



HAL
open science

Le marché des life settlements : principes d'évaluation et gestion de portefeuille

Denis Cabrillon

► **To cite this version:**

Denis Cabrillon. Le marché des life settlements : principes d'évaluation et gestion de portefeuille. Gestion des risques [q-fin.RM]. 2014. dumas-01073380

HAL Id: dumas-01073380

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01073380>

Submitted on 22 Nov 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mémoire présenté devant
l'UFR de Mathématique et d'Informatique
pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'Actuaire de Strasbourg
et l'admission à l'Institut des Actuaire

le _____

Par : Denis Cabrillon

Titre: Le Marché des life settlements – Principes d'évaluation et gestion de portefeuille

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres du jury de l'Institut des Actuaire

signature

Entreprise :

Nom :

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom :

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Membres du jury de l'UdS :

- M. Jacques Franchi
- M. Karl-Théodor Eisele
- M. Jean-Lucien Netzer
- M. Patrick Rondé
- M. Jean Bérard

Invités :

- M. Philippe Artzner
- M. Pierre Devolder
- M. Jean Modry
- Mme Magali Kelle-Vignon
- M. Alexandre You

Secrétariat : Mme Maire-Lantz

Bibliothèque : Mme Christine Disdier

**Mémoire présenté devant
l'UFR de Mathématique et Informatique
pour l'obtention du Master Mathématiques et Application, spécialité Statistique, parcours
Actuariat**

le _____

Par : Denis Cabrillon

Titre: Le Marché des life settlements – Principes d'évaluation et gestion de
portefeuille

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres du jury de l'Institut des
Actuaires

signature

Entreprise :

Nom :

Signature :

Membres du jury de l'UdS :

- M. Jacques Franchi
- M. Karl-Théodor Eisele
- M. Jean-Lucien Netzer
- M. Patrick Rondé
- M. Jean Bérard

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom :

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

Invités :

- M. Philippe Artzner
- M. Pierre Devolder
- M. Jean Modry
- M. Alexandre You

**Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents
actuariels (après expiration de
l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

Secrétariat : Mme Floriane Maire-Lantz

Bibliothèque : Mme Christine Disdier

Signature du candidat

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier KPMG Luxembourg de m'avoir permis d'effectuer ce stage de fin d'études au sein de leur entreprise. Mes remerciements s'adressent à l'ensemble de l'équipe du département *Financial Risk Management* pour son accueil chaleureux et le soutien qui m'a été apporté dans mon travail au quotidien.

Plus particulièrement, je remercie mon maître de stage Monsieur Bertrand SEGUI, Actuaire et Manager, qui a su m'encadrer tout au long de mon stage. Ses conseils, tant pratiques que théoriques, ainsi que son expérience m'ont été très utiles, à la fois pour les diverses missions qui m'ont été confiées mais également pour le choix de ce sujet de mémoire passionnant.

Mes pensées vont également à Monsieur Pierre DEVOLDER, mon tuteur universitaire, qui m'a guidé dans mes recherches et m'a orienté dans l'élaboration de mon mémoire.

Résumé

Depuis une vingtaine d'années, l'industrie de l'assurance vie aux Etats-Unis a vu se développer un marché secondaire qui gagne de plus en plus d'ampleur, à savoir le marché des life settlements. Un life settlement est une transaction financière lors de laquelle le propriétaire d'une assurance vie vend sa police à une tierce partie.

L'objectif de ce mémoire sera de présenter un aperçu de ce nouveau marché et d'analyser le life settlement comme une nouvelle classe d'actif financier à part entière. Dans un premier temps, nous analyserons les méthodes utilisées pour déterminer la « vraie » valeur d'une police d'assurance vie en fonction de l'estimation de l'espérance de vie et d'autres informations médicales concernant l'état de santé de l'assuré. Nous détaillerons une nouvelle approche permettant d'incorporer toute l'information disponible dans l'évaluation du contrat de manière rigoureuse et statistiquement justifiable.

Ensuite, nous verrons comment les gestionnaires de fonds gèrent les portefeuilles de life settlements et offrent des rendements attractifs, décorrélés de la performance des marchés financiers. Les coupons reversés aux investisseurs peuvent dans certains cas offrir des rendements à deux chiffres. Nous évoquerons brièvement l'importance de la titrisation pour cette classe d'actif et exposerons les risques auxquels les investisseurs doivent faire face.

Après avoir mis en évidence l'exposition des life settlements au risque de longévité, nous introduirons finalement des processus de sauts asymétriques dans le modèle classique de Lee-Carter et utiliserons ce procédé pour prévoir les taux de mortalité futurs et analyser l'impact sur l'évaluation d'un portefeuille de life settlements.

Mots Clés : Life Settlement, Marché secondaire de l'assurance vie, Simulation de Monte Carlo, Divergence de Kullback-Leibler, Risque de longévité, Modélisation de la mortalité, Loi double exponentielle asymétrique, Sauts de mortalité, Titrisation

Abstract

For the last two decades, the life insurance industry in the United States has seen the rise of a secondary market, which has been attracting more and more investors. A life settlement is a financial transaction in which the owner of a life insurance contract sells his or her policy to a third party.

The purpose of this paper is to present an overview of the life settlement market and analyze it as part of a new asset class. First, we explicit the techniques used for the valuation of a life insurance policy based on the estimation of the insured's life expectancy as well as other medical information regarding his health status. We shall then introduce a new approach based on a rigorous and statistically justified manner in order to incorporate all the medical information in the pricing.

Second, we see how fund managers manage life settlement portfolios and offer attractive returns, uncorrelated with traditional asset classes. The performance of such funds can sometimes even go up to two-digit returns. After a brief presentation of the securitization process for this asset class, we discuss the different risks that investors face when investing in the life settlement market and especially exhibit the susceptibility of this secondary market to longevity risk.

Finally, we introduce an extension of the classical Lee-Carter model that allows for mortality and longevity jumps over time and use it to forecast mortality rates and analyze the impact on the pricing.

Key Words : Life Settlement, Secondary life insurance market, Monte Carlo simulations, Kullback-Leibler Divergence, Longevity risk, Mortality modelling, Asymmetric double exponential distribution, Mortality jumps, Securitization

Sommaire

Introduction	1
I Présentation du marché secondaire de l'assurance vie	5
1 Le marché des life settlements	6
1.1 Définition et développement du marché	6
1.1.1 Définition	6
1.1.2 Historique	8
1.1.3 Émergence d'un nouveau marché	8
1.2 Déroulement d'une transaction	10
1.3 Type de polices échangées sur le marché secondaire	13
1.4 Taille du marché et perspectives d'avenir	15
1.5 Le marché secondaire de l'assurance vie en Europe	15
1.6 Problème éthique et moral	17
2 Risques liés au marché des life settlements	18
2.1 Risque d'évaluation	18
2.2 Risque de longévité	19
2.3 Risque de liquidité	20
2.4 Risque de crédit / risque de défaut	21
2.5 Changement de réglementation et législation	21

II	Valorisation des life settlements et gestion de portefeuille	23
3	Valorisation des life settlements	24
3.1	Méthode déterministe	26
3.2	Méthode probabiliste	29
3.3	Méthode stochastique	36
3.4	Comparaison des trois méthodes d'évaluation et analyse de sensibilité	38
3.5	Évaluation des polices portant sur deux têtes	40
3.6	Conclusion	43
4	Incorporation de toute l'information médicale dans la table de mortalité	44
4.1	Fondement théorique	45
4.1.1	Divergence de Kullback-Leibler	45
4.1.2	Ajustement d'une table de mortalité à l'information médicale	46
4.2	Exemple numérique	48
4.2.1	Paramètres et hypothèses de modélisation	49
4.2.2	Méthode classique	50
4.2.3	Incorporation de l'information médicale	50
4.2.4	Comparaison des résultats	54
4.3	Conclusion	54
5	Gestion d'un fonds de life settlements	56
5.1	Fonds de type fermé	57
5.2	Fonds de type ouvert	58
5.3	Gestion d'un fonds fermé	59
III	Modélisation de la mortalité et risque de longévité	66
6	Choix d'une table de mortalité pour l'évaluation des life settlements	67
6.1	Introduction	67
6.2	Notations	68
6.3	Modèle de Lee et Carter	68

6.4	Estimation des paramètres	69
6.5	Présentation des données utilisées	72
6.6	Résultats obtenus	74
6.7	Modélisation du facteur de mortalité	75
6.7.1	Modèle sans sauts	76
6.7.2	Modèle avec sauts à effet permanent	78
6.7.3	Modèle avec sauts à effet transitoire	79
6.7.4	Modèle à sauts asymétriques	81
6.8	Comparaison des résultats obtenus avec les différents modèles	82
6.9	Limites du modèle et incertitude sur les paramètres	86
6.10	Construction des tables de mortalité	87
6.10.1	Fermeture des tables	88
6.11	Exemple numérique	90
6.12	Conclusion	92
Conclusion Générale		94
Bibliographie		99
Annexes		102

Liste des abréviations

AIC *Akaike information criterion*

BIC *Bayesian information criterion*

BVZL *Bundesverband Vermögensanlagen im Zweitmarkt Lebensversicherungen*

CD *Capital Décès*

DExp *Double loi Exponentielle*

HIPAA *Health Insurance Probability and Accountability Act*

IRR *Internal Rate of Return*

K-L *Kullback-Leibler*

LISA *Life Insurance Settlement Association*

Log-Vrais *Log-Vraisemblance*

LS *Life Settlement*

NAV *Net Asset Value*

SET *Sauts à Effet Transitoire*

SOA *Society of Actuaries*

STOLI *Stranger-Originated Life Insurance*

VAB *Valeur Actuelle des Bénéfices futurs*

VAP *Valeur Actuelle des Primes futures*

VBT *Valuation Basic Table*

Introduction

« En ce monde rien n'est certain, à part la mort et les impôts. »

Ce fameux proverbe de Benjamin Franklin n'a jamais été autant d'actualité qu'aujourd'hui, surtout au vu de la tourmente financière et des troubles économiques qui sévissent ces derniers temps. Avec la volatilité des marchés financiers qui a flambé à des niveaux sans précédent lors de la crise financière et l'interdépendance du prix des actifs, la diversification efficace des portefeuilles est devenue d'autant plus appréciable qu'elle s'est avérée être une pratique bien difficile à mettre en place. Ainsi, la recherche de placements dont le rendement ne dépend pas de l'évolution du marché des actifs traditionnels est devenue plus importante que jamais.

Dans ce contexte, il n'est pas surprenant de voir les investisseurs chercher des alternatives et se tourner vers le marché de l'assurance vie, et plus particulièrement vers le rachat de polices d'assurance vie individuelles. La structure de risque dans n'importe quel contrat individuel d'assurance vie est bien évidemment très éloignée des risques classiques rencontrés sur les marchés financiers. Les gens vivent et meurent selon les rythmes naturels de leur cycle de vie, indépendamment de l'évolution des marchés. Les life settlements constituent ainsi une nouvelle classe d'actifs qui répondent au besoin de diversification des investisseurs.

Longtemps, la classification des contrats d'assurance vie en tant qu'actifs financiers à part entière a été ignorée du fait de l'utilisation classique de l'assurance vie comme protection et couverture du risque de décès. Or, comme nous le verrons dans la suite, les valeurs intrinsèques des polices sont souvent positives alors même que l'assuré est toujours en vie. Plus l'espérance de vie restante est faible, plus la valeur de l'assurance est importante. Le marché secondaire de l'assurance vie, qui s'est développé aux Etats-Unis depuis plusieurs années, permet justement aux investisseurs de racheter les contrats de souscripteurs n'ayant plus besoin de couverture d'assurance et désirant revendre leur police.

Bien que ce type de transaction soit apparue que récemment, les life settlements ont réussi à attirer l'attention des investisseurs, grâce à des rendements attractifs qui ne sont pas directement liés à l'activité économique. De nombreux hedge funds, banques et autres fonds d'investissement ont déjà placé des millions de dollars dans ce nouveau marché. Malgré tout, le nombre de recherches et d'études scientifiques effectuées sur le sujet reste assez limité et les articles publiés se focalisent principalement sur des aspects pratiques.

Revu des articles scientifiques et autres publications disponibles sur le sujet

DOHERTY and SINGER (2002) ont été parmi les premiers à analyser les bénéfices et gains pour les consommateurs et autres acteurs du marché lié à l'émergence du marché secondaire de l'assurance vie aux États-Unis. KOHLI (2006) examine l'environnement réglementaire des life settlements et aborde également les questions fiscales alors que STONE and ZISSU (2006) se préoccupent des principaux enjeux liés à la titrisation de ces actifs. BHUYAN (2009) présente également le processus de titrisation de portefeuilles de life settlements et donne un aperçu global du marché en décrivant les pratiques d'évaluation ainsi que le cadre juridique réglementaire. Tout une partie du livre est également consacrée aux problèmes éthiques et moraux qui accompagnent ce type d'investissement.

En ce qui concerne les aspects techniques et plus particulièrement les méthodes d'évaluation, ZOLLARS et al. (2003) se sont contentés de comparer les différentes approches utilisées par les acteurs du marché. ASPINWALL et al. (2009) décrivent une méthode plus avancée en se basant sur des techniques utilisées pour calculer la valeur des contrats d'échange sur risque de crédit (*Credit Default Swap*). BROCKETT et al. (2012) introduisent une nouvelle méthode pour incorporer l'information médicale dans les tables de mortalités à l'aide d'outils d'optimisation non-linéaire. Enfin, AFFOLTER et al. (2014) discutent les pratiques actuelles de valorisation et proposent des pistes d'amélioration.

De la même manière, certains auteurs ont examiné les risques, les rendements et les effets de corrélation de cette nouvelle classe d'actif. ROSENFELD (2009) explore les risques et bénéfices pour les institutions actives sur le marché secondaire de l'assurance vie alors que BRAUN et al. (2011) analysent les performances et risques des fonds de type ouvert. Finalement, GATZERT (2010) fournit une étude complète et détaillée des bénéfices et risques du marché secondaire de l'assurance vie au Royaume Uni, en Allemagne et aux États-Unis et JANUÁRIO and NAIK (2013) déterminent les rendements espérés pour les investisseurs sur base d'un ensemble de données sur des transactions américaines.

Il est également intéressant de citer une étude actuarielle de DELOITTE Consulting LLP and The University of Connecticut (2005) sur l'industrie des life settlements et sur la valeur ajoutée générée pour le vendeur. Les auteurs mettent en évidence une certaine inefficience du marché liée aux multiples coûts associés aux transactions sur le marché secondaire de l'assurance vie. On peut également ajouter le mémoire de DEDES (2011) qui cherche à déterminer la « juste valeur » pour des polices d'assurance vie sur un marché secondaire.

Structure du document

Notre contribution consiste à fournir une analyse critique des méthodes d'évaluations actuelles utilisées par les acteurs du marché et d'introduire une nouvelle approche permettant l'incorporation de tout type d'information médicale dans les calculs de tarification. Nous présenterons également différents modèles mathématiques pour intégrer des sauts de mortalité ou de longévité dans les tables de mortalité de base.

Après une définition détaillée des life settlements ainsi qu'un bref aperçu de l'état actuel et du développement du marché secondaire de l'assurance vie aux États-Unis, nous expliquerons le processus de transaction usuel et dévoilerons les principaux acteurs du marché. Dans le chapitre 2, nous exposerons les différents risques liés à cette classe d'actifs non-conventionnels.

La deuxième partie du mémoire se focalise sur les pratiques de valorisation existantes pour les life settlements et la gestion active des fonds spécialisés dans ce type d'actifs. Il existe principalement trois méthodes différentes pour calculer la valeur d'une police : La méthode déterministe, la méthode probabiliste et la méthode stochastique. Chaque approche a ses spécificités ainsi que ses avantages et ses inconvénients. Nous illustrerons les principales différences à l'aide d'exemples chiffrés sur différentes polices et même sur des portefeuilles entiers. Une des difficultés principales rencontrée en matière d'évaluation de life settlements est l'incorporation de l'information médicale dans le modèle de tarification. Nous utiliserons une méthode statistique fondée sur la théorie des probabilités et de l'information pour ajuster une table de mortalité de manière à obtenir une nouvelle table reflétant toute l'information médicale disponible sur l'état de santé de l'assuré. Dans le chapitre 5, des techniques de Monte Carlo sont appliquées à un portefeuille contenant quelques centaines de polices pour déterminer les rendements probables futurs et le retour auquel les investisseurs peuvent s'attendre.

Finalement, dans la dernière partie, nous présenterons une extension du modèle bien connu de Lee-Carter pour modéliser les taux de mortalité futurs et créer des tables de mortalité pouvant être utilisées comme tables de référence pour effectuer la valorisation. LEE and CARTER (1992) modélisent le logarithme des taux de mortalité comme étant une combinaison linéaire d'un facteur de mortalité dépendant du temps, ajusté de deux paramètres spécifiques à l'âge. Cette approche est souvent utilisée comme point de départ pour développer des modèles plus spécifiques, notamment en matière de titrisation du risque de longévité¹. Dans le cadre de ce mémoire, nous proposons un modèle généralisé de Lee-Carter intégrant des sauts asymétriques de mortalité. Les sauts de mortalité peuvent se produire pour diverses raisons : un changement soudain des conditions environnementales peut conduire à un saut de mortalité à la hausse, alors qu'une avancée médicale spectaculaire peut provoquer un saut de longévité inattendu.

Plusieurs auteurs ont développé des modèles intégrant ces sauts de mortalité. CHEN and COX (2009) supposent qu'ils n'ont qu'un effet transitoire sur les taux de mortalité et proposent un modèle intégrant des sauts uniquement avec effet sur une seule période. CHEN et al. (2010) combinent les deux types de sauts dans leur modèle et supposent que les sauts de mortalité suivent une loi normale. Finalement, BROCKETT et al. (2010) et CHEN et al. (2011) suggèrent d'utiliser une double loi exponentielle pour prendre en compte le caractère asymétrique des sauts de mortalité et de longévité.

Après avoir comparé les différentes approches avec les données historiques de mortalité aux États-Unis, nous pouvons constater que le modèle à sauts asymétriques se transforme en un modèle avec sauts à effets transitoires, dû à l'incapacité de mettre en évidence des sauts de longévité dans l'évolution passée des taux de mortalité américains. Le modèle retenu est ensuite utilisé pour construire des nouvelles tables de mortalités pouvant être utilisées pour calculer la valeur de polices sur le marché secondaire de l'assurance vie.

1. Voir DENUIT et al. (2007) qui utilisent le modèle de Lee-Carter pour déterminer le prix d'obligations de longévité à l'aide de la transformée de Wang.

Première partie

Présentation du marché secondaire de
l'assurance vie

Chapitre 1

Le marché des life settlements

1.1 Définition et développement du marché

1.1.1 Définition

Le « life settlement » est une opération par laquelle le souscripteur d'une police d'assurance vie avec couverture décès en vend la propriété à un tiers. Le transfert concerne à la fois l'obligation de payer les primes et le droit de recevoir les prestations prévues dans le contrat (capital décès). Pour le souscripteur, qui reçoit un paiement immédiat en vendant la police, il s'agit là d'une alternative au rachat classique proposée par les compagnies d'assurance. Quant à l'investisseur qui « rachète » la police, il devient le propriétaire et bénéficiaire du contrat. Il prend donc en charge le versement des primes pendant la durée restante du contrat et reçoit le capital défini dans le contrat au moment du décès de l'assuré. En termes de flux de trésorerie, l'opération de life settlement (LS) est assimilable à l'achat d'une obligation à coupons négatifs, correspondant au paiement des primes, avec une durée incertaine égale à la durée de vie restante de l'assuré.

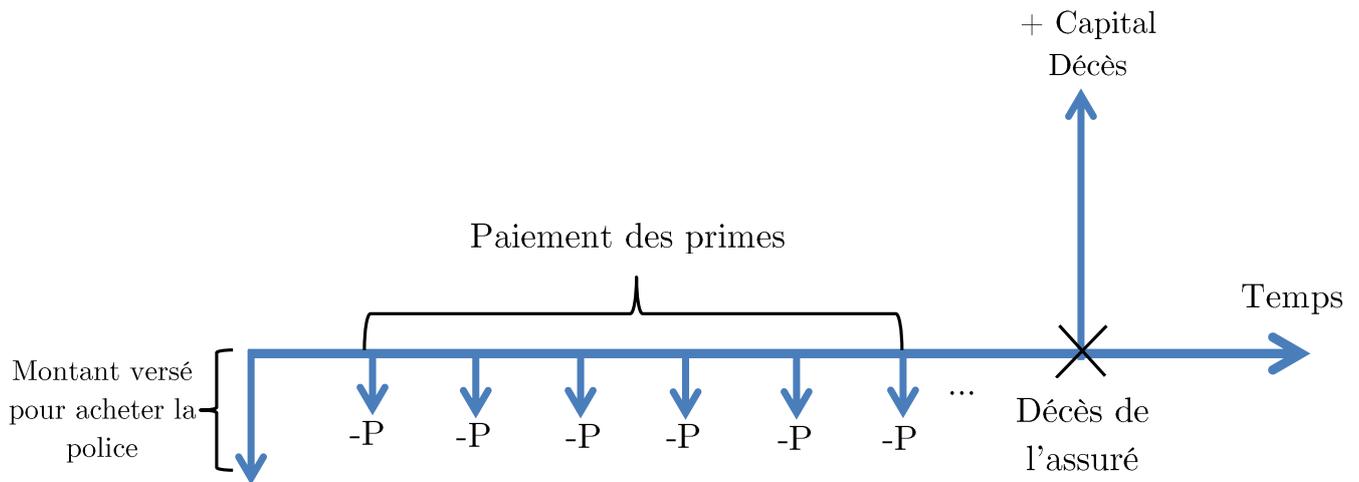


FIGURE 1.1 – Représentation des Flux dans le temps du point de vue de l'investisseur

Avant l'émergence du marché des life settlements, le détenteur d'une police d'assurance avait deux possibilités s'il ne voulait plus de son contrat d'assurance. Il pouvait soit demander le rachat de sa police auprès de son assureur ou éventuellement procéder à une réduction du contrat, c'est-à-dire à suspendre le versement des primes sans effectuer de rachat. Le marché secondaire de l'assurance vie offre ainsi une troisième option pour le souscripteur désireux de mettre un terme à son contrat. Cette option consiste à revendre la police à une entité tierce qui, au départ, n'est pas liée juridiquement ou contractuellement avec le preneur d'assurance.

Ce procédé permet avant tout d'extraire la valeur non réalisée lorsqu'une police d'assurance vie est rachetée directement auprès de l'assureur. Cette valeur non réalisée est la différence entre la valeur probable actualisée des flux futurs et la valeur de rachat. En effet, la valeur de rachat proposée par les compagnies d'assurance correspond à l'épargne récupérable au moment du rachat (montant des primes payées après déduction des différents frais par l'assureur) et s'appuie sur les mêmes bases techniques que celles servant à la tarification. Par conséquent, elle ne tient pas compte des éventuelles évolutions de l'état de santé de l'assuré depuis la création du contrat. Le marché secondaire de l'assurance vie cible majoritairement les polices pour lesquelles l'état de santé de l'assuré s'est dégradé depuis la création du contrat (on parle d'*impaired life* en anglais), ce qui implique que la valeur actuarielle² de la police dépasse largement la valeur de rachat. C'est cette situation de grand écart entre une faible valeur de rachat et une généreuse prestation sur le point d'être servie qui a donné naissance à ce marché.

2. Par valeur actuarielle on entend la différence entre la valeur probable actualisée du capital décès à percevoir dans le futur et la valeur probable actualisée des primes futures à payer.

1.1.2 Historique

L'émergence du marché secondaire de l'assurance vie a été rendu possible par la jurisprudence aux Etats-Unis au début du 20^e siècle³, qui a reconnu la possibilité de transférer la propriété d'une police d'assurance au même titre qu'un actif financier classique comme une action ou une obligation par exemple. Plus récemment, la loi issue du *Health Insurance Probability and Accountability Act (HIPAA)* en 1996 a confirmé une nouvelle fois le droit de transfert de propriété d'une police d'assurance vie vers un tiers n'ayant pas d'intérêt assurable dans la vie de l'assuré.

Les premières opérations de rachat de polices d'assurance vie n'ont cependant vu le jour que bien plus tard. Bien qu'éthiquement assez contestable, ce type de pratique fut très utilisée dans les années 80 lors des débuts de l'épidémie de SIDA. Les espérances de vie limitées des personnes assurées rendaient l'achat des polices très attractif non seulement pour les investisseurs, qui pouvaient tirer profit du caractère imminent de la prestation décès à recevoir, mais également pour les assurés, qui se retrouvaient face à des frais de soin compromettant leur situation financière et donc un besoin accru en liquidités. Ces opérations, connues sous le nom de « viatical settlements », présentaient une belle opportunité de marché pour des investisseurs à la recherche de rendements décorrélés de l'évolution des marchés financiers. Au fur et à mesure des avancées médicales et de l'amélioration des traitements proposés aux personnes atteintes du SIDA, les rendements pour les investisseurs se sont effondrés et le marché a dû finalement se tourner vers de nouvelles opportunités. Les viatical settlements se sont alors concentrés sur des assurés en phase terminale de tout type de maladie et non plus seulement du SIDA.

1.1.3 Émergence d'un nouveau marché

Vers la fin des années 90, un marché plus abouti et mieux réglementé a remplacé celui des viatical settlements. Il s'agit des life settlements aussi dénommés « senior settlements » qui visent à étendre la pratique du viatique afin de toucher une quantité plus large de polices d'assurance. On pourrait voir le life settlement comme une opération viagère appliquée à l'assurance vie. Dans ce sens, un viatical settlement est en quelques sortes un cas spécial de life settlement pour lequel l'espérance de vie de l'assuré est inférieure à deux ans. Le marché américains des life settlements cible des polices pour

3. Suite au cas *Grigsby v. Russell* en 1911, la Cour suprême des Etats-Unis a reconnu le droit pour le preneur d'assurance de décider à sa seule discrétion de transférer la propriété légale et les intérêts bénéficiaires de son contrat à un tiers.

lesquelles l'assuré a plus de 65 ans, avec une espérance de vie inférieure à la moyenne (typiquement entre 2 et 12 ans) et un état de santé plus ou moins fortement dégradé. La valeur faciale doit se situer de préférence au-dessus des \$ 250 000 avec une moyenne se trouvant entre \$ 1 Mio et \$ 2 Mio.

	Viaticals	Life Settlements
Valeur faciale	< \$ 100 000 et généralement entre \$ 25 000 – \$ 50 000	> \$ 100 000 et généralement au-dessus de \$ 250 000
Assuré	Patient atteint du SIDA âgé entre 25 et 44 ans	Séniors de plus de 65 ans
Espérance de vie	< 2 ans et la plupart du temps < 12 mois	> 2 ans, pouvant aller jusqu'à 15 ans

TABLE 1.1 – Comparaison entre viatical et life settlements

L'émergence de ce type de transaction aux Etats-Unis n'est pas un hasard. Certaines caractéristiques du droit américain des assurances favorisent en effet le développement d'un marché secondaire pour l'assurance vie. Voici les raisons principales qui permettent de comprendre pourquoi ce marché s'est initialement développé outre-Atlantique et peine toujours à prendre de l'ampleur dans les pays européens :

- Clause de **non-contestabilité** : Clause incluse dans les conditions générales des polices d'assurance vie aux Etats-Unis et qui précise qu'une tierce partie peut acheter une police âgée de 2 ans ou plus ;
- Clause d'**intérêt assurable** : Le souscripteur a le droit de transférer une police d'assurance à n'importe quelle autre partie, sous condition qu'au moment de la souscription du contrat il existait bien un intérêt assurable valide ;
- Développement de la **réglementation** américaine sur le marché secondaire de l'assurance vie (HIPAA) a renforcé la confiance des investisseurs et relancé l'intérêt pour ce type de transactions ;
- **Système de santé très coûteux** pour les individus qui se retrouvent face à des besoins de liquidité accrus pour payer les traitements médicaux.

A cela s'ajoute également le volume du marché primaire de l'assurance vie qui est très élevé avec un nombre important de polices potentiellement intéressantes pour le marché secondaire⁴. En effet, ce marché est limité par la taille du marché primaire et par le nombre de polices satisfaisants aux critères de sélection des investisseurs. D'après une étude de Moodys réalisée en 2006, seulement 1% des polices d'assurance vie entière en vigueur aux Etats-Unis répondent aux critères couramment utilisés par les investisseurs potentiels. Ceci explique aussi pourquoi uniquement 15% à 25% des polices présentées aux fournisseurs de LS (voir section 1.2) aboutissent réellement à une transaction.

1.2 Déroulement d'une transaction

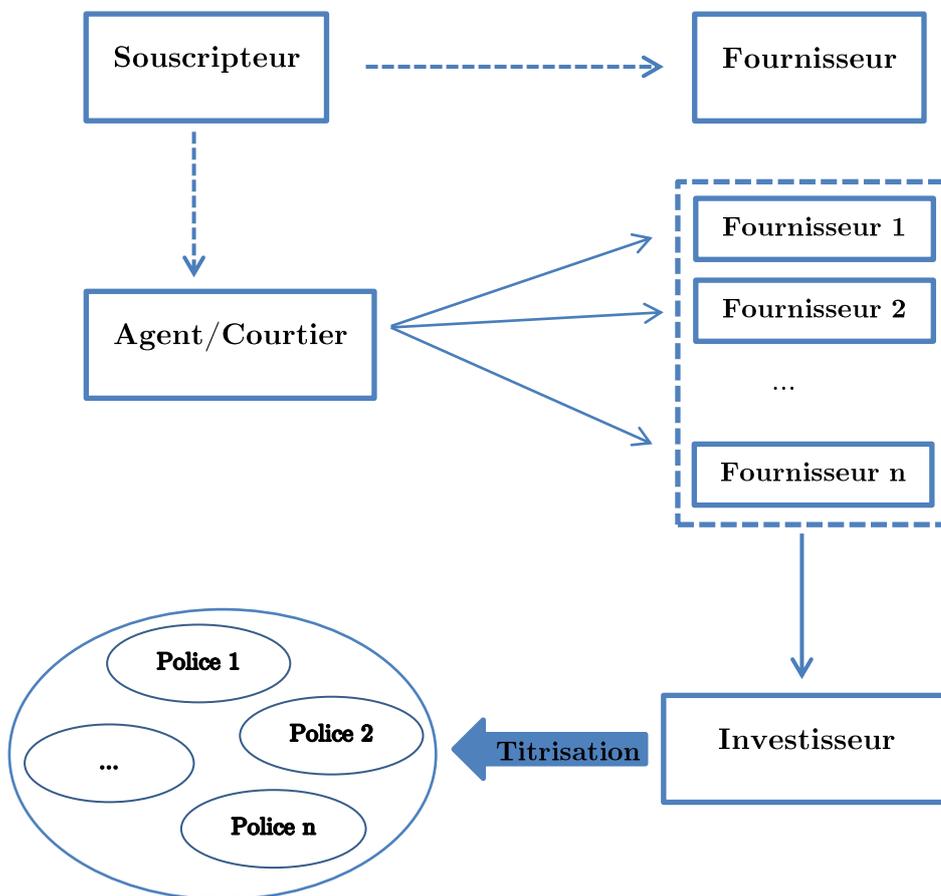


FIGURE 1.2 – Processus de transaction

4. Le marché primaire américain est le plus grand marché de l'assurance vie au monde, représentant un peu moins de 25% du volume de primes global en 2007 selon une étude de SwissRe, avec environ 160 Mio de polices vie individuelles en vigueur pour une valeur faciale totale de plus de 10 000 Mrd USD.

Le graphique qui précède illustre le déroulement usuel d'une transaction sur le marché secondaire de l'assurance vie. Plusieurs parties sont impliquées dans une telle transaction. Voici une liste des principaux acteurs prenant part dans une opération de life settlement ainsi que leur rôle sur ce marché.

Souscripteur / Propriétaire de la police

Le souscripteur est le propriétaire du contrat désirant revendre sa police. Avec le temps qui passe, les circonstances de la vie peuvent aboutir à une modification des besoins du souscripteur. Différentes raisons peuvent donc amener le propriétaire à vouloir revendre son contrat d'assurance vie :

- Bénéficiaire initialement prévu au contrat ne nécessite plus cette couverture ;
- « Personne clé » ciblée dans la police quitte l'entreprise ;
- Paiement des primes devient une charge financière trop importante ;
- Besoin de liquidité ;
- Pension retraite insuffisante ;
- Divorce ou autre changement de situation familiale ;
- etc.

Quelques soient ces raisons, les paiements en liquidités grâce aux life settlements sont toujours plus élevés que les valeurs de rachat prévues dans le contrat avec la compagnie d'assurance et constituent donc une alternative intéressante pour les souscripteurs.

Courtier / Agent

Afin de vendre sa police sur le marché secondaire, le consommateur peut soit directement contacter une compagnie spécialisée dans le rachat de polices d'assurance vie, appelée fournisseur de life settlements, ou il peut passer par l'intermédiaire d'un agent reconnu et agréé par une licence qui devient ensuite le représentant professionnelle du souscripteur. Le rôle du courtier est de s'occuper de l'ensemble des procédures administratives qui accompagnent le transfert de la police à un investisseur tiers. L'assuré devra alors se soumettre à une série de tests médicaux, effectués par des cabinets spécialisés dans ce type d'opérations, qui ont pour objectif d'analyser au mieux son état de santé. Le dossier médical sera ensuite utilisé pour évaluer la police qui sera vendue sur le marché. Finalement, l'agent en charge de la transaction contacte plusieurs fournisseurs et négocie le meilleur prix de vente pour le consommateur.

Fournisseur de life settlements

Le fournisseur (*Provider* en anglais) est l'entité qui rachète la police au souscripteur. Cette entité se charge d'effectuer le transfert de propriétaire auprès de la compagnie d'assurance. Le souscripteur reçoit alors le montant correspondant à la vente de la police et le fournisseur s'engage à payer les primes. C'est lors de cette phase que des commissions sont payées aux différentes parties ayant servi d'intermédiaire dans l'ensemble du processus de transaction (courtier et/ou agent, conseiller financier, spécialistes médicaux, etc.).

Investisseur

Le fournisseur se charge finalement de revendre la police auprès d'investisseurs à la recherche de nouveaux types d'actifs financiers afin de diversifier leur portefeuille. De nos jours, la plupart des investisseurs sur le marché des life settlements sont des investisseurs institutionnels, comme par exemple des hedge funds, des banques d'investissement ou des fonds de pension. Parmi les acteurs les plus importants du marché, on retrouve des banques mondialement connues comme Credit Suisse, Citigroupe, Deutsche Bank, Goldman Sachs, UBS, ABN Amro ou encore BNP Paribas⁵. Ceux-ci rachètent les polices du fournisseur et prennent en charge le paiement des primes. L'objectif de ces investisseurs institutionnels est d'acquérir un grand nombre de polices, qui sont ensuite regroupées dans un « pool » de life settlements pour pouvoir être titrisées et traitées comme des actifs financiers à part entière (dans le langage financier, on parle alors d'*Asset Back Securities*). À cet égard, la titrisation est évidemment un excellent moyen de financement.

Du point de vue de l'investisseur, le life settlement est une classe d'actifs dont le rendement est fortement décorrélé de l'évolution des marchés financiers et présente donc une opportunité de diversification remarquable pour des portefeuilles plus larges contenant des actifs sensibles aux évolutions des marchés financiers.

La dernière étape de ce procédé est la maturité de la police (lors du décès de l'assuré). A ce moment, le capital décès est payé par la compagnie d'assurance au fournisseur, qui transfère ensuite le montant dû à l'investisseur final. Celui-ci doit bien évidemment se soumettre aux taxes locales en vigueur dans le pays de résidence. Dans le cadre de ce mémoire nous ne rentrerons pas plus en détail dans les questions de taxes liées aux investissements sur le marché secondaire de l'assurance vie. Pour plus de

5. Source : FRENCH (2006).

renseignements sur les aspects fiscaux, le lecteur pourra se référer au chapitre 18 du livre BHUYAN (2009).

1.3 Type de polices échangées sur le marché secondaire

Il existe différents types de contrats pouvant être échangés sur le marché secondaire de l'assurance vie. L'acquisition d'une police expose l'acheteur à tous les termes et conditions du contrat. Par conséquent, le type de contrat négocié est d'une importance fondamentale pour déterminer le rendement potentiel futur de la police en question. Il est important de noter ici que même si les investisseurs achètent des contrats avec des composantes épargne, l'intérêt porte uniquement sur le capital décès défini dans le contrat. L'acheteur se contente uniquement de payer les primes afin de garder les polices en vigueur aussi longtemps que l'assuré est en vie et de pouvoir recevoir le capital décès lors de la maturité du contrat.

De manière générale, les polices peuvent être classées dans deux catégories : assurances vie entière (*permanent insurance* en anglais) et assurances à terme (*term insurance*). Les assurances vie entière durent pendant toute la durée de vie et le paiement du capital prévu dans le contrat se fait lors du décès de l'assuré. A l'inverse, les assurances à terme payent uniquement un capital décès si l'assuré décède durant la période fixée dans le contrat. Voici une liste des différents types de contrats rencontrés sur le marché secondaire de l'assurance vie aux Etats-Unis :

Assurance « vie-universelle » (*Universal Life*)

Les assurances « vie-universelle » sont des contrats de type permanent, permettant au souscripteur de se constituer une épargne tout en garantissant au bénéficiaire de recevoir un capital ou une rente fixé à l'avance en cas de décès. Ce type de police couvre plus de 95% des polices d'assurance vie vendues sur le marché des life settlements et représentent également la majorité des polices d'assurance vie en vigueur aux Etats-Unis. Il s'agit là d'une combinaison entre une assurance vie épargne et une assurance décès. Le souscripteur verse librement ou périodiquement des primes sur le contrat pour constituer une épargne qui produit ensuite des intérêts à un taux fixé dans le contrat. A tout moment, le rachat peut être demandé, sachant que la valeur de rachat est toujours inférieure ou égale à la valeur totale de l'épargne accumulée à cause des divers frais et pénalités de rachat qui viennent réduire le montant reçu.

La somme versée par la société d'assurance lors du décès de l'assuré est déterminée dans les termes du contrat. Il s'agit généralement d'un montant fixe, qui ne dépend pas de ce que le souscripteur a versé, ni de la capitalisation de son épargne.

Du point de vue de l'investisseur, les contrats *Universal Life* sont attractifs parce qu'ils fournissent une couverture sur la vie entière pour un coût relativement faible et offrent une grande flexibilité en matière de paiement des primes. En effet, les coûts d'un tel contrat peuvent être facilement séparés en trois composantes : frais de gestion, coût de l'assurance décès et partie épargne. A l'aide de ces trois composantes il est ensuite possible de déterminer le flux minimum de primes à payer pour maintenir la police en vigueur jusqu'au paiement du capital décès par la compagnie d'assurance. La partie épargne n'est pas d'une grande importance lorsque la police est revendue sous forme de life settlement.

Une sous-catégorie des assurances « vie-universelle » concerne les assurances « vie-universelle variable » (*Variable Universal Life*). Ce type de police a principalement les mêmes caractéristiques que celles des assurances vie-universelle. La différence entre ces deux catégories de contrats réside dans la gestion des sommes investies. Alors que pour les assurances vie-universelle classiques l'épargne est investie dans des instruments financiers de long terme avec des taux fixes et des rendements relativement stables, pour les assurances vie-universelle variable le souscripteur peut choisir entre différentes stratégies d'investissement avec des rendements potentiellement plus élevés mais également plus volatiles.

Assurance vie entière (*Whole Life*)

Les assurances de type vie entière sont des contrats d'assurance vie de durée viagère, qui garantissent, en contrepartie du versement par le souscripteur d'une prime unique ou de cotisations périodiques, le versement au(x) bénéficiaire(s) d'un capital en cas de décès de l'assuré, quelle qu'en soit la date. Ce type d'assurance est essentiellement souscrit en vue de transmettre un patrimoine à un ou plusieurs bénéficiaires dans une optique de prévoyance. Les primes sont généralement constantes dans le temps (primes nivelées) et dépendent du capital décès prévu dans le contrat.

Assurance temporaire décès (*Term Insurance*)

Elle garantit le versement d'un capital ou d'une rente en cas de décès de l'assuré survenant pendant la période de validité du contrat. Si l'assuré est en vie au terme de cette période, le contrat d'assurance prend fin et les cotisations versées ne sont pas récupérées par le souscripteur du contrat. C'est le

type de contrat utilisé fréquemment pour les assurances « homme clé » qui visent à compenser la perte d'exploitation d'une société pour garantir sa pérennité en cas du décès d'un collaborateur indispensable au bon fonctionnement de l'entreprise. Il existe également des assurances de type mixte (*Endowment insurance*), qui garantissent le paiement d'un capital dans le cas où l'assuré est toujours en vie à la fin de la période de validité du contrat. En contrepartie, les primes à payer pour une assurance mixte sont nettement plus élevées que pour une simple temporaire décès.

1.4 Taille du marché et perspectives d'avenir

Le marché secondaire de l'assurance vie a historiquement été prédominant aux Etats-Unis. La valeur nominale des polices d'assurance vie revendues en tant que life settlement a augmenté d'un peu plus de \$ 1 Mrd en 2000 jusqu'à environ \$ 12 Mrd en 2007. Une étude menée par *Conning Research & Consulting, Inc.* a estimé que d'ici 2016 les transactions annuelles pourraient atteindre entre \$ 90 Mrd et \$ 140 Mrd en valeur nominale. En effet, le marché potentiel aux US est gigantesque. D'après l'*American Council of Life Insurers*, le marché de l'assurance vie aux USA atteignait une valeur de 18 400 Mrd de dollars en 2010. Ce même organisme a également noté une baisse notable des taux de résiliation et de rachat des polices entre 2000 et 2010. Il est fort probable que l'émergence du marché secondaire de l'assurance vie a contribué à cette diminution.

Tout comme pour les autres classes d'actifs, le marché des life settlements s'est fortement contracté durant la crise financière de 2008, qui a vu les investisseurs institutionnels se détourner des investissements à long terme pour privilégier des actifs plus liquides. Cependant, avec la reprise de l'activité économique, le marché secondaire de l'assurance vie attire de plus en plus d'investisseurs désirant diversifier leur portefeuille en investissant dans ce type d'actifs non-conventionnels, d'autant plus que la non-corrélation relative avec les marchés financiers offre des perspectives de rendements plutôt stables qui ne dépendent pas de l'état général de l'économie.

1.5 Le marché secondaire de l'assurance vie en Europe

Nous venons de voir que l'industrie des life settlements se focalise avant tout sur le marché américain. Néanmoins, le marché secondaire de l'assurance vie existe également sous différentes formes dans d'autres pays à travers le monde et également en Europe. En Allemagne p.ex., le marché secondaire

a été établi en 1999, et depuis sa taille n'a pas cessé d'augmenter. L'association des représentants du marché secondaire, le *Bundesverband Vermögensanlagen im Zweitmarkt Lebensversicherungen* (BVZL) estime que plus de 100 000 polices ont déjà été revendues à des tiers pour une valeur de rachat globale culminant à environ 5,2 Mrd d'euros. Actuellement, uniquement des polices de type mixte (assurance vie constitutive de capital assortie d'un capital garanti en cas de vie et de décès) peuvent être revendues sur le marché allemand et seulement les investisseurs institutionnels ont le droit de participer à ce marché ; les transactions privées ne sont pas autorisées.

Au Royaume-Uni, où le marché de l'assurance est le 3^e au monde après celui des Etats-Unis et du Japon, la situation est similaire à celle qui existe en Allemagne. Les polices vendues sur le marché britannique sont des polices d'assurance mixte traditionnelles, avec un paiement soit lors du décès de l'assuré, soit à la date de maturité du contrat. L'équivalent des life settlements, appelés les « *Traded Endowment Policies* » (TEP) se sont également fortement développés depuis le début des années 2000. Il est intéressant de noter que depuis 2002, les compagnies d'assurances britanniques sont obligées par la loi d'informer les clients désirant exercer leur droit de rachat, de la possibilité de passer par le marché secondaire plutôt que d'effectuer un rachat classique⁶. Il est estimé que les montants échangés sur le marché des TEP ont augmenté d'environ £ 10 Mio en 1989 à plus de £ 500 Mio aujourd'hui.

Et la France dans tout ça

Le droit des assurances français prévoit la possibilité de transférer un contrat d'assurance vie à un tiers, à condition que l'assuré sur la tête duquel le contrat a été souscrit donne son consentement par écrit avec indication du capital ou de la rente initialement garanti. Les articles L. 132-1 et L. 132-2 du code des assurances décrivent les conditions de validité du contrat lorsque la vie d'une personne est assurée par un tiers. Ainsi, dans le deuxième alinéa de l'article L. 132-2 il est précisé que : « *Le consentement de l'assuré doit, à peine de nullité, être donné par écrit, pour toute cession ou constitution de gage et pour transfert du bénéfice du contrat souscrit sur sa tête par un tiers.* »

A priori, la revente d'un contrat d'assurance vie auprès d'un investisseur n'est donc pas interdite par la loi, cependant, à notre connaissance, il n'existe pas à l'heure actuelle en France de marché secondaire de l'assurance vie comme on peut le trouver dans d'autres pays.

6. Réglementation émise par la *Financial Conduct Authority*.

1.6 Problème éthique et moral

Depuis la création de l'industrie des life settlements, cette pratique a toujours connu sont lot de sentiments négatifs. Le scepticisme et la méfiance générale liés au rachat de polices d'assurances vie par certains investisseurs remontent aux premières transactions de viatical settlements dans les années 80. En effet, comme indiqué précédemment, l'émergence du marché secondaire de l'assurance vie aux Etats-Unis coïncide avec les débuts de l'épidémie du SIDA. Les premiers contrats de viatical settlements concernaient alors des malades qui vendaient leur police afin de recevoir tout de suite un montant supérieur à la valeur de rachat contractuelle. Bien que parfaitement légal, ce procédé a été critiqué dans la mesure où la clientèle visée se trouvait dans une situation de faiblesse physique et de détresse psychologique, qui pouvait altérer ses capacités de négociation.

De façon plus générale, les critiques liées à l'activité des life settlements portent avant tout sur la spéculation des investisseurs sur le décès de l'assuré. En effet, le rendement pour l'investisseur sera d'autant plus important que le décès de l'assuré est proche. Or, cet événement, bien qu'il s'agisse d'un événement triste et tragique au sens psychologique du terme, est inévitable d'un point de vue statistique. De plus, Il existe une multitude d'exemples d'instruments financiers ou de pratiques diverses qui permettent de s'enrichir avec la mort d'un ou plusieurs individus. Un exemple bien connu est l'achat de biens immobiliers en viager.

Afin de limiter les aléas moraux qui accompagnent le marché des LS, il est donc important d'instaurer un cadre juridique cohérent afin de définir de façon claire et précise les rôles et responsabilités de chacun des acteurs agissant sur le marché.

Maintenant que nous avons vu un aperçu du marché des life settlements, regardons plus en détail les principaux risques auxquels les investisseurs doivent faire face lors du rachat de polices sur le marché secondaire de l'assurance vie.

Chapitre 2

Risques liés au marché des life settlements

Dans ce chapitre, nous avons répertorié les principaux risques associés au marché secondaire de l'assurance vie.

2.1 Risque d'évaluation

Un des risques les plus importants associé aux life settlements est sans aucun doute le risque lié à l'évaluation des polices. Comme nous le verrons dans le chapitre 3, l'évaluation de telles polices se fait généralement selon une approche « mark-to-model ». En effet, dû à l'absence de valeur de marché objective pour ce type de produits, la *Net Asset Value* (NAV) est déterminée à l'aide de modèles propres aux managers des fonds.

Le problème majeur de cette approche réside dans l'extrême sensibilité des modèles aux hypothèses faites sur la mortalité (espérance de vie de l'assuré), le taux d'actualisation utilisé (*Internal Rate of Return*, noté IRR), les dates d'entrée et de sortie des flux (début ou fin de période), etc. Puisqu'il n'existe pas de normes ou d'encadrement réglementaire préconisant la méthode actuarielle ainsi que les hypothèses à utiliser, l'évaluation des life settlements demeure très subjective et des variations importantes peuvent apparaître en fonction de la méthode utilisée.

Englobé dans le risque d'évaluation des life settlements, on retrouve également le risque lié à une mauvaise estimation de l'espérance de vie de la part des experts médicaux. Le calcul du rendement attendu d'un portefeuille dépend fortement de l'espérance de vie des personnes assurées, qui est déterminée par des cabinets médicaux spécialisés. Par conséquent, une mauvaise estimation de l'état de santé de l'assuré peut aboutir à une diminution du rendement final espéré.

2.2 Risque de longévité

Un autre facteur de risque clé est bien évidemment le risque de longévité, qui correspond à la possibilité que l'assuré vive plus longtemps que ce qui a été prévu à la base par les investisseurs. Le risque de longévité rejoint le risque lié à une mauvaise estimation de l'espérance de vie des assurés. En effet, plus l'espérance de vie réelle dépasse l'estimation, moins la police sera attractive d'un point de vue de l'investisseur. Cela est dû à une juxtaposition de deux effets qui s'additionnent et viennent simultanément diminuer le rendement final du produit :

1. Paiement des primes sur une période plus longue
2. Montant prévu au terme du contrat est perçu à une échéance plus éloignée

Le risque de longévité est particulièrement dangereux puisqu'il s'agit d'un risque systémique qui peut toucher l'ensemble des polices présentes dans un portefeuille. L'augmentation générale de l'espérance de vie liée aux avancées médicales ces dernières années n'ont fait que renforcer le risque de longévité. Des experts du secteur ont estimé que certains des acteurs principaux du marché semblent systématiquement sous-estimer les espérances de vie des assurés. Les investisseurs ont donc tout intérêt à bien choisir les cabinets médicaux et devraient, par principe de précaution, baser leurs calculs sur plusieurs estimations indépendantes afin de réduire au maximum ce risque.

Différentes mesures permettent de réduire au moins partiellement le risque de longévité. Pour commencer, les managers de fonds peuvent diversifier leur portefeuille à travers toute sorte de maladies (cancer, diabète, maladies cardio-vasculaires, etc.). Cela diminue en partie, les baisses de rendements qui pourraient provenir du développement d'un médicament ou d'un traitement efficace pour lutter contre une maladie courante. De plus, il est également possible de recourir à des instruments financiers comme les swaps de longévité, les s-forwards ou les q-forwards⁷.

7. Ces instruments permettent de se couvrir contre le risque de longévité en transférant une partie ou la totalité de ce risque à une contrepartie en échange de paiements périodiques fixes, déterminés à la souscription du contrat

2.3 Risque de liquidité

Le manque de liquidité est une autre entrave au développement du marché des life settlements. Le problème est lié à la nature même de ces produits. Les entrées d'argent, provenant des capitaux reçus en cas de décès d'un assuré, ne se font pas de façon récurrente et ne sont pas faciles à prévoir. A l'inverse, les flux sortants liés au paiement des primes et frais de gestion divers ont un caractère assez régulier. Si on ajoute à cela le manque de liquidité du produit sous-jacent (police d'assurance), on comprend facilement la forte exposition de ce type d'investissement au risque de liquidité.

Les conséquences d'un manque de liquidité peuvent être dévastatrices pour un fonds investissant sur le marché secondaire de l'assurance vie. En effet, si le fonds n'a pas assez de cash pour faire face au paiement des primes et autres frais annexes, le gestionnaire se verra obliger de vendre certaines polices afin de faire face au besoin de liquidité. Or, il est fort probable que celui-ci n'arrive pas à vendre assez rapidement les polices voulues pour une valeur acceptable dû à la faible activité sur ce marché et à la complexité des transactions. De plus, une telle situation risque également de provoquer un défaut de paiement des primes pour d'autres polices présentes dans le portefeuille, ce qui peut ensuite entraîner leur déchéance. De la même façon, si un investisseur désire retirer son argent, le gestionnaire du fonds doit soit trouver un autre investisseur prêt à racheter les parts du premier, soit il doit vendre assez de polices afin de libérer le montant requis.

Afin de se protéger contre le problème d'actifs illiquides et d'éviter de se retrouver dans ce genre de situation, certains fonds instaurent des périodes de blocage du capital ou imposent des frais de rachat afin de limiter au maximum les retraits d'argent prématurés de la part des investisseurs. Finalement, le gestionnaire peut également se réserver le droit de suspendre tous les rachats pendant une période limitée. Alors que ces mesures permettent de réduire le risque de liquidité au niveau du fonds, elles entravent clairement la liquidité des parts du fonds pour les investisseurs et doivent par conséquent être pris en considération lors de l'investissement, sous peine de voir son capital bloqué en cas de crise majeure sur les marchés financiers. Lors du pique de la crise financière en 2008, plusieurs fonds se sont ainsi retrouvés face à des problèmes majeurs de liquidité à cause d'une perte de confiance des investisseurs qui réclamaient massivement la récupération de leurs investissements. Cette événement a causé une diminution des transactions sur le marché secondaire de l'assurance vie pendant et juste après le crise financière.

2.4 Risque de crédit / risque de défaut

Le renflouement de AIG en 2008 a mis en évidence le fait que le défaut d'un assureur, aussi important soit-il, n'est pas un événement impossible et doit par conséquent être pris en compte comme un risque possible par les investisseurs. L'insolvabilité ou la faillite d'une compagnie d'assurance peut résulter en une perte sèche pour l'investisseur qui risque de se voir priver de tout ou partie du capital décès initialement prévu dans la police.

2.5 Changement de réglementation et législation

Finalement, il ne faut pas négliger le risque d'un changement défavorable du cadre réglementaire et fiscale entourant les opérations de LS. Jusqu'à assez récemment, la régulation du marché des LS aux Etats-Unis était incomplète et même partiellement incohérente.

Tout comme l'industrie de l'assurance dans sa globalité, la vente de police d'assurance vie sur le marché secondaire est strictement encadrée et réglementée aux Etats-Unis. D'après l'association des opérateurs du marché, appelée LISA⁸, 42 Etats fédéraux ainsi que Puerto Rico ont actuellement mis en place une forme de régulation pour ce type d'opérations. Cette réglementation a pour objectif de protéger les propriétaires de contrats d'assurance vie en imposant aux courtiers et aux fournisseurs de life settlements des exigences diverses quant aux informations à fournir au client ainsi qu'en ce qui concerne la délivrance de permis donnant les droits d'exercer sur ce marché.

Malgré ces récents changements en matière de régulation, les lois varient toujours d'un Etat à l'autre. Certains Etats n'ont aucune réglementation concernant les transactions sur le marché secondaire de l'assurance vie pendant que d'autres Etats ont mis en places des lois encadrant uniquement le marché des viatical settlement et pas celui des life settlements. Enfin, les Etats les plus réglementés imposent aux intermédiaires d'avoir une licence afin de pouvoir être acteur sur le marché.

Une question en suspens sur le marché secondaire de l'assurance vie concerne la création d'une police pour le bénéfice d'une tierce partie (investisseur), dont le seul objectif est d'en tirer un profit financier. Cette pratique, connue sous le nom de *Stranger-Originated Life Insurance* (STOLI) est considérée comme étant une violation à la clause d'intérêt assurable, qui doit obligatoirement être présente lors de la création du contrat. Dans ce sens, le STOLI se distingue d'une opération classique

8. Créée en 1994, la *Life Insurance Settlement Association* représente les différents opérateurs de marché. Son objectif est de promouvoir le développement et la réputation de l'industrie des LS et de favoriser la compétitivité du marché.

de life settlement dans la mesure où, à l'origine du contrat, il n'existe pas pour le preneur d'assurance d'intérêt assurable sur la vie de l'assuré. Cependant, en pratique, la différence entre une opération de life settlement classique tout à fait légale et une opération de type STOLI n'est pas toujours évidente. Il est donc clairement nécessaire de mettre en place un ensemble de règles générales et de lois encadrant ces transactions afin d'éviter les fraudes et manipulations diverses. Dans ce sens, la plupart des acteurs majeurs du marché poussent vers davantage de réglementation dans un souci de rassurer à la fois les autorités publiques mais également les investisseurs et les preneurs d'assurance .

Dans l'ensemble, on peut retenir que les propositions de réformes légales sont toujours en cours de discussion et risquent d'évoluer dans les années à venir, ce qui entraîne une incertitude sur l'évolution de la réglementation du marché des life settlements.

Un autre facteur de risque est lié à la fiscalité à laquelle sont soumises les transactions sur le marché secondaire de l'assurance vie. En effet, l'absence d'intérêt assurable entre le détenteur de la police et le bénéficiaire peut avoir un impact sur les avantages fiscaux liés à l'assurance vie en général. Il n'est donc pas impossible de voir les transactions de life settlements plus lourdement imposées à l'avenir.

La partie suivante sera consacrée à l'étude des différentes méthodes existantes pour déterminer le prix d'une police sur le marché secondaire de l'assurance vie.

Deuxième partie

Valorisation des life settlements et gestion
de portefeuille

Chapitre 3

Valorisation des life settlements

D'un point de vue financier, le life settlement est un produit qui permet à l'investisseur de recevoir un montant fixe à une date future indéterminée, contre le paiement de primes régulières sur une durée variable. Il s'agit donc bien d'un principe proche à celui des obligations avec des coupons négatifs et une duration incertaine. Néanmoins, le caractère variable de la duration des paiements rend l'évaluation nettement plus complexe que pour une simple obligation classique pour laquelle il « suffit » d'actualiser les flux futurs sur une période donnée. Depuis l'émergence du marché secondaire de l'assurance vie, plusieurs techniques différentes ont été utilisées par les acteurs du marché afin de déterminer la valeur d'une police. Dans ce chapitre, nous allons décrire les techniques principales utilisées sur le marché actuellement et comparer ces différentes méthodes sur un portefeuille type.

Puisque toutes les polices présentes sur le marché sont différentes les unes des autres en ce qui concerne l'état de santé de l'assuré et les caractéristiques individuelles de la police, il n'est pas possible d'observer des valeurs de marché. Par conséquent, il est donc nécessaire d'avoir recours à des modèles de tarifications qui se basent sur diverses hypothèses et simplifications. Comme pour tout actif financier, la valeur économique d'une police d'assurance vie équivaut à la valeur actuelle des flux probables futurs. Il est important de noter que le prix d'un life settlement dépendra nécessairement des paramètres suivants :

- Espérance de vie de l'assuré qui dépend de l'âge et de l'état de santé de ce dernier ;
- Taux utilisé pour actualiser les flux futurs ;
- Paramètres propres à la police (primes à payer, capital décès, frais divers, etc.).

Taux de rendement attendu par les investisseurs

Puisque dans le contexte des life settlements il n'existe pas de marché profond et liquide, il n'est pas possible d'utiliser une approche *mark to market* (évaluation à la valeur de marché) pour déterminer la valeur d'un contrat. Par conséquent, l'évaluation d'une police d'assurance vie est basée sur la détermination du risque et du retour sur investissement attendu par l'acheteur du contrat. Les flux annuels générés par un contrat doivent être actualisés en prenant en compte le coût du capital pour l'investisseur. Ainsi, la valeur actuelle d'une police est une fonction du taux d'actualisation qui reflète le rendement attendu par l'investisseur compte tenu du risque et de l'incertitude sur les flux futurs. En effet, une augmentation du risque pour l'acheteur doit se traduire par une opportunité de rendements supérieurs.

Finalement, on peut retenir que le taux d'intérêt utilisé pour actualiser les différents flux représente le retour sur investissement attendu par l'acheteur de la police. Il dépend à la fois du coût du capital pour l'investisseur mais également de sa tolérance au risque et du niveau de frais attendu par celui-ci. Ce taux est souvent noté IRR pour *Internal Rate of Return*. Dans la suite, nous utiliserons les taux communiqués par les gestionnaires de fonds et considérerons cette valeur comme une donnée fixe.

Différentes méthodes d'évaluation

Trois approches différentes, utilisées pour déterminer la *Net Asset Value*, se sont progressivement imposées. Premièrement, l'approche déterministe⁹ se base sur l'hypothèse (trop) simpliste que le décès de l'assuré se produit exactement lorsque celui-ci a atteint son espérance de vie. Avec cette méthode, les flux futurs sont supposés certains et ne sont donc pas probabilisés.

Ensuite, l'approche probabiliste a été développée afin de surmonter les faiblesses de la méthode déterministe qui est trop éloignée de la réalité et ne permet pas de prendre en compte les variations possibles autour de l'espérance de vie. Au lieu d'utiliser une date de décès fixe, cette nouvelle méthode s'appuie sur une table de mortalité ajustée à l'état de santé de l'assuré. Il s'agit donc là d'une démarche qui se rapproche d'avantage des méthodes actuarielles classiques utilisées dans le domaine de l'assurance vie, où chaque flux est actualisé et pondéré en fonction de sa probabilité d'occurrence.

Finalement, l'approche la plus récente consiste à modéliser les différents flux ainsi que leur occur-

9. Cette méthode fut utilisée principalement lors de l'émergence du marché des viatical settlements, pour lesquels les espérances de vie étaient beaucoup plus courtes et mieux prévisibles.

rence à l'aide de simulations de Monte Carlo. Cette méthode stochastique se base sur la simulation d'une multitude de dates de décès différentes donnant lieu à des résultats distincts pour chaque trajectoire. Le prix est ensuite calculé en prenant la moyenne de toutes les NAV simulées.

3.1 Méthode déterministe

Pendant les premières années du marché des life settlements, la méthode déterministe fut l'approche standard utilisée pour calculer la valeur intrinsèque des polices vendues sur le marché secondaire de l'assurance vie. L'avantage principal de cette méthode est sa facilité d'implémentation et de compréhension pour l'ensemble des acteurs du marché. En effet, alors qu'une multitude de variables peuvent influencer la valeur finale d'une police, le modèle déterministe fixe chaque variable à sa valeur moyenne et suppose ensuite que ces hypothèses vont refléter la réalité. Dans ce modèle, le life settlement est alors considéré comme un investissement avec une durée fixe, qui correspond à l'espérance de vie de l'assuré.

Si on note T la durée de vie future aléatoire de l'assuré, alors son espérance de vie est $\mu = \mathbb{E}(T)$. Celle-ci est déterminée par un expert médical à la suite d'une analyse détaillée de l'état de santé de la personne assurée. La valeur actuelle des bénéfices futures n'est rien d'autre que la valeur du capital décès, actualisée à un taux représentant le taux de rendement attendu par l'investisseur sur la durée μ . Le paiement des primes, qui se fait jusqu'au décès de l'assuré est une simple rente annuelle à terme à échoir (paiements en début de période). Finalement, le prix de la police est déterminé selon la formule suivante :

$$NAV = B \cdot v^\mu - Prime_{annuelle} \cdot \ddot{a}_{\overline{\mu}|} \quad (1)$$

où :

- B est le capital reçu lors du décès de l'assuré ;
- v est le facteur d'actualisation $\left(v = \frac{1}{1 + IRR} \right)$;
- $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ est une rente à terme à échoir sur n années $\left(\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{i=0}^{n-1} v^i \right)$.

La formule (1) est uniquement valable si le montant des primes reste constant dans le temps, ce qui est uniquement le cas pour les assurances de type vie-entière (*Whole Life*). En ce qui concerne les contrats de type vie-universelle (*Universal Life*), les primes sont flexibles. En pratique, les fournisseurs de life settlements déterminent le flux minimum de primes futures qui permet de couvrir le coût de l'assurance et de garder la police en vigueur. Les primes ainsi déterminées sont rarement constantes dans le temps, ce qui implique d'utiliser une variante de la formule précédente :

$$NAV = B \cdot v^\mu - \sum_{i=1}^{\mu} \frac{Prime_i}{(1 + IRR)^i} \quad (2)$$

Nous verrons plus tard que même l'utilisation de la formule (2) n'est pas satisfaisante en pratique. En effet, le flux de primes futures à payer est déterminé de manière à minimiser le paiement des primes et à optimiser le rendement pour l'investisseur. Or, il s'avère que les primes ainsi calculées sont généralement plus faibles en début de projection et augmentent par la suite. Par conséquent, en utilisant un modèle déterministe avec une date de décès fixe, on sous-estime clairement le montant des primes futures à payer (une fois que l'assuré est décédé il n'y a plus de primes à payer). Voici pourquoi le marché s'est progressivement tourné vers une autre méthode mieux adaptée à la réalité, à savoir l'approche probabiliste que nous allons présenter dans la suite.

Regardons d'abord un exemple d'évaluation de police avec la méthode déterministe. Le montant des primes à payer tous les ans pour maintenir la police en vigueur est communiqué par le souscripteur, tout comme les autres données sur la police (capital décès) et sur l'assuré (rapport médical). Nous avons actualisé tous les flux au taux de rendement attendu par les investisseurs pour ce portefeuille qui est de 16%. La figure 3.1 illustre le procédé d'évaluation :

Données générales :

Date d'évaluation	31/03/2014
IRR	16%
Âge assuré à l'évaluation	89
Valeur Faciale	1 000 000

Données médicales :

Âge assuré lors du rapport médical	85
Espérance de vie estimée (en mois)	108
Âge prévu lors du décès	94

Évaluation :

t	Année	Âge	Primes	Capital Décès	Valeur actuelle des primes futures	Valeur actuelle du capital décès
0	2014	89	61 304	-	61 304	-
1	2015	90	63 717	-	54 928	-
2	2016	91	66 707	-	49 574	-
3	2017	92	68 785	-	44 067	-
4	2018	93	67 252	-	37 142	-
5	2019	94	68 683	1 000 000	-	476 113

Total	247 016	476 113
--------------	----------------	----------------

Valeur Police	229 097
----------------------	----------------

FIGURE 3.1 – Exemple d'évaluation déterministe

Pour conclure, on peut remarquer que les variables clés utilisées dans un modèle déterministe sont le paiement des primes dans le temps, l'espérance de vie estimée de l'assuré et le taux d'actualisation. En calculant la valeur d'un pool de life settlements avec cette approche, le risque de longévité qui est lié à la possibilité qu'un assuré vive plus longtemps que son espérance de vie, n'est pas intégré dans l'évaluation. Un autre problème de cette méthode est qu'elle dépend fortement de la loi des grands nombres afin d'obtenir en moyenne des durations correspondants aux espérances de vie estimées. Elle ne peut donc être utilisée que pour des portefeuilles contenant un nombre suffisamment important de polices homogènes avec des risques de décès identiques. Or, en pratique cela ne se produit jamais, tant les caractéristiques et les profils de risque sont susceptibles de varier d'une police à l'autre. De plus, même en supposant que toutes les primes futures soient constantes, la méthode déterministe donne une estimation systématiquement biaisée de la NAV, qui entraîne une sous-estimation de la valeur finale du produit considéré.

Théorème 3.1.1. *Le modèle déterministe sous-estime systématiquement la NAV des flux futurs pour une police à primes constantes.*

Démonstration. Soit T la durée jusqu'au décès de l'assuré et notons B la valeur faciale de la police étudiée (capital décès). Le bénéfice espéré futur pour un investisseur est égal à $\mathbb{E}(Bv^T) = B\mathbb{E}(v^T)$,

avec $v = \frac{1}{1 + IRR}$.

D'après l'inégalité de Jensen, si X est une variable aléatoire et f est une fonction convexe quelconque, alors $\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X])$.

Si on remplace X par T dans la formule précédente et qu'on prend $f(y) = v^y$, on obtient le résultat suivant : $\mathbb{E}[v^T] \geq v^{\mathbb{E}[T]} = v^\mu$. Par conséquent, on a bien $Bv^\mu \leq \mathbb{E}(Bv^T)$. □

3.2 Méthode probabiliste

La méthode probabiliste est devenue la nouvelle méthode standard utilisée par la majeure partie des acteurs du marché. Contrairement à la méthode déterministe, elle ne suppose pas que les décès se produisent tous à un moment précis mais repose d'avantage sur des taux de mortalité annuels qui renseignent sur la probabilité de décès de l'assuré pour chaque année projetée. La table de mortalité utilisée dans cette approche est ajustée en fonction du profil de risque de l'assuré (âge, sexe, état de santé, espérance de vie moyenne, etc.) et est ensuite utilisée pour projeter les différents flux du contrat (primes, capital décès). Afin d'obtenir une valeur actuelle nette du life settlement, il convient également d'actualiser ces flux au taux de rendement attendu par les investisseurs.

Dans cette partie et dans le reste du document nous utiliserons les notations actuarielles suivantes :

- t est l'indice temporel ;
- x est l'âge de l'assuré au moment de l'évaluation de la police.
- q_x est la probabilité annuelle de décès d'un individu d'âge x ;
- ${}_t p_x$ est la probabilité qu'un individu d'âge x survive t années ;
- ω est l'âge maximum que peut atteindre un individu d'après la table de mortalité utilisée ;
- v est le facteur d'actualisation.

En utilisant ces notations, voici la formule qui permet de déterminer la valeur d'une police sur le marché secondaire de l'assurance vie en utilisant la méthode probabiliste :

$$NAV = \sum_{t=1}^{\omega-x} (B {}_t p_x q_{x+t} - P_t {}_t p_x) \cdot v^t \quad (3)$$

Avec :

- B est le capital reçu lors du décès de l'assuré ;
- P_t est la prime à payer pour l'année t .

De façon schématique, le calcul s'effectue en plusieurs étapes :

1. Traduction de l'espérance de vie en taux de mortalité annuels espérés. En général des multiples de mortalité sont appliqués à la table de mortalité sous-jacente (voir partie sur l'ajustement de la table par un facteur de mortalité).
2. Projection des flux espérés à l'aide de la courbe de mortalité déterminé en 1.
3. Actualisation des flux futurs et calcul de la NAV.

Table de mortalité utilisée pour déterminer les probabilités annuelles de décès

La table de mortalité utilisée pour effectuer les travaux présentés dans ce mémoire est la même que celle utilisée par la plupart des compagnies sur le marché des life settlements, à savoir la table *2008 Valuation Basic Table* (VBT) publiée par la *Society of Actuaries* (SOA). Sur base d'une grande quantité de données recueillies auprès des compagnies d'assurance vie aux Etats-Unis, la SOA a publié en mars 2008 une nouvelle version des tables VBT. La VBT 2008 contient une période de sélection de 25 ans¹⁰ et des tables distinctes hommes/femmes et fumeurs/non-fumeurs. La période de sélection permet de prendre en compte la mortalité réduite des individus qui viennent de souscrire une assurance vie, principalement dû au fait qu'ils ont sans doute dû passer des examens médicaux avant de signer le contrat d'assurance. Avec le temps qui passe, cet effet diminue progressivement et au bout d'une certaine période, estimée à 25 années pour la table VBT 2008, il a complètement disparu et la mortalité est considéré comme « normale »¹¹.

10. 25 ans ou âge atteint de 90 ans, mais pas moins de 2 ans.

11. Pour d'avantage d'informations sur la construction et les caractéristiques de la table VBT 2008, le lecteur pourra se référer au rapport publié par la SOA : www.soa.org/Files/Research/Exp-Study/research-2008-vbt-report.pdf

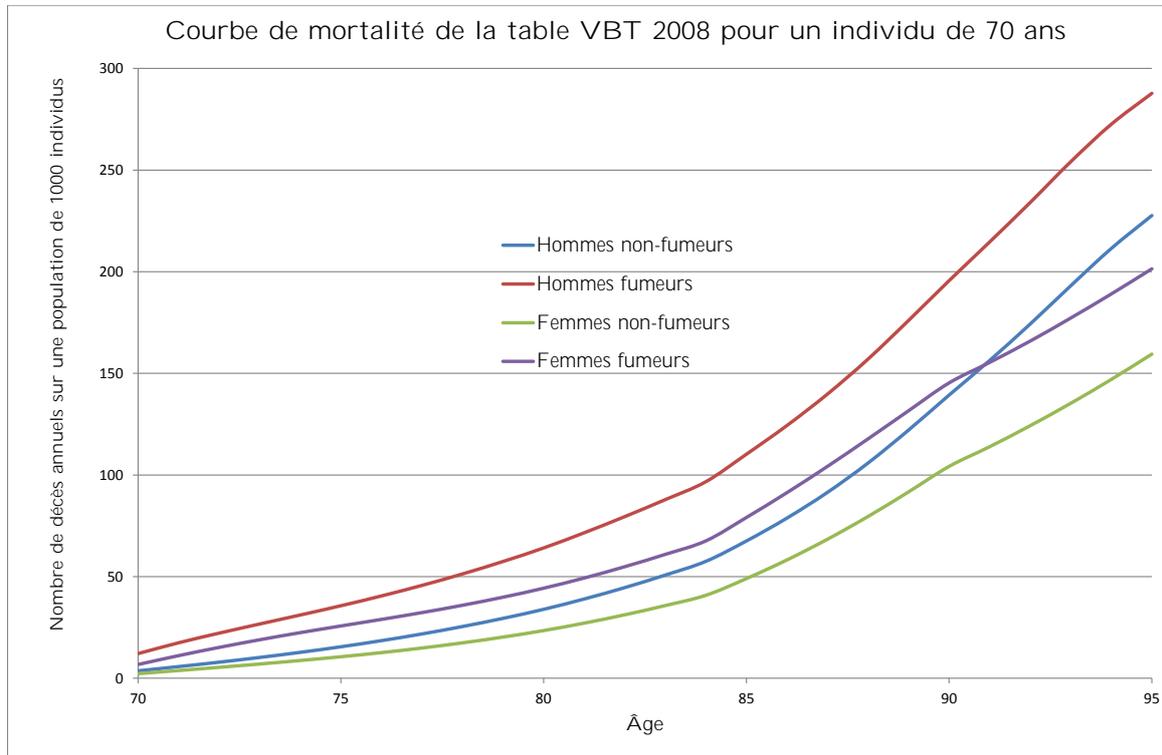


FIGURE 3.2 – Représentation de la table VBT 2008

Pour effectuer les calculs, la table doit également être ajustée de manière à obtenir une courbe de mortalité en accord avec les caractéristiques personnelles de chaque individu.

Ajustement de la table par un facteur de mortalité

Afin de prendre en compte le profil de risque de mortalité propre à l'assuré, l'approche standard consiste à multiplier les probabilités de décès par un « facteur de mortalité » (ou multiple de mortalité) qui traduit à quel point l'état de santé de la personne étudiée est détérioré par rapport à celui d'une personne ayant un état de santé « normal ». Pour se faire, l'estimation de l'espérance de vie est utilisée pour déterminer une table de mortalité spécifique contenant les probabilités de décès ajustées pour chaque assuré. Ce sont ces tables propres à chaque individu qui sont ensuite utilisées pour calculer la valeur d'une police.

La détermination du facteur de mortalité se fait par ingénierie inverse (*reverse engineering*). Si la table sous-jacente et l'espérance de vie sont données, le multiple de mortalité peut se calculer facilement

à l'aide d'un outil numérique comme la fonction *Solver* dans Excel en se basant sur la définition de l'espérance de vie :

Il est important de faire la différence entre l'espérance de vie moyenne et l'espérance de vie médiane, qui sont souvent assez proches mais qui n'ont pas la même définition. L'espérance de vie médiane est considérée comme étant la durée T (en années) telle que la probabilité de survie pendant T années soit égale à 50%. En d'autres mots, sur une population initiale de 1000 individus ayant tous le même profil en matière d'âge, de sexe et de l'état de santé général, l'espérance de vie médiane sera le moment exact ou la moitié de la population sera décédée. L'espérance de vie moyenne se définit comme étant la moyenne des instants de décès des 1000 individus présents dans la population initiale. Mathématiquement, on peut exprimer cette espérance en terme de fonction de survie. Soit $S(t)$ la fonction de survie d'un individu d'âge x , alors son espérance de vie moyenne, notée e_x vaut :

$$e_x = \int_0^{\infty} S(t) dt \quad (4)$$

En temps discret, l'équation qui précède devient :

$$e_x = \sum_{t \geq 1}^{\omega-x} t p_x \quad (5)$$

En utilisant les probabilités de survie dérivées de la table de mortalité, il est donc possible de calculer l'espérance de vie d'une personne de n'importe quel âge à l'aide de la formule (5). Il suffit ensuite de multiplier l'ensemble des probabilités de décès par le même facteur, de telle sorte à ce que l'espérance de vie qui en résulte corresponde exactement à l'estimation des experts médicaux, comme dans l'exemple qui suit :

Supposons qu'une personne de 71 ans a une espérance de vie estimée de 174 mois. En prenant la table 2008 VBT de base, on obtient une espérance de vie calculée d'environ 228 mois, ce qui montre bien que l'état de santé de l'assuré en question est détérioré par rapport à la normale.

t	Âge de l'assuré	q _x table VBT	Probabilité de survie (${}_t p_{71}$)
1	71	0,0026	0,9974
2	72	0,0043	0,9932
3	73	0,0060	0,9872
4	74	0,0079	0,9794
5	75	0,0098	0,9698
6	76	0,0119	0,9583

48	118	0,4500	4,19e-06
49	119	0,4500	2,30e-06
50	120	0,4500	1,27e-06
		Total	18,9924

X 12 Espérance de vie en mois :
 227,91

TABLE 3.1 – Calcul de l'espérance de vie avec la table VBT 2008

La colonne des q_x reprend les probabilités annuelles de décès de la table 2008 VBT et les probabilités de survie sont calculées de la manière suivante : ${}_t p_{71} = {}_{t-1} p_{71} (1 - q_x)$, $\forall t \geq 1$. Par convention, ${}_0 p_{71} = 1$. Afin d'obtenir l'espérance de vie estimée de 174 mois, les probabilités de décès q_x sont multipliées par un facteur de mortalité (déterminé à l'aide de la fonction *Solver* dans Excel) :

Multiple de mortalité : 2,083310

qx table VBT	q _x * MM	Probabilité de survie
0,0026	0,0054	0,9946
0,0043	0,0089	0,9858
0,0060	0,0126	0,9734
...
0,4500	0,9375	7,00e-21
0,4500	0,9375	4,37e-22
0,4500	0,9375	2,73e-23
		Total
		14,5

X 12 Espérance de vie en mois :
 174,00

TABLE 3.2 – Calcul du multiple de mortalité

Bien que cette méthode soit satisfaisante pour traduire l'espérance de vie estimée, elle ne permet pas d'incorporer dans le calcul les autres informations disponibles sur l'état de santé de l'assuré. En effet, dans les rapports médicaux fournis par les cabinets d'experts (voir exemple en annexe 1), il est fréquent de retrouver non seulement l'espérance de vie moyenne de l'assuré, mais également une espérance de vie médiane ainsi qu'un quantile à 80% ou 85% sur la durée de vie de la personne étudiée. L'utilisation d'un simple multiple de mortalité n'est donc pas suffisante pour intégrer plusieurs types d'informations dans la table sous-jacente. Nous verrons dans la suite une autre méthodologie qui permet d'ajuster une table de mortalité afin de prendre en compte toute l'information médicale communiquée.

Exemple de tarification avec la méthode probabiliste

Reprenons à présent l'exemple de tarification utilisé pour la méthode déterministe et regardons les résultats obtenus avec l'approche probabiliste :

Données générales :

Date d'évaluation	31/03/2014
IRR	16%
Âge assuré à l'évaluation	89
Valeur Faciale	1 000 000

Données médicales :

Date du rapport médical	10/02/2010
Âge assuré lors du rapport médical	85
Espérance de vie estimée (en mois)	108

1^{ère} étape : Détermination du Multiple de Mortalité

MM	0,9389
----	--------

t	Année	Âge assuré	q_x table VBT	$q_x * MM$	Probabilité de survie (${}_t p_{85}$)
0	2010	85	0,0091	0,0086	0,9914
1	2011	86	0,0246	0,0230	0,9686
2	2012	87	0,0516	0,0484	0,9217
...
33	2043	118	0,4500	0,4225	1,52e-05
34	2044	119	0,4500	0,4225	8,80e-06
35	2045	120	0,4500	0,4225	5,08e06

EV calculée	108
EV théorique	108
Différence	6,26e-09

2^{ème} étape : Evaluation de la police

proba de survie jusque date d'évaluation (${}_4p_{85}$)	0,7924
---	--------

t (1)	Année (2)	Âge assuré (3)	Primes (4)	Proba survie (${}_tp_{89}$) (5)	q_x ajusté (6)	Primes payées (7)	Capital Décès reçu (8)
0	2014	89	61 304	1,0000	0,0979	61 304	84 368
1	2015	90	63 717	0,9021	0,1070	49 553	71 706
2	2016	91	66 707	0,8056	0,1167	39 939	60 214
...
29	2043	118	-	0,0000	0,4225	-	0,09
30	2044	119	-	0,0000	0,4225	-	0,05
31	2045	120	-	0,0000	1,0000	-	0,06

Total	265 476	444 221
--------------	----------------	----------------

Valeur Police	178 744
----------------------	----------------

TABLE 3.3 – Exemple d'évaluation en utilisant l'approche probabiliste

Les colonnes (5) et (6) sont déterminées de la manière suivante :

$${}_tp_{89} = \frac{{}_{t+4}p_{85}}{{}_4p_{85}} \quad ; \quad q_x = 1 - \frac{{}_{t+1}p_{89}}{{}_tp_{89}} \quad (x \text{ est l'âge de l'assuré en année } t) \quad (6)$$

Une fois les probabilités de survie et de décès calculées, il est possible de déterminer les flux entrants (Valeur Actuelle des Bénéfices futurs, notée VAB) , qui sont supposés être reçus en fin de période, et les flux sortants, qui sont payés en début de période (Valeur Actuelle des Primes futures, notée VAP) :

$$VAP_t = P_t \cdot \frac{{}_tp_{89}}{(1 + IRR)^t} \quad \text{et} \quad VAB_t = B \cdot \frac{{}_tp_{89} q_x}{(1 + IRR)^{t+1}} \quad (7)$$

Si on compare la valeur obtenu avec la méthode probabiliste (\$ 178 744) avec la valeur déterminée en utilisant le modèle déterministe (\$ 229 097), on remarque une différence assez importante. Cela est dû au fait que les primes les plus importantes à payer arrivent vers la fin de la période de projection (à partir de 2020) et ne sont donc plus prises en compte dans l'approche déterministe puisqu'on suppose que l'assuré décède en 2019. Nous pouvons donc constater sur cet exemple que la méthode déterministe n'est clairement pas adaptée pour évaluer des life settlements lorsque le flux de primes n'est pas constant dans le temps.

Pour conclure, il est intéressant de noter que la méthode probabiliste reste cohérente avec les méthodes classiques utilisées par les compagnies pour la tarification en assurance vie, qui consistent à actualiser des flux probables futurs à un taux déterminé. Cependant, un des inconvénients de cette approche est son degré de complexité supérieur en ce qui concerne la modélisation et une plus grande difficulté pour l'expliquer à des personnes en dehors du domaine de l'assurance vie.

3.3 Méthode stochastique

Alors que cette méthode n'est pas encore très répandue, il est fort probable qu'avec l'évolution du marché et le développement des portefeuilles, la simulation stochastique devienne un outil indispensable pour la tarification des contrats, l'évaluation globale des portefeuilles et la détermination des réserves destinées au paiement des primes et autres frais futurs. Cette méthode implique l'utilisation de techniques de Monte Carlo ainsi qu'une courbe de mortalité pour chaque assuré dans le but de simuler les flux futurs d'une police et d'estimer ainsi la valeur intrinsèque du produit.

Pour l'ensemble des polices étudiées, la date de décès de l'assuré est modélisée de façon aléatoire. Ceci est accompli en tirant pour chaque année un nombre aléatoire entre 0 et 1 et en le comparant ensuite à la probabilité annuelle de décès provenant de la courbe de mortalité. Le moment du décès correspond à la première année pour laquelle le nombre aléatoire est inférieur ou égal au taux de mortalité prévu. Tant que l'assuré est en vie, les primes doivent être payées à la compagnie d'assurance, qui elle a l'obligation de verser le capital prévu dans le contrat au moment du décès. Une fois que la date de décès a été modélisée, il ne reste plus qu'à projeter les flux futurs générés par le contrat afin d'en déterminer la valeur finale. Naturellement, il convient d'effectuer un grand nombre de simulations indépendantes les unes des autres pour obtenir des résultats qui convergent vers une valeur moyenne. Cette moyenne sera finalement la valeur retenue pour la police en question. En théorie, le résultat des simulations stochastiques doit converger vers la valeur obtenue avec la méthode probabiliste. Voici une représentation détaillée des différentes étapes effectuées lors d'une simulation :

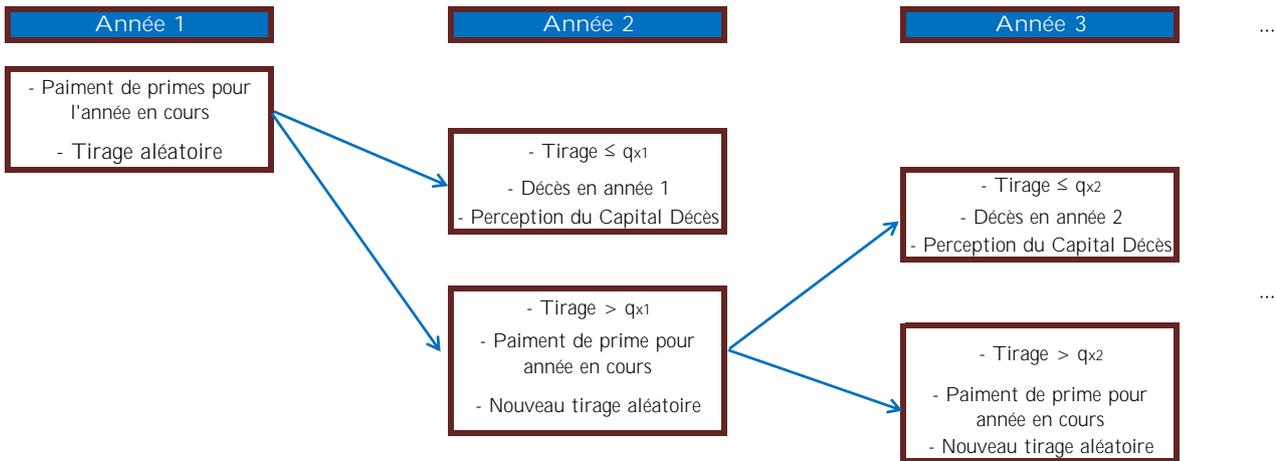


FIGURE 3.3 – Simulation du décès de l'assuré dans la méthode stochastique

L'avantage principal de la méthode stochastique réside dans sa flexibilité en matière de modélisation des flux futurs. Elle est également parfaitement adaptée à l'évaluation de portefeuilles entiers de life settlements et permet d'effectuer des analyses approfondies de différents modes de financement et structures de frais. Il s'agit là de l'approche la plus aboutie et la plus efficace parmi les trois méthodes d'évaluation mais son degré de complexité et les difficultés d'implémentations la rendent moins adaptée pour une évaluation individuelle d'un nombre réduit de polices.

Exemple de tarification avec la méthode stochastique

Regardons à présent l'évaluation d'une police avec la méthode stochastique. Pour des raisons pratiques, l'évaluation totale du portefeuille avec la méthode stochastique a été implémentée dans VBA. Nous allons cependant illustrer un exemple de simulation effectué dans Excel. Afin de pouvoir comparer les résultats obtenus avec l'évaluation probabiliste, nous utilisons à nouveau la même police que précédemment :

Données générales :

Date d'évaluation	31/03/2014
IRR	16%
Âge assuré à l'évaluation	89
Valeur Faciale	1 000 000

Données médicales :

Date du rapport médical	10/02/2010
Âge assuré lors du rapport médical	85
Espérance de vie estimée (en mois)	108

1^{ère} étape : Détermination du Multiple de Mortalité

(Voir exemple précédent)

2^{ème} étape : Evaluation stochastique de la police

proba de survie jusque date d'évaluation	0,7924
--	--------

t (1)	Année (2)	Âge assuré (3)	Primes (4)	Proba de survie (5)	q_x ajusté (6)	Simulation Mortalité (7)	Primes payées (8)	Capital Décès reçu (9)
0	2014	89	61 304	1,0000	0,0979	0	61 304	-
1	2015	90	63 717	0,9021	0,1070	0	54 928	-
2	2016	91	66 707	0,8056	0,1167	0	49 574	-
3	2017	92	68 785	0,7117	0,1270	1	44 067	552 291

Total	209 874	552 291
--------------	----------------	----------------

Valeur Police	342 417
----------------------	----------------

TABLE 3.4 – Exemple d'évaluation en utilisant l'approche stochastique

La première partie du tableau est identique à celle du tableau 3.3. Pour simuler la mortalité, nous utilisons une loi de Bernoulli avec la probabilité de décès annuelle (q_x ajusté) comme probabilité de « succès ». Lorsque le résultat d'un tirage renvoie une valeur de 1, la projection est terminée et les montants des primes payées et du capital décès reçu sont actualisés afin d'obtenir la valeur de la police. Dans cet exemple, si l'assuré décède en 2017, la valeur finale de la police sera de \$342417. En effectuant 100 000 simulations indépendantes, nous obtenons pour cette police une valeur moyenne de \$ 177 934, qui est très proche de la valeur obtenue avec la méthode probabiliste (\$178744, soit un écart de 0,45%).

3.4 Comparaison des trois méthodes d'évaluation et analyse de sensibilité

Description du portefeuille étudié

Nous allons à présent appliquer les différentes méthodes d'évaluation sur un portefeuille de 257 polices de type *Universal-Life*. Les assurés ont tous entre 68 et 96 ans à la date d'évaluation qui est fixée au 31/03/2014. La moyenne d'âge se situe à 81 ans. Les espérances de vie résiduelles des assurés vont de 24 mois à 230 mois et la moyenne est d'environ 128 mois (soit un peu plus de 10 ans). Finalement, les capitaux décès prévus dans les contrats se situent dans un intervalle entre \$ 100 000 et \$ 15 Mio avec une valeur faciale moyenne de \$ 1,8 Mio et une valeur totale de \$ 462,7 Mio.

Comparaison des résultats

Voici les résultats obtenus avec les trois méthodes d'évaluation décrites plus haut :

	NAV du portefeuille
Évaluation Déterministe	\$ 115 671 361
Évaluation Probabiliste	\$ 104 353 967
Évaluation Stochastique	\$ 104 523 244

TABLE 3.5 – Comparaison des valeurs obtenues avec les différentes méthodes d'évaluation

Les résultats que l'on a pu observer à l'aide d'un exemple sur une seule police semblent se confirmer à l'échelle du portefeuille. En effet, on constate que l'évaluation stochastique et l'évaluation probabiliste donnent des résultats très proches, ce qui est relativement encourageant dans la mesure où l'approche stochastique doit théoriquement converger vers la méthode probabiliste plus on augmente le nombre de simulations. De plus, on observe également une NAV globale plus élevée en utilisant une approche déterministe à cause des flux de primes qui ne sont pas constants dans le temps. L'écart entre la méthode déterministe et les deux autres approches est d'environ \$11 Mio, ce qui correspond à un écart relatif de 10,8%. La méthode déterministe est clairement trop simpliste et ne permet pas de prendre en compte toutes les caractéristiques des différentes polices.

Analyse de sensibilité

En plus des calculs d'évaluation, nous avons également effectué une analyse de sensibilité pour analyser l'impact d'une hausse ou d'une baisse générale de l'espérance de vie des assurés sur la valeur globale du portefeuille. L'approche retenue a été une évaluation probabiliste avec des espérances de vie augmentées et diminuées de 10% respectivement. Cette analyse a permis de mettre en évidence la forte sensibilité des modèles aux estimations de l'état de santé faites par les cabinets médicaux spécialisés. En effet, comme on peut le voir dans le tableau 3.6, une augmentation de 10% des espérances de vie entraîne une baisse d'un peu plus de 23% de la NAV totale du portefeuille. À l'inverse, une diminution de 10% des espérances de vie entraîne une hausse de plus de 25% de la NAV globale.

	NAV scénario central	NAV EV ¹² +10%	NAV EV -10%
Évaluation Probabiliste	\$ 104 353 967	\$ 80 159 422	\$ 130 963 353

TABLE 3.6 – Analyse de sensibilité de l'évaluation au changement de l'espérance de vie

12. EV = Espérance de Vie.

3.5 Évaluation des polices portant sur deux têtes

Jusqu'à présent nous avons uniquement parlé de polices portant sur une seule tête. Or, dans les portefeuilles de life settlements, on retrouve également des polices portant sur deux têtes. Dans la plupart des cas, le capital prévu dans le contrat est alors payé par la compagnie d'assurance au moment du décès du dernier survivant (*last survivor*). L'évaluation pour ce type de contrat se fait de façon similaire à l'évaluation des polices sur une tête. La seule chose qui change est l'utilisation de probabilités de survie et de décès jointes au lieu de probabilités individuelles. Nous allons rapidement, à l'aide d'un exemple, présenter les méthodes probabiliste et stochastique.

Méthode probabiliste

Le procédé est identique à celui décrit précédemment pour l'évaluation des polices portant sur une seule tête :

1. Calcul d'un multiple de mortalité qui ajuste la courbe de mortalité pour le 1^{er} assuré afin d'obtenir des probabilités qui correspondent à l'espérance de vie estimée de l'assuré en question ;
2. Même procédé pour le 2nd assuré ;
3. Détermination de la courbe de mortalité jointe pour les années de projection ;
4. Actualisation des flux probables futurs.

Pour faciliter les calculs, nous ferons l'hypothèse dans la suite que les décès respectifs des deux assurés sont des événements indépendants. Ainsi, la détermination de la courbe de mortalité jointe se fait à l'aide des formules suivantes :

- **Probabilité de survie jointe** : ${}_t p_{xy} = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_x {}_t p_y$, où ${}_t p_x$ et ${}_t p_y$ correspondent aux probabilités de survie individuelles des deux assurés x et y qui proviennent des deux courbes de mortalité ajustées aux informations individuelles pour chaque assuré ;
- **Probabilité annuelle de décès jointe** : $q_{xy} = 1 - \frac{{}_{t+1}p_{xy}}{{}_t p_{xy}}$.

Voici un exemple d'évaluation d'une police portant sur deux têtes :

Données générales :

Date d'évaluation	31/03/2014
IRR	16%
Valeur Faciale	8 000 000

Données individuelles pour le 1^{er} assuré :

Données individuelles pour le 2nd assuré :

Âge assuré lors de l'évaluation	81
Date du rapport médical	18/05/2010
Âge assuré lors du rapport médical	77
Espérance de vie estimée (en mois)	168

Âge assuré lors de l'évaluation	77
Date du rapport médical	18/05/2010
Âge assuré lors du rapport médical	73
Espérance de vie estimée (en mois)	197

En faisant les calculs, on trouve un multiple de 0,9260 pour le 1^{er} assuré et 1,3867 pour le 2^e.

Détermination des probabilités jointes et des flux futurs :

	Assuré 1	Assuré 2
proba de survie jusque date d'évaluation	0,92041	0,94821

t	Année	Âge assuré 1 (x)	Proba survie x	Âge assuré 2 (y)	Proba survie y
0	2014	81	1	77	1
1	2015	82	0,9686	78	0,9793
2	2016	83	0,9322	79	0,9549
...
41	2055	122	-	118	3,84e-09
42	2056	123	-	119	1,44e-09
43	2057	124	-	120	5,43e-10

t	Proba survie jointe (${}_t p_{xy}$)	q_{xy}	Primes payées	Capital Décès reçu
0	1	0,0065	-	4 497
1	0,9993	0,0024	-	14 303
2	0,9969	0,0049	42 196	25 244
...
41	3,84e-09	0,6240	-	-
42	1,44e-09	0,6240	-	-
43	5,43e-10	1	-	-

Total	887 688	1 236 744
--------------	----------------	------------------

Valeur Police	349 056
----------------------	----------------

TABLE 3.7 – Exemple d'évaluation probabiliste pour une police sur deux têtes

Méthode stochastique

L'approche stochastique utilisée pour les polices sur deux têtes ressemble fortement à celle utilisée précédemment pour les polices avec un seul assuré. Cependant, au lieu de simuler le moment du décès de l'unique assuré, nous simulons les dates de décès des deux assurés de façon indépendante et prenons le moment du décès du dernier survivant comme date de référence pour la fin du contrat.

Voici un exemple de simulation stochastique pour le même contrat que celui étudié plus haut :

t	Année	Âge assuré 1 (x)	Proba survie x	q_x ajusté	Simulation Mortalité x	Âge assuré 2 (y)	Proba survie y	q_y ajusté	Simulation Mortalité y
0	2014	81	1	0,0314	0	77	1	0,0207	0
1	2015	82	0,9686	0,0375	0	78	0,9793	0,0249	0
...
5	2019	86	0,7849	0,0807	0	82	0,8586	0,0467	0
6	2020	87	0,7215	0,0955	0	83	0,8185	0,0538	1
7	2021	88	0,6526	0,1120	0	84	0,7745	0,0656	-
...
10	2024	91	0,4317	0,1614	0	87	0,6047	0,1090	-
11	2025	92	0,3620	0,1788	1	88	0,5388	0,1265	-

t	Année	Dernier Survivant	Primes payées	Capital Décès reçu
0	2014	0	-	-
1	2015	0	-	-
...
5	2019	0	81 897	-
6	2020	0	86 333	-
7	2021	0	89 578	-
...
10	2024	0	88 711	-
11	2025	1	87 216	1 347 703

Total	731 801	1 347 703
--------------	----------------	------------------

Valeur Police	615 902
----------------------	----------------

TABLE 3.8 – Exemple d'évaluation stochastique pour une police sur deux têtes

Si le dernier assuré décède durant l'année 11, on obtient une valeur de \$ 615 902 pour la police. Une répétition de 100 000 simulations indépendantes permet d'obtenir une valeur moyenne de \$ 348 595, ce qui est relativement proche de la valeur obtenue avec la méthode probabiliste (\$ 349 056).

3.6 Conclusion

L'estimation de la mortalité, les coûts et profits générés par la police et le retour sur investissement attendu par l'investisseur sont clairement les facteurs déterminants dans la tarification et l'évaluation des life settlements. La méthode probabiliste est la méthode la mieux adaptée aujourd'hui parce qu'elle offre le meilleur équilibre entre la cohérence avec les pratiques de tarifications utilisées dans le domaine de l'assurance vie et la facilité d'implémentation. La méthode déterministe est certes plus simple à implémenter et à comprendre mais elle ne permet pas de prendre en compte les aléas de la mortalité. En ce qui concerne l'approche stochastique, bien qu'elle soit la plus efficace, elle semble être d'avantage adaptée à une analyse de flux au niveau d'un portefeuille. Alors que les portefeuilles de life settlements ont tendance à devenir de plus en plus importants, il est fort probable de voir une évolution des pratiques de marché allant vers une combinaison entre la méthode probabiliste pour la tarification individuelle et des simulations stochastiques pour l'évaluation globale des portefeuilles. Voici un tableau récapitulatif des différentes méthodes d'évaluation étudiées avec leurs avantages et inconvénients.

Méthode	Avantages	Inconvénients
Déterministe	<ul style="list-style-type: none"> → Simple → Facile à implémenter → Approche conservative/prudente 	<ul style="list-style-type: none"> → Peu réaliste → Ignore l'incertitude liée à la distribution de l'espérance de vie → Biais systématique
Probabiliste	<ul style="list-style-type: none"> → Cohérente avec pratiques usuelles d'assurance vie → Prend en compte la distribution de l'espérance de vie → Adaptée pour l'évaluation de polices individuelles 	<ul style="list-style-type: none"> → Dépend de la loi des grands nombres → Assez « lourde » à mettre en place pour l'évaluation globale de portefeuilles
Stochastique	<ul style="list-style-type: none"> → Méthode la plus efficace → Pratique pour effectuer des analyses de coût détaillées → Adaptée pour évaluation de portefeuilles 	<ul style="list-style-type: none"> → Degré de complexité important et difficulté d'implémentation → Moins adaptée pour une évaluation individuelle de polices

TABLE 3.9 – Récapitulatif des différentes méthodes d'évaluation

Chapitre 4

Incorporation de toute l'information médicale dans la table de mortalité

Un point crucial pour les différentes méthodes d'évaluation de life settlements est la façon dont l'information médicale sur l'état de santé de l'assuré est utilisée dans les calculs. Comme nous l'avons illustré dans les exemples précédents, l'approche standard consiste à déterminer un multiple de mortalité qui permet d'ajuster la table de mortalité utilisée afin d'obtenir une nouvelle table qui coïncide avec l'estimation faite sur l'espérance de vie de l'assuré. Alors que ce procédé permet effectivement de déterminer des probabilités de décès et de survie ajustées à l'espérance de vie de l'assuré, il serait également intéressant de pouvoir prendre en compte d'autres types d'informations fournies par les experts médicaux.

Un extrait d'un rapport médical a été joint en annexe. Cet exemple montre une étude qui porte sur un assuré âgé de 61 ans. Suite aux tests médicaux effectués, les experts de *21st Services* ont estimé que l'espérance de vie moyenne de cette personne était de 279 mois (23,3 ans), l'espérance de vie médiane était de 287 mois (23,9 ans) et le quantile à 85% sur la date de décès a été estimé à 385 mois (32,1 ans). Le quantile à 85% représente le moment à partir duquel on estime que, sur une population de 1000 individus dont les conditions médicales correspondent exactement à celle de l'assuré en question, 850 seront décédés. La médiane correspond à l'instant estimé où la moitié de la population (500) sera décédée. Finalement, le rapport médical souligne que l'information fournie est valable uniquement lorsqu'elle est utilisée dans son intégralité. L'utilisation de seulement une partie des données peut entraîner une perte d'information liée aux effets interrelationnels existant entre les différentes analyses.

Dans ce chapitre, nous allons présenter une nouvelle méthode, proposée par BROCKETT et al. (2012) qui permet d'ajuster une table de mortalité standard à tout type d'information fournie par les experts médicaux.

4.1 Fondement théorique

L'objectif est de développer une méthode rigoureuse, statistiquement valable et facilement applicable qui permette d'incorporer dans une table de mortalité toutes les caractéristiques individuelles connues sur un individu, tout en restant le plus proche possible de la table de base. De façon schématique, le problème peut se résumer de la manière suivante : Si les experts médicaux ont estimé que l'espérance de vie moyenne de l'assuré est de m années et qu'il y a 85% de chance que celui-ci décède avant l'année q , comment peut-on calculer la valeur de cette police en utilisant cette information pour adapter les tables de mortalité habituellement utilisées par les acteurs du marché ? Afin d'évaluer cette police en question, il est donc nécessaire de construire une nouvelle table de mortalité qui donne une espérance de vie de m années ainsi qu'une probabilité de décès avant q années de 85%. Nous utiliserons ici la divergence de Kullback-Leibler (K-L) comme mesure de proximité entre la table de mortalité de base et la table ajustée à l'information médicale.

4.1.1 Divergence de Kullback-Leibler

En théorie des probabilités et en théorie de l'information, la divergence de Kullback-Leibler¹³, aussi appelée entropie relative, est couramment utilisée comme mesure de similarité ou dissimilarité entre deux distributions de probabilités f et g .

Définition 4.1.1 (Divergence de Kullback-Leibler)

Pour deux distributions de probabilités f et g , la divergence de Kullback-Leibler de g par rapport à f est définie par :

$$D_{K-L}(f|g) = \mathbb{E}_f \left(\ln \frac{f}{g} \right)$$

13. Voir KULLBACK and LEIBLER (1951)

Si f et g sont deux distributions de probabilités discrètes sur un ensemble \mathfrak{X} , on obtient :

$$D_{K-L}(f|g) = \sum_{t \in \mathfrak{X}} f(t) \ln \frac{f(t)}{g(t)}$$

Cette quantité représente en quelque sorte l'information perdue lorsqu'on essaye d'approximer g par f . Il ne s'agit pas d'une distance, puisque $D_{K-L}(f|g)$ n'est pas symétrique et ne respecte pas l'inégalité triangulaire. Elle possède cependant d'autres propriétés intéressantes qui se démontrent assez facilement :

- $D_{K-L}(f|g) \geq 0$;
- $D_{K-L}(f|g) = 0 \iff f = g$.

Dans la suite, nous utiliserons la divergence de Kullback-Leibler comme mesure de proximité des densités f et g . Cette mesure va être utilisée pour ajuster une table de mortalité standard afin d'obtenir une nouvelle table qui soit le plus proche possible de la table de départ, tout en restant cohérente avec les informations médicales.

4.1.2 Ajustement d'une table de mortalité à l'information médicale

Pour décrire le problème de manière générale, supposons que nous connaissons la fonction de densité g et que nous souhaitons trouver une autre densité f qui soit le plus proche possible de la fonction g et qui satisfasse certaines conditions, comme p.ex. :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_0 = 1 = \sum_t f(t) \\ \theta_1 = \sum_t a_1(t) f(t) \\ \dots \\ \theta_n = \sum_t a_n(t) f(t) \end{array} \right. \quad (8)$$

La première contrainte permet simplement de s'assurer que f soit bien une densité de probabilité. Si on fixe $a_1(t) = t$ et $\theta_1 = m$, alors la deuxième condition traduit le fait que l'espérance de f doit être égale à m . Si on s'intéresse à fixer une contrainte sur un quantile de la densité, il suffit de prendre la fonction a égale à 1 sur un certain intervalle et 0 en dehors de cet intervalle. Par exemple, si le quantile à 85% vaut q , alors on aurait : $\theta = 0,85$ avec $a(t) = 1$ pour $t \leq q$ et 0 sinon.

Dans notre cas, la fonction de densité discrète $g(t)$, définie pour $t = 0, 1, \dots, \omega - x - 1$, sera la

probabilité de décéder exactement dans t années. ω représente toujours l'âge limite atteint par un assuré dans la table de mortalité et x correspond à l'âge de l'assuré. La variable aléatoire sous-jacente est le nombre d'années T qu'une personne d'âge x va vivre.

Selon les notations actuarielles standards, on a :

$${}_{t+1}p_x = {}_t p_x (1 - q_{x+t}) \quad \text{et} \quad g(t) = {}_{t-1}p_x q_{x+t} \quad (9)$$

Pour une table de mortalité donnée, la distribution de la variable aléatoire T pour un assuré d'âge x est donnée par un vecteur de $\omega - x + 1$ composantes : $g = (g(0), g(1), \dots, g(\omega - x))$. Concrètement, l'objectif est de trouver un vecteur de probabilités f qui soit le plus proche possible de la densité g tout en satisfaisant les contraintes décrites en (8). Mathématiquement, il s'agit de résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\min D_{K-L}(f|g) = \min \sum_t f(t) \ln \frac{f(t)}{g(t)} \quad \text{sous les contraintes (8)} \quad (10)$$

Résolution du problème de minimisation

La résolution du problème (10) peut se faire à l'aide de techniques d'optimisation basiques. Nous allons illustrer le procédé sur un exemple avec deux contraintes. La méthode de résolution restera la même pour des modèles avec plusieurs contraintes.

Soit $n = \omega - x$ et supposons qu'on ait les contraintes suivantes :

$$1 = \sum_t f(t) \quad \text{et} \quad m = \sum_t t f(t) \quad (11)$$

Notons β_0 et β_1 les multiplicateurs de Lagrange. La résolution du problème initial sous les contraintes (11) revient alors à minimiser la fonction :

$$L(f, \beta) = \sum_t f(t) \ln \frac{f(t)}{g(t)} - \beta_0 \left(1 - \sum_t f(t) \right) - \beta_1 \left(m - \sum_t t f(t) \right) \quad (12)$$

En dérivant $L(f, \beta)$ par rapport à $f(0), f(1), \dots, f(n), \beta_0$ et β_1 , on obtient un système de $n + 3$ équations :

$$\begin{cases} \ln\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) + 1 + \beta_0 + t\beta_1 = 0, & \forall t = 0, \dots, n \\ -1 + \sum_t f(t) = 0 \\ -m + \sum_t tf(t) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Les $n + 1$ premières équations nous donnent $f(t) = g(t) \exp(-1 - \beta_0 - t\beta_1)$, pour $t = 0, \dots, n$. En remplaçant cette expression dans la condition $\sum_t f(t) = 1$, on trouve :

$$\beta_0 = \ln(\Phi(\beta_1)) - 1, \text{ avec } \Phi(\beta_1) = \sum_t g(t) e^{-t\beta_1} \quad (14)$$

Ainsi, il ne reste plus qu'à trouver β_1 . Cette opération peut être effectuée à l'aide de n'importe quel outil d'optimisation numérique. Dans le cadre de ce mémoire nous avons utilisé l'outil *Solver* d'Excel et nous avons également vérifié les résultats obtenus avec une optimisation effectuée à l'aide du logiciel R.

4.2 Exemple numérique

Nous allons maintenant présenter une application numérique de la nouvelle méthode d'incorporation de l'information médicale décrite plus haut. Pour se faire, nous calculons la NAV d'un portefeuille de 78 polices pour lesquelles nous avons non seulement une estimation de l'espérance de vie moyenne de l'assuré, mais également une estimation du quantile à 85%. Afin de comparer les résultats obtenus, nous allons déterminer la NAV à l'aide de la méthode classique des multiples de mortalité, puis nous utiliserons la mesure de divergence de Kullback-Leibler pour construire une nouvelle table intégrant l'espérance de vie estimée (problème d'optimisation à deux contraintes), et finalement nous calculerons la valeur du globale du portefeuille en intégrant également la contrainte sur le quantile à 85% (problème d'optimisation à trois contraintes).

Nous avons utilisé la méthode probabiliste pour calculer la valeur des différentes polices. Cette fois-ci, l'approche retenue pour l'évaluation des polices a été d'effectuer une évaluation mensuelle plutôt qu'annuelle. Une évaluation mensuelle a l'avantage d'être plus précise puisqu'elle permet de déterminer

les flux entrants et sortant de manière plus régulière, mais elle est également plus lourde à mettre en place et s'appuie sur des hypothèses de probabilités de survie et de décès intra-annuelles discutables.

4.2.1 Paramètres et hypothèses de modélisation

- Le taux d'intérêt attendu par les investisseurs (IRR) pour ce portefeuille est de 15,45% par an, ce qui équivaut à un taux mensuel de : $r_{12} = (1 + IRR)^{1/12} - 1 = 1,2044\%$;
- Table de mortalité de base : VBT 2008 ;
- t est la mesure de temps exprimée en mois ;
- Probabilité de décès mensuelle : $1 - q_x^{(\text{mensuel})} = \left(1 - q_x^{(\text{annuel})}\right)^{1/12}$ (hypothèse de mortalité intra-annuelle constante) ;
- Probabilité qu'un individu d'âge x survive au moins t mois : ${}_t p_x = {}_{t-1} p_x \left(1 - q_{x+t}^{(\text{mensuel})}\right)$;
- Le capital décès (CD) est supposé être reçu à la fin du mois suivant le décès de l'assuré : $CD_t = \text{Valeur Faciale} \cdot {}_{t-2} p_x q_{x+t-1}^{(\text{mensuel})}$;
- Les primes sont payées en début de chaque mois si l'assuré a survécu jusqu'à la période en question : $PP_t = \text{Prime}_t \cdot {}_t p_x$;
- Valeur nette actuelle des capitaux décès reçus : $NAV(CD) = \sum_{t=1}^{\omega-x} \frac{CD_t}{(1 + r_{12})^t}$;
- Valeur nette actuelle des primes payées : $NAV(PP) = \sum_{t=1}^{\omega-x} \frac{PP_t}{(1 + r_{12})^{t-1}}$.

Les calculs ont été effectués à la date du 01/01/2014 pour un portefeuille contenant 78 polices en tout. Nous présenterons les détails des différentes étapes de calcul pour une police ayant les caractéristiques suivantes :

Âge de l'assuré à la date d'évaluation	83 ans
Âge de l'assuré lors de l'estimation ¹⁴	77 ans
Espérance de vie	129 mois
Quantile à 85%	182 mois
Valeur faciale	\$ 5 000 000

TABLE 4.1 – Caractéristiques de la police utilisée pour illustrer les résultats

14. Âge de l'assuré lors du rapport médical et de l'analyse de l'état de santé.

4.2.2 Méthode classique

La méthode classique consiste à déterminer pour chaque assuré un multiple de mortalité permettant d'ajuster la table afin d'obtenir la bonne espérance de vie. Il s'agit de la même approche que celle décrite dans la section 3.2. Le seul changement concerne la périodicité des calculs, qui sont effectués tous les mois et non plus tous les ans. Après avoir fait les calculs, on obtient pour la police de référence une valeur de \$ 997 464. La NAV globale pour l'ensemble du portefeuille s'élève à \$ 48 326 261.

4.2.3 Incorporation de l'information médicale en utilisant la divergence de Kullback-Leibler

Prise en compte de l'espérance de vie

Nous allons à présent évaluer le portefeuille en construisant, pour chaque assuré, une table de mortalité aussi proche que possible de la table VBT, tout en reflétant l'espérance de vie individuelle estimée.

D'après le problème de minimisation présenté dans la section 4.1.2, on a :

- fonction de densité à approximer : $g(t) = {}_{t-1}p_x q_{x+t}$, avec ${}_0p_x = 1$;
- fonction de densité à déterminer : $f(t) = g(t) \exp(-1 - \beta_0 - t\beta_1)$;
- contraintes à respecter :
 - $\sum_t f(t) = 1$,
 - $\sum_t tf(t) = EV$.

Comme nous l'avons expliqué plus haut, il convient à présent de trouver les constantes β_0 et β_1 qui correspondent aux multiplicateurs de Lagrange du problème de minimisation. N'importe quel outil d'optimisation non-linéaire devrait permettre de résoudre le problème sans trop de difficultés. Pour éviter de devoir effectuer manuellement les calculs pour chaque assuré, une macro VBA a été développée à cet égard. Celle-ci parcourt l'ensemble des polices du portefeuille et détermine à chaque fois les constantes β_0 et β_1 qui sont les solutions du problème d'optimisation et calcule ensuite la NAV de la police en question. Regardons l'application numérique pour la police de référence :

Projection Mortalité				Variables d'optimisation:		β_0	-1,867086		
						β_1	0,073031		
t	Mois	Âge	q_x VBT mensuel	Proba de survie	G(t)	F(t)	$G(t) \cdot \exp(-t \cdot \beta_1)$	$t \cdot F(t)$	$F_t \cdot \ln(F_t/G_t)$
	Sep-08			1					
0	Oct-08	77	0,0007	0,9993	0,0007	0,0017	0,0007	-	0,0015
1	Nov-08	77	0,0007	0,9986	0,0007	0,0017	0,0007	0,0017	0,0014
2	Dec-08	77	0,0007	0,9979	0,0007	0,0017	0,0007	0,0033	0,0014
3	Jan-09	77	0,0007	0,9972	0,0007	0,0016	0,0007	0,0049	0,0014
4	Feb-09	77	0,0007	0,9965	0,0007	0,0016	0,0007	0,0065	0,0014
5	Mar-09	77	0,0007	0,9958	0,0007	0,0016	0,0007	0,0081	0,0014
6	Apr-09	77	0,0007	0,9951	0,0007	0,0016	0,0007	0,0096	0,0013
7	May-09	77	0,0007	0,9944	0,0007	0,0016	0,0007	0,0111	0,0013
8	Jun-09	77	0,0007	0,9937	0,0007	0,0016	0,0007	0,0126	0,0013
9	Jul-09	77	0,0007	0,9930	0,0007	0,0016	0,0007	0,0141	0,0013
10	Aug-09	77	0,0007	0,9923	0,0007	0,0016	0,0007	0,0156	0,0013
11	Sep-09	77	0,0007	0,9916	0,0007	0,0016	0,0007	0,0170	0,0012
12	Oct-09	78	0,0011	0,9906	0,0011	0,0023	0,0010	0,0281	0,0019
13	Nov-09	78	0,0011	0,9895	0,0011	0,0023	0,0010	0,0302	0,0018
...
Total						1,00	$\Phi(\beta_1)=0,4202$	129,00	0,0820

TABLE 4.2 – Exemple d'application pour le problème de minimisation à deux contraintes

Afin de construire la table de mortalité traduisant l'espérance de vie de l'assuré, il suffit de calculer les probabilités de décès à partir de la nouvelle densité de mortalité $f(t)$ déterminée par le programme d'optimisation. D'après la formule (9), on a :

$$\begin{aligned}
 g(t) &= {}_{t-1}p_x q_{x+t} \\
 &= \prod_{i=0}^{t-1} (1 - q_{x+i}) q_{x+t}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Ce qui implique :

$$q_{x+t} = \frac{g(t)}{g(t-1)} \cdot \frac{q_{x+t-1}}{1 - q_{x+t-1}}, \text{ pour } t \geq 1 \text{ et } q_x = g(0)
 \tag{16}$$

En utilisant cette formule dans laquelle on remplace la densité g par la nouvelle densité f , on arrive ainsi à construire la table de mortalité (probabilité mensuelle de décès et de survie) traduisant l'information médicale connue. Cette nouvelle table est utilisée pour déterminer les flux probables futurs (primes et capital décès), de la même manière que précédemment. Finalement, cette méthode nous permet de trouver une valeur finale de \$ 909 387 pour la police étudiée. Cette valeur est significativement différente de la valeur actuelle nette des flux futurs obtenus avec la méthode classique des multiples de mortalité qui était de \$ 997 464 (écart relatif de 8, 83%). En appliquant cette méthode sur l'ensemble du portefeuille, on obtient une NAV globale de \$ 49 254 588, soit une augmentation de 1, 92% par rapport à la NAV obtenue à la section précédente.

Prise en compte de l'espérance de vie et du quantile à 85%

Regardons maintenant les résultats obtenus lorsqu'on intègre dans les calculs non seulement l'espérance de vie estimée de l'assuré, mais également le quantile à 85% sur la date de décès.

Le problème de minimisation est légèrement différent cette fois :

- fonction de densité à approximer : $g(t) = {}_{t-1}p_x q_{x+t}$, avec ${}_0p_x = 1$;
- fonction de densité à déterminer : $f(t) = g(t) \exp(-1 - \beta_0 - t\beta_1 - a(t)\beta_2)$;
- contraintes à respecter :
 - $\sum_t f(t) = 1$,
 - $\sum_t t f(t) = EV$,
 - $\sum_t a(t) f(t) = 0, 85$.

avec :

$$a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq \text{quantile}_{85\%} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (17)$$

Nous devons maintenant trouver les trois constantes β_0 , β_1 et β_2 qui minimisent la quantité $\sum_t f(t) \ln\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)$ tout en respectant les contraintes ci-dessus. La première contrainte permet de calculer β_0 en fonction de β_1 et de β_2 :

$$e^{1+\beta_0} = \Phi(\beta_1, \beta_2) = \sum_t g(t) \exp(-t\beta_1 - a(t)\beta_2) \quad (18)$$

Il reste à déterminer la valeur de β_1 et β_2 en utilisant les deux contraintes restantes. A nouveau, nous utilisons l'outil *Solver* d'Excel qui permet de trouver assez rapidement une solution au problème.

Regardons un exemple d'application pour la même police que précédemment :

Projection Mortalité			Variables d'optimisation:		β_0	-0,722452		
					β_1	0,030192		
					β_2	-10,018729		
t	...	Gt (tPx*Qx+t)	a(t)	F_t	$G_t * \text{Exp}(-t * \beta_1) - a(t) * \beta_2$	$t * F_t$	$a(t) * F_t$	$F_t * \text{LN}(F_t / G_t)$
0	...	0,0007	0,0833	0,0012	0,0016	-	0,0012	0,0007
1	...	0,0007	0,0833	0,0012	0,0016	0,0012	0,0012	0,0007
2	...	0,0007	0,0833	0,0012	0,0016	0,0024	0,0012	0,0007
3	...	0,0007	0,0833	0,0012	0,0016	0,0036	0,0012	0,0007
4	...	0,0007	0,0833	0,0012	0,0016	0,0048	0,0012	0,0007
5	...	0,0007	0,0833	0,0012	0,0016	0,0060	0,0012	0,0007
6	...	0,0007	0,0833	0,0012	0,0016	0,0072	0,0012	0,0007
7	...	0,0007	0,0833	0,0012	0,0016	0,0084	0,0012	0,0007
8	...	0,0007	0,0833	0,0012	0,0016	0,0095	0,0012	0,0006
9	...	0,0007	0,0833	0,0012	0,0016	0,0107	0,0012	0,0006
10	...	0,0007	0,0833	0,0012	0,0016	0,0119	0,0012	0,0006
11	...	0,0007	0,0833	0,0012	0,0016	0,0130	0,0012	0,0006
12	...	0,0011	0,0833	0,0018	0,0023	0,0215	0,0018	0,0010
13	...	0,0011	0,0833	0,0018	0,0024	0,0232	0,0018	0,0010
...
Total			1,00	$\Phi(\beta_1, \beta_2) = 1,3199$	129,00	0,85	0,1076	

TABLE 4.3 – Exemple d'application pour le problème de minimisation à trois contraintes

Remarque : Comme t mesure le nombre de mois écoulés, il convient de prendre $a(t) = \frac{1}{12}$ si $t \leq \text{quantile}_{85\%}$ et $a(t) = 0$ sinon.

A l'aide de la formule (16) nous pouvons finalement construire la nouvelle table de mortalité qui reprend toutes les informations médicales individuelles de l'assuré. Avec cette table, on trouve une valeur finale de \$995 580 pour la police de référence. La valeur totale du portefeuille s'élève à \$48 777 228.

4.2.4 Comparaison des résultats

	NAV Police de référence	NAV portefeuille
Méthode classique	\$ 997 464	\$ 48 326 261
Méthode K-L ¹⁵ avec 2 contraintes	\$ 909 387	\$ 49 254 588
Méthode K-L avec 3 contraintes	\$ 995 579	\$ 48 777 228

TABLE 4.4 – Comparaison des différentes méthodes pour intégrer l'information médicale

Bien que les écarts obtenus sur l'évaluation d'une seule police peuvent être assez conséquent en fonction de la méthode utilisée, sur l'ensemble du portefeuille les différences ont tendance à se compenser. L'écart relatif par rapport à la méthode classique du multiple de mortalité est de 1,92% pour la méthode K-L avec 2 contraintes (utilisation seulement de l'estimation de l'espérance de vie) et de 0,93% pour la méthode K-L avec 3 contraintes (utilisation de l'estimation de l'espérance de vie et du quantile à 85%).

4.3 Conclusion

Une des principales difficulté rencontrée lors de l'évaluation des polices sur le marché secondaire de l'assurance vie réside dans l'incorporation de l'information médicale dans la table de mortalité. La pratique standard actuelle consiste à appliquer un multiple à la table de base de manière à obtenir une nouvelle table qui permette de trouver la même espérance de vie que celle estimée par les experts médicaux. L'avantage de cette méthode est qu'elle est relativement simple à mettre en œuvre, mais l'inconvénient est qu'elle ne permet pas de prendre en compte d'autres informations médicales dans la tarification des life settlements.

Dans ce chapitre, nous avons introduit une nouvelle méthode qui se base sur la divergence de Kullback-Leibler pour ajuster les tables de mortalité à plusieurs types d'information médicale, comme l'espérance de vie moyenne mais également le quantile à 85%. L'objectif recherché avec cette approche est de créer une table qui soit la plus proche possible de la table initiale, tout en respectant les différentes conditions médicales. Avec les outils d'optimisation numériques intégrés dans la plupart des programmes statistiques, des résultats satisfaisants peuvent être obtenus avec des temps de calcul raisonnables, ce qui rend cette méthode facile à utiliser en pratique.

¹⁵ Nouvelle méthode avec minimisation de la divergence de Kullback-Leibler pour trouver une table aussi proche possible de la table de base qui intègre les conditions médicales de l'assuré.

Si on se réfère aux avis des experts médicaux, toute l'information disponible sur l'état de santé de l'assuré devrait être prise en compte dans l'évaluation des polices, afin d'être le plus réaliste possible. Par conséquent, la méthode K-L utilisée ici permet de surmonter les limites de l'application d'un simple multiple pour ajuster la table de mortalité. Il serait donc intéressant de voir les pratiques de marché évoluer dans les prochaines années vers une méthode plus aboutie, comme celle qui a été présentée dans ce chapitre.

Chapitre 5

Gestion d'un fonds de life settlements

Dans cette partie nous analysons en détail le fonctionnement d'un fonds investissant dans des polices sur le marché secondaire de l'assurance vie. L'objectif de ces fonds est d'acquérir et regrouper une quantité importante de polices afin de créer un portefeuille diversifié, fournissant un rendement attractif qui est pratiquement non-corrélé des rendements du marché des actifs conventionnels. Les investisseurs présents sur ce marché secondaire sont principalement des investisseurs institutionnels, pour lesquels un placement dans un fonds est à la fois plus attractif et plus pratique que l'achat direct de polices individuelles. En effet, la participation à un fonds permet à l'investisseur de bénéficier d'une diversification accrue et d'une expertise professionnelle quant à la détermination de la composition du portefeuille. A cela s'ajoute le fait que le processus d'acquisition d'une police s'avère être relativement complexe à cause des nombreuses conditions légales et contraintes administratives qui doivent être respectées.

Les premières véritables opérations de titrisation de life settlements ont eut lieu en 2004. En janvier 2004, *Tarrytown Second, LLC* émet une obligation de \$ 63 Mio avec un coupon de 7% et une maturité de 8 ans. Les assurés du pool ont alors une espérance de vie allant de 4 à 7 ans. En avril 2004, *Legacy Benefits Life Insurance Settlements* émet à son tour une obligation de \$ 70 Mio en deux tranches cette-fois. Le coupon tourne autour des 5,5% et la date de maturité est fixée en 2039. Les assurés dans le portefeuille ont alors un âge moyen de 77 ans¹⁶.

16. Source : BAUWENS and WALHIN (2008) et STONE and ZISSU (2006)

Voici la structure d'un fonds spécialisé dans l'achat de life settlements :

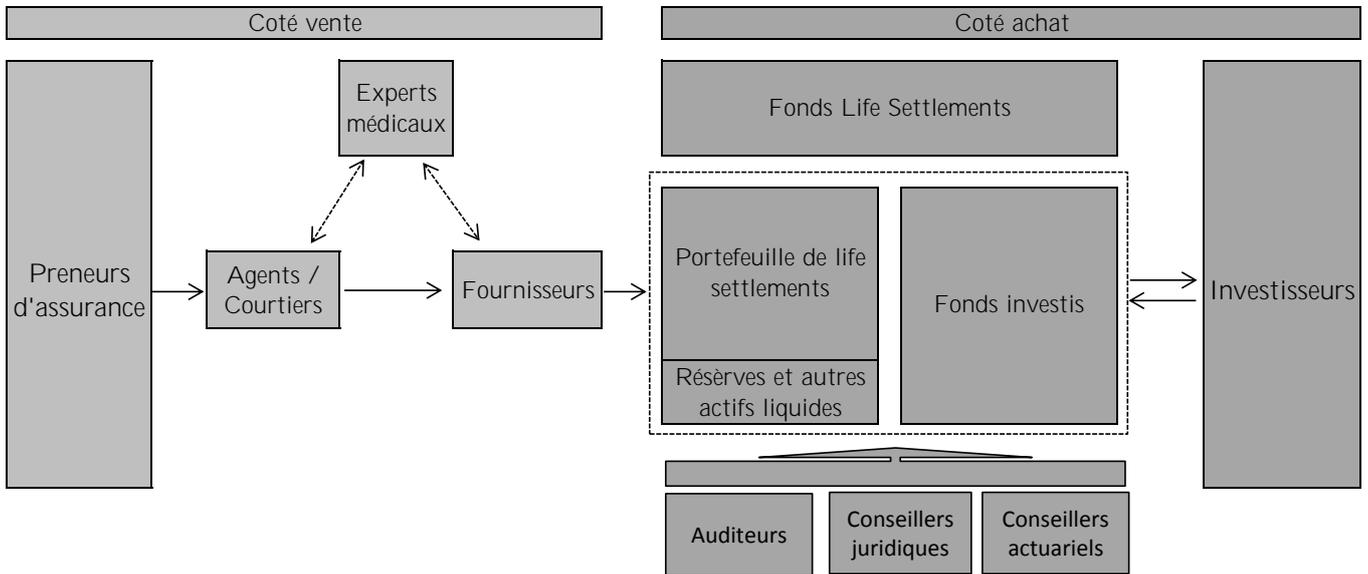


FIGURE 5.1 – Structure d'un fonds de life settlements

La popularité des fonds investissant dans des life settlements n'a cessé de croître ces dernières années. Durant cette période, principalement deux types de fonds se sont développés sur le marché. On y trouve non seulement des fonds de type fermé avec une participation limitée et une maturité fixe, mais également des fonds ouverts sans maturité et avec des possibilités de souscription et de rachat de parts à des intervalles réguliers (mensuels ou trimestriels).

5.1 Fonds de type fermé

Un fonds fermé est un fonds d'investissement où il n'est plus possible d'émettre de nouvelles parts après une période de souscription initiale limitée dans le temps. De ce fait, le capital de ce type de fonds n'évoluera pas après la période de souscription et le gestionnaire du fonds ne pourra bénéficier de nouvelles levées pour réaliser de nouveaux investissements. Il est également important de noter que de façon générale, une fois la souscription close, le souscripteur ne peut réaliser son capital qu'à la liquidation du fonds qui s'effectue à la date de maturité.

Le fonds fermé est une pratique courante lorsque les actifs sous-jacents sont peu liquides, comme c'est le cas pour les investissements dans l'immobilier, les bateaux, mais également pour les life settlements. En effet, si les actifs que détient le fonds ne sont pas liquides, ce dernier peut difficilement

être liquide. Il n'est donc pas surprenant de constater que nombreux fonds spécialisés dans le marché secondaire de l'assurance vie aient choisi une structure de ce type. Ces fonds sont domiciliés dans le pays de l'investisseur primaire (gestionnaire du fonds), qui sont actuellement situés principalement en Allemagne, au Royaume-Uni, en Irlande et au Luxembourg. Ils suivent une stratégie d'investissement classique d'achat et de maintien (*buy-and-hold*) à l'égard des placements et ont en général une structure de frais assez modérée, dans laquelle le gestionnaire reçoit un pourcentage fixe de l'actif sous gestion. Les flux entrant liés aux polices arrivées à terme sont normalement redistribués sous forme de coupons aux souscripteurs, au lieu d'être réinvestis. A la date de maturité, les polices restantes sont revendues sur le marché secondaire de l'assurance vie et le capital total du fonds est redistribué aux souscripteurs. Il existe par conséquent un risque lié au prix de revente des polices dû au manque de liquidité du marché en général et de l'incertitude quant à la possibilité de trouver des acheteurs potentiels au moment voulu.

5.2 Fonds de type ouvert

Contrairement aux fonds fermés, les fonds ouverts n'ont pas de durée déterminée et permettent de nouvelles souscriptions de manière continue. Pour l'investisseur, le retrait des fonds est généralement limité par des clauses bien définies au préalable. Le rachat de parts peut se faire uniquement à l'issue de la période d'indisponibilité pouvant aller jusqu'à 3 ans. De même, il existe des limites concernant les montants pouvant être retirés sur une période donnée. L'objectif de ce type de restrictions est de réduire le risque de manque de liquidité qui pourrait se manifester en cas de rachat massif simultané de la part de plusieurs investisseurs. Ces fonds sont presque exclusivement domiciliés dans des centres bancaires « offshore » où ils bénéficient d'une réglementation moins contraignante et d'une taxation plus avantageuse. Les capitaux décès reçus des polices arrivant à maturité sont généralement réinvestis dans des nouvelles polices d'assurance vie et les distributions faites aux investisseurs sont plutôt rares. Les rendements annuels ciblés tournent autour des 8% et 15%, auxquels il faut rajouter des frais de gestion et de performance assez conséquents. Tout bien considéré, ces fonds ont une structure assez similaire à celle des hedge funds classiques.

Les fonds ouverts dédiés aux life settlements fournissent une évaluation régulière de la NAV de leur portefeuille afin de faciliter le suivi de la gestion du fonds par les investisseurs et de garantir l'équité

entre les nouveaux entrants et les souscripteurs initiaux. Puisque le marché secondaire de l'assurance vie n'est pas aussi développé et liquide que d'autres marchés, l'évaluation des portefeuilles se fait selon une approche *mark-to-model*, c'est-à-dire chaque fonds utilise sa propre méthode d'évaluation basée sur un modèle développé en interne.

Voici un récapitulatif des principales différences entre les fonds de type ouvert et les fonds de type fermé :

Type	Fermé	Ouvert
Domiciliation	Pays du gestionnaire	Place bancaire offshore
Régulation	Sujet à réglementation et taxation nationale	Quasiment pas régulés
Maturité	Fixe	Perpétuelle
Souscription	Uniquement pendant la période de souscription	De façon continue
Remboursement	A maturité	De façon (quasi) continue
Période d'indisponibilité	/	Jusqu'à 3 ans
Limite de remboursement	/	Pratique courante
Stratégie d'investissement	<i>Buy-and-hold</i>	Trading actif
Capitaux décès	Distribués aux investisseurs	Réinvestis dans le fonds
Structure de frais	Pourcentage fixe du capital	Frais de gestion et de performance
Évaluation	Rapport annuel	De façon régulière (mensuelle)

TABLE 5.1 – Comparaison entre les fonds fermés et les fonds ouverts

5.3 Gestion d'un fonds fermé

Nous allons à présent étudier en détail le fonctionnement d'un fonds fermé et essayer de déterminer les flux futurs probables ainsi que le rendement maximum pouvant être réalisé.

L'objectif de cette partie sera donc de déterminer pour un fonds fermé, investissant sur le marché des life settlements, le montant des flux entrants et sortants survenant à chaque période, afin de pouvoir en déduire une stratégie d'investissement qui maximise le rendement des investisseurs. Le principe de fonctionnement d'un fonds fermé est assez simple : Les investisseurs potentiels investissent une certaine somme dans le fonds. Avec cet argent, le gestionnaire achète un nombre important de polices (au moins 200) sur le marché secondaire de l'assurance vie. Les taux de coupons annuels et la date de maturité

sont fixés à la souscription. Une fois le portefeuille constitué, le gestionnaire s'occupe de payer les primes pour les polices en vigueur et de récupérer les capitaux décès pour les contrats arrivant à maturité (en cas de décès de l'assuré). C'est avec le montant des capitaux décès reçus que les investisseurs sont rémunérés (coupons annuels) et que les frais de gestion sont couverts. A la date de maturité, toutes les polices encore en vigueur dans le portefeuille sont revendues et les capitaux ainsi libérés sont utilisés pour rembourser les souscripteurs de leur investissement initial. Il est primordial que durant toute cette période les réserves de cash du fonds ne tombent pas en dessous de 0, sous peine d'être contraint à vendre certaines polices ou de les laisser expirer et de risquer de ne plus pouvoir rembourser les investisseurs à la date de maturité prévue.

L'investissement en question se fait sous forme d'un prêt obligataire au gestionnaire du fonds, qui est remboursé *In Fine* à une date d'échéance fixée. Les flux générés par le portefeuille sont ensuite utilisés pour couvrir les versements périodiques découlant de cette opération. Pour le gestionnaire du fonds il est donc intéressant de déterminer les coupons maximums pouvant être payés aux investisseurs avec un taux de défaut de remboursement fixé à 1% ou 5% par exemple.

Méthodologie

La méthode retenue ici sera d'utiliser des simulations de Monte Carlo afin de déterminer comment les flux générés par un portefeuille donné de life settlements peuvent couvrir les obligations survenant de la dette envers les investisseurs (paiement des coupons, remboursement de la valeur nominale de l'emprunt, paiement des frais divers, etc). Voici une représentation graphique des différentes étapes d'une simulation :

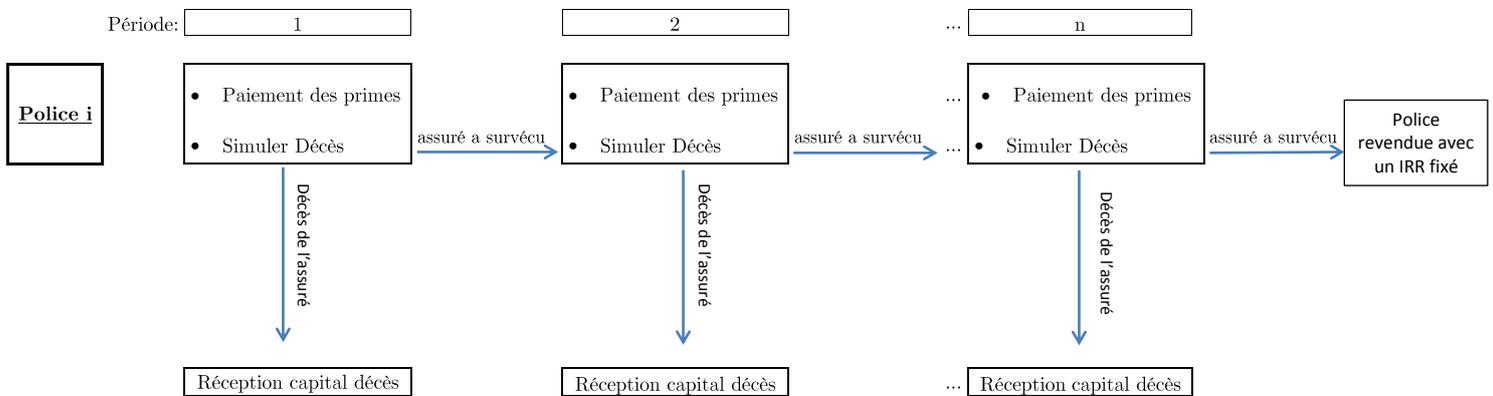


FIGURE 5.2 – Différentes étapes de simulation pour une police

A chaque période, nous simulons l'occurrence du décès de l'assuré pour toutes les polices encore en vigueur dans le portefeuille. Si le décès a lieu, le capital décès prévu dans le contrat est reçu et la police « disparaît » du portefeuille. Au contraire, si l'assuré a survécu, les primes prévues au contrat pour la période en question doivent être payées et la police reste en vigueur. Tous les ans, un coupon est reversé aux souscripteurs du fonds et des frais de gestion doivent également être payés. Lors de la dernière période de projection, toutes les polices qui ne sont pas arrivées à terme sont revendues et le gestionnaire rembourse les souscripteurs du montant initial investi. Si, à n'importe quel instant durant la simulation, le solde de trésorerie du fonds devient négatif, alors nous considérerons que cette simulation aura donné lieu à un défaut de paiement. En comptant le nombre de défauts simulés au total, il est ainsi possible d'obtenir une approximation du taux de défaut de remboursement.

Toutes ces étapes sont répétées un grand nombre de fois. Nous avons effectué cette analyse de flux pour le même portefeuille que celui utilisé dans la partie sur la valorisation des life settlements (voir chapitre 3). Celui-ci comprend 269 polices, dont 12 concernent des polices portant sur deux têtes (*joint lives*).

Pour effectuer les simulations, nous avons utilisé différentes hypothèses concernant la taille de l'emprunt et les divers coûts de gestion associés au fonds. Celles-ci ne correspondent pas à des données réelles mais ont été choisies uniquement pour illustrer la méthodologie. Voici les hypothèses de simulation retenues :

- Valeur nominale de l'emprunt : 130 Mio ;
- Date d'émission : 31/03/2014 ;
- Durée de l'emprunt : 10 ans ;
- Prix d'achat du portefeuille : 105 Mio ;
- Frais d'acquisition : 10,4 Mio ;
- Solde de trésorerie au départ : 14,6 Mio ($130 - 105 - 10,4$) ;
- Taux d'intérêt sur solde de trésorerie : 0% (principe de précaution) ;
- Frais de gestion annuels : 1,6% de la valeur nominale ;
- A la fin de l'horizon de projection, toutes les polices encore en vigueur dans le portefeuille sont revendues avec un IRR fixé à 11%.

Les taux de coupons annuels sont les seuls paramètres pouvant être modifiés afin d'obtenir le taux de défaut de remboursement voulu. Pour minimiser le nombre de défauts de paiement simulés, il est primordial de garder un solde de trésorerie supérieur à zéro tout au long de la projection, ou autrement dit de constituer progressivement une réserve suffisante pour couvrir les besoins de paiements futurs. De ce fait, les premières années de projection sont déterminantes. En effet, le solde de trésorerie initial du fonds s'élève à \$ 14,6 Mio, ce qui représente une réserve assez conséquente. Si néanmoins, les coupons s'avèrent être trop élevés durant les premières années, cette réserve risque de diminuer rapidement et même de devenir négative. A cela s'ajoute le fait que les probabilités de décès sont plus faibles en début qu'en fin de projection et que par conséquent, les décès, qui sont synonyme d'entrée d'argent pour le fonds, seront également moins nombreux durant les premières années. La constitution d'une réserve suffisante devra donc probablement se faire en prenant des taux de coupons assez faibles en début de projection, sans s'interdire d'augmenter ces derniers par la suite.

Application numérique

Les simulations ont été effectuées à l'aide d'une macro VBA. Le code utilisé se trouve en annexe de ce document (voir annexe 6). Regardons les résultats obtenus sur le portefeuille étudié pour un niveau de confiance à 99% et 95%¹⁷ :

Année	Taux de coupon versé aux investisseurs
1	0%
2	0%
3	7,8%
4	7,8%
5	7,8%
6	7,8%
7	7,8%
8	7,8%
9	7,8%
10	7,8%

Nombre de simulations	10 000
Nombre de simulations ayant provoquées un défaut	99
Taux de défaut	0,99%

TABLE 5.2 – Taux de coupons versés à un niveau de confiance à 99%

¹⁷. Un niveau de confiance à 99% équivaut à un taux de défaut de 1%.

Année	Taux de coupon versé aux investisseurs
1	0%
2	0%
3	9%
4	9,25%
5	9,50%
6	9,75%
7	10%
8	10%
9	10%
10	10%

Nombre de simulations	10 000
Nombre de simulations ayant provoquées un défaut	496
Taux de défaut	4,96%

TABLE 5.3 – Taux de coupons versés à un niveau de confiance à 95%

Ce fonds peut donc émettre un taux de coupon de 7,8%, ce qui correspond à un montant de 9,98 Mio, à partir de la 3^e année avec une probabilité de faire défaut estimée à environ 0,01. Avec un probabilité de défaut avoisinant les 5%, le gestionnaire peut même décider de verser un coupon de 9% (11,52 Mio) en année 3 et d'augmenter ensuite tous les ans le taux de coupon de 0,25% jusqu'à atteindre un taux de 10% (12,8 Mio) en année 7 qui est maintenu jusqu'à la dernière année. Les deux premières années, le taux de coupon est nul afin de permettre la constitution d'une réserve suffisante pour faire face aux paiements futurs. En analysant ces résultats, il ne faut pas oublier que nous avons pris, par principe de prudence, un taux d'intérêt de 0% sur le solde de trésorerie. Or en pratique, on peut s'attendre à ce que ces montants soit investies dans des placements relativement sûrs, à forte liquidité, qui rapportent certes des rendements faibles, mais non nuls en général. Ainsi, en relâchant cette hypothèse assez restrictive, on pourrait même envisager de reverser au investisseurs des taux de coupons légèrement supérieurs.

Représentation Graphique

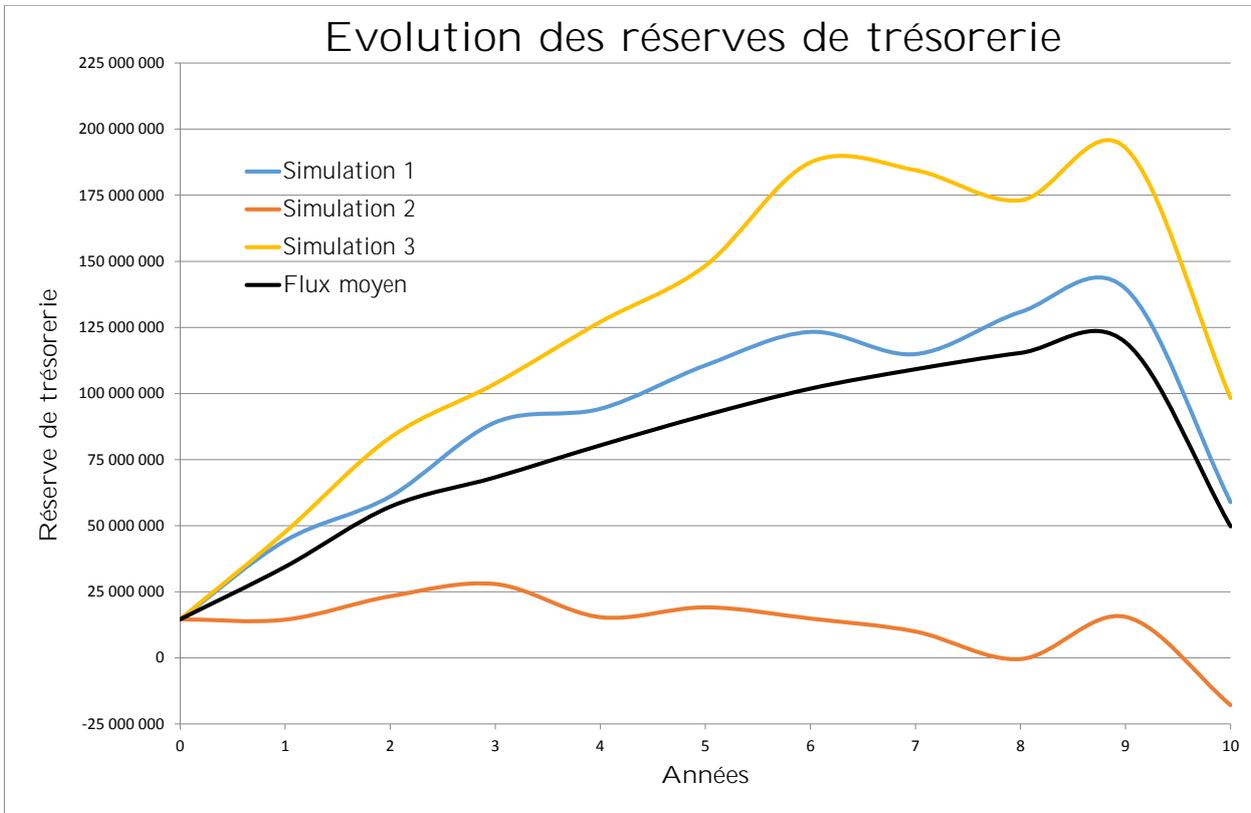


FIGURE 5.3 – Évolution du solde de trésorerie pour différentes simulations

La figure 5.3 reprend l'évolution des réserves de trésorerie pour plusieurs trajectoires simulées. Le point de départ est le même pour chaque simulation (14,6 Mio) et ce solde évolue ensuite en fonction des décès survenant dans le portefeuille étudié. La simulation 2 montre un exemple d'une simulation donnant lieu à un défaut de paiement. Pour cette trajectoire, le gestionnaire du fonds ne possède pas d'une trésorerie suffisante pour rembourser entièrement les investisseurs de leur apport initial. Comme on peut le constater sur le graphique 5.4, cette simulation correspond également à la simulation donnant lieu au nombre le plus faible de décès. Le tableau 5.4 reprend les valeurs du solde de trésorerie et du nombre de polices toujours en vigueur dans le portefeuille pour chaque année de projection.

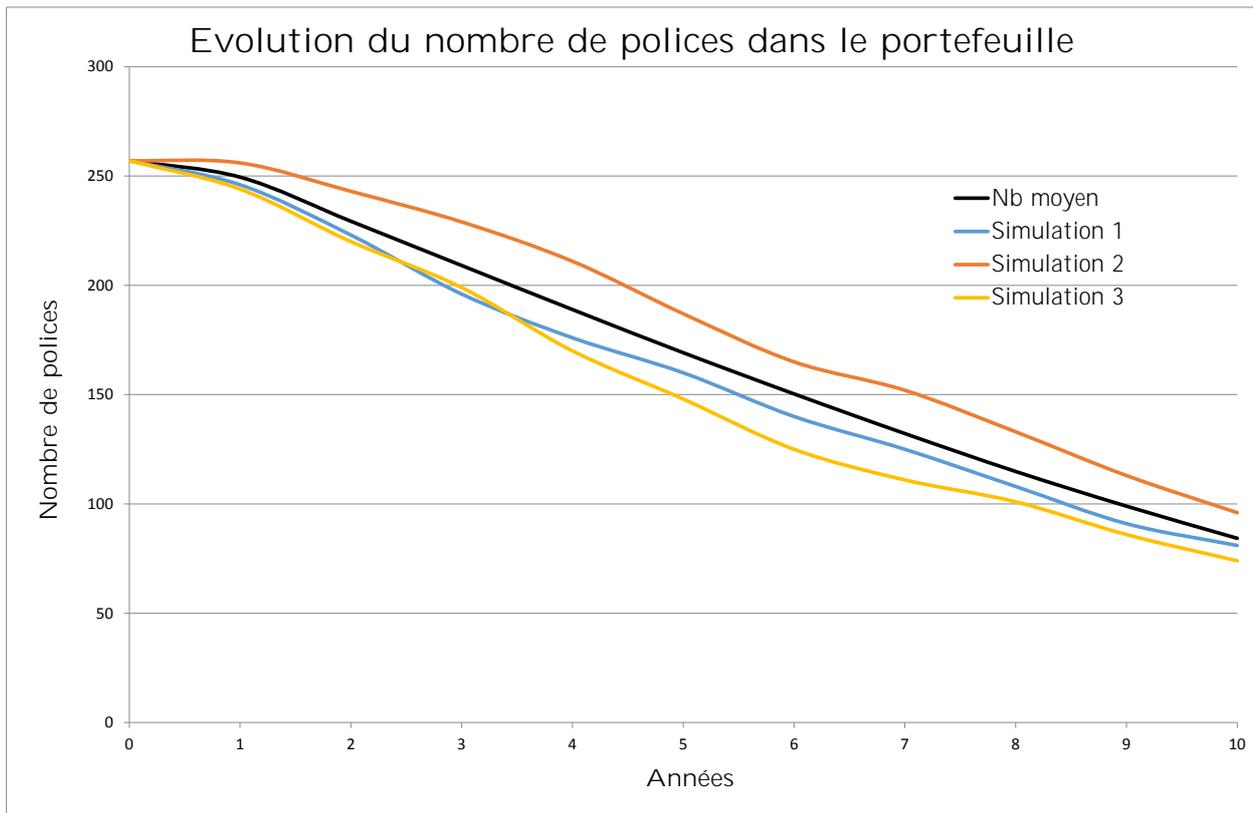


FIGURE 5.4 – Évolution du nombre de polices pour différentes simulations

Voici les résultats détaillés pour les différentes simulations présentées dans les deux graphiques précédents (les montants des soldes de trésorerie sont exprimés en millions) :

	Simulation 1	Simulation 2	Simulation 3	Moyenne
Année 0	Trésorerie : 14,6 # polices : 257	Trésorerie : 14,6 # polices : 257	Trésorerie : 14,6 # polices : 257	Trésorerie : 14,6 # polices : 257
Année 1	Trésorerie : 44,3 # polices : 246	Trésorerie : 14,4 # polices : 256	Trésorerie : 47,6 # polices : 244	Trésorerie : 34,5 # polices : 249,5
Année 2	Trésorerie : 61,1 # polices : 223	Trésorerie : 23,3 # polices : 243	Trésorerie : 83,3 # polices : 220	Trésorerie : 57,2 # polices : 229,3
...
Année 8	Trésorerie : 130,8 # polices : 108	Trésorerie : -0,4 # polices : 133	Trésorerie : 173 # polices : 101	Trésorerie : 115,3 # polices : 114,8
Année 9	Trésorerie : 139,6 # polices : 91	Trésorerie : 15,5 # polices : 113	Trésorerie : 192,9 # polices : 86	Trésorerie : 119,4 # polices : 98,9
Année 10	Trésorerie : 58,8 # polices : 81	Trésorerie : -17,9 # polices : 96	Trésorerie : 98,3 # polices : 74	Trésorerie : 49,7 # polices : 84,3

TABLE 5.4 – Résultats de différentes simulations

Troisième partie

Modélisation de la mortalité et risque de longévité

Chapitre 6

Choix d'une table de mortalité pour l'évaluation des life settlements

6.1 Introduction

Il existe une multitude de tables de mortalité différentes pouvant être utilisées lors de l'évaluation des polices sur le marché secondaire de l'assurance vie. Celles-ci peuvent dépendre du genre de l'assuré, de son état de santé et d'autres caractéristiques individuelles (fumeur/non-fumeur, catégorie socio-professionnelle, etc.). Comme déjà mentionné précédemment, la table la plus souvent utilisée pour déterminer la valeur d'une police est la table 2008 VBT publiée par la SOA. La sélection d'une table de départ appropriée est d'une importance fondamentale pour garantir la précision des calculs effectués par la suite, même si celle-ci doit encore être ajustée afin de prendre en compte toute l'information médicale disponible sur l'assuré.

Un aspect qui n'est souvent pas pris en considération dans les tables usuelles et qui ne devrait pas être négligé est la possibilité d'avoir des sauts soudains de mortalité ou de longévité dans la population. Ceux-ci auront un impact important sur la valorisation et donc sur le marché lui-même. Une illustration parfaite de l'impact d'un saut de longévité sur un marché très proche est la disparition des viatical settlements suite aux progrès faits par la médecine dans le traitement et la prise en charge des patients atteints du SIDA. L'augmentation soudaine de l'espérance de vie des personnes touchées par cette maladie a fait s'effondrer ce marché et permis l'émergence de l'industrie des life settlements. De même, des sauts de mortalité venant augmenter les rendements pour les investisseurs peuvent égale-

ment se produire. Il suffit de prendre comme exemple une épidémie de grippe particulièrement sévère ou n'importe quelle maladie infectieuse touchant principalement les populations à risque et vulnérables (jeunes enfants ou personnes âgées). Actuellement, ce genre d'évènements qui ont pour effet d'augmenter ou de diminuer les taux de mortalité prévus ne sont pas pris en compte dans les modèles d'évaluation.

Par conséquent, dans cette partie nous allons mettre en place une modélisation de la mortalité qui se base non seulement sur des méthodes actuarielles classiques, mais qui prévoit également la possibilité d'avoir des chocs de mortalité et/ou de longévité. L'objectif final sera d'utiliser ce modèle pour évaluer des polices sur le marché secondaire de l'assurance vie.

Un modèle très répandu et souvent utilisé pour modéliser les taux de mortalités futurs est celui de LEE and CARTER (1992). Dans le cadre de ce mémoire, nous utilisons également les travaux effectués par Lee et Carter en matière d'ajustement et de prévision de la mortalité comme point de départ pour ensuite intégrer des sauts de mortalités asymétriques ajoutant ainsi une source d'incertitude supplémentaire dans les investissements liés aux life settlements.

6.2 Notations

Dans la suite de ce chapitre nous utiliserons les notations suivantes :

- x décrit l'âge d'un individu ;
- t est le paramètre de temps ;
- $D_{x,t}$ est le nombre de décès de personnes d'âges x durant l'année t , avec $Dt = \sum_x D_{x,t}$;
- $E_{x,t}$ est le nombre de vivants d'âges x durant l'année t ;
- $m_{x,t}$ est la force de mortalité à l'âge x pour l'année t . Il s'agit du quotient entre le nombre de décès $D_{x,t}$ et l'exposition au risque qui est le nombre de vivants $E_{x,t}$: $m_{x,t} = \frac{D_{x,t}}{E_{x,t}}$.

6.3 Modèle de Lee et Carter

Dans le modèle de Lee et Carter, les taux de mortalité spécifiques à l'âge x et au temps t , dénotés $m_{x,t}$, sont décomposés en deux paramètres spécifiques à l'âge, a_x et b_x et un paramètre décrivant la tendance annuelle de la mortalité, noté k_t .

$$m_{x,t} = e^{a_x + k_t b_x + \epsilon_{x,t}} \quad (19)$$

Dans la suite, nous chercherons à modéliser le logarithme de la force de mortalité :

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + k_t b_x + \epsilon_{x,t} \quad (20)$$

Avec :

- e^{a_x} décrit le comportement moyen du taux de mortalité pour l'âge x au cours du temps ;
- b_x est la sensibilité du logarithme de la mortalité à l'âge x par rapport aux variations du paramètre k . En effet $\frac{d}{dt} \ln(m_{x,t}) = b_x \frac{d}{dt} k_t$. Le profil de b_x indique ainsi quels taux de mortalité varient rapidement ou lentement suite à un changement de k_t ;
- $\epsilon_{x,t}$ sont les termes d'erreur du modèle, supposés de moyenne nulle et de variance constante. Ceux-ci reflètent toutes les influences historiques sur les taux de mortalité spécifiques qui ne sont pas pris en compte par le modèle.

6.4 Estimation des paramètres

Dans un premier temps, nous allons chercher à estimer les paramètres du modèle, afin d'obtenir le meilleur ajustement possible des taux de mortalité sur les données historiques observables.

D'après l'équation (20), le modèle n'est clairement pas identifiable puisqu'il est insensible à différentes modifications des paramètres :

- Si les vecteurs a , b et k vérifient l'équation (20), alors il en va de même pour tout réel c , $a - bc$, b et $k + c$. En effet, $a - bc + (k + c)b = a + kb$;
- De même, pour tout réel c non nul, il est évident que a , bc et $\frac{k}{c}$ forment également une solution du système.

En résumé, le vecteur k est uniquement déterminé à une transformation linéaire près, b est uniquement déterminé à une constante multiplicative près et a est déterminé seulement à une constante additive près. Il est donc nécessaire d'introduire des contraintes sur les paramètres afin de garantir

l'unicité des solutions. Dans leur article, Lee et Carter proposent de fixer les valeurs de b_x et de k_t de manière à vérifier les conditions suivantes :

$$\sum_x b_x = 1 \quad \text{et} \quad \sum_t k_t = 0 \quad (21)$$

Ainsi, les a_x deviennent simplement les moyennes au cours du temps des $\ln(m_{x,t})$:

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} \ln(m_{x,t}) &= \sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} a_x + k_t b_x + \epsilon_{x,t} \\ &= (t_{max} - t_{min} + 1) \cdot a_x + b_x \cdot \sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} k_t + \sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} \epsilon_{x,t} \\ \Leftrightarrow a_x &= \frac{1}{t_{max} - t_{min} + 1} \cdot \sum_{t=t_{min}}^{t_{max}} \ln(m_{x,t}) \end{aligned} \quad (22)$$

(D'après les hypothèses du modèle, $\sum_t k_t = 0 = \sum_t \epsilon_{x,t}$)

Il est clair que les paramètres du modèle ne peuvent pas être estimés par une méthode de régression ordinaire puisqu'il n'y a pas de variables observables dans le membre de droite de l'équation (20). Par conséquent, nous utiliserons la méthode de décomposition en valeurs singulières proposée par Lee et Carter. Cette méthode permet de trouver une estimation des paramètres qui minimise la somme des erreurs au carré :

$$(\hat{a}_x, \hat{b}_x, \hat{k}_t) = \arg \min_{a_x, b_x, k_t} \sum_x \sum_t (\ln \hat{m}_{x,t} - a_x - b_x k_t)^2 \quad (23)$$

Voici les différentes étapes à suivre :

1. A partir de la matrice des taux de décès historiques, notée M , déterminer les estimateurs \hat{a}_x en utilisant la formule (22) ;
2. Construire la matrice Z qui contient les taux de décès centrés par rapport à leur moyenne temporelle $Z = \ln(M) - \hat{a}_x$;

3. L'objectif à présent consiste à approximer Z par le produit de deux matrices (une matrice colonne et une matrice ligne) $Z = \beta \cdot \kappa'$, de manière à minimiser les moindres carrés ordinaires $\sum_x \sum_t (Z_{x,t} - \beta_x \kappa_t)^2$. La résolution de ce problème se fait assez facilement en décomposant Z en valeurs singulières. Pour plus de détails sur la décomposition en valeurs singulières de la matrice Z , le lecteur pourra se référer au mémoire écrit par DELWARDE (2005).

En général, les taux de mortalités ainsi estimés ne permettent pas de retrouver le nombre exact de décès au cours du temps. Pour se faire, il est donc nécessaire de réajuster les k_t tel qu'on ait :

$$\sum_x D_{x,t} = \sum_x E_{x,t} \cdot \exp\left(\hat{a}_x + \hat{b}_x \hat{k}'_t\right), \text{ pour chaque } t = t_{min}, \dots, t_{max} \quad (24)$$

a_x et b_x sont les estimateurs dérivés précédemment et k'_t est l'estimateur réajusté de manière à ce que le modèle reproduise fidèlement le nombre total de décès observés lors d'une année donnée. Ce nouvel estimateur \hat{k}'_t peut être déterminé à l'aide d'une méthode itérative comme celle de Newton-Raphson qui donne de bons résultats avec un nombre limité d'itérations. Les itérations à effectuer sont les suivantes :

$$k_t^{(0)} = \hat{k}_t \quad (25)$$

$$k_t^{(v+1)} = k_t^{(v)} - \frac{F(k_t^{(v)})}{\left. \frac{\partial F}{\partial k_t} \right|_{k_t=k_t^{(v)}}} \quad (26)$$

où $F(k_t^{(v)})$ est la fonction qui doit être annulée, c'est-à-dire :

$$F(k_t^{(v)}) = \sum_x E_{x,t} \cdot \exp\left(\hat{a}_x + \hat{b}_x k_t^{(v)}\right) - D_{x,t} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial F}{\partial k_t} \right|_{k_t=k_t^{(v)}} = \sum_x E_{x,t} \hat{b}_x \cdot \exp\left(\hat{a}_x + \hat{b}_x k_t^{(v)}\right)$$

Finalement, il convient de transformer les estimateurs ainsi trouvés afin de respecter les contraintes du modèle décrites en (21) :

$$\tilde{k}_t = \hat{k}'_t - \bar{k} \quad (27)$$

$$\tilde{a}_x = \hat{a}_x + \hat{b}_x \bar{k} \quad (28)$$

où \bar{k} est la moyenne des \hat{k}'_t .

6.5 Présentation des données utilisées

Dans le cadre de ce mémoire, les données utilisées pour calibrer les paramètres du modèle sont les taux de décès historiques de la population américaine entre 1900 et 2007 que l'on peut trouver sur le site du *National Center for Health Statistics*¹⁸.

Voici une représentation en 3 dimensions des taux de décès (en échelle logarithmique) de la population américaine pour la période étudiée :

Représentation des taux de décès au cours du temps

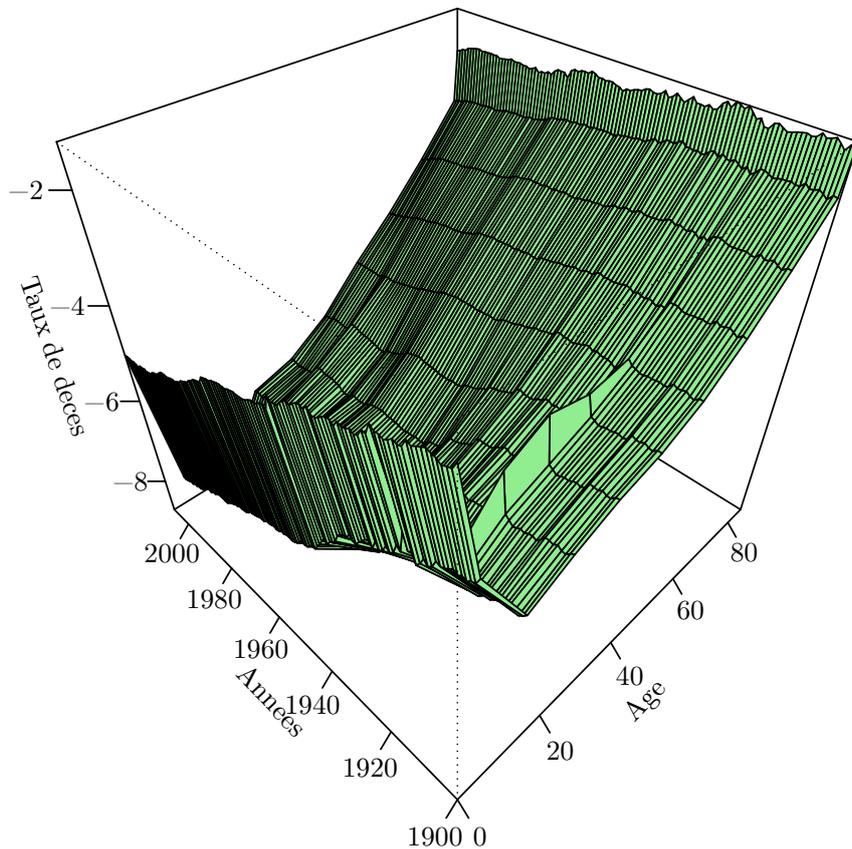


FIGURE 6.1 – Surface de la mortalité aux Etats-Unis de 1900 à 2007

18. Pour les taux de décès de 1900 à 1998, voir <http://www.cdc.gov/nchs/nvss/mortality/hist290.htm> et pour les taux de décès de 1999 à 2007, voir <http://www.cdc.gov/nchs/nvss/mortality/gmwk23r.htm>

Le graphique précédent permet d'analyser l'évolution globale des taux de mortalité aux Etats-Unis au cours du dernier siècle. On remarquera premièrement sans grande surprise une tendance à la baisse de la mortalité sur la période étudiée. Ensuite, on retrouve également pour chaque année l'allure familière des taux de décès dérivés des tables de mortalité classiques, à savoir une mortalité élevée juste après la naissance qui diminue jusqu'à la fin de l'adolescence et augmente ensuite constamment jusqu'au dernier âge de la table. Finalement, il est possible d'observer des « anomalies » pour certaines années, comme par exemple le pique de mortalité observé juste avant 1920.

Il est également intéressant de comparer l'évolution des taux de mortalité pour différents âges :

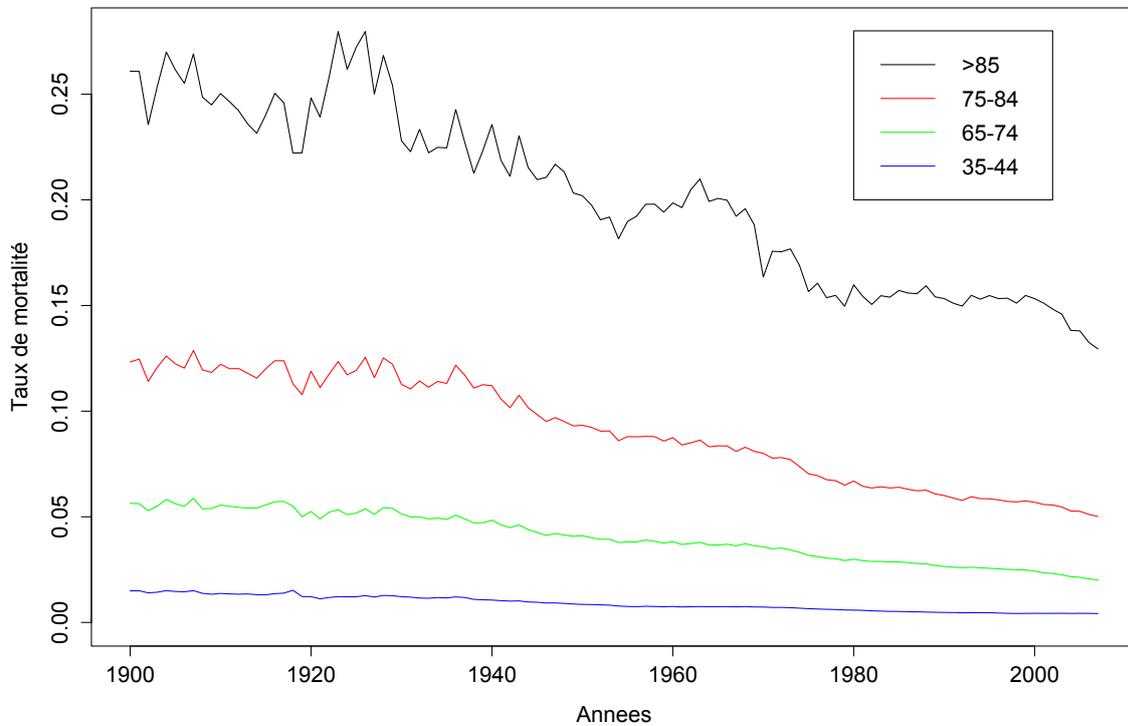


FIGURE 6.2 – Comparaison des taux de mortalité pour divers catégories d'âge

Cette figure montre clairement que les taux de mortalité n'ont pas évolué de la même façon entre les différentes catégories d'âges. Graphiquement, on constate que l'amélioration de la mortalité en absolue est bien plus significative pour les catégories d'âges élevés que pour les catégories d'âges plus faibles. Ainsi, pendant que les taux de décès pour les personnes de plus de 85 ans ont diminué de 0,26 en 1900 à 0,13 en 2007, pour les 35-44 ans, les mêmes taux sont passés de 0,015 à 0,004. Il faut cependant faire attention aux apparences trompeuses. La diminution des taux de décès en relatif a été environ de 50% pour les personnes les plus âgées mais elle a été de plus de 70% pour la catégorie d'âge allant de 35 à

44 ans par exemple. Dans la suite, il est important de pouvoir retrouver toutes ces tendances dans le modèle développé et de les projeter dans le futur.

6.6 Résultats obtenus

Tous les calculs dans cette partie ont été effectués à l'aide du logiciel R. Voici les résultats obtenus pour l'estimation des paramètres du modèle de Lee-Carter :

Groupe d'âge	\hat{a}_x	\hat{b}_x
<1	-3,4524	0,1456
1-4	-6,2787	0,1956
5-14	-7,2405	0,1493
15-24	-6,3181	0,0985
25-34	-6,0152	0,1032
35-44	-5,5036	0,0849
45-54	-4,7984	0,0608
55-64	-4,0330	0,0478
65-74	-3,2523	0,0435
75-84	-2,4348	0,0414
>85	-1,6233	0,0295

TABLE 6.1 – Vecteurs \hat{a}_x et \hat{b}_x pour les différentes catégories d'âge

Dynamique du facteur de mortalité k_t

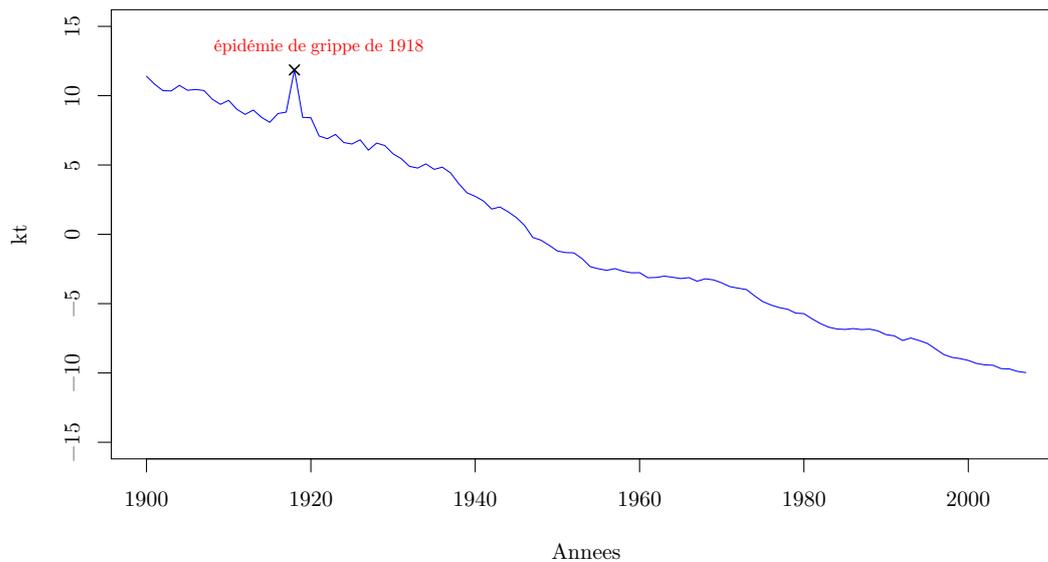


FIGURE 6.3 – Evolution du paramètre k_t dans le temps

Le tableau 6.1 reprend plusieurs tendances observées précédemment. Les \hat{a}_x , qui sont la moyenne des taux de décès sur la période étudiée, ont une forme assez traditionnelle. Les valeurs sont relativement élevées chez les nouveaux-nés et décroissent avec l'âge pour atteindre un minimum entre 5 et 14 ans. Ensuite, le taux de mortalité moyen (en échelle logarithmique) ne cesse d'augmenter avec l'âge.

De même, en analysant le vecteur \hat{b}_x on retrouve le résultat qui a déjà été mis en évidence précédemment, à savoir une sensibilité plus accrue à un changement de mortalité pour les jeunes âges, par rapport aux catégories d'âge plus élevées.

Regardons à présent la figure 6.3 qui retrace l'évolution du facteur de mortalité k_t dans le temps. Ce graphique montre clairement une tendance baissière, ce qui traduit une amélioration de la mortalité au cours de temps. En effet, les taux de mortalités ont largement diminué ces 100 dernières années et au vu de ce graphique, il n'est pas surprenant de constater que l'espérance de vie a augmenté de 28 ans entre 1900 et 1987. Un second point important à noter est la présence de sauts de mortalité dans l'évolution de k_t . Un exemple évident d'un tel saut est l'augmentation soudaine du taux de mortalité en 1918 dû à une terrible épidémie de grippe¹⁹ qui a frappé les Etats-Unis cette année. On remarquera également que l'augmentation de la mortalité n'aura été que de courte durée et que les taux ont rapidement retrouvé des valeurs normales à la suite de cette catastrophe.

6.7 Modélisation du facteur de mortalité

La prochaine étape consiste à modéliser le facteur de mortalité k_t afin de pouvoir projeter la tendance temporelle pour les années futures. Pour cela, il convient de développer un modèle qui soit capable de prendre en compte l'allure générale, la tendance et les sauts de mortalités de la série temporelle k_t . A cela s'ajoute une spécificité toute particulière des sauts, à savoir leur aspect asymétrique. Pendant que les sauts à la hausse (détérioration de la mortalité) semblent avoir une forte intensité mais une fréquence relativement faible, les sauts à la baisse (amélioration de la mortalité) ont une tendance inversée, à savoir une faible intensité mais une fréquence élevée. Ceci peut s'expliquer grâce aux facteurs biologiques et démographiques qui sont la cause des sauts de mortalité. Un saut à la hausse peut s'expliquer entre autre par une catastrophe soudaine (naturelle ou non) ou une épidémie quelconque, comme pour le cas de la grippe de 1918. A l'inverse, une augmentation de la longévité

19. La grippe de 1918, encore surnommée « grippe espagnole » s'est répandue en pandémie de 1918 à 1919 et a fait entre 50 et 100 millions de victimes selon les sources, soit environ 3 à 5 % de la population mondiale, ce qui en fait une des pandémies les plus mortelles dans l'histoire de l'humanité.

sera associée à des avancées médicales et à d'autres facteurs améliorant de façon générale la santé de la population. Ainsi, une détérioration de la mortalité causée par un évènement catastrophique a un effet uniquement transitoire alors qu'une augmentation de la longévité suite à une avancée médicale spectaculaire, comme par exemple la découverte d'un nouveau vaccin, aura un effet permanent sur les taux de décès de la population étudiée.

Dans la suite, nous noterons N_t le nombre de sauts survenant dans l'année t . Pour des raisons de simplicité, nous supposerons qu'il y a au plus un seul saut chaque année, et qu'il se produit avec une probabilité notée λ , ce qui veut dire que :

$$\forall t \in \mathbb{N}, \quad N_t = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } \lambda \\ 0 & \text{avec probabilité } 1 - \lambda \end{cases} \quad (29)$$

La sévérité du saut, décrite par la variable aléatoire Y , est supposée indépendante de la variable de fréquence N . Nous verrons dans la suite les différentes lois pouvant intervenir dans la modélisation des sauts de mortalité.

Nous allons maintenant présenter différents modèles de sauts, en nous basant sur les travaux effectués par BROCKETT et al. (2010), CHEN and COX (2009) et CHEN et al. (2011).

6.7.1 Modèle sans sauts

Le modèle de base le plus simple pour modéliser l'évolution du facteur de mortalité k_t est celui d'une marche aléatoire avec tendance (ARIMA(0,1,0)) qui a également été utilisé par Lee et Carter :

$$k_{t+1} = k_t + \mu + \sigma Z_{t+1} \quad (30)$$

Où μ est le paramètre de tendance, σ est une constante décrivant la variation du modèle et Z_{t+1} suit une loi normale centrée réduite, ce qui est équivalent à : $\sigma Z_{t+1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$. Une autre façon d'écrire le modèle est de poser $z_t = \Delta k_{t+1} = k_{t+1} - k_t$ (différenciation à l'ordre 1 de k_t). On obtient alors :

$$z_t = \mu + \sigma Z_{t+1} \quad (31)$$

L'estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance fournit :

Paramètre	Estimation
$\hat{\mu}$	-0,1998
$\hat{\sigma}$	0,5308

TABLE 6.2 – Estimateurs du modèle de base

La log-vraisemblance du modèle vaut $-84,05$ et l'AIC²⁰ vaut $172,09$.

Analyse des résidus

Voici le graphe des résidus :

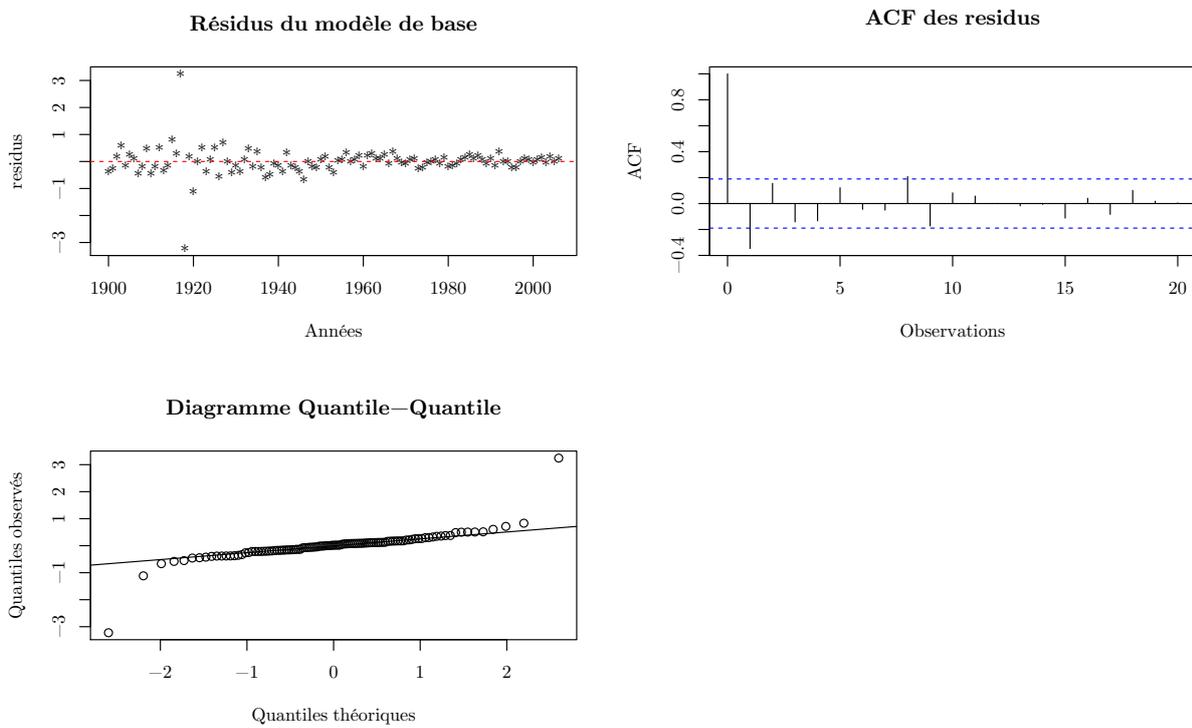


FIGURE 6.4 – Analyse des résidus du modèle de base

20. Voir section 6.8 pour plus de détail sur le critère d'AIC.

L'analyse du graphe 6.4 montre que :

- Les résidus semblent centrés autour de 0. En vérifiant, on trouve une moyenne de $-5,65 \cdot 10^{-15}$, ce qui confirme cette observation.
- Au vu du premier graphique, il semblerait également que les résidus se rapprochent de plus en plus de 0 avec le temps et une légère tendance apparaît à partir de 1950. Cette observation laisse suggérer que les résidus ne sont pas mutuellement indépendants.
- La représentation de la fonction d'auto-corrélation montre que la 1^{re} et la 8^e observation sortent de l'intervalle de confiance. Il est donc difficile de tirer une conclusion sur l'absence de corrélation entre les résidus.
- D'après le diagramme quantile-quantile (QQ-plot), il n'est pas évident de confirmer l'hypothèse de normalité des résidus, car les quantiles observés ne sont pas tous égaux aux quantiles théoriques.

On peut en conclure que le modèle de la marche aléatoire avec tendance ne permet pas de prendre en compte toutes les spécificités de l'évolution des taux de mortalité au cours du temps. Par conséquent, il est nécessaire de trouver d'autres modèles mieux adaptés aux données.

6.7.2 Modèle avec sauts à effet permanent

Le modèle décrivant l'évolution du facteur de mortalité k_t et incorporant des sauts à effet permanent a été proposé par COX et al. (2006) et peut s'écrire sous la forme suivante :

$$k_{t+1} = \begin{cases} k_t + \mu - \Lambda + \sigma Z_{t+1} & \text{si } N_{t+1} = 0 \\ k_t + \mu - \Lambda + \sigma Z_{t+1} + Y_{t+1} & \text{si } N_{t+1} = 1 \end{cases} \quad (32)$$

ou encore, en utilisant l'écriture avec la fonction indicatrice :

$$k_{t+1} = k_t + (\mu - \Lambda) + \sigma Z_{t+1} + Y_{t+1} \mathbf{1}_{\{N_{t+1}=1\}} \quad (33)$$

avec $\Lambda = \mathbb{E} [Y \mathbf{1}_{\{N=1\}}]$.

L'équation (33) montre clairement que si un saut survient en $t+1$, son ampleur (Y_{t+1}) est incluse dans le facteur de mortalité k_{t+1} et l'effet du saut persiste pour toutes les années futures. Par conséquent, le modèle avec sauts à effet permanent est approprié pour décrire des sauts de longévité (amélioration

de la mortalité), qui, une fois survenus, ont un impact permanent sur les taux de mortalité futurs. A l'inverse, la plupart des sauts de mortalité à la hausse qui n'ont qu'un effet à court-terme sur les taux de mortalité ne peuvent pas être modélisés de la même façon.

L'estimation des paramètres se fait par maximum de vraisemblance. Le détail des calculs de la fonction de log-vraisemblance pour le modèle avec sauts à effet permanent se trouvent en annexe 2.

6.7.3 Modèle avec sauts à effet transitoire

Afin de modéliser le risque d'une détérioration de la mortalité, CHEN and COX (2009) ont proposé un modèle avec des sauts à effet transitoire :

Notons \tilde{k}_t le facteur de mortalité lorsqu'il n'y a pas de saut dans l'année. \tilde{k}_t est modélisé par un processus à marche aléatoire avec tendance :

$$\tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}_t + \mu + \sigma Z_{t+1} \quad (34)$$

S'il n'y a pas de saut en année t , le facteur de mortalité réel k_t sera simplement égal à \tilde{k}_t . Si un saut survient en année $t+1$ (c'est-à-dire $N_{t+1} = 1$), le saut de sévérité Y_{t+1} va faire augmenter le facteur de mortalité réel de \tilde{k}_{t+1} à $\tilde{k}_{t+1} + Y_{t+1}$, soit :

$$k_{t+1} = \tilde{k}_{t+1} + Y_{t+1} \quad (35)$$

Finalement, la dynamique du facteur de mortalité k_t peut s'exprimer entièrement sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}_t + \mu + \sigma Z_{t+1} \\ k_{t+1} = \tilde{k}_{t+1} + Y_{t+1} \mathbf{1}_{\{N_{t+1}=1\}} \end{cases} \quad (36)$$

\tilde{k}_t représente le facteur de mortalité dans le cas où il n'y a pas de sauts et k_t est le facteur prenant en compte les éventuels sauts de mortalité. De ce fait, le saut de l'année t a uniquement un effet sur le facteur k_t et non pas sur \tilde{k}_t et l'impact de ce saut sur les années suivantes sera nul. Il est donc clair que ce modèle convient parfaitement au risque lié à des sauts à la hausse de la mortalité, qui ont uniquement un effet transitoire.

Estimation des paramètres

L'estimation des paramètres pour ce modèle est plus compliquée que pour le modèle précédent. Nous avons vu que $z_t = k_{t+1} - k_t$. Si nous avons une série de K observations de k_t , nous aurons $K-1$ observations de z_t , qui s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} z_t &= \tilde{k}_{t+1} + Y_{t+1}\mathbf{1}_{\{N_{t+1}=1\}} - \left(\tilde{k}_t + Y_t\mathbf{1}_{\{N_t=1\}} \right) \\ &= \mu + \sigma Z_{t+1} + Y_{t+1}\mathbf{1}_{\{N_{t+1}=1\}} - Y_t\mathbf{1}_{\{N_t=1\}} \end{aligned} \quad (37)$$

et :

$$z_{t+1} = \mu + \sigma Z_{t+2} + Y_{t+2}\mathbf{1}_{\{N_{t+2}=1\}} - Y_{t+1}\mathbf{1}_{\{N_{t+1}=1\}} \quad (38)$$

Notons que si $N_{t+1} = 0$, alors z_t est indépendant de z_{t+1} . Par contre, si $N_{t+1} = 1$, alors z_t et z_{t+1} ne sont plus indépendants à cause du terme Y_{t+1} . Ainsi, à cause de la dépendance des termes dans la série des z_t , une estimation des paramètres par maximum de vraisemblance classique n'est plus possible et il convient d'avoir recours à une méthode de maximum de vraisemblance conditionnel. Le détail des calculs pour l'estimation des paramètres dans le cas d'un modèle avec sauts à effets transitoires se trouve en annexe (voir annexe 3).

6.7.4 Modèle à sauts asymétriques

Dans leur article, CHEN et al. (2011) proposent un modèle à sauts asymétriques qui combine les deux types de sauts de mortalité présentés plus haut. Celui-ci s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}_t + (\mu - \Lambda) + \sigma Z_{t+1} + Y_{t+1} \mathbf{1}_{\{Y_{t+1} < 0\}} \mathbf{1}_{\{N_{t+1}=1\}} \\ k_{t+1} = \tilde{k}_{t+1} + Y_{t+1} \mathbf{1}_{\{Y_{t+1} > 0\}} \mathbf{1}_{\{N_{t+1}=1\}} \end{cases} \quad (39)$$

où Λ est le terme de compensation pour les sauts à effet permanent, $\Lambda = \mathbb{E} [Y \mathbf{1}_{\{Y < 0\}} \mathbf{1}_{\{N=1\}}]$. Sa valeur dépendra du choix de la loi pour la variable Y ²¹.

Jusqu'ici nous n'avons pas parlé de la loi de la sévérité des sauts décrite par la variable aléatoire Y . Dans le cadre du modèle à sauts asymétriques, deux types de lois ont été proposées par les différents auteurs. Premièrement, CHEN et al. (2010) font l'hypothèse que Y suit une loi normale d'espérance m et d'écart type s . Dans le modèle à sauts asymétriques, si $Y > 0$, il y a un saut à la hausse de k_t , ce qui implique une détérioration de la mortalité et aura uniquement un effet transitoire. Dans le cas où $Y < 0$, un saut à la baisse sur k_t se produit, ce qui indique une amélioration de la mortalité et aura donc un effet permanent. Par conséquent, la variable aléatoire Y modélisant la sévérité du saut aura un effet asymétrique sur la mortalité qui dépend du signe de celle-ci. Une deuxième possibilité pour la variable de sévérité a été proposée par BROCKETT et al. (2010). Celle-ci repose sur une double loi exponentielle asymétrique. Le raisonnement à la base et le suivant : L'hypothèse que Y suit une loi normale ne reflète pas la différence de comportement des sauts à la hausse et à la baisse en matière de fréquence et de sévérité. Comme nous l'avons déjà expliqué plus haut, les sauts à la hausse seraient plutôt de forte sévérité et de faible fréquence alors qu'à l'inverse les sauts à la baisse auraient une fréquence plus élevée mais une intensité plus faible. La densité de Y suivant une double loi exponentielle asymétrique (*DExp*) peut s'écrire de la manière suivante :

$$f_Y(y) = p \eta_u e^{-\eta_u y} \mathbf{1}_{\{Y > 0\}} + (1 - p) \eta_d e^{\eta_d y} \mathbf{1}_{\{Y < 0\}} \quad (40)$$

où p et $(1 - p)$ représentent la proportion de sauts positifs et négatifs. η_u et η_d mesurent l'inverse de la sévérité moyenne pour les sauts à la hausse et à la baisse respectivement.

A nouveau, l'estimation des paramètres pour le modèle avec sauts asymétriques peut se faire en

21. Voir annexe 4 pour le détail du calcul du paramètre de compensation.

utilisant la méthode du maximum de vraisemblance conditionnel. Un détail des calculs se trouve dans l'annexe 5 de ce document.

6.8 Comparaison des résultats obtenus avec les différents modèles

Pour tester la qualité des différents modèles et choisir celui qui sera retenu par la suite, nous utilisons des critères bien connus et largement adoptés comme l'AIC (pour *Akaike information criterion*) ou le BIC (pour *Bayesian Information Criterion*). Soit m le nombre de paramètres du modèle et n le nombre d'observations, on a :

$$AIC = -2 \ln(V) + 2m \quad (41)$$

et :

$$BIC = -2 \ln(V) + 2m \ln(n) \quad (42)$$

Où V est la vraisemblance du modèle et $\ln(V)$ correspond à la log-vraisemblance. Pour les deux statistiques, le modèle préféré sera celui présentant le critère le plus faible, sachant que le critère de BIC pénalise d'avantage le nombre de paramètres présents dans le modèle par rapport au nombre d'observations (pénalité de $2 \ln(n)$ au lieu de 2 pour l'AIC).

Le tableau 6.3 montre les résultats obtenus avec les différents modèles de saut décrits plus haut lorsque la sévérité Y suit une double loi exponentielle, respectivement une loi exponentielle simple pour le modèle à effet transitoire. Pour ce modèle, nous avons modélisé Y par une simple loi exponentielle puisque le modèle à effet transitoire permet uniquement de modéliser les sauts de mortalité à la hausse et ne prend pas en compte les sauts de longévité qui sont permanent. La loi exponentielle peut être vue comme un cas particulier de la double loi exponentielle si on choisit $p = 1$.

Paramètre	Estimation	écart-type	Statistiques de comparaison
Modèle de base - sans sauts			
$\hat{\mu}$	-0,1998	0,0513	Log-Vrais = -84,05
$\hat{\sigma}$	0,5308	0,0363	AIC = 172,09
			BIC = 177,44
Modèle avec sauts - Effet permanent $Y \sim \text{DExp}(\eta_u, p, \eta_d)$			
$\hat{\mu}$	-0,1100	0,0583	Log-Vrais = -33,87
$\hat{\sigma}$	0,2705	0,0221	AIC = 79,73
$\hat{\lambda}$	0,0517	0,0369	BIC = 95,77
$\hat{\eta}_u$	0,4830	0,4961	
\hat{p}	0,3390	0,3491	
$\hat{\eta}_d$	0,7977	0,7079	
Modèle avec sauts - Effet transitoire $Y \sim \text{Exp}(\eta)$			
$\hat{\mu}$	-0,2107	0,0269	Log-Vrais = -30,55
$\hat{\sigma}$	0,2546	0,0250	AIC = 69,10
$\hat{\lambda}$	0,0653	0,0414	BIC = 79,79
$\hat{\eta}$	1,1598	0,7406	
Modèle avec sauts - Effet asymétrique $Y \sim \text{DExp}(\eta_u, p, \eta_d)$			
$\hat{\mu}$	-0,21	0,0269	Log-Vrais = -30,57
$\hat{\sigma}$	0,25	0,0241	AIC = 73,15
$\hat{\lambda}$	0,065	0,0399	BIC = 89,19
$\hat{\eta}_u$	1,16	0,7142	
\hat{p}	1,00	0,0074	
$\hat{\eta}_d$	NA	NA	

 TABLE 6.3 – Comparaison des différents modèles de saut lorsque $Y \sim \text{DExp}(\eta_u, p, \eta_d)$

Premièrement, d'après les critères de comparaison utilisés, la qualité de l'ajustement du modèle sans sauts est largement inférieure à celle des autres modèles. Le test du rapport de vraisemblance²² permet de rejeter ce modèle au niveau $\alpha = 1\%$.

On remarque ensuite que le modèle à sauts asymétriques se transforme en modèle avec sauts à effet transitoire, qui est également retenu comme étant le meilleur modèle d'après les trois critères de comparaison (log-vraisemblance, AIC et BIC). En effet, l'estimateur obtenu avec la méthode du maximum de vraisemblance conditionnel indique que la probabilité d'avoir un saut à la hausse de la mortalité est égale à 1, ce qui implique qu'à l'inverse, la probabilité d'avoir un saut de longévité (baisse de mortalité) est nulle. Ainsi, les données historiques sur la mortalité aux Etats-Unis permettent uniquement de mettre en évidence des sauts de mortalité défavorables. L'effet de longévité ne connaît

22. Le test du rapport de vraisemblance est utilisé en statistiques pour comparer l'ajustement de deux modèles quand l'un est un cas particulier de l'autre. Si Λ est le ratio des vraisemblances entre le modèle de base et le modèle alternatif, on peut montrer que $D = -2 \ln(\Lambda)$ suit asymptotiquement une loi du χ^2 avec m degrés de liberté, où m est égal à la différence du nombre de paramètres entre le modèle de base et le modèle alternatif. Ainsi, en comparant la valeur de D au quantile de la loi du χ^2 correspondante, on peut rejeter ou non le modèle de base au niveau α .

donc pas de changement soudain et est simplement pris en compte par la tendance générale à la baisse des taux de mortalités (paramètre μ).

Le taux d'évolution moyen de la mortalité est égal à -0,2107, ce qui veut dire que le facteur de mortalité diminue en moyenne de 0,2107 par an. Cette valeur est légèrement inférieure à la moyenne des $z_t = k_{t+1} - k_t$ qui vaut -0,1998. La volatilité annuelle est de 0,2546 et la probabilité d'avoir un saut de mortalité à la hausse est de 6,53%. La sévérité moyenne des sauts s'élève à 0,8622 ($= 1/1,1598$).

Si on décide de prendre une loi normale pour décrire la sévérité des sauts, on obtient des résultats similaires :

Paramètre	Estimation	écart-type	Statistiques de comparaison
Modèle avec sauts - Effet permanent			
$\hat{\mu}$	-0,1998	0,0512	Log-Vrais = -33,73
$\hat{\sigma}$	0,2715	0,0215	AIC = 77,45
$\hat{\lambda}$	0,0422	0,0256	BIC = 90,82
\hat{r}	-0,1735	1,0632	
\hat{s}	2,2129	0,8498	
Modèle avec sauts - Effet transitoire			
$\hat{\mu}$	-0,1959	0,0265	Log-Vrais = -30,23
$\hat{\sigma}$	0,2593	0,0233	AIC = 70,46
$\hat{\lambda}$	0,0432	0,0246	BIC = 83,82
\hat{r}	0,7340	0,9780	
\hat{s}	1,6068	0,7257	
Modèle avec sauts - Effet asymétrique			
$\hat{\mu}$	-0,2079	0,0300	Log-Vrais = -30,60
$\hat{\sigma}$	0,2613	0,0234	AIC = 71,20
$\hat{\lambda}$	0,0445	0,0271	BIC = 84,56
\hat{r}	0,9682	1,0114	
\hat{s}	1,5500	0,6796	

TABLE 6.4 – Comparaison des différents modèles de saut lorsque $Y \sim \mathcal{N}(r, s)$

A nouveau, le modèle avec sauts asymétriques est très proche du modèle incorporant uniquement des sauts à effet transitoire. Ce dernier semble être supérieur aux autres modèles d'après les 3 critères de comparaison utilisés. On obtient donc les mêmes résultats que ceux obtenus avec la loi double exponentielle. Il reste à noter que globalement, d'après les critères d'AIC et de BIC le meilleur modèle est celui où Y suit une loi exponentielle (modèle avec sauts à effet transitoire). Par conséquent, dans la suite nous utiliserons ce modèle pour modéliser l'évolution du facteur de mortalité k_t dans le temps.

Regardons graphiquement l'ajustement du modèle sur la distribution empirique de z_t :

Comparaison entre distribution actuelle de z_t et distribution théorique

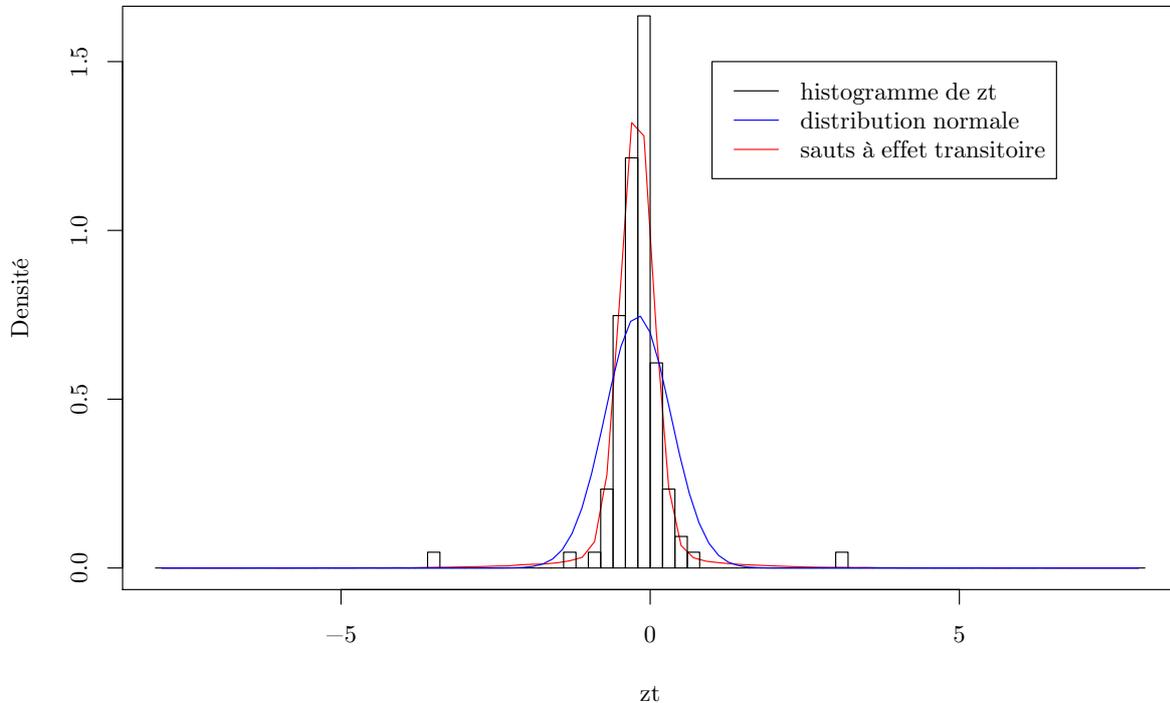


FIGURE 6.5 – Ajustement du modèle retenu sur les données historiques

La figure 6.5 montre l'ajustement du modèle retenu en comparant la distribution générée par le modèle avec sauts à effet transitoire calibré sur les données historiques et la distribution réelle de Δk_t . Nous avons également rajouté la distribution de z_t générée par le modèle de base, qui peut être assimilée à une loi normale d'espérance égale à la moyenne des z_t (qui vaut $-0,1998$) et d'écart-type égal à l'écart-type empirique des observations (égal à $0,53$). En comparant ces deux distributions, on se rend compte que le modèle à sauts se rapproche beaucoup plus des variations du facteur de mortalité Δk_t que la distribution issue d'une simple loi normale. La moyenne de la distribution SET (pour sauts à effet transitoire) est assez proche de celle du modèle de base ($\mu_{SET} \approx -0,21$ et $\mu_{base} \approx -0,20$). En revanche, l'écart-type du modèle SET est significativement plus faible que celui du modèle de base ($\sigma_{SET} = 0,27 < \sigma_{Base} = 0,53$). Voilà précisément pourquoi le modèle SET permet de mieux ajuster la distribution réelle de z_t . En effet, la loi normale permet d'ajuster des données sans queue de distribution épaisse, sans sauts dans la distribution et qui ne sont pas trop centrées autour de leur moyenne. Or, ce n'est pas le cas avec les données de mortalité que nous avons utilisées ici. La présence de sauts

de mortalité dans l'évolution du facteur k_t est prise en compte dans le modèle de base à travers la variabilité σ_{Base} qui par conséquent est bien plus importante. En revanche, avec la distribution SET, les différents sauts sont intégrés directement dans le modèle, ce qui permet d'obtenir un meilleur calibrage de σ_{SET} et donc d'améliorer l'ajustement par rapport aux données.

6.9 Limites du modèle et incertitude sur les paramètres

Les modèles de mortalité ont une importance fondamentale dans la quantification du risque de mortalité et/ou de longévité et dans la construction de tables de mortalité prospectives qui sont censées refléter l'évolution future de la mortalité. Tous les calculs d'évaluation effectués dans les chapitres précédents se basent sur des probabilités de décès issues de diverses tables de mortalité et sont donc soumis aux risques liés à une mauvaise évaluation et mauvaise projection de la mortalité.

Deux types d'incertitudes peuvent être mis en évidence. Premièrement, le modèle utilisé pour ajuster les taux de mortalité peut s'avérer être inexacte ou insuffisant pour intégrer toutes les spécificités liées à l'évolution de la mortalité dans le temps. Il ne faut pas non plus perdre de vue que la modélisation effectuée ici se base uniquement sur des observations historiques. Par conséquent, elle ne permet pas d'anticiper avec certitude les évolutions futures de la mortalité. Le modèle retenu a été comparé à tous les autres modèles en matière de qualité de l'ajustement et paraît être statistiquement supérieur mais également intuitif d'un point de vue économique.

Ce modèle n'a pas permis de mettre en évidence de véritable saut de longévité dans l'évolution des taux de mortalité. Or, cela ne veut pas dire qu'un tel saut n'a aucune chance de se produire dans les années à venir. En effet, on ne peut pas exclure l'éventualité d'une avancée médicale spectaculaire qui aurait pour conséquence la réduction instantanée des taux de mortalité et une augmentation de l'espérance de vie moyenne de la population.

La deuxième incertitude concerne les paramètres du modèle. Même si le modèle est bien adapté aux données, l'estimation des paramètres peut être erronée ou manquer de précision à cause d'un échantillon de données trop faible ou de données manquantes pour les catégories d'âge élevées par exemple.

Nous avons également abordé dans la section 6.3 les hypothèses sous-jacentes au modèle de Lee et Carter, à savoir principalement l'homoscédasticité des résidus qui n'est pas toujours vérifiée en

pratique.

Tout bien considéré, il est important de garder à l'esprit que n'importe quel modèle reste une simplification de la réalité et ne permettra jamais de prédire avec certitude les tendances futures. Ainsi, les résultats obtenus dans ce chapitre doivent faire l'objet d'une analyse critique et dépendront toujours du choix de la modélisation.

6.10 Construction des tables de mortalité utilisées pour l'évaluation des life settlements

Après avoir estimé les paramètres nécessaires pour modéliser la mortalité et trouvé un modèle permettant de projeter l'évolution future des taux de mortalités, l'étape suivante consiste à transformer toute cette modélisation en vecteur de probabilités pouvant ensuite être utilisé pour évaluer le prix de polices sur le marché secondaire de l'assurance vie. La question qui se pose est la suivante : étant donné le taux de mortalité $m_{k,t}$ pour la catégorie d'âge h_k ²³ à la période t , comment obtenir $q_{x,t}$, la probabilité annuelle de décès d'un individu d'âge x en t ?

Nous utiliserons les notations suivantes dans la suite :

- y_k : le premier âge du groupe h_k ;
- l_x : nombre de personnes vivantes à l'âge x (la fonction l_x est supposée linéaire sur l'intervalle $y_k \leq x \leq y_{k+1}$) ;
- d_x : nombre de décès entre l'âge x et $x + 1$;
- q_x : probabilité annuelle de décès d'une personne d'âge x $\left(q_x = \frac{d_x}{l_x} \right)$;
- n_k : $n_k = y_{k+1} - y_k$;
- ${}_nL_x$: nombre total de personnes ayant survécu entre l'âge x et $x + n$.

23. Il y a 11 catégories d'âge en tout, à savoir : $h_0 = \{0\}$, $h_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $h_2 = \{5, 6, \dots, 14\}$, \dots , $h_{10} = \{85, 86, \dots\}$.

L'hypothèse de linéarité sur l'intervalle $[y_k; y_{k+1}]$, nous donne :

$$l_x = l_{y_k} - \frac{x - y_k}{n_k} (l_{y_k} - l_{y_{k+1}}) \quad , \quad \forall x \in [y_k; y_{k+1}] \quad (43)$$

et d_x est constant sur le même intervalle $\left(d_x = \frac{l_{y_k} - l_{y_{k+1}}}{n_k} = d_{y_k} \right)$.

On peut également calculer nombre total de personnes ayant survécues sur toute une catégorie d'âge :

$$n_k L_{y_k} = \int_{y_k}^{y_{k+1}} l_x dx = \int_{y_k}^{y_{k+1}} l_{y_k} - \frac{x - y_k}{n_k} (l_{y_k} - l_{y_{k+1}}) dx = n_k l_{y_k} - d_{y_k} \frac{n_k^2}{2} \quad (44)$$

Nous pouvons maintenant exprimer le taux de mortalité m_k en fonction de q_{y_k} :

$$m_k = \frac{l_{y_k} - l_{y_{k+1}}}{n_k L_{y_k}} = \frac{q_{y_k}}{1 - n_k q_{y_k} / 2} \quad (45)$$

En inversant l'équation, on obtient $q_{y_k} = \frac{m_k}{1 + n_k m_k / 2}$.

Finalement, on peut calculer q_x pour tout $x \in h_k$:

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{d_x}{l_x} = \frac{d_{y_k}}{l_{y_k} - \frac{x - y_k}{n_k} (l_{y_k} - l_{y_{k+1}})} \\ &= \frac{d_{y_k}}{l_{y_k} - (x - y_k) d_{y_k}} = \frac{q_{y_k}}{1 - (x - y_k) q_{y_k}} \end{aligned} \quad (46)$$

Il suffit maintenant de construire les probabilités de décès annuelles q_x en fonction des taux de mortalité m_k et ceci pour n'importe quelle période t souhaitée.

6.10.1 Fermeture des tables

Le modèle utilisé pour modéliser la mortalité étant relativement sensible aux fluctuations des taux de mortalité aux âges extrêmes, nous avons décidé d'utiliser la méthode de Coale-Kisker pour dériver les taux de mortalité aux âges extrêmes. COALE and KISKER (1990) ont montré que pour divers populations, à partir d'un certain âge, les taux de mortalité n'augmentent pas à un taux constant avec l'âge, mais plutôt à un taux linéairement décroissant.

La technique développée par Coale et Kisker repose sur deux paramètres, à savoir un paramètre k_x traduisant le taux de croissance de la mortalité à l'âge x et un taux de mortalité pour un âge ultime fixé arbitrairement à 110 ans. Le paramètre de mortalité utilisé dans la suite est calculé de la manière suivante :

$$k_x = \ln \left(\frac{m_x}{m_{x-1}} \right) = \ln(m_x) - \ln(m_{x-1}) \quad (47)$$

où m_x est le taux de mortalité à l'âge x . Coale et Kisker supposent ensuite que k_x augmente linéairement au-dessus d'un certain âge que nous fixerons à 84 ans :

$$k_x = k_{84} + s(x - 84) \quad , \quad \forall x \geq 84 \quad (48)$$

En additionnant les équations pour chaque $x \geq 84$, on peut trouver la valeur du paramètre s , qui vaut :

$$s = - \frac{\left[\ln \left(\frac{m_{83}}{m_{110}} \right) + 27k_{84} \right]}{351} \quad (49)$$

Finalement, les taux de mortalité pour chaque âge $x \geq 84$ sont déterminés par la formule :

$$m_x = m_{x-1} \cdot \exp [k_{84} + s(x - 84)] \quad (50)$$

En résumé, la méthode développée par COALE and KISKER (1990) nécessite deux paramètres pour obtenir une solution :

- k_{84} est le taux de croissance de la mortalité à l'âge de 84 ans ;
- m_{110} que nous fixerons à 1.

Avec ces deux valeurs, tous les taux de mortalité pour les âges supérieurs à 84 ans peuvent être estimés.

6.11 Exemple numérique

Dans cette partie, nous allons utiliser le modèle SET avec les résultats présentés plus haut pour calculer la valeur d'une police sur le marché secondaire de l'assurance vie. Nous pouvons comparer la valeur ainsi obtenue avec la valeur calculée à l'aide de la table VBT 2008, qui est la table de mortalité standard utilisée par les acteurs du marché.

La création d'une table de mortalité sur la base du modèle SET se fait en simulant une multitude de trajectoires pour le facteur de mortalité k_t . Pour chaque trajectoire, un vecteur contenant les probabilités de décès est ensuite calculé (voir section 6.10) et peut être utilisé pour calculer la valeur d'une police en utilisant la méthode d'évaluation probabiliste. Finalement, en prenant la moyenne sur l'ensemble des simulations, on obtient une estimation de la valeur finale du contrat étudié.

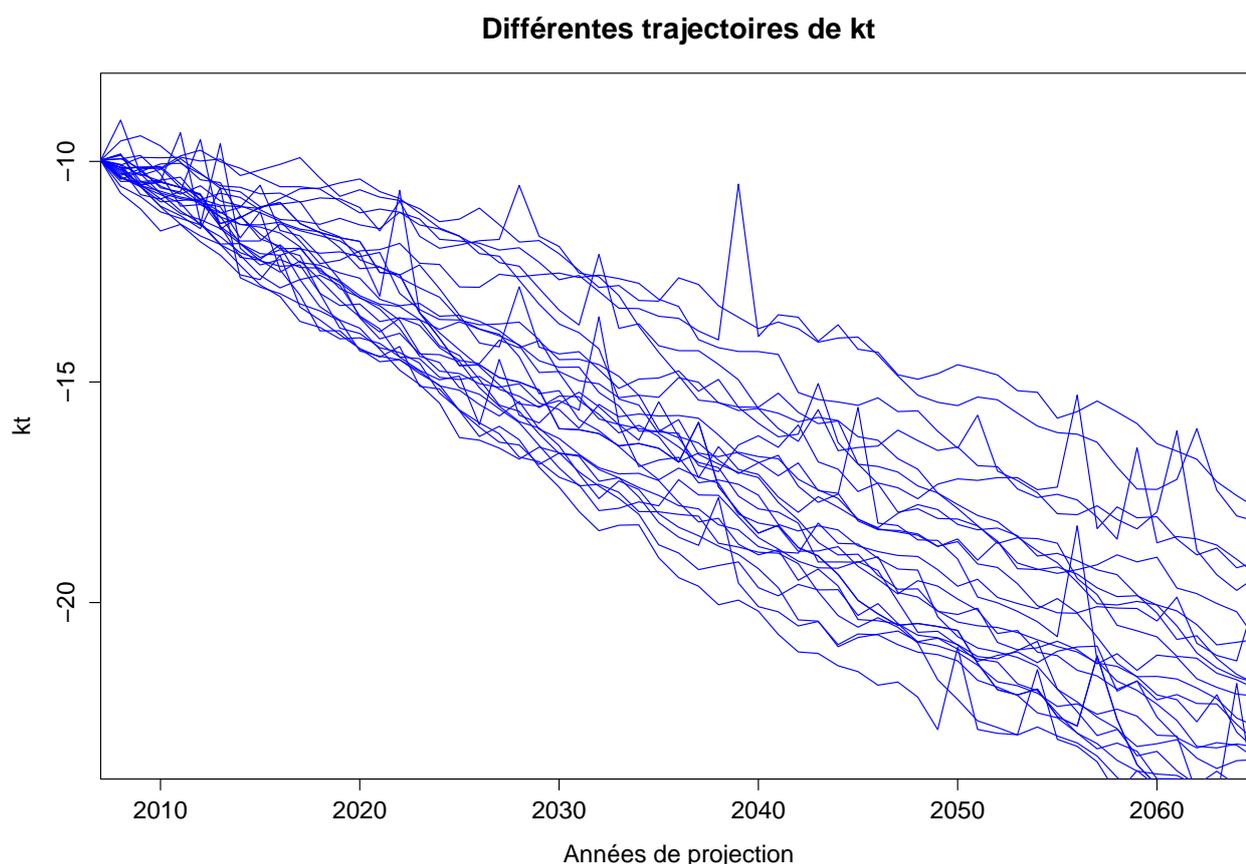


FIGURE 6.6 – Simulation de 25 trajectoires possibles pour k_t avec le modèle SET

Ce graphique montre 25 trajectoires indépendantes issues du modèle SET, retraçant l'évolution du facteur de mortalité k_t dans le temps (de 2007 à 2065). On peut voir la tendance générale à la baisse

du taux de mortalité qui traduit l'augmentation de l'espérance de vie dans la population. On distingue également les sauts de mortalité à la hausse qui surgissent de manière aléatoire et viennent perturber l'évolution de k_t .

Les détails de la police utilisée pour comparer les différentes tables de mortalité sont résumés dans le tableau 6.5.

Année d'évaluation	2014
Âge de l'assuré	70 ans
Espérance de vie	14 années
Capital Décès	500 000
Primes annuelles	8 000

TABLE 6.5 – Caractéristiques de la police

Voici les résultats obtenus pour des taux de rendements attendus par les investisseurs (IRR) allant de 1% à 20% :

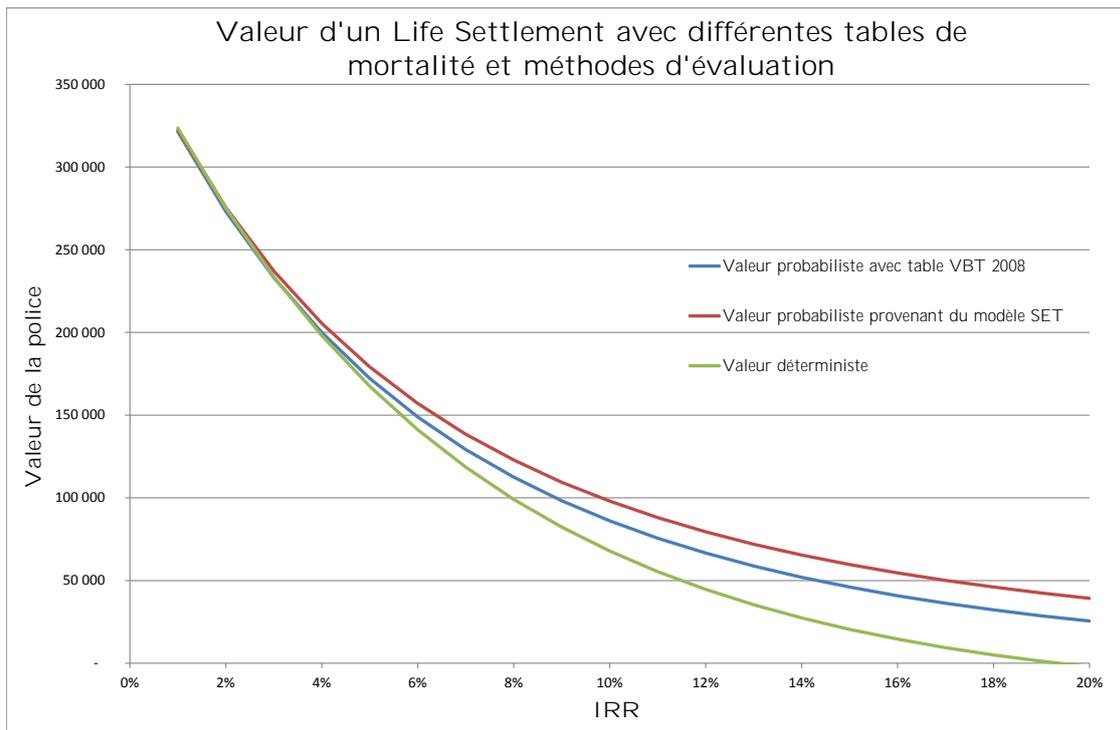


FIGURE 6.7 – Comparaison entre différentes tables de mortalité

Il est intéressant de noter que plus le taux de rendement attendu par les investisseurs augmente, plus la valeur du life settlement diminue. Cela est dû au fait que les flux annuels, pour la plupart positifs, sont actualisés avec un taux plus élevé, ce qui a pour effet de diminuer la valeur finale de la police.

On constate ici également que la méthode déterministe, qui ne nécessite pas l'utilisation de table de mortalité, donne des valeurs inférieures à celles qu'on peut obtenir avec une méthode probabiliste. Il s'agit là d'une illustration du résultat démontré dans le chapitre 3. Puisque dans cet exemple les primes annuelles sont constantes, l'évaluation déterministe est semblable à une méthode d'évaluation classique pour une obligation, dont le taux de coupon serait négatif et la maturité égale à l'espérance de vie estimée de l'assuré. On a alors, $NPV_{Déterministe} = \frac{500\,000}{(1 + IRR)^{14}} - 8\,000 \ddot{a}_{\overline{14}|}$ où $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ désigne une rente à terme à échoir d'une durée de n ans. La différence de valeur obtenue avec l'approche déterministe et l'approche probabiliste classique augmente avec l'IRR.

Finalement, une dernière constatation que l'on peut faire en analysant le graphique qui précède est que le modèle SET renvoie les valeurs les plus élevées. Une explication possible réside dans le fait qu'à l'inverse des tables VBT 2008, les tables construites sur la base du modèle SET incorporent des sauts de mortalité à la hausse. Or, une augmentation soudaine de la mortalité se traduit par une hausse du rendement pour les investisseurs puisque la probabilité de recevoir le capital décès augmente également. Par conséquent, il n'est donc pas surprenant de voir que la valeur de la police calculée à l'aide du modèle SET est supérieure à la valeur obtenue avec la table VBT 2008. Il ne faut cependant pas perdre de vue que la table construite à l'aide du modèle SET et la table VBT 2008 ne reposent pas sur les mêmes bases techniques et il est par conséquent difficile de comparer les résultats.

6.12 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons dans un premier temps étudié le modèle de Lee et Carter permettant de modéliser les taux de mortalité à l'aide de deux paramètres spécifiques à l'âge et un paramètre décrivant la tendance annuelle de la mortalité dans le temps. Dans un deuxième temps, nous avons analysé différents modèles pour projeter les taux de mortalité futurs. L'évolution du paramètre de mortalité a été modélisée à l'aide d'un modèle avec sauts à effet permanent, un modèle avec sauts à effet transitoire et un modèle regroupant les deux types de sauts, que nous avons appelé modèle à sauts

asymétriques. Les données sur la mortalité historique de la population américaine ont mis en évidence des sauts inattendus de mortalité à la hausse avec une probabilité d'occurrence plus élevée que celle de sauts à la baisse. Le phénomène de longévité, qui se traduit par un allongement de l'espérance de vie semble être un événement continu et régulier avec peu de chocs imprévus. De ce fait, le modèle avec sauts à effet transitoire et de sévérité suivant une loi exponentielle a été retenu d'après les critères de comparaison utilisés.

Ensuite, nous avons utilisé cette modélisation pour construire des tables de mortalité incorporant des sauts de mortalités. Ces tables sont différentes des tables de référence utilisées normalement pour évaluer des polices sur le marché secondaire de l'assurance vie. Un exemple numérique a permis d'illustrer le fait que l'occurrence de sauts de mortalité à la hausse a un impact favorable pour les investisseurs et contribue par conséquent à une réévaluation à la hausse des valeurs obtenus avec les tables standard. Pour conclure, cet exemple numérique a permis d'illustrer les divergences constatées en matière d'évaluation entre les différentes tables de mortalité et de souligner ainsi l'importance du choix de la table de départ pour l'évaluation des life settlements.

Conclusion Générale

Depuis la fin des années 90, le marché secondaire de l'assurance vie s'est fortement développé aux États-Unis. Plusieurs banques et fonds d'investissement européens s'intéressent aussi à cette classe d'actif qui offre des rendements élevés, globalement décorrélés des marchés financiers. Néanmoins, les limites telles que le manque de liquidité, le risque de longévité sous-jacent ou l'incertitude liée à l'évolution du cadre réglementaire et fiscal sont autant d'obstacles qui freinent le développement de ce marché. Dans le cadre de ce mémoire, nous avons analysé en détail le fonctionnement du marché des life settlements d'un point de vue théorique et avons illustré les spécificités techniques à l'aide d'exemples numériques.

Premièrement, les trois méthodes principalement utilisées pour déterminer la valeur d'une police ont été présentées et comparées à l'aide d'exemples concrets sur des contrats d'assurance vie. L'approche stochastique est la méthode la plus récente et à la fois la plus aboutie en matière de flexibilité dans la modélisation des flux futurs. Néanmoins, la méthode probabiliste reste toujours la méthode de référence sur le marché de par sa facilité d'implémentation et par sa cohérence avec les pratiques de tarifications bien connues dans le domaine de l'assurance vie. Afin de prendre en considération tous les cas possibles rencontrés sur le marché, nous avons également examiné l'évaluation de polices portant sur deux têtes à l'aide des probabilités de décès et de survie jointes.

L'étape suivante consistait à développer une méthode qui permette d'intégrer les différentes informations sur l'état de santé de l'assuré dans les techniques d'évaluation. En utilisant la divergence de Kullback-Leibler, nous avons montré comment construire une table de mortalité qui soit aussi proche possible d'une table de référence classique et qui soit en même temps cohérente avec les estimations de l'espérance de vie ou du quantile à 85% sur la date de décès de l'assuré. A l'aide d'outils standards d'optimisation numérique, nous avons illustré ce procédé en calculant la valeur d'une police individuelle et en évaluant un portefeuille dans sa totalité. Les résultats obtenus ont permis de mettre en évidence

une différence au niveau des résultats obtenus, entre cette nouvelle approche et l'approche standard, qui consiste à multiplier simplement les probabilités de décès annuelles par un facteur de mortalité.

Puisque la pratique d'investissement la plus répandue sur le marché secondaire de l'assurance vie consiste à titriser une grande quantité de polices afin d'obtenir des portefeuilles diversifiés, nous avons décidé de présenter ensuite le processus classique de titrisation ainsi que ses avantages pour les investisseurs. Nous avons étudié la structure de flux pour un fonds de type fermé et simulé les rendements espérés futurs pour des taux de défaut fixés à 1% et 5%. À part pour les premières années où les coupons sont faibles afin de permettre la constitution d'une réserve de trésorerie suffisante pour les besoins de paiements futurs, les taux de rendements tournent autour de 8%, voir même 10% en fonction du niveau de confiance exigé.

Finalement, dans une dernière partie, nous nous sommes intéressés au choix des tables de mortalité utilisées par l'industrie en matière d'évaluation et plus particulièrement à la modélisation des taux de mortalité futurs. Dans le cadre du modèle classique de Lee-Carter, nous avons introduit des sauts de mortalité à la hausse et la baisse sur les taux de décès historiques observés aux États-Unis pendant la période 1900-2007. Ces données historiques n'ont pas permis de mettre en évidence des sauts de longévité et nous avons par conséquent retenu un modèle avec sauts à effet transitoire, suivant une loi exponentielle. La probabilité d'avoir un saut de mortalité à la hausse a été estimée à 6,5%.

L'étape finale consistait à utiliser cette modélisation de la mortalité pour construire des tables de mortalité pouvant être utilisées pour l'évaluation des polices life settlements. En analysant les résultats obtenus, nous remarquons que les valeurs semblent être plus élevées que dans le cas d'une évaluation classique à l'aide de la table de base VBT 2008. Cependant, il est difficile de tirer une conclusion définitive puisque les différentes tables de mortalité utilisées n'ont pas été construites de la même façon et ne reposent pas sur les mêmes bases techniques.

Tout bien considéré, ce mémoire aborde un sujet très large, au cœur de l'actualité, mais encore assez méconnu en Europe, où les différents marchés secondaires pour les produits d'assurance vie ont du mal à se développer. Il est cependant intéressant de remarquer qu'une grande partie des investisseurs présents sur le marché des life settlements sont européens. Malheureusement, le manque de transparence du marché rend l'obtention d'informations objectives et de données chiffrées assez difficile.

Enfin, des nouvelles voies d'investigation peuvent être imaginées. Il pourrait par exemple être utile,

dans le cadre d'une étude ultérieure, de s'intéresser d'avantage au risque de longévité et au manque de liquidité sur le marché des life settlements et de proposer des techniques de couvertures pouvant être utilisées par les investisseurs pour réduire les risques de leur portefeuille. D'un point de vue technique, il serait également intéressant d'utiliser des modèles de projection de mortalité pour construire des tables plus spécifiques en séparant par exemple les données de mortalité sur les hommes de celles de femmes ou encore en faisant une distinction entre les individus fumeurs et non-fumeurs, comme c'est le cas pour les tables publiées par la SOA. Finalement, la modélisation des sauts de mortalité pourrait être modifiée en prenant une probabilité d'occurrence qui évolue avec le temps plutôt que d'avoir une probabilité fixe sur toute la durée de l'étude.

Table des figures

1.1	Représentation des Flux dans le temps du point de vue de l'investisseur	7
1.2	Processus de transaction	10
3.1	Exemple d'évaluation déterministe	28
3.2	Représentation de la table VBT 2008	31
3.3	Simulation du décès de l'assuré dans la méthode stochastique	37
5.1	Structure d'un fonds de life settlements	57
5.2	Différentes étapes de simulation pour une police	60
5.3	Évolution du solde de trésorerie pour différentes simulations	64
5.4	Évolution du nombre de polices pour différentes simulations	65
6.1	Surface de la mortalité aux Etats-Unis de 1900 à 2007	72
6.2	Comparaison des taux de mortalité pour divers catégories d'âge	73
6.3	Evolution du paramètre k_t dans le temps	74
6.4	Analyse des résidus du modèle de base	77
6.5	Ajustement du modèle retenu sur les données historiques	85
6.6	Simulation de 25 trajectoires possibles pour k_t avec le modèle SET	90
6.7	Comparaison entre différentes tables de mortalité	91

Liste des tableaux

1.1	Comparaison entre viatical et life settlements	9
3.1	Calcul de l'espérance de vie avec la table VBT 2008	33
3.2	Calcul du multiple de mortalité	33
3.3	Exemple d'évaluation en utilisant l'approche probabiliste	35
3.4	Exemple d'évaluation en utilisant l'approche stochastique	38
3.5	Comparaison des valeurs obtenues avec les différentes méthodes d'évaluation	39
3.6	Analyse de sensibilité de l'évaluation au changement de l'espérance de vie	39
3.7	Exemple d'évaluation probabiliste pour une police sur deux têtes	41
3.8	Exemple d'évaluation stochastique pour une police sur deux têtes	42
3.9	Récapitulatif des différentes méthodes d'évaluation	43
4.1	Caractéristiques de la police utilisée pour illustrer les résultats	49
4.2	Exemple d'application pour le problème de minimisation à deux contraintes	51
4.3	Exemple d'application pour le problème de minimisation à trois contraintes	53
4.4	Comparaison des différentes méthodes pour intégrer l'information médicale	54
5.1	Comparaison entre les fonds fermés et les fonds ouverts	59
5.2	Taux de coupons versés à un niveau de confiance à 99%	62
5.3	Taux de coupons versés à un niveau de confiance à 95%	63
5.4	Résultats de différentes simulations	65
6.1	Vecteurs \hat{a}_x et \hat{b}_x pour les différentes catégories d'âge	74
6.2	Estimateurs du modèle de base	77
6.3	Comparaison des différents modèles de saut lorsque $Y \sim DExp(\eta_u, p, \eta_d)$	83
6.4	Comparaison des différents modèles de saut lorsque $Y \sim \mathcal{N}(r, s)$	84
6.5	Caractéristiques de la police	91

Bibliographie

- AFFOLTER, S., BRAUN, A., and SCHMEISER, H. (2014). *Life Settlement Funds : Current Valuation Practices and Areas for Improvement*. Working papers on risk management and insurance No.143.
- ASPINWALL, J., CHAPLIN, G., and VENN, M. (2009). *Life Settlements and Longevity Structures - Pricing and Risk Management*. John Wiley and Sons, Ltd.
- BAUWENS, V. and WALHIN, J.-F. (2008). *La Titrisation du Risque d'Assurance*. Groupe De Boeck s.a., Editions Larcier.
- BHUYAN, Vishaal, B. (2009). *Trading Mortality and Longevity Risk with Life Settlements and Linked Securities*. John Wiley and Sons, Ltd.
- BRAUN, A., GATZERT, N., and SCHMEISER, H. (2011). *Performance and Risks of Open-End Life Settlement Funds*. Working Paper on Risk Management and Insurance No.73.
- BROCKETT, P. L., CHUANG, S.-l., DENG, Y., and MACMINN, R. D. (2012). Incorporating longevity risk and medical information into life settlement pricing. *2012 China International Conference on Insurance and Risk Management*.
- BROCKETT, P. L., Deng, Y., and MacMinn, R. D. (2010). *Longevity/Mortality Risk Modeling and Securities Pricing*. Working Paper.
- CHEN, H. and COX, S. H. (2009). Modeling mortality with jumps : Applications to mortality securitization. *The Journal of Risk and Insurance*, 76(3) :727–751.
- CHEN, H., COX, S. H., and WANG, S. (2010). Is the home equity conversion program in the united states sustainable ? evidence from pricing mortgage insurance premiums and non-recourse provisions using the conditional esscher transform. *Insurance : Mathematics and Economics*, 46(2) :371–384.

- CHEN, H., COX, S. H., and YAN, Z. (2011). *A Family of Mortality Jump Models with Parameter Uncertainty : Application to Hedging Longevity Risk in Life Settlements*. Working Paper.
- COALE, A. J. and KISKER, E. E. (1990). Defects in data on old age mortality in the united states : New procedures for calculating approximately accurate mortality schedules and life tables at the highest ages. *Asian and Pacific Population Forum*, 4 :1–31.
- COX, S. H., LIN, Y., and WANG, S. (2006). Multivariate exponential tilting and pricing implications for mortality securitization. *The Journal of Risk and Insurance*, 73(4) :719–736.
- DEDES, V. (2011). How to determine fair value for life insurance policies in a secondary market. Master’s thesis, Umeå School of Business.
- DELOITTE Consulting LLP and The University of Connecticut (2005). *The Life Settlement Market : An Actuarial Perspective on Consumer Economic Value*.
- DELWARDE, A. (2005). Modèle log-bilinéaire pour l’élaboration de tables de mortalité prospectives. Master’s thesis, Université Catholique de Louvain.
- DENUIT, M., DEVOLDER, P., and GODERNIAUX, A.-C. (2007). Securitization of longevity risk : Pricing survivor bonds with wang transform in the lee-carter framework. *Journal of Risk and Insurance*, 74(1) :87–113.
- DOHERTY, Neil, A. and SINGER, Hal, J. (2002). The benefits of a secondary market for life insurance policies. *Wharton Financial Institutions Center*. Working Paper.
- FRENCH, J. (2006). Street plunges into secondary life market - financiers are printing money off life insurers but need more elderly. *Investment Dealers Digest*, 72(7) :7–9.
- GATZERT, N. (2010). The secondary market for life insurance in the united kingdom, germany and the united states : Comparison and overview. *Risk Management and Insurance Review*, 13(2) :279–301.
- JANUÁRIO, Afonso, V. and NAIK, Narayan, Y. (2013). Empirical investigation of life settlements : The secondary market for life insurance policies. *London : London Business School*. Working Paper.
- KOHLI, S. (2006). Pricing death : Analyzing the secondary market for life insurance policies and its regulatory environment. *Buffalo Law Review*, 54 :279–320.

- KULLBACK, S. and LEIBLER, R. (1951). On information and sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics*, 22(1) :79–86.
- LEE, R. and CARTER, L. (1992). Modeling and forecasting the time series of us mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87 :659–675.
- ROSENFELD, S. (2009). Life settlements : Signposts to a principal asset class. *Wharton Financial Institutions Center*. Working Paper.
- STONE, C. A. and ZISSU, A. (2006). Securitization of senior life settlements : Managing extension risk. *Journal of Derivatives*, 13(3) :66–72.
- ZOLLARS, D., GROSSFELD, S., and DAY, D. (2003). The art of the deal : Pricing life settlements. *Contingencies*, pages 34–38.

Annexe 1

Exemple de rapport sur l'état de santé d'un assuré



21st Services

Life Expectancy Certificate

Client company: 21st Services Sample

Certificate date: 2/6/2009

Insured: John Doe

Gender: Male

DOB: 11/1/1947

Referenced

SSN: 000-00-0000

Mortality Table: Non-Tobacco User

Insured's request age*: 61

Date of insured's next age change*: 5/2/2009

Date range of medical records reviewed: 01/06 - 08/08

Mortality Multiplier*: 2.13

Median Life Expectancy Value*: 287 Months or 23.9 Years

Mean Life Expectancy Value*: 279 Months or 23.3 Years

85% Mortality Value*: 385 Months or 32.1 Years

Without life-threatening or catastrophic conditions or illnesses

Please note: It is recommended that the information provided in this life expectancy evaluation be used in its entirety. If only a subset of the data is used, you will be losing the interrelationships between the analytics.

Rapport fictif de 21st Services

Annexe 2

Estimation des paramètres dans le modèle avec sauts à effet permanent

Le modèle à effet permanent s'écrit de la manière suivante :

$$z_t = \mu - \Lambda + \sigma Z_{t+1} + Y_{t+1} \mathbf{1}_{\{N_{t+1}=1\}} \quad (51)$$

2.1 Calcul du terme de compensation

Dans la formule précédente, le terme de compensation Λ est égal à :

$$\begin{aligned} \Lambda &= \mathbb{E} [Y \mathbf{1}_{\{N=1\}}] && (52) \\ &= \mathbb{E} [Y] \mathbb{P}(N = 1) \quad (\text{On a supposé que } Y \text{ et } N \text{ sont indépendants}) \\ &= \mathbb{E} [Y] \lambda \quad (\text{voir formule (29)}) \end{aligned}$$

Si $Y \sim \mathcal{N}(r, s)$, alors $\Lambda = r \lambda$.

Si par contre on choisit $Y \sim \text{DExp}(\eta_u, p, \eta_d)$ ²⁴, alors on a :

24. Voir formule (40) pour une définition de la loi double exponentielle asymétrique

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^0 y (1-p) \eta_d e^{\eta_d y} dy + \int_0^{\infty} y p \eta_u e^{-\eta_u y} dy \\
 &= \frac{1-p}{\eta_d} + \frac{p}{\eta_u}
 \end{aligned} \tag{53}$$

2.2 Fonction de vraisemblance

Si on dispose de K observations de la variable z_t , la fonction de vraisemblance peut s'écrire de la manière suivante :

$$f(z_1, \dots, z_K) = f(z_1) \cdot \dots \cdot f(z_K) \tag{54}$$

Ainsi, la fonction de log-vraisemblance vaut :

$$\ln [f(z_1, \dots, z_K)] = \ln (f(z_1)) + \dots + \ln (f(z_K)) \tag{55}$$

Pour calculer la log-vraisemblance, il faut par conséquent avoir l'expression de la fonction $f(z_t) \forall t = 1, \dots, K$. En fonction de la valeur prise par la variable N_{t+1} (0 avec probabilité $1 - \lambda$ ou 1 avec probabilité λ), deux cas peuvent se présenter pour $f(z_t)$:

$$f(z_t) = f_1(z_t) (1 - \lambda) + f_2(z_t) \lambda \quad \forall t = 1, \dots, K \tag{56}$$

Cas 1 : $N_{t+1} = 0 \Rightarrow z_t = \mu - \Lambda + \sigma Z_{t+1}$

Dans ce cas, $z_t \sim \mathcal{N}(\mu - \Lambda, \sigma)$ et $f_1(z_t) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{z_t - \mu + \Lambda}{\sigma}\right)$.

φ est la fonction de densité d'une loi normale centrée réduite, i.e. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Cas 2 : $N_{t+1} = 1 \Rightarrow z_t = \mu - \Lambda + \sigma Z_{t+1} + Y_{t+1}$

Dans ce cas, la loi de z_t dépend de la loi de Y . On rappellera ici que Y et Z sont deux variables aléatoires indépendantes.

Si $Y \sim \mathcal{N}(r, s)$, alors $z_t \sim \mathcal{N}\left(\mu - \Lambda + r, \sqrt{\sigma^2 + s^2}\right)$ et $f_2(z_t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + s^2}} \varphi\left(\frac{z_t - \mu + \Lambda - r}{\sqrt{\sigma^2 + s^2}}\right)$.

Si $Y \sim DExp(\eta_u, p, \eta_d)$, alors $z_t = X + Y$ avec $X \sim \mathcal{N}(\mu - \Lambda, \sigma)$. Pour alléger les calculs, nous utiliserons dans la suite les notations suivantes :

- $v = \mu - \Lambda$;
- Φ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite, i.e. $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(x) dx$;
- $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-y-v}{\sigma}\right)^2\right]$.

Par technique de convolution, on obtient :

$$\begin{aligned}
 f_2(z_t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} A (p \eta_u e^{-\eta_u y} \mathbf{1}_{\{Y>0\}} + (1-p) \eta_d e^{\eta_d y} \mathbf{1}_{\{Y<0\}}) dy \\
 &= (1-p) \int_{-\infty}^0 A \eta_d e^{\eta_d y} dy + p \int_0^{\infty} A \eta_u e^{-\eta_u y} dy
 \end{aligned} \tag{57}$$

Les deux membres de l'équation 57 se calculent de façon similaire. Nous allons détailler le calcul pour le membre de droite :

$$\begin{aligned}
 p \int_0^{\infty} A \eta_u e^{-\eta_u y} dy &= p \eta_u \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-(z-y-v)^2/2\sigma^2 - \eta_u y\right] dy \\
 &= p \eta_u \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(y-(z-v-\eta_u\sigma^2))^2 + \eta_u\sigma^2(2(z-v)-\eta_u\sigma^2)}{2\sigma^2}\right] dy \\
 &= p \eta_u e^{-\eta_u(z-v-\eta_u\sigma^2/2)} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(y-(z-v-\eta_u\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right] dy \\
 &= p \eta_u e^{-\eta_u(z-v-\eta_u\sigma^2/2)} \Phi\left(\frac{z-v-\eta_u\sigma^2}{\sigma}\right)
 \end{aligned} \tag{58}$$

On a utilisé le résultat suivant : $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y-k)^2}{2\sigma^2}\right) dy = \Phi(k/\sigma)$.

De manière similaire, pour le membre de gauche on obtient :

$$(1 - p) \int_{-\infty}^0 A \eta_d e^{\eta_d y} dy = (1 - p) \eta_d e^{\eta_d (z - v + \eta_d \sigma^2 / 2)} \Phi \left(-\frac{z - v + \eta_d \sigma^2}{\sigma} \right) \quad (59)$$

Finalement, en additionnant les résultats de l'équation 58 et 59 on trouve une expression pour $f_2(z_t)$ lorsque $Y \sim DExp(\eta_u, p, \eta_d)$.

Annexe 3

Estimation des paramètres dans le modèle avec sauts à effet transitoire

Soit $z_t = k_{t+1} - k_t$. Pour le modèle avec sauts à effet transitoire, nous avons vu que :

$$z_t = \mu + \sigma Z_{t+1} + Y_{t+1} \mathbf{1}_{\{N_{t+1}=1\}} - Y_t \mathbf{1}_{\{N_t=1\}} \quad (60)$$

$$z_{t+1} = \mu + \sigma Z_{t+2} + Y_{t+2} \mathbf{1}_{\{N_{t+2}=1\}} - Y_{t+1} \mathbf{1}_{\{N_{t+1}=1\}} \quad (61)$$

S'il n'y a pas de saut en $t + 1$ ($N_{t+1} = 0$), alors z_{t+1} est indépendant de z_t et peut s'écrire comme dans l'équation (61).

Si $N_{t+1} = 1$, il y a corrélation entre z_{t+1} et z_t à cause du terme Y_{t+1} en commun. En additionnant les équations (60) et (61), on obtient :

$$z_{t+1} = -z_t + 2\mu + \sigma Z_{t+1} + \sigma Z_{t+2} + Y_{t+2} \mathbf{1}_{\{N_{t+2}=1\}} - Y_t \mathbf{1}_{\{N_t=1\}} \quad (62)$$

3.1 Fonction de vraisemblance

La fonction de vraisemblance peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2, \dots, z_{K-1}) &= f(z_{K-1}|z_1, z_2, \dots, z_{K-1}) f(z_1, z_2, \dots, z_{K-2}) \\ &= f(z_{K-1}|z_{K-2}) f(z_1, z_2, \dots, z_{K-2}) \end{aligned}$$

(Il est important de noter que z_{K-1} dépend uniquement de z_{K-2} et non pas des valeurs précédentes)

$$= f(z_{K-1}|z_{K-2}) f(z_{K-2}|z_{K-3}) \dots f(z_2|z_1) f(z_1) \quad (63)$$

La fonction de log-vraisemblance vaut alors :

$$\ln f(z_1, z_2, \dots, z_{K-1}) = \ln f(z_{K-1}|z_{K-2}) + \ln f(z_{K-2}|z_{K-3}) + \dots + \ln f(z_2|z_1) + \ln f(z_1) \quad (64)$$

Dans la suite nous considérerons les événements de saut (N_t, N_{t+1}, N_{t+2}) en $t, t+1$ et $t+2$ et calculons la distribution conditionnelle de $z_{t+1}|z_t$.

3.2 Calcul de la distribution conditionnelle

La fonction de densité de $z_{t+1}|z_t$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$f(z_{t+1}|z_t) = \sum_{i=1}^6 f_i(z_{t+1}|z_t) \mathbb{P}_{t+1,i} \quad (65)$$

où $f_i(z_{t+1}|z_t)$ est la fonction de densité pour le cas i et $\mathbb{P}_{t+1,i}$ est la probabilité que le cas i se présente. Le tableau suivant résume les différents cas pour le modèle avec sauts à effet transitoire :

Sauts (N_t, N_{t+1}, N_{t+2})	z_{t+1}	Probabilité $\mathbb{P}_{t+1,i}$
1. (1 ou 0, 0, 0)	$\mu + \sigma Z_{t+2}$	$(1 - \lambda)^2$
2. (1 ou 0, 0, 1)	$\mu + \sigma Z_{t+2} + Y_{t+2}$	$\lambda(1 - \lambda)$
3. (0, 1, 0)	$-z_t + 2\mu + \sigma Z_{t+1} + \sigma Z_{t+2}$	$\lambda(1 - \lambda)^2$
4. (1, 1, 0)	$-z_t + 2\mu + \sigma Z_{t+1} + \sigma Z_{t+2} - Y_t$	$\lambda^2(1 - \lambda)$
5. (0, 1, 1)	$-z_t + 2\mu + \sigma Z_{t+1} + \sigma Z_{t+2} + Y_{t+2}$	$\lambda^2(1 - \lambda)$
6. (1, 1, 1)	$-z_t + 2\mu + \sigma Z_{t+1} + \sigma Z_{t+2} + Y_{t+2} - Y_t$	λ^3

Distribution conditionnelle de z_{t+1} sachant z_t

λ est la probabilité de survenance d'un saut. On peut vérifier que la somme des probabilités vaut bien 1. La distribution de $z_{t+1}|z_t$ va dépendre du choix de la variable aléatoire Y qui modélise la sévérité des sauts.

3.2.1 Modélisation de la sévérité des sauts par une loi normale ($Y \sim \mathcal{N}(r, s)$)

Cas 1 : $z_{t+1}|z_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

$$f_1(z_{t+1}|z_t) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{z_{t+1} - \mu}{\sigma}\right)$$

Cas 2 : $z_{t+1}|z_t \sim \mathcal{N}(\mu + r, \sqrt{\sigma^2 + s^2})$

$$f_2(z_{t+1}|z_t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + s^2}} \varphi\left(\frac{z_{t+1} - \mu - r}{\sqrt{\sigma^2 + s^2}}\right)$$

Cas 3 : $z_{t+1}|z_t \sim \mathcal{N}(2\mu - z_t, 2\sigma^2)$

$$f_3(z_{t+1}|z_t) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \varphi\left(\frac{z_{t+1} - 2\mu + z_t}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Cas 4 : $z_{t+1}|z_t \sim \mathcal{N}(2\mu - z_t - r, \sqrt{2\sigma^2 + s^2})$

$$f_4(z_{t+1}|z_t) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2 + s^2}} \varphi\left(\frac{z_{t+1} - 2\mu + z_t + r}{\sqrt{2\sigma^2 + s^2}}\right)$$

Cas 5 : $z_{t+1}|z_t \sim \mathcal{N}(2\mu - z_t + r, \sqrt{2\sigma^2 + s^2})$

$$f_5(z_{t+1}|z_t) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2 + s^2}} \varphi\left(\frac{z_{t+1} - 2\mu + z_t - r}{\sqrt{2\sigma^2 + s^2}}\right)$$

Cas 6 : $z_{t+1}|z_t \sim \mathcal{N}(2\mu - z_t, \sqrt{2\sigma^2 + 2s^2})$

$$f_6(z_{t+1}|z_t) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2 + 2s^2}} \varphi\left(\frac{z_{t+1} - 2\mu + z_t}{\sqrt{2\sigma^2 + 2s^2}}\right)$$

3.2.2 Modélisation de la sévérité des sauts par une loi exponentielle ($Y \sim \text{Exp}(\eta)$)

Cas 1 : $Z = z_{t+1}|z_t$ et $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

$$f_1(z_{t+1}|z_t) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{z_{t+1} - \mu}{\sigma}\right)$$

Cas 2 : $Z = z_{t+1}|z_t$ et $Z = X + Y$, avec $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $Y \sim \text{Exp}(\eta)$

Par technique de convolution, on obtient :

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^\infty f_X(z-y) f_Y(y) dy \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(z-y-\mu)^2/2\sigma^2} \eta e^{-\eta y} dy \\
&= \eta \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(z-y-\mu)^2/2\sigma^2 - \eta y} dy \\
&= \eta \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left\{ [y-(z-\mu-\eta\sigma^2)]^2 + \eta\sigma^2 [2(z-\mu)-\eta\sigma^2] \right\} / 2\sigma^2} dy \\
&= \eta e^{-\eta(z-\mu-\eta\sigma^2/2)} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-[y-(z-\mu-\eta\sigma^2)]^2/2\sigma^2} dy \\
&= \eta e^{-\eta(z-\mu-\eta\sigma^2/2)} \Phi\left(\frac{z-\mu-\eta\sigma^2}{\sigma}\right) \tag{66}
\end{aligned}$$

On a utilisé le même résultat que pour l'annexe 2 : $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y-k)^2}{2\sigma^2}\right) dy = \Phi(k/\sigma)$.

Finalement, on a : $f_2(z_{t+1}|z_t) = \eta e^{-\eta(z_{t+1}-\mu-\eta\sigma^2/2)} \Phi\left(\frac{z_{t+1}-\mu-\eta\sigma^2}{\sigma}\right)$.

Cas 3 : $Z = z_{t+1}|z_t$ et $Z \sim \mathcal{N}(2\mu - z_t, \sigma)$

$$f_3(z_{t+1}|z_t) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \varphi\left(\frac{z_{t+1} - 2\mu + z_t}{\sqrt{2\sigma}}\right)$$

Cas 4 : $Z = z_{t+1}|z_t$ et $Z = X - Y$, avec $X \sim \mathcal{N}(v = -z_t + 2\mu, \xi = \sqrt{2}\sigma)$ et $Y \sim \text{Exp}(\eta)$

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^\infty f_X(z+y) f_Y(y) dy \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi} e^{-(z+y-v)^2/2\xi^2} \eta e^{-\eta y} dy \\
&= \eta \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi} e^{-(z+y-v)^2/2\xi^2 - \eta y} dy \\
&= \eta \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi} e^{-\left\{ [y+(z-v+\eta\xi^2)]^2 - \eta\xi^2 [2(z-v)+\eta\xi^2] \right\} / 2\xi^2} dy \\
&= \eta e^{\eta(z-v+\eta\xi^2/2)} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi} e^{-[y+(z-v+\eta\xi^2)]^2/2\xi^2} dy \\
&= \eta e^{\eta(z-v+\eta\xi^2/2)} \Phi\left(-\frac{z-v+\eta\xi^2}{\xi}\right) \tag{67}
\end{aligned}$$

Finalement, on a : $f_4(z_{t+1}|z_t) = \eta e^{\eta(z_{t+1}+z_t-2\mu+\eta\sigma^2)} \Phi\left(-\frac{z_{t+1} + z_t - 2\mu + 2\eta\sigma^2}{\sqrt{2}\sigma}\right)$.

Cas 5 : $Z = z_{t+1}|z_t$ et $Z = X + Y$, avec $X \sim \mathcal{N}(v = -z_t + 2\mu, \xi = \sqrt{2}\sigma)$ et $Y \sim Exp(\eta)$

Il s'agit essentiellement du même cas que le cas 2. La seule chose qui change sont les paramètres de la loi normale. Au final, on obtient : $f_5(z_{t+1}|z_t) = \eta e^{-\eta(z_{t+1}+z_t-2\mu-\eta\sigma^2)} \Phi\left(\frac{z_{t+1} + z_t - 2\mu - 2\eta\sigma^2}{\sqrt{2}\sigma}\right)$.

Cas 6 : $Z = z_{t+1}|z_t$ et $Z = X + W$, avec $X \sim \mathcal{N}(v = -z_t + 2\mu, \xi = \sqrt{2}\sigma)$, $W = Y' - Y$, $Y \sim Exp(\eta)$ et $Y' \sim Exp(\eta)$. (X , Y et Y' sont indépendants.)

Lorsque $w \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_W(w) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(Y' - y \leq w) f_Y(y) dy = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y' \leq w + y) \eta e^{-\eta y} dy = \int_0^\infty (1 - e^{-\eta(w+y)}) \eta e^{-\eta y} dy \\ &= \int_0^\infty \eta e^{-\eta y} dy - \eta e^{-\eta w} \int_0^\infty e^{-2\eta y} dy = 1 - \frac{e^{-\eta w}}{2} \end{aligned}$$

Lorsque $w < 0$, $Y' - Y \leq w \Rightarrow Y \geq -w$.

$$\begin{aligned} F_W(w) &= \int_{-w}^\infty \mathbb{P}(Y' - y \leq w) f_Y(y) dy = \int_{-w}^\infty \mathbb{P}(Y' \leq w + y) \eta e^{-\eta y} dy = \int_{-w}^\infty (1 - e^{-\eta(w+y)}) \eta e^{-\eta y} dy \\ &= \int_{-w}^\infty \eta e^{-\eta y} dy - \eta e^{-\eta w} \int_{-w}^\infty e^{-2\eta y} dy = \frac{e^{\eta w}}{2} \end{aligned}$$

En dérivant la fonction de répartition F_W , on obtient la fonction de densité :

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{\eta}{2} e^{-\eta w}, & \text{si } w \geq 0 \\ \frac{\eta}{2} e^{\eta w}, & \text{si } w < 0 \end{cases}$$

Ensuite on peut calculer la fonction de densité de $Z = X + W$:

$$\begin{aligned}
 f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-w) f_W(w) dw \\
 &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi} e^{-(z-w-v)^2/2\xi^2} \frac{\eta}{2} e^{\eta w} dw + \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi} e^{-(z-w-v)^2/2\xi^2} \frac{\eta}{2} e^{-\eta w} dw \\
 &= \frac{\eta}{2} \left[e^{\eta(z-v+\eta\xi^2/2)} \Phi\left(-\frac{z-v+\eta\xi^2}{\xi}\right) + e^{-\eta(z-v-\eta\xi^2/2)} \Phi\left(\frac{z-v-\eta\xi^2}{\xi}\right) \right]
 \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$f_6(z_{t+1}|z_t) = \frac{\eta}{2} \left[\begin{aligned} &e^{\eta(z_{t+1}+z_t-2\mu+\eta\sigma^2)} \Phi\left(-\frac{z_{t+1}+z_t-2\mu+2\eta\sigma^2}{\sqrt{2}\sigma}\right) \\ &+ e^{-\eta(z_{t+1}+z_t-2\mu-\eta\sigma^2)} \Phi\left(-\frac{z_{t+1}+z_t-2\mu-2\eta\sigma^2}{\sqrt{2}\sigma}\right) \end{aligned} \right] \quad (68)$$

3.3 Calcul de $f(\mathbf{z}_1)$

Maintenant que nous avons déterminé la distribution conditionnelle de $z_{t+1}|z_t$, il ne reste plus qu'à évaluer la densité de z_1 afin de pouvoir calculer la log-vraisemblance du modèle avec sauts à effets transitoires. D'après l'équation (60),

$$z_1 = \mu + \sigma Z_2 + Y_2 \mathbf{1}_{\{N_2=1\}} - Y_1 \mathbf{1}_{\{N_1=1\}} \quad (69)$$

4 cas différents peuvent se présenter :

Sauts (N_1, N_2)	z_1	Probabilité $\mathbb{P}_{1,i}$
1. (0, 0)	$\mu + \sigma Z_2$	$(1 - \lambda)^2$
2. (0, 1)	$\mu + \sigma Z_2 + Y_2$	$\lambda(1 - \lambda)$
3. (1, 0)	$\mu + \sigma Z_2 - Y_1$	$\lambda(1 - \lambda)^2$
4. (1, 1)	$\mu + \sigma Z_2 + Y_2 - Y_1$	λ^2

Distribution de z_1

A nouveau, la loi de z_1 va dépendre de celle de la variable Y .

3.3.1 Modélisation de la sévérité des sauts par une loi normale ($Y \sim \mathcal{N}(r, s)$)

Cas 1 : $z_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

$$f_1(z_1) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{z_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

Cas 2 : $z_1 \sim \mathcal{N}(\mu + r, \sqrt{\sigma^2 + s^2})$

$$f_2(z_1) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + s^2}} \varphi\left(\frac{z_1 - \mu - r}{\sqrt{\sigma^2 + s^2}}\right)$$

Cas 3 : $z_1 \sim \mathcal{N}(\mu - r, \sqrt{\sigma^2 + s^2})$

$$f_3(z_1) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + s^2}} \varphi\left(\frac{z_1 - \mu + r}{\sqrt{\sigma^2 + s^2}}\right)$$

Cas 4 : $z_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sqrt{\sigma^2 + 2s^2})$

$$f_4(z_1) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + 2s^2}} \varphi\left(\frac{z_1 - \mu}{\sqrt{\sigma^2 + 2s^2}}\right)$$

3.3.2 Modélisation de la sévérité des sauts par une loi exponentielle ($Y \sim \text{Exp}(\eta)$)

Cas 1 : $z_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

$$f_1(z_1) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{z_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

Cas 2 : $z_1 = X + Y$, avec $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $Y \sim \text{Exp}(\eta)$

$$f_2(z_1) = \eta e^{-\eta(z_1 - \mu - \eta\sigma^2/2)} \Phi\left(\frac{z_1 - \mu - \eta\sigma^2}{\sigma}\right).$$

(même calcul que pour le cas 2 de la distribution conditionnelle)

Cas 3 : $z_1 = X - Y$, avec $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $Y \sim \text{Exp}(\eta)$

$$f_3(z_1) = \eta e^{\eta(z_1 - \mu + \eta\sigma^2/2)} \Phi\left(-\frac{z_1 - \mu + \eta\sigma^2}{\sigma}\right).$$

(même calcul que pour le cas 4 de la distribution conditionnelle)

Cas 4 : $z_1 = X + W$, avec $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, $W = Y_2 - Y_1$, $Y_2 \sim \text{Exp}(\eta)$ et $Y_1 \sim \text{Exp}(\eta)$ ($Y_1 \perp Y_2$).

$$f_4(z_1) = \frac{\eta}{2} \left[e^{\eta(z_1 - \mu + \eta\sigma^2/2)} \Phi\left(-\frac{z_1 - \mu + \eta\sigma^2}{\sigma}\right) + e^{-\eta(z_1 - \mu - \eta\sigma^2/2)} \Phi\left(-\frac{z_1 - \mu - \eta\sigma^2}{\sigma}\right) \right].$$

(même calcul que pour le cas 6 de la distribution conditionnelle)

Annexe 4

Calcul du terme de compensation dans le modèle à sauts asymétriques

Nous avons vu que dans le cadre du modèle à sauts asymétriques, le terme de compensation Λ , s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\Lambda &= \mathbb{E} [Y \mathbf{1}_{\{Y < 0\}} \mathbf{1}_{\{N=1\}}] \\ &= \mathbb{E} [Y | Y < 0 \cap N = 1] \mathbb{P}(Y < 0 \cap N = 1) \\ &= \mathbb{E} [Y | Y < 0] \mathbb{P}(Y < 0) \mathbb{P}(N = 1)\end{aligned}\tag{70}$$

Sa valeur dépendra du choix de la loi pour la variable de sévérité Y (loi normale ou loi double exponentielle).

4.1 Modélisation de la sévérité des sauts par une loi normale ($Y \sim \mathcal{N}(r, s)$)

Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Y|Y < 0] \mathbb{P}(Y < 0) \mathbb{P}(N = 1) &= \int_{-\infty}^0 y \frac{f_Y(y)}{\mathbb{P}(Y < 0)} dy \mathbb{P}(Y < 0) \lambda \\
 &= \lambda \int_{-\infty}^0 y f_Y(y) dy \\
 &= \lambda \int_{-\infty}^0 y \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-r}{s}\right)^2} dy \\
 &= \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi} s} \int_{-\infty}^{-r/s} (r + sx) e^{-1/2x^2} s dx
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{-r/s} (r + sx) e^{-1/2x^2} s dx &= sr \int_{-\infty}^{-r/s} e^{-1/2x^2} dx + s^2 \int_{-\infty}^{-r/s} x e^{-1/2x^2} dx \\
 &= \sqrt{2\pi} sr \Phi(-r/s) - s^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{s}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\Lambda = \lambda \left(r \Phi\left(-\frac{r}{s}\right) - \frac{s}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{r^2}{s^2}} \right) = \lambda \left[r \left(1 - \Phi\left(\frac{r}{s}\right) \right) - s \varphi\left(\frac{r}{s}\right) \right] \quad (71)$$

4.2 Modélisation de la sévérité des sauts par une loi double exponentielle ($Y \sim \text{DExp}(\eta_u, p, \eta_d)$)

On rappelle que :

$$f_Y(y) = p \eta_u e^{-\eta_u y} \mathbf{1}_{\{Y > 0\}} + (1 - p) \eta_d e^{\eta_d y} \mathbf{1}_{\{Y < 0\}} \quad (72)$$

Soit $X = Y|Y < 0$, la densité de X vaut :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x > 0 \\ \frac{f_Y(x)}{\mathbb{P}(Y < 0)} = \frac{(1-p)\eta_d e^{\eta_d x}}{1-p} = \eta_d e^{\eta_d x}, & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (73)$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}[Y|Y < 0] = \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \eta_d e^{\eta_d x} dx = -\frac{1}{\eta_d} \quad (74)$$

Finalement, on obtient :

$$\Lambda = \mathbb{E}[Y|Y < 0] \mathbb{P}(Y < 0) \mathbb{P}(N = 1) = -\frac{\lambda(1-p)}{\eta_d} \quad (75)$$

Annexe 5

Estimation des paramètres dans le modèle à sauts asymétriques

Soit $z_t = k_{t+1} - k_t$, d'après l'équation (39), on a :

$$z_t = (\mu - \Lambda) + \sigma Z_{t+1} - Y_t \mathbf{1}_{\{Y_t > 0\}} \mathbf{1}_{\{N_t=1\}} + Y_{t+1} \mathbf{1}_{\{N_{t+1}=1\}} \quad (76)$$

$$z_{t+1} = (\mu - \Lambda) + \sigma Z_{t+2} - Y_{t+1} \mathbf{1}_{\{Y_{t+1} > 0\}} \mathbf{1}_{\{N_{t+1}=1\}} + Y_{t+2} \mathbf{1}_{\{N_{t+2}=1\}} \quad (77)$$

Pour simplifier les notations, nous dénoterons $J = 0$ lorsqu'il n'y a pas de saut (quand $N = 0$), $J = H$ lorsqu'il y a un saut de mortalité à la hausse (quand $N = 1$ et $Y > 0$) et $J = B$ lorsqu'il y a un saut de mortalité à la baisse (quand $N = 1$ et $Y < 0$).

Quand $J_{t+1} = 0$ ou $J_{t+1} = B$, z_{t+1} est indépendant de z_t et peut s'exprimer comme dans l'équation (77). Quand $J_{t+1} = H$, z_{t+1} n'est plus indépendant de z_t à cause du terme Y_{t+1} . En additionnant les équations (76) et (77), on obtient :

$$z_{t+1} = -z_t + 2(\mu - \Lambda) + \sigma Z_{t+1} + \sigma Z_{t+2} - Y_t \mathbf{1}_{\{Y_t > 0\}} \mathbf{1}_{\{N_t=1\}} + Y_{t+2} \mathbf{1}_{\{N_{t+2}=1\}} \quad (78)$$

Dans la suite nous considérerons les événements de saut (J_t, J_{t+1}, J_{t+2}) en t , $t + 1$ et $t + 2$ et calculerons la distribution conditionnelle de $z_{t+1}|z_t$ en fonction de la survenance des différents sauts.

5.1 Fonction de vraisemblance

Comme pour le modèle avec sauts à effet transitoire, la fonction de vraisemblance peut s'écrire de la manière suivante :

$$f(z_1, z_2, \dots, z_{K-1}) = f(z_{K-1}|z_{K-2}) f(z_{K-2}|z_{K-3}) \dots f(z_2|z_1) f(z_1) \quad (79)$$

De même pour la fonction de log-vraisemblance :

$$\ln f(z_1, z_2, \dots, z_{K-1}) = \ln f(z_{K-1}|z_{K-2}) + \ln f(z_{K-2}|z_{K-3}) + \dots + \ln f(z_2|z_1) + \ln f(z_1) \quad (80)$$

Le calcul de ces deux fonctions dépend de la loi utilisée pour modéliser la sévérité des sauts.

5.2 Modélisation de la sévérité des sauts par une loi normale ($Y \sim \mathcal{N}(\mathbf{r}, \mathbf{s})$)

Le tableau suivant résume les différents cas lorsque la sévérité des sauts suit une loi normale :

Sauts (J_t), (J_{t+1}), (J_{t+2})	z_{t+1}	Moyenne, $M_{t+1,i}$	Écart-type, $\xi_{t+1,i}$	Probabilité $\mathbb{P}_{t+1,i}$
1. (0 ou H ou B) $_t$, (0 ou B) $_{t+1}$, 0 $_{t+2}$	$(\mu - \Lambda) + \sigma Z_{t+2}$	$\mu - \Lambda$	σ	$(1 - \lambda)(1 - \lambda\Phi(r/s))$
2. (0 ou H ou B) $_t$, (0 ou B) $_{t+1}$, (H ou B) $_{t+2}$	$(\mu - \Lambda) + \sigma Z_{t+2} + Y_{t+2}$	$\mu - \Lambda + r$	$\sqrt{\sigma^2 + s^2}$	$\lambda [1 - \lambda\Phi(r/s)]$
3. (0 ou B) $_t$, H_{t+1} , 0 $_{t+2}$	$-z_t + 2(\mu - \Lambda) + \sigma Z_{t+1} + \sigma Z_{t+2}$	$-z_t + 2(\mu - \Lambda)$	$\sqrt{2\sigma^2}$	$\lambda(1 - \lambda)\Phi(r/s) [1 - \lambda\Phi(r/s)]$
4. (0 ou B) $_t$, H_{t+1} , (H ou B) $_{t+2}$	$-z_t + 2(\mu - \Lambda) + \sigma Z_{t+1} + \sigma Z_{t+2} + Y_{t+2}$	$-z_t + 2(\mu - \Lambda) + r$	$\sqrt{2\sigma^2 + s^2}$	$\lambda^2\Phi(r/s) [1 - \lambda\Phi(r/s)]$
5. H_t , H_{t+1} , 0 $_{t+2}$	$-z_t + 2(\mu - \Lambda) + \sigma Z_{t+1} + \sigma Z_{t+2} - Y_t$	$-z_t + 2(\mu - \Lambda) - r$	$\sqrt{2\sigma^2 + s^2}$	$\lambda^2(1 - \lambda)\Phi(r/s)^2$
6. H_t , H_{t+1} , (H ou B) $_{t+2}$	$-z_t + 2(\mu - \Lambda) + \sigma Z_{t+1} + \sigma Z_{t+2} - Y_t + Y_{t+2}$	$-z_t + 2(\mu - \Lambda)$	$\sqrt{2\sigma^2 + 2s^2}$	$\lambda^3\Phi(r/s)^2$

Moyenne, écart-type et probabilité pour la distribution de $z_{t+1}|z_t$

Finalement, la fonction de densité de $z_{t+1}|z_t$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f(z_{t+1}|z_t) &= \sum_{i=1}^6 f_i(z_{t+1}|z_t) \mathbb{P}_{t+1,i} \\ &= \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \xi_{t+1,i}} \times \exp\left(-\frac{(z_{t+1} - M_{t+1,i})^2}{2\xi_{t+1,i}^2}\right) \mathbb{P}_{t+1,i} \end{aligned} \quad (81)$$

De plus, on sait que $z_1 = (\mu - \Lambda) + \sigma Z_2 - Y_1 \mathbf{1}_{\{Y_1 > 0\}} \mathbf{1}_{\{N_1 = 1\}} + Y_2 \mathbf{1}_{\{N_2 = 1\}}$.

Ainsi, de la même façon que pour la distribution conditionnelle de z_{t+1} sachant z_t , on peut calculer la fonction de densité de z_1 .

$$f(z_1) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \xi_{1,i}} \times \exp\left(-\frac{(z_1 - M_{1,i})^2}{2\xi_{1,i}^2}\right) \mathbb{P}_{1,i} \quad (82)$$

La moyenne, l'écart-type et la probabilité correspondante pour chaque cas sont résumés dans le tableau suivant :

Sauts $(J_1), (J_2)$	z_1	Moyenne, $M_{1,i}$	Écart-type, $\xi_{1,i}$	Probabilité $\mathbb{P}_{1,i}$
1. $(0 \text{ ou } B)_1, 0_2$	$(\mu - \Lambda) + \sigma Z_2$	$\mu - \Lambda$	σ	$(1 - \lambda)(1 - \lambda\Phi(r/s))$
2. $(0 \text{ ou } B)_1, (H \text{ ou } B)_2$	$(\mu - \Lambda) + \sigma Z_2 + Y_2$	$\mu - \Lambda + r$	$\sqrt{\sigma^2 + s^2}$	$\lambda [1 - \lambda\Phi(r/s)]$
3. $H_1, 0_2$	$\mu - \Lambda + \sigma Z_2 - Y_1$	$\mu - \Lambda - r$	$\sqrt{\sigma^2 + s^2}$	$\lambda(1 - \lambda)\Phi(r/s)$
4. $H_1, (H \text{ ou } B)_2$	$\mu - \Lambda + \sigma Z_2 + Y_2 - Y_1$	$\mu - \Lambda$	$\sqrt{\sigma^2 + 2s^2}$	$\lambda^2\Phi(r/s)$

Moyenne, écart-type et probabilité pour la distribution de z_1

5.3 Modélisation de la sévérité des sauts par une loi double exponentielle ($Y \sim \text{DExp}(\eta_u, p, \eta_d)$)

9 cas peuvent se produire lorsque $Y \sim \text{DExp}(\eta_u, p, \eta_d)$. Voici un résumé des différents cas et de leur probabilité :

Sauts $(J_t), (J_{t+1}), (J_{t+2})$	z_{t+1}	Probabilité $\mathbb{P}_{t+1,i}$
1. $(0 \text{ ou } H \text{ ou } B)_t, (0 \text{ ou } B)_{t+1}, 0_{t+2}$	$(\mu - \Lambda) + \sigma Z_{t+2}$	$(1 - \lambda p)(1 - \lambda)$
2. $(0 \text{ ou } H \text{ ou } B)_t, (0 \text{ ou } B)_{t+1}, H_{t+2}$	$(\mu - \Lambda) + \sigma Z_{t+2} + Y_{t+2}^h$	$(1 - \lambda p) \lambda p$
3. $(0 \text{ ou } H \text{ ou } B)_t, (0 \text{ ou } B)_{t+1}, B_{t+2}$	$(\mu - \Lambda) + \sigma Z_{t+2} + Y_{t+2}^b$	$(1 - \lambda p) \lambda (1 - p)$
4. $(0 \text{ ou } B)_t, H_{t+1}, 0_{t+2}$	$-z_t + 2(\mu - \Lambda) + \sigma Z_{t+1} + \sigma Z_{t+2}$	$(1 - \lambda p) \lambda p (1 - \lambda)$
5. $(0 \text{ ou } B)_t, H_{t+1}, H_{t+2}$	$-z_t + 2(\mu - \Lambda) + \sigma Z_{t+1} + \sigma Z_{t+2} + Y_{t+2}^h$	$(1 - \lambda p) \lambda^2 p^2$
6. $(0 \text{ ou } B)_t, H_{t+1}, B_{t+2}$	$-z_t + 2(\mu - \Lambda) + \sigma Z_{t+1} + \sigma Z_{t+2} + Y_{t+2}^b$	$(1 - \lambda p) \lambda^2 p (1 - p)$
7. $H_t, H_{t+1}, 0_{t+2}$	$-z_t + 2(\mu - \Lambda) + \sigma Z_{t+1} + \sigma Z_{t+2} - Y_t^h$	$\lambda^2 p^2 (1 - \lambda)$
8. H_t, H_{t+1}, H_{t+2}	$-z_t + 2(\mu - \Lambda) + \sigma Z_{t+1} + \sigma Z_{t+2} - Y_t^h + Y_{t+2}^h$	$\lambda^3 p^3$
9. H_t, H_{t+1}, B_{t+2}	$-z_t + 2(\mu - \Lambda) + \sigma Z_{t+1} + \sigma Z_{t+2} - Y_t^h + Y_{t+2}^b$	$\lambda^3 p^2 (1 - p)$

Distribution conditionnelle de z_{t+1} sachant z_t

Remarque : Y^h et Y^b dénotent la sévérité des sauts à la hausse et à la baisse respectivement.

Ainsi la fonction de densité de $z_{t+1}|z_t$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$f(z_{t+1}|z_t) = \sum_{i=1}^9 f_i(z_{t+1}|z_t) \mathbb{P}_{t+1,i} \quad (83)$$

Regardons à présent les différents cas pour $f_i(z_{t+1}|z_t)$:

Cas 1 : $Z = z_{t+1}|z_t$ et $Z \sim \mathcal{N}(\mu - \Lambda, \sigma)$

$$f_1(z_{t+1}|z_t) = \frac{1}{\sigma} \varphi \left(\frac{z_{t+1} - \mu + \Lambda}{\sigma} \right)$$

Cas 2 : $Z = z_{t+1}|z_t$ et $Z = X + W$, avec $X \sim \mathcal{N}(\mu - \Lambda, \sigma)$ et $W \sim \text{Exp}(\eta_u)$

Comme nous venons de le voir dans l'annexe 3, il suffit d'utiliser des techniques de convolution pour trouver la densité de Z . Au final, on obtient :

$$f_2(z_{t+1}|z_t) = \eta_u e^{-\eta_u(z_{t+1} - \mu + \Lambda - \eta_u \sigma^2 / 2)} \Phi \left(\frac{z_{t+1} - \mu + \Lambda - \eta_u \sigma^2}{\sigma} \right).$$

Cas 3 : $Z = z_{t+1}|z_t$ et $Z = X + W$, avec $X \sim \mathcal{N}(v = \mu - \Lambda, \xi = \sigma)$ et

$$W \sim f_W(w) = \begin{cases} 0, & w \geq 0 \\ \eta_d e^{\eta_d w}, & w < 0 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^0 f_X(z-w) f_W(w) dw \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \xi} e^{-(z-w-v)^2 / 2\xi^2} \eta_d e^{\eta_d w} dw \\ &= \eta_d \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \xi} e^{-(z-w-v)^2 / 2\xi^2 + \eta_d w} dw \\ &= \eta_d \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \xi} e^{-\{[w-(z-v+\eta_d \xi^2)]^2 - \eta_d \xi^2 [2(z-v)+\eta_d \xi^2]\} / 2\xi^2} dw \\ &= \eta_d e^{\eta_d(z-v+\eta_d \xi^2 / 2)} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \xi} e^{-[w-(z-v+\eta_d \xi^2)]^2 / 2\xi^2} dw \\ &= \eta_d e^{\eta_d(z-v+\eta_d \xi^2 / 2)} \Phi \left(-\frac{z-v+\eta_d \xi^2}{\xi} \right) \end{aligned} \tag{84}$$

On a utilisé la formule $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \xi} e^{-(w-k)^2 / 2\xi^2} dw = \Phi(-k/\xi)$.

Par conséquent,

$$f_3(z_{t+1}|z_t) = \eta_d e^{\eta_d(z_{t+1} - \mu + \Lambda + \eta_d \sigma^2 / 2)} \Phi \left(-\frac{z_{t+1} - \mu + \Lambda + \eta_d \sigma^2}{\sigma} \right).$$

Cas 4 : $Z = z_{t+1}|z_t$ et $Z \sim \mathcal{N}(-z_t + 2\mu - 2\Lambda, \sqrt{2}\sigma)$

$$f_4(z_{t+1}|z_t) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \varphi \left(\frac{z_{t+1} + z_t - 2\mu + 2\Lambda}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

Cas 5 : $Z = z_{t+1}|z_t$ et $Z = X + W$, avec $X \sim \mathcal{N}(-z_t + 2\mu - 2\Lambda, \sqrt{2}\sigma)$ et $W \sim \text{Exp}(\eta_u)$

$$f_5(z_{t+1}|z_t) = \eta_u e^{-\eta_u(z_{t+1}+z_t-2\mu+2\Lambda-\eta_u\sigma^2)} \Phi\left(\frac{z_{t+1} + z_t - 2\mu + 2\Lambda - 2\eta_u\sigma^2}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Cas 6 : $Z = z_{t+1}|z_t$ et $Z = X + W$, avec $X \sim \mathcal{N}(-z_t + 2\mu - 2\Lambda, \sqrt{2}\sigma)$ et

$$W \sim f_W(w) = \begin{cases} 0, & w \geq 0 \\ \eta_d e^{\eta_d w}, & w < 0 \end{cases}.$$

$$f_6(z_{t+1}|z_t) = \eta_d e^{\eta_d(z_{t+1}+z_t-2\mu+2\Lambda+\eta_d\sigma^2)} \Phi\left(-\frac{z_{t+1} + z_t - 2\mu + 2\Lambda + 2\eta_d\sigma^2}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Cas 7 : $Z = z_{t+1}|z_t$ et $Z = X - W$, avec $X \sim \mathcal{N}(-z_t + 2\mu - 2\Lambda, \sqrt{2}\sigma)$ et $W \sim \text{Exp}(\eta_u)$

Le calcul est similaire à celui effectué en annexe 3 pour le cas 4. Au final, on obtient :

$$f_7(z_{t+1}|z_t) = \eta_u e^{\eta_u(z_{t+1}+z_t-2\mu+2\Lambda+\eta_u\sigma^2)} \Phi\left(-\frac{z_{t+1} + z_t - 2\mu + 2\Lambda + 2\eta_u\sigma^2}{\sqrt{2}\sigma}\right).$$

Cas 8 : $Z = z_{t+1}|z_t$ et $Z = X + W$, avec $X \sim \mathcal{N}(-z_t + 2\mu - 2\Lambda, \sqrt{2}\sigma)$, $W = Y_2 - Y_1$, $Y_2 = Y_{t+2}^h \sim \text{Exp}(\eta_u)$ et $Y_1 = Y_t^h \sim \text{Exp}(\eta_u)$.

A nouveau, nous avons déjà rencontré le même cas en annexe 3 (voir cas 6). Au final on obtient :

$$f_8(z_{t+1}|z_t) = \frac{\eta_u}{2} \left[\begin{array}{l} e^{\eta_u(z_{t+1}+z_t-2\mu+2\Lambda+\eta_u\sigma^2)} \Phi\left(-\frac{z_{t+1} + z_t - 2\mu + 2\Lambda + 2\eta_u\sigma^2}{\sqrt{2}\sigma}\right) \\ + e^{-\eta_u(z_{t+1}+z_t-2\mu+2\Lambda-\eta_u\sigma^2)} \Phi\left(-\frac{z_{t+1} + z_t - 2\mu + 2\Lambda - 2\eta_u\sigma^2}{\sqrt{2}\sigma}\right) \end{array} \right]$$

Cas 9 : $Z = z_{t+1}|z_t$ et $Z = X + W$, avec $X \sim \mathcal{N}(v = -z_t + 2\mu - 2\Lambda, \xi = \sqrt{2}\sigma)$, $W = Y_2 - Y_1$,

$$Y_2 = Y_{t+2}^b \sim f_{Y_2}(y) = \begin{cases} 0, & y \geq 0 \\ \eta_d e^{\eta_d y}, & y < 0 \end{cases} \text{ et } Y_1 = Y_t^h \sim \text{Exp}(\eta_u).$$

Lorsque $w \geq 0$, $F_W(w) = \mathbb{P}(W \leq w) = 1$.

Lorsque $w < 0$,

$$\begin{aligned}
 F_W(w) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(Y_2 - y \leq w) f_{Y_1}(y) dy \\
 &= \int_0^\infty \mathbb{P}(Y_2 \leq w + y) \eta_u e^{-\eta_u y} dy \\
 &= \int_0^{-w} \mathbb{P}(Y_2 \leq w + y) \eta_u e^{-\eta_u y} dy + \int_{-w}^\infty \mathbb{P}(Y_2 \leq w + y) \eta_u e^{-\eta_u y} dy \\
 &= \int_0^{-w} e^{\eta_d(w+y)} \eta_u e^{-\eta_u y} dy + \int_{-w}^\infty \eta_u e^{-\eta_u y} dy \\
 &= \frac{\eta_d}{\eta_d - \eta_u} e^{\eta_u w} - \frac{\eta_u}{\eta_d - \eta_u} e^{\eta_d w}
 \end{aligned}$$

En dérivant la fonction de répartition F_W , on obtient la fonction de densité :

$$f_W(w) = \begin{cases} 0, & \text{si } w \geq 0 \\ \frac{\eta_d \eta_u}{\eta_d - \eta_u} (e^{\eta_u w} - e^{\eta_d w}), & \text{si } w < 0 \end{cases}$$

Finalement on peut calculer la fonction de densité de $Z = X + W$:

$$\begin{aligned}
 f_Z(z) &= \int_{-\infty}^\infty f_X(z - w) f_W(w) dw \\
 &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \xi} e^{-(z-w-v)^2/2\xi^2} \frac{\eta_d \eta_u}{\eta_d - \eta_u} (e^{\eta_u w} - e^{\eta_d w}) dw \\
 &= \frac{\eta_d \eta_u}{\eta_d - \eta_u} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \xi} e^{-(z-w-v)^2/2\xi^2} (e^{\eta_u w} - e^{\eta_d w}) dw \\
 &= \frac{\eta_d \eta_u}{\eta_d - \eta_u} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \xi} e^{-(z-w-v)^2/2\xi^2} e^{\eta_u w} dw - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \xi} e^{-(z-w-v)^2/2\xi^2} e^{\eta_d w} dw \right] \\
 &= \frac{\eta_d \eta_u}{\eta_d - \eta_u} \left[e^{\eta_u(z-v+\eta_u\xi^2/2)} \Phi\left(-\frac{z-v+\eta_u\xi^2}{\xi}\right) - e^{\eta_d(z-v+\eta_d\xi^2/2)} \Phi\left(-\frac{z-v+\eta_d\xi^2}{\xi}\right) \right] \\
 \\
 f_9(z_{t+1}|z_t) &= \frac{\eta_d \eta_u}{\eta_d - \eta_u} \left[e^{\eta_u(z_{t+1}+z_t-2\mu+2\Lambda+\eta_u\sigma^2)} \Phi\left(-\frac{z_{t+1}+z_t-2\mu+2\Lambda+2\eta_u\sigma^2}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right. \\
 &\quad \left. - e^{\eta_d(z_{t+1}+z_t-2\mu+2\Lambda+\eta_d\sigma^2)} \Phi\left(-\frac{z_{t+1}+z_t-2\mu+2\Lambda+2\eta_d\sigma^2}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right]
 \end{aligned}$$

Il reste maintenant à déterminer la distribution de z_1 .

Nous rappellerons que $z_1 = (\mu - \Lambda) + \sigma Z_2 - Y_1 \mathbf{1}_{\{Y_1 > 0\}} \mathbf{1}_{\{N_1 = 1\}} + Y_2 \mathbf{1}_{\{N_2 = 1\}}$.

Le tableau qui suit reprend les différents cas possibles.

Sauts $(J_1), (J_2)$	z_1	$\mathbb{P}_{1,i}$
1. $(0 \text{ ou } B)_1, 0_2$	$(\mu - \Lambda) + \sigma Z_2$	$(1 - \lambda p)(1 - \lambda)$
2. $(0 \text{ ou } B)_1, H_2$	$(\mu - \Lambda) + \sigma Z_2 + Y_2^h$	$(1 - \lambda p)\lambda p$
3. $(0 \text{ ou } B)_1, B_2$	$(\mu - \Lambda) + \sigma Z_2 + Y_2^b$	$(1 - \lambda p)\lambda(1 - p)$
4. $H_1, 0_2$	$(\mu - \Lambda) + \sigma Z_2 - Y_1^h$	$\lambda p(1 - \lambda)$
5. H_1, H_2	$(\mu - \Lambda) + \sigma Z_2 - Y_1^h + Y_2^h$	$\lambda^2 p^2$
6. H_1, B_2	$(\mu - \Lambda) + \sigma Z_2 - Y_1^h + Y_2^b$	$\lambda^2 p(1 - p)$

Distribution de z_1

$$f_1(z_1) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{z_1 - \mu + \Lambda}{\sigma}\right)$$

$$f_2(z_1) = \eta_u e^{-\eta_u(z_1 - \mu + \Lambda - \eta_u \sigma^2 / 2)} \Phi\left(\frac{z_1 - \mu + \Lambda - \eta_u \sigma^2}{\sigma}\right)$$

$$f_3(z_1) = \eta_d e^{\eta_d(z_1 - \mu + \Lambda + \eta_d \sigma^2 / 2)} \Phi\left(-\frac{z_1 - \mu + \Lambda + \eta_d \sigma^2}{\sigma}\right)$$

$$f_4(z_1) = \eta_u e^{\eta_u(z_1 - \mu + \Lambda + \eta_u \sigma^2)} \Phi\left(-\frac{z_1 - \mu + \Lambda + \eta_u \sigma^2}{\sigma}\right)$$

$$f_5(z_1) = \frac{\eta_u}{2} \left[e^{\eta_u(z_1 - \mu + \Lambda + \eta_u \sigma^2 / 2)} \Phi\left(-\frac{z_1 - \mu + \Lambda + \eta_u \sigma^2}{\sigma}\right) + e^{-\eta_u(z_1 - \mu + \Lambda - \eta_u \sigma^2 / 2)} \Phi\left(-\frac{z_1 - \mu + \Lambda - \eta_u \sigma^2}{\sigma}\right) \right]$$

$$f_6(z_1) = \frac{\eta_d \eta_u}{\eta_d - \eta_u} \left[e^{\eta_u(z_1 - \mu + \Lambda + \eta_u \sigma^2 / 2)} \Phi\left(-\frac{z_1 - \mu + \Lambda + \eta_u \sigma^2}{\sigma}\right) - e^{\eta_d(z_1 - \mu + \Lambda + \eta_d \sigma^2 / 2)} \Phi\left(-\frac{z_1 - \mu + \Lambda + \eta_d \sigma^2}{\sigma}\right) \right]$$

Annexe 6

Code utilisé pour la partie gestion de portefeuille

```
Sub Simul_Solde_Tresorerie()  
  
nb_police = 257  
nb_police_joint = 12  
  
For i = 1 To nb_police  
    Cells(14, 5).Value = i  
    Cells(25, 11).Value = Cells(18 + i, 26).Value 'Mortality Multiplier  
    'Fill in tables  
    If Cells(25, 15).Value = "OK" Then  
        For j = 1 To 10  
            'Premium  
            If IsNumeric(Cells(35 + j, 16).Value) Then  
                Premium(i, j) = Cells(35 + j, 16).Value  
            Else  
                Premium(i, j) = 0  
            End If  
            'Adjusted death probability  
            If IsNumeric(Cells(35 + j, 18).Value) Then  
                Adj_Death_Proba(i, j) = Cells(35 + j, 18).Value  
            Else  
                Adj_Death_Proba(i, j) = 1  
            End If  
        Next j  
    End If  
Next i
```

```

Else
    MsgBox "Error in Mortality Multiplier calculation"
    Exit Sub
End If
'Initialisation variable
Death_Moment(i) = 0
Death_Benef(i) = Cells(14, 11).Value
NAV_10yrs(i) = Worksheets("NAV PF after 10yrs").Cells(1 + i, 2).Value
Next i
'Joint policies
For i2 = 1 To nb_police_joint
    Cells(279, 5).Value = i2
    Cells(289, 9).Value = Cells(292 + i2, 26).Value '1st Mortality Multiplier
    Cells(289, 19).Value = Cells(292 + i2, 27).Value '2nd Mortality Multiplier
'Fill in tables
If (Cells(289, 13).Value = "OK") And (Cells(289, 23).Value = "OK") Then
    For j = 1 To 10
        'Premium
        If IsNumeric(Cells(292 + j, 31).Value) Then
            Premium_joint(i2, j) = Cells(292 + j, 31).Value
        Else
            Premium_joint(i2, j) = 0
        End If
        'Adjusted death probability
        If IsNumeric(Cells(292 + j, 34).Value) Then
            Adj_Death_Proba_joint(1, i2, j) = Cells(292 + j, 34).Value
        Else
            Adj_Death_Proba_joint(1, i2, j) = 1
        End If
        If IsNumeric(Cells(292 + j, 37).Value) Then
            Adj_Death_Proba_joint(2, i2, j) = Cells(292 + j, 37).Value
        Else
            Adj_Death_Proba_joint(2, i2, j) = 1
        End If
    Next j
Else
    MsgBox "Error in Mortality Multiplier calculation"
    Exit Sub
End If
'Initialisation variable
Death_Moment_joint(1, i2) = 0
Death_Moment_joint(2, i2) = 0
Death_Benef_joint(i2) = Cells(279, 11).Value

```

```

NAV_10yrs(nb_police + i2) = Worksheets("NAV PF after 10yrs").Cells(1 + i2 + nb_police, 2)
    .Value
Next i2

'Initialisation of variables
nb_annee = 10
nb_simu = 10000
nb_default = 0
face_value = Cells(3, 3).Value
tx_placement = 0
For j = 1 To 10
    Coupon(j) = Cells(18 + j, 20).Value
    Fees(j) = Cells(4, 3).Value * face_value
    Total_Cash_Flow(j) = 0
Next j

'Simulate Cash Flows
For counter = 1 To nb_simu
'Initialisation of default variable
simulation_default(counter) = 0
Residual_Fund_NAV = 0
nb_polices_present = nb_police + nb_police_joint
'initialisation of Death moments
For i = 1 To nb_police
    Death_Moment(i) = 0
    check_alive(i, counter) = True
Next i
For i2 = 1 To nb_police_joint
    Death_Moment_joint(1, i2) = 0
    Death_Moment_joint(2, i2) = 0
    check_alive(nb_police + i2, counter) = True
Next i2

'Initialisation of cash flows
For j = 1 To nb_annee
    Cash_Flow(j) = 0
    If j < nb_annee Then
        Cash_Flow_Last(j + 1) = 0
    End If
Next j

'Simulation
For j = 1 To nb_annee
    'initialisation of variables
    If j = 1 Then
        Cash_Flow(j) = Cells(5, 3).Value

```

```

Else
    Cash_Flow(j) = Cash_Flow_Last(j) * (1 + tx_placement)
End If
Premium_Paid(j) = 0
Death_Benef_recieved(j) = 0

For i = 1 To nb_police + nb_police_joint
    If i <= nb_police Then 'No joint Life
        If Death_Moment(i) = 0 Then 'Insured still alive
            'Simulate Death
                Death_Moment(i) = Simul_Death(Adj_Death_Proba(i, j))
            'Determine Cash Flows
                If Death_Moment(i) = 0 Then 'Insured survived this year
                    Premium_Paid(j) = Premium_Paid(j) + Premium(i, j)
                Else 'Insured died this year --> death benefit recieved
                    Premium_Paid(j) = Premium_Paid(j) + Premium(i, j) / 2
                    Death_Benef_recieved(j) = Death_Benef_recieved(j) + Death_Benef(i)
                    nb_deces = nb_deces + 1
                    check_alive(i, counter) = False
                    nb_polices_present = nb_polices_present - 1
                End If
            Else
                check_alive(i, counter) = False
            End If
        Else 'Joint Life --> 4 cases, if both are already dead at beginning of year,
            nothing is paid
            If (Death_Moment_joint(1, i - nb_police) = 0) And (Death_Moment_joint(2, i -
                nb_police) = 0) Then 'Both insured are still alive
                'Simulate Death for Insured 1
                    Death_Moment_joint(1, i - nb_police) = Simul_Death(Adj_Death_Proba_joint
                        (1, i - nb_police, j))
                'Simulate Death for Insured 2
                    Death_Moment_joint(2, i - nb_police) = Simul_Death(Adj_Death_Proba_joint
                        (2, i - nb_police, j))
                'Determine Cash Flows
                    If (Death_Moment_joint(1, i - nb_police) = 1) And (Death_Moment_joint(2, i -
                        nb_police) = 1) Then 'Both insured died this year
                        Premium_Paid(j) = Premium_Paid(j) + Premium_joint(i - nb_police, j) / 2
                        Death_Benef_recieved(j) = Death_Benef_recieved(j) + Death_Benef_joint(i -
                            nb_police)
                        nb_deces = nb_deces + 1
                        check_alive(i, counter) = False
                        nb_polices_present = nb_polices_present - 1
                    End If
                End If
            End If
        End If
    End For

```

```

Else      'At least 1 insured survived --> no death benef is paid, premiums
          have to be paid
          Premium_Paid(j) = Premium_Paid(j) + Premium_joint(i - nb_police, j)
End If
ElseIf (Death_Moment_joint(1, i - nb_police) = 0) And (Death_Moment_joint(2, i -
nb_police) = 1) Then      'Insured 1 is still alive
'Simulate Death for Insured 1
          Death_Moment_joint(1, i - nb_police) = Simul_Death(Adj_Death_Proba_joint
          (1, i - nb_police, j))
'Determine Cash Flows
If (Death_Moment_joint(1, i - nb_police) = 1) And (Death_Moment_joint(2, i -
nb_police) = 1) Then
          Premium_Paid(j) = Premium_Paid(j) + Premium_joint(i - nb_police, j) / 2
          Death_Benef_recieved(j) = Death_Benef_recieved(j) + Death_Benef_joint(i -
          nb_police)
          nb_deces = nb_deces + 1
          check_alive(i, counter) = False
          nb_polices_present = nb_polices_present - 1
Else      'At least 1 insured survived --> no death benef is paid
          Premium_Paid(j) = Premium_Paid(j) + Premium_joint(i - nb_police, j)
End If
ElseIf (Death_Moment_joint(1, i - nb_police) = 1) And (Death_Moment_joint(2, i -
nb_police) = 0) Then      'Insured 2 is still alive
'Simulate Death for Insured 2
Else
          Death_Moment_joint(2, i - nb_police) = Simul_Death(Adj_Death_Proba_joint
          (2, i - nb_police, j))
'Determine Cash Flows
If (Death_Moment_joint(1, i - nb_police) = 1) And (Death_Moment_joint(2, i -
nb_police) = 1) Then
          Premium_Paid(j) = Premium_Paid(j) + Premium_joint(i - nb_police, j) / 2
          Death_Benef_recieved(j) = Death_Benef_recieved(j) + Death_Benef_joint(i -
          nb_police)
          nb_deces = nb_deces + 1
          check_alive(i, counter) = False
          nb_polices_present = nb_polices_present - 1
Else      'At least 1 insured survived --> no death benef is paid
          Premium_Paid(j) = Premium_Paid(j) + Premium_joint(i - nb_police, j)
End If
Else
          check_alive(i, counter) = False
End If
End If

```

```

Next i
'Take residual Cash value of policies still in force
If j = nb_annee Then
    For i = 1 To nb_police + nb_police_joint
        If check_alive(i, counter) = True Then
            Residual_Fund_NAV = Residual_Fund_NAV + NAV_10yrs(i)
        End If
    Next i
End If
'Global Cash Flow
If j < nb_annee Then
    Cash_Flow(j) = Cash_Flow(j) + (Death_Benef_recieved(j) - Premium_Paid(j) - Fees(j) -
        Coupon(j) * face_value)
Else 'Reimbursement of face value & sell of policies still in force
    Cash_Flow(j) = Cash_Flow(j) + (Death_Benef_recieved(j) - Premium_Paid(j) - Fees(j) -
        Coupon(j) * face_value - face_value + Residual_Fund_NAV)
End If
'Determination if simulation is default
If (Cash_Flow(j) < 0) Then
    simulation_default(counter) = 1
End If
Total_Cash_Flow(j) = Total_Cash_Flow(j) + Cash_Flow(j)
If j < nb_annee Then
    If Cash_Flow(j) > 0 Then
        Cash_Flow_Last(j + 1) = Cash_Flow(j)
    Else
        Cash_Flow_Last(j + 1) = 0
    End If
End If
Next j

'Calculation of number of defaults
If simulation_default(counter) = 1 Then
    nb_default = nb_default + 1
End If
Next counter

'Results
For j = 1 To nb_annee
    Cells(18 + j, 30).Value = Total_Cash_Flow(j) / nb_simu
    Cells(18 + j, 31).Value = Coupon(j)
Next j
Cells(30, 30).Value = nb_default

```

```
Cells(31, 30).Value = nb_default / nb_simu
Cells(17, 30).Value = nb_simu
Cells(32, 30).Value = nb_deces

End Sub
```

```
Function Simul_Death(qx As Double) As Double
Dim alea As Double
    Randomize
'Determination of random number between 0 and 1
    alea = Rnd
    If alea < qx Then    'Death occurred
        Simul_Death_v2 = 1
    Else
        Simul_Death_v2 = 0
    End If
End Function
```