un certain seuil la fonction moyenne des excès présente une pente positive, alors les données suivent la distribution GPD avec un paramètre  $\gamma$  positif.
- Si la fonction moyenne des excès est horizontale, les données suivent la loi exponentielle
- Si la FME présente une pente négative, les observations ont une distribution à queue légère



**Figure 14 MEF d'une distribution à queue épaisse**

Cette méthode évalue la moyenne de dépassements des sinistres supérieurs au seuil choisi.

On suppose que  $X \approx GPD(\sigma; \gamma; u)$

La MEF a alors la forme suivante :

$$e(u) = E(X - u | X \geq u) = \frac{\sigma + \gamma u}{1 - \gamma}$$

Le critère de la MEF consiste à regarder le graphique et déterminer le seuil en fonction de la linéarité de  $e(u)$ . Plus particulièrement, nous choisissons le seuil dès que la linéarité de la MEF disparaît. Par exemple sur la figure 14 le seuil des sinistres graves commence à partir de coût de 1 million d'euros.

Nous avons retenu la méthode POT pour la détermination du seuil de la modélisation des sinistres graves car la méthode par blocs extrait seulement les valeurs maximales au sein d'un bloc, donc il y a un risque de perte de l'information et d'extraire les sinistres relativement faibles. La méthode POT en revanche, prend en compte toutes les valeurs susceptibles d'être les sinistres graves car elle extrait les observations maximum au-dessus d'un seuil relativement fixe que nous fixons à l'avance.

## 2) Choix du seuil de la modélisation pour les données de la Marine Cargo

Nous allons à présent appliquer la méthode POT pour tous les Trade Sectors ou les groupements de TS de la Marine Cargo.

### Hypothèses :

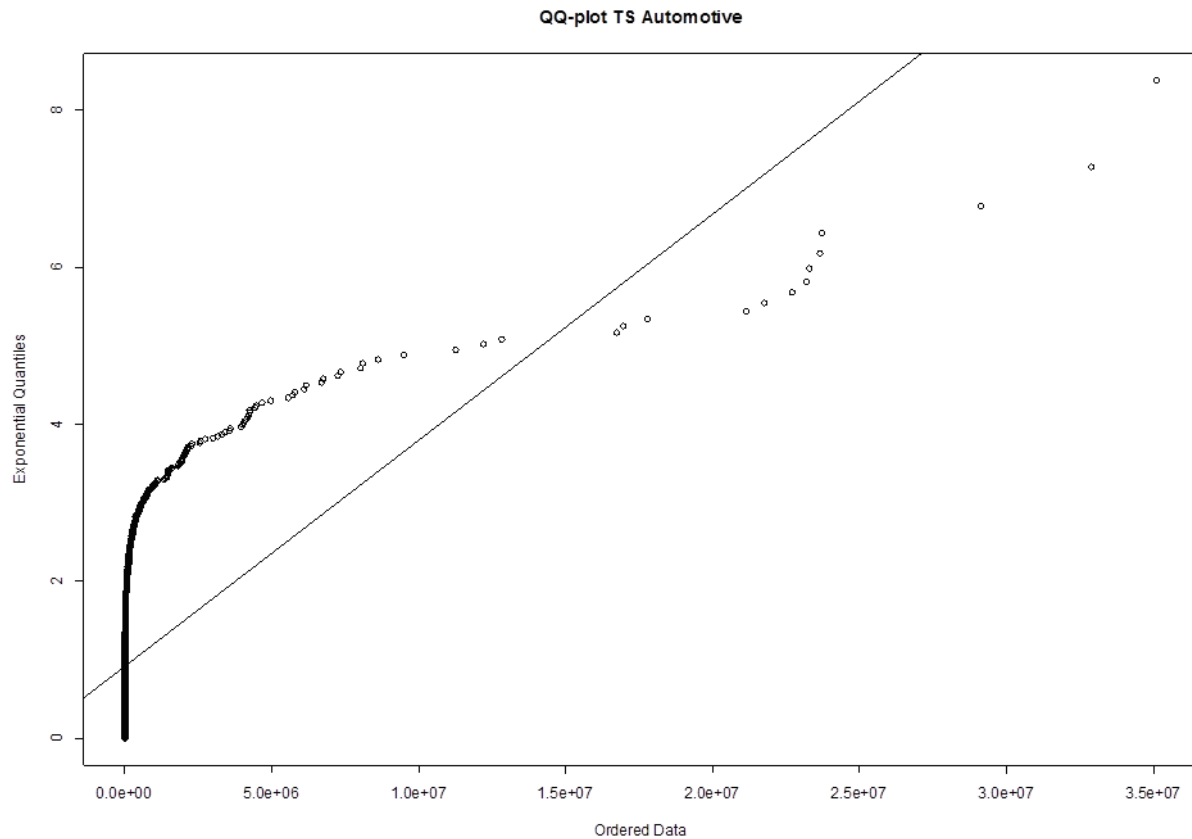
- Nous prenons comme observations le coût des sinistres du portefeuille Marine Cargo à 100% brut de franchise
- La période d'observation est de 2006 à 2012
- Le taux d'inflation du coût de sinistre est supposé constant sur la période d'observation. Ce taux est de 3%
- Les sinistres modélisés excluent ceux causés par les catastrophes naturelles car ce type de risque est très spécifique et nécessite une approche différente. Ce risque sera l'objet d'un modèle à part.

Nous allons illustrer notre démarche sur l'exemple du secteur Automotive. Nous choisissons un seuil de 50 000 euros pour enlever les sinistres attritionnels. Ensuite nous classons chronologiquement les sinistres au-dessus de 50 000 €.

### ➤ QQ-Plot

Cette partie vise avant tout à vérifier que la théorie des valeurs extrêmes s'applique à nos observations. Nous vérifions d'abord que la loi est bien à la queue épaisse. Pour cela nous représentons nos données grâce au QQ-plot.

Voici la représentation graphique de QQ-plot pour le secteur Automotive.

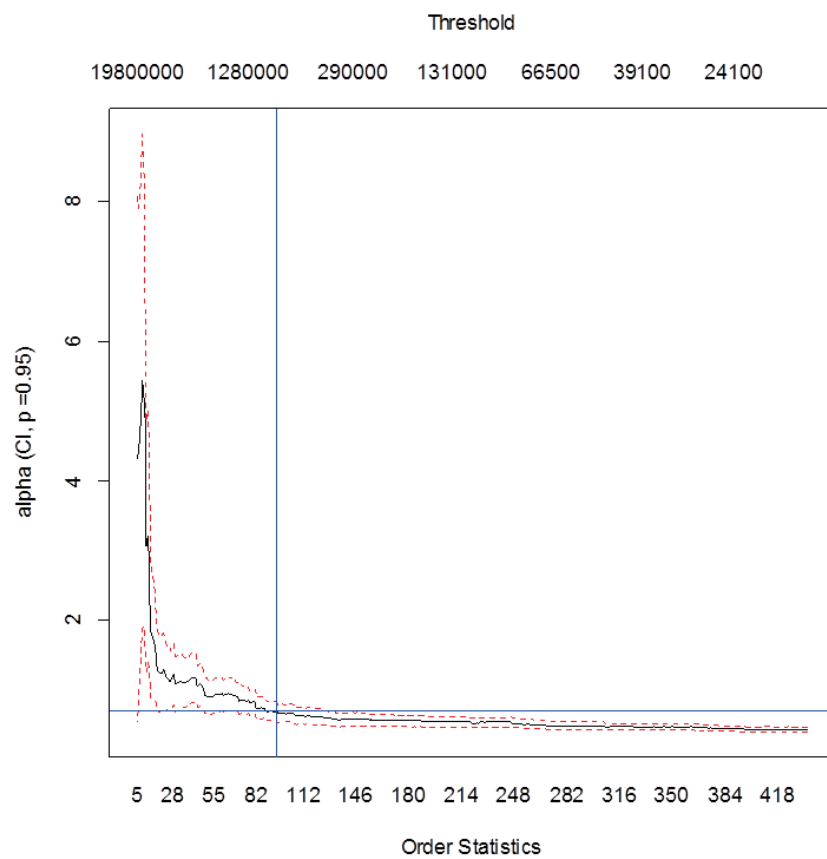
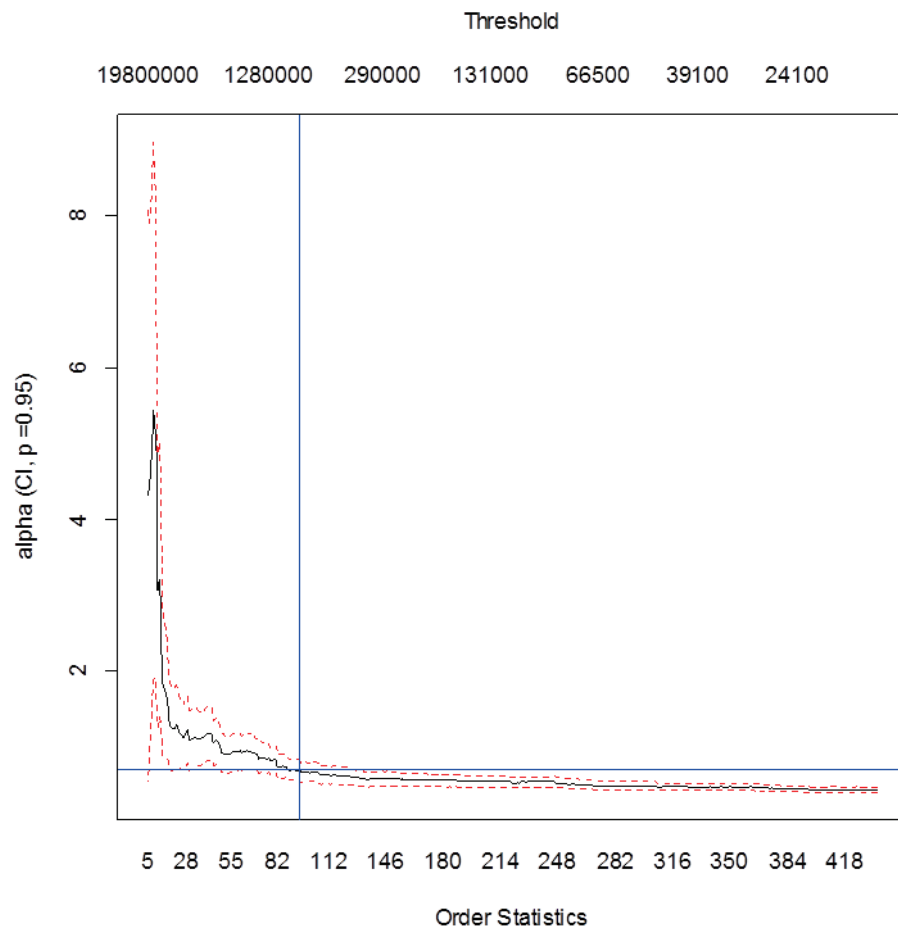


**Figure 15 QQ-plot TS Automotive**

Nous remarquons que QQ-plot a une forme concave ce qui signifie que les données suivent une distribution à queue épaisse (« fat-tailed distribution »). Nous pouvons donc appliquer la théorie des valeurs extrêmes et modéliser le seuil.

### ➤ Hill-plot

Hill-plot nous permet de déterminer le seuil de modélisation pour le secteur Automotive en fonction de l'indice de la queue de distribution. L'inverse de ce paramètre est représenté sur l'axe des ordonnées de Hill-plot en fonction de la statistique d'ordre sur l'axe des abscisses et du seuil. Voici la représentation graphique :



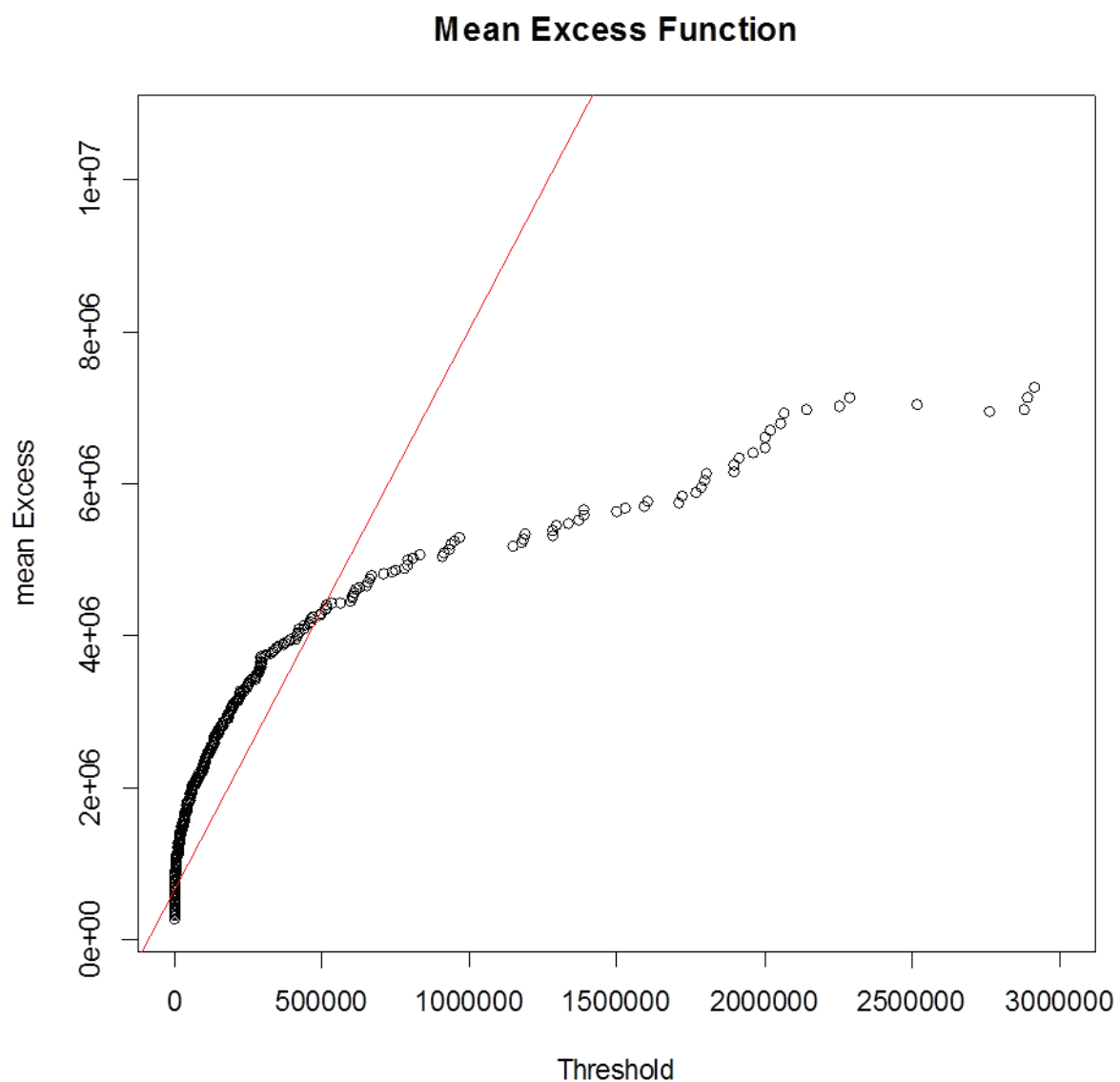
Au vu de ces deux graphiques  $\alpha$  devient stable à partir de 82<sup>ème</sup> observation qui correspond à  $\alpha = 0,75$   $\gamma = 1,333$ . Comme  $\gamma > 0$ , nous sommes bien dans le cas de distribution de Fréchet.

Le seuil (threshold) correspondant est de 1 086 588 €. Nous devons donc choisir un seuil inférieur à ce montant. Le premier intervalle où va se trouver notre seuil est alors

$$A = [0 ; 1\ 086\ 588]$$

### ➤ Mean Excess Function

Nous allons à présent regarder le graphique de l'espérance résiduelle empirique par rapport à un seuil. Si à un moment donné elle devient linéaire, alors les données suivent la distribution GPD.



Au vu de ce graphique, la linéarité du seuil avec FME commence à 250 000 et au-delà du seuil de 800 000 cette linéarité n'est plus assurée. Ce graphique nous donne un seuil à partir duquel nous



considérons que les sinistres sont graves. Nous pouvons donc affirmer que le seuil va se trouver dans l'intervalle  $B = [250\ 000 ; 800\ 000]$ . En dehors de cet intervalle la linéarité n'est plus observée.

Pour répondre aux hypothèses de deux méthodes, le choix du seuil des sinistres atypiques doit se trouver dans l'intersection des deux intervalles trouvés par deux méthodes. En utilisant les deux méthodes, nous pouvons choisir un seuil dans un intervalle

$$A \cap B = [250\ 000 ; 800\ 000]$$

Nous retenons donc comme seuil la borne maximale de cet intervalle, à savoir 800 000 €, car nous considérons qu'elle dissocie de manière juste et pertinente la sinistralité des extrêmes des autres sinistres.

Les résultats pour tous les Trade Sectors :

Groupe de TS	Intervalle défini par la stabilité du facteur de queue en k€ = A	Intervalle défini par la méthode FME en k€ = B	Intervalle de choix de seuil = $A \cap B$ en k€	Choix du seuil TVE = Borne maximale de l'intervalle de choix du seuil en k€	alpha	Nombre de sinistres au dessus de 500k€ à 100% au brut
TS Auto	[ 0 ; 1 087 ]	[ 250 ; 800 ]	[ 250 ; 800 ]	800	0,75	107
TS High tech	[ 0 ; 600 ]	[ 0 ; 750 ]	[ 0 ; 600 ]	600	1,45	88
TS Industrial Product	[ 0 ; 758 ]	[ 0 ; 900 ]	[ 0 ; 758 ]	758	1,35	143
TS Logistics + TS Removals	[ 0 ; 989 ]	[ 0 ; 500 ]	[ 0 ; 500 ]	500	1,1	22
TS JB/Luxury/Valuable + TS Pharma/C	[ 0 ; 2 250 ]	[ 0 ; 1 000 ]	[ 0 ; 1 000 ]	1000	1,1	90
TS Pre-launch + TS Project Cargo	[ 0 ; 700 ]	[ 0 ; 250 ]	[ 0 ; 250 ]	250	0,7	20
TS Trading Commodities except Oil	[ 0 ; 1 367 ]	[ 0 ; 700 ]	[ 0 ; 700 ]	700	1	131
TS Oil	[ 0 ; 460 ]	[ 0 ; 500 ]	[ 0 ; 460 ]	460	0,8	20

Nous pouvons constater que la plupart des TS ont le seuil supérieur à 500 000 euros sauf Project Cargo/Pre-launch et Oil. Etant donné que la fréquence de sinistres pour ces secteurs est très faible, ces seuils peuvent être flexibles.

En conclusion, nous prenons comme seuil de modélisation 500 000 euros car il optimise les seuils choisis de tous les trade secteurs et correspond à la borne inférieure des seuils choisis sauf quelques exceptions (Project cargo/Pre-launch et Oil).

## Conclusion

Dans cette partie de notre mémoire nous avons vu que nous n'avons pas toujours les données fiables et nous devons faire face avec ce problème afin de pouvoir poursuivre notre modélisation. Pour ce faire, nous avons effectué une analyse approfondie de nos données, afin de faire un regroupement de certains secteurs comme Luxe, Project Cargo, Pre-launch et Removals où nous avons très peu d'observations. Après avoir eu recours à l'ACP, l'AFC, la CAH aux services de Contrôle de gestion et de Souscription. Nous nous sommes arrêtés sur un regroupement final de Project Cargo avec Pre-launch, JB/Luxury/Valuable avec Pharma/Chemistry et Logistics avec Removals. Ce regroupement reflète au mieux la vision sinistralité et surtout l'exposition du portefeuille Marine Cargo et la nature de la marchandise transportée de ces secteurs.

Nous avons également effectué une étude de seuil de chaque secteur ou groupe de secteurs afin d'estimer le seuil de modélisation des sinistres graves. La théorie des valeurs extrêmes nous propose deux méthodes, mais nous avons choisi la méthode POT, car elle est mieux adaptée pour capter les sinistres graves sans en perdre une partie ou sans prendre trop de petits sinistres.

# III. MODELE

Afin de modéliser la charge sinistre pour la branche Marine Cargo, nous utilisons l'approche fréquence-coût moyen. Cette approche consiste en une modélisation de la fréquence et du coût moyen séparément. Cette approche repose sur l'hypothèse de l'indépendance entre ces deux variables.

## A. Indépendance entre la fréquence et le coût

Le principe de l'indépendance entre la fréquence et le coût est au cœur de notre approche. Il est nécessaire alors d'effectuer un test d'indépendance de ces deux paramètres. Le test le plus approprié est le Test de Spearman.

### 1) Test de Spearman

Le *Test de Spearman* est un test non paramétrique qui permet d'étudier l'existence d'une corrélation entre deux variables en utilisant les rangs.

Hypothèse  $H_0$  : Il n'y a pas de corrélations entre les rangs

Hypothèse  $H_1$  : Il existe une corrélation entre les rangs

Supposons que nous avons à notre disposition deux variables ordinales X et Y et un ensemble d'individus de taille N. A chaque individu j nous pouvons attribuer une paire de valeurs  $X_j$  et  $Y_j$ . Le principe de ce test est d'ordonner les réalisations de chaque variable et de leur attribuer un rang. La question que nous nous posons en effectuant ce test est la suivante : « Si un individu est bien classé selon la variable X, est-il aussi bien classé selon la variable Y ? ». Nous disposons donc des paires de réalisations de nos variables avec leurs rangs. Ensuite nous calculons pour chaque paire la distance entre les rangs  $d_j$ . Cette distance nous permettra de calculer le coefficient de Spearman appelé « Rho de Spearman » dont la formule de calcul est voici :

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^N d_i}{N^3 - N}$$

Où  $d_i$  est la différence entre les rangs du i-ème paire de X et Y de l'échantillon.

Ce coefficient nous indique s'il existe un lien ordinal entre deux variables. Il peut prendre les valeurs entre -1 et 1

- Si  $\rho$  est proche de 1, les variables X et Y sont corrélées positivement
- Si  $\rho$  est proche de -1, les variables X et Y sont corrélées négativement.
- Si  $\rho$  est proche de 0, les variables X et Y ne sont pas corrélées.

Plus  $\rho$  est proche de 1 ou -1 plus le lien entre X et Y est fort.

A l'issue du test nous regardons aussi la p-value.

La *p-value* dans un test statistique est la probabilité d'obtenir une valeur aussi extrême que la valeur observée dans l'échantillon en question sous l'hypothèse nulle. En d'autres mots, la p-value est la probabilité de rejeter à tort l'hypothèse  $H_0$ . Elle mesure le risque de première espèce qui est le risque de rejeter à tort l'hypothèse vraie, le risque de deuxième espèce étant le risque d'accepter à tort l'hypothèse  $H_0$ .

## 2) Application du test aux données de la Marine Cargo

Nous allons à présent calculer le Rho de Spearman pour le portefeuille étudié. Nous étudions alors l'existence d'un lien entre la fréquence annuelle rapportée à la prime et le coût moyen net d'inflation.

Soit  $X_i$  la probabilité de sinistre pour un euro de prime pour l'année qui est tout simplement le nombre de sinistres l'année  $i$  en tenant compte des IBNYR rapporté à la prime de l'année  $i$ .

Soit  $Y_i$  le coût moyen d'un sinistre de l'année  $i$ .

Nous posons l'hypothèse  $H_0$ : « Il n'y a pas de corrélation entre les rangs des valeurs »

$H_1$ : « Il existe une corrélation entre les rangs des valeurs »

Nous voulons alors, étudier la corrélation entre les variables  $X_i$  et  $Y_i$  avec  $i \in [1 ; 7]$

année	cout moyen infl	Fréquence/ Prime
2006	4 800 065	8,3051E-08
2007	2 927 489	7,4909E-08
2008	3 365 895	8,816E-08
2009	2 904 814	1,093E-07
2010	2 188 467	1,0642E-07
2011	1 644 974	8,1321E-08
2012	1 651 176	1,3042E-07

**Figure 16 Données du portefeuille Marine Cargo pour le test de Spearman**

Nous rappelons que par souci de confidentialité nous avons modifié les données.

Après avoir effectué le test de Spearman avec nos données nous obtenons le Rho de Spearman faible (0,21) et la p-value assez élevée (0,66). Nous supposons pour le rho en-dessous de 0,3 il n'y a pas de corrélation entre les rangs. La p-value à 0,66 s'interprète comme on a 66% de chances de se tromper en rejetant l'hypothèse  $H_0$ .

Conclusion: Compte tenu des résultats du test nous acceptons l'hypothèse  $H_0$ , c'est-à-dire nous acceptons le fait qu'il n'y a pas de corrélation entre la fréquence et le coût moyen.

Nous voulons aussi vérifier l'indépendance pour chaque Trade Sector de notre portefeuille

De la même manière nous effectuons ce test pour chaque Trade Sector.

Au titre d'exemple nous illustrons les résultats obtenus pour le secteur Pharma/Chemistry. Les valeurs de la fréquence et du coût moyen pour TS Automotive sont représentées dans le tableau ci-dessous :

année	cout moyen infl	Fréquence/ Prime
2006	2 443 807	5,1803E-08
2007	2 130 343	1,5705E-07
2008	1 588 545	9,5364E-08
2009	2 415 336	1,9097E-07
2010	2 780 042	2,3555E-07
2011	5 183 599	5,9484E-08
2012	1 705 873	1,9443E-07

**Figure 17 Données du TS Pharma/Chemistry pour le test de Spearman**

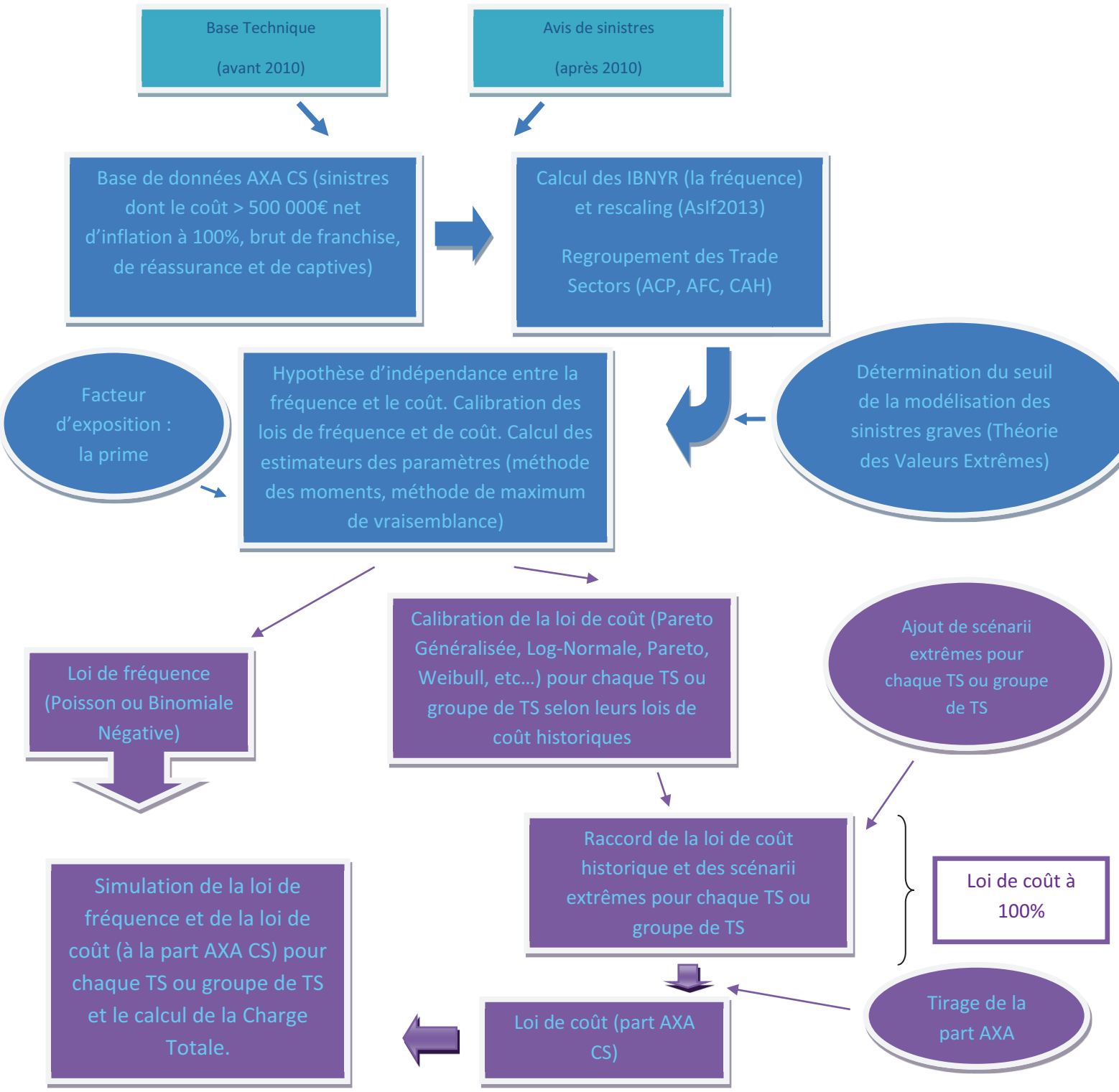
Nous obtenons le rho de Spearman de - 0,143 qui est inférieur à 0,3 et supérieur à -0,3 ce qui signifie qu'il n'y a pas de corrélation entre la fréquence et le coût moyen. La p-value est de 0,7825 ce qui signifie que nous nous tromperons dans 78,25% des cas en rejetant l'hypothèse  $H_0$ . Nous affirmons alors qu'il n'y a pas de lien entre la fréquence et le coût moyen.

Il en va de même pour les autres Trade Sectors.

Dès lors que nous avons vérifié l'hypothèse d'indépendance entre la fréquence et le coût nous pouvons commencer notre modélisation.

## B. Schéma global du modèle

Afin de présenter de manière claire le déroulement du processus de la modélisation nous résumons les différentes étapes dans un schéma global :



Ce schéma nous illustre le processus de modélisation des sinistres graves pour la branche Marine Cargo. Tout au sommet nous avons en entrée notre base de données AXA CS qui est composée de la Base Technique (pour les sinistres déclarés avant 2010) et les avis de sinistres graves (pour les sinistres graves déclarés après 2010). Ces données sont retraitées des IBNYR, les sinistres qui sont déjà survenus mais ne sont pas encore connus par l'assureur et le calcul est fait Aslf 2013.

En se basant sur l'hypothèse de l'indépendance entre les deux paramètres du modèle (fréquence et le coût) qui doit être vérifiée, nous modélisons pour chaque secteur ou chaque groupe de secteurs une loi de fréquence et une loi de coût. Nous injectons à cette étape les scénarii extrêmes marché pour chaque Trade Secteur ou chaque groupe de Trade secteurs afin de pouvoir modéliser la partie de notre loi de coût pour les événements très rares et très coûteux dont nous n'observons pas les sinistres dans notre portefeuille. Ensuite, comme nous modélisons notre loi de coût à 100%, nous allons utiliser notre facteur d'exposition (part AXA et la prime) afin de déterminer la loi de coût à part AXA CS.

L'étape finale de notre modèle est la simulation de la loi de coût et de la loi de fréquence et la détermination de la Charge Totale et le montant de STEC.

## C. Modélisation de la fréquence

Dans le cadre de notre modèle nous cherchons à modéliser la fréquence des sinistres au-dessus du seuil de 500 000 € à 100% brut de franchise, de réassurance et de captives. Ce seuil a été déterminé par la méthode POT de la théorie des valeurs extrêmes dans la partie traitant les données. Pour calibrer la loi de fréquence d'apparition des sinistres atypiques, nous analysons les données historiques du portefeuille AXA CS pour la branche Marine Cargo.

### 1) Lois de fréquence

Notre modèle portant sur les sinistres atypiques, nous visons les lois de probabilités discrètes qui décrivent au mieux la fréquence de survenance des événements rares. Parmi ces lois nous trouvons notamment la loi de Poisson et la loi Binomiale Négative.

#### ➤ Loi de Poisson

La loi de Poisson est une des lois de probabilités classiques discrètes qui s'applique aux événements rares. Cette loi est adaptée à la description du nombre des événements se produisant dans une période de temps fixé et indépendamment du temps passé depuis l'événement précédent. Cette loi est caractérisée par le paramètre  $\lambda$  strictement positif qui est le nombre moyen d'occurrences d'un événement donné.

La loi de Poisson n'est pas limitée aux intervalles temporels et peut cependant être appliquée pour d'autres types d'intervalles comme les intervalles spatiaux.

Si  $X$  est une variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions des événements rares et qui suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  qui est le nombre moyen d'occurrences dans un intervalle donné, alors la probabilité d'avoir  $k$  occurrences dans cet intervalle est donné par :

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Exemple : Prenons un exemple de naufrage d'un porte-conteneur. Si nous savons qu'en moyenne 15 sur 10 000 expéditions des porte-conteneurs finissent par un naufrage, alors pour modéliser le nombre de porte-conteneurs subissant un naufrage pour 5000 expéditions nous choisissons la loi de Poisson de paramètre  $\lambda = \frac{15 \times 5000}{10000} = 7,5$

$$E(X) = Var(X) = \lambda$$

La particularité de la loi de Poisson réside dans le fait que son espérance est égale à sa variance. Ainsi, afin de savoir si notre fréquence suit la loi de poisson il suffit de regarder si la fréquence moyenne est égale à la variance.

La règle de décision serait alors suivante : si le rapport variance/fréquence moyenne est inférieur à 1 alors nous utilisons la loi de Poisson car on reste conservateur sur la variance.

### ➤ Loi Binomiale Négative

Une loi alternative à la loi de Poisson est la loi Binomiale Négative connue aussi sous le nom de loi de Polya .Cette loi apparait dans des études des événements qui peuvent se réaliser dans un même laps de temps mais qui n'ont pas la même probabilité de survenance. Cet aspect rend cette loi très utile dans le domaine d'assurance lorsque nous voulons étudier le nombre de sinistres dans un portefeuille avec des risques hétérogènes.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi Binomiale Négative de paramètres r et p, alors nous avons :

$$P(X = k) = C_{k+r-1}^k p^r (1 - p)^k$$

$$\text{avec } C_{k+r-1}^k = \frac{(k+r-1)!}{k!(r-1)!} \quad \text{et } r > 0, 0 < p < 1$$

Nous pouvons illustrer cette loi ainsi : lors du lancée d'une pièce truquée qui a la probabilité p de tomber sur pile (succès), nous désignons par X le nombre de faces (échecs) précédant la r-ième pile (succès). Alors X suit une loi Binomiale Négative de paramètres r et p.

L'espérance associée est :

$$E[X] = \frac{rq}{p} = \frac{r(1-p)}{p}$$

$$\text{Et } q = 1 - p$$

$$Var(X) = \frac{rq}{p^2} = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Nous attirons l'attention sur le fait que  $Var(X) > E[X]$  ce qui veut dire que nous calibrons la loi Binomiale négative pour un échantillon d'observations dont la variance est supérieure à la fréquence moyenne.

## 2) Estimation des paramètres

Afin de connaître notre loi de fréquence nous avons besoin d'estimer les paramètres.

- ✓ Loi de Poisson

$\lambda$  = fréquence moyenne Aslf 2013

$$\hat{\lambda} = E[X]$$

### ✓ Loi Binomiale Négative

Nous devons résoudre le système (la méthode des moments sera détaillée dans la partie modélisation du coût) :

$$\begin{cases} E[X] = \frac{r(1-p)}{p} & \leftrightarrow & r = \frac{pE[X]}{(1-p)} \\ \text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2} & \leftrightarrow & \frac{p^2}{1-p} = \frac{r}{\text{Var}(X)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \frac{pE[X]}{(1-p)} \\ \frac{p^2}{1-p} = \frac{pE[X]}{\text{Var}(X)} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \hat{r} = \frac{E^2[X]}{\text{Var}(X) - E[X]} \\ \hat{p} = \frac{E[X]}{\text{Var}(X)} \end{cases}$$

Ainsi, nous calculons nos paramètres selon la formule :

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \frac{E^2[X]}{\text{Var}(X) - E[X]} \\ \hat{p} &= \frac{E[X]}{\text{Var}(X)} \end{aligned}$$

## 3) Application au portefeuille Marine Cargo

Pour chaque Trade Sector nous calculons la fréquence moyenne à laquelle nous ajoutons le nombre de sinistres IBNYR attendus selon les coefficients de développement utilisées par la Marine Cargo dans le modèle historique utilisé jusqu'à présent.

### ➤ Calcul des IBNYR

Comme ces coefficients ont été calculés pour le modèle global, sans distinction par TS, nous allons prendre le nombre de sinistres tous secteurs confondus. Pour avoir le nombre d'IBNYR tous secteurs confondus nous allons multiplier la fréquence total de l'année n par le coefficient multiplicateur de l'année n - 1. En effet ces coefficients ayant été utilisés pour calculer les IBNYR en 2012 nous décalons ces coefficients d'une année.

Nous constatons que la Branche Marine Cargo est une branche courte car après 6 ans tous les sinistres sont déclarés et connus.



Année de survenance	Ratio pour 2013	nombre de sinistres	Nombre de IBNYR	Nombre de sinistres IBNYR compris
2006	0	40	0	40,00
2007	0	51	0	51,00
2008	0,08	44	3,43	47,43
2009	0,16	56	8,72	64,72
2010	0,12	57	6,86	63,86
2011	0,16	48	7,53	55,53
2012	0,63	67	42,00	109,00
2013	12,11			

**Figure 17 Tableau des IBNYR de 2013 pour Marine Cargo**

Nous avons dans ce tableau les ratios utilisés par le modèle historique de la branche Marine Cargo, le nombre de sinistres annuel tous les secteurs confondus, le nombre d'IBNYR à allouer tous les secteurs confondus et le nombre de sinistres annuel vu à l'ultime.

Pour calculer le nombre des IBNYR à allouer pour chaque TS nous allons utiliser la part de chaque TS dans le nombre Total de sinistres.

TS	Nombre de sinistres	Part de TS
auto	17	5%
high tech	35	10%
industrial products	132	36%
logistics+ Removals	29	8%
luxe + Pharma	61	17%
Oil	42	12%
trading commodities(except oil)	40	11%
pre launch+Project cargo	7	2%
Total	363	100%

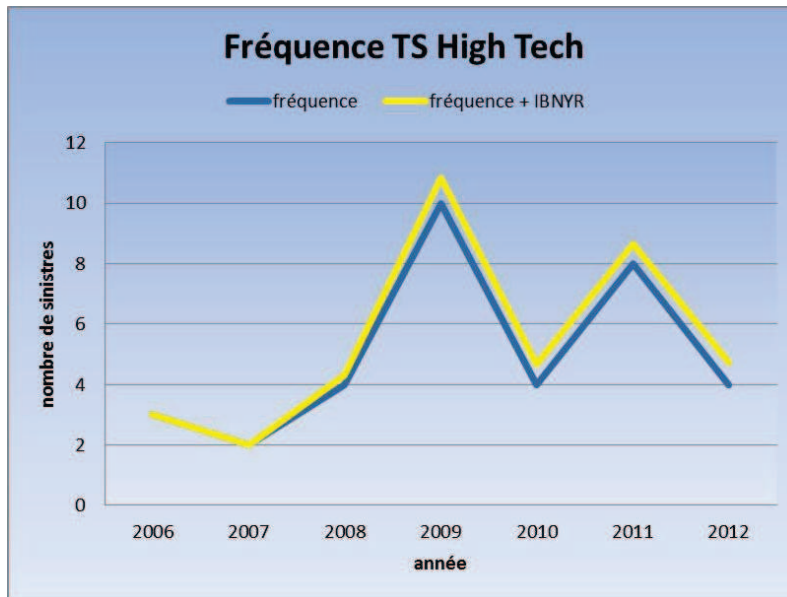
**Figure 18 La part des TS dans la sinistralité totale**

Dans ce tableau nous avons présenté chaque secteur avec le nombre de sinistres effectif et sa part dans le portefeuille Marine Cargo.

année	fréquence	IBNYR	fréquence + IBNYR	fréquence + IBNYR Aslf 2013
2006	3	0,00	3,00	12,85
2007	2	0,00	2,00	7,08
2008	4	0,33	4,33	14,64
2009	10	0,84	10,84	9,84
2010	4	0,66	4,66	6,50
2011	8	0,66	8,66	6,82
2012	4	0,73	4,73	4,69

**Figure 19 Tableau récapitulatif de la fréquence pour le TS High Tech**

Il nous reste qu'à calculer le nombre d'IBNYR pour chaque TS à ajouter.



**Figure 20 Tableau des fréquences sans et avec IBNYR pour TS High Tech**

Nous constatons que nous n'avons pas eu de sinistres en 2012 pour TS High Tech. En regardant le nombre de sinistres non encore déclarés estimés nous nous attendons à avoir 5 sinistres au total survenus en 2012 dont le coût à 100% est supérieur à 500 000 euros.

Nous procédons de la même manière pour les autres TS.

Une fois que le nombre de sinistres avec les inconnus est calculé nous avons besoin de faire un rescaling du nombre de sinistres par rapport à la prime. Cette manipulation est nécessaire pour enlever l'effet d'exposition, c'est-à-dire l'augmentation de la fréquence de sinistres due à l'augmentation de l'exposition. Ceci nécessite le calcul AsIf 2013 de la fréquence.

➤ Calcul AsIf

Nous allons enlever l'effet exposition de notre fréquence en effectuant le calcul AsIf 2013

$$\#sinistres \ n \ AsIf \ 2013 = \#sinistres \ n \times \frac{Prime \ 2013}{Prime \ n}$$

Pour le TS High Tech cela nous donne :

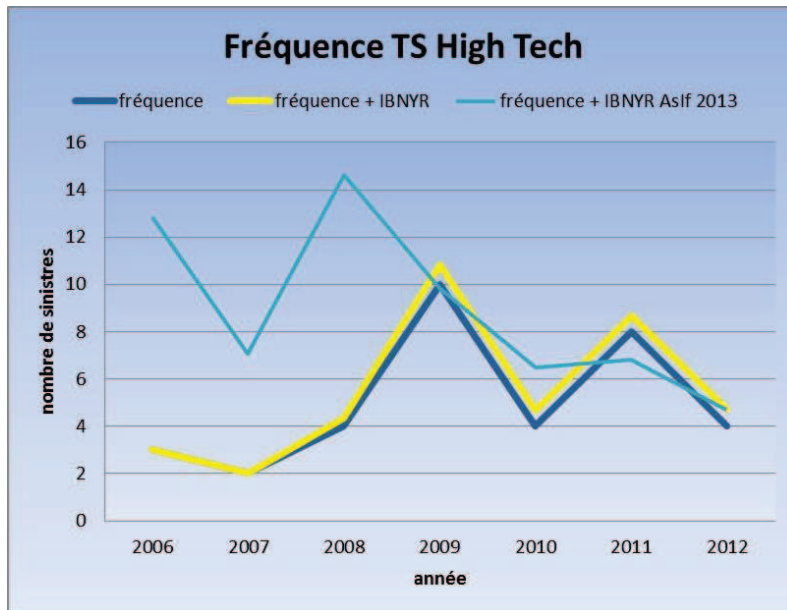


Figure 21 Tableau des fréquences de TS High Tech

Le calcul Asif redresse surtout le nombre de sinistres survenus pendant la période de 2006 à 2008, car l'exposition du portefeuille de 2006 à 2008 était nettement inférieure à celui de 2013.

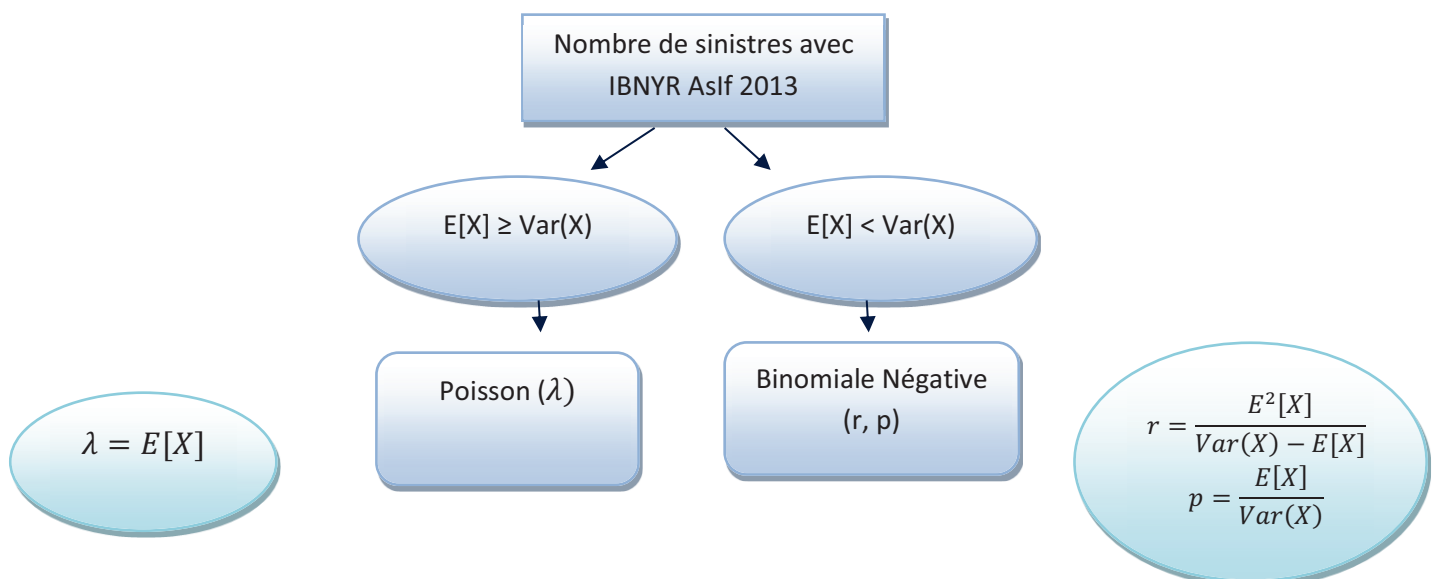
Nous déterminons alors le nombre moyen de sinistres par an en prenant bien en compte les IBNYR et le calcul Asif 2013

Moyenne	Variance corrigée	écart-type
8,92	13,427814	3,66439818

Au vu de la moyenne et la variance corrigée nous procédons ainsi : comme la variance est supérieure à la moyenne, alors la fréquence suit la loi Binomiale Négative de paramètres :

r	17,6345988
p	0,66413972

Voici un schéma récapitulatif de la calibration de la loi de fréquence :



D'après le schéma, nous procédons à la détermination de la loi de fréquence ainsi : si le nombre moyen de sinistres graves (fréquence moyenne) pour un secteur donné est supérieur ou égal à la variance, alors nous estimons que le nombre de sinistre de ce secteur suit une loi de Poisson, car son espérance est égale à sa variance. Quand nous avons la variance qui est inférieure au nombre moyen de sinistres graves, nous prenons comme paramètre le nombre moyen de sinistres graves par prudence. Quand, au contraire, le nombre moyen de sinistres graves est inférieur à la variance, nous utilisons la loi Binomiale Négative dont nous calculons les paramètres.

## D. Modélisation du coût

Ce paragraphe vise à traiter la deuxième composante de l'approche, à savoir le coût d'un sinistre. Nous allons modéliser le coût à 100 % brut de franchise, captives et de traités de réassurance. Historiquement, le montant de sinistre était modélisé en tenant compte de la part AXA CS, mais afin de tenir compte de l'évolution du portefeuille nous calibrons une loi de coût à 100%. En effet, si l'année prochaine AXA CS décide d'augmenter ses parts sur un secteur d'activité notre modèle va capter ce changement grâce à l'application des parts.

### 1) La démarche

La calibration des lois se fait par l'estimation directe de la loi de coût en ajustant l'une des distributions théoriques sur les données historiques des montants des sinistres du portefeuille Marine Cargo. Nous rappelons que nous utilisons l'approche par événement, ce qui veut dire que la charge sinistre modélisée est la somme de tous les coûts causés par le même événement.

Nous allons d'abord calibrer une loi pour chaque Trade Sectors ou un groupe de TS en utilisant un outil interne HARPER qui permet de calculer les estimateurs de paramètres par deux méthodes qui seront détaillées plus bas : la méthode des moments et la méthode du maximum de vraisemblance. Cet outil nous permettra de récupérer la loi de coût.

#### Définition :

*Occurrence Exceedence Probability* correspond à la distribution des sinistres maximum annuels

#### Définition :

*Période de retour* correspond au nombre d'années moyen séparant des événements d'une magnitude donnée.

$$PR = \frac{1}{1 - \text{quantile}} \text{ et } \text{quantile} = 1 - \frac{1}{PR}$$

La loi de coût choisie sera valable pour des périodes de retour inférieures à notre périmètre d'études historiques, et au-delà nous avons besoin de compléter cette loi par des scénarii. En effet, nous n'avons en général pas d'observations historiques sur la queue de distribution, car ces événements extrêmes ont une période de retour très élevée. En particulier, dans le cadre du modèle interne, nous nous intéressons tout particulièrement au quantile 99,5% qui correspond à un événement extrême de période de retour de 200 ans.

$$PR = \frac{1}{1 - 0,995} = 200$$

Pour obtenir l'allure de la queue de distribution nous allons développer un modèle de générateur de scénarii à partir d'informations sur chaque Trade Sector suite à des discussions avec les équipes de souscription.

L'étape suivante consiste à utiliser l'outil HARPER afin de faire un raccord des OEP calibrés sur l'historique et sur base scénarii. Nous allons prendre comme début de la courbe, notre loi d'observations historiques et nous la raccordons à la queue de la courbe de distribution des scénarii simulés.

Enfin, une fois notre loi de coût raccordée connue, nous allons faire un tirage de la part AXA CS et déterminer la loi de coût à notre part.

Nous allons détailler maintenant chacun de ces étapes.

## 2) Construction d'une loi de coût pour les faibles périodes de retour

Nous allons déterminer le début de la loi de coût grâce à l'outil qui a été développé en interne, HARPER. Cet outil permet de :

- Calculer les estimateurs des paramètres par la méthode des moments (MME) et par la méthode du maximum de vraisemblance (Maximum Likelihood Estimator MLE)
- Tracer les QQ-plots pour les lois de Weibull, Log Normale, Pareto, Pareto Généralisée
- Effectuer les tests d'adéquation (goodness of fit) du type Anderson Darling
- Raccorder deux OEP et en déduire la loi de coût correspondante

### i. Les lois de coût

Dans ce paragraphe nous présentons les caractéristiques théoriques des lois les plus utilisées pour modéliser une distribution de coût d'un sinistre. Nous nous limiterons à présenter dans l'annexe les lois à la queue épaisse, qui modélisent le mieux la sévérité extrême.

#### a) L'estimation des paramètres

L'estimation des paramètres est une étape importante afin de visualiser l'allure des différentes lois de coût et les comparer avec nos observations. Nous allons utiliser deux méthodes d'estimation : la méthode des moments (MME) et la méthode du maximum de vraisemblance (MLE).

#### **La méthode des moments dite MME (Moments Method Estimator)**

La méthode des moments est un outil statistique d'estimation des paramètres classique qui repose sur la loi des grands nombres.

Loi des Grand Nombres : Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées ayant la même espérance  $E[X]$  et la même variance  $\text{Var}(X)$ . Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( \left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - E[X] \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

Pour tout réel  $\varepsilon > 0$  la probabilité que la moyenne empirique s'éloigne de l'espérance d'au moins  $\varepsilon$ , quand  $n$  tend vers l'infini, tend vers 0.

Nous utilisons les moments simples de  $X$  d'ordre  $k$  tels que :

$$m_k = \mathbb{E}[X^k]$$

Soient  $\theta$  le vecteur de paramètres à estimer, nous sélectionnons alors un vecteur  $G$  avec  $s$  moments tel que  $G = [m_1(\theta), m_2(\theta), \dots, m_s(\theta)]$ . Il existe une fonction  $G$  telle que  $G(\theta) = [m_1(\theta), m_2(\theta), \dots, m_s(\theta)]$ . L'équivalent empirique du vecteur  $G$  est le vecteur composé de  $s$  moments d'échantillon, noté  $\hat{G}$ . En utilisant la loi des grands nombres nous remplaçons le  $i$ -ème moment théorique  $E_\theta[X^i]$  par le  $i$ -ème moment empirique  $\hat{m}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^i$

Ainsi, pour trouver l'estimateur de  $\theta$ , nous devons résoudre l'équation vectorielle :  $\hat{G} = G(\theta)$

Au titre d'exemple nous citons les estimateurs des paramètres de la loi Binomiale Négative trouvés dans la partie sur la fréquence.

$$\hat{r} = \frac{E^2[X]}{\text{Var}(X) - E[X]}$$

$$\hat{p} = \frac{E[X]}{\text{Var}(X)}$$

Il nous suffit de remplacer  $E[X]$  et  $\text{Var}(X)$  par la moyenne et la variance empiriques pour calculer les estimateurs.

### **La méthode du maximum de vraisemblance (Maximum Likelihood Estimator)**

Une autre méthode fondamentale de recherche des estimateurs est la méthode du maximum de vraisemblance (MLE). La particularité de cette méthode réside dans le fait que les estimateurs non nécessairement optimaux pour  $n$  fini, sous conditions de régularité sont asymptotiquement efficaces.

#### Définition :

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle dont la loi appartient à  $\mathcal{P}_0 = \{P_\theta^\theta : \theta \in \Theta\}$  où  $\theta \in \Theta$  ouvert dans  $\mathbb{R}^p$ ,  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon de  $X$  et  $\pi(\theta)$  un paramètre  $q$ -vectoriel à estimer. On appelle *estimateur du maximum de vraisemblance* de  $\theta$  un estimateur  $\hat{\theta}(\underline{X})$  tel que pour  $\underline{x} \in \mathcal{X}$

$$L(\underline{x}; \hat{\theta}(\underline{x})) \geq L(\underline{x}; \theta)$$

Où  $L(\underline{x}; \theta)$  est la fonction de vraisemblance définie par :

$$L(\underline{x}; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

Où  $f$  est la fonction de densité de la loi de  $X$ .

Dans l'hypothèse où, pour  $\underline{x} \in \mathcal{X}$ ,  $L(\underline{x}; \theta)$  admet des dérivées partielles premières, l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  est solution des équations de vraisemblance

$$\frac{\partial \ln L(\underline{x}; \theta)}{\partial \theta_k} = 0, \quad k = 1, \dots, p$$

Exemple : Loi de Pareto

Soit  $X = (X_1, \dots, X_n)$  un échantillon aléatoire qui suit la loi de Pareto. La fonction de densité est alors :

$$f(x) = \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} \text{ pour } x \geq x_0$$

La fonction de vraisemblance devient alors :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha) = \prod_{i=1}^n \alpha \frac{x_0^\alpha}{x_i^{\alpha+1}} = \alpha^n \frac{x_0^{n\alpha}}{x_1^{\alpha+1} x_2^{\alpha+1} \dots x_n^{\alpha+1}}$$

$$\ln L = n \ln \alpha + n \alpha \ln x_0 - (\alpha + 1)(\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + n \ln x_0 - (\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\alpha} = \ln \frac{x_1}{x_0} + \ln \frac{x_2}{x_0} + \dots + \ln \frac{x_n}{x_0}$$

La partie droite de l'équation est  $>0$  car tous les  $x_i$  sont supérieures à  $x_0$ . Nous en déduisons alors l'expression de  $\alpha$  :

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{x_0}}$$

C'est donc un estimateur du paramètre  $\alpha$  de la loi de Pareto par le maximum de vraisemblance, car

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \alpha} = -\frac{n}{\alpha^2} < 0$$

Les estimateurs du maximum de vraisemblance des lois utilisées :

Log Normale :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \hat{\mu})^2$$

Pareto :

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{x_0}}$$

Weibull :

Il n'existe pas de forme explicite, l'équation doit être résolue itérativement

$$\hat{\alpha}_n = \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i \hat{\beta}_n}{n} \right)^{1/\hat{\beta}_n} \quad \hat{\beta}_n = [(\sum_{i=1}^n x_i \hat{\beta}_n \ln x_i) (\sum_{i=1}^n x_i \hat{\beta}_n)^{-1} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i]^{-1}$$

## b) Tests d'adéquation

Une fois que nous avons estimé les paramètres des lois-candidates, nous devons effectuer les tests d'adéquation (goodness of fit) pour choisir le meilleur candidat. Il existe plusieurs tests statistiques, nous nous limiterons au test de Kolmogorov-Smirnov, de Anderson –Darling et celui de Cramer Von Mises dont nous rappelons la théorie ci-dessus. Nous n'utilisons pas le test d'adéquation du Chi2 car il est bien adapté aux variables en classes non ordonnées. Or, dans notre cas les test de KS, d'Anderson Darling ou d Crame Von Mises semblent plus appropriés à nos données.

### Kolmogorov-Smirnov

Soit F une fonction de répartition de l'échantillon de loi inconnue. Etant donné une loi continue de fonction de répartition  $F_0$  connue, nous posons une hypothèse  $H_0 : F=F_0$  et  $H_1 : F \neq F_0$  pour un seuil  $\alpha > 0$ . Alors la distance de Kolmogorov- Smirnov est définie par :

$$D_n = D_n(F_0) = \text{Sup}_x |F_n(x) - F_0(x)|$$

### Anderson-Darling

Soit X une variable aléatoire avec n réalisations indépendantes de fonction de répartition  $F_n$  inconnue et  $F_0$  est la fonction de répartition d'une loi continue connue de paramètres connus. Le test d'Anderson-Darling est basé sur le calcul de la distance entre la fonction de répartition empirique et théorique. Cette distance est définie par :

$$A_k^2 = k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(F_n(x) - F_0(x))^2}{F_0(x)(1 - F_0(x))} dF_0(x)$$

Cette statistique peut également s'exprimer sous la forme suivante :

$$A_k^2 = -k + k \sum_{i=1}^n (F_n(x_{i-1})^2 - F_n(x_i)^2) \ln(F_0(x_i)) + ((F_n(x_{i-1}) - 1)^2 - (F_n(x_i) - 1)^2) \ln(1 - F_0(x_i))$$

Ce test est une alternative au test de Kolmogorov-Smirnov. Cependant, le test d'Anderson est plus approprié pour les valeurs extrêmes car il accorde une importance plus grande aux queues de distribution alors que le test de Kolmogorov-Smirnov. Tandis que le test K-S est très sensible à la médiane, la sensibilité du test d'Anderson-Darling est présente sur toute l'étendue de la distribution.

### Cramer Von Mises

Soit X une variable aléatoire de n réalisations indépendantes. Soit  $F_n$  la fonction de répartition de X d'une loi inconnue et  $F_0$  la fonction de répartition d'une loi théorique connue avec les paramètres connus. L'indicateur d'écart de ce test est alors défini par :



$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} [F_n(x) - F_0(x)]^2 dF_0(x)$$

$$W_n^2 = n \int_0^{+\infty} (F_n(x) - F_0(x))^2 dF_0(x)$$

Si tous les trois tests sont basés sur le calcul de la distance entre la fonction de distribution empirique et théorique, les résultats du test d'Anderson-Darling sont plus parlants, car ce test est surtout approprié pour les valeurs extrêmes et pour les petits échantillons. Les deux autres tests nécessitent un échantillon de taille assez grande ce que nous ne disposons pas pour les événements extrêmes. Pour cette raison là nous allons effectuer le test d'adéquation d'Anderson Darling.

## ii. Application au portefeuille Marine Cargo

A présent nous allons calibrer une loi de coût pour le groupe A de trade secteurs qui sont modélisés ensemble suite au regroupement. Pour les raisons de confidentialité nous n'allons pas citer les noms de secteurs en question et nous les appelons secteur X et secteur Y. En utilisant les deux méthodes d'estimation détaillées plus haut nous obtenons le tableau suivant:

Distribution	Estimation	Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
Weibull	MLE	échelle	1421181.4594685	forme	0.759142212890006	Position	5,00E+05
Weibull	MME	échelle	1256674.37203095	forme	0.646022078508682	Position	5,00E+05
Log-Normale	MLE	Mu	13.4911852378533	Sigma	1.33549557516932	Position	5,00E+05
Log-Normale	MME	Mu	13.725169560867	Sigma	1.12938690630143	Position	5,00E+05
Pareto tronquée	MLE	Alpha	0.919683550345844	Maximum	1,00E+09	Minimum	5,00E+05
Pareto tronquée	MME	Alpha	1.22531328337254	Maximum	1,00E+09	Minimum	5,00E+05
Pareto Généralisée	MLE	échelle	878919.611251895	forme	0.547726730093717	Position	5,00E+05
Pareto Généralisée	MME	échelle	1199354.76179702	forme	0.306242415442295	Position	5,00E+05

Figure 22 Tableau des paramètres estimés pour la loi de coût de secteurs X et Y

En remplaçant les paramètres nous pouvons calculer les quantiles à 75%, 90% et 99,5%

Distribution	Méthode d'estimation	quantile 75%	quantile 90%	quantile 99,5%
Distribution Empirique		2 007 730	4 628 846	11 613 971
Weibull	MLE	2 685 306	4 763 710	13 280 248
Weibull	MME	2 583 559	5 069 924	17 101 260
Log-Normale	MLE	2 279 714	4 503 549	23 048 833
Log-Normale	MME	2 457 012	4 384 625	17 256 176
Pareto Tronquée	MLE	2 250 639	6 059 041	132 284 101
Pareto Tronquée	MME	1 549 623	3 271 901	37 202 831
Pareto Généralisée	MLE	2 324 190	4 559 185	28 118 067
Pareto Généralisée	MME	2 571 323	4 510 932	16 424 266

Figure 23 Tableau des quantiles pour chaque loi de coût potentielle à ajuster pour le groupe de secteurs A

Nous regardons avant tout les quantiles à 75% et 90%. Au vu de ce tableau nous choisissons trois candidats : la loi Weibull par la méthode MLE, la loi Log-Normale par la méthode MLE et la loi Pareto généralisée par la méthode MLE. Ces deux lois ont les quantiles les plus proches de la distribution empirique. Weibull est légèrement plus prudente (quantile à 75% est de 2 685 306 et celui à 90% de

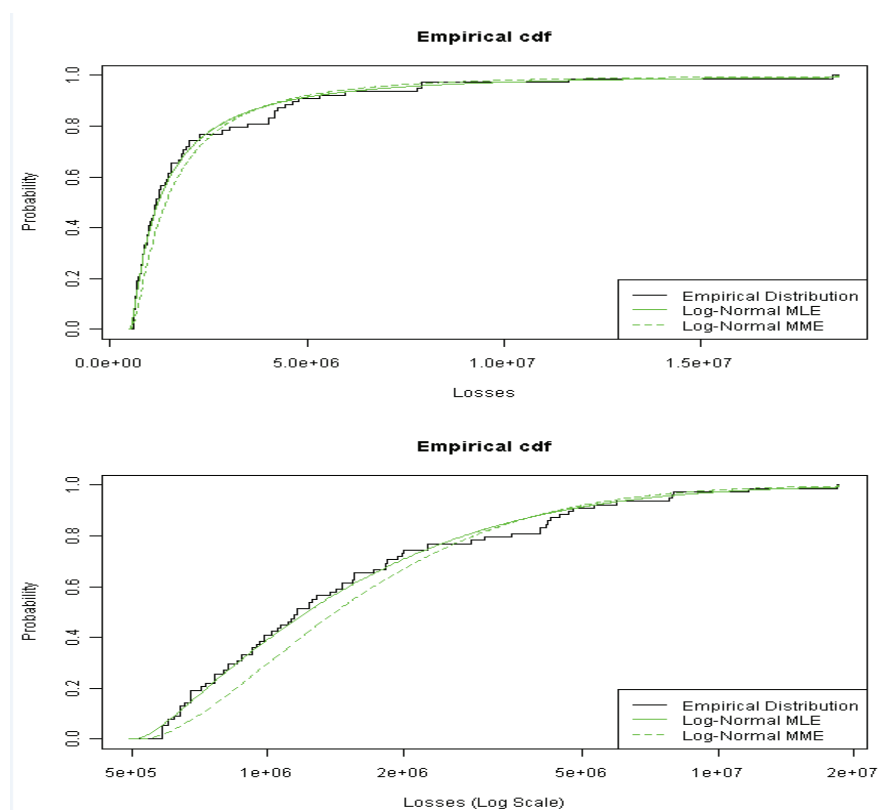
4 763 710) que Pareto Généralisée qui voit son quantile à 90% (4 559 185) légèrement inférieur à celui de la distribution empirique (4 628 846). Le quantile à 75% de la Log-Normale reste en peu au-dessus de quantile empirique (2 279 714) et celui à 90% (4 503 549) est légèrement inférieur au quantile empirique. Etant donné que nous nous basons surtout sur le quantile à 75%, nous préférons rester conservateur et choisissons Log-Normale d'après les quantiles.

Nous allons regarder la moyenne et la variance pour avoir plus de visibilité.

Distribution	Méthode d'estimation	Moyenne	Variance
Distribution Empirique		2 228 781	2 777 126
Weibull	MLE	2 175 523	2 236 525
Log-Normale	MLE	2 263 762	3 924 493
Pareto Tronquée	MLE	4 821 256	27 586 720
Pareto Généralisée	MLE	2 443 338	

**Figure 24 Moyenne et Variance des lois pour TS X et Y**

La moyenne empirique étant de 2 228 781, celle de Weibull se trouve légèrement en dessous avec 2 175 523 et celle de Pareto Généralisée par contre se trouve au-dessus de l'espérance empirique avec 2 443 338. La moyenne de la Log-Normale est la plus proche de la moyenne empirique et la variance est plus grande ce qu'est conservateur. Par contre, en ce qui concerne la variance, la distribution Pareto Généralisée a une variance infinie alors que celle de Weibull (2 236 525) reste assez proche de celle de la distribution empirique (2 777 126). La loi Weibull et Log-Normale est cependant préférable à Pareto Généralisée.



**Figure 25 Fonction de distribution de la loi Log-Normale vs la distribution empirique**

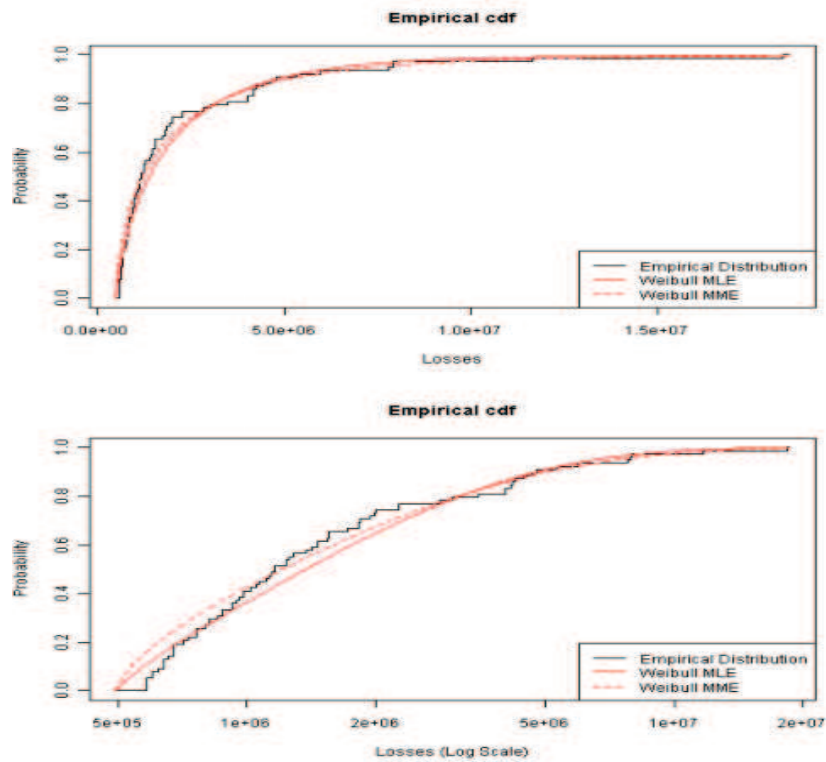


Figure 26 Fonction de distribution de la loi Weibull vs la distribution empirique

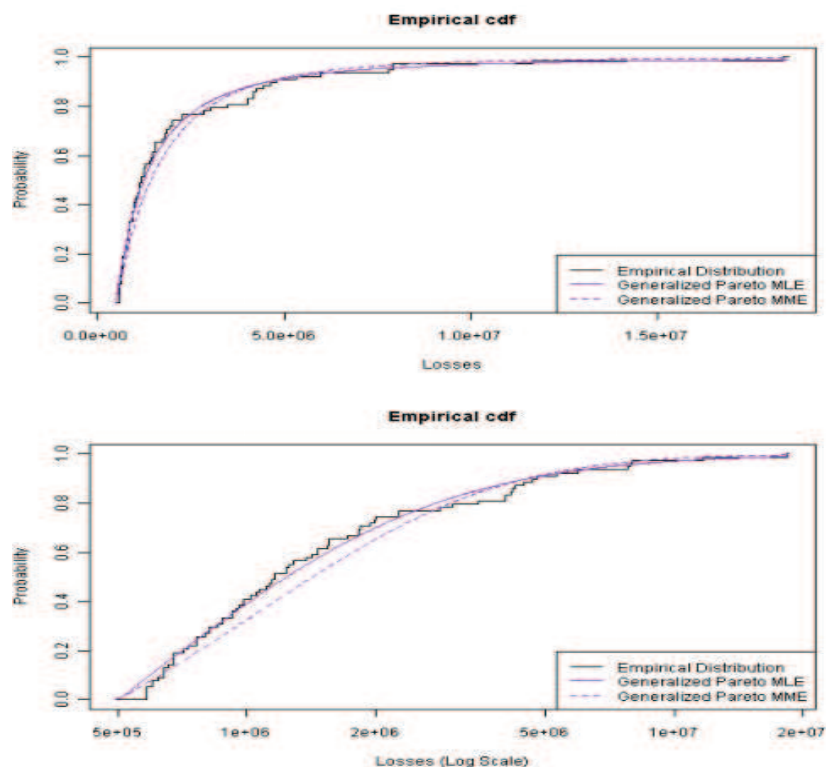


Figure 27 Fonction de distribution de la loi Pareto Généralisée vs la distribution empirique

Au vu de la représentation graphique de la fonction de distribution des lois Weibull, Log-Normale et Pareto Généralisée avec la distribution empirique, nous constatons que les trois lois ajustent bien notre distribution. La loi Weibull semble cependant mieux ajuster nos observations.

Nous observons maintenant le QQ-plot qui permet de comparer graphiquement la pertinence de l'ajustement de données à une loi théorique. Nous plaçons en abscisse les quantiles empiriques et en ordonnée les quantiles théoriques.

Un alignement selon la première bissectrice indique le fait que la loi théorique représente correctement la distribution empirique.

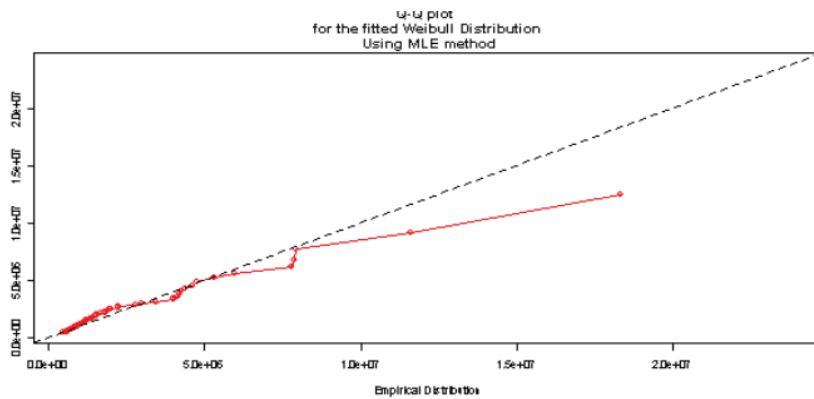


Figure 28 QQ-Plot pour la loi Weibull, TS X et Y

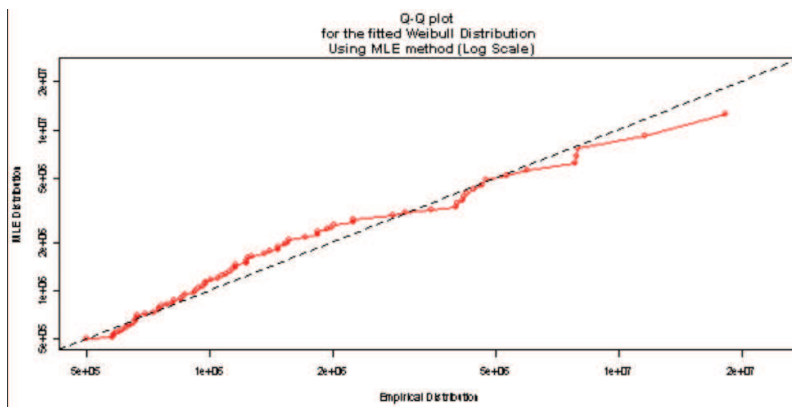


Figure 29 zoom sur QQ-plot pour la loi Weibull, TS X et Y

A première vue, nous remarquons que la loi théorique donne des résultats très proches de la distribution empirique (les points suivent la première bissectrice) jusqu'au seuil de 10 millions qui correspond à un OEP à période de retour de 7 ans. A partir de ce seuil les quantiles théoriques ne correspondent plus aux empiriques.

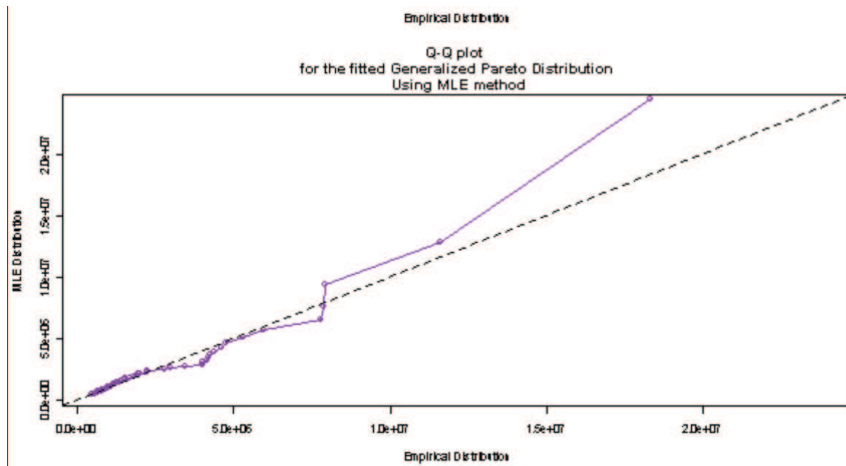


Figure 30 QQ-plot pour la loi Pareto Généralisée, TS X et Y

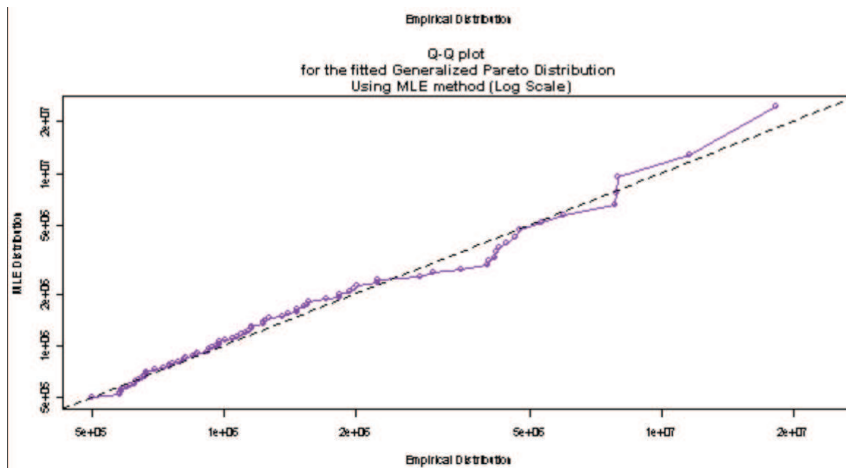


Figure 31 zoom sur QQ-plot pour la loi Pareto Généralisée, TS X et Y

Nous constatons que la loi Pareto Généralisée ajuste bien les données empiriques jusqu'à 20 millions d'euros. Ensuite l'ajustement par les quantiles théoriques de Pareto Généralisée n'est plus assuré.

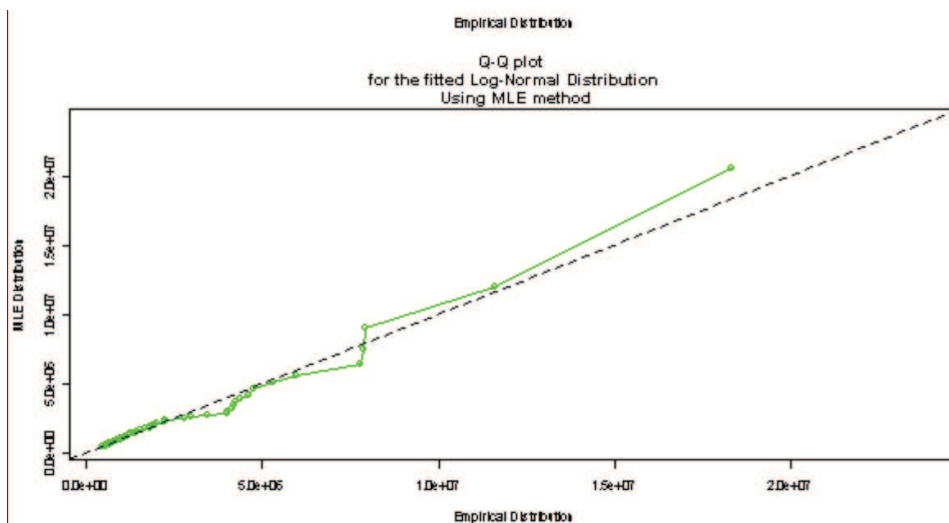
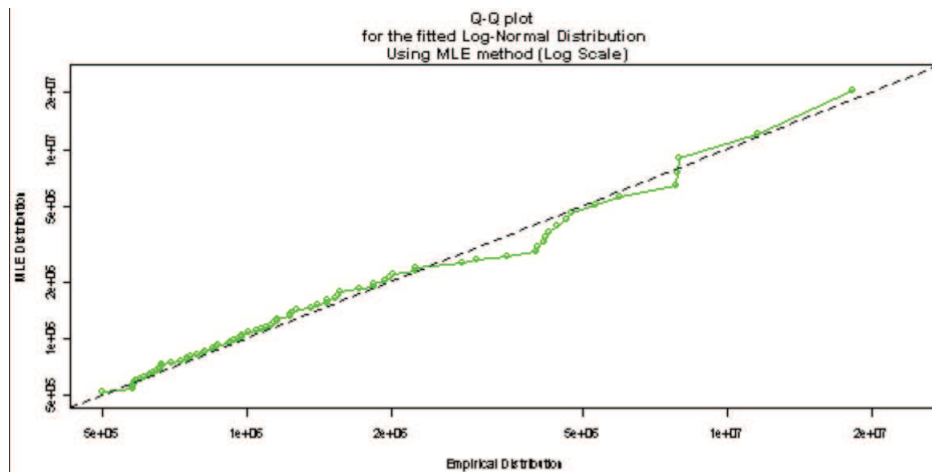


Figure 32 QQ-plot pour la loi Log-Normale, TS X et Y



**Figure 33 zoom sur QQ-plot pour la loi Log-Normale, TS X et Y**

La représentation graphique de la loi Log-Normale semble ajuster le mieux nos observations jusqu'au seuil de 20 millions.

Les trois lois semblent ajuster très bien nos observations. Mais néanmoins nous remarquons que la loi Log-Normale est la meilleure candidate. Nous avons effectué le test d'adéquation d'Anderson Darling dont les résultats sont résumés dans les tableaux ci-dessous :

Score	Distribution	Estimation	Rejet ou non Rejet de H0	Statistique	P-value
1	Log-Normale	MLE	non rejet	0,4080	0,8400
2	Pareto Généralisée	MLE	non rejet	0,6450	0,6060
3	Weibull	MLE	non rejet	1,3200	0,2270
4	Pareto Généralisée	MME	non rejet	1,4800	0,1810
5	Weibull	MME	non rejet	1,9200	0,1020
6	Pareto Tronquée	MLE	non rejet	2,0100	0,0908
7	Log-Normale	MME	rejet	2,9500	0,0291
8	Pareto Tronquée	MME	rejet	7,3400	0,0002

**Figure 34 Résultats du test Anderson-Darling pour le TS X et Y**

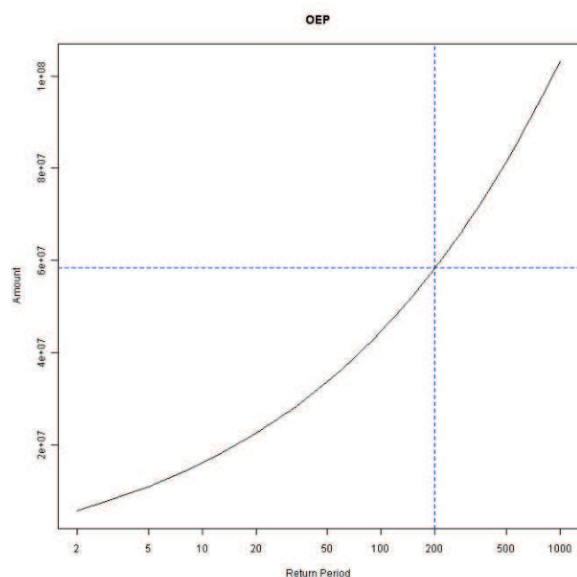
Nous constatons que la loi Log-Normale avec les estimateurs du maximum de vraisemblance (MLE) a la p-value plus élevée que celles des autres lois. Ceci veut dire que la probabilité de se tromper en rejetant l'hypothèse  $H_0$  est la plus élevée. Nous résumons tous les tests dans un tableau récapitulatif où nous mettons en avant le score global ainsi que le carré de la somme des scores de tous les tests avec le nombre de tests non rejetés.

En conclusion, en tenant compte de l'allure des QQ-plots, des quantiles et des résultats du test d'Anderson Darling, nous retenons alors la loi Log-Normale pour modéliser la loi de coût pour les périodes de retour jusqu'à 10 ans (pas très élevées). Nous rappelons les paramètres calculés de la loi Log-Normale par la méthode du maximum de vraisemblance

Distribution	Mu	Sigma	Position
Log-Normale	13,49	1,34	500 000

C'est le récapitulatif de la loi de coût retenue pour les secteurs X et Y avec les paramètres spécifiés.

L'occurrence Exceedence Probability a une forme suivante :



**Figure 35 Occurrence Exceedence Probability versus Période de retour pour le TS X et Y ajustés par la loi Log-Normale**

Nous constatons à la vue de ce graphique qu'un événement qui se produit une fois tous les 200 ans a une OEP correspondante de 58 331 473 euros. Nous avons résumé les périodes de retour les plus visuels dans un tableau ci-dessous :

Période de retour	Montant de OEP
2	5 612 959
5	10 881 939
10	15 995 539
20	22 465 387
50	33 684 498
100	44 682 822
200	58 331 473
250	63 370 845
500	81 312 448
1000	103 193 475

**Figure 36 Période de retour et l'OEP correspondants pour le TS X et Y ajusté par la loi Log-Normale**

Ainsi, nous avons un sinistre de 103 millions qui revient chaque 1000 ans pour les Trade Secteurs X et Y.

### 3) Scénarii

Dans la partie précédente nous avons ajusté une loi de coût à nos observations du portefeuille afin de modéliser une loi de coût pour les faibles périodes de retour (inférieurs à l'historique de nos données). Nous ne pouvons cependant pas nous fier qu'aux données historiques du portefeuille quant à l'ajustement de toute la courbe, faute de manque de sinistres extrêmes dans notre portefeuille. Nous allons construire les scénarii extrêmes pour chaque TS ainsi qu'un scénario multisectoriel qui simule un naufrage d'un porte-conteneur avec plusieurs TS à bord.

## i. La démarche de simulation

En fonction de chaque TS, nous allons faire :

- soit une simulation des scénarii
- soit nous allons prendre quelques sinistres extrêmes issus de Marché et estimer leur période de retour.

La simulation des scénarii se base sur les données reçues auprès des responsables de souscription de chaque Trade secteur. Nous nous intéressons surtout au Sinistre Maximum Possible dans le cas du naufrage d'un porte-conteneur.

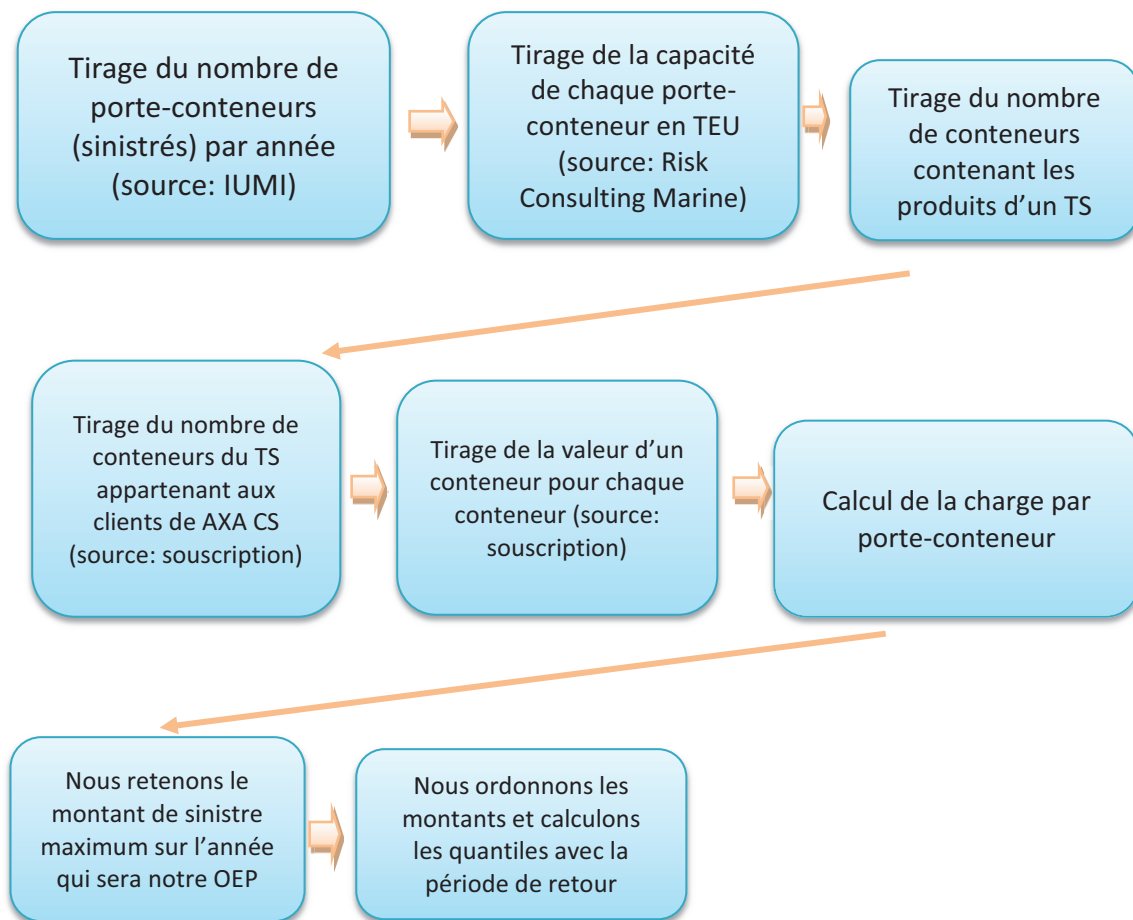
- Nous allons simuler 10000 années et tirer pour chaque année le nombre de porte-conteneurs qui font naufrage. Nous considérons que 10000 simulations sont assez représentatives.
- Ensuite, pour chaque porte-conteneur qui coule nous allons tirer la capacité en EVT (Equivalent Vingt Pieds ou TEU en anglais). Un EVT est un conteneur standard utilisé dans le transport maritime. Nous aurons donc le nombre de boîtes ou conteneurs à bord.
- L'étape suivante est le tirage du nombre de conteneurs appartenant à un Trade secteur pour lequel nous faisons les simulations de scénarii.
- Une fois que le nombre de conteneurs d'un TS donné est connu nous tirons le nombre de conteneurs pour lesquels un des assurés d'AXA CS est présent
- Ensuite, pour chaque boîte appartenant à un assuré d'AXA CS nous tirons sa valeur et enfin nous en déduisons le coût de chaque naufrage en Marine Cargo pour un TS donné.
- Enfin, nous retenons pour chaque année le naufrage ayant coûté le plus. Ce montant est le montant de l'OEP 2 à 100%. L'OEP 2 correspond à la partie de l'OEP qui sera utilisé pour les périodes de retour élevées.
- Afin d'avoir les quantiles et les périodes de retour nous classons dans l'ordre croissant nos montants OEP et en déduisons les quantiles et la période de retour. La formule de calcul de quantile et de la période de retour est donnée plus haut<sup>9</sup>

Nous représentons la démarche simplifiée par le schéma suivant :

---

<sup>9</sup> D. Modélisation du coût,  
1) La démarche





Ce schéma visualise le processus de simulation des scénarii extrêmes pour chaque Trade secteur ou un groupe de Trade Secteurs.

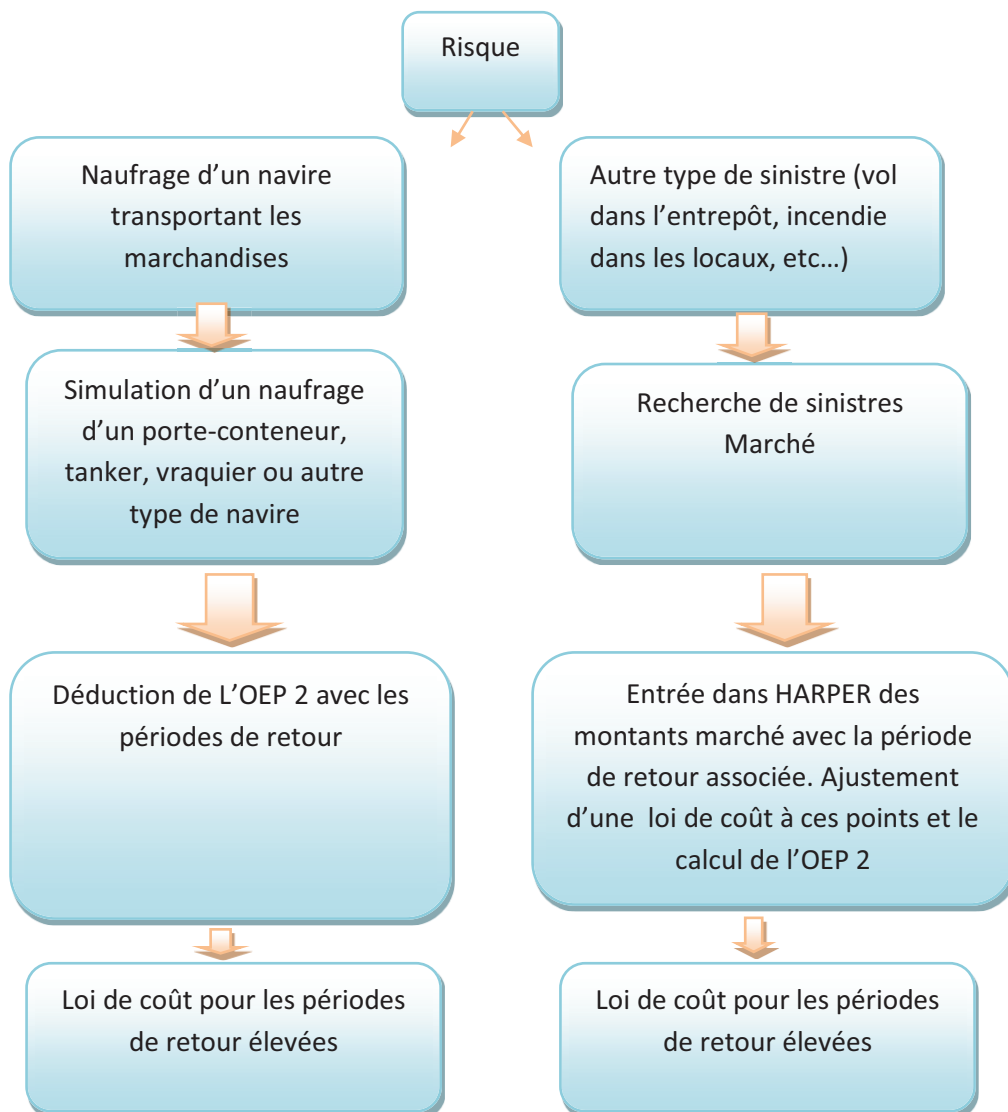
TEU : Twenty foot Equivalent Unit, est un conteneur avec les mesures standard

Dans le but de confidentialité nous allons considérer les secteurs X, Y et Z. Cette approche est valable pour les Trade Secteurs pour lesquels le transport de marchandises se fait majoritairement par la voie maritime et surtout pour ceux dont le risque le plus important et le plus élevé en termes de coût est présenté par un naufrage d'un porte-conteneur avec la cargaison à bord. Or, nous avons des Trade Secteur, comme par exemple Z ou Y où les valeurs les plus élevées sont transportées par la voie aérienne. Dans ce cas, un crash d'avion transportant une cargaison d'un client d'AXA CS par exemple, va coûter beaucoup plus qu'un naufrage d'un porte-conteneur avec quelques conteneurs d'un client de ce secteur à bord. D'autres Trade Secteurs comme X sont plutôt soumis au risque de stockage.

Ainsi, la loi de coût pour les périodes de retour élevées pour certains Trade Secteurs sera construite à partir de quelques points. Nous prendrons comme premier point le montant de l'OEP 1, issue de la loi de coût construite pour les faibles périodes de retour.

- Comme notre période d'observation est de 7 ans, nous prendrons un montant d'OEP correspondant à la période de retour de 7 ans. Ce sera notre premier point.
- Ensuite nous allons placer un autre point correspondant au sinistre grave de marché observé. Nous en estimons la période de retour.
- Grâce à l'outil HARPER nous pourrons construire une loi de coût à partir de quelques points seulement et en déduire l'OEP 2 pour les périodes de retour élevées.

Nous résumons la démarche par le schéma ci-dessous :



Ainsi, la simulation des scénarii extrêmes va dépendre de secteur et de son profil de risque. Si un Trade Secteur est plutôt soumis au risque de naufrage d'un navire transportant les marchandises, alors nous allons faire des simulations de 10000 années de naufrages de type de navire en question (tanker, porte-conteneurs, etc.) et en déduire l'OEP 2 et la loi de coût pour les périodes de retour élevées. En revanche, si le Trade Secteur est plutôt soumis au risque d'un autre type de sinistre (incendie dans l'entrepôt ou un vol dans l'entrepôt), nous allons chercher les sinistres extrêmes de Marché afin de construire par le moyen de l'outil HARPER l'OEP et la loi de coût pour les périodes de retour élevées.

## ii. Application : Simulation des scénarii pour le TS X

Nous allons dans cette sous partie appliquer le processus de simulation des scénarii pour le secteur X. Le risque auquel ce secteur est soumis est le risque de naufrage d'un porte-conteneur. Nous allons présenter la simulation de ce type de scénarii.

## a. Naufrage d'un porte-conteneur

Nous allons à présent suivre notre démarche pour le TS X. Cette simulation consiste en :

- Tirage du nombre de porte-conteneurs qui coulent par an
- Tirage de la capacité en TEU (TEU étant un conteneur standard) de chaque porte-conteneur qui coule, c'est-à-dire le nombre de conteneurs à bord
- Tirage du nombre de conteneurs de produits de X
- Tirage du nombre de conteneurs des clients d'AXA CS

Cette simulation nécessite l'information que nous avons pu récupérer auprès de l'équipe de souscription. Nous savons que :

- En moyenne, 0,15 % de la flotte mondiale fait naufrage chaque année<sup>10</sup>
- La flotte mondiale de porte-conteneurs représente 4968 porte-conteneurs<sup>11</sup>
- En moyenne, nous nous attendons à avoir 10 conteneurs des produits de X sur un porte-conteneur de 10000 TEU
- La part de marché de X à 100% est estimée à 35% (donc, en moyenne, 35% des conteneurs de X appartiennent aux clients d'AXA CS)
- La valeur moyenne d'un TEU rempli de produits de X est de 1 million d'euros
- La valeur maximale d'un conteneur rempli de produits de X est de 20 millions d'euros.

A partir de ces informations nous allons poser un certain nombre d'hypothèses.

### Hypothèses :

- Le nombre de porte-conteneurs qui coulent chaque année suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 0,15\% \times 4968 = 7,472$
- Nous considérons que 10000 simulations sont assez représentatives
- Nous supposons que le nombre de TEU de produits de X sur un porte-conteneur suit la loi Binomiale de paramètres  $n = \text{capacité (en TEU) du porte-conteneur}$  et  $p = 10/10000 = 0,1\%$
- Nous supposons qu'un client possède un seul conteneur
- Le nombre de conteneurs appartenant aux clients d'AXA CS suit la loi Binomiale de paramètres  $n = \text{nombre de conteneurs de produits de X sur le porte-conteneur}$ ,  $p = 0,35$  (la part de marché d'AXA CS à 100% pour X)
- La valeur d'un conteneur contenant des produits de X suit la loi discrète. Nous avons construit cette distribution en se basant sur la valeur moyenne d'un conteneur (1 million €) et la valeur maximale d'un conteneur (20 millions €).

Les capacités d'Excel, étant limitées en termes de temps pour les simulations imbriquées nous utilisons le langage de programmation R pour effectuer le processus de simulations. Ensuite nous exportons nos données vers Excel pour avoir plus de visibilité. Le lecteur pourra trouver cette programmation en annexe.

### Première étape :

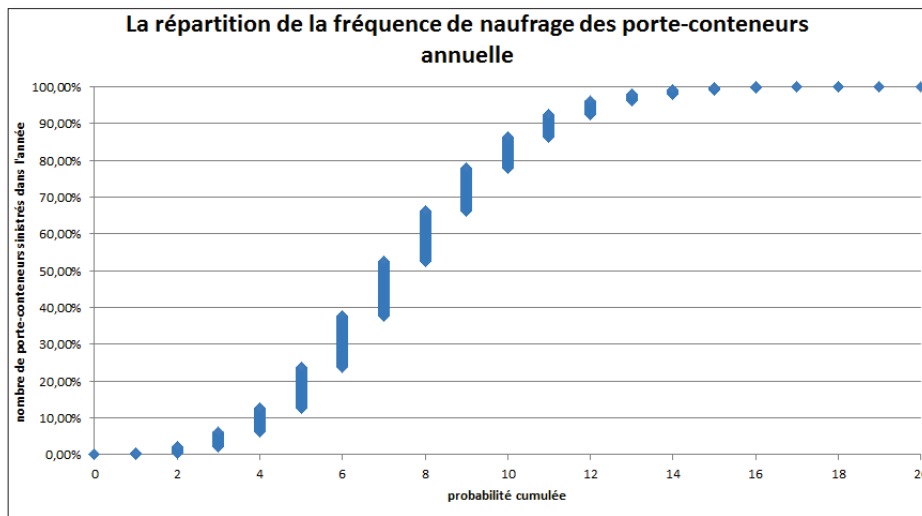
Nous simulons 10000 fois la loi de Poisson de paramètre 7,472 afin d'obtenir pour chaque année le nombre de porte-conteneurs qui vont couler. Nous obtenons un tableau avec l'année simulée et le

---

<sup>10</sup> IUMI « Casualty and World Fleet Statistics »

<sup>11</sup> Données de Marine & Transport Risk Consulting d'AXA CS

nombre de porte-conteneurs sinistrés. Nous présentons également la fonction de répartition de cette fréquence.



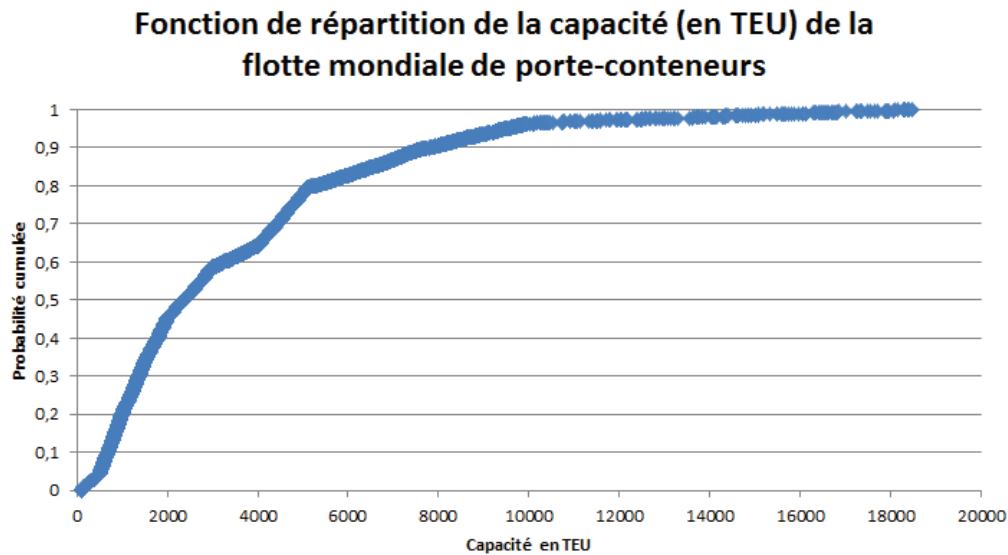
**Figure 37 La répartition de la part de la fréquence annuelle des naufrages des porte-conteneurs**

Ce graphique représente la fonction de distribution de la fréquence de naufrages des porte-conteneurs par an. En abscisse, nous avons le nombre de porte-conteneurs naufragés, et en ordonnée, nous avons la probabilité de naufrage associée. Comme la loi de Poisson est une loi discrète, sa fonction de répartition est discontinue en chaque entier. Comme la probabilité que le nombre de porte-conteneurs naufragés s'écrit sous la forme  $P(X \leq k)$  avec  $X$  une variable aléatoire qui compte le nombre de porte-conteneurs naufragés suivant la loi de Poisson de paramètre 7,472 et  $k$  un entier naturel, nous regardons l'extrémité supérieure pour trouver la probabilité correspondante sur le graphique. Nous constatons que nous avons 80% de chances d'avoir le nombre de naufrages de porte-conteneurs inférieur ou égal à 10.

Deuxième étape :

Grâce aux données recueillies auprès de l'équipe de Marine & Transport Risk Consulting<sup>12</sup> nous construisons une fonction de distribution de la capacité de la flotte mondiale

<sup>12</sup> La répartition de la capacité (en TEU) de la flotte mondiale des porte-conteneurs est donnée dans l'annexe

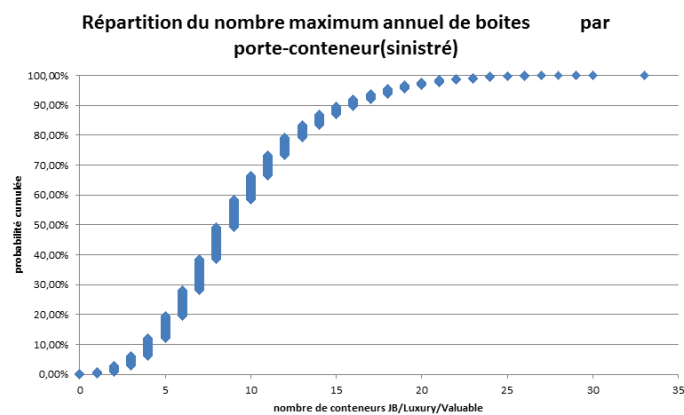


**Figure 38** Ma répartition de la capacité de la flotte mondiale de porte-conteneurs

Nous simulons donc pour chaque porte-conteneurs une loi Uniforme entre 0 et 1 et ensuite nous prenons la fonction inverse de notre distribution de la capacité. Pratiquement, nous cherchons la probabilité correspondante au nombre aléatoire simulé dans notre tableau de la capacité et nous gardons la capacité correspondante à cette probabilité.

Troisième étape :

Une fois que nous avons simulé la capacité de chaque porte-conteneur sinistré, nous devons simuler le nombre de conteneurs des produits de X qui sont à bord. Pour ce faire, nous simulons une loi Binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  dont la valeur est précisée dans les hypothèses du modèle<sup>13</sup>. Nous obtenons donc pour chaque porte-conteneurs le nombre maximum annuel de boîtes de X à bord :



**Figure 39** Répartition du nombre maximum annuel de boîtes de X par porte-conteneur sinistré

Nous avons représenté graphiquement la répartition du maximum annuel du nombre de boîtes de X par un porte-conteneur sinistré. Ainsi, nous constatons que nous avons 60% de chances d'avoir au maximum moins de 10 boîtes de X sur un porte-conteneur.

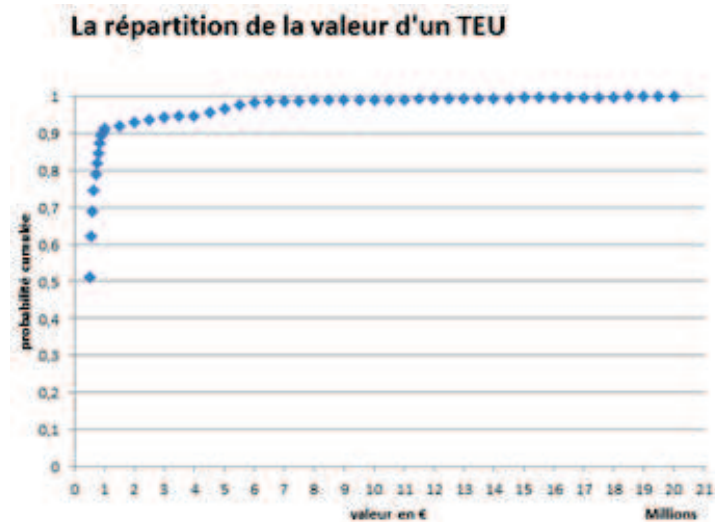
<sup>13</sup> Se référer dans la sous-partie a) *Nafrage d'un porte-conteneur*

#### Quatrième étape :

Il s'agit maintenant de tirer le nombre de boîtes appartenant aux clients d'AXA CS. Nous utilisons la loi Binomiale une fois de plus avec comme nombre de tirages le nombre de conteneurs de produits X et la probabilité d'avoir un client sur un TEU de produits de X égale à 0,35

#### Cinquième étape :

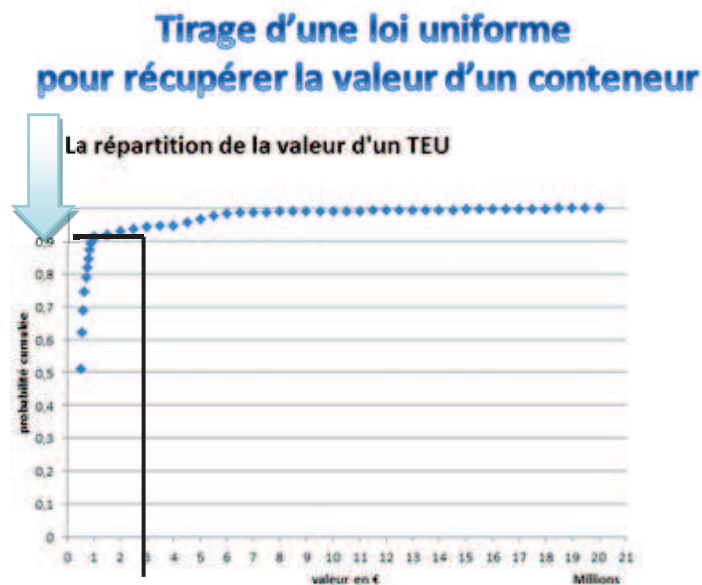
Le dernier tirage aléatoire de ce modèle consiste en simulation de la valeur de chaque conteneur. Nous utilisons les données de souscription afin de construire une fonction de répartition de probabilités de la valeur d'un conteneur de produits de X. La voici :



**Figure 40 La répartition de la valeur d'un conteneur de produits de X**

Nous soulignons que les produits de X ont un coût assez élevé, d'où un potentiel sinistre pourrait impacter significativement le portefeuille. La valeur minimum d'un TEU est de 500 000 euros et peut monter vite jusqu'à 20 millions d'euros.

Nous simulons alors une loi Uniforme entre 0 et 1 pour chaque conteneur appartenant au client d'AXA CS pour le TS X et nous récupérons la valeur correspondante de notre répartition.



### Sixième étape :

Il s'agit à présent de calculer la charge totale de chaque porte-conteneur pour le Trade Secteur X pour AXA CS. Nous sommes les valeurs des boîtes pour chaque conteneur. Ensuite, nous prenons le montant maximum annuel ce qui correspond au montant d'OEP 2. Il faut classer les montants par ordre croissant pour pouvoir calculer les quantiles et périodes de retour correspondants.

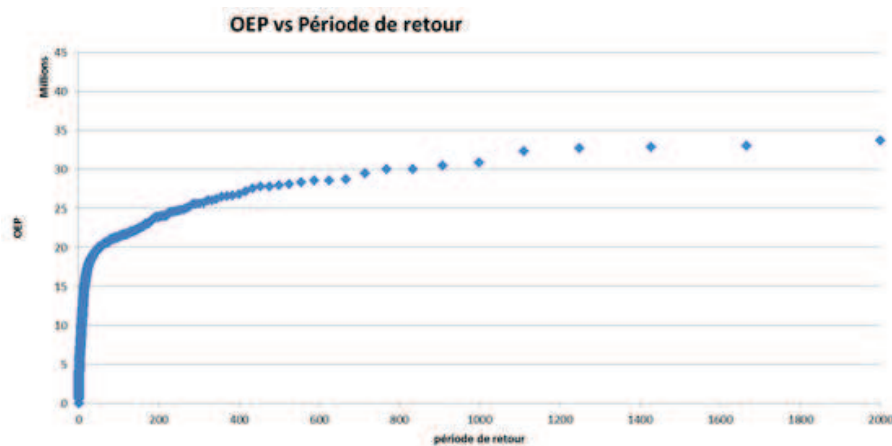
Nous exprimons les quantiles en fonction de numéro de classement du montant de manière suivante :

$$\text{quantile} = \frac{\text{numéro de classement}}{\text{nombre de simulations}}$$

Ainsi pour avoir le quantile à 99,5% nous avons :

$$q_{99,5\%} = \frac{9950}{10000} = 99,5$$

Comme la Value at Risk à 99,5% correspond à l'événement qui se produit une fois tous les 200 ans, alors sur 10 000 simulations cet événement correspond au 50<sup>ème</sup> plus gros sinistre.



**Figure 41 Représentation graphique de l'OEP pour le X**

Selon la répartition de l'OEP pour le Trade Secteur X, nous savons qu'un événement impliquant une perte de 24 millions d'euros à une périodicité de 200 ans, ce qui veut dire que nous nous attendons à un montant de sinistre de 24 millions tous les 200 ans.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Numero de simulation	OEP	Numero de classement		1-Quantiles	Return period	Quantiles
9931	82	22 150 000	9930	71	0,7%	140,84507	99,29%
9932	5106	22 200 000	9931	70	0,7%	142,857143	99,30%
9933	5390	22 200 000	9932	69	0,7%	144,927536	99,31%
9934	2061	22 250 000	9933	68	0,7%	147,058824	99,32%
9935	6861	22 400 000	9934	67	0,7%	149,253731	99,33%
9936	409	22 450 000	9935	66	0,7%	151,515152	99,34%
9937	3047	22 500 000	9936	65	0,6%	153,846154	99,35%
9938	1626	22 600 000	9937	64	0,6%	156,25	99,36%
9939	4740	22 600 000	9938	63	0,6%	158,730159	99,37%
9940	1304	22 700 000	9939	62	0,6%	161,290323	99,38%
9941	1509	22 700 000	9940	61	0,6%	163,934426	99,39%
9942	5032	23 000 000	9941	60	0,6%	166,666667	99,40%
9943	8990	23 050 000	9942	59	0,6%	169,491525	99,41%
9944	9397	23 050 000	9943	58	0,6%	172,413793	99,42%
9945	4821	23 100 000	9944	57	0,6%	175,438596	99,43%
9946	291	23150000	9945	56	0,6%	178,571429	99,44%
9947	4181	23 400 000	9946	55	0,5%	181,818182	99,45%
9948	1964	23 500 000	9947	54	0,5%	185,185185	99,46%
9949	3663	23 750 000	9948	53	0,5%	188,679245	99,47%
9950	1424	23 850 000	9949	52	0,5%	192,307692	99,48%
9951	6771	23 900 000	9950	51	0,5%	196,078431	99,49%
9952	9115	23 900 000	9951	50	0	200	99,50%
9953	8636	23 950 000	9952	49	0,5%	204,081633	99,51%
9954	889	24 050 000	9953	48	0,5%	208,333333	99,52%
9955	1268	24 050 000	9954	47	0,5%	212,765957	99,53%
9956	7598	24 050 000	9955	46	0,5%	217,391304	99,54%

Nous constatons que notre événement bicentenaire correspond au naufrage d'un porte-conteneur avec la cargaison de X assurée par AXA CS de 23,9 millions d'euros. Or, en consultant les données de Marché nous remarquons que le sinistre ayant coûté le plus pour ce TS est le vol de bijoux dans un hôtel Carlton à Cannes qui s'est produit le 28 juillet 2013 et dont le coût total estimé est de 103 millions d'euros, soit 4,3 fois plus que le montant bicentenaire que nous avons obtenu. C'est la limite de notre simulation que nous voulons prendre en compte en suivant la deuxième approche selon laquelle nous plaçons 2 sinistres Marché et nous obtenons une loi de coût à partir de ces deux points par le moyen de l'outil interne HARPER.

## b. Construction d'une OEP à partir de sinistres Marché

Une autre approche pour avoir une loi de coût pour les périodes de retour élevées consiste en la recherche de sinistres Marché et la détermination de leur période de retour afin de construire une OEP2.

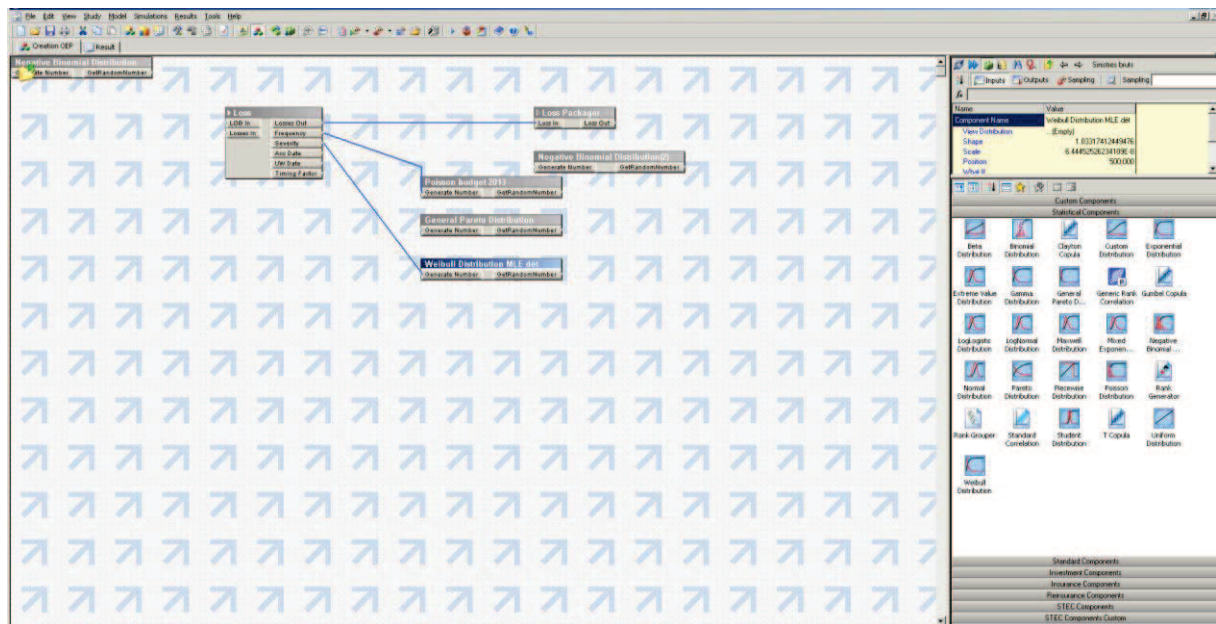
Pour le Trade Secteur X, le sinistre marché le plus élevé connu a un coût estimé 103 millions d'euros. Nous estimons qu'un événement de cette ampleur qui entraîne le déclenchement d'une couverture d'AXA CS a une période de retour de 200 ans. C'est le montant d'un événement considéré comme un événement bicentenaire par l'équipe de souscription. Nous fournissons donc le premier sinistre qui correspond au sinistre de période de retour de 7 ans de notre historique (13 215 574 euros) qui est donné par HARPER suite à la calibration de la loi de coût pour les faibles périodes de retour. Le deuxième sinistre sera le sinistre de 103 millions d'euros de valeur pour une période de retour de 200 ans.

Nous ajustons la loi de Weibull pour cette loi de coût en se basant sur les mêmes critères que pour la modélisation d'une loi de coût pour les périodes de retour faibles<sup>14</sup>. Or nous avons besoin de

<sup>14</sup> Se référer à la sous-partie iv) application au portefeuille Marine Cargo



plusieurs points de la courbe. Pour avoir le nombre de points suffisant nous allons utiliser un outil développé par AON Benfield appelé ReMetrica. Cet outil, entre autres, permet de simuler les lois de coût et de fréquence et obtenir les lois de charges correspondantes. Nous allons décrire plus précisément cet outil dans la partie sur la charge sinistre.



Nous simulons ainsi la loi de Weibull de paramètres ci-dessous :

Distribution	Scale_RM	Shape_RM	Position_RM
Weibull	4,15076E-05	0,63096473	500000

Nous obtenons les points de l'OEP2 représentée dans le tableau ci-dessous :

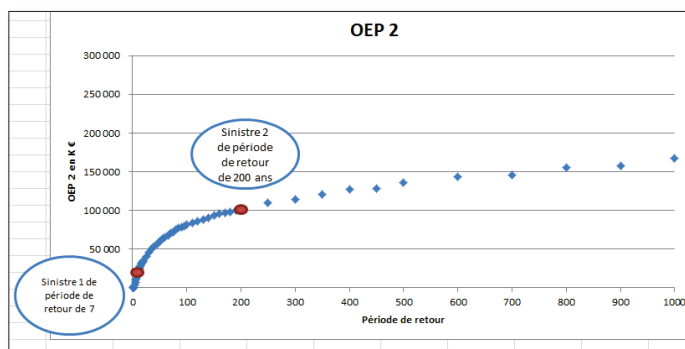


Figure 42 OEP 2 pour TS X

Nous disposons ainsi de deux lois de coût de périodes de retour élevées. Cependant, la première loi de coût obtenue à partir des simulations des naufrages des porte-conteneurs n'est pas prudente et nous n'avons pas de pertes élevées, le bicentenaire étant à 23,9 millions d'euros. La deuxième approche nous donne les montants beaucoup plus proches de la réalité du risque encouru en se basant sur des statistiques marché.

#### 4) Loi de coût finale

L'étape suivante de notre modèle est le raccord de deux lois de coût issues des données historiques et des données marché ou des simulations. Nous allons construire par le moyen de HARPER une loi de coût de sorte que les montants de L'OEP pour les périodes de retour jusqu'à 10 ans seront issus de la loi de coût historique et les montants de l'OEP pour les périodes de retour plus élevées seront issus des simulations. Le raccord se fera entre les périodes de retour de 10 et 50 ans car nous avons les observations historiques pour la période de 7 ans et donc nous considérons que sur 10 ans notre loi de coût historique ajuste bien le coût.

##### i. Raccord de deux lois

Cette partie vise à réconcilier les deux lois de coût via HARPER. Nous fournissons les deux OEP précédemment construites. Afin de comparer les deux méthodes de simulation de l'OEP2 nous allons construire une loi finale issue de la loi de coût historique et la loi de coût des scénarii de naufrage et une autre loi finale issue de loi de coût historique et de la loi construite à partir des sinistres marché. HARPER nous propose le raccord représenté dans les figures ci-dessous :

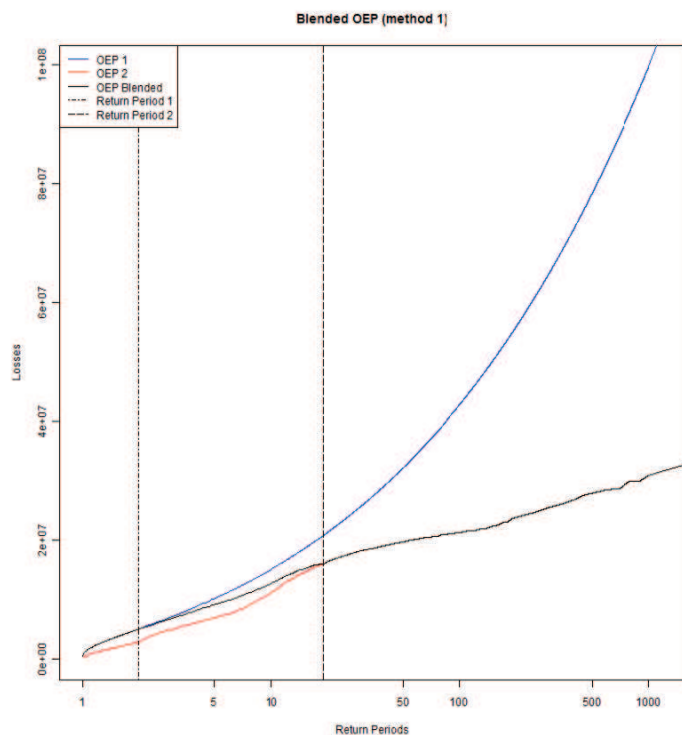
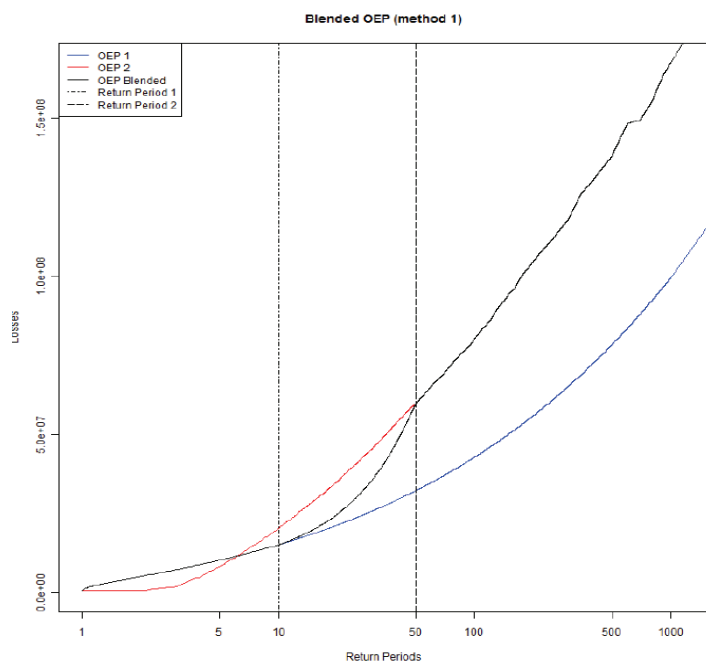


Figure 43 Représentation graphique du raccord de l'OEP1 et l'OEP2 avec les scénarii de porte-conteneurs



**Figure 44 Représentation graphique du raccord de l'OEP1 et de l'OEP2 avec les sinistres marché**

La courbe bleue représente l'OEP 1 calibré à partir de nos observations historiques. La courbe rouge représente l'OEP 2.

Nous remarquons que dans le cas de simulation des scénarii de naufrage des porte-conteneurs (Figure 43), l'OEP2 se situe en dessous de l'OEP1, ce qui signifie que les scénarii simulés donnent des montants inférieurs à ceux de la loi de coût historique. Par contre, l'OEP 2 des sinistres marché (Figure 44) se situe bien au-dessus de l'OEP1 pour les périodes de retour élevées (plus de 7 ans), ce qui veut dire que les montants de sinistres marché et ceux calibrés par HARPER pour compléter l'OEP2 sont supérieurs aux montants historiques pour la même période de retour.

En conclusion, comme le but de notre simulation est de créer les sinistres que nous n'avons pas eu dans notre historique, faute de la fréquence faible des sinistres extrêmes, la deuxième méthode de simulation (avec les sinistres Marché) semble plus appropriée pour décrire notre loi de coût. De plus nous essayons d'être plus conservateur en même temps en retenant cette approche.

## ii. Tirage de la part

Jusqu'à présent, nous avons modélisé le coût à 100 %. Or, pour simuler une loi de coût et pour en déduire la charge sinistre, nous avons besoin d'une loi de coût à part AXA CS. Nous allons simuler notre loi de coût obtenue et tirer une part afin de récupérer une loi de coût à la part AXA CS. La démarche de tirage de la part est décrite comme suit :

- Pour chaque montant de notre loi de coût obtenue nous allons simuler une loi Uniforme entre 0 et 1.
- Nous prenons la fonction inverse de la loi de coût du nombre aléatoire simulé.
- Nous simulons ensuite le taux de destruction de chaque sinistre pour connaître l'engagement

-Nous construisons une courbe de taux de destruction qui est défini comme le rapport entre le coût de sinistre et l'engagement.

-Nous traçons deux courbes qui passent par les engagements maximum et les engagements minimum. Ces deux courbes vont délimiter un segment

- Nous récupérons un intervalle de la part de l'engagement (taux de destruction)

- A partir de l'intervalle récupéré nous calculons un intervalle de l'engagement

- Nous avons donc une borne maximum de l'engagement et une borne minimum de l'engagement
- Nous générons un nombre aléatoire entre 0 et 1 pour chaque borne
- Nous générons ensuite un nombre aléatoire entre ces deux bornes qui sont nécessairement comprises entre 0 et 1
- Le nombre aléatoire généré permet de récupérer un client. La probabilité de tirer un client est pondérée par sa prime. Nous obtenons donc un engagement et en déduisons la part AXA CS

La courbe de destruction pour le TS X est présentée dans la Figure ci-dessous :

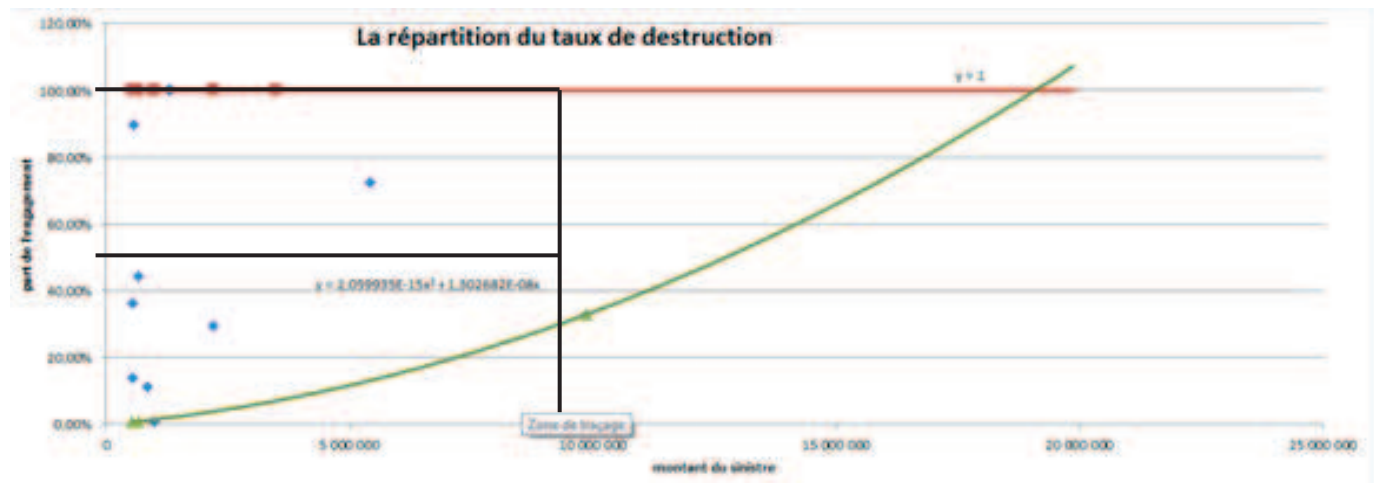


Figure 45 La répartition du taux de destruction pour le X et Y

Sur ce graphique, nous avons un nuage de points en bleu, représentant les sinistres graves historiques du secteur X avec le montant du sinistre en abscisse et la part de l'engagement en ordonnée.

Cette simulation de la part AXA CS nous fournit une loi de coût nette dans le sens où elle permettra de simuler les sinistres à la part AXA CS. Nous n'avons pas modélisé la loi de coût à la part AXA CS dès le début, car dans le cas de changement de la politique sur les parts souscrites, le modèle n'aurait pas capté ce changement. Alors que dans notre cas les lois de coût sont à 100% et c'est seulement pour le processus de la simulation de la charge sinistre que nous estimons une loi de coût à notre part. Ainsi, le potentiel changement dans la politique des parts du portefeuille est capté par le tirage de la part.

## E. La charge sinistre

Dans cette partie nous allons déterminer notre charge sinistre qui n'est rien d'autre que la fréquence  $\times$  coût. Cette modélisation se fait via l'outil ReMetrica développé par AON Benfield. Nous allons présenter cet outil brièvement et faire un exemple d'application au secteur X.

### 1) ReMetrica : modélisation de la charge sinistre pour le TS X

Nous tenons à présenter rapidement l'outil ReMetrica, utilisé par les assureurs et les réassureurs dans le monde entier.

#### i. ReMetrica

ReMetrica est un outil d'analyse financière dynamique créé par AON Benfield qui permet d'effectuer des analyses financières variées comme :

- Modélisation du capital économique pour Solvabilité 2 et ERM
- L'allocation du capital pour investissement et Pricing
- Stratégie de réassurance et de tarification

Nous allons utiliser notamment la partie de ReMetrica qui permet de simuler la charge sinistre à partir de la loi de fréquence et de coût spécifiés via les simulations de Monte Carlo. Le nombre de simulations peut être précisé lors du lancement du processus. De plus, cet outil fournit à la fin des simulations la distribution de la charge annuelle brute. De plus, ReMetrica permet de modéliser les traités de réassurance et fournir une répartition de la charge annuelle nette des traités de réassurance ainsi que des informations nécessaires à l'estimation de l'efficacité des traités de réassurance.

#### ii. Simulation de la Charge sinistre pour le TS X

Nous souhaitons analyser la charge annuelle nette pour l'année 2013 de la branche Marine Cargo. Nous avons calculé la fréquence moyenne et le coût moyen pour chaque trade secteur ou groupe de trade secteurs en prenant en compte notre exposition dans le calcul de ceux-ci par :

- Le calcul As If 2013 de la fréquence qui prend en compte la prime associée à ce Trade secteur
- Application du taux d'inflation propre à chaque secteur en fonction de l'année
- Le tirage de la loi de coût à la part AXA CS. Nous avons utilisé les dernières données d'exposition en termes de l'engagement, de la prime et de la part AXA CS qui sont celles de 2013.

Nous utilisons ReMetrica pour faire nos simulations de la fréquence et de coût. Pour ceci, nous entrons nos lois de fréquence et de coût de chaque trade secteur ou de chaque groupe de trade secteurs modélisées précédemment. Après la simulation nous déduisons les montant de la VaR à 99,5% ainsi que de la TVaR.

## 2) Résultats

Nous procédons à présent à l'analyse des résultats obtenus. La simulation de 10 000 scénarii dans ReMetrica nous donne les résultats résumés dans le tableau suivant ci-dessous :

	Nombre de sinistres Sup 3M	Coût unitaire d'un sinistre sup 3M	Maximum	Charge annuelle brute	Récupération par risque	Charge annuelle nette	Primes de reconstitution annuelle	Charge annuelle nette +	Prime de réassurance fixe
Moyenne	4,1	4 714	10 021	21 648	8 337	13 311	2 399	15 710	6 513
Quantiles									
10	2	2 552	3 819	6 425	122	4 896	41	6 746	
20	2	2 733	4 690	10 021	1 235	7 333	420	9 640	
30	3	3 015	5 321	12 892	2 266	9 324	813	11 877	
40	3	3 335	6 167	15 682	3 508	10 930	1 258	13 907	
50	4	3 729	7 031	18 396	4 862	12 507	1 754	15 907	
60	5	4 426	8 062	21 744	6 550	14 420	2 325	17 989	
70	5	4 921	9 606	25 449	9 006	16 273	3 132	20 416	
80	6	5 592	12 935	31 024	12 370	18 848	4 147	23 303	
90	6	7 200	19 672	40 447	20 613	22 363	5 751	27 769	
95	7	9 225	29 537	50 752	30 730	25 733	6 997	31 525	
97,5	9	18 822	42 873	72 308	48 840	32 756	9 335	40 394	
99,5	10	30 093	57 646	82 291	63 337	36 507	10 359	43 392	

**Figure 46 Résumé de la simulation de la charge annuelle pour la branche Marine Cargo, les montants sont exprimés en milliers**

Nous obtenons le nombre de sinistres supérieur à 3 millions, le coût unitaire d'un sinistre supérieur à 3 millions et la charge annuelle brute et nette de réassurance en fonction des différents quantiles. Nous constatons que le nombre moyen de sinistres supérieurs à 3 millions est porté à 4,1. Nous nous attendons donc à avoir en moyenne 4 sinistres supérieurs à 3 M € pour la branche Marine Cargo.

Le coût unitaire moyen d'un sinistre supérieur à 3 M€ est de 4,7 millions. La charge annuelle brute moyenne atteint 21,6 M€. Nous remarquons que la charge moyenne annuelle nette cependant est nettement inférieure, elle représente 13,3M€. Ceci s'explique par le fait que les programmes de réassurance de la Marine Cargo épongent le reste de la charge.

Il est intéressant de regarder la décomposition par secteur ou groupe de trade secteurs d nombre de sinistres moyen supérieurs à 3 M€ et la charge annuelle brute moyenne des sinistres supérieurs à 3 M€

	Nombre moyen de sinistres sup à 3M€	Charge moyenne annuelle Brute des sinistres sup à 3M€(en milliers)	part primes
Trading commodities	1,21	5 637	21%
Oil	0,48	1 757	8%
Luxe et Pharma	0,70	4 430	10%
High Tech	0,22	941	5%
Industrial Products	0,81	4 456	18%
Project Cargo et Pre-launch	0,11	695	5%
Auto	0,29	2 618	23%
Multisectoriel	0,30	1 079	
<b>Tout</b>	<b>4,12</b>	<b>21 613</b>	

Dans ce tableau nous avons récapitulé pour chaque trade secteur le nombre de sinistres moyen supérieur à 3M€ et la Charge moyenne Brute des sinistres supérieurs à 3M€. Nous remarquons que le secteur ayant le plus de sinistres en moyenne supérieurs à 3M€ est Trading Commodities. De plus il a la charge moyenne annuelle brute la plus élevée. Ceci peut s'expliquer d'une part du fait que ce secteur d'activité représente une part importante (21% des primes) du portefeuille Marine Cargo, et de l'autre part, ce secteur est très sensible au taux d'inflation des matières premières. En effet, ce secteur d'activité a connu les taux d'inflation les plus élevés parmi tous les autres trade secteurs.

Mais le secteur Oil est aussi fortement affecté par le taux d'inflation des années précédentes, d'où la charge annuelle brute qui est assez élevée (1.7M€).

Les secteurs Luxe-Pharma, Industrial Products et Trading commodities sont les secteurs ayant la charge moyenne annuelle brute la plus élevée parmi les autres secteurs avec 4,4M€, 4,5M€ et 5,6M€ respectivement. Mais ces secteurs à 4 représentent 49% des primes du portefeuille.

Nous avons ajouté aux simulations le scénario d'accumulation de plusieurs Trade secteurs. Ce scénario est représenté par la ligne Multisectoriel. Ainsi, nous nous attendons à avoir en moyenne 0,3 sinistres supérieurs à 3M€ impliquant l'accumulation de plusieurs trade secteurs. En ce qui concerne la charge moyenne annuelle brute des sinistres dont le montant est au-dessus de 3M€, elle est de 1,1m€.

### 3) Comparaison entre la VaR à 99,5 et la TVaR à 99,5

Après le calcul de la VaR à 99,5 et de la TVaR 99,5 nous obtenons un tableau suivant :

Montant en millions €	2012	2013	Delta
Modèle par exposition VaR	41,9	36,5	-14,8%
Modèle par exposition TVaR	48,4	40,3	-20,2%
Delta entre la VaR et la TVaR	13,5%	9,4%	

Dans ce tableau nous avons résumé les montants de la VaR à 99,5 et de la TVaR à 99,5 pour le modèle par exposition sur le portefeuille Marine Cargo pour les années 2012 et 2013.

Nous constatons que le montant de la VaR à 99,5 de 2013 a diminué de 14,8% par rapport à celui de 2012. Le montant de la TVaR, lui aussi a baissé de 20,2%. La différence entre le montant de la VaR à 99,5 pour l'année 2013 et entre le montant de la TVaR au-dessus du seuil de la VaR à 99,5% de 2013 est de 13,5%, c'est-à-dire le montant de la TVaR à 99,5 est 9,4% supérieur au montant de la VaR à



99,5 pour la même année, la variation entre la VaR 99,5 et la TVaR 99,5 était encore plus grande pour l'année 2012.

Nous avons vu que le montant de la TVaR à 99,5 est supérieur à celui de la VaR à 99,5. Le régulateur impose aux compagnies d'assurance d'immobiliser le montant de SCR qui correspond à la différence entre la VaR à 99,5 et la charge annuelle nette moyenne. Nous allons comparer les montant de SCR (STEC) calculé avec la VaR à 99,5 et celui calculé en retranchant la charge annuelle nette de la TVaR à 99,5. Nous allons aussi intégrer dans notre comparaison le modèle historique.

Voici les montants obtenus :

Montants en millions €	SCR	2012	2013	Delta
avec VaR	Modèle historique	28,0	23,4	-19,5%
	Modèle par exposition	29,0	27,7	-4,6%
	Delta inter modèles	3,4%	15,4%	
avec TVaR	Modèle historique	19,7	18,8	-4,8%
	Modèle par exposition	30,8	27,0	-14,0%
	Delta inter modèles	36,0%	30,4%	

Avec la VaR à 99,5 :

Nous remarquons que le montant de SCR calculé avec la VaR à 99,5 du modèle par exposition de 2012 est à 3,4% plus que celui du modèle historique. Ceci s'explique par le fait que notre modèle qui est affiné par trade secteurs et non au global comme avec le modèle historique se base sur les scénarii extrêmes propres à chaque secteur, ce qui impacte le SCR à la hausse. En effet, certains scenarii sont « pessimistes » ce qui entraîne la charge plus élevée. En ce qui concerne le SCR pour l'année 2013, la différence entre les deux modèles est de 4M€, c'est-à-dire le montant de SCR du modèle par exposition a 15,4% de plus que celui du modèle historique. Si le montant du SCR du modèle historique a baissé de 19,5% d'une année sur l'autre, celui du modèle par exposition a baissé seulement de 4,6%.

Avec la TVaR à 99,5 :

En ce qui concerna le TVaR à 99,5, le SCR calculé avec le modèle historique prend 36% avec le modèle par exposition pour 2012 et 30,4% pour 2013. Contrairement, au SCR calculé avec la VaR à 99,5, celui calculé avec la TVaR à 99,5 a diminué plus de 2012 à 2013 avec le modèle par exposition (-14%) que celui avec le modèle historique (-4,8%).

Conclusion :

Nous avons vu que la différence entre la variation d'une année sur l'autre du SCR par le modèle historique calculé à partir de la VaR à 99,5 est moindre que celle pour le modèle par exposition (-19,5% contre -4,6%). Par contre, en intégrant la TVaR à 99,5 dans le calcul du SCR la situation s'inverse, c'est-à-dire c'est le SCR du modèle historique qui baisse moins vite d'une année sur l'autre et non le SCR du modèle par exposition. Ces différences s'expliquent par le fait que le calcul de SCR à partir de la VaR ne capte pas la sévérité des sinistres au-dessus de ce montant, alors que la TVaR, prend en compte l'épaisseur de la queue de distribution de la charge sinistre.



Le fait de calculer le montant du SCR à partir de la TVaR à 99,5 est une alternative aux textes réglementaires qui permet d'estimer le montant du capital économique à immobiliser en mettant le poids sur ce qui se passe une fois que la VaR à 99,5 est dépassée.

Les montants de SCR de notre modèle par exposition étant supérieurs à ceux du modèle historique, il présente une alternative au modèle existant en challengeant le modèle historique qui ne prend pas en compte la spécificité de chaque trade secteur et fait une modélisation au global.

Enfin, nous remarquons que les deux modèles (historique et par exposition) enregistrent une baisse du montant de SCR pour l'année 2013 quel que soit le calcul (par la VaR à 99,5 ou la TVaR à 99,5) ce qui prouve la cohérence de notre modèle, car les deux modèles évoluent dans le même sens d'une année sur l'autre.

# Conclusion

Nous avons construit un modèle par exposition des sinistres graves pour la branche Marine Cargo de AXA CS.

Nous avons effectué les études statistiques sur nos données historiques et les données marché à notre disposition afin d'en tirer le plus d'utilité possible. Nous avons ensuite étudié le seuil de modélisation des sinistres extrêmes via la théorie des valeurs extrêmes. La quantité de données historiques à la disposition d'actuaire est souvent limitée ce qui pose un problème quand nous voulons modéliser les sinistres extrêmes. C'est d'autant plus vrai que la branche pour laquelle le modèle a été fait porte sur un risque particulier, le transport de marchandise. Nous avons très peu de statistiques pour ce genre de risques.

Comme le portefeuille Marine Cargo d'AXA CS est scindé en trade secteurs et suite aux problèmes de qualités de données auxquels nous étions confrontés, nous avons dû faire un regroupement de certains secteurs en effectuant une analyse de données approfondie.

Afin d'ajuster une loi de fréquence et une loi de coût pour notre modèle, nous avons estimé les différents paramètres de celles-ci. Nous avons pu constater que la modélisation de loi de coût nécessite plusieurs simulations stochastiques afin d'obtenir une loi le mieux ajustée. Cette modélisation ayant été faite pour le coût à 100% afin de tenir compte des variations du portefeuille, nous avons pu modéliser une loi de coût à la part d'AXA CS, afin d'obtenir la charge sinistre de l'entreprise.

Nous avons étudié notamment deux approches de l'ajustement de la loi de coût pour les périodes de retour élevées et nous avons vu sur l'exemple du secteur X, qu'en fonction du secteur, le risque le plus élevé et le plus sévère peut être celui d'un stockage et non pas du transit des marchandises par la voie maritime ou aérienne. Nous avons pu constater que chaque secteur nécessite une approche quant à la détermination d'une loi de coût pour les périodes de retour élevées et nécessite les simulations qui lui sont propres.

A travers l'outil ReMetrica, nous avons pu obtenir les résultats et nous avons pu comparer deux différentes approches de simulation, du modèle historique et du modèle par exposition, grâce à ces résultats. Ayant fait notre application pour le trade secteur X, nous avons retenu l'approche par la simulation à partir de sinistres marché dont nous disposions, car elle s'avère être plus prudente.

Finalement, suite à l'obtention des résultats de simulations, nous avons pu comparer les montants du capital économique à immobiliser obtenus à partir de la VaR à 99,5 et à partir de la TVaR à 99,5. Nous avons pu constater que la TVaR à 99,5 semble très adaptée pour le calcul du SCR en prenant en compte l'épaisseur de la queue de distribution ce qui est ignoré par la VaR à 99,5. De plus, nous avons pu comparer notre modèle par exposition dans le temps en calculant le SCR de 2012 et de 2013. Nous avons constaté que la tendance est à la baisse peu importe le modèle et le moyen de calcul (VaR ou TVaR).

Enfin, il est important de signaler que notre modèle est basé sur les sinistres graves excepté les catastrophes naturelles qui forment un risque à part à cause de la spécificité du risque. Dans le cadre du modèle interne, il serait intéressant de construire un modèle de ce risque afin de prendre en compte l'ensemble des typologies de risques auxquels est exposée la branche Marine Cargo. Le risque Catastrophe naturelle le plus important pour la branche Marine Cargo est le risque grêle sur

les parcs automobiles. Le développement d'une carte grêle est nécessaire en amont de la calibration d'un modèle

# BIBLIOGRAPHIE

## Ouvrages :

1. PARTRAT C. et BESSON J-L. *Assurance Non-Vie Modélisation, Simulation*, ECONOMICA, 2005.p356-381, p 389-391
2. F. BERTRAND, M. MAUMY-BERTRAND. *Initiation à la statistique avec R*, Dunod, Paris, 2010
3. A. Guillou, Cours de la théorie des valeurs extrêmes, Université de Strasbourg

## Articles :

4. ARTZNER P., DELBAEN F., EBER J-M. et HEATH D. *Coherent Measures of Risk*. 1998, p.13-20.
5. N. BENLAGHA et M. GRUN-REHOMME. *Application de la théorie des valeurs extrêmes en assurance automobile*. ERMES-UMR7181-CNRS Université Paris 2, 2007.
6. J.LAM. *Rough Set Approach to Marine Cargo Risk Analysis*. Nanyang Technological University, Singapore.
7. CEIOPS, *CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II : SCR Standard Formula*. Janvier 2010, p.4

## Mémoires:

8. RIHANE Yahia. *Modélisation par exposition des sinistres graves en aviation*. Mémoire d'Actuariat, ISUP, 2013.
9. M.POULIN. *Analyse des solutions actuarielles en tarification des traités de réassurance non-proportionnels Non-Vie*. Mémoire d'Actuariat, CEA, 2012
10. B.IEMMI. *Modélisation du risque catastrophe et impacts en prévoyance dans le cadre de Solvabilité 2*, DUAS, 2008

## Bases de données :

11. IUMI, *International Union of Marine Insurance*. <http://www.iumi.com/>
12. Joint Cargo Committee, XCS Large Cargo Loss Advices 2006-2012, Lloyd's
13. *Casualty and World Fleet Statistics*. IUMI 2013 Amsterdam, <http://www.ingenierosnavales.com/uploaded/IUMI%20Casualty%20and%20World%20Fleet%20Statistics%20Jan%202013.pdf>
14. *Marine Market Review - Beyond the Horizon, April 2012*. Willis. [http://www.willis.com/Documents/Publications/Industries/Marine/10412\\_MARINE\\_MARKET\\_REVIEW\\_2012\\_Low\\_res.pdf](http://www.willis.com/Documents/Publications/Industries/Marine/10412_MARINE_MARKET_REVIEW_2012_Low_res.pdf)
15. *Global Statistics from the International Union of Marine Insurance Facts and Figures Committee*. GIRO Conference and Exhibition 2012.

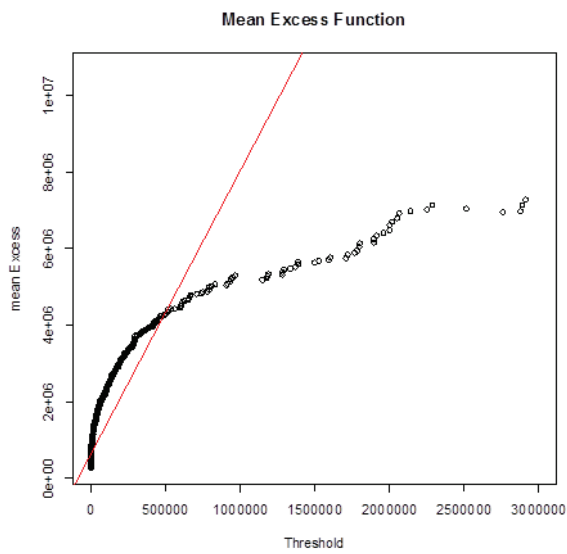
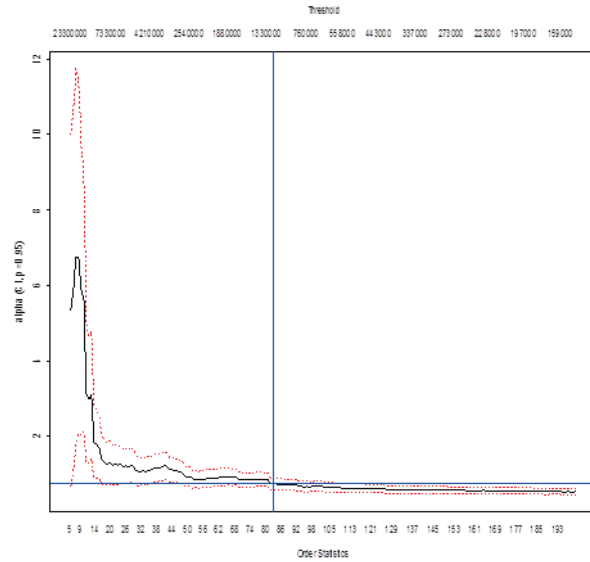
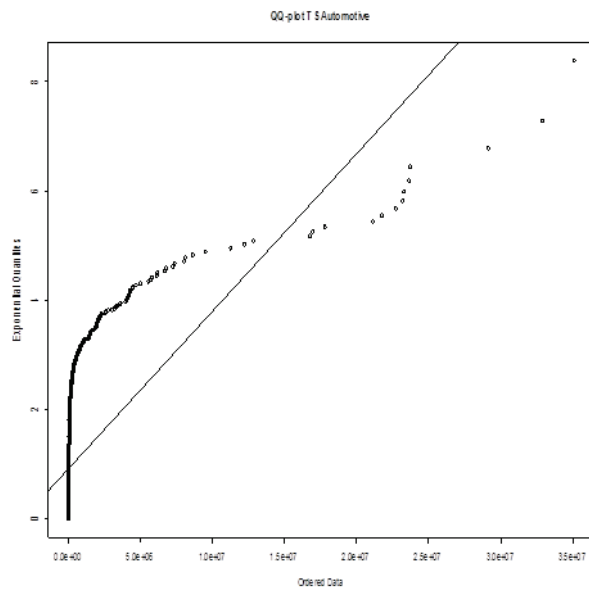
## Taux d'inflation:

16. FMI
17. IndexMundi
18. INSEE

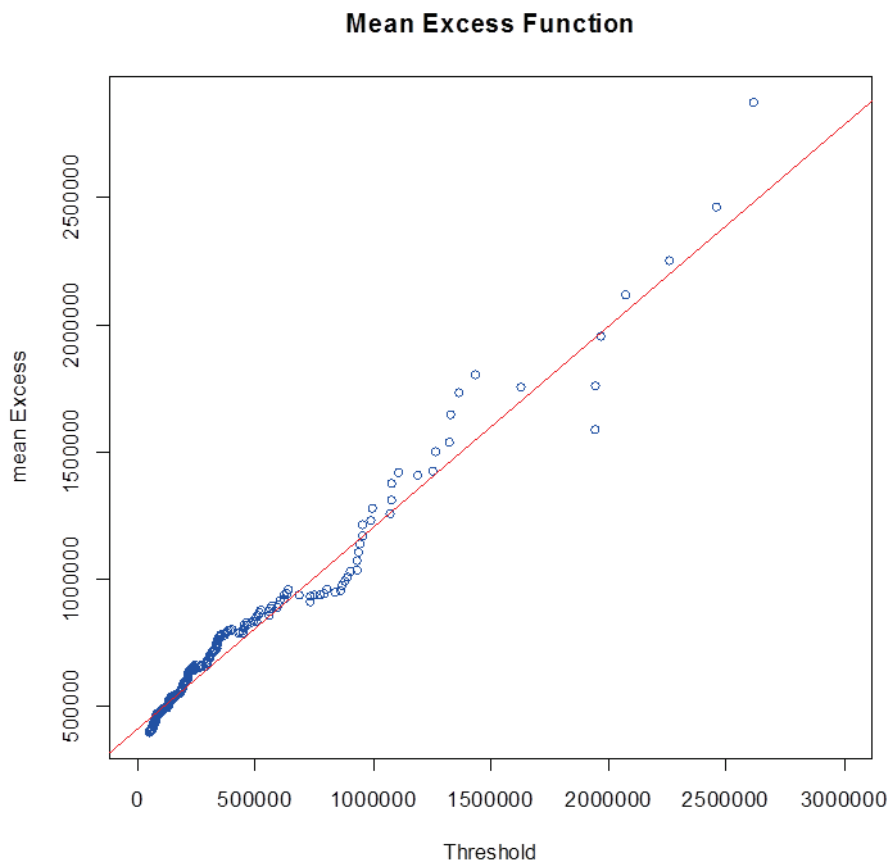
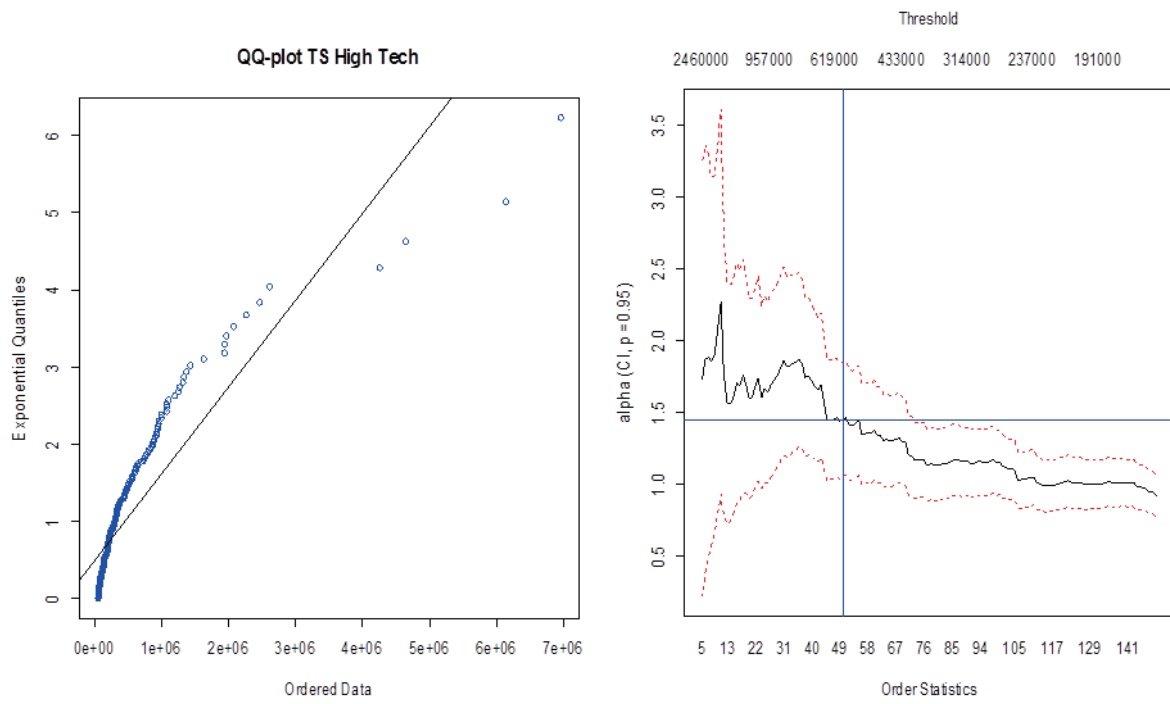
# Annexes

# Annexe 1 : Sorites de l'analyse du seuil

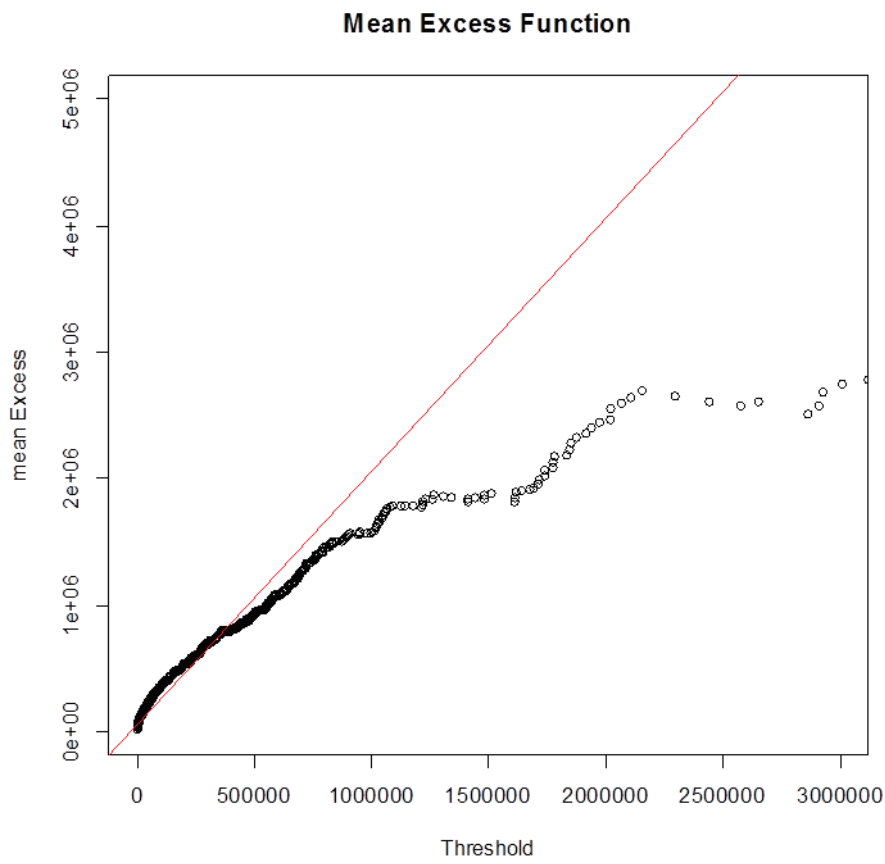
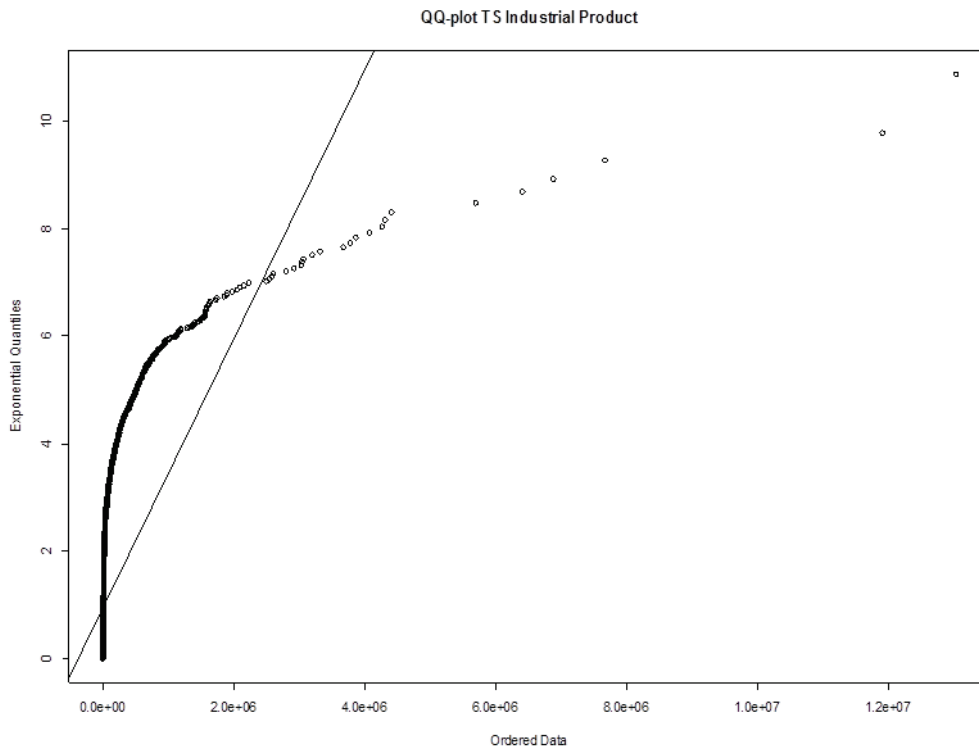
TS Automotive :



# TS High Tech

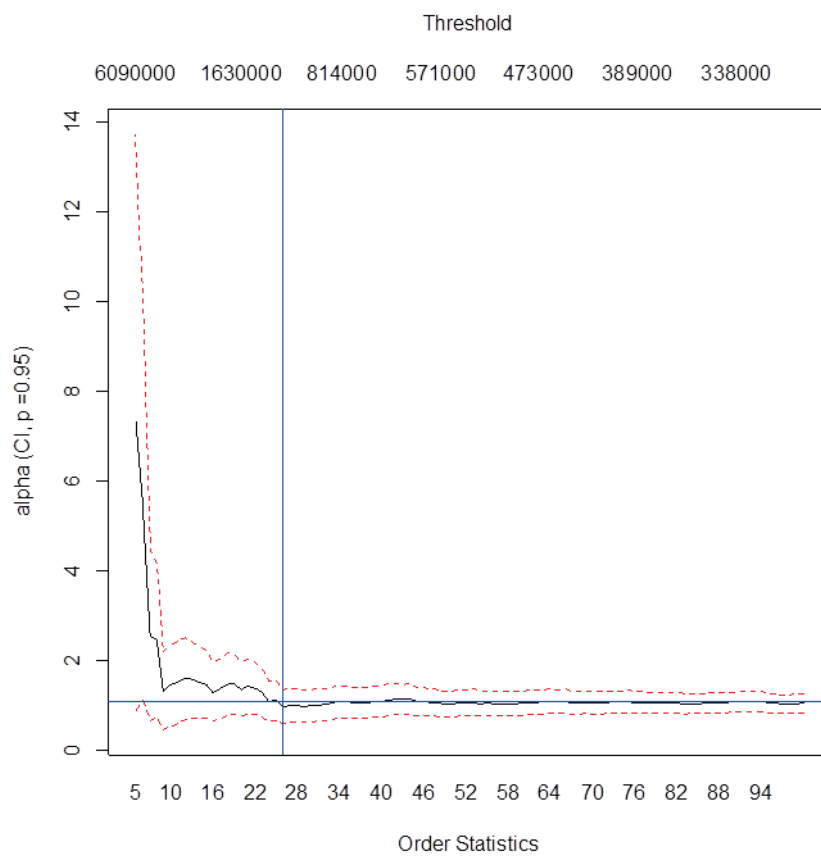
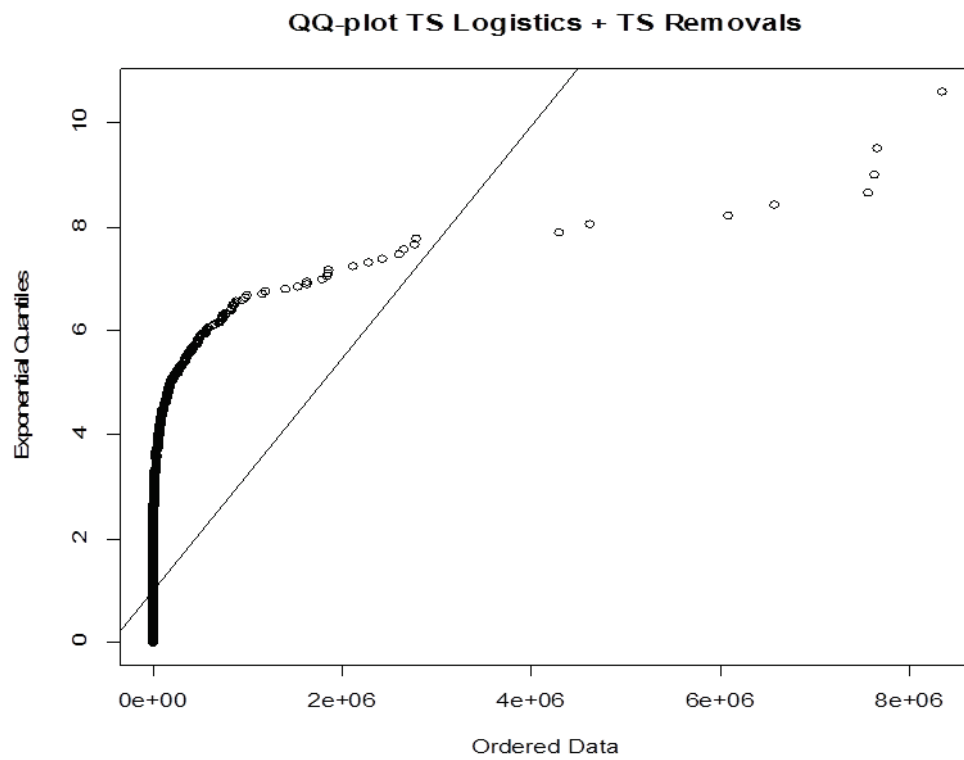


# TS Industrial Products

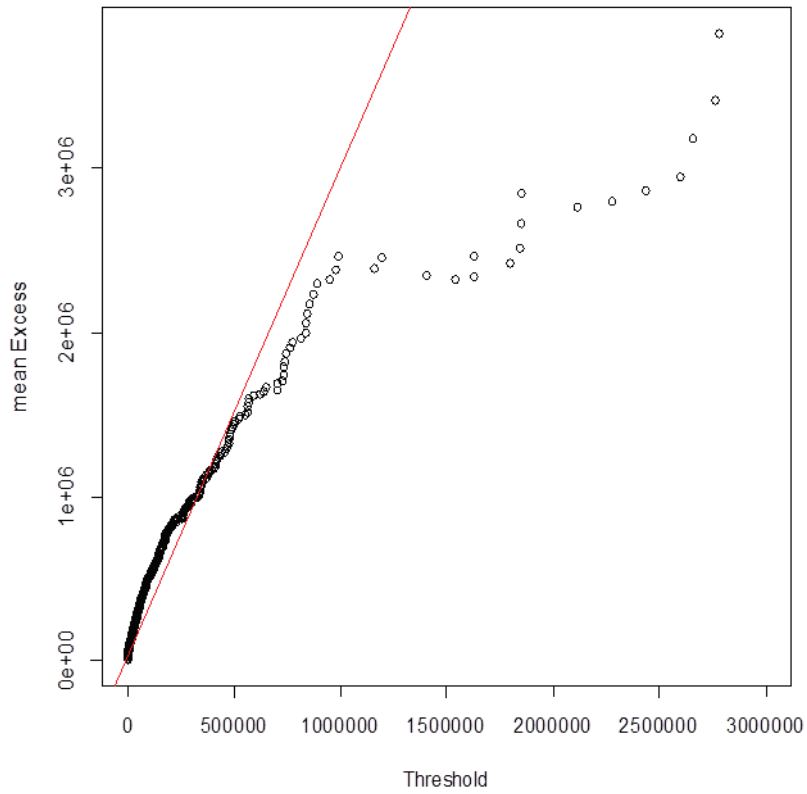




# TS Logistics +Removals

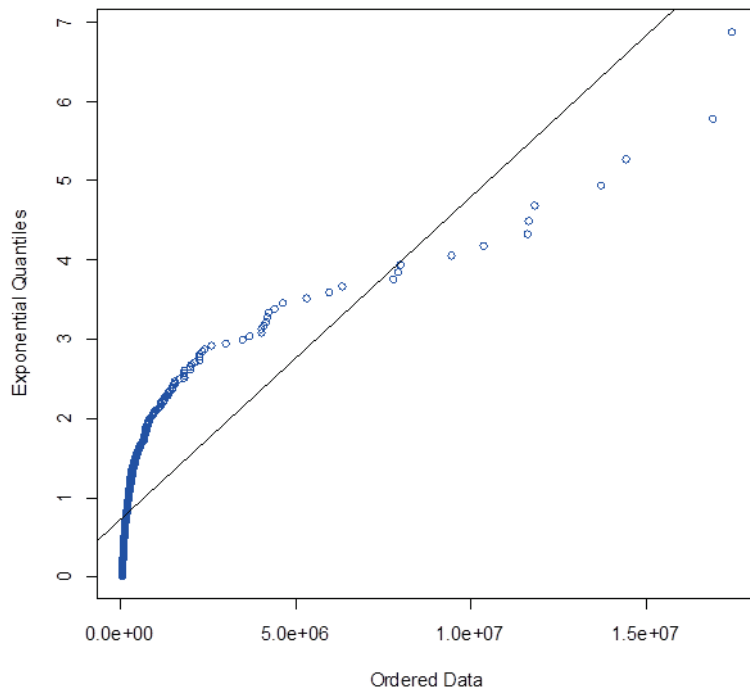


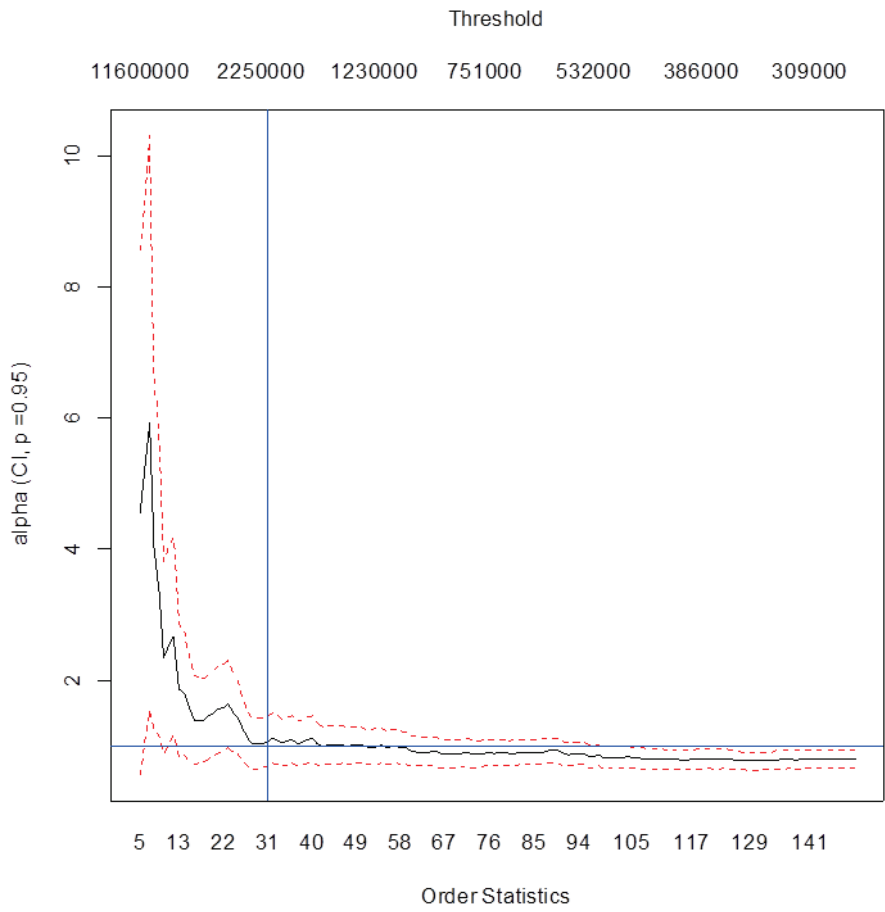
**Mean Excess Function**



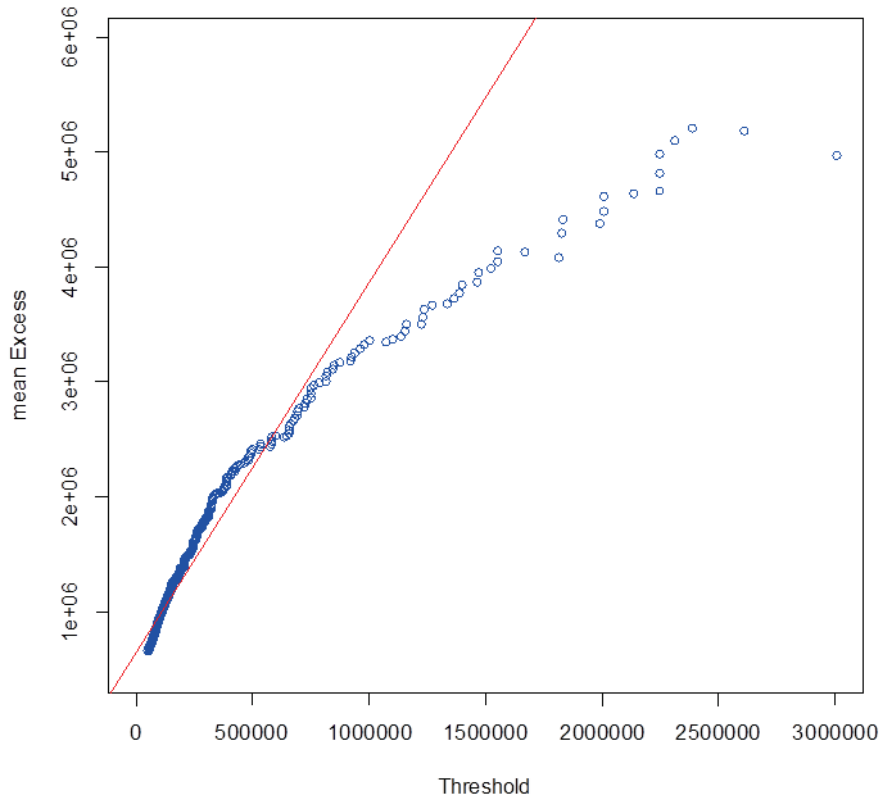
TS JB/Luxury/Valuable et Pharma/Chemistry

**QQ-plot TS JB/Luxury/Valuables et Pharma/Chemistry**



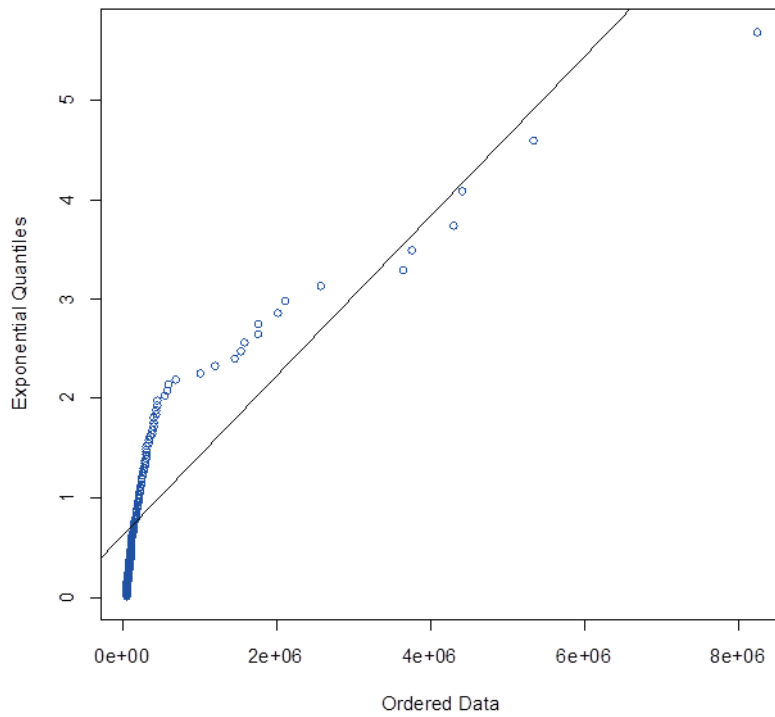


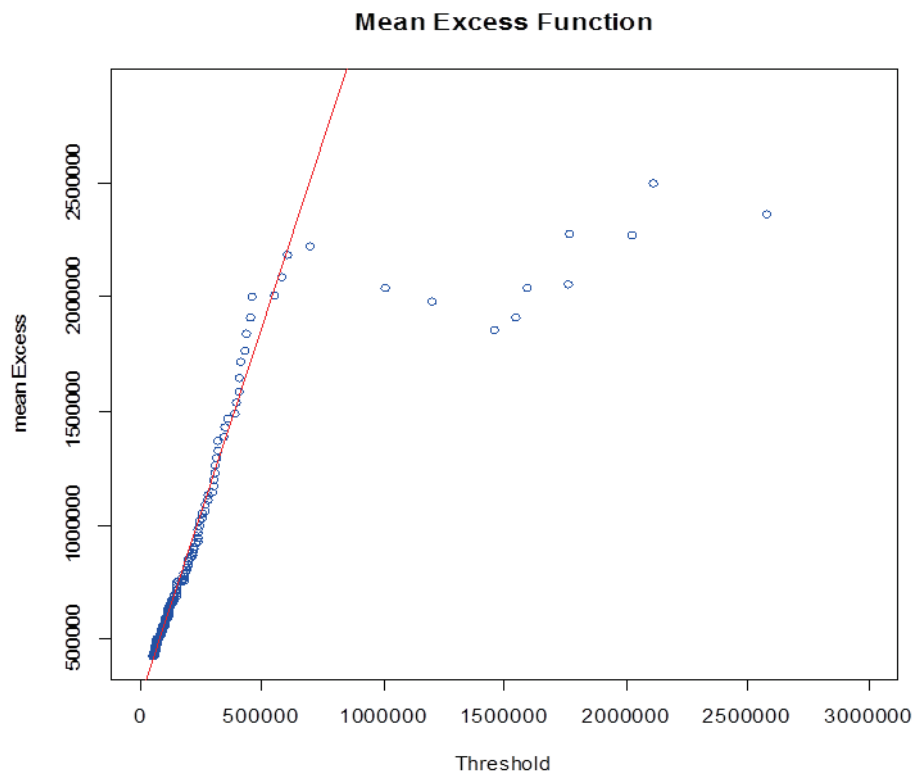
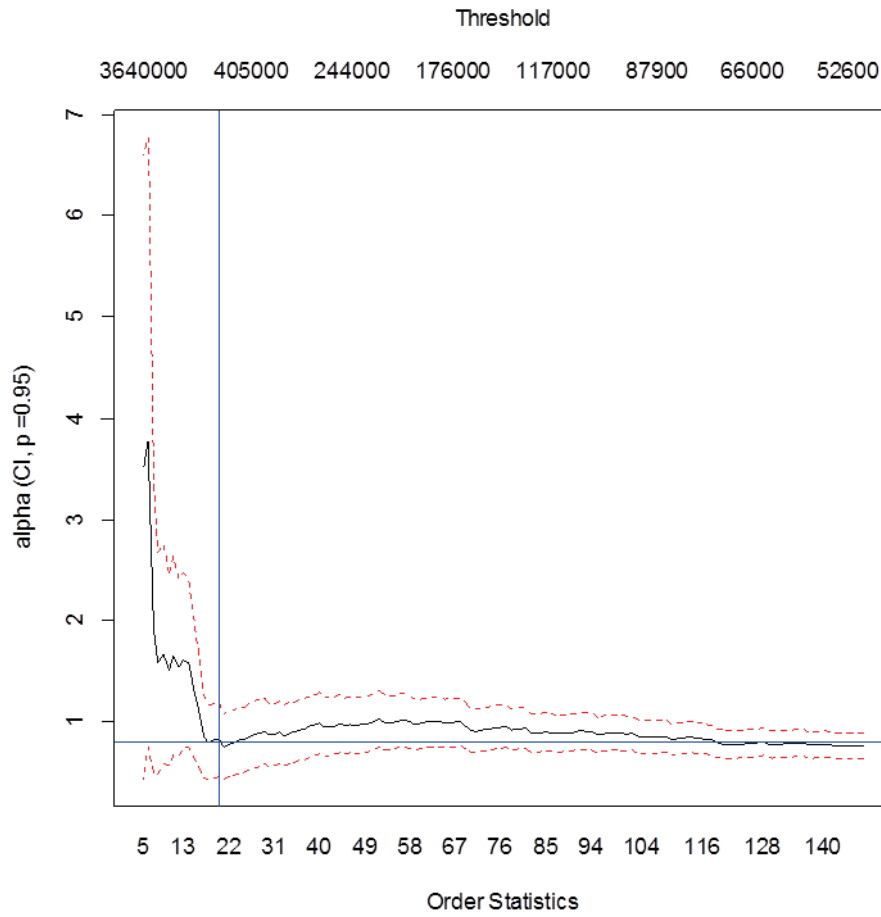
**Mean Excess Function**



TS Oil

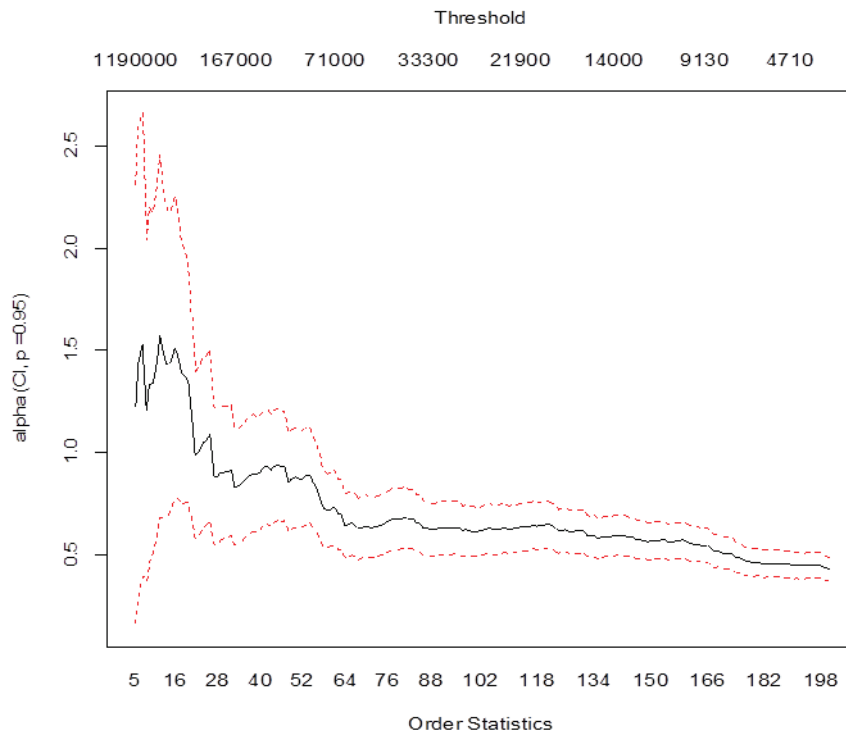
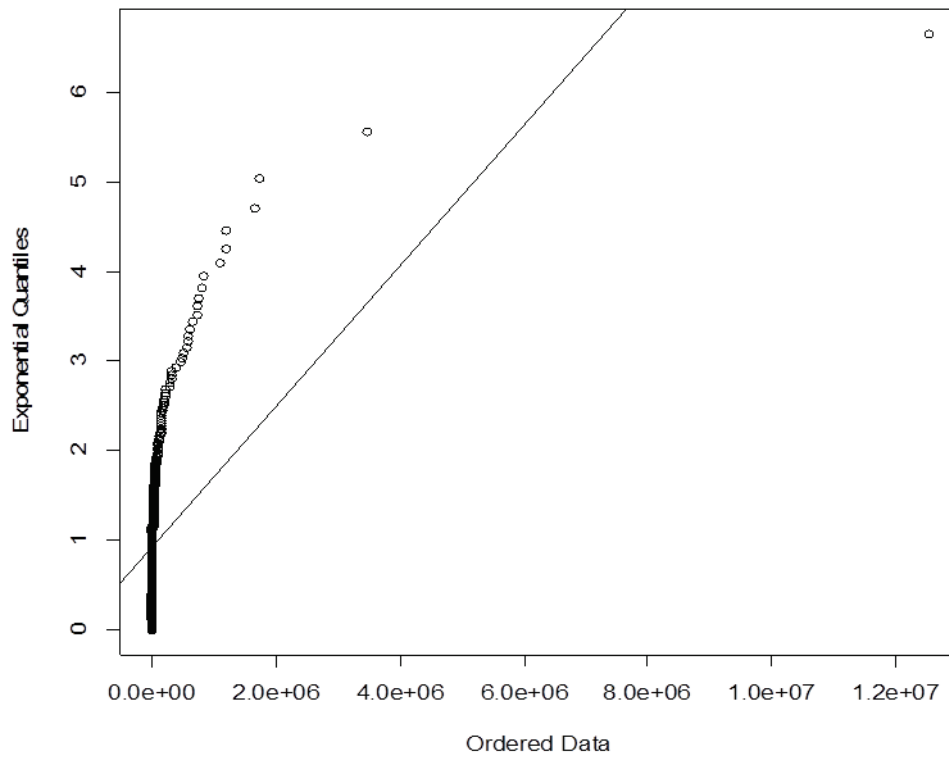
**QQ-plot TS Oil**

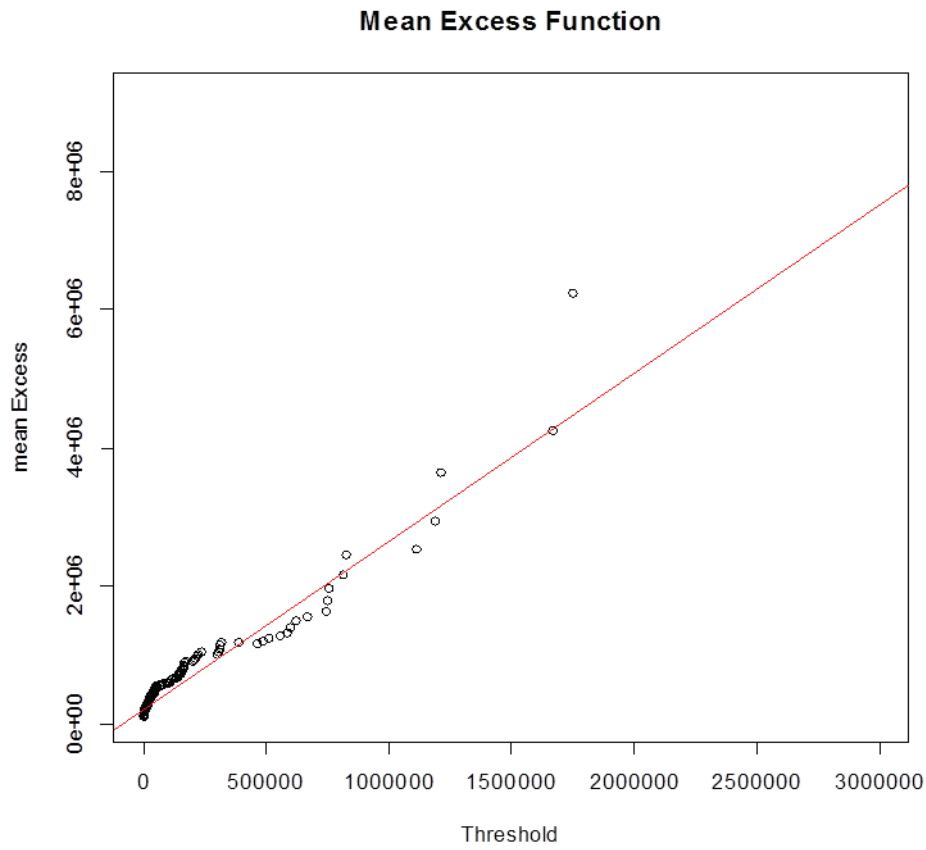




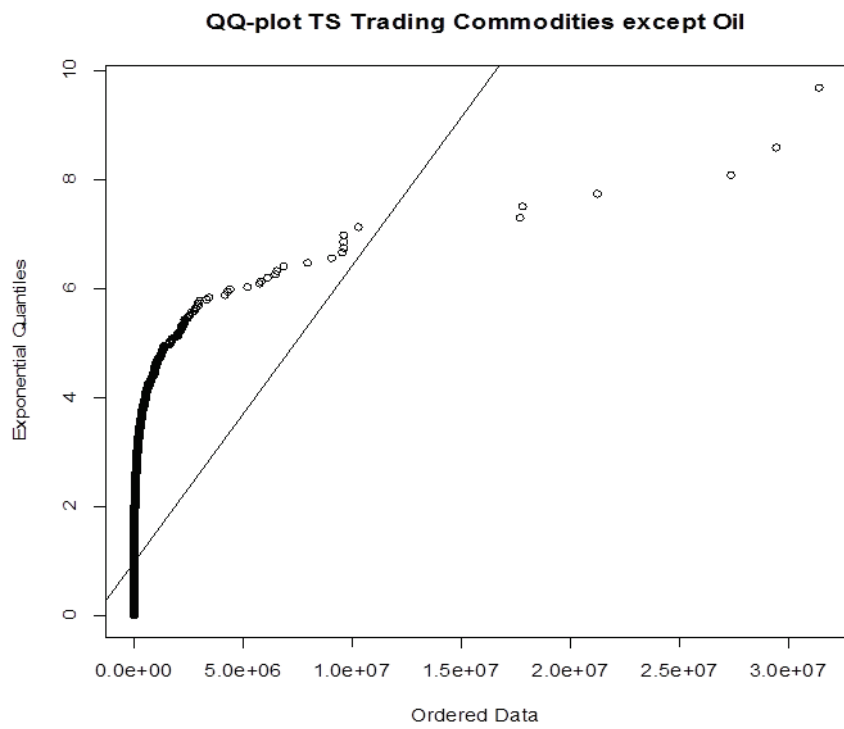
# TS Pre-launch et Project Cargo

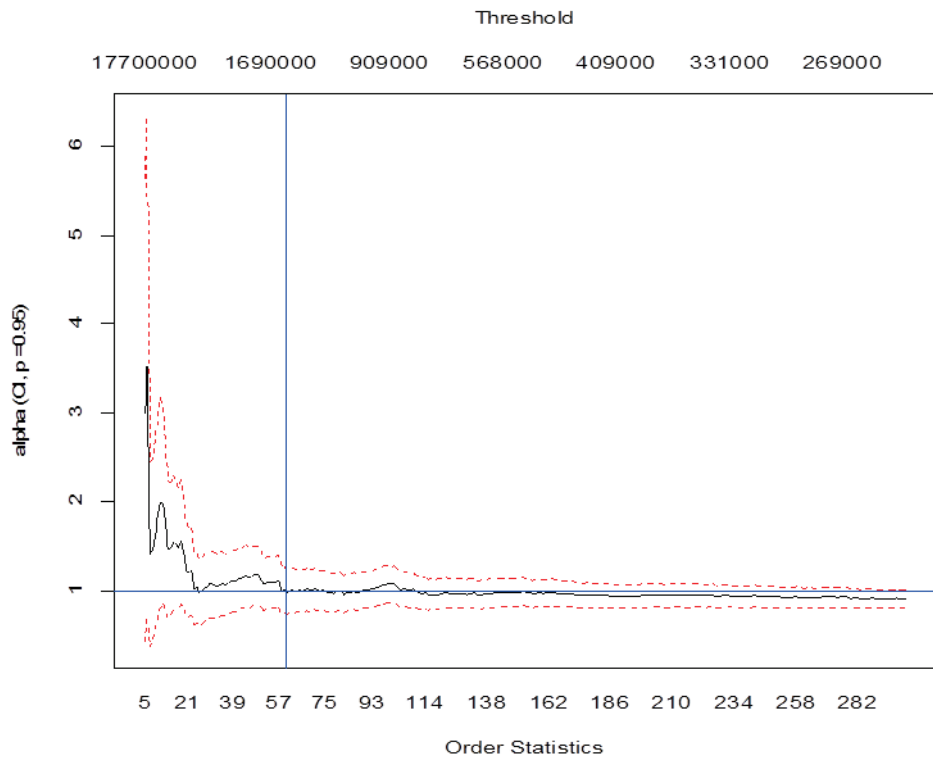
## QQ-plot TS Pre-launch + TS project Cargo



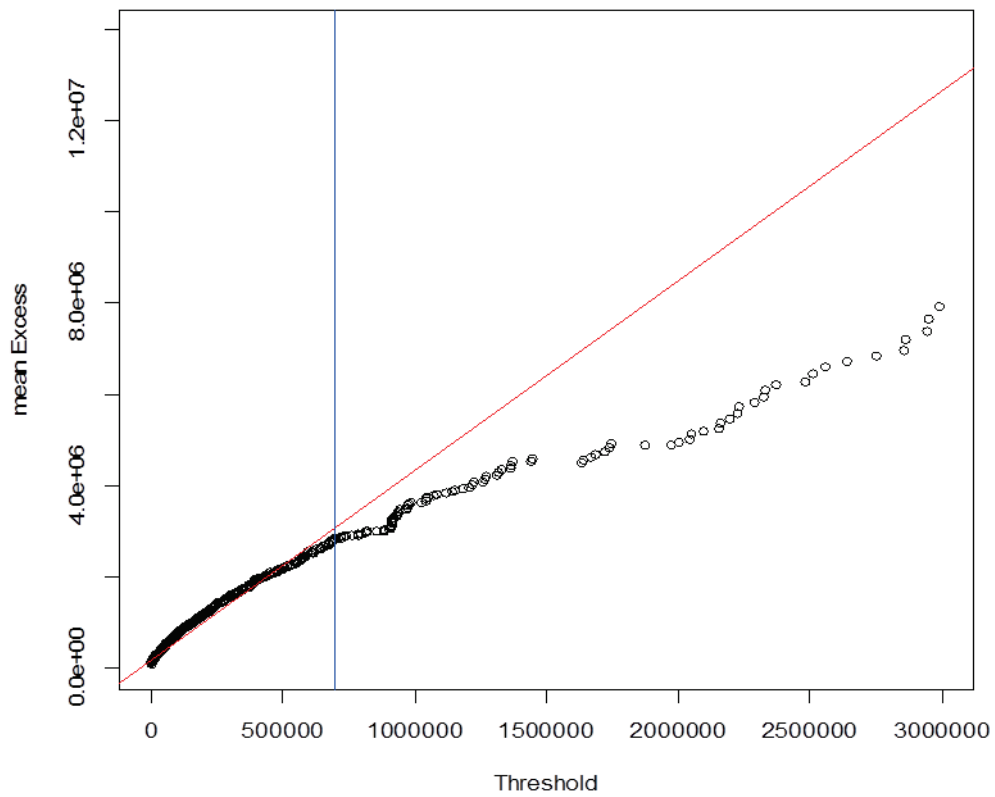


TS Trading Commodities except Oil





### Mean Excess Function





## Annexe 2 : La fréquence moyenne et le coût moyen par type de sinistre de sinistre

Fréquence moyenne												ACS
Trade sector	CATNAT	contaminati on	damage	fall	fire	other	other than marine transport accident	theft	unknown	vessel accident	war	Total
auto	6,50	0,38	0,13	0,00	0,25	0,00	0,13	0,00	1,25	0,00	0,00	8,63
high tech	0,38	0,13	0,00	0,00	0,25	0,25	0,25	1,25	0,38	0,13	0,13	3,13
industrial products	0,75	0,63	1,38	2,13	0,38	0,13	0,13	0,75	0,00	0,50	0,00	6,75
logistics	0,00	0,00	0,13	0,00	0,00	0,00	0,25	0,00	0,13	0,13	0,00	0,63
luxe	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,00	0,00	0,88	0,00	0,13	0,00	1,13
Oil	0,00	0,13	0,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,00	0,38
other	0,38	0,00	0,13	0,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,13	0,00	0,88
pharma	0,13	0,75	0,00	0,00	0,13	0,00	0,00	0,25	0,00	0,00	0,00	1,25
pre launch	0,00	0,00	0,13	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,00	0,50
project cargo	0,13	0,00	0,00	0,38	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,50
removals	0,00	0,00	0,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13
trading commodities(except oil)	1,00	1,38	0,25	0,13	0,50	0,00	0,00	1,25	0,38	1,00	0,13	6,00
unknown	0,00	0,00	0,25	0,13	0,75	0,13	0,63	1,63	0,50	0,13	0,00	4,13
<b>Total</b>	<b>9,25</b>	<b>3,38</b>	<b>2,63</b>	<b>3,13</b>	<b>2,38</b>	<b>0,50</b>	<b>1,38</b>	<b>6,00</b>	<b>2,75</b>	<b>2,38</b>	<b>0,25</b>	<b>34,00</b>

Figure 60 La fréquence moyenne des sinistres AXA CS par type de sinistre et par Trade Sector

Variance corrigée												ACS
Trade sector	CATNAT	contaminati on	damage	fall	fire	other	other than marine transport accident	theft	unknown	vessel accident	war	Total
auto	27,14	0,55	0,13	0,00	0,21	0,00	0,13	0,00	3,07	0,00	0,00	
high tech	0,27	0,13	0,00	0,00	0,21	0,21	0,21	1,36	0,55	0,13	0,13	
industrial products	0,79	0,55	3,41	4,41	0,55	0,13	0,13	2,21	0,00	0,57	0,00	
logistics	0,00	0,00	0,13	0,00	0,00	0,00	0,50	0,00	0,13	0,13	0,00	
luxe	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,00	0,00	1,27	0,00	0,13	0,00	
Oil	0,00	0,13	0,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,00	
other	0,27	0,00	0,13	0,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,13	0,00	
pharma	0,13	1,93	0,00	0,00	0,13	0,00	0,00	0,21	0,00	0,00	0,00	
pre launch	0,00	0,00	0,13	0,21	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,00	
project cargo	0,13	0,00	0,00	0,27	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
removals	0,00	0,00	0,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
trading commodities(except oil)	1,43	1,13	0,21	0,13	0,86	0,00	0,00	1,07	0,27	1,43	0,13	
unknown	0,00	0,00	0,21	0,13	1,36	0,13	1,13	4,84	1,14	0,13	0,00	
<b>Total</b>												

Figure 61 La variance corrigée de la fréquence des sinistres AXA CS par type de sinistre et par Trade Sector

coût moyen												ACS
Trade sector	CATNAT	contaminati on	damage	fall	fire	other	other than marine transport accident	theft	unknown	vessel accident	war	Total
auto	4 020 782	1 285 078	2 223 656	0	2 362 059	0	1 012 629	0	11 972 473	0	0	22 876 678
high tech	2 220 565	1 128 885	0	0	2 587 336	1 864 259	3 607 381	1 857 757	3 852 485	11 013 104	5 840 924	33 972 696
industrial products	4 960 790	2 685 944	2 232 128	2 706 710	4 736 173	13 528 613	1 692 247	3 384 663	0	8 204 239	0	44 131 506
logistics	0	0	1 170 079	0	0	0	15 362 649	0	4 019 687	7 379 243	0	27 931 658
luxe	0	0	0	0	621 281	0	0	1 931 083	0	2 805 051	0	5 357 415
Oil	0	6 557 976	1 548 159	0	0	0	0	0	0	30 170 151	0	38 276 286
other	56 064 062	0	1 194 052	1 208 113	0	0	0	0	2 089 596	5 074 722	0	65 630 546
pharma	1 131 136	2 186 234	0	0	1 934 151	0	0	9 647 279	0	0	0	14 898 801
pre launch	0	0	1 582 848	7 524 321	0	0	0	0	0	12 943 351	0	22 050 520
project cargo	1 159 274	0	0	3 358 976	0	0	0	0	0	0	0	4 518 250
removals	0	0	1 314 055	0	0	0	0	0	0	0	0	1 314 055
trading commodities(except oil)	5 164 004	3 350 582	1 266 719	9 548 722	17 601 213	0	0	3 758 933	4 966 450	11 253 814	956 581	57 867 017
unknown	0	0	1 465 487	928 720	2 304 466	1 072 870	1 463 527	1 368 257	1 099 551	1 120 245	0	10 823 122
<b>Total</b>	<b>74 720 613</b>	<b>17 194 699</b>	<b>13 997 182</b>	<b>25 275 561</b>	<b>32 146 679</b>	<b>16 465 742</b>	<b>23 138 432</b>	<b>21 947 972</b>	<b>28 000 242</b>	<b>89 963 920</b>	<b>6 797 505</b>	<b>349 648 549</b>

Figure 62 Le coût moyen des sinistres AXA CS par type de sinistre et par Trade Sector

Trade sector	fréquence Totale	fréquence moyenne	fréquence min	fréquence max	variance corrigée
auto	3,1E-08	3,2E-08	1,72E-08	6,95E-08	3,77E-16
industrial pr	1,0E-07	1,1E-07	7,05E-08	1,93E-07	2,86E-15
trading com	1,2E-07	1,2E-07	4,68E-08	2,97E-07	6,64E-15
Oil	1,4E-07	1,4E-07	0,00E+00	3,33E-07	1,62E-14
high tech	3,4E-07	3,0E-07	1,29E-07	5,65E-07	3,34E-14
luxe	4,8E-08	4,7E-08	0,00E+00	1,65E-07	3,49E-15
pharma	1,5E-07	1,5E-07	3,47E-08	2,80E-07	9,83E-15
logistics	5,9E-08	5,7E-08	0,00E+00	1,38E-07	2,37E-15
removals	4,5E-08	4,4E-08	0,00E+00	2,45E-07	8,39E-15
pre launch	2,1E-08	2,2E-08	0,00E+00	4,05E-08	1,97E-16
project cargo	1,3E-07	1,7E-07	0,00E+00	8,29E-07	8,87E-14

sauf CATNAT				
TS	coût moyen	coût min	coût max	var
auto	2 275 456	633 538	78 478 251	8,72789E+14
high tech	1 694 299	558 076	11 013 104	1,0718E+14
luxe	1 517 392	583 057	7 900 450	3,17978E+13
pharma	2 360 417	577 545	18 322 906	1,77522E+14
industrial pr	1 873 536	518 482	15 776 988	1,92837E+14
logistics	3 922 695	552 166	27 884 208	1,08638E+14
removals	828 756	523 221	1 314 055	2,84236E+12
Oil	2 946 183	580 324	30 170 151	2,38073E+14
pre-launch	3 824 711	557 124	12 943 351	3,4708E+13
project cargo	1 596 242	589 274	5 712 310	5,76188E+12
trading com	2 845 415	516 590	57 300 269	4,81894E+14

## Annexe 3 : Les sorties du test d'indépendance

```
Spearman's rank correlation rho

data:  freq and cout
S = 70, p-value = 0.5948
alternative hypothesis: true rho is not equal to 0
sample estimates:
   rho
-0.25
```

Figure 63 Sortie sous R des résultats de test de Spearman pour le portefeuille global Marine Cargo

Code R pour le test de Spearman :

```
spear<-read.csv("adresse_fichier.csv",sep=";",dec=".",header=TRUE)
cout<-spear[,2]
freq<-spear[,3]
cor.test(freq,cout, method="spearman")
```

Sortie du test de Spearman pour le TS Pharma /Chemistry

```
Spearman's rank correlation rho

data:  freq and cout
S = 64, p-value = 0.7825
alternative hypothesis: true rho is not equal to 0
sample estimates:
   rho
-0.1428571
```

Figure 64 Sortie sous R des résultats de test de Spearman pour le TS Pharma/Chemistry

## Annexe 4 : Les lois de coût à queue épaisse

### Log-Normale $Log N(\mu, \sigma^2)$

La loi Log-Normale notée  $Log N(\mu, \sigma^2)$  est une transformée exponentielle de la loi Normale  $N(\mu, \sigma^2)$  et possède deux paramètres la moyenne  $\mu \in R$  et l'écart type  $\sigma > 0$ .

Soit  $X$  est une variable aléatoire de montant de sinistre. Alors la distribution de la loi Log-Normale est définie par l'équivalence :

$$X \rightarrow Log N(\mu, \sigma^2) \text{ si et seulement si } \ln X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$$

Comme pour la loi Normale, la fonction de répartition de la loi Log-Normale n'a pas de forme explicite.

**La densité :**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2}$$

**L'espérance :**

$$E[X] = \mu$$

**Variance :**

$$Var(X) = \sigma^2$$

**Les moments d'ordre k:**

$$m_k = e^{k\mu + \frac{k}{2}\sigma^2}$$

**Les quantiles d'ordre p :**

$$q_p = e^{\mu + \sigma \Phi^{-1}(p)}$$

où  $p$  est l'ordre de quantile et  $\Phi^{-1}(p)$  est la fonction de répartition inverse de la loi Log-Normale

### Weibull $W(\tau, \alpha)$

Cette loi est très utilisée en modélisation des sinistres graves en Responsabilité Civile Automobile.

Elle a deux paramètres strictement positifs:  $\tau$  le paramètre de forme et  $\alpha$  le paramètre d'échelle.

**La fonction de répartition :**

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\tau}$$

**La densité :**

$$f(x) = \frac{\tau}{\alpha^\tau} x^{\tau-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\tau}$$

**L'espérance :**

$$E[X] = \alpha \Gamma\left(\frac{1}{\tau} + 1\right) = \mu$$

**La variance :**

$$\text{Var}(X) = \alpha^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\tau}\right) - \mu^2$$

**Les moments d'ordre k:**

$$m_k = \alpha^k \Gamma\left(\frac{k}{\tau} + 1\right)$$

**Les quantiles d'ordre p sont :**

$$q_p = \alpha[-\ln(1-p)]^{\frac{1}{\tau}}$$

### Pareto $P(a, \alpha)$

La loi de Pareto possède une queue de distribution lourde qui apporte une sécurité implicite aux assureurs et aux réassureurs. La contrepartie de cette épaisseur est l'incertitude sur l'existence des moments. La loi de Pareto dépend de deux paramètres strictement positifs:  $\alpha$  et  $a$  (qui peut être interprété comme franchise ou seuil de modélisation).

**La fonction de répartition :**

$$F(x) = \left[1 - \left(\frac{a}{x}\right)^\alpha\right] I(x)_{]a; +\infty[}$$

**La densité :**

$$f(x) = \frac{\alpha a^\alpha}{x^{\alpha+1}} I(x)_{]a; +\infty[}$$

$$E[X] = \frac{\alpha a}{\alpha-1} \text{ si } \alpha > 1 \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha a^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \text{ si } \alpha > 2$$

**Les moments d'ordre k:**

$$m_k = \frac{\alpha a^k}{\alpha - k} \text{ si } \alpha > k \text{ (} m_k = +\infty \text{ sinon)}$$

**Les quantiles d'ordre p :**

$$q_p = a(1-p)^{-1/\alpha}$$

### Pareto Généralisée

Nous avons déjà introduit la loi Pareto Généralisée lors de l'estimation du seuil par la théorie des valeurs extrêmes. Nous rappelons néanmoins ses caractéristiques théoriques.

**La fonction de répartition :**

$$G_{\sigma, \gamma}(x) = 1 - \left(1 + \frac{\gamma x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}$$

**La densité :**

$$f_{\sigma, \gamma}(x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{\gamma x}{\sigma}\right)^{-1-\frac{1}{\gamma}}$$

**Espérance :**

$$E[X] = \frac{\sigma}{1-\gamma}$$

**Variance :**

$$\text{Var}(X) = \frac{\sigma^2}{(1-\gamma)^2(1-2\gamma)}$$

## Annexe 5 : La capacité de la flotte mondiale de porte-conteneurs en TEU

Figure 64 Sortie sous R du test de Spearman pour le TS Automotive

CELLULAR	01 July 2013 - Existing					01 July 2013 - Orderbook				
	All		Of which chartered in NOO			All		Of which chartered in NOO		
	ships	teu	ships	teu	% Cht	ships	teu	ships	teu	% Cht
10000-18500	183	2 357 532	66	854 778	36,3%	103	1 451 508	36	464 288	32,0%
7500-9999	355	3 082 735	131	1 117 407	36,2%	119	1 075 437	67	607 480	56,5%
5100-7499	482	2 964 138	216	1 323 339	44,6%	27	173 629	22	140 917	81,2%
4000-5099	758	3 428 711	410	1 852 027	54,0%	49	231 423	34	165 373	71,5%
3000-3999	275	946 502	145	504 715	53,3%	47	173 396	20	72 498	41,8%
2000-2999	671	1 708 860	503	1 280 762	74,9%	31	75 848	25	59 536	76,5%
1500-1999	565	962 650	333	569 952	59,2%	38	66 061	20	34 232	51,8%
1000-1499	683	799 639	421	495 668	62,0%	24	25 664	6	6 448	25,1%
500-999	774	576 324	479	365 556	63,4%	7	5 580	5	3 830	68,6%
100-499	222	71 134	52	17 230	24,2%					
<b>TOTAL</b>	<b>4 968</b>	<b>16 898 226</b>	<b>2 756</b>	<b>8 381 434</b>	<b>49,6%</b>	<b>445</b>	<b>3 278 546</b>	<b>235</b>	<b>1 554 602</b>	<b>47,4%</b>

Figure 65 La répartition de la capacité (en TEU) de la flotte mondiale des porte-conteneurs, données récoltées par l'équipe de Marine & Transport Risk Consulting



## Annexe 6 : Le code R pour la modélisation des scénarii de naufrage des porte-conteneurs pour le TS X

```
#####Scénarios Luxe
library(evir)
library(MASS)
library(VGAM)
#####Scénarii simulation du nombre de porteconteneurs qui coulent chaque année (1)
size=10000
lambda= 7.472493
y=matrix(0,size,1)
y[,1]=rpois(size,lambda)
which(y[,1]==0)
#y[,1]=apply(y[,1],1,max,1)
max=max(y[,1])
z=matrix(0,size,max+3)
z[,1]=y[,1]
for (i in 1:size)
{
  largeur =z[i,1]
  if (largeur>0)
  {
    for (j in 1:largeur+1)
    {
      z[i,j+1]= runif(1)
    }
  }
}
write.table(z,"T:\\Actuariat\\Stage\\AMINAT\\modele\\outputs\\outputs_freq_sc.csv",sep=";")

##### fonction pour simuler loi uniforme pour chaque x
fifi<-function(a,b){
  capacite<-read.csv("T:\\Actuariat\\Stage\\AMINAT\\modele\\inputs\\inputs_nbLuxe_boites.csv",sep=";",dec=".",header=TRUE)
  c=capacite[a,b]
  if (c!=0)
  {x=matrix(0,c,2);
  x[,1]=runif(c)}
  else
  x=matrix(0,2,2)
  #x[,1]=sapply(c!=0,runif)
}

#####fonction qui cherche la valeur
cherche_valeur<-function(a) {
  valeur<-read.csv("T:\\Actuariat\\Stage\\AMINAT\\modele\\inputs\\inputs_valeur.csv",sep=";",dec=".",header=TRUE)
  valeur[which.min((valeur[,2]-a)^2),1]
}

#####nbr de boites Luxe (2)
capacite<-read.csv("T:\\Actuariat\\Stage\\AMINAT\\modele\\inputs\\inputs_sc1.csv",sep=";",dec=".",header=TRUE)
proba=1/1000
taille=length(capacite[,1])
taillecol=max(capacite[,1])
capacitel=matrix(0,taille,(taillecol+1))
capacitel[,1]=capacite[,1]
for (i in 2:(taillecol+1))
{
  for (j in 1:taille)
  {cap1=capacite[j,i]
  capacitel[j,i]=rbinom(1,size=cap1,prob=proba)
  }
}
write.table(capacitel,"T:\\Actuariat\\Stage\\AMINAT\\modele\\outputs\\outputs_nbLuxe.csv",sep=";")
```

```

#####nbr de boites sur lesquelles on est dessus (3)
boites<-read.csv("T:\\Actuariat\\Stage\\AMINAT\\modele\\inputs\\inputs_sc2.csv",sep=";",dec=";",header=TRUE)
proba=35/100
taille=length(boites[,1])
taillecol=max(boites[,1])
boites1=matrix(0,taille,(taillecol+1))
boites1[,1]=boites[,1]
for (i in 2:(taillecol+1))
{
  for (j in 1:taille)
  {b=boites[j,i]
  boites1[j,i]=rbinom(1,size=b,prob=proba)
  }
}
write.table(boites1,"T:\\Actuariat\\Stage\\AMINAT\\modele\\outputs\\outputs_nbLuxe_boites.csv",sep=";")

##### simulation de la valeur et du cout à partir des inputs avec la fréquence et capacités en nbr de boites simulés (4)
capacite<-read.csv("T:\\Actuariat\\Stage\\AMINAT\\modele\\inputs\\inputs_nbLuxe_boites.csv",sep=";",dec=";",header=TRUE)
valeur<-read.csv("T:\\Actuariat\\Stage\\AMINAT\\modele\\inputs\\inputs_valeur.csv",sep=";",dec=";",header=TRUE)
taille=length(capacite[,1])
cout=matrix(0,taille,1)
for (i in 1:taille)
{
  cap=capacite[i,1]
  if (cap!=0) {
    somme=matrix(0,cap,1)
    p=0
    for (j in 2:(cap+1))
    {
      c=capacite[i,j]
      if (c!=0)
      {x=matrix(0,c,2);
      x[,1]=sapply(c,runif);
      x[,2]=sapply(x[,1],cherche_valeur)}
      else
      x=matrix(0,2,2)
      somme[j-1,1]=sum(x[,2])
    }

    cout[i,1]=max(somme[,1])
  }
  else
  cout[i,1]=0
}

#####fonction qui ordonne les scenarii (5)
input<-read.csv("T:\\Actuariat\\Stage\\AMINAT\\modele\\outputs\\outputs_sinistres.csv",sep=";",dec=";",header=TRUE)
inputsort<-input[order(input$V2),]
names(input)
write.table(inputsort,"T:\\Actuariat\\Stage\\AMINAT\\modele\\outputs\\outputs_scenarii_ordre.csv",sep=";")

```