



**HAL**  
open science

## Les collections, un outil pour l'apprentissage du nombre comme représentation de la quantité en grande section

Marie Le Mellec

### ► To cite this version:

Marie Le Mellec. Les collections, un outil pour l'apprentissage du nombre comme représentation de la quantité en grande section. Education. 2012. dumas-00941420

**HAL Id: dumas-00941420**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00941420>**

Submitted on 3 Feb 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Universités de Nantes, d'Angers et du Maine  
Institut Universitaire de Formation des Maîtres  
Site de Nantes**

**Année universitaire 2011-2012**

**Les collections, un outil pour l'apprentissage du nombre  
comme représentation de la quantité en Grande-Section.**

**Marie LE MELLEC**

Directeur de mémoire : Magali HERSANT

**Master 2 Métiers de l'Enseignement de l'Education et de la Formation  
Spécialité Enseignement du Premier Degré**

**Universités de Nantes, d'Angers et du Maine  
Institut Universitaire de Formation des Maîtres  
Site de Nantes**

**Année universitaire 2011-2012**

**Les collections, un outil pour l'apprentissage du nombre  
comme représentation de la quantité en Grande-Section.**

**Marie LE MELLEC**

Directeur de mémoire : Magali HERSANT

**Master 2 Métiers de l'Enseignement de l'Education et de la Formation  
Spécialité Enseignement du Premier Degré**

# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>4</b>
<b>1 LE CADRE THEORIQUE .....</b>	<b>7</b>
<b>1.1 Les savoirs numériques .....</b>	<b>7</b>
1.1.1 Le concept de nombre .....	7
1.1.1.1 Définitions .....	7
1.1.1.2 Diverses façons d'exprimer un nombre .....	7
1.1.1.3 Les nombres et les numéros .....	8
1.1.1.4 Des mots pour dire ou évoquer .....	8
1.1.2 Le vocabulaire des collections.....	9
1.1.2.1 Définitions .....	9
1.1.2.2 Les travaux de Vessiler (2000) et Briand (2007) .....	9
1.1.3 Les résultats de Rémi Brissiaud (1991).....	10
1.1.3.1 Les collections-témoins et les nombres.....	10
1.1.3.2 Du comptage-numérotage au dénombrement .....	11
1.1.3.2.1 Du « comptage-numérotage » au dénombrement : une évolution difficile.....	12
1.1.3.2.2 Le rôle de la perception visuelle globale .....	13
1.1.3.3 Des collections-témoins de doigts au dénombrement .....	13
1.1.3.3.1 Une nouvelle méthode d'apprentissage .....	14
1.1.3.3.2 Les comptines numériques .....	15
1.1.3.4 Quand enseigner le comptage ? .....	15
1.1.3.5 L'utilisation des chiffres .....	15
<b>1.2 L'organisation des situations .....</b>	<b>17</b>
1.2.1 Qu'est-ce qu'un apprentissage ?.....	17
1.2.2 La théorie des situations didactiques de Guy Brousseau (1998) .....	17
1.2.3 Grille d'analyse d'une situation d'enseignement proposée par Joël Briand (2007) .....	18
<b>2 ANALYSE D'UN RECUEIL DE DONNEES .....</b>	<b>20</b>
<b>2.1 Livres à compter (Valentin, 2005, pp. 76-80).....</b>	<b>20</b>
2.1.1 Les objectifs des Livres à compter .....	21
2.1.2 Les modifications apportées par l'enseignante.....	21
2.1.3 La gestion des difficultés.....	23
<b>2.2 La ferme de Mathurin (Valentin, 2005, pp. 56-59) .....</b>	<b>23</b>
2.2.1 Analyse <i>a priori</i> .....	23
2.2.1.1 Une situation construite par l'enseignante... ..	23
2.2.1.2 ... nécessitant des prérequis... ..	24

2.2.1.3	... pour atteindre des objectifs précis.....	24
2.2.1.4	Les procédures possibles et les difficultés pouvant être rencontrées .....	25
2.2.1.5	Les différentes productions.....	28
2.2.2	Analyse <i>a posteriori</i> .....	28
2.2.2.1	La répétition du dernier mot-nombre lors du dénombrement .....	29
2.2.2.2	Les propositions de procédures.....	33
2.2.2.3	Le matériel à disposition .....	34
<b>CONCLUSION.....</b>		<b>38</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>		<b>39</b>

## Introduction

La maternelle, cycle des apprentissages premiers, est la période durant laquelle de nombreux apprentissages débutent. D'après le Bulletin Officiel hors-série n°3 du 19 juin 2008, la rubrique « Découverte du monde » du programme de l'école maternelle met en évidence que beaucoup de compétences sont liées aux mathématiques. L'élève y construit une première culture scientifique. Le nombre comme représentation de la quantité tient une place importante dans les programmes du cycle 1 : il est notamment indiqué dans la partie « approcher les quantités et les nombres » que *« l'école maternelle constitue une période décisive dans l'acquisition de la suite des nombres (chaîne numérique) et de son utilisation dans les procédures de quantification. Les enfants y découvrent et comprennent les fonctions du nombre, en particulier comme représentation de la quantité et moyen de repérer des positions dans une liste ordonnée d'objets. »*

De plus, dans le document d'accompagnement des programmes de 2002, *Les mathématiques à l'école primaire* (2002), il est précisé que *« les études récentes en sciences cognitives soulignent que dès son plus jeune âge, l'enfant manifeste des compétences relatives aux quantités et à leur expression par les nombres (exprimés oralement). »* (Chapitre « Vers les mathématiques, quel travail en maternelle »). La comptine numérique et les diverses procédures de quantification ont donc une part importante dans les apprentissages premiers. L'enseignant accompagne l'enfant dans sa prise de conscience des mots-nombres et l'amène à une approche perceptive globale des collections puis à dénombrer des collections. Progressivement, l'élève acquiert la suite des nombres au moins jusqu'à 30 et apprend à l'utiliser pour dénombrer.

Le nombre comme représentation de la quantité est donc un apprentissage fondamental situé entre les apprentissages pré-numériques tels que le rangement (ordonner les ingrédients d'une recette dans l'ordre où ils seront utilisés par exemple) ou le classement (mettre ensemble des objets de même couleur...) et l'apprentissage du calcul. En outre, on peut communiquer une quantité sans employer le nombre : un enfant peut simplement exprimer la quantité d'objets qu'il souhaite en montrant ses doigts si cette quantité est inférieure ou égale à dix. On peut également travailler la quantité par le biais de comparaisons (plus que/moins que...) mais si son concept n'est pas construit, la comptine numérique n'a pas de sens, ce ne sont que des mots vides de sens (Eysseric, 2008), ce qui risque d'entraîner des difficultés pour les élèves lorsqu'ils aborderont le calcul.

Cependant, le nombre comme représentation de la quantité est une notion que les enfants appréhendent difficilement : la quantité est souvent associée à une collection mais le concept de collection n'est pas évident pour un enfant (Eysseric, 2008). Une collection n'est pas quelque chose de donné, cela se construit. Joël Briand (2007) explique que dans le domaine de la construction des premiers nombres, les enfants sont toujours amenés à mesurer des collections (par leur cardinal). Or pour lui, « *dans les activités de mesurage, l'élève doit avoir une idée de l'objet qu'il traite (la collection), il doit organiser les rapports à cet objet, il doit produire ou reconnaître des structures et faire des choix dictés par des raisons ergonomiques, temporelles, spatiales.* » (2007, p. 3)

Par ailleurs, la Grande-Section correspond à la transition entre la maternelle et le cycle 2, cycle des apprentissages fondamentaux. L'enseignant a donc pour but de développer et de consolider les connaissances des élèves en prévision du Cours Préparatoire. Il met pour cela en place de nombreuses situations adaptées au niveau des élèves lors desquelles l'utilisation des nombres a du sens et est le moyen le plus efficace de résoudre le problème présenté. Le nombre devient un outil de contrôle de la quantité, notamment pour garder celle-ci en mémoire lorsque l'enfant ne peut utiliser une collection intermédiaire (telle que ses doigts), pour construire une collection qui a autant d'éléments qu'une collection de référence, etc. Les élèves ont également recours au dénombrement mais celui-ci n'est que rarement employé pour lui-même.

De nombreux paramètres peuvent influencer sur la réussite d'un problème portant sur les collections par les élèves. Par exemple si on leur propose deux situations avec dans un cas une collection de neuf objets identiques et dans l'autre neuf objets différents, on va pouvoir constater que les enfants ont du mal à dénombrer la deuxième collection car ils ne peuvent pas toujours utiliser un terme générique pour parler des objets.

Les différents éléments évoqués ci-dessus justifient que l'on s'intéresse à la question suivante : *à quelles conditions l'utilisation des collections favorise-t-elle l'apprentissage du nombre comme représentation de la quantité (cardinal de la collection) par des élèves de Grande-Section ?*

Dans une première partie nous allons définir dans quels cadres théoriques se place notre recherche de manière à mettre en avant plusieurs critères d'observation et d'analyse de deux situations réalisées dans une classe de Grande-Section. Ensuite, nous expliquerons en

quoi consistent ces situations et nous en ferons une analyse correspondant à notre problématique.

# 1 LE CADRE THEORIQUE

Il s'agit dans cette partie de définir le cadre théorique qui va nous permettre ensuite d'analyser notre recueil de données. Ce cadre contient notamment les définitions des concepts reliés à notre problématique et relate certains éléments des recherches effectuées sur l'apprentissage du nombre en maternelle à ce jour.

## 1.1 Les savoirs numériques

### 1.1.1 Le concept de nombre

#### 1.1.1.1 Définitions

Un nombre est un concept qui permet d'évaluer et de comparer des quantités ou des rapports de grandeurs. Il permet également d'ordonner des éléments par une numérotation. Ce concept est lié à l'idée d'appariement, c'est-à-dire à la mise en correspondance d'ensembles (par exemple A et B). Si on associe un élément de A à un élément de B, trois cas se présentent : il peut y avoir trop d'éléments de A ou pas assez mais il peut également y en avoir autant. Si l'on change l'association entre les éléments de A et les éléments de B, cela ne change rien. C'est pour cela que la notion de quantité est nécessaire : elle permet de comparer le nombre d'éléments de A et de B sans avoir à les associer. La notion de quantité est liée à l'aspect « cardinal » du nombre mais un nombre n'est pas une quantité, c'est seulement un objet mathématique. Le fait d'ordonner des éléments par une numérotation fait apparaître quant à lui l'aspect « ordinal » du nombre.

Un chiffre est un caractère utilisé pour écrire un nombre ou un numéro, les chiffres les plus utilisés sont les chiffres arabes : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. L'erreur la plus courante est la confusion entre le chiffre et le nombre. Un nombre peut s'écrire à l'aide d'un seul chiffre (ex : le nombre 9) ou de plusieurs (ex : les nombres 12 ou 546).

Un numéro est simplement une combinaison de chiffres qui ne respecte pas nécessairement une énumération et peut être seulement une étiquette.

#### 1.1.1.2 Diverses façons d'exprimer un nombre

Un nombre n'a pas besoin d'être chiffré pour exister. Le mode premier d'expression des nombres rencontré par un enfant est celui des mots. Stella Baruk explique que les mots numériques vont intervenir dans des expressions les mettant en jeu, notamment sur le mode

« cardinal », en nombres-de, dans toutes les expressions entendues qui rendent compte de « quantités ». L'enfant entend ces mots dès son plus jeune âge puisqu'ils sont omniprésents (ex : tu as trois ans...). Il va également entendre les nombres sur le mode « gratuit », de la comptine « qui compte », ou de celle qui intercale des mots-nombres parmi d'autres mots.

Plus tard, l'enfant va rencontrer les nombres à l'écrit. Stella Baruk distingue alors la langue numérale qui correspond à « *tous les mots ou expressions mettant en jeu des nombres sous quelque forme que ce soit* » et la langue numérique qui correspond à la « *traduction chiffrée de ces expressions numérales* ». En effet, les enfants vont être amenés à rencontrer des nombres écrits en mots et d'autres écrits dans une écriture chiffrée, ce qui peut leur poser des difficultés.

### **1.1.1.3 Les nombres et les numéros**

Baruk explique qu'il faut amener les élèves à faire la différence entre un numéro et un nombre en partant de la question simple « *qu'est-ce qu'un nombre ?* » qui amène souvent les enfants à évoquer nombres et numéros. Pour un adulte les termes « numéro » et « nombre » correspondent respectivement à l'aspect ordinal et l'aspect cardinal du nombre mais la distinction entre les deux peut être expliquée simplement aux élèves. Il suffit de leur expliquer qu'un numéro ça sert à repérer par exemple un lieu (une adresse...), un objet (un bus...), une personne (un coureur...), etc. alors qu'un nombre sert à savoir « combien-de » (combien d'années on a, combien d'élèves on est en classe par exemple). L'enseignant doit selon Stella Baruk exercer l'enfant à différencier les numéros des nombres à l'oral également. En effet, les élèves sont amenés à voir des numéros écrits par exemple sur les bus, les maillots des joueurs de football etc. alors que les nombres correspondant à une quantité ne sont que rarement écrits. Pour connaître ces derniers, il est nécessaire de compter et donc de répondre à la question « combien de... ? ».

### **1.1.1.4 Des mots pour dire ou évoquer**

Stella Baruk explique qu'« *on parle avec des mots, pour dire, exprimer quelque chose à quelqu'un. Les mots peuvent être dits, ou écrits. Parmi tous les mots qu'on connaît il y a des mots qui disent les numéros, ou la quantité.* » Elle insiste sur le fait que ces mots peuvent s'écrire de deux façons : en français comme les autres mots, ou grâce aux chiffres. A l'école maternelle, les mots-nombres seront principalement abordés à l'écrit grâce aux chiffres.

## 1.1.2 Le vocabulaire des collections

### 1.1.2.1 Définitions

Une collection est une réunion d'objets d'un même type, un regroupement d'objets défini par un caractère commun. Elle est invariante quelle que soit la disposition des objets. Lors de la conception d'une collection, il est essentiel de considérer ce rassemblement comme un tout (un seul objet).

Deux collections sont équipotentes lorsque l'on peut associer un élément de la première collection à un seul élément de la deuxième collection. De plus, en considérant les collections A, B et C, si les collections A et B sont équipotentes et les collections B et C le sont aussi, alors les collections A et C sont équipotentes. On parle alors de transitivité de l'équipotence.

### 1.1.2.2 Les travaux de Vessiler (2000) et Briand (2007)

Vessiler (2000) explique que le concept de nombre comme le cardinal d'une collection s'appuie sur deux concepts : celui de collection pour lequel le nombre correspond à la mémoire d'une quantité d'objets d'une collection ainsi que sur le concept de désignation d'une quantité. Pour lui « *la désignation est une connaissance que l'on met en œuvre lorsqu'on veut remplacer un objet ou une collection d'objets par un symbole pour conserver une mémoire de cet objet : la désignation doit permettre de conserver une connaissance de l'objet.* »

Joël Briand précise que « la production d'une collection est souvent confondue avec la manipulation qui permet le regroupement d'objets » (2007, p. 11) en s'appuyant sur un exemple : lorsqu'un adulte voit un enfant prendre des objets et les mettre dans une boîte, il peut dire qu'une collection a été constituée mais ne peut pas affirmer que l'enfant a produit une collection. Lorsque l'enseignant dit à l'élève : « *Compte les éléments de cette collection* » cela induit que la conception d'une collection n'a pas fait l'objet d'un enseignement : la collection est directement montrée. A partir de là, l'adulte ne peut pas savoir si « la collection est effectivement objet pour le sujet » ou si elle n'existe que de son propre point de vue. Or Briand insiste sur le fait que « *construire les entiers naturels, c'est mesurer cet objet « collection », mais « la collection » n'est pas un objet matériel. C'est en soit un objet de la structure mathématique et le domaine de ces objets est ce qui permet d'assigner une*

*structure d'espace mesurable. Nous dirons que si le sujet ne dispose pas de moyen de déterminer l'objet « collection », il ne peut en concevoir un mesurage. » (2007, p. 12)*

Contrairement à Vessiler, Joël Briand distingue deux formes de reconnaissances d'une collection : l'identification par la désignation et l'identification par dénomination. Il propose deux définitions (2007, p. 13) :

- désigner consiste à attribuer à un objet un signe par un moyen qui ne permet pas la construction *a priori* de noms pour d'autres objets différents. Le système de désignation ne structure pas l'univers des objets. (Par exemple, montrer un objet c'est le désigner.)
- dénommer consiste à attribuer un nom à chaque objet, c'est-à-dire produire un signe dans un système qui permet la construction de noms pour des objets différents. Ce système permet en général d'attribuer à d'autres objets un autre nom. La conséquence est que le système de dénomination choisi induit souvent une structuration de la collection. Le nom est interne au système qui permet de fabriquer d'autres noms ; cela induit une structure. Dénommer peut alors impliquer la production d'une structure sur un ensemble.

La désignation et la dénomination sont pour ce didacticien concurrentes : lorsque les objets d'une collection sont différents, l'enfant peut utiliser la dénomination ce qui lui permet de partitionner la collection pour l'explorer.

### **1.1.3 Les résultats de Rémi Brissiaud (1991)**

Nous avons choisi ce cadre théorique car il explicite la manière dont les élèves apprennent à dénombrer et donc à associer le mot-nombre prononcé lors du pointage du dernier élément d'une collection à la quantité d'objets correspondant à cette collection. Les différents éléments seront importants pour l'analyse que nous souhaitons mener ensuite quant aux conditions nécessaires pour que l'utilisation des collections soit bénéfique à l'apprentissage du nombre comme représentation de la quantité.

#### **1.1.3.1 Les collections-témoins et les nombres**

Rémi Brissiaud s'interroge sur le fait que des membres d'une même communauté se comprennent lorsqu'ils parlent d'une quantité grâce à l'utilisation des nombres. Il distingue les nombres des mots-nombres qui servent à distinguer les nombres à l'oral. Cette différence

de langage est nécessaire principalement à partir de « dix-sept », premier nombre dont la désignation nécessite deux mots-nombres.

A partir de la Préhistoire, pour représenter une quantité, on construisait une collection par correspondance terme à terme (x cailloux signifiait qu'il y avait x moutons), ce qui servait notamment pour le commerce. Une collection-témoin était donc formée pour garder la mémoire de la quantité.

Que l'on utilise une collection-témoin ou les nombres eux-mêmes, le principe de base pour quantifier une collection est la correspondance terme à terme. C'est la manière dont la quantité est représentée qui varie : dans une collection-témoin c'est l'ensemble des éléments mis en correspondance terme à terme qui désigne la quantité (ex : ☒ ☒ ☒ ☒) alors que dans les représentations numériques, c'est le dernier élément mis en correspondance (ex : 1 2 3 4).

De plus, il existe une convention pour les représentations numériques. En effet, un ordre a été défini pour les mots-nombres et les chiffres ce qui permet à tous les membres de notre communauté culturelle de se comprendre. Cela n'existe pas pour la collection-témoin puisque si on considère qu'elle est constituée de quatre cailloux et que l'on change ceux-ci de place cela ne fera pas varier leur quantité, la représentation par collection-témoin est donc plus accessible. Nous allons voir que l'ordre conventionnel est important pour le comptage.

### **1.1.3.2 Du comptage-numérotage au dénombrement**

Compter, c'est mettre en correspondance terme à terme les objets d'une collection avec la suite des mots-nombres, tout en respectant l'ordre conventionnel de ceux-ci et en associant un seul élément de la collection à un mot-nombre puis savoir que le dernier mot-nombre prononcé donne le nombre d'objets de la collection. Cela pose problème lorsque l'on compte des groupes d'objets ou entités indénombrables (ex des péchés capitaux) : il faut que toutes les entités que l'on désire compter puissent être considérées comme étant « un ».

Pour les enfants c'est différent car ils ne comptent pas dès le début comme des adultes. Rémi Brissiaud distingue deux types de comptage selon la signification que l'enfant accorde aux mots-nombres qu'il prononce : le « comptage-numérotage » et le dénombrement.

Jusqu'à quatre ans et demi environ, un enfant procède régulièrement au comptage mais ne sait pas forcément que le dernier mot-nombre correspond à la quantité. A la question « *Combien y a-t-il d'objets ?* » l'enfant répond par tous les mots-nombres correspondant à la collection comme s'il attribuait des dossards à des coureurs. C'est ce que R. Brissiaud appelle

le « comptage-numérotage » : chaque mot-nombre prononcé est un numéro qui réfère uniquement à l'objet désigné. Certains enfants sont capables de comparer des quantités grâce à cette méthode mais ne peuvent donner le nombre d'objets présents dans une collection. Ce n'est pas une représentation numérique de la quantité.

A l'inverse, on dit qu'un enfant sait dénombrer lorsqu'il comprend que le dernier mot-nombre prononcé représente la quantité de tous les objets. C'est une représentation numérique de la quantité. De plus, il est plus aisé pour l'enfant de dénombrer des objets déplaçables puisque cela lui permet de séparer les objets déjà comptés des autres. Il peut alors constater que chaque mot-nombre correspond à la quantité d'objets déjà comptés.

#### ***1.1.3.2.1 Du « comptage-numérotage » au dénombrement : une évolution difficile***

R. Brissiaud explique que la transition du « comptage-numérotage » au dénombrement est difficile pour les élèves. En effet, il indique que *« pour accéder au dénombrement, à partir du « comptage-numérotage », l'enfant doit accorder une double signification au dernier mot-nombre prononcé : lorsqu'il est prononcé pour la première fois, au cours du comptage, le dernier mot-nombre a le même statut que tous les autres mots-nombres, il s'agit d'un numéro qui distingue un objet (« le sept » par exemple). Puis l'enfant doit changer la signification de ce mot-nombre pour qu'il représente la quantité de tous les objets : on passe de « le sept » à « les sept » »*. De plus, il est délicat pour l'enseignant de déterminer si l'enfant a bien assimilé que le dernier mot-nombre prononcé représente la quantité : au départ, lorsque l'enfant « compte » combien d'objets forment une collection et qu'il ne répète pas le dernier mot-nombre, l'adulte le fait à sa place en lui disant *« oui il y a bien x objets »*. L'enfant comprend alors que l'adulte attend de lui qu'il répète le dernier mot-nombre et il finit par le faire même s'il ne comprend pas toujours pourquoi. Il ne faut alors pas confondre cela avec du dénombrement : ici l'enfant fait toujours du « comptage-numérotage ».

Le manque de lien entre le comptage et la quantité d'objets présents dans une collection est accentué par le fait que le comptage est une pratique culturelle qui dépasse la simple représentation des quantités pour les familles : quand un enfant récite la comptine numérique sans faire d'erreur, cela montre qu'il grandit et rend ses parents fiers de lui. L'enfant est donc amené à faire de la récitation sans pour autant faire de lien avec l'intérêt pratique du comptage.

### ***1.1.3.2.2 Le rôle de la perception visuelle globale***

Vers quatre ans et demi, la plupart des enfants sont capables de déterminer le mot-nombre correspondant à la quantité d'objets dans une petite collection (1, 2 ou 3 objets) sans passer par le comptage. C'est ce que Rémi Brissiaud appelle la perception visuelle globale des petites quantités. Lorsqu'on demande à un enfant de compter les objets d'une collection, il peut remarquer que le mot-nombre qu'il faut prononcer pour dire combien il y a d'objets (obtenu par perception globale) est aussi celui par lequel se termine le comptage. Cette prise de conscience peut jouer un rôle important dans l'apprentissage mais comme elle se limite à de très petites quantités, elle est insuffisante pour expliquer complètement l'apprentissage des élèves.

L'utilisation des constellations du dé, que l'on retrouve sur les dominos peut mettre en évidence pour l'enfant que quand on parle du « six » on attribue ce mot-nombre à la constellation de six points et non à un seul des points. Cela peut aider à bouleverser la conception du mot-nombre comme numéro propre à un des éléments de la collection assimilée par les élèves lors du « comptage-numérotage ».

R. Brissiaud explique que pour les petites quantités, c'est la complémentarité de deux modes de traitement de l'information qui permet à l'enfant de progresser : la perception visuelle globale qui est un mode de traitement très rapide et simultané ainsi que le comptage qui, à l'inverse, se déroule dans le temps. Le premier rend compte de la quantité dans son ensemble alors que le deuxième tient compte de chaque unité. L'enfant peut alors accéder à la représentation numérique des quantités.

### **1.1.3.3 Des collections-témoins de doigts au dénombrement**

Il ne suffit pas de savoir dénombrer pour avoir une bonne représentation de la quantité. Un enfant qui saurait dénombrer une collection de  $x$  objets mais qui ne saurait pas montrer  $x$  doigts directement, sans compter, n'a pas une bonne conception des quantités. Rémi Brissiaud explique que l'enfant est obligé de construire la collection de doigts correspondant à une quantité pour « sentir » celle-ci. Pour lui, il est important de développer la capacité des enfants à « sentir » car même en fermant les yeux, on sait le nombre de doigts que l'on montre. Il insiste sur le fait que *« les doigts ne sont pas des objets comme les autres : ils sont le lieu de sensations kinesthésiques (liées à une plus ou moins grande contraction des muscles), et ces sensations permettent d'en contrôler la quantité indépendamment de toute vision. »*

Bien sûr, lorsque l'on travaille sur une collection de doigts dessinés, la vue est indispensable. Brissiaud explique que l'on peut nommer rapidement une quantité de doigts sans procéder au comptage car on perçoit les configurations des doigts comme les constellations du dé (ex : 8 doigts correspond à 5 doigts et 3 doigts isolés). Chez l'adulte, la perception visuelle globale des quantités permet de déterminer le nombre d'éléments d'une collection de moins de cinq objets. Cependant, l'utilisation des configurations des doigts permet d'étendre cette perception.

Une collection de doigts peut donc fournir des informations visuelles, kinesthésiques et tactiles qui se coordonnent pour permettre la conception des quantités.

La capacité à représenter les petites quantités par une collection de doigts se développe très tôt chez les enfants. R. Brissiaud s'appuie sur une étude de Descœudres (1923) pour expliquer que les enfants savent représenter des quantités de 1, 2 ou 3 objets par une collection de doigts avant de savoir compter les quantités correspondantes.

#### ***1.1.3.3.1 Une nouvelle méthode d'apprentissage***

Brissiaud présente un nouveau processus d'apprentissage pour communiquer à propos des quantités : l'enfant va utiliser ses doigts pour former une collection-témoin (le nombre comme représentation de la quantité ne lui sera donc pas nécessaire pour communiquer la quantité). Brissiaud oppose ce nouveau processus à la méthode qui mène au dénombrement par le biais du « comptage-numérotage » et qui consiste à enseigner le comptage avant que l'enfant comprenne comment cette pratique permet la représentation numérique des quantités.

Dans cette nouvelle méthode, l'apprentissage des quantités débute en utilisant de petites quantités. Le but est de faire comprendre aux enfants que les mots-nombres représentent les quantités. L'outil utilisé est la représentation des quantités par une collection-témoin de doigts. L'enfant apprend donc à représenter les petites quantités directement sur ses doigts, ce qui lui permet d'assimiler que « *chaque mot-nombre représente globalement la quantité des doigts sortis* ». Brissiaud préconise de pratiquer cette méthode jusqu'à quatre ans. Il faut également éviter le comptage et l'emploi des mots-nombres comme numéros jusqu'à cet âge. L'intervention du comptage viendra plus tard car elle est nécessaire pour aborder de plus grandes quantités et permettra à l'enfant de représenter la quantité par le dernier mot-nombre prononcé.

### ***1.1.3.3.2 Les comptines numériques***

Pour quantifier des collections de plus de quatre éléments, l'apprentissage de l'ordre conventionnel des mots-nombres devient une nécessité : sans lui, l'enfant aurait beaucoup de mal à se rappeler du nom de chaque quantité. Pour cela, Brissiaud met en avant le rôle mnémotechnique de la « comptine numérique ». De plus, les comptines avec jeux de doigts permettent d'associer directement les mots-nombres aux collections correspondantes ainsi que de développer différentes configurations (ex : 4 en repliant le pouce ou le petit doigt), ce qui sera plus tard essentiel pour que l'enfant progresse vers le calcul.

### **1.1.3.4 Quand enseigner le comptage ?**

Dans son ouvrage R. Brissiaud insiste sur le fait qu'un apprentissage précoce conduit à du « comptage-numérotage ». Un enfant sait compter lorsqu'il sait mettre en relation les mots-nombres de la comptine numérique avec les objets de la collection en correspondance terme à terme (qu'il s'agisse de « comptage-numérotage » ou de dénombrement). Pour les petites collections, ce savoir est précoce, l'enfant s'aidant généralement de son index.

Lorsque la taille des collections augmente, cela entraîne des erreurs de deux types : soit les enfants oublient un objet ou compte deux fois le même, soit la récitation de la comptine et le pointage des objets ne sont pas coordonnés. Il faut être très vigilant à la mise en correspondance terme à terme des objets et des mots-nombres car sans elle toute représentation des quantités est impossible.

En fait, l'important avant d'introduire le comptage c'est d'être sûr que l'enfant peut représenter les petites quantités de 2, 3 ou 4 éléments par une collection de doigts et de lui avoir donné envie de connaître le nom des quantités plus importantes.

### **1.1.3.5 L'utilisation des chiffres**

Rémi Brissiaud s'interroge sur la manière dont les enfants apprennent que les nombres, comme les mots-nombres, ne représentent pas que des numéros mais aussi des quantités. Il évoque un processus d'apprentissage, la « traduction » des mots-nombres en nombres : si l'enfant assimile le nombre 3 comme symbole correspondant au mot-nombre « trois », il est très probable qu'il représentera pour lui la même quantité.

Les enfants peuvent s'aider d'une file numérique pour traduire les mots-nombres en nombres et vice-versa. La suite des nombres organisée en file numérique joue un rôle identique à l'ordre conventionnel des mots-nombres puisqu'elle favorise la mémorisation des

chiffres. C'est en les mettant en correspondance que l'enfant arrive à retrouver l'écriture et la lecture d'un nombre bien avant qu'il sache le lire ou l'écrire. Brissiaud suggère donc aux enseignants de Grande-Section et de Cours Préparatoire d'afficher une file numérique de référence au mur. Celle-ci permettra aux élèves de s'engager dans la résolution de problèmes même s'ils ne sont pas à l'aise avec les chiffres. Ainsi, lorsque les enfants vont devoir symboliser une quantité par un chiffre, ils vont compter les cases de la file numérique jusqu'à entendre le mot-nombre correspondant et n'auront alors plus qu'à copier le chiffre pointé. De plus, d'après Brissiaud, il est essentiel que l'enseignant favorise une « lecture cumulée » de la file numérique : il doit expliquer à ses élèves que si la case 8 porte le chiffre « 8 » c'est parce que « huit » correspond à toutes les cases jusqu'à la huitième incluse. Cependant, cet emploi de la file numérique ne doit pas remplacer les activités de production et de reconnaissance du graphisme des chiffres puisqu'elle ne dévoile pas le sens de traçage des chiffres.

Brissiaud insiste sur l'influence d'un entraînement régulier au codage et au décodage par le biais d'exercices systématiques fréquemment utilisés par les enseignants. Pour le codage (de la collection vers l'écriture chiffrée), il propose : *« une quantité étant représentée par une collection dessinée (des points sur un dé, des doigts sur une main...), l'enfant doit écrire le chiffre correspondant. Dans une variante qui ne nécessite pas d'acte graphique complexe, plusieurs chiffres sont déjà dessinés et l'enfant doit appairer la collection avec « le bon chiffre ».* » A l'inverse pour le décodage (de l'écriture chiffrée vers la collection), il préconise de donner à l'élève une feuille avec un chiffre et une case vide dans laquelle il doit dessiner une collection correspondant au chiffre, la case pouvant avoir la forme d'une face de dé ou d'un vase par exemple.

R. Brissiaud s'interroge sur l'importance du numérotage écrit pour que les élèves résolvent des problèmes concernant les quantités, c'est-à-dire le fait d'écrire les nombres à côté des objets en les dénombrant (par exemple pour une collection de quatre fleurs les élèves écriraient 1 sous la première fleur puis 2 sous la deuxième, 3 sous la troisième et 4 sous la quatrième). Il explique que bien que cette pratique ne soit pas fréquente pour l'adulte, c'est un outil utile pour l'enfant puisque le numérotage écrit lui permet de visualiser la quantité de chaque collection et de conclure sans difficulté. Pour lui *« l'échec lors du comptage oral résulte probablement du caractère éphémère de l'appariement entre les mots-nombres et les objets »* et en fixant celui-ci, le numérotage écrit crée les conditions de la réussite. Cependant, il faut être très attentif car si l'enfant utilise cet outil sans maîtriser la représentation des quantités, il risque de confondre numéro et quantité.

## 1.2 L'organisation des situations

### 1.2.1 Qu'est-ce qu'un apprentissage ?

Si l'on souhaite s'intéresser à l'apprentissage des élèves de Grande-Section, il est nécessaire de savoir ce qu'est un apprentissage. Selon Jean-Pierre Astolfi (1992), « *apprendre n'est pas un acte cumulatif et répétitif, c'est un changement dans le réseau de signification que se construit l'individu. Apprendre c'est construire un réseau.* » Il est donc important que l'enfant puisse faire du lien entre ses différentes connaissances et qu'il soit capable d'utiliser celles-ci en dehors du contexte dans lequel il les a assimilées. De plus, Reuchlin (1983) explique qu'« *il y a apprentissage lorsqu'un organisme, placé plusieurs fois dans la même situation, modifie sa conduite de façon systématique et relativement durable.* »

### 1.2.2 La théorie des situations didactiques de Guy Brousseau (1998)

Guy Brousseau explique que « *savoir des mathématiques, ce n'est pas seulement apprendre des définitions et des théorèmes, pour reconnaître l'occasion de les utiliser et de les appliquer* » (p. 49) mais surtout apprendre les mathématiques signifie être confronté à des problèmes. C'est pour cela que le professeur doit imaginer et proposer aux élèves des situations qu'ils puissent vivre et dans lesquelles les connaissances vont apparaître comme la solution optimale recouvrable aux problèmes posés. De plus, pour Brousseau, chaque connaissance doit naître de l'adaptation à une situation spécifique.

Magali Hersant (2010) explique d'après la théorie des situations didactiques de Brousseau qu'« *en référence à une hypothèse d'apprentissage par adaptation, la situation didactique comporte une situation adidactique, c'est-à-dire une situation mathématique apparemment « dénuée d'intention didactique » dans laquelle le maître n'intervient pas au niveau des connaissances et des savoirs* ». Un système qui s'oppose à l'élève intervient dans cette situation adidactique : c'est le « milieu ». Lorsque l'élève va agir sur le milieu grâce à ses connaissances, celui-ci va réagir par des rétroactions que l'élève va être en mesure d'interpréter à l'aide de ses connaissances. Ce phénomène va être important pour l'avenir de l'élève puisque le but des enseignements qu'il reçoit est de lui permettre ensuite d'utiliser ses connaissances dans des situations non-didactiques. De plus, la situation didactique comporte un « contrat didactique » qui englobe la situation adidactique. Pour Brousseau ce contrat n'est pas « un contrat pédagogique général ». Il explique qu'une relation se noue entre l'élève et l'enseignant et que celle-ci « *détermine – explicitement pour une petite part, mais surtout*

*implicitement – ce que chaque partenaire, l’enseignant et l’enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera d’une manière ou d’une autre, responsable devant l’autre* » (Brousseau, 1998, p. 61). Ce contrat est spécifique de la connaissance mathématique visée et va évoluer lors de l’apprentissage en une succession de contrats didactiques. Cependant, le contrat didactique ne suffit pas pour que l’élève interagisse avec le milieu de la situation adidactique : l’enseignant va devoir intervenir, c’est le processus de dévolution qui va permettre à l’élève de prendre des responsabilités dans la gestion de la situation et d’agir sur le milieu. Brousseau définit la dévolution comme étant « *l’acte par lequel l’enseignant fait accepter à l’élève la responsabilité d’une situation d’apprentissage (adidactique) ou d’un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert* » (Brousseau, 1990, p. 325). Un processus d’institutionnalisation est ensuite nécessaire : pour permettre à l’élève de réutiliser les connaissances acquises dans des situations non-didactiques, il est nécessaire qu’il les identifie comme des outils. Cela correspond à une autre hypothèse d’apprentissage développée dans la théorie des situations didactiques qui est l’acculturation. Le contrat didactique va aider l’enseignant à mettre en place ces deux processus.

Guy Brousseau définit également trois types de productions que l’on peut attendre de la part des élèves (Brousseau, 1998, p. 99) :

- Le premier comme « actions » sous-entendu non compris les formulations ou les déclarations de validité qui peuvent les accompagner,
- Le second comme « formulation » sous-entendu sans débats de preuve,
- Le troisième comme « validation », que l’on retrouve dans la grille d’analyse proposée par Joël Briand (cf. 1.2.3).

Ces différentes productions vont permettre à l’enfant de formuler ce qu’il fait et l’enseignant va ainsi pouvoir prendre des repères sur ce que fait l’élève et ce qu’il a réellement compris.

### **1.2.3 Grille d’analyse d’une situation d’enseignement proposée par Joël Briand (2007)**

Joël Briand apporte une typologie des situations à l’école maternelle (2007, p. 3) qui vient compléter les éléments définis par Guy Brousseau. Ces différentes situations sont mises en place par l’enseignant dans le but de « proposer aux élèves des situations qu’ils puissent vivre et dans lesquelles les connaissances vont apparaître comme la solution optimale recouvrable aux problèmes posés » le plus souvent possible. Briand distingue :

- Les situations fonctionnelles : celles dans lesquelles l'enseignant propose à certains élèves la prise en charge des aspects mathématiques d'une situation liée au fonctionnement général de la classe ou au fonctionnement d'une autre activité.
- Les situations de jeux : ateliers de jeux de société, de construction...
- Les situations construites : par l'enseignant pour permettre à ses élèves de s'approprier telles ou telles connaissances. C'est ce type de situations que comporte le recueil de données qui sera analysé ci-après.

Il propose ensuite des pistes pour caractériser une situation (2007, p. 4) correspondant aux spécificités principales qu'elle doit comporter selon lui :

- Y a-t-il bien un problème posé aux élèves ou ont-ils seulement à appliquer une consigne ?
- L'utilisation de la connaissance est-elle nécessaire pour parvenir à la solution du problème posé aux élèves ?
- L'élève peut-il comprendre la consigne et s'engager vers une solution sans disposer de cette connaissance entièrement élaborée ?
- Comment voit-il qu'il a réussi ou échoué (est-il entièrement dépendant de l'adulte ou la situation comporte-t-elle des rétroactions interprétables par l'élève) ?
- La vérification du résultat peut-elle lui donner des informations sur la façon de réussir ?
- L'organisation de la situation permet-elle :
  - à chaque enfant d'être confronté au problème et de faire des tentatives ?
  - l'échange et la confrontation des points de vue ?

## 2 ANALYSE D'UN RECUEIL DE DONNEES

Dans cette partie, nous allons analyser un recueil de données obtenu lors de notre stage en pratique accompagnée de première année de Master. Ce recueil est constitué de deux situations proposées par Dominique Valentin (2005) dans *Découvrir le monde avec les mathématiques, situations pour la Grande-Section* et qui ont été mises en place par une enseignante de Grande-Section de maternelle. Nous avons choisi l'ouvrage de Dominique Valentin car c'est une ressource pouvant nous donner des pistes de travail qui nous seront utiles en tant que jeune enseignante. De plus, l'enseignante observée travaille beaucoup à partir de cet ouvrage.

A travers les deux situations proposées, les élèves de cette classe de Grande-Section ont été amenés à travailler sur la quantité d'objets de collections différentes en utilisant progressivement le nombre comme représentation de la quantité. Il va donc s'agir ici d'analyser ces situations pour répondre à notre problématique et dégager ainsi des conditions grâce auxquelles l'utilisation des collections favorise ou non l'apprentissage du nombre comme représentation de la quantité (cardinal de la collection) par des élèves de Grande-Section.

De manière à pouvoir analyser les deux situations, nous avons photographié des productions d'élèves, pris des notes et également filmé une des situations après accord de l'enseignante. De plus, nous allons nous appuyer sur les cadres théoriques définis ci-dessus.

Les deux situations de Dominique Valentin se trouvent en annexe pages 42 à 51.

### 2.1 Livres à compter (Valentin, 2005, pp. 76-80)

La situation « *Les livres à compter* » est visible en annexe pp. 42 à 47. Les élèves de la classe observée avaient été confrontés à des albums à compter en Moyenne-Section comme cela est préconisé dans l'activité 1. En revanche, l'activité 2 proposée par Dominique Valentin n'avait pas été abordée. Nous allons donc particulièrement nous intéresser à la mise en place de l'activité « *Fabrication individuelle d'un livre à compter* » dans une classe de Grande-Section sur plusieurs jours.

### 2.1.1 Les objectifs des Livres à compter

Les objectifs d'enseignement-apprentissage de l'enseignante visés à travers cette situation (Valentin, 2005, p. 77) correspondaient à ceux que Dominique Valentin avaient définis :

- « Entraîner les capacités de dénombrement et la reconnaissance des écritures chiffrées des nombres jusqu'à 30 environ » ce qui correspond bien aux instructions officielles de 2008 qui demandent à ce qu'en sortant de l'école maternelle, les élèves aient acquis la compétence « *Mémoriser la suite des nombres au moins jusqu'à 30* » (cf. annexe p.41).
- « Organiser diverses collections dans l'ordre croissant de la quantité d'éléments qu'elles contiennent. »
- « Commencer à construire des inclusions d'ensembles (les roses sont des fleurs...). »

Cependant, la fabrication de ce livre par les élèves avaient également un autre but pédagogique puisqu'il s'agissait pour les enfants de se fabriquer un outil propre à chacun qu'ils pourraient réutiliser au Cours Préparatoire l'année suivante.

### 2.1.2 Les modifications apportées par l'enseignante

Lorsqu'elle l'a mise en place, l'enseignante observée a apporté plusieurs modifications à la situation.

Tout d'abord, il ne s'agissait pas seulement pour les enfants de découper des images dans un catalogue et de les coller sur une feuille blanche pour former une collection puis de noter le nombre « d'objets » en dessous comme ce que proposait Dominique Valentin. En effet, la fiche type « fabriquée » par les élèves de la classe observée était assez complexe et plus ambitieuse que celle proposée par D. Valentin (cf. annexe p. 47). Les élèves devaient dans un premier temps écrire le nombre correspondant à la fiche en chiffres, ce qui pouvait les conduire à l'associer à un numéro mais les autres tâches demandées les aidaient à comprendre que ce nombre représentait la quantité « d'objets » collés. Ensuite, les enfants devaient constituer une collection dont la quantité correspondait au nombre inscrit auparavant, à partir de dominos sur lesquels se trouvaient les constellations du dé. Cette étape correspond au décodage défini par Brissiaud (de l'écriture chiffrée vers la collection). Cette utilisation de collections organisées en constellations avait pour objectif de familiariser les élèves avec une

telle représentation des nombres ainsi que de les amener à associer chaque constellation à une quantité particulière. De plus, les dominos proposés correspondaient aux nombres de 1 à 5 ce qui obligeait les enfants à les assembler pour former les nombres supérieurs à 5. Ainsi, ils s'exerçaient à des calculs simples. Lorsque les enfants ont abordé les nombres supérieurs à 10, ils avaient à leur disposition une bande de dix carreaux. Pour cette étape, les élèves pouvaient s'aider d'un affichage présentant chaque nombre représenté par deux ou trois bandes de dix carreaux, ceux-ci étant grisés en fonction du nombre représenté. Après avoir constitué la collection à partir des constellations du dé, les élèves avaient une autre tâche à effectuer : comme le suggère Dominique Valentin, des catalogues étaient mis à leur disposition pour qu'ils puissent découper des « objets » et ainsi former une nouvelle collection. Lors de cette étape, les élèves devaient nommer les objets qu'ils collaient et ainsi « commencer à construire des inclusions d'ensembles » puisqu'ils avaient parfois des ensembles d'objets ne portant pas le même nom mais étant de la même « famille » (ex : des meubles différents). L'enseignante les questionnait alors pour qu'ils donnent l'hyperonyme correspondant puisque comme l'explique Briand, c'est à partir de là seulement que l'enfant peut vraiment structurer l'ensemble constituant la collection. Cette étape était effectuée jusqu'à 10 puis pour les autres pages de leur livre, les enfants devaient constituer des collections de têtes de clown, proposées seules, par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10. Enfin, les élèves devaient écrire le nombre en lettres à partir d'un modèle pour s'exercer à l'écriture cursive et mémoriser l'écriture des petits nombres.

De plus, contrairement à ce que propose D. Valentin, les élèves n'ont pas fabriqué les pages de leur livre dans le désordre, ce qui a contribué à l'apprentissage de l'ordre conventionnel des nombres et des mots-nombres. En effet, certains enfants de la classe avaient des difficultés à retenir cet ordre et donc à savoir où ils en étaient dans leur travail. C'est pour cela qu'à chaque fois que les enfants arrêtaient l'activité, ils devaient classer leurs pages par ordre croissant. Ainsi, lorsqu'ils ouvraient leur pochette cartonnée la fois suivante ils avaient un repère pour savoir quelle fiche ils devaient réaliser. Ce travail de sériation effectué à chaque fin de séance a été bénéfique pour l'organisation de la construction des livres à compter. Cependant, cette manière de procéder présente aussi des inconvénients du point de vue des apprentissages car les élèves n'apprennent pas la même chose en travaillant à partir des fiches lorsqu'elles sont classées dans l'ordre ou au contraire lorsqu'elles sont dans le désordre. Les fiches étant rangées lorsque les élèves ouvraient leur pochette, ils ne regardaient pas forcément ce qui avait été fait avant. Or, cela leur aurait peut-être permis de

mieux comprendre la méthode et de l'assimiler puisqu'ils auraient pu par exemple être amenés à expliquer la manière dont ils avaient procédé pour construire les autres fiches et donc décoder le nombre représentant la quantité pour construire une collection.

### **2.1.3 La gestion des difficultés**

L'enseignante a travaillé sur cette activité par petits groupes en classe mais également lors de l'aide personnalisée. En effet, certains élèves avaient de grosses difficultés pour fabriquer leur livre à compter. Les difficultés rencontrées semblaient de plusieurs types. Certains élèves avaient des problèmes de mémorisation et d'attention qui les empêchaient de construire leurs collections correctement puisqu'ils oubliaient sans cesse ce qu'ils devaient faire. D'autres élèves avaient une mauvaise connaissance des nombres, de leur écriture et de l'ordre conventionnel des mots-nombres ce qui les induisait en erreur lorsqu'ils voulaient écrire le nombre correspondant à une page ainsi qu'à la fin de la séance au moment où ils devaient ranger leurs pages dans l'ordre croissant. Enfin, la conception des collections étaient difficile pour les élèves car ils ne savaient pas aisément associer une constellation du dé à un nombre : cela les gênait pour associer les dominos et ainsi former la quantité demandée, les enfants passaient alors très souvent par le dénombrement.

## **2.2 La ferme de Mathurin (Valentin, 2005, pp. 56-59)**

La situation « *La ferme de Mathurin* » est présentée en annexe pp. 48 à 51.

### **2.2.1 Analyse *a priori***

Avant d'analyser les séances menées, il est nécessaire de réaliser une analyse *a priori* des activités 1 et 2.

#### **2.2.1.1 Une situation construite par l'enseignante...**

Si l'on se réfère à ce que proposait Joël Briand pour caractériser une situation d'enseignement (2007, pp. 3-4), on peut placer la situation « *La ferme de Mathurin* » (Valentin, 2005, pp. 56-59) dans la catégorie « situations construites » : l'enseignante met bien en place une situation permettant à ses élèves de s'approprier une nouvelle connaissance. Les élèves sont placés face à un problème qu'ils vont devoir résoudre en faisant évoluer leurs connaissances. L'organisation de la situation permet également aux élèves de faire des tentatives : lors de l'étape 1, les enfants sont amenés à prendre la boîte qui contient les têtes de lapin et à sortir, « en une seule fois et sans les poser près de chaque lapin », les têtes dont

ils ont besoin pour construire leur collection et peuvent réfléchir jusqu'à ce qu'ils soient sûrs de leur réponse. C'est également l'intérêt de l'utilisation des jetons lors de l'étape 1 de l'activité 1. De plus, la situation permet aux élèves d'échanger avec l'enseignante mais également avec leurs pairs lors de la vérification des résultats et ainsi de formuler leurs procédures pour les confronter.

### **2.2.1.2 ... nécessitant des prérequis...**

Il s'agit ici de déterminer les prérequis nécessaires à la réalisation des différentes activités par les élèves. Lors de ces deux activités, les élèves vont être amenés à dénombrer des collections de référence : la collection formée par les corps des poules dans l'activité 1 et celle formée par les sept corps de lapins dans l'activité 2. Le cardinal de ces collections ne dépassera pas dix. Il est donc important que les élèves sachent déjà dénombrer des quantités inférieures ou égales à dix. Selon Rémi Brissiaud, cela signifie qu'il est indispensable que les élèves comprennent que le dernier mot-nombre, qu'ils vont prononcer ou penser lorsqu'ils vont compter les éléments de la collection, représente la quantité de tous les objets. Si l'on s'intéresse plus particulièrement à l'activité 2, les élèves ne devront plus considérer le nombre sept comme étant le numéro du dernier élément compté mais le nombre représentant la quantité de corps de lapins formant la collection de référence. En outre, pour dénombrer de manière correcte le nombre d'éléments des collections de référence, il est essentiel que les élèves maîtrisent la comptine numérique puisque comme l'indique R. Brissiaud, l'apprentissage de l'ordre conventionnel des mots-nombres devient une nécessité pour quantifier des collections de plus de quatre éléments. Ainsi, les élèves ne risquent pas de faire des erreurs liées à l'ordre des mots-nombres utilisé lors du dénombrement des collections. Nous verrons également que pour ces deux activités, les élèves doivent connaître l'écriture chiffrée des nombres inférieurs à trente. Si cette connaissance n'est pas acquise, les élèves doivent être capables de retrouver cette écriture à l'aide d'une file numérique : comme l'explique Brissiaud, lorsque les élèves vont devoir écrire une quantité, ils vont compter les cases de la file numérique jusqu'à entendre le mot-nombre correspondant et n'auront plus qu'à copier le chiffre pointé.

### **2.2.1.3 ... pour atteindre des objectifs précis**

Pour pouvoir conclure sur les connaissances acquises par les élèves lors des différentes activités, il faut dégager les objectifs d'apprentissages visés par la situation que propose D. Valentin.

L'étape 1 de l'activité 1 et les étapes 1 et 2 de l'activité 2 sont similaires : il s'agit pour les élèves de construire des collections de même cardinal que les collections de références sans utiliser la comparaison terme à terme. Ainsi, pour l'activité 2, les élèves devront constituer une collection de têtes de lapins ayant le même nombre d'éléments que la collection de référence comportant les corps de lapins. Puis, ils devront constituer une collection de queues de lapins ayant le même cardinal que la collection de référence. Le premier objectif d'apprentissage est donc de savoir construire une collection de même cardinal qu'une collection de référence sans utiliser la comparaison terme à terme. Cependant, pour pouvoir atteindre cet objectif, les élèves doivent comprendre pourquoi les différentes collections citées sont équipotentes. En effet, c'est parce qu'un lapin a une seule tête et une seule queue que la collection comportant les têtes et celle comportant les queues vont avoir autant d'éléments que la collection de référence. De même, c'est parce qu'une poule a une seule tête que la collection comportant les têtes de poules a autant d'éléments que la collection de corps de poules.

L'étape 2 de l'activité 1 et l'étape 3 de l'activité 2 sont également analogues : les élèves doivent former des collections dont le cardinal est le double du cardinal des collections de référence. Le troisième objectif d'apprentissage visé est donc de savoir construire des collections doubles d'une collection de référence. Pour cela, les élèves doivent comprendre que du fait qu'un lapin a deux oreilles, il faut prendre deux fois plus d'oreilles qu'il n'y a de corps de lapins pour que chaque lapin ait deux oreilles. De même, pour les pattes de poules, il faut prendre deux fois plus de pattes qu'il n'y a de corps pour que chaque poule ait deux pattes.

L'objectif visé lors de l'étape 4 de l'activité 2 est en lien avec le troisième objectif : les élèves doivent savoir former une collection quadruple d'une collection de référence. Il est alors nécessaire qu'ils saisissent que c'est parce qu'un lapin a quatre pattes qu'il faut prendre quatre fois plus de pattes qu'il n'y a de corps de lapins pour que chaque lapin ait quatre pattes. Ils doivent également trouver un moyen de réaliser une collection de pattes de lapins de cardinal quatre fois celui de la collection de corps de lapin.

#### **2.2.1.4 Les procédures possibles et les difficultés pouvant être rencontrées**

Après avoir défini les prérequis nécessaires à la réalisation des différentes activités et mis en évidence les objectifs d'apprentissage visés, nous pouvons nous intéresser aux

procédures que les élèves pourraient mettre en place pour résoudre les problèmes qui leur sont posés ainsi qu'aux difficultés qu'ils pourraient rencontrer.

Les étapes 1 des deux activités sont les mêmes. Comme nous l'avons déjà remarqué, il s'agit pour les élèves de concevoir des collections ayant le même nombre d'éléments que la collection de référence. Dans l'activité 1, les élèves doivent commander oralement à l'enseignante « juste ce qu'il leur faut » de têtes de poules pour pouvoir mettre une tête à chaque poule. La procédure experte attendue ici est le dénombrement des corps de poules par les élèves. Ils doivent ensuite penser qu'il faut une tête par poule et donc demander un nombre de têtes de poules égal au cardinal de la collection dénombrée. Pour cela, ils disposent de trois jetons. Ainsi, si un élève se trompe lorsqu'il passe sa commande, il lui reste deux chances d'y parvenir. L'intérêt des jetons est d'amener les élèves à la procédure et donc à dénombrer la quantité. En effet, les élèves pourraient commander un nombre de têtes de poules au hasard et redemander des têtes à l'aide de leurs deux autres jetons mais ils risqueraient de ne pas avoir assez de têtes de poules après leurs trois commandes ou au contraire en avoir trop.

L'activité 2 diffère pour cette étape puisque les élèves ne possèdent plus de jetons mais sont invités à utiliser une feuille à leur disposition. Il est alors possible qu'ils dessinent les têtes de lapins dont ils ont besoin et les dénombrent avant de passer leur commande. Cette procédure mettrait en évidence que les élèves ont bien compris qu'en dénombrant ils obtiennent la quantité d'éléments présents dans la collection mais également qu'ils n'ont pas saisi que les collections sont équipotentes. Les élèves peuvent également inscrire sur leur feuille le nombre correspond au cardinal de la collection de corps de lapins ce qui démontrerait alors qu'ils maîtrisent le dénombrement et savent écrire le nombre correspondant au cardinal de la collection dénombrée.

L'étape 2 de l'activité 2 est similaire à l'étape 1. On peut donc envisager de les mettre en place lors de la même séance. Cependant, bien que la deuxième étape demande le même raisonnement que la première aux élèves, il n'est pas évident que ces derniers ne réitèrent pas la procédure qui leur a permis de répondre lors de l'étape 1. En effet, comme l'explique Dominique Valentin, la plupart des enfants ont déjà dénombré le nombre de lapins pour savoir combien il fallait de têtes mais vont avoir besoin de recommencer « *comme si ce nombre de lapin n'avait pas pris valeur de référence* » (2005, p. 58). D. Valentin met en avant le fait que lors de l'étape 2, « *l'enfant qui n'a plus besoin de recompter les lapins pour*

*savoir combien il doit dessiner de queues, a fait un pas important vers la conscience que le nombre est la mémoire de la quantité* » (2005, p. 58). Ces deux étapes sont semblables à la situation « Les mathoeufs » présentées dans *Activités numériques et résolution de problèmes, GS, Cycle 2*, Ermel, Hatier, 2005 où il est expliqué que le fait de devoir constituer plusieurs collections équipotentes à une collection de référence amène à prendre conscience que c'est toujours le même nombre qui est utilisé (p. 88).

L'étape 3 de l'activité 2 peut quant à elle poser plus de difficultés aux élèves : il va devenir nécessaire pour eux de trouver d'autres procédures que le dénombrement puisqu'il va falloir qu'ils constituent une collection ayant deux fois plus d'éléments que la collection de corps de lapin (collection de référence). Les procédures mises en place par les élèves lors de cette étape seront sûrement les mêmes que lors de l'étape 2 de l'activité 1. Dominique Valentin donne des exemples de procédures que les élèves vont pouvoir mettre en place (2005, p. 59) :

- L'enfant dessine sept oreilles et encore sept oreilles, en comptant au fur et à mesure jusqu'à 7,
- Il dessine sept fois deux oreilles ou sept paires d'oreilles,
- Il dessine des oreilles au hasard et réajuste en les comptant par deux (ou en les entourant par deux) jusqu'à avoir sept paires d'oreilles,
- Il compte sur ces doigts 7 et 7 et dessine quatorze oreilles ou écrit 14,
- Il sait déjà que 7 et 7 font 14 et il se contente d'écrire 14.

Pour les trois premières procédures l'enfant est capable de dessiner la bonne quantité d'oreilles sans pourtant en connaître le nombre. Cela n'est pas exigé par la situation mais l'enseignant peut amener les élèves à se diriger vers d'autres procédures s'il veut rendre nécessaire le nombre comme représentation de la quantité demandée pour résoudre le problème posé. Il peut également leur demander de formuler oralement leur demande de manière à ce que les élèves soient obligés d'indiquer la quantité totale d'oreilles nécessaire pour que chaque lapin ait deux oreilles. On peut aussi imaginer que certains enfants aient besoin de dessiner les lapins pour trouver le nombre d'oreilles nécessaires : il peut être trop abstrait pour eux de dessiner seulement les oreilles. Il est également à préciser que certains élèves peuvent ne pas connaître l'écriture chiffrée de quatorze et donc avoir recours à la file numérique pour pouvoir passer leur commande.

L'étape 4 ne peut être proposée qu'à des élèves qui ont réussi à résoudre le problème précédent grâce à la procédure qu'ils avaient mise en place. En effet, cette étape demande le même raisonnement que la précédente mais le nombre d'éléments de la collection est deux fois plus grand. Il est donc nécessaire que les élèves se soient approprié une procédure pour pouvoir la réitérer sans se tromper et ainsi pouvoir déterminer le bon nombre de pattes qu'ils vont devoir commander pour que chaque lapin ait quatre patte. De plus, on peut imaginer que le nombre vingt-huit, soit le nombre d'éléments de la collection à former, ne soit pas accessible à chacun : certains élèves peuvent ne pas connaître son écriture chiffrée ou encore avoir des difficultés à comprendre la signification d'un nombre de cette grandeur.

### **2.2.1.5 Les différentes productions**

En accord avec ce que définit Brousseau (1998, p. 99), on peut distinguer trois types de production de la part des élèves. En effet, chaque étape met en place trois phases lors desquelles les élèves vont être amenés à agir, puis à formuler ce qu'ils ont fait et enfin à valider leurs propositions en recomposant les poules ou les lapins. La formulation de leurs procédures par les élèves va les amener à en prendre conscience puisqu'ils vont devoir les expliquer à l'enseignant ainsi qu'aux autres élèves. Ce temps de verbalisation va également leur permettre d'échanger avec les autres pour pouvoir s'approprier une nouvelle procédure, plus experte que les leurs ou simplement faire évoluer ces dernières. Finalement, ils vont pouvoir valider leurs réponses en recomposant les poules ou les lapins et en comparant leurs collections avec celles des autres. L'enseignant pourra alors intervenir pour étayer le débat et amener les élèves à prendre conscience que certaines procédures deviennent plus expertes et souvent plus rapides que d'autres.

### **2.2.2 Analyse a posteriori**

La situation « *La ferme de Mathurin* » (cf. annexe pp. 48 à 51) a été proposée à neuf élèves de la classe sous la forme d'une séquence de trois séances. Lorsque l'enseignante l'a conçue, elle n'envisageait pas de la proposer aux élèves en entière puisqu'elle pensait que l'activité 2 (« *Les lapins de Mathurin* », cf. annexe pp. 50 et 51) suffirait. Cependant, lors de la première séance, réalisée avec six élèves, l'enseignante s'est rendu compte de la difficulté pour trois des élèves à réaliser la tâche demandée dans l'étape 3. Elle a donc choisi de mettre en place l'activité 1, « *Les poules de Mathurin* » (cf. annexe p. 49), lors d'une deuxième séance pour remédier aux difficultés de ces élèves. Elle a profité de cette séance pour inclure

trois autres élèves dans l'activité. Puis, elle a mené une dernière séance avec six des neuf élèves lors de laquelle toutes les étapes de l'activité 2 ont été réalisées.

A la lecture des transcriptions des trois séances, nous avons choisi de nous concentrer sur la séance 1 et d'extraire certains épisodes qui nous semblaient pertinents et sur lesquels nous avons choisi de nous focaliser. Il s'agit à travers l'analyse de ces épisodes de déterminer des conditions répondant à notre problématique.

### 2.2.2.1 La répétition du dernier mot-nombre lors du dénombrement

Dans cette partie, nous avons pris appui sur les épisodes suivants. Le premier épisode se déroule pendant l'étape 1 de l'activité 2. La question posée par l'enseignante était la suivante : « *Combien de têtes de lapins nous faut-il pour les corps de lapins qui sont là ?* » (sept corps se trouvaient à ce moment-là au centre de la table). Le deuxième épisode est extrait de l'étape 3 de l'activité 2. Les élèves cherchaient à répondre à la question : « *Combien faut-il prendre d'oreilles de lapins pour que chacun de nos lapins ici ait ses oreilles ?* » (les lapins étant toujours au nombre de sept).

*E : enseignante.*

75. E : Voilà comme ça on vérifie qu'on se trompe pas. D'accord alors moi je pense qu'effectivement la bonne réponse c'est ... sept. On va vérifier tout de suite. (A Li) Tiens tu vas me prêter ton crayon. (*L'enseignante montre les corps de lapins sur la table un par un*) Alors ça fait...

76. Ad : Un

77. E : Un

78. Les enfants et E : Deux, trois, quatre, cinq, six, sept.

79. E : Alors, dans notre boîte là... on va demander à Sh de compter combien il y a de têtes de lapins dans la boîte.

80. Sh : Un

81. E : Bien, vas-y.

82. Sh : Deux, trois, quatre... (*elle hésite*)

83. E : Compte bien, prends ton temps...

84. Sh : Cinq, six

85. E : Six

86. Sh : Sept

87. E : Sept.

*(L'enseignante se lève pour aller chercher une feuille A3 sur laquelle elle va poser les corps de lapins pour qu'ils soient plus visibles et demande aux élèves s'ils voient mieux)*

88. E : Alors toi tu nous as tout bien préparé Sh, sept têtes ?

89. Sh : Oui. *(elle recompte les têtes sans les déplacer)* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oups *(elle recompte alors les têtes en les déplaçant)* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

90. E : Tu vas me les passer ? *(Sh donne les têtes à l'enseignante qui les assemble avec les corps de lapins).*

**Tableau 1 : Séance 1 activité 2 étape 1 mise en commun**

273. E : Quatorze. Comment tu as fait Ad ? Ecoutez bien comment elle a fait pour trouver quatorze. Comment tu as fait ?

274. Ad : J'ai compté.

275. E : Refais ce que tu as fait tout bas parce que moi je t'ai observé j'ai vu comment tu faisais. Moi jt'ai vu faire. Comment tu as fait pour trouver le nombre d'oreilles ? Avec ton doigt je t'ai vu faire quelque chose. Vas-y refais le devant nous. Nan mais redis le bien fort tu as fait.

276. Ad : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 *(Elle montre deux oreilles imaginaires pour chaque lapin).*

(...)

315. E : Moi je t'ai vu faire aussi... t'as fait comme Ad, t'as compté à chaque fois 1,2... 3,4... 5,6... 7,8... 9,10... 11,12... 13,14. Qu'est-ce que tu as fait toi

aussi No ?

(...)

319. E : (*Se penche vers Ag*) Vous, je vous avais dit de faire les têtes comme vous avez fait là, vous auriez mis les deux oreilles... Qu'est-ce que vous pouviez faire après quand vous aviez dessiné toutes les oreilles ? Allez-y dessinez moi toutes les oreilles là. (*Elle leur redonne leurs crayons*). Qu'est-ce qu'on peut faire après pour trouver la solution ?

320. Ag : Les compter !

321. E : Bah les compter bien sûr. Vas-y Ag. Tu vas les compter maintenant. Tu vas voir si tu trouves la bonne... Attention là t'en as combien sur celui-là ? Compte-les maintenant.

322. Ag : 1,2,3... (*elle ne désigne pas les oreilles*)

323. E : Nan 1,2. Prends ton doigt si tu as du mal.

324. Ag : 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14.

325. E : Voilà. Quand on a du mal à compter comme ça on peut faire des petits dessins et dessiner...

326. Ag : 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14.

327. E : Voilà. Quand on a du mal à compter comme ça on peut faire des petits dessins et dessiner...

#### Tableau 2 : Séance 1 Activité 2 Etape 3 mise en commun

Nous cherchons ici à mettre en évidence une condition selon laquelle l'utilisation des collections favoriserait l'apprentissage du nombre comme représentation de la quantité par des élèves de Grande-Section. A la lecture de ces épisodes, nous avons remarqué que lorsque les élèves ou l'enseignante dénombrent le nombre d'éléments d'une collection, qu'elle soit présente ou imaginaire, le dernier mot-nombre n'est pas répété. Or selon R. Brissiaud, un enfant sait dénombrer lorsqu'il comprend que le dernier mot-nombre prononcé représente la quantité de tous les objets. Il nous paraît donc essentiel que lorsque les élèves comptent le nombre d'éléments d'une collection dans cette situation, ils fassent une phrase à la fin pour

résumer ce qu'il leur faut ou ce qu'ils ont compté. Par exemple, lors de l'intervention 276, l'élève aurait pu résumer son comptage par « il faut 14 oreilles ». Cela nous semble d'autant plus important pour les élèves en difficulté pour qui il est nécessaire de rappeler le sens de ce qui est fait et donc de leur faire répéter le dernier mot-nombre dans une phrase-réponse. Nous nous interrogeons donc ici sur l'intérêt de l'utilisation des collections. En effet, comme nous l'avons dit plus tôt, nous cherchons à déterminer à quelles conditions l'utilisation des collections favoriserait l'apprentissage du nombre comme représentation de la quantité. Il nous semble ici que le fait de répéter le dernier mot-nombre correspondant au cardinal de la collection lors du dénombrement est une condition grâce à laquelle l'utilisation de collections favorise cet apprentissage. Toutefois, nous ne savons pas pourquoi l'enseignante ne fait pas répéter le dernier mot-nombre, peut-être est-ce parce qu'elle connaît ses élèves et qu'elle sait qu'ils maîtrisent le dénombrement et donc qu'ils savent que le dernier mot-nombre correspond à la quantité d'objets.

Cependant, le fait de répéter le dernier mot-nombre nous paraît insuffisant. En effet, dans le premier épisode (cf. tableau 1), l'enseignante répète le dernier mot-nombre (intervention 87) mais ce n'est pas dans le but de le distinguer des autres : elle le répète comme le précédent (intervention 85) pour que tout le monde l'entende bien et pour accompagner l'élève qui éprouve quelques difficultés. Il faut alors préciser la condition définie précédemment : pour que l'utilisation des collections favorise l'apprentissage du nombre comme représentation de la quantité par des élèves de Grande-Section, il est nécessaire que l'adulte fasse répéter le dernier mot-nombre en demandant aux élèves de répondre à la question posée par une phrase.

De plus, nous avons constaté que certains élèves faisaient parfois des erreurs en dénombrant les différents éléments des collections comme c'est le cas dans le premier épisode (intervention 89) ou encore dans l'épisode 2 (intervention 322). Il est donc important de s'assurer que les élèves maîtrisent cela car ils risquent d'annoncer une quantité d'objets fautive à cause d'une simple erreur d'association entre les éléments et les mots-nombres. Comme l'explique Brissiaud, il est intéressant de permettre aux élèves de déplacer les objets ce qui les aide à dénombrer. C'est ce que fait l'élève dans l'épisode 1 (intervention 89) : elle dénombre une première fois les objets en les laissant à leur place puis les dénombre à nouveau en les déplaçant car elle s'est trompée. L'enseignante propose également à une autre élève de désigner les éléments avec son doigt en les dénombrant ce qui lui permet de ne plus faire d'erreur (épisode 2 intervention 324).

### 2.2.2.2 Les propositions de procédures

En lisant les transcriptions des séances, nous avons constaté que l'enseignante propose aux élèves de mettre en place certaines procédures très rapidement. De plus, elle leur impose d'utiliser leur ardoise. Nous allons analyser cela dans cette partie en prenant appui sur deux interventions de l'enseignante, la première étant extraite de la transcription de la première étape de l'activité 2 et la seconde de l'étape 3.

33. E : Vous écrivez votre résultat sur votre ardoise et vous cachez votre ardoise on veut rien voir du tout. Vous pouvez dessiner les têtes si vous voulez, vous pouvez écrire le nombre si vous voulez. Prenez votre temps hein... moi je vous laisse du temps, réfléchissez bien... Regardez bien... si vous avez du mal à écrire le nombre, je pense à Sh un petit peu, parce qu'elle sait pas trop comment l'écrire, dessine les têtes qui correspondent au nombre de corps de lapins qui sont là. (*à Hu*) Je ne t'ai rien demandé : tu ne respectes aucune règle que nous avons énoncée. Tu parles... moi j'ai demandé de cacher les ardoises tu me la montres... Est-ce que tout le monde a une réponse ?

**Tableau 3 : Séance 1 activité 2 étape 1 phase de recherche**

148. E : Chut... Vous réfléchissez, vous réfléchissez. Vous pouvez faire des petits dessins sur votre ardoise si ça vous aide... Dessiner les têtes euh faire tout ce que vous voulez. Prenez votre temps hein parce que là moi je sens que vous vous précipitez... Réfléchissez bien, vous pouvez faire les ptits dessins des têtes euh... dessiner après les oreilles... ou écrire le résultat... Chut, on écrit son résultat on attend que tout le monde ait fini... Chut... (*Les élèves travaillent en silence*) T'as écrit ton résultat Ad ?

**Tableau 4 : Séance 1 activité 2 étape 3 phase de recherche**

Lors de la première intervention (tableau 3), l'enseignante impose à ses élèves d'écrire leur résultat sur leur ardoise ce qui nous a questionné. En effet, l'objectif est d'amener les élèves à prendre conscience notamment que le nombre a une fonction de mémoire de la quantité. Or si les élèves écrivent le nombre d'objets dont ils ont besoin en attendant de passer leur commande, ils n'ont pas à s'en souvenir puisqu'ils pourront à tout moment relire ce qu'ils ont écrit. Cependant, c'est une procédure que les élèves peuvent mettre en place

spontanément puisqu'ils disposent d'une ardoise et d'un crayon et il ne s'agirait pas forcément de les empêcher de la mettre en place mais l'enseignante pourrait ne pas en parler pour laisser le choix aux élèves. Toutefois, il est compréhensible que les enfants qui ont trouvé rapidement le résultat aient du mal à le retenir jusqu'à la mise en commun puisque d'autres élèves peuvent éprouver des difficultés et avoir besoin de plus de temps pour trouver le résultat. Il est alors possible de proposer une solution aux premiers élèves. En effet, l'enseignante pourrait proposer aux élèves d'aller chercher une étiquette nombre correspondant au résultat qu'ils ont trouvé dans une autre classe ou dans un lieu éloigné de la table ce qui obligerait les élèves à se souvenir du nombre qu'ils ont trouvé. Ainsi, peu à peu ils comprendraient qu'en gardant le nombre dans leur tête, ils ne peuvent oublier la quantité d'objets dont ils ont besoin.

D'autre part, dès la première intervention, qui se situe au tout début de la séance (intervention 33), on remarque que l'enseignante induit une procédure : elle propose aux élèves de dessiner le nombre de têtes correspondant aux corps de lapins sur leurs ardoises. Cette proposition de procédure nous a interpellés car elle intervient très tôt dans la séance alors que les élèves n'ont pas encore pu réellement chercher par eux-mêmes. De plus, en dessinant les têtes sur leurs ardoises, les élèves n'ont pas à utiliser le nombre comme mémoire de la quantité. Il s'agit seulement pour eux de dessiner une collection équipotente à la collection de corps de lapins, ce qu'ils peuvent simplement réaliser en mettant en correspondance les deux collections terme à terme. De la même manière, dans la deuxième intervention (tableau 4) qui est extraite de l'étape 3, l'enseignante dit aux élèves qu'ils peuvent dessiner les têtes puis les oreilles des lapins. Les enfants n'ont alors plus qu'à dénombrer les oreilles de lapins : ils utilisent alors le nombre comme représentation de la quantité mais n'ont pas besoin d'utiliser le nombre comme mémoire de la quantité.

Il apparaît donc ici qu'en voulant aider les élèves, l'enseignante les a peut-être trop influencés ce qui n'a pas créé de condition favorable pour qu'ils utilisent tous les aspects la connaissance visée : les élèves ont en général utilisé le nombre comme représentation de la quantité mais rarement le nombre comme mémoire de celle-ci.

### **2.2.2.3 Le matériel à disposition**

A la lecture des différentes transcriptions, nous avons pu mettre en évidence deux procédures utilisées par les élèves au fil des étapes. Nous allons ici nous focaliser sur l'étape 3 de l'activité 2 qui a été mise en place pour la première fois lors de la séance 1. Les élèves

cherchaient à répondre à la question « *Combien faut-il prendre d'oreilles de lapins pour que chacun de nos lapins ici ait ses oreilles ?* » (les lapins étant au nombre de sept, les élèves devaient trouver quatorze oreilles).

Le dessin a été la procédure la plus employée par les élèves. Elle a, comme nous l'avons dit plus tôt (cf. 2.2.2.2), été proposée par l'enseignante dès le début de la séance. Les élèves ayant les têtes de lapins sous les yeux, il leur suffit de construire, terme à terme, la collection d'oreilles dont le cardinal est deux fois plus grand que celui de la collection de têtes de lapins. Cette procédure permet aux élèves d'employer le nombre comme représentation de la quantité puisqu'il leur suffit de dénombrer les oreilles de lapins mais ne les amène pas à utiliser le nombre comme mémoire de la quantité. Cela nous amène à nous questionner sur le matériel qui doit être mis ou non à disposition des élèves dans cette situation. En effet, si l'enseignante propose comme elle l'a fait ici cette procédure, nous avons vu qu'elle empêche les élèves d'utiliser toutes les propriétés du nombre. A l'inverse, si l'enseignante choisit de ne pas autoriser cette procédure, cela oblige les élèves à utiliser une autre procédure qui peut les amener à utiliser la connaissance visée. De la même manière, l'enseignante pourrait permettre ou non aux élèves d'utiliser le matériel au lieu du dessin, elle pourrait ou non leur donner directement les différentes parties des lapins pour qu'ils fassent des tentatives.

L'autre procédure utilisée est le dénombrement d'oreilles imaginaires. Une des élèves a directement utilisé cette procédure puis certains élèves se la sont appropriée petit à petit au fil des séances. L'élève a expliqué comment elle faisait à ses camarades lors de la mise en commun.

273. E : Quatorze. Comment tu as fait Ad ? Ecoutez bien comment elle a fait pour trouver quatorze. Comment tu as fait ?

274. Ad : J'ai compté.

275. E : Refais ce que tu as fait tout bas parce que moi je t'ai observée j'ai vu comment tu faisais. Moi jt'ai vu faire. Comment tu as fait pour trouver le nombre d'oreilles ? Avec ton doigt je t'ai vu faire quelque chose. Vas-y refais le devant nous. Nan mais redis le bien fort tu as fait.

276. Ad : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 (*Elle montre deux oreilles imaginaires pour chaque lapin*).

277. E : Qu'est-ce qu'elle a fait à chaque fois Ag ? Qu'est-ce qu'elle a fait à chaque fois ?
278. Ag : Elle a compté.
279. E : Combien de fois elle a compté ?
280. Ag : Plusieurs... fois.
281. E : Ah bah moi jte demande pas... Jte demande de me dire exactement combien de fois elle a compté à chaque fois pour chaque tête.
282. Ag : Une seule fois ?
283. E : Recommence Ad. Vas-y. (A Ag) Regarde bien comment elle fait.
284. Ad : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14.
285. E : Combien elle compte à chaque fois ?
286. Ag : Quatorze.
287. E : Tu regardes pas bien son doigt. Recommence Ad...
288. Ad : 1 2
289. E : Vas moins vite... 1... 2...
290. Ad : 3... 4... 5... 6... 7... 8... 9... 10...
291. E : (A Sh) Toi tu regardes aussi. Donnez-moi les crayons là.
292. Ad : 11... 12... 13... 14.
293. E : Redonne-moi le crayon aussi H. Non redonne-moi le crayon j'ai pas parlé de l'ardoise. Pose-moi l'ardoise. (A Ag) Est-ce que tu as vu ce qu'elle faisait à chaque fois ? (Ag acquiesce) Combien de fois elle compte ?
294. Ag : Quatorze
295. E : Quatorze c'est ce qu'elle compte en tout Ag, quand elle fait ça regarde...

- |      |   |
|------|---|
| 296. | L : Elle compte deux oreilles par deux oreilles !   |
| 297. | E : Elle compte deux oreilles par deux oreilles... 1, 2, tu vois bien c'est ce qu'elle a fait avec son doigt : mon doigt il fait 1, 2. Ça fait deux fois. 3,4 deux fois pour deux oreilles. 5,6 deux fois. 7,8 deux fois. 9,10 deux fois. 11,12 deux fois. 13,14 deux fois. Est-ce que c'est ce que vous avez fait vous ? |

**Tableau 5 : Séance 1 activité 2 étape 3 mise en commun**

Ici, l'élève ne dessine pas la collection, elle l'a dans sa tête. Cette procédure nécessite donc de la part de l'élève une forte concentration, une bonne compréhension de la situation ainsi que la maîtrise du dénombrement. En effet, si elle se trompe, elle ne peut pas revenir en arrière puisqu'elle travaille sur des objets imaginaires et doit alors tout recommencer. Cette procédure oblige donc l'élève à utiliser ses connaissances sur le nombre sans aide. Nous pouvons donc qualifier cette procédure d'experte et il s'agit de réfléchir sur quel levier il est possible d'agir pour contraindre les élèves à se l'approprier.

Nous pensons qu'il est raisonnable de permettre aux élèves de s'approprier la situation et le problème posé en leur laissant au départ la possibilité de dessiner ou de manipuler du matériel (ici les différentes parties des lapins). Cependant, l'objectif est d'amener les élèves à utiliser la procédure experte décrite précédemment. Il est possible de les y amener par étapes en supprimant petit à petit le matériel à disposition jusqu'à ce que les élèves ne disposent plus de rien et soient obligés de recourir à la procédure experte. Il est également envisageable de faire varier le nombre de corps de lapins au départ ce qui rend la procédure experte plus simple à utiliser et donc plus accessible pour les élèves en difficultés. Il est évident que cela demande du temps et qu'il est nécessaire de confronter les élèves à de nombreuses situations de ce type pour qu'ils puissent s'approprier à leur rythme cette procédure.

Le choix du matériel laissé à disposition des élèves constitue donc une variable didactique sur laquelle l'enseignante peut jouer pour amener les élèves à utiliser la connaissance visée. C'est donc une condition grâce à laquelle l'utilisation des collections va favoriser ou non l'apprentissage du nombre comme représentation de la quantité chez des élèves de Grande-Section.

## Conclusion

En Grande-Section, la plupart des élèves sont rapidement capables de déterminer la quantité d'objets présents dans une collection donnée lorsque son cardinal est inférieur à dix. Cependant, des erreurs subsistent lorsque les élèves dénombrent une collection et ce d'autant plus lorsque le cardinal de cette collection est grand. Il s'agit donc pour l'enseignant d'entraîner les élèves à perfectionner cette capacité grâce à de nombreux entraînements. En effet, le fait que le nombre représente la quantité d'objets présents dans une collection et permette d'en garder la mémoire est un outil fondamental qui va servir aux élèves dans leur vie future et il est donc essentiel d'installer durablement cette connaissance. En outre, cela correspond tout à fait au travail effectué notamment au cycle des apprentissages premiers puisque les programmes officiels de 2008 ne déterminant pas d'horaires spécifiques pour chaque domaine, il est possible de prendre du temps pour installer les différentes connaissances.

Grâce à l'analyse de la deuxième situation, nous avons mis en évidence une condition indispensable à l'utilisation du nombre comme représentation de la quantité : pour que cette connaissance s'installe chez les élèves il faut que l'enseignant les oblige à répéter le dernier mot-nombre prononcé. Mais cela doit avoir du sens pour les élèves donc il est important que ce mot-nombre soit intégré dans une phrase répondant à une question posée. Nous avons également mis en évidence deux autres conditions ayant de l'influence sur l'utilisation du nombre comme représentation de la quantité : les procédures proposées ou non par l'enseignant et le matériel qu'il laisse ou non à la disposition de ses élèves.

Cependant, nous avons conscience des limites de ce travail. Nous n'avons pas pu approfondir l'analyse de la situation 1 ni explorer toutes les pistes relevées lors de la lecture des transcriptions des trois séances nécessaires à la mise en place de la deuxième situation par manque de temps ce qui nous a empêché de déterminer toutes les conditions répondant à notre problématique. De plus, les séances analysées ont été mises en place dans la classe de Grande-Section en fin d'année et nous pensons que cela a peut-être influencé les réactions des élèves face aux situations proposées. Certains élèves n'ont éprouvé aucune difficulté ce qui n'aurait sûrement pas été le cas en début d'année.

## Bibliographie

*Bulletin Officiel Hors-Série n°1.* (14 février 2002).

*Bulletin Officiel Hors-Série n°3.* (19 juin 2008).

Astolfi, J.-P. (1992). *L'Ecole pour apprendre.* ESF.

Baruk, S. (2003). *Comptes pour petits et grands, Volume 1.* Magnard.

Briand, J. (2007). *Quelles mathématiques à l'école maternelle?* Chalons en Champagne.

Briand, J. (2007). Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques, étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique. *RDM.*

Brissiaud, R. (1991). *Comment les enfants apprennent à calculer au-delà de Piaget et de la théorie des ensembles.* Retz.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, pp. 309-336.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble: La Pensée sauvage.

Document d'accompagnement des programmes. (2002). *Les mathématiques à l'Ecole primaire.*

Ermel. (2005). *GS, Cycle 2, Apprentissages numériques et résolution de problèmes.* Paris: Hatier.

Eysseric, P. (2008). Les mathématiques à l'école maternelle. *Animation pédagogique PIUFM.* Aix-Marseille.

Hersant, M. (2010). Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir en mathématiques: de l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations pour les classes ordinaires. *Note de synthèse des travaux (2001-2010)*, 21-76.

Reuchlin. (1983). *Psychologie.* Paris: PUF.

Valentin, D. (2005). *Découvrir le monde avec les mathématiques, Situations pour la grande section*. Paris: Hatier.

Vessiller, Y. (2000). Mathématiques en maternelle. *Quelles activités à caractère mathématique à l'école maternelle?* Chamonix: XXVIIème Colloque Inter-Irem.

## Résumé en français

Ce mémoire traite de l'apprentissage du nombre en maternelle et plus particulièrement de l'apprentissage du dénombrement au cycle des apprentissages premiers. Il a pour objectif de déterminer des conditions selon lesquelles l'utilisation des collections favorise l'apprentissage du nombre comme représentation de la quantité (cardinal de la collection) en Grande-Section. Il est composé d'une partie relatant des éléments de l'état des recherches portant sur l'apprentissage du nombre en maternelle puis d'une partie consacrée à l'analyse de deux situations d'apprentissage proposées par Dominique Valentin et mises en place dans une classe de Grande-Section par une enseignante expérimentée. L'analyse approfondie de la deuxième situation met en évidence des conditions grâce auxquelles l'utilisation des collections favorise l'apprentissage du nombre comme représentation de la quantité.

**Mots-clés :** collections, dénombrement, maternelle, mathématiques, nombre comme mémoire de la quantité.

## Résumé en anglais

This essays deals with the learning of numbers in primary school and more especially with the learning of the enumeration in the first learnings' cycle. It tries to determine conditions which facilitate the learning of numbers as memories of quantities (cardinal of collections) thanks to collections in year one. The first part is about elements of searches which deal with the learning of numbers in primary school. The second part concerns the analysis of two situations suggested by Dominique Valentin and set up in a year one by an expert teacher. The detailed analysis of the second situation talks about conditions which allow the learning of numbers as memories of quantities thanks to the use of collections.

**Mots-clés :** collections, enumeration, mathematics, number as memory of quantity, primary school.