

# Diagrammes de Young et éléments de battage

Pierre DOYEUX  
Sous la direction de Oleg OGIEVETSKY

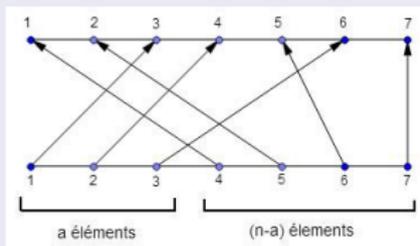
2 juillet 2013

- 1 Présentation des éléments de battage
- 2 Représentations irréductibles de  $\mathbb{C}S_n$
- 3 Représentations irréductibles et diagrammes de Young
- 4 Algèbre  $\mathbb{C}S_n$  et algèbre de Hecke
- 5 Présentation des résultats

## Qu'est-ce qu'un battage ?



Battage de cartes



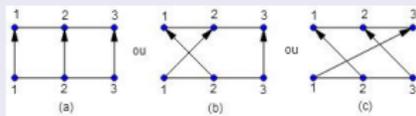
Permutation « battage »

Ecriture algébrique :  
 $(136524)(7) \in S_7$

## Si $a = 1$

→ on prend la première carte et on l'insère dans le paquet.

Différents cas possibles



(a) :  $(1)(2)(3)$

(b) :  $(12)(3) \in S_3$

(c) :  $(132)$

## Comment décrire ces différents cas ?

→ on se place dans l'algèbre du groupe symétrique :  $\mathbb{C}S_n$

→ dans l'algèbre  $\mathbb{C}S_n$  il existe l'élément  $\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_{1,n-1} \in \mathbb{C}S_n$

exemple dans l'algèbre  $\mathbb{C}S_3$  :  $\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_{1,2} = (1)(2)(3) + (12)(3) + (132)$

Quelques applications

- *Symétrisation* :

→ Tenseur

$$\begin{aligned} ST^{i_1(i_2i_3)} &= \frac{1}{3}(T^{i_1i_2i_3} + T^{i_2i_1i_3} + T^{i_2i_3i_1}) \\ &= \frac{1}{3}(1 + (12) + (132))T^{i_1i_2i_3} = \frac{1}{3}(\text{III}_{1,2}T)^{i_1i_2i_3} \end{aligned}$$

- *Optimisation de rangement*

→ Bibliothèque de Tsetlin

→ Traitement des données en informatique (ex. : cache)

De manière générale, dans l'algèbre  $\mathbb{C}S_n$ ,

$$\mathbb{I}_{1,n-1} = 1 + s_1 + s_1 s_2 + \dots + s_1 \dots s_{n-1}$$

où  $\{s_1, \dots, s_{n-1}\}$  sont les générateurs de  $\mathbb{C}S_n$ .

- Représentation =  $\left\{ \begin{array}{l} \text{un espace vectoriel } V \\ + \\ \text{une application } \rho : S_n \rightarrow \text{Mat}(V) \end{array} \right.$
- Représentation *irréductible*

### Représentations irréductibles de l'algèbre $\mathbb{C}S_n$

- L'algèbre  $\mathbb{C}S_n$  est isomorphe à la somme des *représentations irréductibles* :

$$\mathbb{C}S_n \cong \bigoplus_i \text{Mat}(V_i)$$

- Le nombre de représentations irréductibles de  $\mathbb{C}S_n$  est égal au **nombre de partitions du nombre entier  $n$**

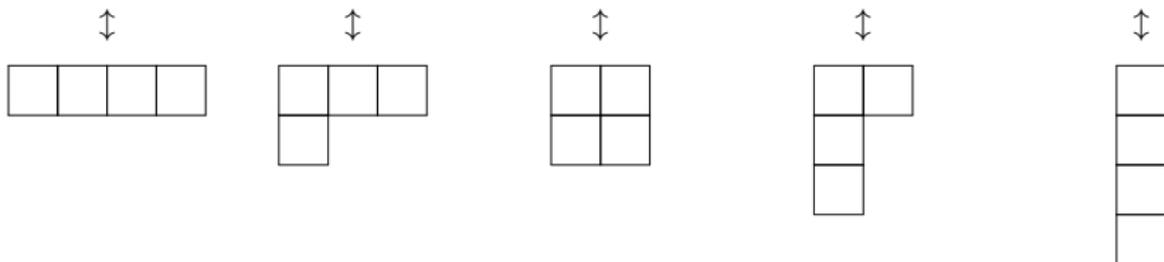
## Partition de $n \in \mathbb{N}$

- Partition : suite (décroissante) de nombres entiers dont la somme est égale à  $n$
- Fonction de partition  $p(n)$  : nombre de partitions

Exemple : pour  $n = 4$ ,

$p(4) = 5 \Leftrightarrow$  il y a 5 partitions :

$$\lambda^{(1)} = \{4\} , \quad \lambda^{(2)} = \{3, 1\} , \quad \lambda^{(3)} = \{2, 2\} , \quad \lambda^{(4)} = \{2, 1, 1\} , \quad \lambda^{(5)} = \{1, 1, 1, 1\}$$



## Diagrammes de Young et représentations irréductibles de $\mathbb{C}S_n$

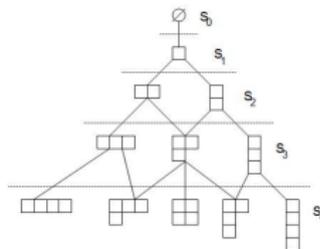
nombre de rep. irréd. de  $\mathbb{C}S_n \leftrightarrow \lambda$  partitionne  $n \leftrightarrow$  diagramme de Young de forme  $\lambda$

→ **on indexe une représentation irréductible par un diagramme de Young :**  
 $(V_\lambda, \rho_\lambda)$

Pour  $\mathbb{III}_{1,n-1} \in \mathbb{C}S_n$  :

$$\mathbb{III}_{1,n-1} \sim \bigoplus_{\lambda=1}^{\rho(\lambda)} \rho_{\lambda}(\mathbb{III}_{1,n-1}) = \begin{pmatrix} \boxed{\rho_1(\mathbb{III}_{1,n-1})} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \boxed{\rho_{\rho(\lambda)}(\mathbb{III}_{1,n-1})} \end{pmatrix}$$

Diagramme de Bratteli jusqu'à  $n = 4$  :



On connaît :

- les valeurs propres (Wallach, 1986)
- leur multiplicité (Diaconis, 1992)  
(les nombres de dérangements)

pour  $\mathbb{III}_{1,n-1} \in \mathbb{C}S_n$ .

On ne connaît pas :

- la contribution de chaque  $\rho_{\lambda}(\mathbb{III}_{1,n-1})$

**Pour un diagramme quelconque de forme  $\lambda$ ,**

**quelles sont les valeurs propres**

**quelles sont les multiplicités**

**pour  $\rho_{\lambda}(\mathbb{III}_{1,n-1})$  ?**

On utilise une déformation de l'algèbre  $\mathbb{C}S_n$  :

## l'algèbre de Hecke $H_n(q)$

(où  $q \in \mathbb{C}^\times$ )

Algèbre  $\mathbb{C}S_n$

Générateurs :  
 $\{s_1, \dots, s_{n-1}\}$

$$s_i^2 = 1$$

Elément de battage :

$$\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_{1,n-1} = 1 + s_1 + s_1 s_2 + \dots + s_1 \dots s_{n-1}$$

Algèbre  $H_n(q)$

Générateurs :  
 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$

$$\sigma_i^2 = 1 + (q - q^{-1})\sigma_i$$

Elément de battage :

$$\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_{1,n-1}^q = 1 + q\sigma_1 + q^2\sigma_1\sigma_2 + \dots + q^{n-1}\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}$$

$q$ -déformation  
 $\longrightarrow$

Pour  $q$  générique, on développe la théorie des représentations de l'algèbre  $H_n(q)$ . Pour  $\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_{1,n-1}^q \in H_n(q)$  :

$$\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_{1,n-1}^q \sim \bigoplus_{\lambda=1}^{\rho(\lambda)} \rho_\lambda(\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_{1,n-1}^q) .$$

Algèbre  $\mathbb{C}S_n$ Nombre entier  
 $n$ 

$$\text{Spec}(\text{III}_{1,n-1}) = \{0, 1, 2, \dots, n-2, n\}$$

$$\text{Tr}(\text{III}_{1,n-1}) = x, \text{ où } x \in \mathbb{N}$$

Algèbre  $H_n(q)$  $q$ -nombre

$$(n)_q := 1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2(n-1)}$$

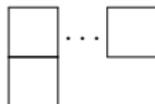
 $q$ -déformation  
 $\longrightarrow$ 

$$\text{Spec}(\text{III}_{1,n-1}^q) = \{0, (1)_q, (2)_q, \dots, (n-2)_q, (n)_q\}$$

$$\text{Tr}(\text{III}_{1,n-1}^q) = \mu(1) + \mu(2) \cdot (2)_q + \dots + \mu(n-2) \cdot (n-2)_q + \mu(n) \cdot (n)_q$$

Détermination du spectre de  $\text{III}_{1,n-1}$  dans une représentation associée à un diagramme→ calcul de  $\text{Tr}(\text{III}_{1,n-1}^q) \in H_n(q)$ → écrire cette trace en faisant apparaître les  $q$ -nombres

### Résultats préliminaires



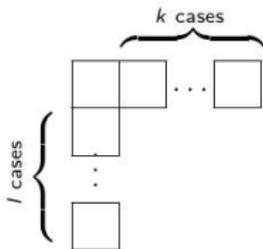
$$\text{Spec}(\text{III}_{1,n-1}) = \{n\}$$

$$\text{Spec}(\text{III}_{1,n-1}) = \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$$

→ Toutes les multiplicités sont égales à 1.

### Diagrammes de type « crochet »

$$n = k + l + 1$$



→ Multiplicités :

$$\mu(0) = \sum_{s=1}^l (-1)^{l-s} \binom{s+k-1}{k}$$

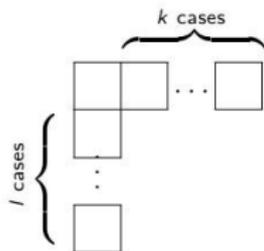
$$\mu(i) = \sum_{s=1}^l (-1)^{l-s} \binom{s+k-i}{1+k-i} \text{ pour } i=1, \dots, k$$

$$\mu(k+1) = \frac{1+(-1)^l}{2}$$

$$\text{Spec}(\text{III}_{1,n-1}) = \{0, 1, 2, \dots, k+1\}$$

## Diagrammes de type « crochet »

$$n = k + l + 1$$



$$\text{Spec}(\text{III}_{1,n-1}) = \{0, 1, 2, \dots, k + 1\}$$

$$\dim(V_{\text{crochet}}) = \binom{k+l}{l} = \sum_{i=0}^{k+1} \mu(i)$$

$$\binom{k+l}{l} = \sum_{s=1}^l (-1)^{l-s} \binom{s+k-1}{k} + \sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^l (-1)^{l-s} \binom{s+k-i}{1+k-i} + \frac{1+(-1)^l}{2}$$

**Merci de votre attention !**