HAL open science

Diagrammes de Young et élément de battage de l'algèbre de Hecke

Pierre Doyeux

To cite this version:

Pierre Doyeux. Diagrammes de Young et élément de battage de l'algèbre de Hecke. Physique mathématique [math-ph]. 2013. dumas-00968371

HAL Id: dumas-00968371

https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00968371v1

Submitted on 31 Mar 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

M2 P3TMA
Université Aix-Marseille
2012–2013

Diagrammes de Young et élément de battage de l'algèbre de Hecke

Pierre Doyeux

Rapport du stage effectué au Centre de Physique Théorique
du 04 mars au 30 juin 2013

sous la direction de
Oleg Ogievetsky

Résumé

Les représentations de l'algèbre de Hecke $H_n(q)$ pour q générique sont indexées par les diagrammes de Young. Le polynôme caractéristique de l'élément de battage $\mathrm{III}_{1,n-1}$ est connu dans $H_n(q)$. En revanche, il reste à déterminer la contribution de chaque représentation irréductible. Dans ce rapport, les valeurs propres et leur multiplicité sont calculées pour les représentations associées aux diagrammes de type « crochet ».

Centre de Physique Théorique (UMR 7332) Luminy – Case 907, 13288 Marseille Cedex 9
www.cpt.univ-mrs.fr

Remerciements

Mon stage s'est déroulé au Centre de Physique Théorie de Luminy. Je remercie Thierry Martin pour m'y avoir accueilli. Je tiens également à remercier Oleg Ogievetsky, non seulement pour avoir accepté de me superviser pendant ce stage, mais aussi pour sa grande disponibilité et sa patience ! Je remercie Robert Coquereaux pour avoir bien voulu être mon rapporteur. Je tiens également à saluer toutes les personnes que j'ai pu côtoyer pendant ce stage, et plus généralement pendant cette année de M2. Enfin, je remercie ma famille et mes amis pour leur soutien.

Table des matières

1 Notations **4**

2 Introduction **4**

3 Groupes de Coxeter, groupe symétrique et algèbre de Hecke **5**
3.1 Groupes de Coxeter et groupe symétrique 5
3.2 Algèbre de Hecke 5
3.3 Représentation de S_n et diagrammes de Young 6
3.4 Elément de battage 9

4 Représentation de Burau de l'algèbre de Hecke **9**
4.1 Représentations $\rho_{P,n}$ et $\rho_{B,n}$ 10
4.2 Trace du produit $\sigma_1 \dots \sigma_j$ dans $\rho_{B,n}$ 10
4.3 Trace de $Ш_{1,n-1}$ dans $\rho_{B,n}$ 11

5 Représentations de type crochet **12**
5.1 Représentation $\rho_{k,l}$ 12
5.2 Trace du produit $\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}$ dans $\rho_{k,l}$ 14
5.2.1 Première méthode 14
5.2.2 Seconde méthode 16
5.3 Trace de $Ш_{1,n-1}$ dans $\rho_{k,l}$ 19
5.4 Multiplicités et coefficients binomiaux 20
5.5 Une autre relation de récurrence pour $\rho_{k,l}(Ш_{1,n-1})$ 22

6 Conclustion **23**

Références **23**

1 Notations

- $(n)_q := \dfrac{q^{2n}-1}{q^2-1}$
- $[n]_q := \dfrac{q^n - q^{-n}}{q-q^{-1}} = q^{n-1}(n)_q$
- $\mathbb{1}_n$: Matrice identité de taille $n \times n$
- $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_i\}$: Partition ou son diagramme
- $\{l_k\} = \{\underbrace{l, \ldots, l}_{\text{k fois}}\}$
- ρ_λ : Représentation associée à un diagramme λ
- Tr_λ : Trace dans la représentation ρ_λ
- $\rho_{P,n}$: Représentation permutation du groupe S_n de dimension n
- $\rho_{B,n}$: Représentation de Burau
- $\mathrm{Tr}_{B,n}$: Trace dans la représentation $\rho_{B,n}$
- $\rho_{k,l}$: Représentation associée à un diagramme de type crochet
- $\mathrm{Tr}_{k,l}$: Trace dans la représentation $\rho_{k,l}$
- Spec_λ : Spectre dans la représentation ρ_λ

2 Introduction

Les éléments de battage trouvent des applications dans de nombreux domaines tels que les groupes quantiques [**?**], les bialgèbres de type 1 [**?**], le calcul différentiel en géométrie non commutative [**?**], [**?**], les problèmes de rangement (d'une bibliothèque par exemple) [**?**] *etc.* On s'intéresse en particulier à l'élément $Ш_{1,n-1}$ de l'algèbre de Hecke $H_n(q)$. Pour q générique, les représentations irréductibles de cette algèbre sont indexées par les diagrammes de Young. Le polynôme caractéristique de $Ш_{1,n-1}$ est connu pour $H_n(q)$ (voir [**?**]), mais pas pour chacun des diagrammes. Dans ce rapport, après avoir introduit quelques notions sur les représentations irréductibles de l'algèbre de Hecke, on détermine le spectre et les multiplicités des valeurs propres de $Ш_{1,n-1}$ pour les diagrammes de type « crochet ». Pour ce faire, on calcule la trace de l'élément de battage dans ces représentations. En effet, les valeurs propres sont des « q-nombres », c'est-à-dire des polynômes en q linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$. La trace de $Ш_{1,n-1}$ est une combinaison linéaire de q-nombres, et leur coefficient est égal à leur multiplicité (sauf pour le cas de la valeur propre 0 qui est discuté à la fin de ce document).

3 Groupes de Coxeter, groupe symétrique et algèbre de Hecke

Cette section présente le cadre mathématique dans lequel les travaux ont été effectués. Après une brève introduction des groupes de Coxeter et des algèbres de Hecke de manière générale, on décrira en particulier l'élément de battage de l'algèbre de Hecke associée au groupe symétrique. Pour une description plus approfondie, voir [**?**].

3.1 Groupes de Coxeter et groupe symétrique

Soit $M = \{ \, ||m_{ij}|| \, \}_{i,j \in I}$ une matrice de Coxeter, c'est-à-dire une matrice symétrique telle que $m_{ii} = 1$, et $m_{ij} \geq 2$ pour $i \neq j$, avec m_{ij} entiers. Cette matrice porte l'information du code génétique d'un groupe de Coxeter noté $\mathcal{W}(M)$.

Définition 3.1.1. Le groupe de Coxeter $\mathcal{W}(M)$ est engendré par les éléments s_i, $i \in I$, et les relations définissantes

$$(s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \ .$$

Définition 3.1.2. Soit $E = \{1, \ldots, n\}$. L'ensemble des bijections de E, muni de la loi de composition des applications, constitue le groupe symétrique d'ordre n, noté S_n. Les éléments de S_n sont appelés permutations.

Exemple 3.1.1. Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$, auquel on applique la permutation (142), alors $(142)E = \{4, 1, 3, 2\}$, ou encore $(13)E = \{3, 2, 1, 4\}$, et la composition de ces permutations donne $(13)(142)E = \{4, 3, 1, 2\}$.

Le groupe S_n est engendré par les transpositions de deux entiers successifs $s_i = (i, i+1)$, $i \in I$.

Définition 3.1.3. Le code génétique du groupe symétrique S_n par rapport aux générateurs s_i est

$$S_n = \langle \ \{s_i\} \mid s_i^2 = 1 \ , \ \begin{cases} (s_i s_j)^2 = 1 & \text{si } |i-j| > 1 \\ (s_i s_{i+1})^3 = 1 \end{cases} \ \rangle \ .$$

C'est donc un groupe de Coxeter. On notera M_n la matrice de Coxeter associée.

3.2 Algèbre de Hecke

Définition 3.2.1. A chaque matrice de Coxeter M correspond une $\mathbb{C}$-algèbre, appelée algèbre de Hecke, dépendant d'un paramètre de déformation inversible $q \in \mathbb{C}^\times$. On note cette algèbre $\mathcal{H}(M, q)$.

Dans le cas où $M = M_n$, on écrit $\mathcal{H}(M_n, q) = H_n(q)$ l'algèbre de Hecke associée au groupe symétrique d'ordre n :

$$H_n(q) = \langle \ \{\sigma_i\} \mid \sigma_i^2 = 1 + (q - q^{-1})\sigma_i \ , \ \begin{cases} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i-j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \end{cases} \ \rangle \ .$$

Remarque 3.2.1. Lorsque $q = 1$, alors $\sigma_i^2 = 1$, donc $H_n(1)$ correspond à l'algèbre de groupe de S_n : $H_n(1) = \mathbb{C}S_n$. L'aglèbre $H_n(q)$ pour $q \neq 1$ est une déformation de $\mathbb{C}S_n$. C'est une déformation plate, ce qui signifie $\dim(H_n(q)) = \dim(\mathbb{C}S_n) = n!$.

La théorie des représentations du groupe symétrique s'applique également pour les représentations de $H_n(q)$ pour q générique.

3.3 Représentation de S_n et diagrammes de Young

Propriété 3.3.1. Pour le groupe symétrique S_n, les classes de conjugaisons sont indexées par les différentes structures cycliques des permutations de S_n. De plus, ces structures cycliques sont en bijection avec les partitions de l'entier n.

Si $\lambda \vdash n$ est une partition de n, alors on écrit $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$, où $\lambda_i \in \mathbb{N}$ avec $i = 1, \ldots, k$, telle que $\sum_i \lambda_i = n$, et où les λ_i sont ordonnés tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k$. La fonction de partition $p(n)$ donne le nombre de façons différentes de partitionner l'entier n. On note C_λ, la classe de conjugaison de S_n correspondant à $\lambda \vdash n$.

Les représentations irréductibles de S_n sont également indexées par les partitions. On les note $(V_\lambda, \rho_\lambda)$ où V_λ est un espace vectoriel et ρ_λ un morphisme $\rho_\lambda : S_n \to \mathrm{End}(V_\lambda)$. On a l'isomorphisme des algèbres

$$\mathbb{C}S_n \cong \bigoplus_{\lambda=1}^{p(n)} \mathrm{End}(V_\lambda) \ . \tag{1}$$

Par conséquent,

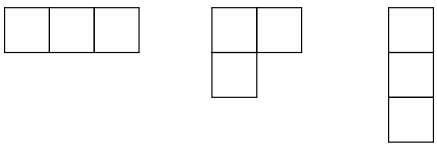
$$\dim(H_n(q)) = \dim(\mathbb{C}S_n) = \sum_{\lambda=1}^{p(n)} \dim(V_\lambda)^2 = n! \ . \tag{2}$$

Exemple 3.3.1. Cet exemple avec S_3 résume les propriétés énoncées jusqu'ici. Le nombre entier 3 se partitionne de trois façons différentes ($p(3) = 3$). Ces partitions sont $\{3\}$, $\{2, 1\}$ et $\{1_3\}$. Cela signifie qu'il existe trois classes de conjugaisons $C_{\{3\}}$, $C_{\{2,1\}}$ et $C_{\{1_3\}}$, ainsi que trois représentations irréductibles $(V_{\{3\}}, \rho_{\{3\}})$, $(V_{\{2,1\}}, \rho_{\{2,1\}})$ et $(V_{\{1_3\}}, \rho_{\{1_3\}})$. Elles ont pour dimensions respectives $\dim(V_{\{3\}}) = 1$, $\dim(V_{\{2,1\}}) = 2$, $\dim(V_{\{1_3\}}) = 1$, et d'après les formules (**??**) et (**??**),

$$\mathbb{C}S_3 = \mathrm{End}(V_{\{3\}}) \oplus \mathrm{End}(V_{\{2,1\}}) \oplus \mathrm{End}(V_{\{1_3\}}) \quad , \quad \dim(\mathbb{C}S_3) = \dim(H_3(q)) = 1^2 + 2^2 + 1^2 = 6 = 3! \ .$$

Les diagrammes de Young représentent les partitions. Pour les dessiner, on associe λ_i cases à la ligne i.

Exemple 3.3.2. Pour garder l'exemple de S_3, les diagrammes des partitions sont



$$\{3\} \quad , \quad \{2, 1\} \quad , \quad \{1_3\} \ .$$

En fixant le point n de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, on a $S_{n-1} \subset S_n$, d'où la chaîne d'inclusions $S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_n$. Les règles de branchements des représentations correspondant à cette chaîne sont décrites par le diagramme de Bratteli (voir [**?**] et figure **??**).

On rappelle une formule pour la dimension de la représentation associée à un diagramme quelconque. Pour cela, on introduit la notion de crochet.

Définition 3.3.1. Le crochet d'une case est l'ensemble des cases situées en-dessous et à droite de la case considérée, en comptant la case elle-même. La longueur du crochet, notée $h \in \mathbb{N}$, est le nombre de cases contenues dans le crochet.

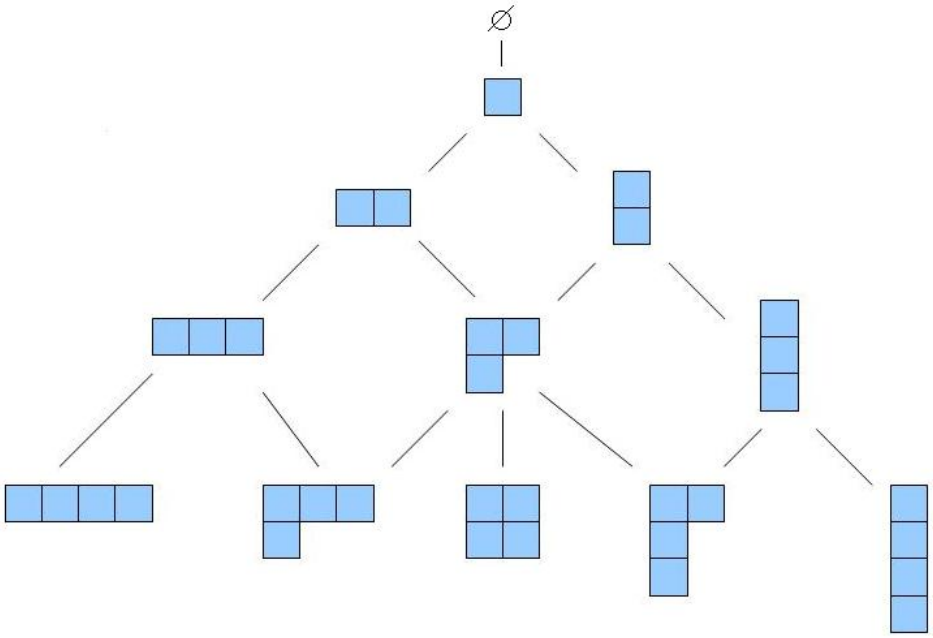


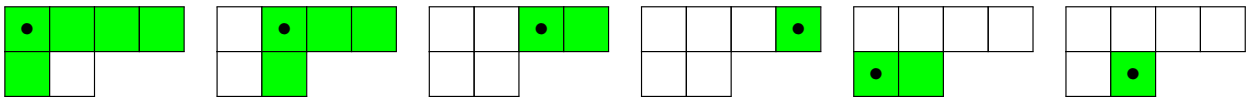
FIGURE 1 – Diagramme de Bratteli jusqu'à $n = 4$.

Propriété 3.3.2. La dimension d'une représentation est donnée par

$$\dim(V_\lambda) = \frac{n!}{\prod_{l=1}^{n} h_l} \tag{3}$$

où n est le nombre total de cases du diagramme et h_l la longueur du crochet de la case l (l parcourt toutes les cases).

Exemple 3.3.3. Pour le diagramme $\{4, 2\}$, les crochets sont



$h_1 = 5$ $h_2 = 4$ $h_3 = 2$ $h_4 = 1$ $h_5 = 2$ $h_6 = 1$

d'où

$$\dim(V_{\{4,2\}}) = \frac{6\ !}{5 \times 4 \times 2 \times 2} = 9\ .$$

Le nombre $\dim(V_\lambda)$ est égal au nombre de tableaux standard de forme λ.

Définition 3.3.2. Les tableaux de Young sont des diagrammes de Young dont les cases sont remplies par des nombres entiers. Un tableau de Young standard est un tableau de Young dont les entiers appartiennent à l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, n étant le nombre de cases du diagrammes ; un nombre ne peut apparaître que dans une seule case ; de plus, le tableau vérifie la condition suivante : quelle que soit une case, le nombre qu'elle contient doit être supérieur aux nombres contenus dans la case de gauche et dans celle du dessus.

Exemple 3.3.4. Parmi les tableaux de Young suivants,

$$X_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}\ , \quad X_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}\ , \quad X_3 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline\end{array}\ , \quad X_4 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array}\ ,$$

X_1 et X_4 sont des tableaux standard.

Propriété 3.3.3. Les tableaux standard de la forme λ peuvent indexer une base de la représentation ρ_λ. Pour écrire explicitement l'action des générateurs de $H_n(q)$ sur cette base, on introduit la notion de contenu d'une case.

Définition 3.3.3. Dans un tableau de Young, le contenu de la case contenant l'entier i, noté $c(i) \in \mathbb{N}$, est

$$c(i) = \text{colonne}(i) - \text{ligne}(i)\ . \tag{4}$$

Exemple 3.3.5. Dans le tableaux $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$, les contenus sont $c(1) = 0$, $c(2) = -1$, et $c(3) = 1$.

Propriété 3.3.4. Soit $\{X_1, \ldots, X_d\}$ l'ensemble des tableaux standard de forme λ indexant la base $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_d)$ de la représentation irréductible V_λ. L'action des générateurs de $H_n(q)$ sur cette base est

$$\sigma_i \mathcal{X}_k = \frac{(q-q^{-1})q^{2c(i+1|X_k)}}{q^{2c(i+1|X_k)} - q^{2c(i|X_k)}}\mathcal{X}_k + \frac{q^{1+2c(i+1|X_k)} - q^{-1+2c(i|X_k)}}{q^{2c(i+1|X_k)} - q^{2c(i|X_k)}}\mathcal{X}_k^{s_i} \tag{5}$$

où $c(i|X_k)$ est le contenu $c(i)$ dans le tableau standard X_k, et $\mathcal{X}_k^{s_i}$ est le vecteur associé au tableau obtenu par transposition des entiers i et $i+1$ à partir du tableau X_k. Si $X_k^{s_i}$ n'est pas standard, alors $\mathcal{X}_k^{s_i} = 0$.

Exemple 3.3.6. Soit le diagramme $\{2,1\}$ et $(V_{\{2,1\}}, \rho_{\{2,1\}})$ la représentation irréductible de $H_3(q)$ associée. D'après la formule (**??**), $V_{\{2,1\}}$ est de dimension 2. Soit $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ une base de $V_{\{2,1\}}$. Les vecteurs $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ sont associés aux tableaux standard

$$X_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\ , \quad X_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\ .$$

L'action des matrices des générateurs de $H_3(q)$ sur la base $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ est

$$\begin{aligned}\rho_{2,1}(\sigma_1)\mathcal{X}_1 &= \frac{(q-q^{-1})q^{2c(2|X_1)}}{q^{2c(2|X_1)} - q^{2c(1|X_1)}}\mathcal{X}_1 + 0 \\ &= \frac{q^2(q-q^{-1})}{q(q-q^{-1})}\mathcal{X}_1 = q\mathcal{X}_1\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_{2,1}(\sigma_1)\mathcal{X}_2 &= \frac{(q-q^{-1})q^{2c(2|X_2)}}{q^{2c(2|X_2)} - q^{2c(1|X_2)}}\mathcal{X}_2 + 0 \\ &= -\frac{q^{-2}(q-q^{-1})}{q^{-1}(q-q^{-1})}\mathcal{X}_2 = -q^{-1}\mathcal{X}_2\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_{2,1}(\sigma_2)\mathcal{X}_1 &= \frac{(q-q^{-1})q^{2c(3|X_1)}}{q^{2c(3|X_1)} - q^{2c(2|X_1)}}\mathcal{X}_1 + \frac{q^{1+2c(3|X_1)} - q^{-1+2c(2|X_1)}}{q^{2c(3|X_1)} - q^{2c(2|X_1)}}\mathcal{X}_2 \\ &= \frac{q^{-2}(q-q^{-1})}{q^{-2}-q^2}\mathcal{X}_1 + \frac{q^{-1}-q}{q^{-2}-q^2}\mathcal{X}_2 = -\frac{q^{-2}}{[2]_q}\mathcal{X}_1 + \frac{1}{[2]_q}\mathcal{X}_2\ ,\end{aligned}$$

$$\rho_{2,1}(\sigma_2)\mathcal{X}_2 = \frac{(q-q^{-1})q^{2c(3|X_2)}}{q^{2c(3|X_2)}-q^{2c(2|X_2)}}\mathcal{X}_2 + \frac{q^{1+2c(3|X_2)}-q^{-1+2c(2|X_2)}}{q^{2c(3|X_2)}-q^{2c(2|X_2)}}\mathcal{X}_1$$
$$= -\frac{q^2(q-q^{-1})}{q^2-q^{-2}}\mathcal{X}_2 + \frac{q^3-q^{-3}}{q^2-q^{-2}}\mathcal{X}_1 = \frac{q^2}{[2]_q}\mathcal{X}_2 + \frac{[3]_q}{[2]_q}\mathcal{X}_1 \ .$$

Les matrices des générateurs s'écrivent

$$\rho_{2,1}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{pmatrix} \quad , \quad \rho_{2,1}(\sigma_2) = \frac{1}{[2]_q}\begin{pmatrix} -q^{-2} & 1 \\ [3]_q & q^2 \end{pmatrix}$$

et vérifient les relations $\rho_{2,1}(\sigma_1)\rho_{2,1}(\sigma_2)\rho_{2,1}(\sigma_1) = \rho_{2,1}(\sigma_2)\rho_{2,1}(\sigma_1)\rho_{2,1}(\sigma_2)$ et $\rho_{2,1}(\sigma_i)^2 = \mathbb{1}_2 + (q-q^{-1})\rho_{2,1}(\sigma_i)$ pour $i = 1, 2$.

3.4 Elément de battage

Les éléments de battage sont des éléments particuliers du groupe symétrique. Dans la suite, on va s'intéresser à l'élément de battage q-déformé, appartenant à l'algèbre de Hecke.

Définition 3.4.1. L'élément de battage q-déformé $Ш_{1,n-1} \in H_n(q)$ est défini par

$$Ш_{1,n-1} := 1 + q\sigma_1 + q^2\sigma_1\sigma_2 + \ldots + q^{n-1}\sigma_1\ldots\sigma_{n-1} \tag{6}$$

où l'entier $n \geq 1$, et $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}\}$ sont les générateurs de $H_n(q)$.

Exemple 3.4.1. Quelques exemples pour différentes valeurs de n :

$$Ш_{1,0} = 1 \quad , \quad Ш_{1,1} = 1 + q\sigma_1 \quad , \quad Ш_{1,2} = 1 + q\sigma_1 + q^2\sigma_1\sigma_2 \ .$$

Dans [**?**], le polynôme caractéristique de l'élément de battage est déterminé pour le groupe symétrique, puis il est généralisé dans [**?**] pour l'algèbre de Hecke. Les valeurs propres sont de la forme $(i)_q$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-2, n$. Les multiplicités ont été déterminées dans [**?**] pour S_n, et dans [**?**] pour $H_n(q)$. L'existence de la q-déformation offre une méthode pour calculer les multiplicités en déterminant la trace de la matrice de $Ш_{1,n-1} \in H_n(q)$ dans l'espace de représentation approprié.

Propriété 3.4.1. La trace de l'opérateur de multiplication à gauche de l'élément de battage dans $H_n(q)$, noté $L_{Ш_{1,n-1}}$, est

$$\mathrm{Tr}_{H_n}(L_{Ш_{1,n-1}}) = \sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{(-1)^j}{j!}(i)_q \ . \tag{7}$$

La propriété **??** donne les valeurs propres (et leur multiplicité) de l'élément de battage dans $H_n(q)$, mais pas la contribution de chaque représentation irréductible (i.e. de chaque diagramme de Young). Les recherches effectuées pendant le stage ont porté sur la détermination de ces contributions pour différents types de diagrammes, en utilisant la même méthode que [**?**], qui consiste à calculer la trace de $Ш_{1,n-1}$ dans la représentation associée à un diagramme.

4 Représentation de Burau de l'algèbre de Hecke

Pour commencer, on s'intéresse à la représentation de « Burau » (voir [**?**]). En termes de partitions, on a

$$\rho_{B,n} = \rho_{\{n\}} \oplus \rho_{\{n-1,1\}} \ .$$

4.1 Représentations $\rho_{P,n}$ et $\rho_{B,n}$

Définition 4.1.1. Soit V_n un espace vectoriel de dimension n, et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de V_n. Soit $\rho_{P,n} : S_n \to \mathrm{End}(V_n)$ un morphisme tel que l'action des générateurs de S_n sur $(e_1, \dots, e_n)$ est

$$\rho_{P,n}(s_i)e_i = e_{i+1} \quad , \quad \rho_{P,n}(s_i)e_{i+1} = e_i \quad , \quad \rho_{P,n}(s_i)e_j = e_j \quad , \qquad \text{si } j \neq i, i+1.$$

On appelle $\rho_{P,n}$ la représentation « permutation » de S_n, car S_n permute les vecteurs de base. Dans cette représentation, les générateurs de S_n ont pour structure

$$\rho_{P,n}(s_i) = \mathbb{1}_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{1}_{n-1-i} \ .$$

Cette représentation admet une q-déformation. C'est la représentation de Burau, pour laquelle l'action des matrices des générateurs sur $(e_1, \dots, e_n)$ est

$$\rho_{B,n}(\sigma_i)e_i = (q - q^{-1})e_i + e_{i+1} \quad , \quad \rho_{B,n}(\sigma_i)e_{i+1} = e_i \quad , \quad \rho_{B,n}(\sigma_i)e_j = qe_j \quad , \quad \text{si } j \neq i, i+1.$$

Les matrices des générateurs de $H_n(q)$ ont pour structure

$$\rho_{B,n}(\sigma_i) = q\mathbb{1}_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} q - q^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus q\mathbb{1}_{n-1-i} \ .$$

Exemple 4.1.1. Les matrices des générateurs de $H_4(q)$ sont

$$\rho_{B,4}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} q - q^{-1} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \quad \rho_{B,4}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \quad \rho_{B,4}(\sigma_3) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q - q^{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

4.2 Trace du produit $\sigma_1 \dots \sigma_j$ dans $\rho_{B,n}$

Lemme 4.2.1. *Dans la représentation de Burau de $H_n(q)$, la trace du produit des générateurs est*

$$Tr_{B,n}(\sigma_1 \dots \sigma_j) = (n - j)q^j - q^{j-2} \ . \tag{8}$$

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\rho_{B,n}$. Il faut déterminer $\rho_{B,n}(\sigma_1 \dots \sigma_j)e_k$, avec $k = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, n-1$. D'après la partie **??**, on calcule l'action du produit des générateurs sur la base :

si $1 \leq k \leq j$,

$$\begin{aligned}
\rho_{B,n}(\sigma_1 \dots \sigma_k \dots \sigma_j)e_k &= \rho_{B,n}(\sigma_1 \dots \sigma_k)\rho_{B,n}(\sigma_{k+1} \dots \sigma_j)e_k \\
&= \rho_{B,n}(\sigma_1 \dots \sigma_k)q^{j-k}e_k \\
&= q^{j-k}\rho_{B,n}(\sigma_1 \dots \sigma_{k-1})\rho_{B,n}(\sigma_k)e_k \\
&= q^{j-k}\rho_{B,n}(\sigma_1 \dots \sigma_{k-1}) \left((q - q^{-1})e_k + e_{k+1}\right) \\
&= \dots = \underline{q^{j-k}(q - q^{-1})e_1} + q^{j-1}e_{k+1}
\end{aligned}$$

le terme souligné participe à la trace lorsque $k = 1$;

si $k = j + 1$,

$$\rho_{B,n}(\sigma_1 \dots \sigma_j)e_k = \rho_{B,n}(\sigma_1 \dots \sigma_{k-1})e_k = \rho_{B,n}(\sigma_1 \dots \sigma_{k-2})e_{k-1} = \dots = e_1$$

or $k = j + 1 \Rightarrow k > 1$, donc ce terme ne participe pas à la trace ;

si $j + 1 < k \leq n$,

$$\rho_{B,n}(\sigma_1 \dots \sigma_j)e_k = \rho_{B,n}(\sigma_1 \ \dots \sigma_{j-1})qe_k = \dots = q^j e_k$$

ce terme participe à la trace pour $n - j - 1 \leq k \leq n$.

Finalement, en unifiant les différents cas

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{B,n}(\sigma_1 \dots \sigma_j) &= q^{j-1}(q - q^{-1}) + (n - j - 1)q^j \\ &= (n - j)q^j - q^{j-2} \ . \end{aligned}$$

□

4.3 Trace de $Ш_{1,n-1}$ dans $\rho_{B,n}$

Proposition 4.3.1. *Dans la représentation de Burau, le spectre de la matrice de l'élément de battage est*

$$Spec_{B,n}(Ш_{1,n-1}) = \{0, (1)_q, (2)_q, \dots, (n-2)_q, (n)_q\} \ . \tag{9}$$

et les multiplicités sont toutes égales à 1.

Démonstration. D'après la formule (**??**), la matrice de l'élément de battage dans la représentation de Burau de $H_n(q)$ est

$$\rho_{B,n}(Ш_{1,n-1}) = \mathbb{1}_n + \sum_{j=1}^{n-1} q^j \rho_{B,n}(\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_j)$$

d'où

$$\mathrm{Tr}_{B,n}(Ш_{1,n-1}) = \mathrm{Tr}_{B,n}(\mathbb{1}_n) + \sum_{j=1}^{n-1} q^j \mathrm{Tr}_{B,n}(\rho_{B,n}(\sigma_1 \dots \sigma_j)) \ . \tag{10}$$

Disposant à présent de $\mathrm{Tr}_{B,n}(\rho_{B,n}(\sigma_1 \dots \sigma_j))$, on remplace son expression dans l'équation (**??**)

pour calculer la trace de $\rho_{B,n}(Ш_{1,n-1})$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{B,n}(Ш_{1,n-1}) &= \mathrm{Tr}_{B,n}(\mathbb{1}_n) + \sum_{j=1}^{n-1} q^j \left((n-j)q^j - q^{j-2}\right) = n + \sum_{j=1}^{n-1} q^{2j}(n-j) - \sum_{j=1}^{n-1} q^{2j-2} \\
&= n + q^2(n-1) + q^4(n-2) + \ldots + q^{2(n-1)} - \sum_{j'=0}^{n-2} q^{2j'} \\
&= (n-1) + q^2(n-2) + q^4(n-3) + \ldots + \sum_{j=0}^{n-1} q^{2j} - \sum_{j=0}^{n-2} q^{2j} \\
&= (n-2) + q^2(n-3) + q^4(n-4) + \ldots + \sum_{j=0}^{n-2} q^{2j} + \sum_{j=0}^{n-1} q^{2j} - \sum_{j=0}^{n-2} q^{2j} \\
&\vdots \\
&= 1 + \sum_{j=0}^{1} q^{2j} + \sum_{j=0}^{2} q^{2j} + \sum_{j=0}^{3} q^{2j} + \ldots + \sum_{j=0}^{n-2} q^{2j} + \sum_{j=0}^{n-1} q^{2j} - \sum_{j=0}^{n-2} q^{2j} \\
&= 1 + (2)_q + (3)_q + \ldots + (n-1)_q + (n)_q - (n-1)_q \\
&= (n)_q + \sum_{j=0}^{n-3} (j+1)_q \ .
\end{aligned}$$

Donc on a bien le spectre donné par (**??**) (toutes les multiplicités sont égales à 1). □

Corollaire 4.3.1. *Pour les diagrammes $\{n\}$ et $\{n-1,1\}$, le spectre de l'élément de battage $Ш_{1,n-1} \in H_n(q)$ est*

$$\begin{cases} Spec_{\{n\}}(Ш_{1,n-1}) = \{(n)_q\} \\ Spec_{\{n-1,1\}}(Ш_{1,n-1}) = \{0, (1)_q, (2)_q, \ldots, (n-2)_q\} \ . \end{cases}$$

5 Représentations de type crochet

5.1 Représentation $\rho_{k,l}$

Dans cette section, on va déterminer le spectre (avec les multiplicités) de $Ш_{1,n-1}$ pour les représentations associées aux diagrammes de type « crochet ». Ce sont les diagrammes $\lambda_{k,l} = \{1+k, 1_l\}$ où $n = 1+k+l$. D'après la formule (**??**), la dimension de la représentation associée est

$$\dim(V_{k,l}) = \frac{n!}{n \times k! \times l!} = \frac{(n-1)!}{k! \times l!} = \binom{n-1}{l} = \binom{l+k}{l} \ .$$

On travaille dans la base indexée par les tableaux standard présentée précédemment. Ces tableaux ont la forme

$$\begin{array}{c} \boxed{1} \cdots \boxed{} \\ \boxed{i_1} \\ \boxed{i_2} \\ \vdots \\ \boxed{i_l} \end{array}$$

avec $I = \{i_1, \ldots, i_l\}$ tel que $i_1 < i_2 < \ldots < i_l$. L'ensemble I détermine un tableau standard et $\mathcal{X}_I$ est un vecteur de base de la représentation. L'action des générateurs de $H_n(q)$ sur les vecteurs de base est

$$\rho_{k,l}(\sigma_p)\mathcal{X}_I = q\mathcal{X}_I \qquad \text{si } p, p+1 \notin I \ ,$$

$$\rho_{k,l}(\sigma_p)\mathcal{X}_I = \frac{-q^{-p}}{[p]_q}\mathcal{X}_I + \frac{[p-1]_q}{[p]_q}\mathcal{X}_I^{s_p} \qquad \text{si } p \notin I, p+1 \in I \ ,$$

$$\rho_{k,l}(\sigma_p)\mathcal{X}_I = \frac{q^p}{[p]_q}\mathcal{X}_I + \frac{[p+1]_q}{[p]_q}\mathcal{X}_I^{s_p} \qquad \text{si } p \in I, p+1 \notin I \ ,$$

$$\rho_{k,l}(\sigma_p)\mathcal{X}_I = -q^{-1}\mathcal{X}_I \qquad \text{si } p, p+1 \in I \ .$$

Exemple 5.1.1. La représentation de l'exemple **??** est de type crochet (c'est le diagramme $\lambda_{1,1}$). Vérifions que les formules ci-dessus donnent bien le même résultat.

Pour le tableau $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$, on a $I = \{2\}$ donc on appelle ce tableau X_2 et $\mathcal{X}_2$ le vecteur correspondant.

$$X_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad , \quad X_3 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \ ,$$

l'action des générateurs est

$$\begin{cases} \rho_{1,1}(\sigma_1)\mathcal{X}_2 = -q^{-1}\mathcal{X}_2 \ , \\ \rho_{1,1}(\sigma_1)\mathcal{X}_3 = q\mathcal{X}_3 \ , \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_{1,1}(\sigma_2)\mathcal{X}_2 = \dfrac{q^2}{[2]_q}\mathcal{X}_2 + \dfrac{[3]_q}{[2]_q}\mathcal{X}_3 \ , \\ \rho_{1,1}(\sigma_2)\mathcal{X}_3 = \dfrac{-q^{-2}}{[2]_q}\mathcal{X}_3 + \dfrac{1}{[2]_q}\mathcal{X}_2 \ , \end{cases}$$

d'où les matrices

$$\rho_{1,1}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -q^{-1} & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \ , \qquad \rho_{1,1}(\sigma_2) = \frac{1}{[2]_q}\begin{pmatrix} q^2 & [3]_q \\ 1 & -q^{-2} \end{pmatrix} \ ,$$

qui sont identiques (à une transposition des vecteurs de base près) à celles trouvées dans l'exemple **??**.

Propriété 5.1.1. Si l'on restreint $\rho_{k,l}$ à $H_{n-1}(q)$, d'après le diagramme de Bratteli,

$$\rho_{k,l}|_{H_{n-1}(q)} = \rho_{k-1,l} \oplus \rho_{k,l-1} \ .$$

Dans la représentation $\rho_{k,l}$, on a

$$\rho_{k,l}(\text{Ш}_{1,n-1}) = \rho_{k-1,l}(\text{Ш}_{1,n-2}) + \rho_{k,l-1}(\text{Ш}_{1,n-2}) + q^{n-1}\rho_{k,l}(\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1}) \ ,$$

d'où

$$\text{Tr}_{k,l}(\text{Ш}_{1,n-1}) = \text{Tr}_{k-1,l}(\text{Ш}_{1,n-2}) + \text{Tr}_{k,l-1}(\text{Ш}_{1,n-2}) + q^{n-1}\text{Tr}_{k,l}(\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1}) \ . \tag{11}$$

On veut déterminer $\text{Tr}_{k,l}(\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1})$. On va le calculer de deux façons différentes.

5.2 Trace du produit $\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}$ dans $\rho_{k,l}$

5.2.1 Première méthode

On calcule directement $\mathrm{Tr}_{k,l}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})$. On rappelle que $I = \{i_1, \dots, i_l\}$ détermine un tableau de type crochet de $n = l + k + 1$ cases.
Si $n \notin I$,

$$\begin{cases} \text{si } n-1 \notin I,\ \rho_{k,l}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})\mathcal{X}_I = \rho_{k,l}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-2}) q \mathcal{X}_I \ , & (12) \\ \text{si } n-1 \in I,\ \rho_{k,l}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})\mathcal{X}_I = \rho_{k,l}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-2}) \left(\dfrac{q^{n-1}}{[n-1]_q} \mathcal{X}_I + \dfrac{[n]_q}{[n-1]_q} \mathcal{X}_I^{s_{n-1}} \right) \ . & (13) \end{cases}$$

Si $n \in I$,

$$\begin{cases} \text{si } n-1 \notin I,\ \rho_{k,l}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})\mathcal{X}_I = \rho_{k,l}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-2}) \left(-\dfrac{q^{-(n-1)}}{[n-1]_q} \mathcal{X}_I + \dfrac{[n-2]_q}{[n-1]_q} \mathcal{X}_I^{s_{n-1}} \right) \ , & (14) \\ \text{si } n-1 \in I,\ \rho_{k,l}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})\mathcal{X}_I = \rho_{k,l}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-2})(-q^{-1}) \mathcal{X}_I \ . & (15) \end{cases}$$

On désigne par $\alpha_{n,l}$ (resp. $\beta_{n,l}$) la contribution à la trace de $\rho_{k,l}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})$ lorsque $n \notin I$ (resp. $n \in I$). Dans l'équation (**??**), $n \in s_{n-1}I$, donc $\rho_{k,l}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-2})\mathcal{X}_I^{s_{n-1}}$ est une combinaison linéaire faisant intervenir des vecteurs $\mathcal{X}_{I'}$ tels que $n \in I'$, donc la contribution de ce terme à la trace est nulle. Dans l'équation (**??**), $n \notin s_{n-1}I$, donc $\rho_{k,l}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})\mathcal{X}_I^{s_{n-1}}$ est une combinaison linéaire de vecteurs $\mathcal{X}_{I''}$ tels que $n \notin I''$, donc ce terme ne contribue pas à la trace. Les actions de $\rho_{k,l}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})$ sur $\mathcal{X}_I$ calculées ci-dessus donnent les relations de récurrence suivantes (voir figure (**??**)),

$$\begin{cases} \alpha_{n,l} = q\alpha_{n-1,l} + \dfrac{q^{n-1}}{[n-1]_q} \beta_{n-1,l} \ , & (16) \\ \beta_{n,l} = -\dfrac{q^{-(n-1)}}{[n-1]_q} \alpha_{n-1,l-1} - q^{-1} \beta_{n-1,l-1} \ , & (17) \end{cases}$$

avec les conditions au bord

$$\begin{cases} \alpha_{n,0} = q^{n-1} \ , \\ \beta_{n,0} = 0 \ , \end{cases} \quad \text{pour } n > 1 \ , \qquad \begin{cases} \alpha_{l+1,l} = 0 \ , \\ \beta_{l+1,l} = (-q^{-1})^l \ , \end{cases} \quad \text{pour } l \geq 1 \ . \tag{18}$$

Il faut s'assurer que les conditions au bord ne contredisent pas les équations (**??**) et (**??**) pour $\alpha_{n,0}$ et $\beta_{n,n-1}$. D'après (**??**) et (**??**) on a,

$$\begin{cases} \alpha_{n,0} = q\alpha_{n-1,0} + \dfrac{q^{n-1}}{[n-1]_q} \beta_{n-1,0} = q^{n-1} \ , & (19) \\ \beta_{n,n-1} = -\dfrac{q^{n-1}}{[n-1]_q} \alpha_{n-1,n-2} - q^{-1} \beta_{n-1,n-2} = (-q^{-1})^{n-1} \ , & (20) \end{cases}$$

donc les conditions au bord sont bien vérifiées. D'après la figure **??**, si une solution existe, elle est unique.

Lemme 5.2.1. *Les solutions des équations (**??**) et (**??**) pour $n > 1$ et $0 \leq l < n$ avec les conditions au bord (**??**) sont*

$$\begin{cases} \alpha_{n,l} = (-1)^l q^{n-l-1} \dfrac{[n-l-1]_q}{[n-1]_q} \ , & (21) \\ \beta_{n,l} = (-1)^l q^{-l} \dfrac{[l]_q}{[n-1]_q} \ . & (22) \end{cases}$$

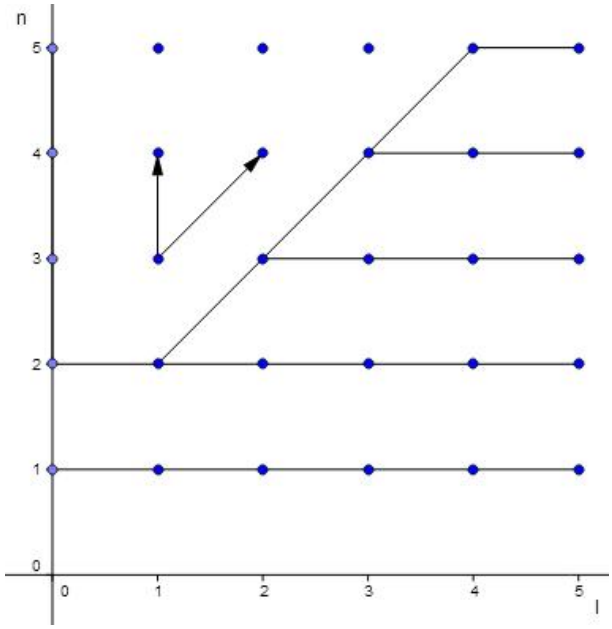


FIGURE 2 – La récurrence apparaît dans la zone non barrée. La récurrence sur α (resp. β) correspond à la flèche verticale (resp. oblique).

Démonstration. Par récurrence sur n. Pour $n = 2$, (**??**) et (**??**) donnent

$$\begin{cases} \alpha_{2,1} = 0 \ , \\ \beta_{2,1} = -q^{-1} \ , \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_{2,0} = q \ , \\ \beta_{2,0} = 0 \ , \end{cases}$$

ce qui correspond bien à (**??**), donc la proposition est vraie pour $n = 2$.

Supposons que la proposition est vraie pour n. On calcule d'abord $\alpha_{n+1,l}$,

$$\begin{aligned} q\alpha_{n,l} + \frac{q^n}{[n]_q}\beta_{n,l} &= q(-1)^l q^{n-l-1}\frac{[n-l-1]_q}{[n-1]_q} + \frac{q^n}{[n]_q}(-1)^l q^{-l}\frac{[l]_q}{[n-1]_q} \\ &= (-1)^l \frac{q^{n-l}}{[n-1]_q[n]_q}\left([n-l-1]_q[n]_q + [l]_q\right) \\ &= (-1)^l \frac{q^{n-l}}{[n-1]_q[n]_q} \times [n-1]_q[n-l]_q \\ &= (-1)^l q^{n-l}\frac{[n-l]_q}{[n]_q} \ . \end{aligned}$$

On trouve l'expression (**??**) pour $n+1$, donc elle est vraie pour tout n. Pour $\beta_{n+1,l+1}$,

$$\begin{aligned}
-\frac{q^{-n}}{[n]_q}\alpha_{n,l} - q^{-1}\beta_{n,l} &= -\frac{q^{-n}}{[n]_q}(-1)^l q^{n-l-1}\frac{[n-l-1]_q}{[n-1]_q} - q^{-1}(-1)^l q^{-l}\frac{[l]_q}{[n-1]_q} \\
&= (-1)^{-(l+1)}\frac{q^{-(l+1)}}{[n-1]_q[n]_q}\left([n-l-1]_q + [l]_q[n]_q\right) \\
&= (-1)^{-(l+1)}\frac{q^{-(l+1)}}{[n-1]_q[n]_q} \times [n-1]_q[l+1]_q \\
&= (-1)^{-(l+1)}q^{-(l+1)}\frac{[l+1]_q}{[n]_q} \ .
\end{aligned}$$

On trouve l'expression (**??**) pour $n+1$, donc elle est vraie pour tout n. □

On déduit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{k,l}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}) &= \alpha_{n,l} + \beta_{n,l} \\
&= (-1)^l q^{n-l-1}\frac{[n-l-1]_q}{[n-1]_q} + (-1)^l q^{-l}\frac{[l]_q}{[n-1]_q} \\
&= \frac{(-1)^l q^{-l}}{[n-1]_q}\left(q^{n-1}[n-l-1]_q + [l]_q\right) \\
&= \frac{(-1)^l q^{-l}}{[n-1]_q} \times q^{n-l-1}[n-1]_q \\
&= (-1)^l q^{n-2l-1} \ .
\end{aligned}$$

C'est le résultat recherché. On peut également le déterminer de la façon décrite ci-dessous.

5.2.2 Seconde méthode

La seconde méthode utilise un résultat de [**?**], donnant une relation entre les représentations $\rho_{k,l}$ et $\rho_{\{n-1,1\}}$.

Soit A_l l'antisymétriseur classique d'ordre l, et soit $\Lambda^l V_{\{n-1,1\}} = A_l V_{\{n-1,1\}}^{\otimes l}$ la puissance extérieure d'ordre l de $V_{\{n-1,1\}}$. Si $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{n-1})$ est une base de $V_{\{n-1,1\}}$, une base de $\Lambda^l V_{\{n-1,1\}}$ est l'ensemble des vecteurs $\tilde{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{e}_{i_l}$ tels que $i_1 < \dots < i_l$. Rappellons qu'une base de $V_{k,l}$ est l'ensemble des vecteurs $\mathcal{X}_I$, où $I = \{i_1, \dots, i_l\}$.

Propriété 5.2.1. L'application $\eta : \tilde{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{e}_{i_l} \mapsto \mathcal{X}_I$ est un isomorphisme des espaces vectoriels $\Lambda^l V_{\{n-1,1\}}$ et $V_{k,l}$. Au niveau des représentations, on a l'égalité suivante, pour σ_p un générateur de $H_n(q)$,

$$\rho_{k,l}(\sigma_p) \circ \eta = \eta \circ q^{1-l} A_l \left(\rho_{\{n-1,1\}}(\sigma_p) \otimes \dots \otimes \rho_{\{n-1,1\}}(\sigma_p)\right) A_l \ .$$

On va utiliser cette propriété pour déterminer la trace du produit des générateurs dans $\rho_{k,l}$ à partir de celle dans $\rho_{\{n-1,1\}}$.

D'après la propriété **??** on a,

$$\rho_{k,l}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}) = \rho_{k,l}(\sigma_1) \dots \rho_{k,l}(\sigma_{n-1}) \tag{23}$$

$$= q^{1-l} A_l \left(\rho_{\{n-1,1\}}(\sigma_1) \otimes \dots \otimes \rho_{\{n-1,1\}}(\sigma_1) \right) A_l \dots q^{1-l} A_l \left(\rho_{\{n-1,1\}}(\sigma_{n-1}) \otimes \dots \otimes \rho_{\{n-1,1\}}(\sigma_{n-1}) \right) A_l \tag{24}$$

$$= q^{(1-l)(n-1)} A_l \left(\rho_{\{n-1,1\}}(\sigma_1) \dots \rho_{\{n-1,1\}}(\sigma_{n-1}) \otimes \dots \otimes \rho_{\{n-1,1\}}(\sigma_1) \dots \rho_{\{n-1,1\}}(\sigma_{n-1}) \right) A_l \tag{25}$$

$$= q^{(1-l)(n-1)} A_l \left(\rho_{\{n-1,1\}}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}) \otimes \dots \otimes \rho_{\{n-1,1\}}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}) \right) A_l \ . \tag{26}$$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base dans la représentation de Burau présentée dans la section **??**. Une base de $V_{\{n-1,1\}}$ est $(e_1 - qe_2, e_2 - qe_3, \dots, e_{n-1} - qe_n)$. L'action des générateurs de $H_n(q)$ sur cette base est

$$\begin{aligned}
&\rho_{B,n}(\sigma_i)\,(e_{i-1} - qe_i) = q(e_{i-1} - qe_i) + (e_i - qe_{i+1}) \ , \\
&\rho_{B,n}(\sigma_i)\,(e_i - qe_{i+1}) = -q^{-1}(e_i - e_{i+1}) \ , \\
&\rho_{B,n}(\sigma_i)\,(e_{i+1} - qe_{i+2}) = (e_i - qe_{i+1}) + q(e_{i+1} - qe_{i+2}) \ , \\
&\rho_{B,n}(\sigma_i)\,(e_k - qe_{k+1}) = q\,(e_k - qe_{k+1}) \qquad\qquad \text{si } k \neq i-1, i, i+1 \ .
\end{aligned}$$

On calcule ensuite l'action du produit des générateurs,

si $i < n-1$,

$$\rho_{B,n}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})(e_i - qe_{i+1}) = q^{n-2}(e_{i+1} - qe_{i+2}) \ ,$$

si $i = n-1$,

$$\rho_{B,n}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})(e_{n-1} - qe_n) = -q^{-1}(e_1 - qe_2) - (e_2 - qe_3) - \dots - q^{n-3}(e_{n-1} - qe_n) \ .$$

La matrice du produit $\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}$ est

$$\rho_{\{n-1,1\}}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}) = \left\{ \ \{a_{i,j}\} \mid a_{i,n-1} = -q^{i-2} \ , \ a_{i,i+1} = q^{n-2} \ , \ a_{i,j} = 0 \text{ si } j \neq i+1, n-1 \right\} \ .$$

Exemple 5.2.1. Pour $n = 4$,

$$\rho_{\{3,1\}}(\sigma_1\sigma_2\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -q^{-1} \\ q^2 & 0 & -1 \\ 0 & q^2 & -q \end{pmatrix} \ .$$

Soit P la matrice diagonale de taille $(n-1) \times (n-1)$ suivante

$$P = \mathrm{diag}(1, q, q^2, \dots, q^{n-2}) \ .$$

En faisant le changement de base $\rho'_{\{n-1,1\}} = P^{-1}\rho_{\{n-1,1\}}P$, on obtient la matrice

$$\rho'_{\{n-1,1\}}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}) = q^{n-3}\rho_{\{n-1,1\}}(s_1 \dots s_{n-1}) \ , \tag{27}$$

où $\rho_{\{n-1,1\}}(s_1 \dots s_{n-1})$ est la matrice classique,

$$\rho_{\{n-1,1\}}(s_1 \dots s_{n-1}) = \{ \ \{b_{i,j} \ \} \mid b_{i,i+1} = 1 \ , \ b_{i,n-1} = -1 \ , \ b_{i,j} = 0 \text{ si } j \neq i+1, n-1 \ \} \ . \tag{28}$$

Exemple 5.2.2. Pour poursuivre l'exemple **??**,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix} .$$

Avec ces matrices on calcule

$$\rho'_{\{3,1\}}(\sigma_1\sigma_2\sigma_3) = P^{-1}\rho_{\{3,1\}}(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)P = q \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

On rappelle que les générateurs de S_n sont $\{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$. Les valeurs propres de $\rho_{\{n-1,1\}}(s_1 \ldots s_{n-1})$ sont

$$\mathrm{Spec}_{\{n-1,1\}}(s_1 \ldots s_{n-1}) = \left\{ \ exp(\frac{2\pi i}{n} j) \ , \ j = 1, \ldots, n-1 \ \right\} .$$

D'après (**??**), on a le lemme suivant.

Lemme 5.2.2.

$$Spec_{\{n-1,1\}}(\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1}) = \left\{ \ q^{n-3} exp(\frac{2\pi i}{n} j) \ , \ j = 1, \ldots, n-1 \ \right\} .$$

L'équation (**??**) donne également la relation

$$\mathrm{Tr}_{\{n-1,1\}}(\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1}) = q^{n-3}\mathrm{Tr}_{\{n-1,1\}}(s_1 \ldots s_{n-1}) \ ,$$

donc

$$\mathrm{Tr}_{\Lambda^l V_{\{n-1,1\}}}(\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1}) = q^{(n-3)l}\mathrm{Tr}_{\Lambda^l V_{\{n-1,1\}}}(s_1 \ldots s_{n-1}) \ . \tag{29}$$

Pour connaitre $\mathrm{Tr}_{\Lambda^l V_{\{n-1,1\}}}(s_1 \ldots s_{n-1})$, on utilise la représentation permutation. L'opérateur $s_1 \ldots s_{n-1}$ réalise la permutation cyclique des vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$ de V_n : $e_i \mapsto e_{i+1 \mod n}$. Pour la puissance extérieure $\Lambda^l V_n$, cet opérateur envoie $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_l}$ à $e_{i_1+1 \mod n} \wedge \ldots \wedge e_{i_l+1 \mod n}$, donc

$$\mathrm{Tr}_{\Lambda^l V_n}(s_1 \ldots s_{n-1}) = 0 \qquad \text{pour } l = 1, \ldots, n-1 \ . \tag{30}$$

La décomposition de V_n en somme directe de représentations irréductibles de S_n est

$$V_n = \mathbb{C} \oplus V_{\{n-1,1\}} \ .$$

La puissance extérieure d'ordre l de V_n donne la relation suivante

$$\Lambda^l V_n = \Lambda^l V_{\{n-1,1\}} \oplus \Lambda^{l-1} V_{\{n-1,1\}} \ ,$$

donc

$$\mathrm{Tr}_{\Lambda^l V_n}(s_1 \ldots s_{n-1}) = \mathrm{Tr}_{\Lambda^l V_{\{n-1,1\}}}(s_1 \ldots s_{n-1}) + \mathrm{Tr}_{\Lambda^{l-1} V_{\{n-1,1\}}}(s_1 \ldots s_{n-1}) \ .$$

Cette égalité et la relation (**??**) conduisent à l'équation

$$\mathrm{Tr}_{\Lambda^l V_{\{n-1,1\}}}(s_1 \ldots s_{n-1}) + \mathrm{Tr}_{\Lambda^{l-1} V_{\{n-1,1\}}}(s_1 \ldots s_{n-1}) = 0 \qquad \text{pour } l = 1, \ldots, n-1,$$

or pour $l = 0$, $\mathrm{Tr}_{\Lambda^0 V_{\{n-1,1\}}}(s_1 \ldots s_{n-1}) = 1$, d'où

$$\mathrm{Tr}_{\Lambda^l V_{\{n-1,1\}}}(s_1 \ldots s_{n-1}) = (-1)^l \ .$$

D'après (**??**), on déduit

$$\mathrm{Tr}_{\Lambda^l V_{\{n-1,1\}}}(\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1}) = (-1)^l q^{(n-3)l} \ .$$

Finalement, la relation entre les représentations $\rho_{k,l}$ et $\rho_{\{n-1,1\}}$ (voir **??**) conduit à

$$\mathrm{Tr}_{k,l}(\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1}) = q^{(1-l)(n-1)}\mathrm{Tr}_{\Lambda^l V_{\{n-1,1\}}}(\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1}) = (-1)^l q^{n-2l-1} = (-1)^l q^{k-l} \ .$$

5.3 Trace de $Ш_{1,n-1}$ dans $\rho_{k,l}$

Connaissant à présent l'expression de $\mathrm{Tr}_{k,l}(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})$, l'équation (**??**) devient (en rappelant que $n = k + l + 1$),

$$\mathrm{Tr}_{k,l}(Ш_{1,n-1}) = \mathrm{Tr}_{k-1,l}(Ш_{1,n-2}) + \mathrm{Tr}_{k,l-1}(Ш_{1,n-2}) + (-1)^l q^{2k} \ . \tag{31}$$

Proposition 5.3.1. *Dans la représentation $\rho_{k,l}$, la trace de la matrice de l'élément de battage $Ш_{1,n-1} \in H_n(q)$ est*

$$Tr_{k,l}(Ш_{1,n-1}) = \frac{1+(-1)^l}{2}(k+1)_q + \sum_{i=1}^{k}(i)_q \sum_{s=1}^{l}(-1)^{l-s}\binom{s+k-i}{1+k-i} \ . \tag{32}$$

*Les valeurs propres sont les q-nombres $(i)_q$ et d'après la formule (**??**) on détermine la multiplicité associée, notée $\mu_{k,l}(i)$:*

- *pour la valeur propre 0 :* $\mu_{k,l}(0) = \sum_{s=1}^{l}(-1)^{l-s}\binom{s+k-1}{k}$,
- *pour la valeur propre $(i)_q$, $i = 1, \dots, k$:* $\mu_{k,l}(i) = \sum_{s=1}^{l}(-1)^{l-s}\binom{s+k-i}{1+k-i}$,
- *pour la valeur propre $(k+1)_q$:* $\mu_{k,l}(k+1) = \frac{1+(-1)^l}{2}$.

Démonstration. Par récurrence sur n. Pour $n = 1$ la trace est $\mathrm{Tr}_{0,0}(Ш_{1,0}) = 1$.
Supposons la formule proposée vraie pour $n-1$,

si $0 < i < k$,

$$\mu_{k-1,l}(i) + \mu_{k,l-1}(i) = \sum_{s=1}^{l}(-1)^{l-s}\binom{s+k-i-1}{k-i} + \sum_{s=1}^{l-1}(-1)^{l-s-1}\binom{s+k-i}{1+k-i} \ ,$$

en faisant le changement de variable $s' = s+1$ dans la somme de droite on obtient,

$$\mu_{k-1,l}(i) + \mu_{k,l-1}(i) = \sum_{s=1}^{l}(-1)^{l-s}\binom{s+k-i-1}{k-i} + \sum_{s'=2}^{l}(-1)^{l-s'}\binom{s'-1+k-i}{1+k-i} \ ,$$

on rajoute le terme $s' = 1$ qui ne contribue pas,

$$\mu_{k-1,l}(i) + \mu_{k,l-1}(i) = \sum_{s=1}^{l}(-1)^{l-s}\binom{s+k-i-1}{k-i} + \sum_{s'=1}^{l}(-1)^{l-s'}\binom{s'+k-i-1}{1+k-i} \ .$$

En utilisant la relation

$$\binom{a+1}{b+1} = \binom{a}{b} + \binom{a}{b+1} \ , \tag{33}$$

pour $a, b \in \mathbb{N}$,

$$\mu_{k-1,l}(i) + \mu_{k,l-1}(i) = \sum_{s=1}^{l}(-1)^{l-s}\binom{s+k-i}{1+k-i} \ ,$$

ce qui correspond bien à $\mu_{k,l}(i)$ dans l'équation (**??**) ;

si $i = k, k+1$, on a la somme γ

$$\gamma = [\mu_{k-1,l}(k) + \mu_{k,l-1}(k)]\,(k)_q + \mu_{k,l-1}(k+1)(k+1)_q + (-1)^l q^{2k} \ ,$$

on remplace

$$\gamma = \frac{1+(-1)^l}{2}(k)_q + (k)_q \sum_{s=1}^{l-1}(-1)^{l-s-1}s + \frac{1+(-1)^{l-1}}{2}(k+1)_q + (-1)^l q^{2k} \ ,$$

en faisant le changement de variable $s' = s+1$ dans la somme,

$$\gamma = \frac{1+(-1)^l}{2}(k)_q + (k)_q \sum_{s'=2}^{l}(-1)^{l-s'}(s'-1) + \frac{1+(-1)^{l-1}}{2}(q^{2k} + (k)_q) + (-1)^l q^{2k} \ ,$$

comme précédemment, on rajoute le terme $s' = 1$ qui ne contribue pas,

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1+(-1)^l}{2}q^{2k} + (k)_q \left(1 + \sum_{s'=1}^{l}(-1)^{l-s'}(s'-1)\right) \\
&= \frac{1+(-1)^l}{2}q^{2k} + (k)_q \left(1 + \sum_{s'=1}^{l}(-1)^{l-s'}s' - \frac{1-(-1)^l}{2}\right) \\
&= \frac{1+(-1)^l}{2}(k+1)_q + (k)_q \sum_{s'=1}^{l}(-1)^{l-s'}s' \ .
\end{aligned}$$

La proposition (**??**) donne le même résultat pour $\mu_{k,l}(k)(k)_q + \mu_{k,l}(k+1)(k+1)_q$. Dans les deux cas ($0 < i < k$ et $i = k, k+1$) la proposition est vérifiée pour n donc elle est vraie pour tout n. □

On donne également la trace de l'élément de battage sous une autre forme :

$$\mathrm{Tr}_{k,l}(Ш_{1,n-1}) = \sum_{j=0}^{k} q^{2j} \sum_{s=0}^{l}(-1)^{l-s}\binom{s+k-j}{k-j} \ .$$

Notons que la somme alternée des coefficients binomiaux $\sum_{s=0}^{l}(-1)^{l-s}\binom{s+k-j}{k-j}$ apparaît dans le calcul des cohomologies cycliques des algèbres de Grassmann $\mathbb{Z}_2$-graduée [**?**].

5.4 Multiplicités et coefficients binomiaux

Dans cette partie, on établit une relation entre les multiplicités des valeurs propres de $Ш_{1,n-1}$ dans $\rho_{k,l}$ et le coefficient binomial $\binom{k+l}{l}$. Par construction, on a $V_{k,l} = V_{k,l-1} \oplus V_{k-1,l}$ donc

$$\dim(V_{k,l}) = \dim(V_{k,l-1}) + \dim(V_{k-1,l}) \ .$$

La dimension est égale à la somme des multiplicités,

$$\mu_{k,l}(0) + \sum_{i=1}^{k+1}\mu_{k,l}(i) = \mu_{k,l-1}(0) + \sum_{i=1}^{k+1}\mu_{k,l-1}(i) + \mu_{k-1,l}(0) + \sum_{i=1}^{k}\mu_{k-1,l}(i) \ . \tag{34}$$

Dans la preuve de la proposition **??** nous avons établi

$$\mu_{k,l}(i) = \mu_{k-,l}(i) + \mu_{k,l-1}(i) \quad , \quad 0 < i < k \ , \tag{35}$$

$$\mu_{k,l}(k) = \mu_{k-1,l}(k) + \mu_{k,l-1}(k) + (-1)^{l-1} \quad , \tag{36}$$

$$\mu_{k,l}(k+1) = \mu_{k,l-1}(k+1) + (-1)^{l} \quad . \tag{37}$$

Les équations (**??**), (**??**), (**??**) et (**??**) impliquent

$$\mu_{k,l}(0) = \mu_{k,l-1}(0) + \mu_{k-1,l}(0) \ . \tag{38}$$

De plus (représentations unidimensionnelles), on a

$$\mu_{0,l}(0) = \frac{1+(-1)^{l-1}}{2} \ , \ \mu_{k,0}(0) = 0 \ . \tag{39}$$

Lorsque $k = l = 0$, $\dfrac{1+(-1)^{-1}}{2} = 0$ donc les conditions aux bords ne se contredisent pas.

Proposition 5.4.1. *La solution de l'équation de récurrence (**??**) avec pour conditions aux bords (**??**) est*

$$\mu_{k,l}(0) = \sum_{s=1}^{l} (-1)^{l-s} \binom{s+k-1}{k} \ .$$

Démonstration. Par récurrence sur n. On commence par vérifier les conditions aux bords. Pour $l = 0$ le résultat est immédiat. Pour $k = 0$,

$$\sum_{s=1}^{l} (-1)^{l-s} \binom{s-1}{0} = \sum_{s=1}^{l} (-1)^{l-s} = \frac{1+(-1)^{l-1}}{2} \ ,$$

donc les conditions aux bords sont vérifiées.

Pour $n = 1$,

$$\mu_{0,0}(0) = 0 \ ,$$

donc la proposition est vérifiée pour $n = 1$.

Supposons qu'elle est vraie pour $n-1$,

$$\mu_{k,l-1}(0) + \mu_{k-1,l}(0) = \sum_{s=1}^{l-1} (-1)^{l-s-1} \binom{s+k-1}{k} + \sum_{s=1}^{l} (-1)^{l-s} \binom{s+k-2}{k-1} \ ,$$

en faisant le changement d'indice $s' = s+1$ dans la première somme, on a

$$\mu_{k,l-1}(0) + \mu_{k-1,l}(0) = \sum_{s'=2}^{l} (-1)^{l-s'} \binom{s'+k-2}{k} + \sum_{s=1}^{l} (-1)^{l-s} \binom{s+k-2}{k-1} \ ,$$

on rajoute à la première somme le terme $s' = 1$ qui ne contribue pas,

$$\mu_{k,l-1}(0) + \mu_{k-1,l}(0) = \sum_{s'=1}^{l} (-1)^{l-s'} \binom{s'+k-2}{k} + \sum_{s=1}^{l} (-1)^{l-s} \binom{s+k-2}{k-1} \ ,$$

en utilisant la relation (**??**),

$$\mu_{k,l-1}(0) + \mu_{k-1,l}(0) = \sum_{s=1}^{l} (-1)^{l-s} \binom{s+k-1}{k} \ ,$$

ce qui correspond à l'expression de la proposition pour n, donc la propriété est vraie pour tout n. □

Corollaire 5.4.1. *Une expression du coefficient binomial est*

$$\binom{k+l}{l} = \frac{1+(-1)^l}{2} + \sum_{s=1}^{l} (-1)^{l-s} \binom{s+k-1}{k} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=1}^{l} (-1)^{l-s} \binom{s+k-i}{1+k-i} \ . \tag{40}$$

Démonstration. La preuve est immédiate car $\dim(V_{k,l}) = \binom{k+l}{l} = \sum_{i=0}^{k+1} \mu_{k,l}(i)$. □

5.5 Une autre relation de récurrence pour $\rho_{k,l}(Ш_{1,n-1})$

La formule (**??**) contient une contribution des représentations $\rho_{k-1,l}$ et $\rho_{k,l-1}$. Une autre équation de récurrence a été déterminée, ayant pour particularité d'avoir la valeur de l fixée, donc la contribution ne provient que des représentations $\rho_{k-1,l}$.

Proposition 5.5.1. *Une formule de récurrence pour la trace de* $Ш_{1,n-1}$ *dans la représentation* $\rho_{k,l}$ *est*

$$Tr_{k,l}(Ш_{1,n-1}) = \frac{1+(-1)^l}{2} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=1}^{l} (-1)^{l-s} \binom{s+k-i}{1+k-i} + q^2\, Tr_{k-1,l}(Ш_{1,n-2}) \ . \tag{41}$$

Démonstration. On commence en partant de l'équation (**??**),

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{k,l}(Ш_{1,n-1}) &= \frac{1+(-1)^l}{2}(k+1)_q + \sum_{i=1}^{k} (i)_q \sum_{s=1}^{l} (-1)^{l-s} \binom{s+k-i}{1+k-i} \\
&= \frac{1+(-1)^l}{2} \sum_{j=0}^{k} q^{2j} + \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=0}^{i-1} q^{2j} \right) \sum_{s=1}^{l} (-1)^{l-s} \binom{s+k-i}{1+k-i} \\
&= \frac{1+(-1)^l}{2} \left(1 + q^2 \sum_{j=1}^{k} q^{2(j-1)} \right) + \sum_{i=1}^{k} \left(1 + q^2 \sum_{j=1}^{i-1} q^{2(j-1)} \right) \sum_{s=1}^{l} (-1)^{l-s} \binom{s+k-i}{1+k-i} \ ,
\end{aligned}$$

en réorganisant les termes et en faisant le changement de variables $j' = j-1$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{k,l}(Ш_{1,n-1}) &= \tfrac{1+(-1)^l}{2} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=1}^{l} (-1)^{l-s} \binom{s+k-i}{1+k-i} + \\
&\quad + q^2 \left[\tfrac{1+(-1)^l}{2} \sum_{j'=0}^{k-1} q^{2j'} + \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j'=0}^{i-2} q^{2j'} \right) \sum_{s=1}^{l} (-1)^{l-s} \binom{s+k-i}{1+k-i} \right] \\
&= \tfrac{1+(-1)^l}{2} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=1}^{l} (-1)^{l-s} \binom{s+k-i}{1+k-i} + \underline{q^2 \left[\tfrac{1+(-1)^l}{2}(k)_q + \sum_{i=1}^{k} (i-1)_q \sum_{s=1}^{l} (-1)^{l-s} \binom{s+k-i}{1+k-i} \right]} \ ,
\end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $i' = i - 1$, le terme souligné s'écrit

$$q^2 \left[\tfrac{1+(-1)^l}{2}(k)_q + \sum_{i'=0}^{k-1} (i')_q \sum_{s=1}^{l} (-1)^{l-s} \binom{s+k-1-i'}{k-i'} \right] ,$$

or le terme $i' = 0$ ne contribue pas, donc cette expression est égale à

$$q^2 \left[\tfrac{1+(-1)^l}{2}(k)_q + \sum_{i=1}^{k-1} (i)_q \sum_{s=1}^{l} (-1)^{l-s} \binom{s+k-1-i}{k-i} \right] = q^2 \mathrm{Tr}_{k-1,l}(\text{Ш}_{1,n-2}) ,$$

d'où l'assertion. □

6 Conclustion

Les valeurs propres de $\text{Ш}_{1,n-1}$ et leur multiplicité ont été déterminés d'abord pour les représentations indexées par les diagrammes $\{n\}$ et $\{n-1,1\}$, puis pour les représentations $\rho_{k,l}$. C'est le résultat principal de ce stage. La suite de ce travail est naturellement la détermination du spectre et des multiplicités pour les représentations associées aux diagrammes de forme quelconque. En théorie, on peut les calculer en utilisant, par exemple, la base des tableaux de Young standard présentée en **??**. La dimension des représentations croît très rapidement, ce qui rend cette méthode difficile à exploiter. Une piste intéressante pour les recherches futures est de "découper" un diagramme quelconque en diagrammes de type crochets.

Références

[1] W. Burau, *Uber Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen*, Abh. Math. Semin. Hamburg Univ. **11** (1936), 171–178.

[2] R. Coquereaux and E. Ragoucy, *Currents on Grassmann algebras*, J. Geometry Phys. **15** (1995), 333–352 ; arXiv : hep-th/9310147.

[3] P. Diaconis, J. A. Fill and J. Pitman, *Analysis of top to random shuffles*, Combin. Probab. Comput. **1** (2) (1992), 135–155.

[4] A. P. Isaev and O. V. Ogievetsky, *BRST operator for quantum Lie algebras : explicit formula*, Int. J. Mod. Phys. A **19** Suppl. (2004), 240–247.

[5] A.P. Isaev and O.V. Ogievetsky, *Braids, Shuffles ans Symmetrizers*, J. Phys. A : Math. Theor. **42** (2009), 13–15 ; arXiv : 0812.3974v1.

[6] A.P. Isaev and O.V. Ogievetsky and A.F. Os'kin, *Chain models on Hecke algebra for corner type representations*, Rep. Math. Phys. 61 (2008), 311–317 ; arXiv : 0710.0261.

[7] G. Lusztig, *A q-analogue of an identity of N. Wallach*, Studies in Lie theory, Progr. Math. **243** (2006), 405–410 ; arXiv : math/0311158.

[8] W. D. Nichols, *Bialgebras of type one*, Comm. Algebra **6** (15) (1978), 1521–1552.

[9] O.V. Ogievetsky and P. Pyatov *Lecture on Hecke algebras*, in Proc. of the International School "Symmetries and Integrable Systems" Dubna, Russia, (1999). JINR, Dubna, D2, 5-2000-218, 39—88.

[10] O.V. Ogievetsky and L. Poulain d'Andecy, *Jucys–Murphy elements and representations of cyclotomic Hecke algebras* ; arXiv : 1206.0612 [math.RT].

[11] R. M. Phatarfod, *On the matrix occurring in a linear search problem* , J. Appl. Prob., **28** (1991), 336–346.

[12] M. Rosso, *Quantum groups and quantum shuffles*, Invent. Math. **133** (1998), 399–416.

[13] N. R. Wallach, *Lie algebra cohomology and holomorphic continuation of generalized Jacquet integrals*, Representations of Lie groups (1986) ; Adv. Stud. Pure Math. **14** (1988), 123–151.

[14] S. L. Woronowicz, *Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups)*, Comm. Math. Phys. **122** (1989), 125–170.