



HAL
open science

Le risque de modèle

Thomas Lallement

► **To cite this version:**

| Thomas Lallement. Le risque de modèle. Gestion des risques [q-fin.RM]. 2014. dumas-01073386

HAL Id: dumas-01073386

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01073386>

Submitted on 22 Nov 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Mémoire présenté devant
l'UFR de Mathématique et d'Informatique
pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'Actuaire de Strasbourg
et l'admission à l'Institut des Actuaire**

le 01 octobre 2014

Par : LALLEMENT Thomas

Titre: Le risque de modèle

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres du jury de l'Institut des Actuaire

signature

Entreprise :

M. Jean Modry

M. David Fitouchi

Nom : SCOR

Signature :

Membres du jury de l'UdS :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : NISIPASU Ecaterina

M. Jacques Franchi

M. Karl-Théodor Eisele

M. Jean-Lucien Netzer

M. Jean Bérard

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

Invités :

M. David Dubois

M. Christian Hess

M. Sylvain Gadenne

Mme Stephanie Foata

M. Alexandre You

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

M. Vincent Vigon

Mme Magali Kelle-Vigon

Mme Myriam Maumy-Bertrand

Secrétariat : Mme Stephanie Richard

Bibliothèque : Mme Christine Disdier

Signature du candidat

Mémoire présenté devant
l'UFR de Mathématique et Informatique
pour l'obtention du Master Mathématiques et Application, spécialité Statistique, parcours
Actuariat

le 01 octobre 2014

Par : LALLEMENT Thomas

Titre: Le risque de modèle

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres du jury de l'Institut des
Actuaires

signature

Entreprise :

M. Jean Modry

M. David Fitouchi

Nom : SCOR

Signature :

Membres du jury de l'UdS :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : NISIPASU Ecaterina

M. Jacques Franchi

M. Karl-Théodor Eisele

M. Jean-Lucien Netzer

M. Jean Bérard

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

Invités :

M. David Dubois

M. Christian Hess

M. Sylvain Gadenne

Mme Stephanie Foata

M. Alexandre You

**Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels**
(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)

Signature du responsable entreprise

M. Vincent Vigon

Mme Magali Kelle-Vigon

Mme Myriam Maumy-Bertrand

Secrétariat : Mme Stephanie Richard

Bibliothèque : Mme Christine Disdier

Signature du candidat

Le risque de modèle

Résumé

“ Tous les modèles sont faux, mais certains sont utiles ” – Georges Box

Solvabilité II est un projet de réforme européenne de la réglementation prudentielle s’appliquant au secteur de l’assurance et de la réassurance. Sa date d’entrée en application a été fixée au début 2016 par le Parlement Européen. L’intérêt de cette réforme est de garantir l’équilibre entre la protection des assurés des sociétés d’assurance et de réassurance, et le capital.

Les autorités de contrôle prudentiel exigent de la part de ces compagnies de disposer d’un capital suffisant pour éviter la ruine à un an avec une probabilité de 99,5 %. Ce capital requis est appelé Solvency Capital Requirement (SCR). La détermination de ce capital est une tâche plus ou moins compliquée, et son calcul repose sur des modèles souvent assez complexes dont l’application se fait parfois en supposant la validité des hypothèses des modèles considérés alors que les tests statistiques ne les confirment pas systématiquement. D’une manière générale les modèles ne représentent qu’une simplification de la réalité et non la réalité même. Le choix d’un modèle peut donc induire des erreurs dans l’évaluation du risque et être à l’origine de risque de modèle.

Dans ce contexte, le risque de modèle est un enjeu majeur dans la maîtrise des risques des compagnies d’assurance et de réassurance. Cette notion peut avoir des impacts directs sur la solvabilité des organismes mais la quantification précise d’un tel risque reste aujourd’hui une problématique encore très peu abordée dans le monde assurantiel et la littérature actuarielle.

L’enjeu de ce mémoire est de proposer une première approche pour évaluer ce risque, en tenant compte de la validité des modèles étudiés, avec une première application sur la modélisation d’un actif et une seconde application sur l’estimation de la charge ultime d’un modèle de provisionnement non-vie.

Mots-clés : Solvabilité II, Risque de modèle, validité des modèles, risque de spécification, modèle actif, modèle de provisionnement non-vie

Abstract

“ All models are wrong, but some are useful ” – Georges Box

Solvency II is an European project aiming to reform the prudential regulation applying to insurance and reinsurance industry. The European Parliament has set the date of entry into force to early 2016. The interest of this reform is to ensure a balance between the protection of policyholders of the insurance and reinsurance companies and the capital.

The supervisors require companies to hold enough capital to avoid one year ruin with a probability of 99,5%. This required capital is called the Solvency Capital Requirement (SCR). The valuation of this capital is a more or less complicated task, and its calculation is based often on quite complex models whose application is sometimes done assuming that the model's assumptions are valid while statistical tests do not confirm this systematically. Generally the models are seeing a simplification of the reality and not the reality itself. The choice of a model can therefore lead to errors in the assessment of risk and may be a cause for the model risk.

In this context, model risk is a major issue for the risk management of insurance and reinsurance companies. This may have direct impacts on the solvency of these companies but the accurate quantification of such a risk still remains today a notion less described by the insurance world and the actuarial literature.

The aim of this actuarial thesis is to propose a first approach to assess this risk, by taking into account the validity of the models analyzed, with a first application on the modeling of an asset and a second one on a final ultimate estimation of a non-life reserving model.

Key words: Solvency II, model risk, models validity, specification risk, asset model, non-life reserving model

Remerciements

Je tiens à remercier l'ensemble des actuaires pour leur accueil et leur disponibilité au sein du groupe SCOR. L'élaboration et la rédaction du mémoire se sont faites dans de bonnes conditions grâce aux connaissances et à l'expérience de chacun.

Je tiens particulièrement à remercier Monsieur Eric LECOEUR, Directeur de l'Actuariat Groupe de SCOR, qui a fait naître en moi une vocation actuarielle, m'a apporté son soutien et m'a donné l'opportunité de réaliser mon stage au sein de SCOR Paris.

Je souhaite également remercier Madame Ecaterina NISIPASU, Responsable du Département Modélisation Actuarielle, qui m'a encadrée et suivie durant ce stage.

Je remercie enfin l'ensemble des actuaires présent dans le Département Modélisation Actuarielle qui m'ont accompagné pendant ce stage et qui m'ont apporté les connaissances théoriques, actuarielles et pratiques nécessaires à l'élaboration de ces travaux.

Je finis par remercier le corps professoral et administratif de la faculté de Strasbourg qui, pendant trois années, a été à l'écoute de ses étudiants et qui a apporté les bases nécessaires pour faire de ses élèves les actuaires de demain.

Table des matières

Résumé.....	2
Abstract	3
Remerciements	4
Introduction.....	8
Partie 1 : Cadre du mémoire	9
Chapitre 1 : Contexte.....	10
Section 1 : La réassurance	10
Section 2 : La réforme Solvabilité II	11
1.2.1. Limites de Solvabilité I	11
1.2.2. Objectif de la réforme Solvabilité II.....	12
1.2.3. Les trois piliers.....	12
Section 3 : Le groupe SCOR	14
1.3.1. Présentation du groupe SCOR.....	14
1.3.2. SCOR et Solvabilité II	15
Section 4 : Objectif du mémoire.....	16
Chapitre 2 : Le risque de modèle	17
Section 1 : Qu'est-ce que le risque de modèle ?.....	17
Section 2 : Les différentes sources du risque de modèle.....	17
Section 3 : Méthodes de quantification du risque de modèle.....	20
2.3.1. Mesure de risque.....	21
2.3.2. Quantification du risque de modèle : approche dite de « modèle de référence ».....	23
Partie 2 : Etude sur un modèle d'actif.....	25
Chapitre 3 : Présentation des données et des modèles.....	27
Section 1 : Les données	27
3.1.1. Définition de l'indice	27
3.1.2. Traitement préalable des données	27
3.1.3. Choix de la période.....	28
3.1.4. Etude descriptive des données	28

Section 2 : Choix des modèles stochastiques.....	30
3.2.1. Le modèle de Black & Scholes	30
3.2.2. Le modèle à saut de Merton	33
3.2.3. Le modèle à volatilité stochastique GARCH	36
Chapitre 4 : Validation des modèles et application	39
Section 1 : Vérification des hypothèses des modèles et test du Probability Integral Transform .	39
4.1.1. Vérification préalable des hypothèses	39
4.1.2. Test du Probability Integral Transform.....	43
Section 2 : Application.....	48
4.2.1. Intervalle de confiance	48
4.2.2. Stabilité de la VaR 99,5 %	50
4.2.3. Quantification du risque de modèle.....	51
Partie 3 : Etude sur un modèle de provisionnement non-vie	54
Chapitre 5 : Présentations des données et des modèles	56
Section 1 : Les données	56
5.1.1. Présentation du segment étudié.....	56
5.1.2. Traitement préalable des données	57
Section 2 : Choix des modèles de provisionnement	59
5.2.1. La méthode de Chain-Ladder	59
5.2.2. Le modèle de Mack	63
5.2.3. Les modèles GLM	65
Chapitre 6 : Validation des modèles et application	69
Section 1 : Vérification des hypothèses des modèles	69
6.1.1. La méthode de Chain-Ladder	69
6.1.2. Le modèle de Mack	71
6.1.3. Les modèles GLM	72
Section 2 : Application.....	77
6.2.1. Distribution de la charge à l'ultime	77
6.2.2. Quantification du risque de modèle.....	78
Partie 4 : Amélioration de l'approche de quantification.....	81
Conclusion	84

Table des figures.....	86
Liste des tableaux.....	87
Liste des abréviations.....	88
Bibliographie.....	89
ANNEXES.....	91
Annexe 1 : Lemme d'Itô	92
Annexe 2 : Démonstration des équations du modèle de Merton à saut.....	93
Annexe 3 : Application du critère d'information d'Akaike (AIC)	95
Annexe 4 : Test du Probability Integral Transform	96
Annexe 5 : Test d'absence d'effet calendaire	101
Annexe 6 : Résultats de l'estimation des paramètres des modèles GLM	103

Introduction

Toute société d'assurance ou de réassurance possède un cycle de production inversé car l'acquisition des primes se fait avant d'avoir pris connaissance des paiements qu'elle devra effectuer pour compenser les sinistres qui surviendront. Ce cycle oblige les sociétés à anticiper les risques auxquels elles sont soumises, et leur quantification se fait par le biais de différents modèles et méthodes actuarielles et financières.

Dans le cadre du projet européen Solvabilité II, la précision des modèles et les mesures de risque utilisées sont des éléments essentiels pour le calcul de la solvabilité de toute compagnie d'assurance et de réassurance. Les décisions prises sur la base de ces modèles assurantiels aussi bien pour la tarification, pour le calcul des réserves ou encore pour la projection des actifs financiers de la compagnie dépendent essentiellement des résultats statistiques des modèles calibrés et des jugements d'experts. Souvent les données disponibles ne permettent pas de valider les hypothèses des modèles et d'estimer de manière précise leurs paramètres. Les jugements alors basés sur ces modèles sont donc biaisés et peuvent ainsi induire des erreurs dans le choix du modèle approprié pour la détermination précise du capital requis.

L'objet de ce mémoire est de proposer une première estimation de l'erreur due à la mauvaise spécification du modèle, erreur connue dans la littérature comme risque de modèle. L'objectif principal est de trouver une approche permettant d'évaluer le risque de modèle pour pouvoir ainsi déterminer l'adéquation des modèles aux différentes typologies de risques de SCOR. La littérature à ce sujet reste succincte dans le domaine assurantiel. Peu de travaux proposent d'aborder cette problématique, et notre proposition s'appuie sur ces derniers et sur les avis actuariels proposés par les membres des équipes actuarielles du groupe SCOR.

Ce mémoire est articulé autour de trois parties différentes.

La première partie expose le cadre du mémoire par rapport au contexte actuel et propose un point de vue général de la perception du risque de modèle à travers la mise en évidence des différentes sources associées au risque de modèle, et des méthodes possibles de quantification.

La deuxième partie propose une première quantification du risque de modèle sur un modèle d'actif, où la quantité de données mise à notre disposition était plus significative et permettait de pouvoir calibrer d'une manière plus adéquate les modèles.

La troisième partie propose une seconde quantification du risque de modèle sur un modèle de provisionnement non-vie, où la quantité de données était moins significative et par conséquent le risque d'erreur plus probable.

Partie 1 :

Cadre du mémoire

Chapitre 1 : Contexte

Section 1 : La réassurance

L'activité de réassurance consiste en la cession par une compagnie d'assurance (appelée cédante) d'un risque au réassureur, contre le paiement d'une prime de réassurance. En d'autres termes, un réassureur est l'assureur d'un autre assureur. Le contrat de réassurance va permettre à la cédante de réduire son engagement net sur des risques individuels ou multiples mais il ne décharge pas les engagements de celle-ci envers ses assurés.

Les contrats souscrits portent le plus souvent sur des risques ayant des garanties importantes (catastrophes naturelles, pandémies,...): on parle alors de risque de sévérité. Cependant, ils peuvent également protéger la cédante contre la répétition de faibles sinistres : il s'agit alors du risque de fréquence.

Les fonctions primaires de la réassurance sont :

- De permettre à l'assureur de garantir une plus grande sécurité de ses fonds propres et donc une meilleure solvabilité à l'égard des autorités de contrôle prudentiel.
- D'apporter des connaissances supplémentaires dans certains domaines très spécialisés tels que l'analyse et la tarification de risques complexes.
- D'accroître les capacités financières de la compagnie d'assurance par le lissage de son bilan en supportant une partie de l'aléa du portefeuille de l'assureur.
- De mettre à la disposition de la cédante d'importantes liquidités.

Les traités de réassurance peuvent être de types et de natures différents c'est-à-dire obligatoires ou facultatifs, et proportionnels ou non-proportionnels.

Pour les traités proportionnels, on distingue le Quote-Part et l'Excédent de plein.

Le Quote-Part est très simple à mettre en place. Le réassureur, en contrepartie d'une portion prédéterminée de la prime facturée à la cédante, indemnise la cédante contre la même partie prédéterminée des sinistres couverts par celle-ci au titre des polices concernées.

Le traité en Excédent de plein est déterminé risque par risque. Le traité se définit par un plein de conservation et un plein de souscription, la différence entre les deux étant la capacité du traité. Ce traité ne s'applique qu'à des risques à capitaux garantis inférieurs au plein de souscription. Le taux de conservation défini police par police est le rapport entre le capital garanti et le plein de conservation. Si le capital garanti est inférieur au plein de conservation, le risque est entièrement conservé par la cédante.

Pour les traités non-proportionnels, on distingue les traités en Excédent de sinistres (Excess of Loss) et les traités en Excédent de perte annuelle (Stop Loss).

L'Excédent de sinistres est défini par une priorité (borne inférieure) et un plafond (borne supérieure). Le réassureur prend en charge la partie de tout sinistre individuel qui excède la priorité dans la limite

de la portée¹. Les deux formes de traités en Excédent de sinistres sont le traité en Excédent de sinistres par risque et par évènement.

Le traité en Excédent de pertes annuelles prévoit l'intervention du réassureur lorsque que la charge annuelle globale de sinistres sur une branche donnée dépasse un seuil déterminé. En général ce seuil correspond à un ratio appelé Sinistres/Primes qui peut avoir une portée limitée selon le contrat.

Section 2 : La réforme Solvabilité II

Les enseignements tirés lors des diverses crises économiques ont encouragé les autorités de contrôle européennes à revoir les directives européennes mises jusqu'alors en place afin d'inciter les compagnies d'assurance et de réassurance à mieux prendre en compte les risques auxquels elles doivent faire face dans leur calcul de solvabilité. L'adoption de la directive Solvabilité II en 2009, dont la pleine application est programmée début 2016, fera suite à la directive Solvabilité I en place depuis 1973.

1.2.1. Limites de Solvabilité I

La réforme Solvabilité I présente l'avantage d'être facile à mettre en place et le calcul d'exigence de capital simple à effectuer. Toutefois, certaines critiques ont été faites à l'encontre de cette réforme.

La première critique concerne le calcul de l'exigence de marge de solvabilité (EMS). Son calcul est indépendant du profil de risque des compagnies et se détermine de manière proportionnelle à partir du volume de primes et de sinistres, et ne tient pas compte de certains risques fondamentaux pour les compagnies comme par exemple le risque de marché ou le risque de crédit.

Prenons par exemple le cas de deux compagnies d'assurance ayant les mêmes primes émises mais des périmètres d'activités différents : la première dispose d'un portefeuille diversifié et la seconde d'un portefeuille plus concentré. Malgré un profil de risque différent, l'EMS sera exactement la même pour ces deux sociétés.

La seconde critique s'oriente du côté actif d'une entreprise. Si deux assureurs couvrent exactement le même risque (automobile par exemple), ils immobiliseront le même capital pour leurs provisions techniques. Considérons qu'un des deux assureurs investisse à l'actif sur des supports plus risqués que l'autre. Malgré un profil de risque différent pour leurs placements financiers, l'EMS sera exactement la même pour ces deux sociétés.

La réforme Solvabilité II remplacera la réforme Solvabilité I actuellement toujours en place, et proposera de nouvelles exigences prudentielles qui tient plus compte du profil de risque des compagnies.

¹ La portée correspond à la différence entre le plafond et la priorité

1.2.2. Objectif de la réforme Solvabilité II

Les principales missions assignées à cette nouvelle réforme concernent l'harmonisation des normes européennes et l'instauration d'une meilleure adéquation entre les exigences réglementaires de capital et les risques auxquels sont soumises les compagnies. L'exigence de capital sera directement liée au profil de risque de la compagnie.

Comme le rappelle Marie-Laure Dreyfus [1], ce futur régime s'est vu donc attribué des objectifs ambitieux tel que:

- Le renforcement de l'intégration du marché européen de l'assurance.
- L'amélioration de la protection des preneurs d'assurance et des ayants droits.
- Le renforcement de la compétitivité des assureurs et des réassureurs européens au niveau international.
- La promotion d'une meilleure réglementation.

Son instauration va permettre une harmonisation du monde assurantiel européen et permettre aux compagnies d'assurance et de réassurance de bénéficier d'un référentiel européen de l'assurance.

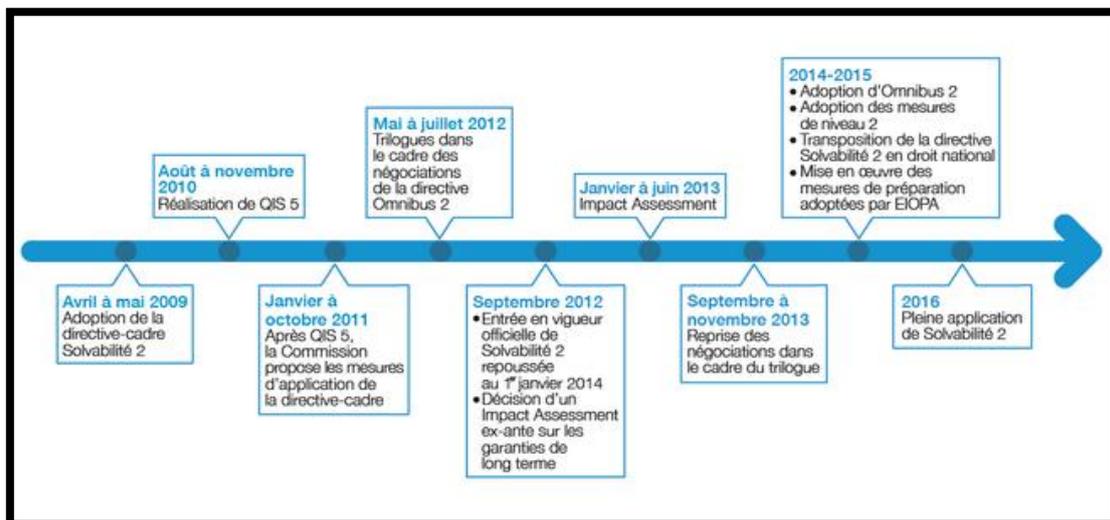


Figure 1 : Calendrier de la réforme Solvabilité II

1.2.3. Les trois piliers

La Commission Européenne s'est inspirée des accords de Bâle II pour proposer une structure en trois piliers. Le premier pilier fixe les exigences quantitatives, le deuxième pilier concerne les exigences qualitatives et la gouvernance de la compagnie, et le troisième pilier fixe les exigences d'information financière à fournir auprès du public et des autorités de contrôle prudentiel.

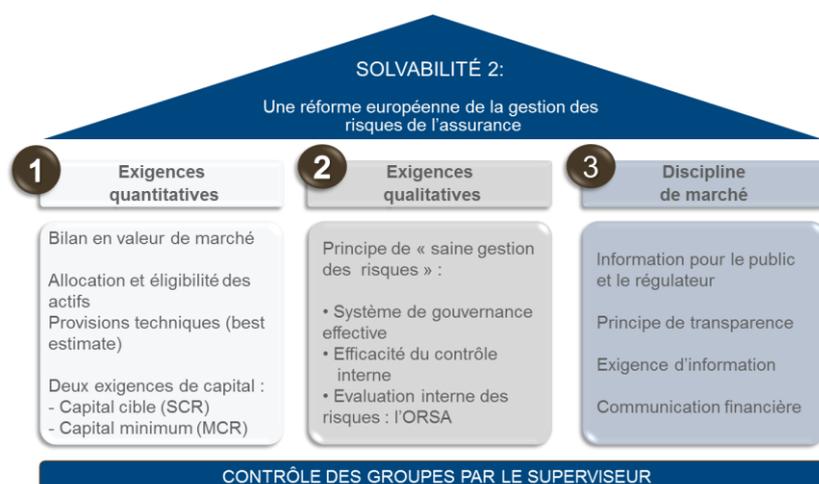


Figure 2 : Les trois piliers

Pilier I :

La réforme prévoit que l'exigence en fonds propres doit refléter tous les risques de l'entreprise aussi bien à l'actif qu'au passif. Une approche « conforme au marché » (ou « market consistent ») doit être retenue pour l'évaluation de ses derniers, c'est-à-dire que l'évaluation des actifs doit se faire en valeur de marché et l'évaluation des passifs en valeur de transfert.

L'évaluation des provisions techniques se fera par un « best estimate » ajouté d'une marge pour risque. Le « best estimate » correspond à la valeur actuelle probable des flux futurs actualisés au taux sans risque. La marge pour risque correspond au montant qu'un repreneur éventuel de l'activité exigerait pour honorer les engagements envers les assurés. En d'autres termes, elle correspond au coût d'immobilisation des fonds propres jusqu'à extinction des engagements.

Deux niveaux de seuils pour les fonds propres sont définis par la Directive : le Capital Minimum Requis (MCR : Minimum Capital Requirement) et le Capital de Solvabilité Requis (SCR : Solvency Capital Requirement).

Le MCR représente le niveau minimum de fonds propres en dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle sera préconisée. L'autorité de contrôle peut alors exiger des mesures d'augmentation de capital immédiate et retirer l'agrément en cas de son non-respect. Le MCR se calcule à partir des montants de provision technique et des expositions au risque, avec une borne inférieure et supérieure basée sur le SCR.

Le SCR représente le capital à détenir afin d'absorber un choc exceptionnel provoqué par un risque majeur (sinistralité catastrophique, chute brutale des cours boursiers, immobiliers, ...) et d'éviter tout risque de faillite dans 99,5% des cas à horizon d'un an, ou plus exactement le capital requis tel que la probabilité de ruine économique à un an soit inférieure à 0,5 %. Les fonds propres des compagnies doivent être au-dessus du SCR pour être solvable.

Le calcul de ce capital se base sur le profil de risque réel de la compagnie et intègre les principaux risques auxquels elle est soumise c'est-à-dire le risque de souscription, le risque de marché, le risque de défaut, et le risque opérationnel. Toutefois il exclut les risques stratégiques et de réputation.

La détermination du SCR peut se faire soit par l'utilisation de la formule standard qui se base sur une structure de calcul reposant sur des principes et des hypothèses fixés par la Directive, soit par l'utilisation d'un modèle interne (partiel ou complet) propre à chaque société.

Pilier II :

Ce pilier résulte de la volonté, aussi bien au niveau des compagnies qu'au niveau des autorités de contrôle, de définir et d'harmoniser les activités de contrôle des risques des entreprises. Pour assurer une gestion saine et prudente de l'activité, les entreprises devront mettre en place un système de gouvernance incluant la fonction de gestion des risques, de conformité, d'audit interne et la fonction actuarielle. Le contrôle interne sera appuyé par la mise en place d'un dispositif Own Risk Solvency Assesment (ORSA) dont l'objectif est de juger l'adéquation de l'évaluation des fonds propres aux risques encourus par la compagnie d'assurance ou de réassurance.

Pilier III :

Ce pilier concerne l'information financière que doit fournir les compagnies d'assurance et de réassurance. L'objectif est notamment de progresser vers une coordination et une harmonisation des informations diffusées dans les États membres à différents niveaux (assurés, marchés ou institutionnels, autorités de contrôle).

Il comprend :

- Les exigences de publication d'information publique par les entreprises (amélioration de la transparence de l'information, promotion d'une meilleure discipline de marché, ...).
- Les exigences de publication aux autorités de contrôle qui seront confidentielles.

Section 3 : Le groupe SCOR

1.3.1. Présentation du groupe SCOR

Le groupe SCOR est un acteur majeur du secteur de la réassurance. Ce groupe est actuellement hissé au cinquième rang mondial et le premier réassureur français, avec un chiffre d'affaire de plus de 10,3 milliards d'euros.

L'activité du groupe se décompose en trois branches principales : SCOR Global P&C pour la réassurance non-vie, SCOR Global Life pour la réassurance vie et SCOR Global Investments pour la gestion d'actifs.

Le groupe est présent dans plus de 150 pays autour de six pôles² d'activités principaux (ou hubs). La responsabilité de chaque pôle est d'assurer d'un côté ses responsabilités locales propres au marché auquel il appartient et de l'autre côté ses responsabilités globales pour l'ensemble du groupe SCOR.

² Paris, Londres, Zurich, Cologne, Singapour et New York

1.3.2. SCOR et Solvabilité II

Suite à la promulgation de la réforme Solvabilité II, SCOR a décidé de développer son propre modèle interne. Même si elle présente certaines contraintes, la mise en œuvre d'un modèle interne est d'un grand intérêt par rapport à la formule standard. Le point crucial est que le capital requis est calculé à partir du profil de risque de l'entreprise. Ainsi, le modèle interne reflète l'activité de l'entreprise d'une manière plus précise et plus pertinente que la formule standard. Le calibrage de la formule standard a été effectué à partir du profil moyen de l'ensemble des acteurs européens de l'assurance, et se trouve être plus adapté à un assureur plutôt qu'à un réassureur. Pour une entreprise à échelle mondiale comme SCOR, la mise en place d'un modèle interne est donc plus adaptée.

En conséquence les avantages d'un modèle interne sont nombreux : optimiser le capital requis, avoir une meilleure maîtrise et prise en compte des risques, de leur dépendance et de leur gestion. L'implémentation d'un modèle interne peut être très complexe et sa mise en œuvre peut s'avérer coûteuse.

Le modèle interne de SCOR est composé de plusieurs modules permettant la couverture des différents risques auxquels est exposée l'entreprise, tels :

- Le générateur de scénarios économiques qui modélise les indicateurs économiques utilisés pour la valorisation des actifs et passifs de SCOR (PIB, inflation, taux d'intérêt, indices, ...).
- Les risques assurantiels vie et non-vie qui sont modélisés à travers deux modules séparés : ILIAS pour les risques vie et NORMA pour les risques non-vie.
- Le modèle « actif » permettant l'évaluation des actifs financiers.
- Le modèle consolidé qui agrège les résultats de tous les modules et qui permet la prise en compte du risque de crédit et du risque opérationnel.

Section 4 : Objectif du mémoire

Durant ce stage de six mois, j'ai intégré l'équipe Modélisation Actuarielle sous la responsabilité de Madame Ecaterina NISIPASU. Ce département a pour mission d'assurer une veille actuarielle et réglementaire continue, de mener des études permettant l'implémentation dans le Groupe des nouvelles méthodologies ou normes réglementaires, de mettre en œuvre des méthodes et procédures normalisées d'évaluation et gestion des risques pour l'ensemble du Groupe.

La mise en place et la validité d'un modèle interne implique l'utilisation de nombreux modèles mathématiques plus ou moins sophistiqués. L'erreur de modèle inhérente, appelé risque de modèle dans la littérature, est souvent difficile à évaluer. Notre objectif est de proposer une première approche permettant de quantifier le risque de modèle en s'inspirant des quelques méthodes déjà proposées à ce sujet.

Le risque de modèle est une notion assez vaste qui peut provenir de sources différentes. De ce fait, cette problématique est encore très peu abordée dans le monde assurantiel et la littérature à ce sujet très peu approfondie. Proposer une première approche de quantification du risque de modèle a été tout le challenge à relever dans l'élaboration de ce mémoire, et nous la développerons à travers deux applications différentes : un modèle d'évaluation d'un actif financier et un modèle de provisionnement non-vie.

Chapitre 2 : Le risque de modèle

Section 1 : Qu'est-ce que le risque de modèle ?

Le risque de modèle fait intervenir comme son nom l'indique la notion de « risque ». Or parler de risque suppose, selon sa définition habituellement retenue, que l'on puisse identifier clairement sa provenance et être capable de quantifier une perte potentielle relative à celui-ci. Cependant, la littérature actuelle ne définit pas le risque de modèle d'une manière précise et formelle. Les premiers à avoir abordé ce risque dans le cadre de l'évaluation du capital ont été les acteurs du monde bancaire et financier pour remettre en cause la pertinence des modèles financiers. La définition proposée [21] est la suivante : « Le risque de modèle est un type de risque qui se réalise lorsqu'un modèle financier, utilisé pour mesurer un risque de marché d'une entreprise ou la valeur de transactions financières, n'accomplit pas les tâches ou ne reflète pas correctement les risques pour lesquels il a été conçu ».

Dans un cadre assurantiel, une définition plus générale est celle proposée dans le papier [34] de Shaun Wang et al. : « Le risque de modèle peut provenir de diverses formes d'erreur, ou de la construction ou de l'utilisation d'un modèle inapproprié ». Cette définition suppose que la source du risque de modèle n'est pas unique, et que pour limiter l'apparition d'un tel risque il faut clairement identifier ses sources potentielles et essayer de les maîtriser.

Nous allons donc présenter les différentes sources potentielles relatives au risque de modèle.

Section 2 : Les différentes sources du risque de modèle

Les sources du risque de modèle sont multiples et dépendent principalement de la nature des modèles et des données utilisées pour modéliser les risques. Il existe beaucoup de catégories de modèles classés en trois catégories dans l'ouvrage [7] de Crouhy et al. .

Le premier groupe concerne les modèles purement statistiques basés sur des observations historiques et des hypothèses mathématiques.

Le deuxième groupe concerne les modèles basés sur les hypothèses faites par des experts, autrement dit jugement d'expert (ou « Expert Judgement »).

Le troisième groupe concerne les modèles basés sur une combinaison des deux premiers groupes.

Actuellement, les modèles mis en place par les actuaires correspondent plutôt à la troisième catégorie citée c'est-à-dire avec une prise en compte d'hypothèses statistiques et de jugement d'expert. La fiabilité des modèles peut être souvent mise en doute à cause de leur incapacité à reproduire précisément la réalité observée et la meilleure alternative pour pallier à ce problème reste la combinaison d'avis statistiques et d'experts. Cependant une étude préalable des diverses sources potentielles du risque de modèle permet de suivre et de maîtriser justement l'apparition d'un tel risque.

La figure ci-dessous présente les différentes sources potentielles associées au risque de modèle. Ces sources sont notamment présentées dans l'article [34] de Shaun Wang et al. Et dans l'ouvrage [5] de Benoit A. Aubert.

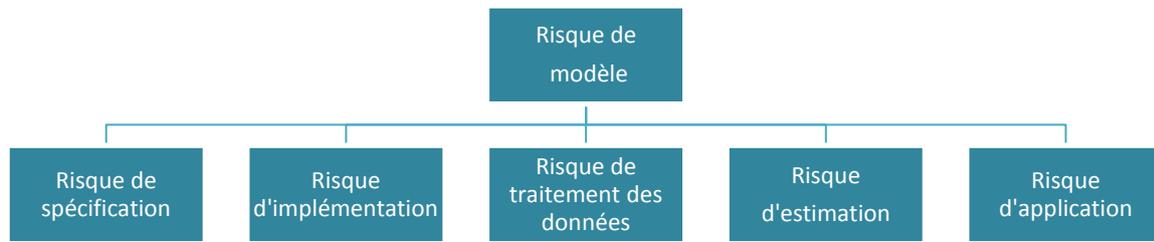


Figure 3 : Organigramme des sources potentielles du risque de modèle

Le risque de spécification

Le risque de spécification peut se définir comme le risque que le modèle choisi par l'actuaire pour évaluer un risque assurantiel ou financier soit inapproprié. Il y a deux cas de figures dans lesquels on peut considérer un modèle comme inapproprié :

- Si le modèle n'est pas adapté pour le type de risque que l'on souhaite étudié.
- Si le modèle est basé sur des hypothèses qui ne sont pas vérifiées en réalité.

C'est la raison pour laquelle l'actuaire doit se poser trois questions essentielles avant tout choix de modèle :

- Quel risque doit être modélisé ?
- Quelles sont les données à notre disposition ?
- Quels sont les modèles que nous pouvons appliquer pour modéliser ce risque ?

Le risque d'implémentation

Il existe deux formes de risque d'implémentation :

- Le risque qu'un mauvais choix d'algorithme soit effectué pour implémenter les concepts spécifiques au modèle.
- Le risque qu'un algorithme approprié soit choisi, mais qu'il contienne des erreurs de codage.

La plupart du temps, la modélisation d'un risque se fait par l'intermédiaire de logiciel informatique. Beaucoup d'actuaire et de gestionnaires de risque implémentent les modèles dans leur département et ne jugent pas nécessaire d'avoir recours à un support informatique (IT) pour le faire.

Parfois, une revue approfondie du code ne peut être effectuée car elle nécessite tout simplement trop de temps. Des erreurs d'implémentation peuvent alors subsister et provoquer des résultats incohérents. De plus, la complexité des techniques de codage employées ne permettent parfois pas de tracer rapidement la cause du problème.

Le risque de traitement des données

Une mauvaise compréhension et utilisation des données mises à la disposition des actuaire peuvent conduire à divers biais que ce soit dans le choix des modèles ou dans l'estimation de leur paramètre. Il est donc souvent nécessaire d'effectuer divers choix ou retraitements sur les données :

- Choix de l'historique de données : ce choix doit se faire de manière précise et adaptée. Souvent, certaines périodes historiques ne sont plus représentatives de notre futur.
- Retraitement des données : suppression d'événements exceptionnels si nécessaire, correction d'erreur de saisie, lissage,

Le risque d'estimation

Le risque d'estimation intervient lors du calibrage d'un modèle, méthode qui consiste à ajuster les caractéristiques du modèle à des données disponibles et/ou à certaines contraintes imposées à priori. L'estimation des paramètres du modèle dépend alors de ces données initiales et des méthodes statistiques utilisées. D'une part, les résultats obtenus par ces méthodes se voient affectés d'une erreur d'échantillonnage qui induit un écart systématique par rapport à la "vraie" valeur des paramètres. D'autre part, ces méthodes de calibrage donnent parfois des valeurs très différentes pour les paramètres du modèle et il est difficile alors de définir laquelle sera la plus appropriée.

Le risque d'application

Le risque d'application peut être issu de la complexité des modèles. La plupart de ces modèles sont basés sur des travaux de recherches, et des connaissances techniques et théoriques poussées sont parfois requises pour les comprendre.

Ainsi cette complexité, notamment au niveau des hypothèses du modèle, oblige les actuaires à définir et appliquer des approximations permettant l'utilisation des modèles à partir des données existantes.

Les risques d'implémentation, de traitement des données, d'estimation et d'application ne présentent pas de méthodes concrètes de quantification, et interviennent en général après le choix des modèles. Notre choix s'est donc porté sur le risque de spécification qui est en général la principale cause de risque de modèle et qui présente dans la littérature quelques méthodes de quantification.

Section 3 : Méthodes de quantification du risque de modèle

La littérature actuelle propose quelques méthodes théoriques de quantification du risque de modèle. Chacune de ces méthodes propose une approche différente pour ce risque mais le fondement reste le même : disposer d'une mesure de risque ρ et d'une classe de modèles qui sont des candidats potentiels pour l'évaluation du risque considéré.

Nicole Branger et Christian Schlag propose dans leur article [22] une approche bayésienne du risque de modèle en prenant compte de l'ensemble des modèles et l'ensemble des informations a priori sur les paramètres de chacun de ces modèles, le tout pondéré par des probabilités conditionnelles ou non conditionnelles.

Philipp Sibbertsen, Gerhard Stahl et Corinna Ledtke propose dans leur article [29] une approche de quantification, dite « approche du pire des cas », basée sur le modèle possédant la valeur de mesure de risque la plus élevée. Ils étudient la différence entre ce modèle et les autres modèles de la classe.

Enfin, Pauline Barrieu et Giacomo Scandolo propose dans leur article [25] une approche dite de « modèle de référence », qui reprend l'idée générale de la seconde approche. Cette approche propose de quantifier le risque de modèle par le biais de deux mesures de risque de modèle basée sur le modèle de référence et les autres modèles étudiés.

Nous avons décidé de retenir l'approche dite de « modèle de référence » en particulier pour quantifier le risque de modèle car elle propose un développement plus intéressant que l'approche dite « approche du pire des cas », et la difficulté de l'utilisation de l'approche bayésienne réside dans la détermination des probabilités conditionnelles et non conditionnelles relatives à chaque modèle de la classe.

Avant de présenter l'approche dite de « modèle de référence », nous allons rappeler la définition et les propriétés d'une mesure de risque ρ , et présenter en particulier la Value at Risk et la Tail Value at Risk.

2.3.1. Mesure de risque

2.3.1.a. Définition et propriétés

Une mesure de risque ρ est une fonction définie sur l'espace des variables aléatoires et qui prend ses valeurs sur \mathbb{R} .

Considérons deux risques X et Y . Voici quelques propriétés associées à la mesure de risque ρ :

- Invariance en loi : Si $X = Y$, alors $\rho(X) = \rho(Y)$

L'interprétation de cette propriété est que deux risques identiques nécessitent le même capital pour les couvrir.

- Monotonie : Si $X \leq Y$, alors $\rho(X) \leq \rho(Y)$

La monotonie traduit le fait que si le montant résultat d'un risque est systématiquement (au sens presque sûr) inférieur à celui résultant d'un autre risque, le capital nécessaire à couvrir le premier risque ne saurait être supérieur à celui nécessaire pour couvrir le second.

- Invariance par translation : Pour $\forall a \in \mathbb{R}$, on a : $\rho(X - a) = \rho(X) - a$

La propriété d'invariance par translation peut s'interpréter dans la réalité comme : si le montant a est retranché à la position financière et investie d'une manière sans risque, alors le capital requis est réduit du même montant.

- Convexité : Pour $\forall \lambda \in [0,1]$, on a : $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$

La propriété de convexité peut s'interpréter dans la réalité comme une propriété de diversification : si on diversifie en dépensant la fraction λ sur une première possibilité X et le reste sur une seconde Y , on obtient la quantité $\lambda X + (1 - \lambda)Y$. Ainsi la propriété de convexité donne un sens précis à l'idée que la diversification ne doit pas augmenter le risque.

- Homogénéité : Pour $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$, alors $\rho(\lambda X) = \lambda \cdot \rho(X)$

La propriété d'homogénéité peut s'interpréter par la proportionnalité du risque à la taille du portefeuille (par exemple).

- Sous-additivité : $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

La propriété de sous-additivité peut s'interpréter également comme une réduction du risque par la diversification.

Il y a plusieurs classes de mesure. Cette classification est basée sur les propriétés vérifiées par les mesures de risque.

Une mesure de risque est dite « monétaire » si elle est invariante en loi, monotone et invariante par translation.

Une mesure de risque est dite « convexe » si elle monétaire et convexe.

Une mesure de risque est dite « cohérente » si elle est monétaire, homogène et sous-additive.

Nous allons ici nous intéresser seulement à deux mesures de risque en particulier : la Value at Risk et la Tail Value at Risk.

La Value at Risk (VaR) est une mesure de risque correspondante à un quantile, le plus souvent élevé, associé à la distribution de perte du risque. Pour un certain niveau de probabilité p , elle s'écrit :

$$VaR_p(Y) = \inf\{a \in \mathbb{R} \mid P(Y \leq a) \geq p\} = F^{-1}(p)$$

Un des intérêts de cette mesure est qu'elle donne une idée de la queue de distribution, qui peut ne pas être négligeable lorsque l'on s'extrait du cadre gaussien.

En revanche, cette mesure de risque n'est pas qualifiée de cohérente car elle ne satisfait pas la propriété de sous-additivité.

La Tail Value at Risk (TVaR) est une mesure de risque associée à la Value at Risk. Elle permet de quantifier la perte lorsque la VaR est dépassée et plus exactement correspond à la moyenne des VaR de niveau supérieure à p .

Elle s'écrit : $TVaR_p(Y) = E[Y \mid Y > F^{-1}(p)] = \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR_u(Y) du$ (si distribution continue)

Contrairement à la VaR, la TVaR est une mesure cohérente de risque car elle vérifie en permanence la propriété de sous-additivité.

2.3.1.b. Choix de la mesure de risque

Le choix de la mesure de risque pour quantifier le risque de modèle doit se faire de manière cohérente selon que l'on étudie les modèles dans un cadre individuel ou un cadre collectif (modèle agrégé des risques).

Dans un cadre individuel, l'utilisation de la VaR ou de la TVaR permet d'obtenir des informations concernant la distribution du risque.

En revanche lorsque l'on s'intéresse à l'étude de l'agrégation de plusieurs risques, le choix de la bonne mesure de risque est primordial pour prendre en compte la diversification des risques. Dans certains cas, la VaR n'est pas sous-additive.

On peut citer à titre d'exemple l'agrégation de deux risques suivant respectivement une loi de Pareto. Dans ce cas, La VaR de la somme des deux risques est supérieure à la somme des VaR individuelle de chaque risque. Par conséquent l'utilisation de la TVaR est alors plus pertinente dans ce cadre.

2.3.2. Quantification du risque de modèle : approche dite de « modèle de référence »

Soit : une mesure de risque ρ , un risque X , X_0 le risque associé au modèle de référence.

Le choix du modèle de référence doit être fait statistiquement. En effet, parmi l'ensemble des modèles choisi dans notre classe notée \mathcal{L} , un modèle peut se révéler être le plus adéquat par la vérification de ses hypothèses et le calibrage de ses paramètres. Ce modèle sera donc sélectionné comme le modèle de référence.

L'article [25] propose de quantifier le risque de modèle en proposant deux mesures de ce risque : la mesure absolue du risque de modèle notée AM, et la mesure relative du risque de modèle notée RM. L'approche propose d'obtenir une valeur globale pour ces deux mesures en fonction du modèle de référence.

La mesure absolue du risque de modèle est définie par:

$$AM = \sup_i \{AM_i\} = \sup_i \left\{ \frac{\rho(X_i)}{\rho(X_0)} - 1 \right\} = \frac{\bar{\rho}(\mathcal{L})}{\rho(X_0)} - 1$$

La mesure relative du risque de modèle est définie par :

$$RM = \sup_i \{RM_i\} = \sup_i \left\{ \frac{\rho(X_i) - \rho(X_0)}{\bar{\rho}(\mathcal{L}) - \underline{\rho}(\mathcal{L})} \right\} = \frac{\bar{\rho}(\mathcal{L}) - \rho(X_0)}{\bar{\rho}(\mathcal{L}) - \underline{\rho}(\mathcal{L})}$$

Avec : $\underline{\rho}(\mathcal{L}) = \inf\{\rho(X_i) | X_i \in \mathcal{L}\}, i = 0, \dots, \text{card}(\mathcal{L}) - 1$

$\bar{\rho}(\mathcal{L}) = \sup\{\rho(X_i) | X_i \in \mathcal{L}\}, i = 0, \dots, \text{card}(\mathcal{L}) - 1$

$\rho(X_0)$ = mesure de risque du modèle de référence

Pour l'application de cette approche, il faut toutefois prendre en compte certaines limites.

La première limite est de choisir une classe de modèle trop restreinte et donc de risquer de ne pas contenir dans la classe étudiée un modèle satisfaisant que l'on considère comme le modèle de référence.

La seconde limite est de choisir une classe trop vaste contenant des modèles inadaptés et qui peut conduire à une surestimation significative du risque et par conséquent du risque de modèle.

Nous possédons maintenant une approche théorique afin de quantifier le risque de modèle. Cette approche est celle dite de « modèle de référence ».

Le modèle de référence peut être choisi à partir des résultats statistiques obtenus suite à la vérification des hypothèses des modèles et l'estimation de leurs paramètres. Cependant, les données disponibles ne permettent parfois pas d'identifier un modèle adéquat en particulier et le choix du modèle de référence est alors laissé à l'appréciation des experts.

L'étude du risque de modèle sera réalisée sur deux types de risques majeurs : le risque action et le risque de provisionnement non-vie. Il s'agit de deux modèles individuels de risque et le choix de la mesure de risque s'est porté sur la VaR et la TVaR. Pour mener à bien cette étude, nous adopterons une approche qui consiste à vérifier la qualité des données, la validité des modèles choisis et la cohérence des résultats obtenus.

Partie 2 :

**Etude sur un modèle
d'actif**

La modélisation d'un actif boursier soulève plusieurs problématiques que ce soit en terme de qualité des données utilisées, de périodes historiques prises en compte pour couvrir autant que possible les périodes de crises financières, de calibrage des modèles stochastiques envisagés pour la projection ou de validation des hypothèses des différents modèles.

L'ensemble de ces éléments peuvent avoir un impact non seulement sur le choix du modèle mais être un facteur déterminant dans le mauvais choix de celui-ci et donc être à l'origine du risque de modèle.

Nous allons dans cette partie appliquer l'approche de quantification de risque de modèle retenue sur un modèle d'actif financier pour les actions américaines. Les projections d'un actif financier se font par le biais de différents modèles stochastiques. Ces projections doivent être les meilleures possibles, notamment afin que les modèles puissent anticiper l'apparition de scénarios extrêmes pouvant avoir une influence significative sur des valeurs clés tel que la VaR 99,5% et la TVaR 99 %.

Dans le chapitre 3, nous présenterons les données utilisées pour cette première étude ainsi que les différents modèles stochastiques utilisés pour les projections de l'actif.

Dans le chapitre 4, nous vérifierons les hypothèses de l'ensemble des modèles et nous étudierons leur adéquation à l'historique de données à travers le test statistique du Probability Integral Transform. Ces étapes nous permettront d'identifier le modèle de référence pour ensuite évaluer le risque de modèle associé la VaR 99,5 % et la TVaR 99 % de la valeur finale de l'actif pour l'année 2013 par rapport à ce modèle de référence.

Chapitre 3 : Présentation des données et des modèles

Section 1 : Les données

3.1.1. Définition de l'indice

L'indice à notre disposition pour effectuer cette étude est l'indice boursier américain GDDLUS, indice qui représente le prix moyen brut (sans taxes) du marché des actions aux Etats-Unis. L'utilisation de cet indice est appropriée pour les actions américaines que l'on souhaite modélisées car, comme tout indice, il est représentatif de la performance de ce marché dans son ensemble. L'historique de données commence fin 1969 avec un pas mensuel jusque fin 1998. Ce n'est qu'à partir de janvier 1999 qu'une valeur journalière est observable sur l'ensemble des données.

3.1.2. Traitement préalable des données

L'extraction des données de l'indice s'est faite à partir de Bloomberg Terminal³ dans un fichier csv. Ce fichier contenait les dates calendaires, hors week-end, et les valeurs de clôture correspondantes au cours de l'actif à trois décimales après la virgule.

Un retraitement préalable des données a été nécessaire afin d'éviter toute forme d'erreur dans l'estimation future des paramètres des différents modèles. Ce retraitement a été effectué principalement à partir de janvier 1999 jusqu'à aujourd'hui, période à partir de laquelle l'indice est disponible avec une fréquence journalière. En effet, beaucoup de valeurs de cours étaient identiques d'un jour à l'autre notamment dû à la présence de jours fériés dans la base de données, problème non pris en compte par l'extraction. Il est en général assez rare d'observer exactement la même valeur d'un indice deux jours consécutifs même jusqu'au troisième chiffre après la virgule, il a fallu donc les retirer manuellement.

La non prise en compte de ce défaut d'extraction des données peut entraîner une erreur de choix de modèle notamment à cause de la surpondération⁴ d'un rendement nul.

³ Bloomberg Terminal est un système informatique permettant aux professionnels de la finance d'obtenir des données en temps réels sur les diverses places financières mondiales

⁴ Un peu moins de 5 % des données sont concernées

3.1.3. Choix de la période

Comme indiqué précédemment, l'indice GDDLUS n'est pas fourni avec la même fréquence depuis sa création jusqu'à aujourd'hui. Il a fallu donc faire un choix sur la période historique à utiliser. Prendre une fréquence mensuelle permettrait d'avoir une période historique plus longue qui s'étend sur plus de 40 ans et qui aurait comme avantage de capturer plus de situations de crises (plus ou moins graves), alors qu'avec une fréquence journalière une période seulement de 13 ans d'historique serait disponible. L'utilisation de données mensuelles peut poser certains problèmes car le nombre d'observations récoltées devient assez réduit (seulement 500 données environ) ce qui pose des problèmes de significativité statistique dans le traitement des modèles. Nous avons décidé de privilégier à ce stade la quantité de données pour pouvoir tester notre approche. Notre choix s'est par conséquent porté sur un pas journalier de l'indice afin d'avoir un volume plus conséquent et une meilleure précision des données.

3.1.4. Etude descriptive des données

Avant d'effectuer un choix quelconque de modèle stochastique, il est bien évidemment nécessaire d'étudier au préalable les données à notre disposition. Pour ce faire, nous avons étudié le rendement de l'indice à l'aide de quelques statistiques descriptives. L'intérêt d'une telle étude préliminaire est de restreindre la gamme de modèles considérés.

Le graphique et les tableaux suivants représentent respectivement la courbe historique de l'indice ainsi que les résultats statistiques observés sur le rendement journalier de l'indice sur la période 1999-2012.

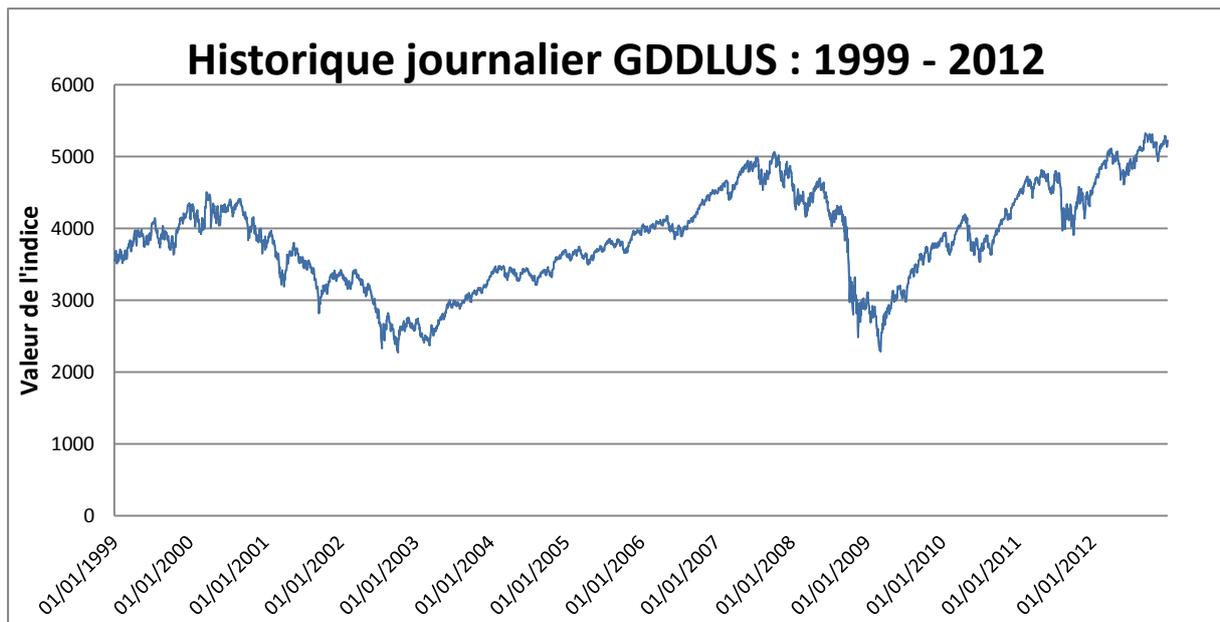


Figure 4 : Courbe historique de l'indice GDDLUS

Statistiques de base du rendement logarithmique			
Minimum	-9,50E-02	Maximum	1,10E-01
Date du minimum	14/10/2008	Date du maximum	10/10/2008
Moyenne	1,05E-04	Nombre total de données	3523
Variance	1,79E-04	Ecart-type σ	1,34E-2

$r_t = \ln(S_{t+1}) - \ln(S_t)$ avec S_t le prix de l'actif à l'instant t	Probabilité de hausse $P(r_t > x)$	Probabilité de baisse $P(r_t < -x)$
$x = 0$	52,94 %	47,06 %
$x = 1 \times \text{Ecart-type}$	10,50 %	11,72 %
$x = 2 \times \text{Ecart-type}$	2,44 %	2,58 %
$x = 3 \times \text{Ecart-type}$	0,71 %	0,85 %
$x = 4 \times \text{Ecart-type}$	0,26 %	0,31 %

Tableau 1 : Résultats des statistiques descriptives sur le rendement journalier de l'indice

L'analyse statistique des données nous montre qu'une masse de probabilité importante se situe à proximité d'un rendement faible de l'ordre de plus ou moins un pourcent :

$$P(r_t \in [-\sigma; +\sigma]) \cong 80 \%$$

Ce phénomène apparaît la plupart du temps sur les marchés financiers car durant les périodes stables, la valeur de l'actif évolue très peu. De plus, les probabilités de hausses et de baisses semblent relativement symétriques.

Cependant, l'actif peut connaître également des périodes de variations brusques pouvant provoquer ainsi des sauts de valeur, et l'apparition de ces scénarios peut alourdir la queue de distribution du rendement de l'actif par rapport à une distribution gaussienne. Parmi ces périodes, nous pouvons par exemple observer sur la courbe historique des perturbations pour les années début 2007 - fin 2009 avec la crise des subprimes.

Tous les éléments issus de ces statistiques sont bien à prendre en compte dans nos choix de modèles et doivent nous permettre de nous focaliser sur certains modèles stochastiques en particulier.

Section 2 : Choix des modèles stochastiques

La littérature actuelle propose plusieurs modèles stochastiques pour projeter le cours d'un actif financier. On trouve en général le modèle de Black & Scholes, qui sous certaines hypothèses restrictives reste le modèle le plus utilisé en pratique. On trouve également des modèles à sauts, comme le modèle de Merton [30] ou encore le modèle de Kou [31] qui sont adaptés à des cours d'actif présentant des discontinuités de prix. Enfin, on trouve aussi des modèles à volatilité stochastique, comme celui proposé par Hull & White [16] ou des séries temporelles comme le processus Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH), qui permettent d'éliminer l'hypothèse de constance de la volatilité utilisée dans le modèle de Black & Scholes.

Le choix de nos modèles s'est fait suivant les observations faites sur l'étude statistique des données dans la section précédente.

Nous avons décidé de nous intéresser seulement à trois modèles stochastiques : le modèle de Black & Scholes à cause du phénomène de symétrie observé dans les rendements, le modèle à saut de Merton à cause des discontinuités constatées à certains endroits, et le modèle à volatilité stochastique GARCH car la volatilité de l'actif est loin d'être jugée constante sur certaines périodes.

3.2.1. Le modèle de Black & Scholes

Le modèle de Black & Scholes pour l'évaluation du cours d'un actif financier a été proposé par Fischer Black, Myron Scholes et Robert C. Merton dans les années 70. Ce modèle reste encore actuellement un des modèles les plus utilisés par les professionnels de la finance du fait de son caractère simple et pratique.

Les statistiques descriptives que nous avons réalisées dans la section 1 de ce chapitre 3 mènent à penser que l'utilisation d'un tel modèle peut s'avérer adéquate pour ce type de données. Ce choix est confirmé surtout par l'observation d'un fort phénomène de symétrie entre les probabilités de hausses et de baisses du rendement journalier de l'actif.

3.2.1.a. Présentation du modèle

Sous la contrainte de continuité du cours de l'actif, ce modèle se base sur l'hypothèse principale que le cours d'un actif financier suit un mouvement brownien géométrique et se caractérise par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (a)$$

avec :

- $S(t)$ le prix de l'actif à la date t .
- Les paramètres constants μ et σ correspondants respectivement à la tendance et la volatilité.
- $W(t)$ un mouvement brownien standard de loi Normale $\mathcal{N}(0, t)$.

La solution de l'équation (a) est obtenue en utilisant le lemme d'Itô. Les conditions d'application de ce lemme sont rappelées en Annexe 1. Sous la condition initiale que S_0 correspond au prix de l'actif à la date $t = 0$, la solution de cette équation s'écrit :

$$S(t) = S_0 \times \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right]$$

Comme $W(t)$ est de loi Normale $\mathcal{N}(0, t)$, on en déduit facilement que le cours de l'actif $S(t)$ suit une loi Log-Normale $\mathcal{LN} \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma^2 t \right)$.

3.2.1.b. Estimation des paramètres du modèle

L'estimation des paramètres μ et σ s'effectue à partir de l'historique du cours de l'actif. Pour cela, nous calculons le rendement logarithmique (rendement journalier dans notre cas) :

$$R(t) = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \sigma W(1)$$

Comme $W(1)$ suit une loi centrée réduite alors $R(t)$ suit une loi Normale $\mathcal{N} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2 \right)$

Le choix de la méthode d'estimation des paramètres s'est fait sur la méthode des moments en utilisant les estimateurs du maximum de vraisemblance d'une loi Normale. On obtient donc :

Soit T le nombre total de données disponibles.

- Moyenne empirique de l'historique :

$$\hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} = \bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R(t)$$

- Variance empirique de l'historique

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R(t) - \bar{R})^2$$

3.2.1.c. Limite du modèle

Le modèle de BLACK & SCHOLES possède certaines limites.

La première limite concerne la constance des paramètres μ et σ . Durant des périodes dites « calmes » cette hypothèse paraît suffisante, cependant sur des périodes de fortes variations cette hypothèse se retrouve assez vite inadaptée.

La seconde limite concerne la normalité des rendements logarithmiques. En effet, la loi Normale est une loi à queue de distribution faible et ne permet pas de modéliser justement l'apparition d'évènements extrêmes.

La troisième limite concerne la continuité du cours de l'actif. En période d'emballement des marchés financiers, des sauts du cours de l'actif sont en général observables.

3.2.2. Le modèle à saut de Merton

Des études empiriques proposées par Mandelbrot et Fama montrent que les hypothèses du modèle de Black & Scholes sont trop restrictives pour certains actifs, et confirment que la volatilité n'est pas constante et que les queues de distribution du prix de l'actif sont plus épaisses que celle d'une loi Log-Normale. Cet alourdissement de la queue de la distribution est en général dû à des sauts (chocs à la hausse ou à la baisse) qui peuvent intervenir exceptionnellement sur le cours de l'actif suite à des événements rares.

Le graphique suivant montre un exemple de saut sur notre historique journalier de l'indice GDDLUS le 10 octobre 2008, et qui correspond à l'instabilité des marchés suite à l'annonce de la faillite de la banque américaine Lehman Brother quelques jours auparavant.

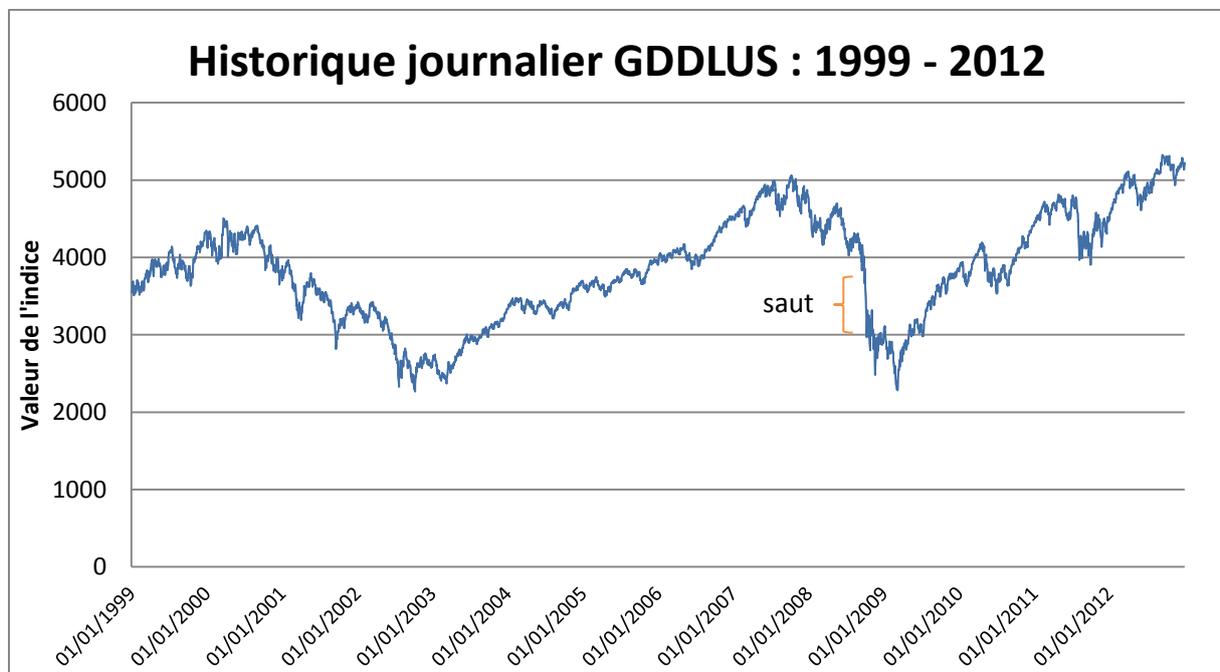


Figure 5 : Exemple d'un saut dans le cours historique

3.2.2.a. Présentation du modèle

Frédéric Planchet et Pierre Thérond présentent dans leur article [11] une solution proposée par Merton [30] afin de contourner les limites présentées par le modèle de Black & Scholes. Cette solution permet d'améliorer le modèle de Black & Scholes notamment en intégrant dans l'équation du mouvement brownien géométrique un processus de saut type Poisson. Cet ajout permettra de prendre en compte les sauts qui peuvent apparaître dans le cours de l'actif.

Les hypothèses du modèle sont les suivantes :

- Le prix S_t de l'actif présente des sauts log-normaux à des instants aléatoires qui sont les instants de saut d'un processus de Poisson.
- Entre deux instants de saut on suppose que le cours de l'actif respecte le modèle de Black & Scholes et par conséquent ses hypothèses.

Après quelques calculs, il a été démontré que le prix de l'actif a pour expression finale :

$$S(t) = S_0 \times \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) + \sum_{k=1}^{N(t)} U(k) \right]$$

avec :

- $S(t)$ le prix à l'instant t de l'actif et S_0 son prix initial.
- N le processus de Poisson d'intensité λ qui modélise le nombre de saut.
- U la suite de variables aléatoires i.i.d de loi normale $\mathcal{N}(0, \Omega^2)$ qui modélise les amplitudes des sauts.
- W le mouvement brownien standard de loi normale $\mathcal{N}(0, t)$.
- W, N et U sont mutuellement indépendants.

L'utilisation de la loi normale $\mathcal{N}(0, \Omega^2)$ permet de modéliser de façon symétrique aussi bien une hausse qu'une baisse instantanée de l'indice avec même probabilité.

Ce modèle peut paraître plus complexe à mettre en place car le nombre de paramètres à estimer a doublé par rapport au modèle précédent et donc, le risque d'erreur sur le calibrage peut augmenter. Cependant, lorsque le cours de l'actif présente certains sauts, comme c'est le cas dans nos données, il se trouve être une meilleure alternative pour évaluer les valeurs futures d'un actif.

3.2.1.b. Estimation des paramètres du modèle

Pour l'estimation des quatre paramètres du modèle μ, σ^2, λ et Ω^2 nous avons utilisé la méthode des moments. Le choix s'est porté sur cette méthode car l'objet principal de notre étude est de se concentrer sur le risque de spécification et non le risque d'estimation. C'est la raison pour laquelle nous n'avons pas utilisé la méthode de maximum de vraisemblance pour estimer également la valeur des paramètres.

En reprenant l'article cité [11], l'expression de la densité du rendement du modèle s'écrit de la manière suivante :

$$f(x) = \frac{\exp(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda^n}{n! \sqrt{\sigma^2 + n\Omega^2}} \exp\left(-\frac{\left(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2(\sigma^2 + n\Omega^2)}\right) \right]$$

Grâce à la densité, on peut facilement calculer les moments centrés de la distribution. Les moments centrés d'ordre impair étant nuls (à l'exception du moment d'ordre un), le calcul de la moyenne et des trois premiers moments d'ordre pair vont nous permettre d'obtenir un système d'équations non linéaire à quatre équations et quatre inconnues.

Nous avons effectué les calculs de ces quatre moments et la démonstration de nos calculs sont présentés en Annexe 2. Nous avons obtenu le système d'équation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R(t) = \mu - \frac{\sigma^2}{2} \\ m_2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R(t) - \bar{R})^2 = \sigma^2 + \lambda\Omega^2 \\ m_4 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R(t) - \bar{R})^4 = 3[\sigma^4 + 2\lambda\sigma^2\Omega^2 + (\lambda^2 + \lambda)\Omega^4] \\ m_6 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R(t) - \bar{R})^6 = 15[\sigma^6 + 3\lambda\sigma^4\Omega^2 + 3(\lambda^2 + \lambda)\sigma^2\Omega^4 + \Omega^6(\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda)] \end{array} \right.$$

Pour la résolution d'un tel système, il a fallu construire les fonctions F_1, F_2, F_4 et F_6 qui correspondent à la différence au carré du moment centré (calculable d'après les données) et les coefficients à estimer.

$$\text{Par exemple : } F_1 = \left(m_1 - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)^2$$

Enfin la valeur finale des coefficients est celle qui va minimiser la fonction : $H = F_1 + F_2 + F_4 + F_6$ dont le minimum attendu est bien évidemment 0.

3.2.2.c. Limite du modèle

Le modèle de Merton à sauts possède également certaines limites.

La première limite concerne le calibrage de l'amplitude des sauts par une loi gaussienne. Une ouverture possible serait de considérer d'autres lois mais la densité du rendement peut être plus complexe à calculer dans ce cas.

La seconde limite concerne la résolution du système d'équation non linéaire. La résolution d'un tel système nécessite le plus souvent l'utilisation d'algorithmes numériques.

3.2.3. Le modèle à volatilité stochastique GARCH

Les deux modèles précédents reposent sur une hypothèse forte c'est-à-dire la constance dans le temps de la volatilité (dans le cas du Merton à saut la volatilité est légèrement perturbée). Cependant, on peut souvent constater en pratique que la volatilité d'un jour influe sur celle des jours suivants comme par exemple en période de perturbation des marchés financiers, due à une crise.

Le graphique ci-dessous présente l'autocorélogramme des rendements journaliers aux carrés de l'actif et confirme bien l'existence d'une telle dépendance.

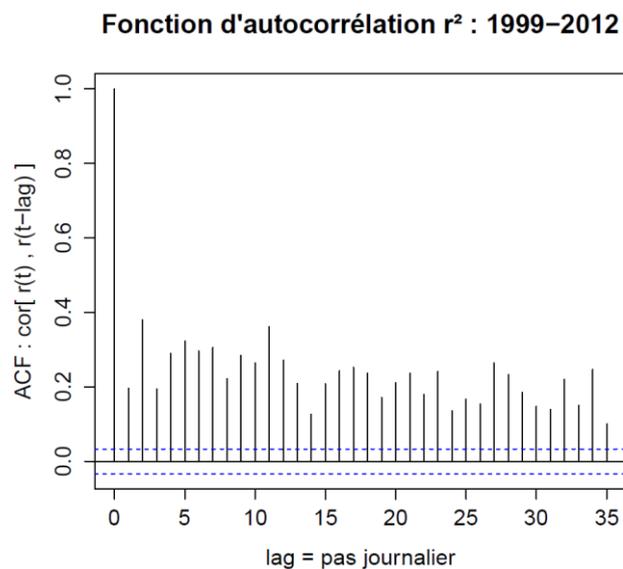


Figure 6 : Autocorrélation des rendements aux carrés de l'actif

Tim Bollerslev a proposé dans son article [36] un modèle temporel qui permet de prendre en compte cette corrélation. Ce modèle s'appelle Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, autrement dit le modèle GARCH. Ce modèle permet de modéliser la variance conditionnelle de l'actif et de capter plus précisément la volatilité de l'actif considéré.

3.2.3.a. Présentation du modèle

Le processus GARCH (p, q) est un processus à mémoire « courte » qui permet de prendre en compte les informations récemment observées pour prédire le futur. Il se définit de la manière suivante :

(r_t) est un processus GARCH (p, q) s'il vérifie :

$$\begin{cases} r_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{cases}$$

$$\text{Contrainte de stationnarité : } \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$$

avec :

- ω est le coefficient de volatilité à long terme issu de l'équation de variance suivante : $\omega = \sigma^2(1 - \alpha - \beta)$.
- η_t est une suite de variables aléatoires i.i.d tel que $E(\eta_t) = 0$ et $E(\eta_t^2) = 1$.
- $\alpha_i > 0$ sont les coefficients d'auto-régression.
- $\beta_j > 0$ sont les coefficients de variance.

Concernant la loi des variables aléatoires η_t , le choix s'est porté sur celui d'une loi normale centrée réduite pour rester dans un cadre proche des deux autres modèles.

Le modèle le plus simple et le plus utilisé en général est le GARCH(1,1) car dans la pratique il s'avère la plupart du temps suffisant, et c'est celui que nous utiliserons pour nos données. Ce choix a été appuyé par l'étude, présentée en Annexe 3, que nous avons réalisée préalablement et qui consistait à calibrer différents GARCH (p, q) avec $p, q \in \{1, 2, 3\}^2$ afin de les comparer et de choisir celui qui obtenait la meilleure log-vraisemblance selon le critère AIC⁵. Les log-vraisemblances étaient très proches entre les différents modèles GARCH et les coefficients les plus significatifs étaient ceux pour p et q égaux à 1, le choix de l'utilisation d'un modèle GARCH (1,1) paraissait donc adéquat.

⁵ AIC : Akaike Information Criterion.

3.2.3.b. Calibrage des paramètres du modèle

Pour l'estimation des trois paramètres ω , α et β du modèle GARCH(1,1) nous avons utilisé la fonction *garchFit* du package **fGarch** fourni par le logiciel R. Cette fonction fournit également la p-valeur de nos coefficients et permet d'estimer leur niveau de significativité. Le test réalisé sur les coefficients est le test de Student.

La fonction *garchFit* nécessite comme paramètres d'entrée l'ordre des paramètres p et q du GARCH (égaux à 1 ici pour notre modèle) ainsi que les données sur lesquelles l'estimation des paramètres doit être réalisée (ici les rendements de l'indice).

L'estimation des paramètres est réalisée par la fonction sur la base du critère de maximum de vraisemblance.

3.2.3.c. Limite du modèle

Le modèle GARCH(1,1) présente lui aussi certaines limites.

La première limite concerne le calibrage des paramètres du modèle. Ce modèle nécessite davantage de données que les deux autres modèles pour une estimation précise de ces paramètres.

La seconde limite concerne le terme aléatoire η_t . Le modèle fait l'hypothèse que ce terme a un effet symétrique sur la volatilité et donc qu'une information positive ou négative peut influencer de la même manière sur le cours de l'indice.

L'ensemble des modèles présentés ont été implémentés sous le logiciel R.

Chapitre 4 : Validation des modèles et application

Dans ce chapitre, nous allons tester les trois modèles sur notre historique de données. Le but est de sélectionner un des modèles que l'on considère comme le modèle de référence car statistiquement il est le plus adéquat pour nos données. Nous comparerons ensuite l'erreur commise sur la VaR et la TVaR lors d'un mauvais choix de modèle pour la projection à un an de l'actif pour l'année 2013.

Section 1 : Vérification des hypothèses des modèles et test du Probability Integral Transform

Pour le choix de notre modèle de référence, nous nous sommes basés sur divers critères statistiques :

- Vérification des hypothèses des modèles
- Test du Probability Integral Transform (PIT)

4.1.1. Vérification préalables des hypothèses

4.1.1.a. Le modèle de Black & Scholes

Nous avons testé la normalité du rendement de notre actif sur la période 1999-2012 car le modèle fait l'hypothèse que le cours de l'actif suit un mouvement brownien géométrique. Pour tester cette hypothèse, nous avons réalisé le test de normalité de Shapiro-Wilk sous le logiciel R et l'hypothèse H_0 c'est-à-dire de normalité de l'échantillon a été rejetée au seuil 0,05 (p-valeur < 2,2 E-16).

Le graphique suivant représentant les quantiles de la distribution de nos rendements par rapport aux quantiles d'une loi normale confirme la conclusion de ce test.

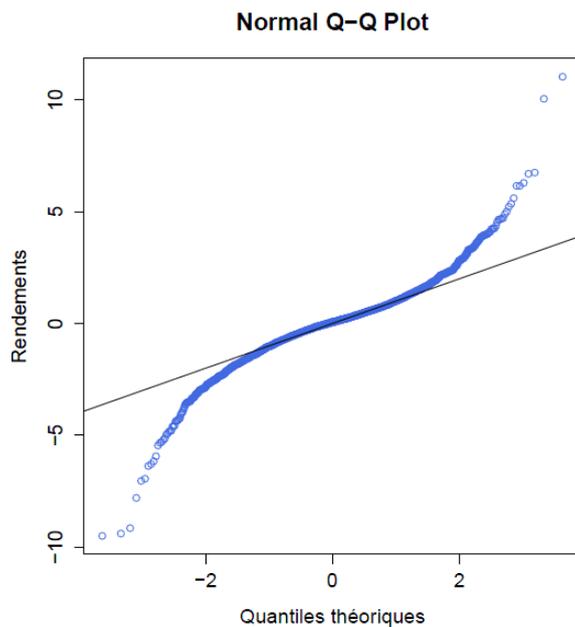


Figure 7 : Test de normalité des rendements

Le tableau ci-dessous résume les valeurs des paramètres estimés du modèle de Black & Scholes en augmentant progressivement l'historique journalier de données d'un an. L'augmentation progressive de l'historique permet d'observer le comportement des deux paramètres de ce modèle.

Historique disponible	μ	σ^2
1999-2001	4,64E-06	1,702E-04
1999-2002	-2,218E-04	1,967E-04
1999-2003	4,051E-05	1,807E-04
1999-2004	1,053E-04	1,586E-04
1999-2005	1,248E-04	1,418E-04
1999-2006	1,825E-04	1,290E-04
1999-2007	1,940E-04	1,260E-04
1999-2008	2,300E-05	1,804E-04
1999-2009	1,213E-04	1,906E-04
1999-2010	1,641E-04	1,855E-04
1999-2011	1,658E-04	1,879E-04
1999-2012	1,985E-04	1,790E-04

Tableau 2 : Evolution des paramètres du modèle de Black & Scholes

Même si l'hypothèse de normalité n'est pas vérifiée, nous garderons le modèle de Black & Scholes pour la quantification du risque de modèle. Les valeurs des paramètres obtenues ci-dessus seront utilisées pour le test du *Probability Integral Transform* réalisé au paragraphe 4.1.2. .

4.1.1.b. Le modèle de Merton à saut

Le tableau ci-dessous résume les valeurs des paramètres estimés du modèle de Merton à saut en augmentant progressivement l'historique journalier de données d'un an afin d'observer leur comportement.

Historique disponible	μ	σ^2	λ	Ω^2
1999-2001	-3,934E-06	1,530E-04	1,869E-02	9,053E-04
1999-2002	2,340E-04	1,657E-04	8,056E-02	3,821E-04
1999-2003	3,205E-05	1,638E-04	1,971E-02	8,516E-04
1999-2004	1,025E-04	1,531E-04	1,718E-03	3,119E-03
1999-2005	1,106E-04	1,135E-04	2,481E-02	1,141E-03
1999-2006	1,734E-04	1,109E-04	1,356E-02	1,350E-03
1999-2007	3,915E-05	1,826E-04	8,531E-02	3,607E-03
1999-2008	2,183E-05	1,775E-04	8,798E-05	3,240E-02
1999-2009	1,177E-04	1,835E-04	5,437E-04	1,288E-02
1999-2010	1,517E-04	1,607E-04	1,738E-02	1,423E-03
1999-2011	1,845E-04	2,252E-04	1,635E-02	2,287E-03
1999-2012	1,815E-04	1,446E-04	1,467E-02	2,354E-03

Tableau 3 : Evolution des paramètres du modèle de Merton à saut

Le critère de minimisation de la fonction $F(x)$ présentée dans la section 2 du chapitre 3 paragraphe 3.2.1.c semble avoir bien fonctionné, en effet :

- Lorsque l'on regarde les valeurs des paramètres présentées dans le tableau ci-dessus, aucune des valeurs numériques de σ^2 , λ et Ω^2 n'est négative.
- Pour chacune des minimisations, la valeur obtenue pour le minimum local de la fonction $F(x)$ était de l'ordre de E-14 à E-16, c'est-à-dire assimilable à la valeur nulle.
- Un test facile pour vérifier la cohérence du critère de minimisation utilisé consiste simplement à fixer les valeurs de λ et Ω^2 comme nulles, et de vérifier les valeurs obtenues par ce critère pour μ et σ^2 . Après vérification, les valeurs obtenues sont identiques à celles du modèle de Black & Scholes, ce qui est bien évidemment le résultat attendu.

Les valeurs de Ω^2 obtenues pour chaque historique sont plus élevées que celles de σ^2 , ce qui signifie que le modèle prend bien en compte à certaines dates des amplitudes de sauts supérieures à celles observables durant des périodes de marché dites « calmes ». En effet, cette différence s'explique par le fait que Ω mesure l'amplitude d'un saut lorsqu'il survient, alors que σ mesure l'amplitude des variations dues au brownien sur une durée d'une unité de temps.

Concernant le paramètre λ du processus de Poisson homogène, nous pouvons constater qu'il n'est pas très élevé. En effet, les statistiques descriptives nous avaient montré que les probabilités de sauts étaient assez faibles.

Nous utiliserons le modèle de Merton à saut pour la quantification du risque de modèle. Les valeurs des paramètres obtenues précédemment seront utilisées pour le test du *Probability Integral Transform* réalisé au paragraphe 4.1.2. .

4.1.1.c. Le modèle GARCH

Le tableau ci-dessous résume les valeurs des paramètres estimés du modèle GARCH en augmentant progressivement l'historique journalier de données d'un an afin d'observer leur comportement.

Historique disponible	ω		α		β	
	Estimation	p-valeur	Estimation	p-valeur	Estimation	p-valeur
1999-2001	1,204E-05	7,120E-02	8,287E-02	4,200E-03	8,471E-01	< 2E-16
1999-2002	8,773E-06	1,170E-02	8,612E-02	3,430E-05	8,689E-01	< 2E-16
1999-2003	4,244E-06	1,770E-02	7,444E-02	1,040E-06	9,021E-01	< 2E-16
1999-2004	1,130E-06	7,230E-02	6,340E-02	7,190E-08	9,301E-01	< 2E-16
1999-2005	6,110E-07	8,540E-02	6,199E-02	8,520E-09	9,345E-01	< 2E-16
1999-2006	4,844E-07	5,090E-02	5,843E-02	1,960E-10	9,383E-01	< 2E-16
1999-2007	9,089E-07	1,270E-03	5,939E-02	1,290E-11	9,335E-01	< 2E-16
1999-2008	1,024E-06	8,050E-04	7,158E-02	2,660E-15	9,232E-01	< 2E-16
1999-2009	1,021E-06	1,670E-04	6,906E-02	< 2E-16	9,249E-01	< 2E-16
1999-2010	1,186E-06	5,620E-05	7,472E-02	< 2E-16	9,182E-01	< 2E-16
1999-2011	1,368E-06	1,300E-05	8,011E-02	< 2E-16	9,126E-01	< 2E-16
1999-2012	1,506E-06	2,480E-06	8,192E-02	< 2E-16	9,126E-01	< 2E-16

Tableau 4 : Evolution des paramètres du modèle GARCH

On peut constater dans un premier temps que la plupart des p-valeurs des paramètres du modèle sont inférieures à 0,05 et donc que l'hypothèse de nullité des paramètres peut être rejetée d'après le test de Student.

Dans un second temps, l'hypothèse de stationnarité est vérifiée car $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ dans tous les cas.

Enfin le logiciel R nous permet, grâce à la fonction **predict()**, de tester la volatilité prédite du modèle sur l'historique de données. On peut constater que le modèle capte plutôt bien la volatilité σ_t du rendement comme le montre la représentation graphique suivante.

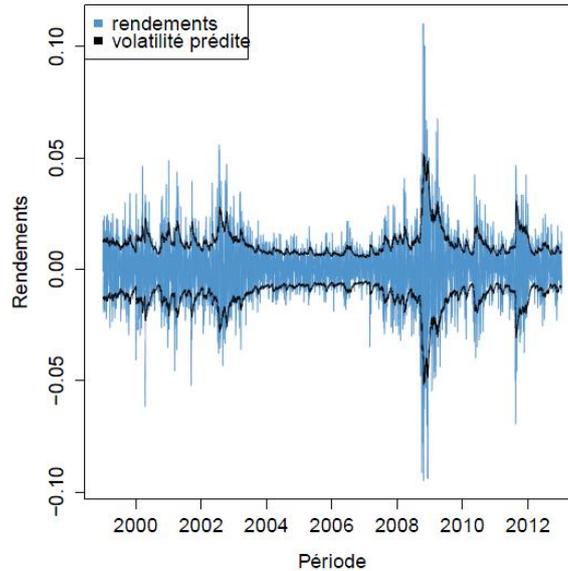


Figure 8 : Prédiction de la volatilité passée

Nous utiliserons le modèle GARCH pour la quantification du risque de modèle. Les valeurs des paramètres précédemment ci-dessus seront utilisées pour le test du *Probability Integral Transform* réalisé au paragraphe 4.1.2. .

4.1.2. Test du *Probability Integral Transform*

La littérature propose plusieurs tests statistiques permettant de faire un backtesting des modèles en utilisant l'historique de données. Parmi ces tests, on trouve le Probability Integral Transform (ou PIT) qui a été proposé [9] par Diebold en 1998. En résumé, le principe de ce test est le suivant⁶ :

A l'instant $t - 1$, nous obtenons grâce à l'échantillon de valeurs historiques la fonction de répartition empirique conditionnelle à cet échantillon $\hat{G}_{t-1}(x)$ pour la prévision des valeurs futures. Cette fonction $\hat{G}_{t-1}(x)$ est utilisée dans le test du PIT tel que : $U_i = \hat{G}_{t-1}(x_i)$ où les x_i correspondent aux valeurs futures observées.

Par définition, les probabilités U_i sont comprises entre 0 et 1, et seront utilisées dans ce test. On construit ainsi les probabilités U_i de manière récurrente en passant ensuite à l'instant t , et ainsi de suite.

Diebold affirme que si les variables U_i sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) de loi uniforme $U(0,1)$ alors le modèle anticipe bien la prévision des valeurs futures.

Nous allons donc présenter pour chaque modèle la construction des réalisations uniformes nécessaires à l'élaboration du test de Diebold.

⁶ Pour plus de détail se référer à Diebold [9] et Blum [26]

Le modèle de Black & Scholes

Dans ce modèle, le rendement logarithmique journalier de l'actif doit suivre une loi normale de moyenne égale à $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ et de variance égale à σ^2 .

- **Etape 1** : Estimation de $\mu^{(k)}$ et $\sigma^{(k)}$ grâce à l'historique de 1999 à 1999 + (k + 1)
- **Etape 2** : Calcul des rendements logarithmiques $r_i^{(k)}, i = 1, \dots, 251^7$, de l'année 1999+(k+2)
$$r_i^{(k)} - (\mu^{(k)} - \sigma^{(k)^2} / 2)$$
- **Etape 3** : Construction de : $x_i^{(k)} = \frac{r_i^{(k)} - (\mu^{(k)} - \sigma^{(k)^2} / 2)}{\sigma^{(k)}}$
- **Etape 4** : Construction de la variable uniforme $U^{(k)} = \{u_1^{(k)}, \dots, u_{251}^{(k)}\}$ où $u_i^{(k)} = \Phi(x_i^{(k)})$ avec Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

On répète l'ensemble des étapes pour $k \in \{1, \dots, 12\}$.

Le modèle de Merton à saut

- **Etape 1** : Estimation de $\mu^{(k)}, \sigma^{(k)}, \lambda^{(k)}$ et $\Omega^{(k)}$ grâce à l'historique de 1999 à 1999 + (k + 1)
- **Etape 2** : Calcul des rendements logarithmiques $r_i^{(k)}$ de l'année 1999 + (k + 2)
- **Etape 3** : Construction de la variable uniforme $U^{(k)} = \{u_1^{(k)}, \dots, u_{251}^{(k)}\}$ où $u_i^{(k)} = F(r_i^{(k)})$ avec F la fonction de répartition de la loi du rendement logarithmique journalier du modèle de Merton à saut et Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :

$$F(r_i^{(k)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi \left[\frac{r_i^{(k)} - (\mu^{(k)} - \sigma^{(k)^2} / 2)}{\sqrt{n \Omega^{(k)^2} + \sigma^{(k)^2}} \right] e^{-\lambda^{(k)}} \frac{\lambda^{(k)n}}{n!}$$

On répète l'ensemble des étapes pour $k \in \{1, \dots, 12\}$.

⁷ En général, chaque année possède 252 jours, ce qui nous permet d'obtenir 251 rendements logarithmiques

Le modèle GARCH

- **Etape 1** : Estimation de $\omega^{(k)}, \alpha^{(k)}, \beta^{(k)}$ et grâce à l'historique de 1999 à $1999 + (k + 1)$
- **Etape 2** : Calcul des rendements logarithmiques $r_i^{(k)}$ de l'année $1999 + (k + 2)$ et de la volatilité conditionnelle $\sigma_i^{(k)}$ à partir de l'équation de récurrence suivante :

$$\sigma_i^{(k)} = \sqrt{\omega^{(k)} + \alpha^{(k)} r_{i-1}^{2(k)} + \beta^{(k)} \sigma_{i-1}^{2(k)}}$$

Il faut réaliser un calcul pour obtenir le paramètre initial $\sigma_1^{(k)}$ qui dépend de $\sigma_0^{2(k)}$ et de $r_0^{2(k)}$.

Pour le paramètre $r_0^{2(k)}$, nous avons pris le dernier rendement connu $r_{251}^{2(k-1)}$.

Pour le paramètre $\sigma_0^{2(k)}$ en développant l'équation de récurrence, nous pouvons exprimer ce paramètre grâce aux rendements $r_i^{(k-1)}$:

$$\sigma_0^{2(k)} = \omega^{(k)} \frac{1 - \beta^{(k) 252}}{1 - \beta^{(k)}} + \alpha^{(k)} \sum_{i=1}^{251} r_{251-i}^{2(k-1)} \beta^{(k) i-1} + \beta^{(k) 252} \sigma_0^{2(k-1)}$$

- **Etape 3** : Construction de : $x_i^{(k)} = \frac{r_i^{(k)}}{\sigma_i^{(k)}}$
- **Etape 4** : Construction de la variable uniforme $U^{(k)} = \{u_1^{(k)}, \dots, u_{251}^{(k)}\}$ où $u_i^{(k)} = \Phi(x_i^{(k)})$ avec Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

On répète l'ensemble des étapes pour $k \in \{1, \dots, 12\}$.

Pour chacun des modèles on construit la variable aléatoire $U = \{U^{(1)}, \dots, U^{(12)}\}$ qui regroupe l'ensemble des réalisations uniformes.

Nous allons maintenant pouvoir vérifier les hypothèses d'uniformité et d'indépendance pour la variable aléatoire U obtenue pour chaque modèle étudié.

Pour ce faire, deux tests doivent être réalisés :

- Uniformité : Pour tester l'uniformité de la variable U nous avons représenté la fonction de répartition de cette variable et l'avons comparée à la fonction de répartition d'une loi uniforme $F(x) = x$, ainsi que l'histogramme de U par rapport à cette loi.
- Indépendance : Pour tester l'indépendance, nous avons représenté l'autocorrélogramme de $(U - \bar{U}), (U - \bar{U})^2, (U - \bar{U})^3$ et $(U - \bar{U})^4$.

Nous allons conclure sur la validité de de ses hypothèses à partir des graphiques suivants.

Pour chaque modèle, nous construisons les trois figures ci-dessous.

- Un histogramme de la loi uniforme empirique obtenue ainsi que celui de la loi uniforme théorique attendue en rouge.

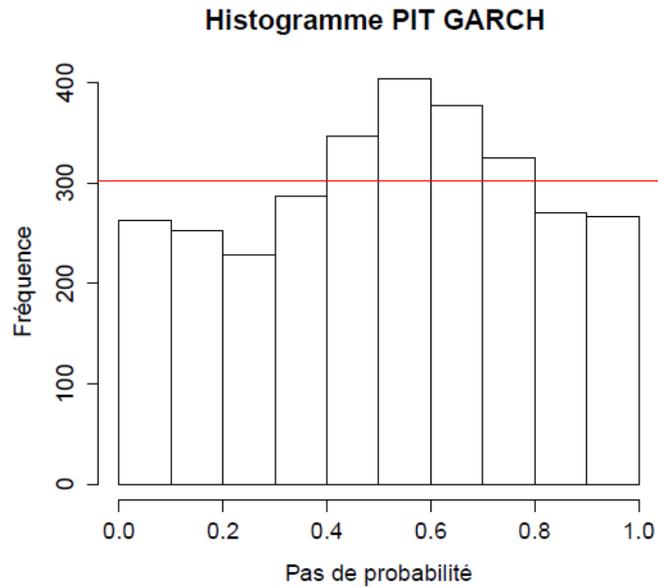


Figure 9 : Histogramme loi uniforme – modèle GARCH

- La fonction de répartition de cette loi uniforme ainsi que celle théorique.

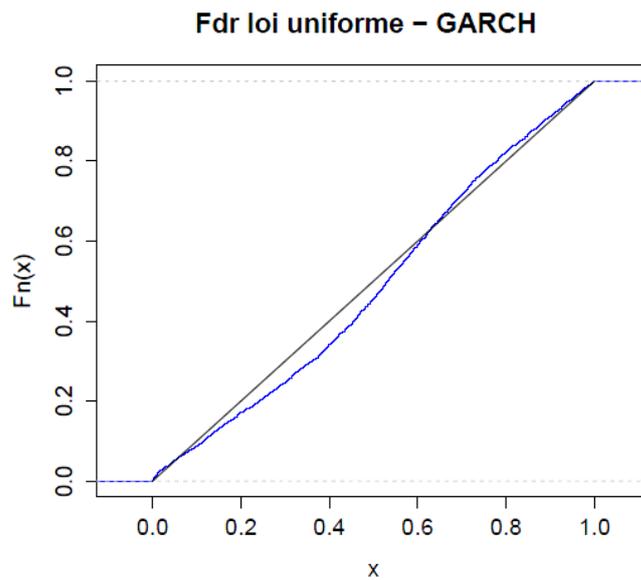


Figure 10 : Fonction de répartition loi uniforme – modèle GARCH

- Les différents autocorrélogrammes pour vérifier l'indépendance des réalisations.

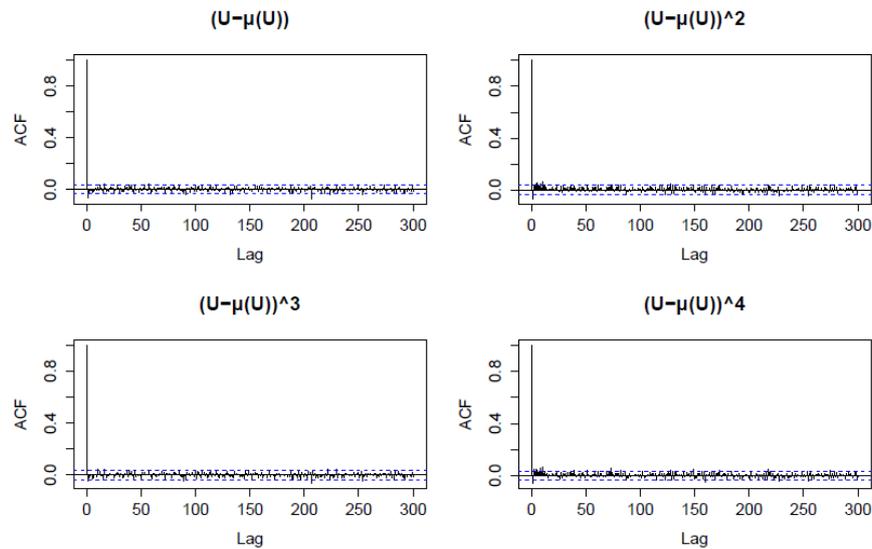


Figure 11 : Autocorrélogrammes loi uniforme – modèle GARCH

Les résultats du test pour les trois modèles sont présentés en annexe 3 avec les trois figures correspondantes.

Pour la première figure, nous pouvons constater que les histogrammes obtenus pour les trois modèles ne sont pas parfaitement égaux à celui d'une loi uniforme. L'homogénéité des fréquences sur l'histogramme du modèle GARCH est nettement plus visible que les modèles de Black & Scholes et Merton à saut.

Pour la seconde figure, les constatations sont les mêmes avec le modèle GARCH qui semble le plus proche au niveau de la fonction de répartition de celle d'une loi uniforme que les deux autres modèles.

Pour la troisième figure, nous pouvons observer que la dépendance est assez élevée pour les modèles de Black & Scholes et Merton à saut. En revanche, le modèle GARCH possède des réalisations avec une indépendance nettement visible d'après les quatre autocorrélogrammes.

Pour conclure sur ce test, nous pouvons voir que le modèle GARCH semble être le mieux adapté pour projeter les rendements de l'actif car les résultats de ce test sont plus adéquats pour ce modèle, contrairement aux deux autres.

Section 2 : Application

Nous avons montré à travers la vérification des hypothèses des modèles et le test statistique du PIT que le modèle GARCH était le modèle le plus adéquat pour nos données et nous le choisissons donc comme le modèle de référence de cette première étude. Nous allons maintenant le comparer aux deux autres modèles pour la projection de l'actif pour l'année 2013.

Nous avons pris en compte l'historique de données de 1999 à 2012 pour estimer les paramètres des trois modèles pour l'année 2013. Les tableaux ci-dessous rappellent les valeurs obtenues pour les paramètres de chaque modèle.

Black & Scholes	μ	σ^2
Paramètres	1,985E-04	1,790E-04

Merton à saut	μ	σ^2	λ	Ω^2
Paramètres	1,815E-04	1,446E-04	1,46E-02	2,354E-03

GARCH	ω	α	β
Paramètres	1,506E-06	8,192E-02	9,089E-01

Tableau 5 : Paramètres de chaque modèle pour la projection de l'actif pour l'année 2013

Nous avons ensuite pour chaque modèle réalisé 20 000 projections de l'actif. Pour chaque projection, nous sommes partis de la valeur initiale de l'actif (dernière date connue en 2012) et avons simulé les rendements futurs pour aboutir à la valeur finale (dernière date de l'année 2013).

4.2.1. Intervalle de confiance

Pour chacun des trois modèles présentés nous avons construit un intervalle de confiance à partir des 20 000 projections pour voir si les projections anticipaient de manière raisonnable les valeurs futures de l'actif. Dans le cas favorable, les valeurs historiques journalières du cours de l'actif pour l'année 2013 sont contenues dans l'enveloppe formée par les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle de confiance.

Soit à instant t donné $X_t^i, i = (1, \dots, 20\ 000)$, les valeurs possibles du cours de l'actif. L'intervalle de confiance d'ordre $1 - \alpha$ correspondant est :

$$IC = ([X_t^{m \times \alpha}]; [X_t^{m \times (1 - \alpha)}]), \quad t = (1, \dots, 251^8)$$

avec $[X_t]$ correspondant à la distribution de valeurs triées par ordre croissant

⁸ 251 correspond au nombre de jours dans l'historique de l'année 2013

Les trois représentations graphiques ci-dessous montrent les résultats obtenus pour nos projections avec un intervalle de confiance de 95 %.

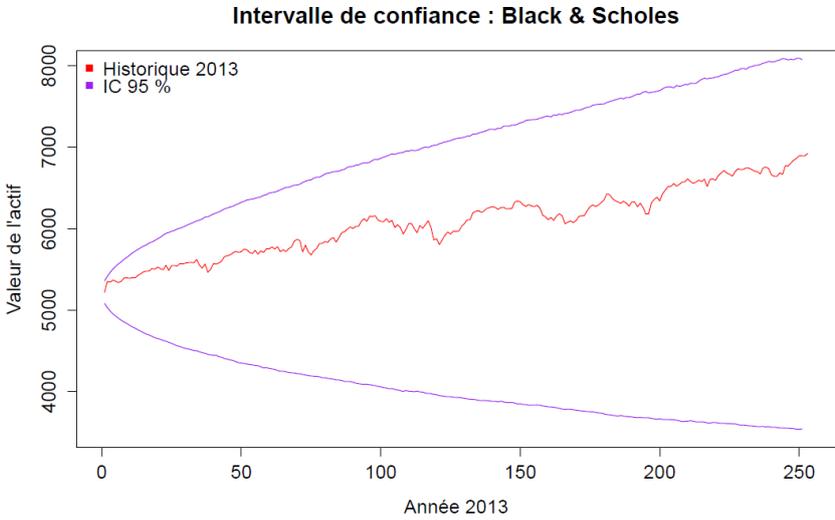


Figure 12 : Intervalle de confiance à 95 % du modèle Black & Scholes

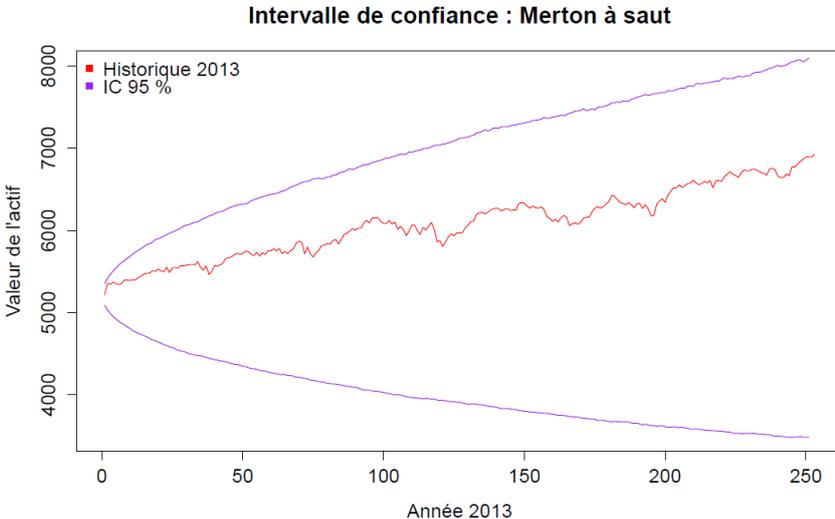


Figure 13 : Intervalle de confiance à 95 % du modèle Merton à saut

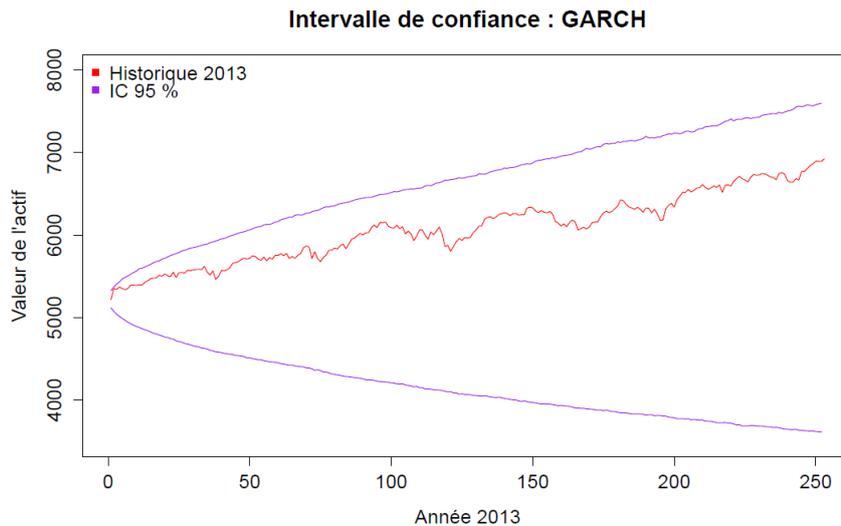


Figure 14 : Intervalle de confiance à 95 % du modèle GARCH

Lorsque nous observons ces représentations, nous pouvons constater que les intervalles de confiance des trois modèles contiennent bien les valeurs historiques journalières de l'actif pour l'année 2013.

De plus, les intervalles de confiance des modèles Black & Scholes et de Merton à saut sont très proches. Ceci peut s'expliquer par la faible présence de saut durant l'année 2013, qui a été bien anticipée par le modèle de Merton à saut.

En revanche, pour le modèle GARCH l'intervalle de confiance est un peu plus réduit.

4.2.2. Stabilité de la VaR 99,5 %

Le but des projections réalisées est d'obtenir une distribution de la valeur finale de l'actif pour l'année 2013. Les valeurs intéressantes de cette distribution étant la VaR 99,5% de cette distribution qui est représentative du calcul du SCR sous Solvabilité II et la TVaR 99 % qui est représentative du Swiss Solvency Test.

Afin d'obtenir des résultats cohérents dans notre quantification de risque de modèle, il faut être absolument certain que les VaR 99,5 % et TVaR 99 % de la valeur finale de chaque modèle seront respectivement plus ou moins les mêmes si nous les recalculons à partir d'un nouvel échantillon de 20 000 projections.

Nous avons donc procéder de la manière suivante pour tester cette cohérence :

- Simulation de 20 000 projections du cours de l'actif.
- Récupération de la distribution de la valeur finale de l'actif pour l'année 2013 et obtention de la VaR 99,5 % et de la TVaR 99 % de cette distribution.
- Répétition des deux étapes précédentes $n = 100$ fois dans le but d'obtenir une distribution de la VaR 99,5 % et une distribution de la TVaR 99 %.

Les tableaux ci-dessous résument les statistiques réalisées sur la distribution de la VaR 99,5 % et TVaR 99 % de chaque modèle.

Distribution de la VaR 99,5 %			
Modèle	Moyenne	Ecart-type	CoV
Black & Scholes	9260,87	70,16	0,76 %
Merton à saut	9246,39	62,94	0,68 %
GARCH	8980,69	100,01	1,11 %

Tableau 6 : Etude statistique de la distribution de la VaR 99,5 % obtenue pour chaque modèle

Distribution de la TVaR 99 %			
Modèle	Moyenne	Ecart-type	CoV
Black & Scholes	9454,18	71,77	0,76 %
Merton à saut	9466,80	58,93	0,62 %
GARCH	9549,38	242,56	2,54 %

Tableau 7 : Etude statistique de la distribution de la TVaR 99 % obtenue pour chaque modèle

Nous pouvons d’abord constater que la moyenne de la distribution est plus faible pour le modèle GARCH concernant la VaR 99,5 % et plus élevée concernant la TVaR 99%. Comme attendu, les deux autres modèles ont des moyennes très proches pour les deux mesures de risques.

Ensuite concernant le coefficient de variation (CoV⁹ : Coefficient of Variation) des trois distributions, ils sont relativement faibles pour les deux mesures de risque ce qui permet de constater une certaine stabilité. Cette stabilité est essentielle car elle va nous permettre de comparer rigoureusement les mesures de risque de ces trois modèles. Nous utiliserons donc la moyenne des distributions de ces trois modèles pour quantifier le risque de modèle.

4.2.3. Quantification du risque de modèle

Nous allons maintenant quantifier le risque de modèle sur la VaR 99,5 % et la TVaR 99 % en utilisant la méthode dite de « modèle de référence ». En vue des premières observations faites dans le paragraphe précédent, nous pouvons nous attendre à des résultats faibles de risque de modèle. De plus, nous nous intéresserons seulement à la valeur absolue du risque de modèle car l’utilisation de la valeur relative ne nous paraît pas pertinente à cause de la proximité des moyennes des distributions de la VaR 99,5 % et la TVaR 99 %, et du faible échantillon de méthodes utilisées (à notre disposition).

⁹ CoV : Coefficient of Variation correspondant au rapport de l’écart-type d’une distribution sur la moyenne de celle-ci.

Les tableaux ci-dessous donnent donc les résultats obtenus pour la valeur absolue du risque de modèle pour les deux mesures de risque, VaR 99,5 % et TVaR 99 % (les résultats de la valeur relative du risque de modèle sont mis à titre indicatif).

	VaR 99,5 %		
Modèle	GARCH	Black & Scholes	Merton à saut
i	0	1	2
AM_i	0	0,0312	0,0296
RM_i	0	1	0,9483

AM	0,0312
RM	1

Tableau 8 : Résultats mesure absolue du risque de modèle pour la VaR 99,5 %

	TVaR 99 %		
Modèle	GARCH	Black & Scholes	Merton à saut
i	0	1	2
AM_i	0	-0,1000	-0,0086
RM_i	0	-1	-0,8674

AM	0
RM	0

Tableau 9 : Résultats mesure absolue du risque de modèle pour TVaR 99 %

Nous pouvons constater que la valeur absolue du risque de modèle est proche de zéro pour la VaR 99,5 % et égale à zéro pour la TVaR 99 %. La prise en compte de risque de modèle, en complément de la VaR 99,5 % et la TVaR 99 % du modèle de référence, ne s'avère donc pas nécessaire pour cette année. Ceci s'explique aussi par la période relativement calme observée cette année.

Il sera donc intéressant pour le futur d'observer l'évolution des résultats de la valeur absolue du risque de modèle sur des périodes plus volatiles, si celle-ci se produisent dans les années à venir.

Cette première étude a présenté une première approche de quantification du risque de modèle sur un modèle d'actif en utilisant la méthode dite de « modèle de référence ».

Le choix d'un tel modèle doit s'appuyer sur l'étude préalable des données mises à la disposition des actuaires ainsi que sur la vérification des hypothèses des modèles envisagés. L'utilisation et l'implémentation d'un test statistique comme le test du PIT est un bon indicateur pour vérifier la pertinence des modèles par rapport à l'historique de données dans la cadre d'un modèle d'actif.

Les résultats obtenus dans cette première étude ont montré que le risque de modèle associé à la mesure absolue du risque de modèle pour l'année 2013, VaR 99,5 % et TVaR 99%, était proche de zéro. Cependant ces premiers résultats ne permettent absolument pas de considérer que le risque de modèle n'existe pas pour un modèle d'actif. En effet, cela dépend significativement des variations du cours de l'actif qui peuvent être calmes à certaines périodes et fortes à d'autres périodes. Il sera donc intéressant de mettre à jour ce type de quantification afin d'observer la présence ou non de risque de modèle pour le futur.

Une piste intéressante pour ce type d'étude serait d'étudier des actifs disposant d'un historique journalier beaucoup plus conséquent, prenant en compte plusieurs périodes de crises. Des calculs pourraient alors être effectués avant et après ses crises économiques afin de voir l'évolution des modèles, et permettre de quantifier le risque potentiel de modèle.

Nous allons effectuer une seconde étude en quantifiant le risque de modèle par rapport à un modèle de provisionnement non-vie.

Partie 3 :

**Etude sur un modèle de
provisionnement non-
vie**

En provisionnement non-vie, le montant des sinistres n'est pas connu à l'avance par l'assureur et le réassureur. Le paiement de ces sinistres peut intervenir plusieurs années après selon le type de contrat, la branche, le type de comptabilisation, ou encore le développement court ou long des branches étudiées. Il est essentiel pour toute compagnie d'assurance et de réassurance d'anticiper ces paiements futurs.

Nous allons dans cette partie appliquer l'approche de quantification du risque de modèle retenue dans la partie 1 sur un modèle de provisionnement non-vie. L'estimation de la charge ultime à provisionner se fait par le biais de différentes méthodes de provisionnement déterministes ou stochastiques reposant sur des hypothèses qui parfois ne sont pas vérifiées dans la réalité, et sont à l'origine d'une apparition potentielle de risque de modèle .

Dans le contexte de Solvabilité II, la nécessité de déterminer la VaR 99,5 % encourage les compagnies, lorsque cela est possible, à obtenir une distribution de cette charge ultime. La détermination de la distribution de cette charge peut se faire par le biais de différentes méthodes dont la méthode « bootstrap ». La méthode « bootstrap », appliquée aux divers modèles de provisionnement, permet d'obtenir cette distribution à partir d'un ré-échantillonnage avec remise.

Dans le chapitre 5, nous présenterons les données utilisées pour cette deuxième étude ainsi que les différents modèles utilisés pour la détermination de la charge ultime totale à provisionner pour les années à venir. Pour chaque modèle, nous décrirons également la méthode « bootstrap » propre à chacun d'entre eux afin d'obtenir une distribution de cette charge ultime.

Dans le chapitre 6, nous vérifierons les hypothèses de l'ensemble de ces modèles afin d'identifier le modèle de référence et nous quantifierons le risque de modèle associé à la VaR 99,5 % et la TVaR 99 % de la charge ultime par rapport à ce modèle de référence.

Chapitre 5 : Présentations des données et des modèles

Section 1 : Les données

Le portefeuille non-vie de SCOR est composé de plusieurs contrats qui diffèrent par leur nature et par les risques qu'ils couvrent. Les études de provisionnement se font au niveau des segments actuariels qui sont définis en fonction de plusieurs critères : lignes de business (Incendie, Automobile, Aviation, ...), type de réassurance (facultative ou traité), nature de la couverture (proportionnelle ou non-proportionnelle). Ces critères permettent d'assurer une masse statistique suffisante et une homogénéité des risques afin de pouvoir utiliser les méthodes classiques de provisionnement.

Pour chacun de ces segments actuariels les données disponibles sont :

- Le triangle des sinistres payés (paid claims) qui contient les paiements déjà effectués par année de souscription et par année de développement.
- Le triangle des charges de sinistres (incurred claims) qui comprend les paiements déjà effectués et l'estimation des montants qui restent à payer estimés par la cédante.
- Les différentes informations relatives aux sinistres majeurs.
- Le montant des primes (émises, acquises, ultimes, ...) par année de souscription.

Dans le cadre du provisionnement non-vie, le rôle de l'actuaire est d'analyser l'ensemble des données et des informations mises à sa disposition, d'appliquer des retraitements préalables si nécessaire et de choisir les modèles de provisionnement les plus adaptés à utiliser pour estimer la charge ultime de ces segments.

Pour notre étude, le segment que nous étudierons est présenté dans le paragraphe suivant.

5.1.1. Présentation du segment étudié

Parmi les différents segments actuariels du groupe SCOR, nous avons choisi le segment correspondant aux contrats proportionnels de la ligne d'affaire Aviation relatif au pôle GAUM. GAUM correspond aux initiales de Global Aerospace Underwriting Managers qui signifie gestionnaire des souscriptions de l'aérospatial. Les principaux risques couverts par SCOR sont les produits (coque de l'avion, ...) et la responsabilité de compagnies aériennes, ainsi que des produits qui touchent à la responsabilité de petit et grand constructeur d'avions et des exploitants d'aéroports.

Pour cette étude, nous avons choisi d'appliquer nos modèles sur le triangle des sinistres payés qui présente l'avantage de n'avoir aucun paiement négatif¹⁰ et d'avoir un nombre de retraitements relativement faible à effectuer.

¹⁰ La présence d'incrément négatifs peut être due par exemple suite à des recours.

Le nombre d'année de souscription et d'année de développement de ce triangle est le même, et égal à quinze années.

5.1.2. Traitement préalable des données

Comme expliqué dans le paragraphe précédent, le choix du triangle s'est porté sur le triangle des sinistres payés. Afin de pouvoir appliquer correctement nos différents modèles de provisionnement, nous avons dû effectuer un retraitement préalable des données du triangle basé sur les études annuelles réalisées par le Group Reserving de SCOR.

La majorité de ces retraitements ont été effectués sur les premières années de souscription du triangle. Il s'agissait essentiellement de sinistres exceptionnels de grande ampleur, essentiellement dû aux événements du 11 septembre 2001 (World Trade Center), qui ont été retirés de ce triangle pour ne pas biaiser les résultats finaux.

Le graphique ci-dessous montre l'évolution des paiements cumulés pour chaque année de souscription en fonction des années de développement. Pour des raisons de confidentialité des données, aucun montant ne sera présenté dans ce graphique ainsi que dans l'ensemble de cette partie 3.

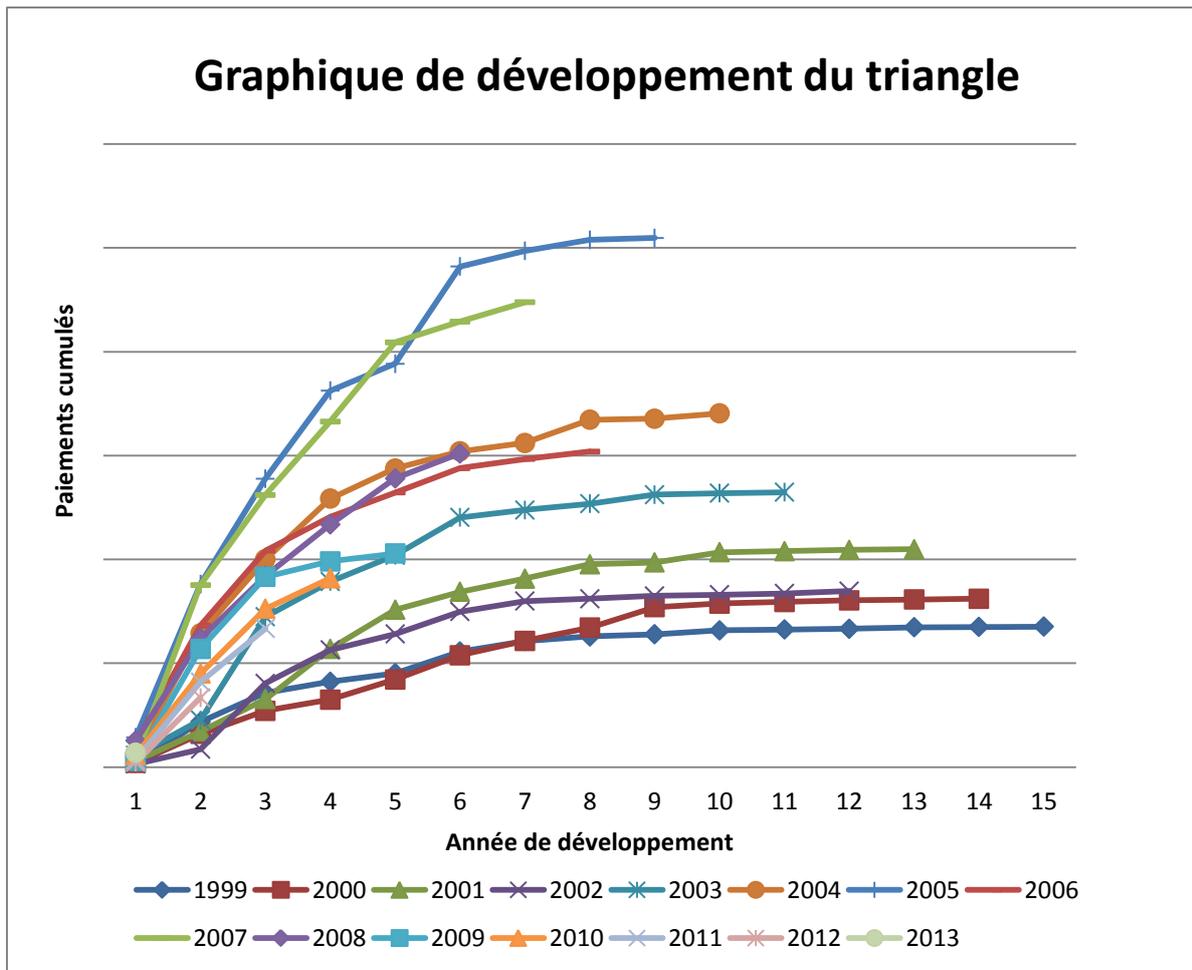


Figure 15 : Paiements cumulés par année de souscription en fonction des années de développement

D'après le graphique précédent, nous pouvons déjà constater que les paiements cumulés se stabilisent plus ou moins à partir de la huitième année de développement. En général, un segment est considéré à développement court lorsque que l'ultime est atteint en moins de cinq ans, à développement moyen lorsqu'il est atteint en moins de dix ans et à développement long lorsque qu'il est atteint en plus de vingt ans. Dans ce cas, le triangle de ce segment est dit alors à développement moyen.

Section 2 : Choix des modèles de provisionnement

Pour estimer précisément la charge ultime, plusieurs méthodes ou modèles de provisionnement peuvent être utilisés comme le présentent England et Verall dans leur article [24]. Parmi ces modèles, certains sont basés sur les paiements cumulés (méthode de Chain-Ladder, modèle de Mack) et d'autres sur les paiements incrémentaux (modèles GLM : Poisson, Poisson sudispersé, Gamma, Normale).

Dans cette section, nous présenterons les hypothèses mathématiques et l'estimation des paramètres relatives à tous ces modèles, ainsi que la méthode bootstrap à appliquer à chacun d'entre eux pour l'obtention d'une distribution de la charge ultime.

Notations

Dans cette partie, nous allons utiliser les notations suivantes :

- Les années de souscription sont notées $i = 1, \dots, I$ et les années de développement sont notées $j = 1, \dots, J$.
- Soit n le nombre total d'année de notre triangle de paiements, on se place dans le cadre où $J = n$.
- $C_{i,j}$ et $Z_{i,j}$, $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$ correspondent respectivement aux paiements cumulés et aux paiements incrémentaux du triangle tel que $Z_{i,j} = C_{i,j} - C_{i,j-1}$ et $Z_{i,1} = C_{i,1}$.
- On suppose connu les paiements $(C_{i,j})_{i+j \leq n+1}$.
- On note R_i la provision pour l'année de souscription i et $R = \sum_{i=1}^n R_i$ le montant de la provision total qui correspond à la charge ultime.

5.2.1. La méthode de Chain-Ladder

5.2.1.a. Présentation de la méthode

La méthode de Chain-Ladder est l'une des premières méthodes de provisionnement qui a été proposée au début des années 1930. Cette méthode déterministe est relativement simple et basée sur les paiements cumulés $C_{i,j}$. Elle suppose que le développement des sinistres d'une année de développement se fait proportionnellement à l'année précédente et cette proportion est constante pour toutes les années de souscription. C'est la méthode la plus classique en provisionnement non-vie et elle sert en général de méthode de base pour comparer les autres modèles de provisionnement.

Hypothèses du modèle :

(H1) : Les paiements cumulés $C_{i,j}$ des années de souscription i sont indépendants (Test d'absence d'effet calendaire) c'est-à-dire $\forall i \neq i' (C_{i,1}, \dots, C_{i,n})$ indépendant de $(C_{i',1}, \dots, C_{i',n})$

(H2) : Il existe des facteurs de développement f_j pour $j = 1, \dots, n - 1$ tel que :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad C_{i,j+1} = f_j C_{i,j}$$

La relation précédente suggère l'existence d'une linéarité des paiements cumulés de l'année de développement j à l'année de développement $j + 1$ pour une année de souscription i .

Estimation des paramètres du modèle et calcul des réserves :

Sous les deux hypothèses **(H1)** et **(H2)**, les facteurs de développement sont estimés par :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} \quad j = 1, \dots, n - 1$$

A l'aide de ces facteurs de développement \hat{f}_j , nous pouvons estimer la partie inférieure du triangle et nous obtenons alors :

$$\text{Pour } i + j > n + 1, \quad \hat{C}_{i,j+1} = \hat{f}_j \hat{C}_{i,j}$$

La provision individuelle \hat{R}_i pour l'année de souscription i s'écrit :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i+1}$$

Et l'estimation de la provision totale correspond à la somme des provisions individuelles :

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i$$

5.2.1.b. Bootstrap

La méthode « bootstrap » s'applique sur la méthode Chain-Ladder car il a été démontré par R. Verral et E. Renshaw [1] que sous certaines hypothèses (la somme des incréments des années de souscription doit être positive pour chaque année de développement), les résultats de la méthode Chain-Ladder et du modèle GLM poisson surdispersé (ODP) sont identiques.

Dans ce dernier, on suppose que les paiements incrémentaux $Z_{i,j}$ suivent de manière indépendante des lois de Poisson surdispersées. Les caractéristiques de ce modèle sont présentées dans le paragraphe 5.2.3. .

Les différentes étapes pour la construction d'une méthode « bootstrap » pour la méthode Chain-Ladder sont les suivantes :

- **Etape 1** : Estimation des provisions individuelles \hat{R}_i par la méthode de Chain-Ladder grâce aux facteurs de développement f_j .
- **Etape 2** : Calcul de la charge cumulée espérée $(\hat{C}_{i,j})_{i+j < n+1}$ en appliquant en arrière les facteurs de développement

$$\hat{C}_{i,j+1} = C_{i,j+1} / \hat{f}_j$$

On en déduit alors les paiements incrémentaux réels $Z_{i,j} = C_{i,j} - C_{i,j-1}$ et les paiements incrémentaux espérés $\hat{Z}_{i,j} = \hat{C}_{i,j} - \hat{C}_{i,j-1}$.

- **Etape 3** : Calcul des résidus de Pearson :

$$r_{i,j}^p = \frac{Z_{i,j} - \hat{Z}_{i,j}}{\sqrt{\hat{Z}_{i,j}}}$$

On en déduit alors le paramètre de dispersion ϕ à partir des résidus de Pearson.

$$\phi = \frac{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j \leq n+1}}^n (r_{i,j}^p)^2}{\frac{1}{2}n(n+1) - 2n + 1}$$

Où $\frac{1}{2}n(n+1)$ correspond au nombre de données initiales du triangle et $2n - 1$ correspond au nombre de paramètres du modèle.

Les résidus finaux utilisés pour le bootstrap sont :

$$r_{i,j} = \frac{r_{i,j}^p}{\sqrt{\phi}} \times \sqrt{\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{\frac{1}{2}n(n+1) - 2n + 1}}$$

Fin des étapes communes et début de la phase de simulation pour obtenir N montants de la charge ultime (les prochaines étapes sont effectuées pour les N simulations).

- **Etape 4** : Ré-échantillonnage des résidus $r_{i,j}$ et obtention des nouveaux résidus $r_{i,j}^*$.
- **Etape 5** : Reconstruction de la partie supérieure du triangle de paiement :

$$Z_{i,j}^* = r_{i,j}^* \sqrt{\phi \hat{Z}_{i,j} + \hat{Z}_{i,j}} \quad \text{pour } i + j \leq n + 1$$

$$C_{i,j}^* = Z_{i,j-1}^* + Z_{i,j}^*$$

- **Etape 6** : Application de la méthode de Chain-Ladder sur ce nouveau triangle de paiements cumulés et détermination de la partie inférieure $(\hat{C}_{i,j}^*)_{i+j > n+1}$.
- **Etape 7** : Calcul des réserves individuelles \hat{R}_i^* et du montant de provision totale \hat{R}^* .

Le processus permet d'obtenir ainsi une distribution de la charge ultime à partir de laquelle la Var 99,5 % e de la TVaR 99 % seront calculées.

5.2.1.c. Limite de la méthode de Chain-Ladder

La méthode de Chain-Ladder possède certaines limites.

La première limite concerne l'hypothèse d'absence d'effet calendaire. Des facteurs comme un changement de législation de jurisprudence, de management au sein de l'entreprise, ..., peuvent avoir une influence non négligeable sur les années de souscription et remettre en cause cette hypothèse.

La seconde limite concerne la linéarité entre les années de développement j et $j + 1$, qui doit être observable sur tout le triangle. Cette hypothèse ne tient pas compte des évolutions probables au cours du déroulement des sinistres comme par exemple le changement des clauses contractuelles, de composition du portefeuille, de profil de risque,

La troisième limite concerne l'estimation du dernier de facteur développement f_{n-1} qui dépend seulement des paiements cumulés $C_{1,n}$ et $C_{1,n-1}$, et l'estimation de la provision individuelle pour la dernière année de souscription qui dépend de l'ensemble des facteurs de développement f_1, \dots, f_{n-1} . Il existe des méthodes d'alourdissement de queue pour prendre en compte ces problèmes mais nous ne les utiliserons pas dans cette partie.

5.2.2. Le modèle de Mack

5.2.2.a. Présentation du modèle

Thomas Mack dans son article [35] a proposé une méthode stochastique, basée sur la méthode de Chain-Ladder, pour estimer la volatilité des réserves individuelles et de la charge ultime.

Hypothèses du modèle :

(H1) : Les paiements cumulés $C_{i,j}$ des années de souscription i sont indépendants (Test d'absence d'effet calendaire) c'est-à-dire $\forall i \neq i' (C_{i,1}, \dots, C_{i,n})$ indépendant de $(C_{i',1}, \dots, C_{i',n})$

$$\text{(H2)} : E\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \mid C_{i,1}, \dots, C_{i,j}\right) = f_j$$

$$\text{(H3)} : V\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \mid C_{i,1}, \dots, C_{i,j}\right) = \frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}}$$

Estimation des paramètres du modèle et calcul des réserves :

Sous l'hypothèse **(H2)** et **(H1)**, Thomas Mack a montré que les estimateurs \hat{f}_j sont identiques à ceux du modèle de Chain-Ladder, qu'ils sont sans biais c'est-à-dire que $E(\hat{f}_j) = f_j$ et qu'ils sont non corrélés c'est-à-dire que $\forall j \neq k, cov(\hat{f}_j, \hat{f}_k) = 0$

Sous l'hypothèse **(H3)**, les estimateurs des facteurs de développement \hat{f}_j doivent être à variance minimale. Ces variances sont estimées de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} (f_{ij} - \hat{f}_j)^2 \text{ où } f_{ij} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \\ \hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min\left(\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \min(\hat{\sigma}_{n-2}^2, \hat{\sigma}_{n-3}^2)\right) \end{array} \right.$$

L'estimateur $\hat{\sigma}_j^2$ de σ_j^2 est sans biais. Il permet de mesurer l'écart entre les facteurs de développement individuel notés f_{ij} et le facteur de développement estimé \hat{f}_j .

5.2.2.b. Bootstrap

Les différentes étapes pour la construction d'une méthode « bootstrap » pour le modèle de Mack sont les suivantes :

- **Etape 1** : Détermination de $\hat{f}_j, \hat{\sigma}_j$ et $f_{i,j}$ à partir du triangle initial des paiements cumulés $(C_{i,j})_{i+j \leq n+1}$.
- **Etape 2** : Calcul des résidus de Mack : $r_{i,j} = \frac{\sqrt{C_{i,j}} \times (f_{i,j} - \hat{f}_j)}{\hat{\sigma}_j} \times \sqrt{\frac{n-j}{n-j-1}}$

Fin des étapes communes et début de la phase de simulation pour obtenir N montants de la charge ultime (les prochaines étapes sont effectuées pour les N simulations).

- **Etape 3** : Ré-échantillonnage des résidus $r_{i,j}$ et récupération des nouveaux résidus $r_{i,j}^*$.
- **Etape 4** : Reconstruction des facteurs de développement individuel :

$$f_{i,j}^* = r_{i,j}^* \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_j^2}{C_{i,j}}} + \hat{f}_j$$

- **Etape 5** : Estimation des nouveaux facteurs de développement \hat{f}_j^* issus de la méthode Chain-Ladder :

$$\hat{f}_j^* = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} f'_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}$$

- **Etape 6** : Ré-estimation de la partie inférieure du triangle de paiements cumulés $(\hat{C}_{i,j}^*)_{i+j > n+1}$ à partir du triangle initial $(C_{i,j})_{i+j \leq n+1}$ et des nouveaux facteurs de développement \hat{f}_j^* .
- **Etape 7** : Calcul des réserves individuelles \hat{R}_i^* et du montant de provision totale \hat{R}^* .

Le processus permet d'obtenir ainsi une distribution de la charge ultime à partir de laquelle la Var 99,5 % et de la TVaR 99 % seront calculées.

5.2.2.c. Limite du modèle de Mack

Le modèle de Mack possède les mêmes limites que la méthode de Chain-Ladder que ce soit pour l'hypothèse d'absence d'effet calendaire ou l'existence d'une linéarité entre deux années de développement successives.

5.2.3. Les modèles GLM

5.2.3.a. Présentation de la méthode

Les modèles linéaires généralisés (GLM) ont été introduit par Nelder et Wedderburn [13] en 1972. Ces modèles sont une généralisation des modèles linéaires normaux et se décomposent en trois composantes principales : une composante aléatoire, une composante systématique et une fonction de lien.

La composante aléatoire

Les variables de réponse $Y_{i,j}$ sont indépendantes, et suivent une loi de probabilité appartenant à la famille exponentielle :

$$f(Y_{i,j}; \theta_{i,j}; \emptyset) = \exp \left\{ \frac{Y_{i,j} \theta_{i,j} - b(\theta_{i,j})}{a(\emptyset)} \omega_{i,j} + c(Y_{i,j}; \emptyset) \right\}$$

Où :

- $\theta_{i,j}$ est appelé paramètre naturel.
- $\emptyset > 0$ est appelé paramètre de dispersion.
- $\omega_{i,j}$ poids de la variable ($\omega_{i,j} = 1$ dans notre cas).
- Les fonctions $a : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables, et $c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

La composante systématique

La composante systématique représente la partie explicative du modèle, elle est notée η . Elle est définie par : $\eta = X\xi$, où X est la matrice des variables explicatives et $\xi = (\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)^t$ est le vecteur des paramètres du modèle, où μ représente la moyenne générale (ou intercept), et les paramètres $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ correspondent respectivement aux effets « lignes » et aux effets « colonnes » du modèle.

La fonction de lien

Cette fonction, notée g , fait le lien entre les composantes aléatoires et systématiques du modèle. Elle est différentiable, continue et inversible telle que :

$$\mu_{i,j} = E(Y_{i,j}) = g^{-1}(\eta_{i,j}).$$

Les formes standards du lien sont respectivement :

- La forme additive : $\mu_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j$.
- La forme multiplicative : $\mu_{i,j} = \mu \alpha_i \beta_j$, ou de manière plus courante $\mu_{i,j} = e^{\mu \alpha_i \beta_j}$.

Avec comme condition identique : $\alpha_1 = \beta_1 = 0$

Dans notre étude, nous nous sommes intéressés en particulier aux modèles Poisson, Poisson surdispersé, Log-Normale et Log-Gamma¹¹. L'ensemble de ces modélisations GLM ont été réalisées sur les paiements incrémentaux $Z_{i,j}$. Le tableau ci-dessous résume les informations de chacun des modèles GLM.

Loi	Notation	Densité	Fonction de lien	$V(\mu)$
Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$P(Y = y) = \exp(-m) \frac{m^y}{y!}$	$\ln(x)$	μ
Poisson surdispersé	$\mathcal{P}(\lambda, \phi)$	Pas d'expression explicite	$\ln(x)$	$\phi \mu$
Gamma	$\Gamma(m, s)$	$f(y) = \frac{s^m y^{s-1} \exp(-sy)}{\Gamma(m)}$	$-\frac{1}{x}$	μ^2
Normale	$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	x	1

Tableau 10 : Résumé des informations de chaque modèle GLM

Hypothèses du modèle :

(H1) : Les paiements incrémentaux $Z_{i,j}$ sont indépendants et positifs

(H2) : Les résidus $r_{i,j}$ (dans notre cas nous étudierons les résidus de Pearson) sont i.i.d et suivent une loi normale centrée de variance σ^2 .

Estimation des paramètres du modèle et calcul des réserves :

L'estimation des paramètres $(\hat{\mu}, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_n)$ de chaque modèle GLM s'est faite à l'aide du logiciel R. La fonction **glm()** de ce logiciel permet d'obtenir l'estimation, l'écart-type et la p-valeur du test de Student pour chaque paramètre. Pour la méthode d'estimation, il faut se référer à l'ouvrage [4] d'Annette J. Dobson.

La provision individuelle \hat{R}_i pour une année de souscription i s'écrit :

$$\hat{R}_i = \sum_{k=n-i+1}^n \hat{Z}_{i,k} = \sum_{k=n-i+1}^n \hat{\mu}_{i,k}$$

Et l'estimation de la provision totale correspond à la somme des provisions individuelles :

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i$$

¹¹ Log-Normale et Log-Gamma signifient que nous avons appliqué une méthode GLM respectivement Normale et Gamma sur le logarithme des paiements incrémentaux.

5.2.3.b. Bootstrap

Les différentes étapes pour la construction d'une méthode « bootstrap » pour un modèle GLM sont les suivantes ¹²:

- **Etape 1** : Estimation des paramètres du modèle $(\hat{\mu}, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_n)$ à partir du triangle initial des paiements incrémentaux $(Z_{i,j})_{i+j \leq n+1}$.
- **Etape 2** : Calcul des résidus de Pearson :

$$r_{i,j} = \frac{Z_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}}{\sqrt{V(\hat{\mu}_{i,j})}} \times \sqrt{\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{\frac{1}{2}n(n+1) - 2n + 1}}$$

Fin des étapes communes et début de la phase de simulation pour obtenir N montants de la charge ultime (les prochaines étapes sont effectuées pour les N simulations).

- **Etape 3** : Ré-échantillonnage des résidus $r_{i,j}$ et récupération des nouveaux résidus $r_{i,j}^*$.
- **Etape 4** : Reconstruction de la partie supérieure du triangle de paiement :

$$Z_{i,j}^* = r_{i,j}^* \sqrt{V(\hat{\mu}_{i,j})} + \hat{\mu}_{i,j} \quad \text{pour } i + j \leq n + 1$$

- **Etape 5** : Application du modèle GLM sur ce nouveau triangle de paiements incrémentaux $(Z_{i,j}^*)_{i+j \leq n+1}$ et détermination de la partie inférieure $(Z_{i,j}^*)_{i+j > n+1} = (\hat{\mu}_{i,j}^*)_{i+j > n+1}$.
- **Etape 6** : Calcul des réserves individuelles \hat{R}_i^* et du montant de provision totale \hat{R}^* .

Le processus permet d'obtenir ainsi une distribution de la charge ultime à partir de laquelle la Var 99,5 % et de la TVaR 99 % seront calculées.

¹² Nous répétons que dans le cas Log-Gamma et Log-Normale les modèles GLM Gamma et Normale sont appliqués sur les log-incréments $\ln(Z_{i,j})$.

5.2.3.c. Limite des modèles GLM

Les modèles GLM possèdent certaines limites.

La première limite concerne l'hypothèse d'indépendance des paiements incrémentaux. Il s'agit d'une hypothèse relativement forte en pratique.

La seconde limite concerne la nécessité de disposer de paiements incrémentaux positifs. En pratique, suite à des recours, les triangles de paiements peuvent présenter des incréments négatifs.

La troisième limite concerne les paramètres des modèles GLM. Leur nombre est assez conséquent et requiert donc un nombre important de données pour une estimation précise.

L'ensemble des modèles présentés ont été implémentés sous R et Excel-VBA, à l'exception du modèle de Mack que nous avons étudié sous *ResQ^(R)*.¹³

¹³ *ResQ^(R)* est le logiciel leader de provisionnement pour les secteurs de l'assurance et de la réassurance implémenté par Towers Watson

Chapitre 6 : Validation des modèles et application

Dans ce chapitre, nous allons, comme dans la partie 2, appliquer ces différents modèles sur notre historique de données. Le but principal reste le même c'est-à-dire de sélectionner un des modèles que l'on considèrera dans la suite comme le modèle de référence dans le calcul de l'erreur de modèle.

Dans la section 1 de ce chapitre, nous vérifierons les hypothèses de chaque modèle et choisirons le modèle que l'on considèrera comme notre modèle de référence.

Dans la section 2, nous quantifierons ensuite le risque de modèle sur la VaR 99,5 % et la TVaR 99 % par l'approche dite de « modèle de référence ».

Section 1 : Vérification des hypothèses des modèles

6.1.1. La méthode de Chain-Ladder

L'hypothèse **(H1)** de la méthode de Chain-Ladder suppose l'indépendance des années de souscription. Le test permettant de vérifier cette hypothèse est le test d'absence d'effet calendaire, dont le principe est présenté en Annexe 4. En résumé, ce test consiste à étudier les facteurs de développement individuel et à détecter d'éventuelles tendances sur chaque diagonale du triangle de paiements.

Pour notre triangle de paiement, les résultats du test sont les suivants :

j	S_j	L_j	Z_j	n_j	$E(Z_j)$	$V(Z_j)$
2	2	0	0	2	0,50	0,25
3	1	2	1	3	0,75	0,19
4	1	3	1	4	1,25	0,44
5	4	1	1	5	1,56	0,37
6	6	0	0	6	2,06	0,62
7	2	4	2	6	2,06	0,62
8	5	2	2	7	2,41	0,55
9	7	2	2	9	3,27	0,74
10	1	8	1	9	3,27	0,74
11	6	5	5	11	4,15	0,92
12	6	6	6	12	4,65	1,17
13	4	8	4	12	4,65	1,17
14	3	8	3	11	4,15	0,92

Total	28	34,72	8,69
--------------	-----------	--------------	-------------

avec :

- S_j : Nombre de facteur de développement individuel inférieur à la médiane de la colonne j pour la diagonale D_j
- L_j : Nombre de facteur de développement individuel supérieur à la médiane de la colonne j pour la diagonale D_j
- $Z_j = \min(S_j, L_j)$ et $n_j = S_j + L_j$
- $E(Z_j)$ et $V(Z_j)$ respectivement l'espérance et la variance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n_j, p)$

Niveau de confiance	95 %
Intervalle de confiance	[28,94 ; 40,49]
Résultat du test	Hypothèse non rejetée

Tableau 11 : Résultat du test d'absence d'effet calendaire

La valeur obtenue pour la variable Z est de 28. Elle n'appartient donc pas à l'intervalle de confiance à 95 % que nous avons déterminé. Cependant, en raison de la proximité de cette valeur par rapport à l'intervalle, l'hypothèse **(H1)** peut être jugée valide.

L'hypothèse **(H2)** peut être validée par l'alignement sur une droite des couples de paiements cumulés $(C_{i,j}, C_{i,j+1})_{i=1, \dots, n-j}$. Si le R^2 de la régression linéaire entre les différents couples de paiements est proche de 1 alors l'hypothèse d'alignement est vérifiée, et l'estimation du facteur de développement proposée par cette méthode est pertinente. Les résultats des représentations graphiques pour les quatre premiers j sont présentés dans les graphes ci-dessous.

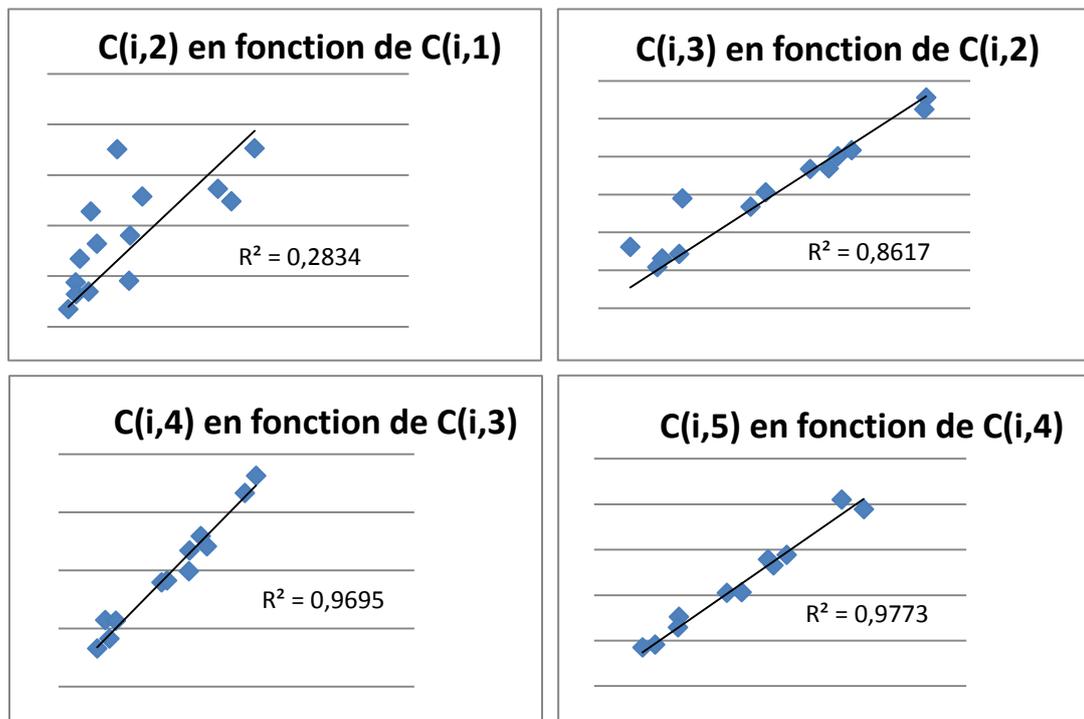


Figure 16 : Vérification de l'hypothèse de linéarité entre les années de développement successives

D'après les droites de régression précédentes et la valeur du R^2 de chaque régression, nous pouvons constater que l'hypothèse ne semble pas vérifiée pour $j = 1$. La faible valeur du $R^2(0,2834)$ suppose que l'existence d'une linéarité entre la première et la deuxième année de développement ne peut être vérifiée. Au contraire, à partir de $j = 2$, la valeur du R^2 est beaucoup plus proche de 1 et l'alignement des points le long de la droite de régression mieux observable.

La conclusion de ces observations est que l'hypothèse **(H1)** de la méthode de Chain-Ladder est vérifiée, même si dans le cas $j = 1$ la variabilité des points est plus importante.

Nous utiliserons la méthode Chain-Ladder pour la quantification du risque de modèle.

6.1.2. Le modèle de Mack

Les hypothèses **(H1)** et **(H2)** du modèle Mack sont similaires à celle de la méthode de Chain-Ladder et par conséquent leur validité se vérifient de la même manière.

L'hypothèse de variance (H3) du modèle de Mack peut se vérifier en représentant graphiquement les couples $(r_{i,j}, C_{i,j})_{i=1, \dots, n-j}$ pour $1 \leq j \leq n - 1$. Si les points obtenus pour chaque représentation ont un caractère aléatoire, l'hypothèse de variance est vérifiée. Notre conclusion concernant cette hypothèse sera graphique car définir un critère aléatoire reste compliqué et le nombre limité de données ne permettrait pas de juger la pertinence du test effectué.

Les résultats des représentations graphiques pour les quatre premiers j sont présentés dans le graphique ci-dessous.

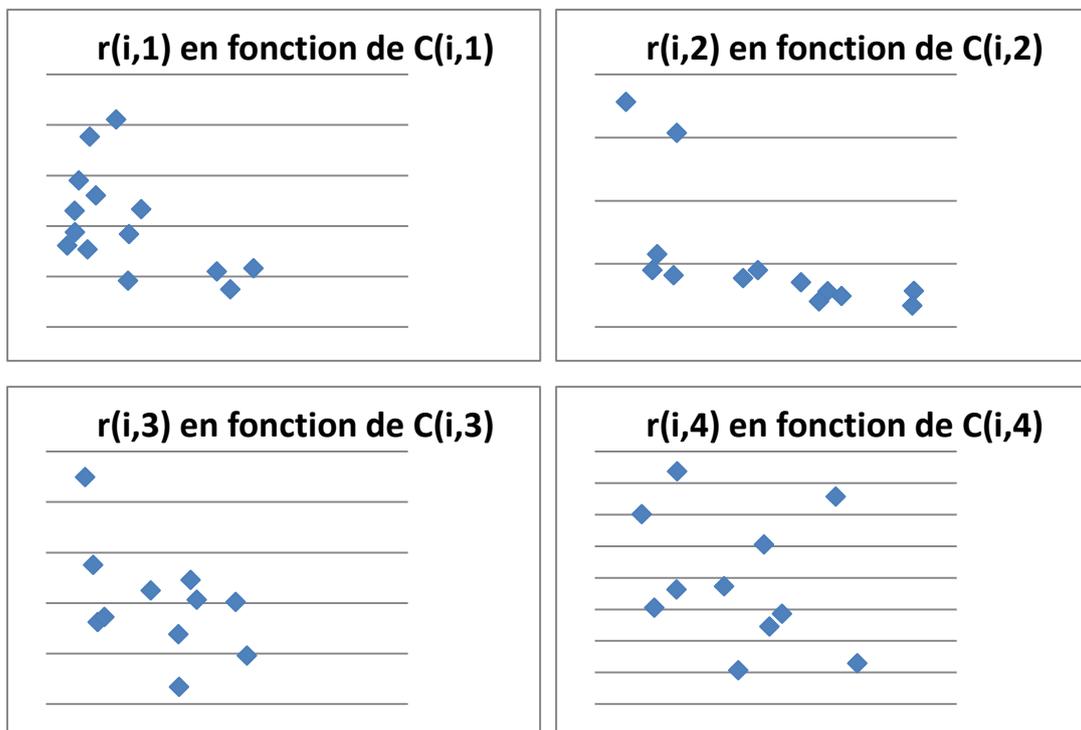


Figure 17 : Vérification graphique de l'hypothèse de variance du modèle de Mack

D'après les différentes représentations graphiques précédentes, le caractère aléatoire du couple $(r_{i,j}, C_{i,j})_{i=1,\dots,n-j}$ peut-être mis en doute surtout pour $j = 1$ et $j = 2$. Il existe respectivement une tendance linéaire verticale et une tendance linéaire horizontale pour ces deux années de développement.

La conclusion de ces observations est que l'hypothèse **(H3)** du modèle de Mack n'est pas vérifiée.

Même si l'hypothèse **(H3)** n'est pas vérifiée, nous garderons le modèle de Mack pour la quantification du risque de modèle.

6.1.3. Les modèles GLM

Comme indiqué dans le paragraphe 5.2.1.b de la section 2 du chapitre 5, la méthode de Chain-Ladder et le modèle GLM Poisson surdispersé ont été démontrés comme identiques sous certaines conditions. C'est la raison pour laquelle nous n'avons pas appliqué cette méthode GLM et par conséquent pas vérifié ses hypothèses.

L'hypothèse **(H1)** suppose que les paiements incrémentaux Z_{ij} sont indépendants et positifs. Dans notre cas, le triangle que nous utilisons ne possède aucun incrément négatif ou nul, et par conséquent la première condition automatiquement vérifiée.

Pour tester l'indépendance des paiements nous avons appliqué le test de corrélation de Spearman sur les années de développement. Ce test consiste à calculer les différents coefficients de corrélation pour chaque paire de colonnes du triangle des paiements incrémentaux et de vérifier l'hypothèse d'indépendance des paires avec un niveau de confiance de 95 %. Pour deux variables X et Z de même taille, d'écart-types respectifs σ_X et σ_Z , le coefficient de corrélation $\rho(X, Z)$ est défini par la formule suivante :

$$\rho(X, Z) = \frac{E[(X - E(X))(Z - E(Z))]}{\sigma_X \sigma_Z}$$

Le tableau suivant présente les valeurs obtenues pour chaque paire de colonnes du triangle.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1		0,62	0,56	0,60	0,23	0,59	0,03	0,14	-0,28	0,03	-0,38	-0,51	-0,71	1,00
2			0,60	0,66	0,51	0,37	0,46	0,41	-0,37	0,18	-0,51	-1,00	0,95	-1,00
3				0,61	0,28	0,55	0,01	-0,07	-0,29	-0,49	-0,40	0,83	-0,09	-1,00
4					0,66	0,53	0,47	0,42	-0,54	0,43	-0,16	0,36	-0,70	1,00
5						-0,12	0,67	0,63	-0,17	0,68	0,17	0,07	-0,92	1,00
6							0,26	-0,08	-0,12	-0,61	-0,24	0,21	0,37	1,00
7								0,12	0,21	0,47	0,76	-0,10	-0,86	1,00
8									-0,02	0,57	0,56	-0,30	-0,99	1,00
9										-0,29	0,74	0,04	-0,25	1,00
10											0,07	-0,45	-0,68	-1,00
11												0,43	-0,65	1,00
12													-0,90	1,00
13														-1,00

Tableau 12 : Coefficients de corrélation entre les années de développement

Pour chaque coefficient de corrélation, noté r , nous testons l'hypothèse $H_0 : r = 0$.

Pour tester cette hypothèse il faut construire la statistique du test T qui dépend du coefficient r de la paire et de la taille de l'échantillon n de chaque paire. Cette statistique est définie par :

$$T = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

Le test de significativité du coefficient de corrélation r est alors construit en considérant que la statistique T suit une loi de Student à $n - 2$ degrés de liberté. Si $|T| < q_t^{1-\alpha}$ alors l'hypothèse H_0 n'est pas rejetée et donc la paire peut être considérée comme indépendante.

Le tableau suivant présente les valeurs obtenues pour chaque T . Nous avons également indiqué en dessous de chaque colonne la valeur du quantile qu'il faut utiliser pour la comparer à chaque valeur $|T|$. Pour les quantiles, nous avons fixé un seuil d'acceptabilité $\alpha = 5\%$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1		2,72	2,22	2,36	0,72	2,08	0,09	0,34	-0,66	0,05	-0,72	-0,83	-1,00
2			2,49	2,74	1,78	1,12	1,37	1,09	-0,90	0,36	-1,02	-16,1	3,06
3				2,41	0,87	1,86	0,02	-0,17	-0,67	-1,14	-0,75	2,14	-0,09
4					2,66	1,78	1,40	1,14	-1,44	0,94	-0,28	0,54	-0,99
5						-0,34	2,36	2,00	-0,37	1,86	0,31	0,10	-2,30
6							0,71	-0,21	-0,27	-1,52	-0,43	0,30	0,40
7								0,30	0,47	1,06	2,03	-0,14	-1,67
8									-0,04	1,38	1,18	-0,44	-7,11
9										-0,60	1,89	0,06	-0,26
10											0,12	-0,71	-0,91
11												0,68	-0,86
12													-2,04

$n - 2$	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$q_t^{1-\alpha}$	1,78	1,80	1,81	1,83	1,86	1,89	1,94	2,02	2,13	2,35	2,92	6,31

Tableau 13 : Statistiques T du test et quantiles de la loi de Student

Le nombre de test retenant l'hypothèse H_0 est égal à 66 sur 78. Nous pouvons donc constater que l'ensemble des années de survenance ne sont pas totalement indépendantes. Cependant en vue des résultats obtenus, nous jugeons tout de même que l'hypothèse (**H1**) est vérifiée.

L'hypothèse (**H2**) du modèle suppose que les résidus de Pearson $r_{i,j}$ suivent une loi normale centrée de variance σ^2 . Nous avons testé cette hypothèse pour chaque modèle GLM. Comme la significativité du test de normalité peut-être perturbée par l'insuffisance du nombre de résidus, nous avons réalisé trois tests de normalité différents : le test de Shapiro-Wilk, le test d'Anderson-Darling et le test de Cramer Von Mises. Si la p-valeur du test est supérieure à 0,05, l'hypothèse de normalité des résidus est acceptée. Ces tests ont été effectués sous le logiciel R. Les résultats pour chacun des modèles sont résumés dans le tableau ci-dessous. Nous avons également fait la comparaison graphique de la distribution des résidus à la distribution d'une loi normale. Si les points sont alignés le long d'une droite, la distribution des résidus peut être considérée comme normale.

Modèle GLM	Shapiro-Wilk	Anderson-Darling	Cramer Von Mises
Poisson	0,1937	0,0643	0,04138
Log-Gamma	0,9803	0,9801	0,9737
Log-Normale	0,7288	0,8499	0,8350

Tableau 14 : Résultats statistiques des tests de normalité pour chaque modèle GLM

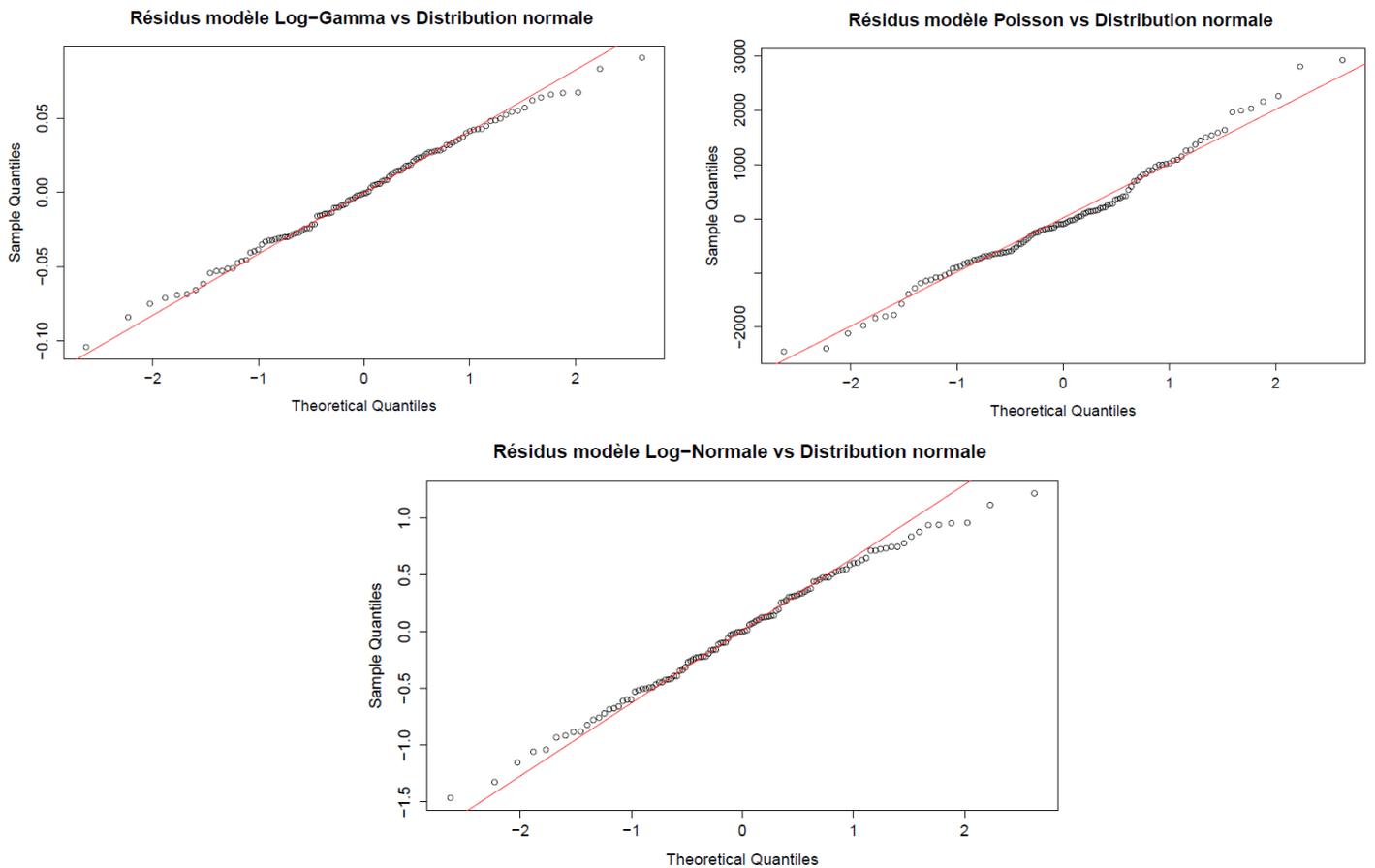


Figure 18 : Distribution des résidus des modèles GLM en fonction de la distribution d'une loi normale

D'après les résultats des différents tests de normalité que nous avons réalisés, nous pouvons constater que les p-valeur des trois tests de normalité des modèles GLM Log-Gamma et Log-Normale sont supérieures à 0,05. L'hypothèse de normalité des résidus est donc acceptée pour ces deux modèles.

En revanche, pour le modèle GLM Poisson les résultats sont un peu plus discutables mais l'hypothèse de normalité des résidus peut être tout de même acceptée car deux tests sur trois l'acceptent.

L'hypothèse de normalité est donc acceptée pour ces trois modèles GLM, et la représentation des résidus de ces modèles par rapport à une distribution normale confirme ces conclusions.

A l'aide la fonction **glm()** du logiciel R, nous pouvons obtenir la valeur estimée pour chaque paramètre du modèle GLM et la p-valeur du test de Student afin de tester l'estimation de ces paramètres avec un seuil de significativité de 0,05.

Modèle Poisson					
Paramètre	Estimation	p-valeur	Paramètre	Estimation	p-valeur
μ	13,87	< 2E-16	μ	13,87	< 2E-16
α_2	0,18	< 2E-16	β_2	1,95	< 2E-16
α_3	0,44	< 2E-16	β_3	1,70	< 2E-16
α_4	0,24	< 2E-16	β_4	1,23	< 2E-16
α_5	0,69	< 2E-16	β_5	0,89	< 2E-16
α_6	0,95	< 2E-16	β_6	0,92	< 2E-16
α_7	1,37	< 2E-16	β_7	3,88E-03	< 2E-16
α_8	0,88	< 2E-16	β_8	-0,06	< 2E-16
α_9	1,30	< 2E-16	β_9	-0,64	< 2E-16
α_{10}	0,96	< 2E-16	β_{10}	-0,72	< 2E-16
α_{11}	0,69	< 2E-16	β_{11}	-1,90	< 2E-16
α_{12}	0,70	< 2E-16	β_{12}	-1,54	< 2E-16
α_{13}	0,62	< 2E-16	β_{13}	-1,96	< 2E-16
α_{14}	0,45	< 2E-16	β_{14}	-2,31	< 2E-16
α_{15}	0,95	< 2E-16	β_{15}	-3,27	< 2E-16

Tableau 15 : Résultats de l'estimation des paramètres du modèle Poisson

Les résultats pour chaque modèle GLM sont présentés en Annexe 5. Le tableau ci-dessous résume les résultats pour l'ensemble de ces modèles.

Modèle	Facteur	Nombre de p-valeur < 0,05	Total
Poisson	Intercept (μ)	1	29
	Ligne ($\hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_{15}$)	14	
	Colonne ($\hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_{15}$)	14	
Log-Gamma	Intercept (μ)	1	19
	Ligne ($\hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_{15}$)	6	
	Colonne ($\hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_{15}$)	12	
Log-Normale	Intercept (μ)	1	19
	Ligne ($\hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_{15}$)	6	
	Colonne ($\hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_{15}$)	12	

Tableau 16 : Synthèse des p-valeurs de chaque modèle GLM

Nous pouvons constater que le modèle GLM possédant le nombre de p-valeur inférieure au seuil de significativité le plus élevé, est le modèle Poisson. Les modèles Log-Gamma et Log-Normale possèdent eux exactement le même nombre.

Nous utiliserons ces trois modèles GLM pour la quantification du risque de modèle

Nous avons effectué pour chacun de ces modèles la vérification préalable de leur hypothèse et testé la significativité de leur paramètre lorsque cela était possible. Sur l'ensemble de ces modèles, la validité des hypothèses n'était pas totalement vérifiée. Parmi cette classe de modèle, la méthode de Chain-Ladder a donné des résultats corrects surtout sur l'hypothèse de linéarité des facteurs de développement (à l'exception du premier).

Le choix du modèle de référence s'est donc porté sur celui-ci pour la quantification du risque de modèle par rapport à la VaR 99,5 % et la TVaR 99 %.

Dans la pratique, ce modèle sert en général de modèle de référence pour les différents modèles de provisionnement.

Section 2 : Application

Le choix du modèle de référence a été justifié dans la section précédente comme étant la méthode de Chain-Ladder.

Nous avons appliqué la méthode bootstrap propre à chacun de ces modèles pour obtenir une distribution de la charge ultime pour chaque modèle. Pour ce faire nous avons réalisé 10 000 itérations de la méthode afin d'obtenir 10 000 réalisations de la charge ultime.

Nous avons ensuite calculé respectivement la VaR 99,5 % et la TVaR 99 % à partir de la distribution de la charge ultime pour chacun des modèles, et ainsi pu quantifier le risque de modèle associé à ces deux mesures de risque à partir de notre modèle de référence.

6.2.1. Distribution de la charge à l'ultime

Nous avons à partir de nos 10 000 réalisations de la charge ultime pu représenter la fonction de densité de cette charge et calculé le CoV des différentes distributions.

Nous avons obtenu les représentations et les résultats suivant :

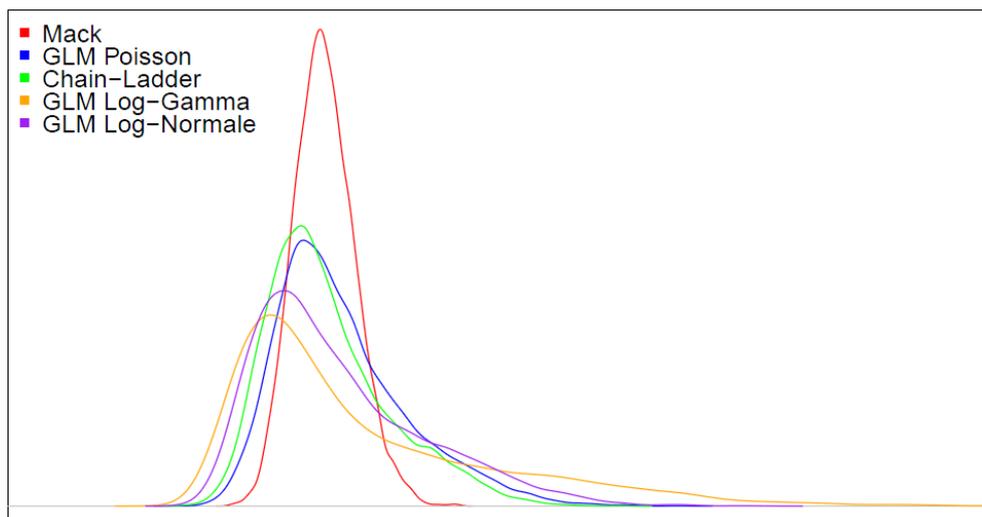


Figure 19 : Représentation graphique de la fonction de densité de la charge ultime pour chaque modèle

Modèle	Chain-Ladder	Mack	GLM Poisson	GLM Log-Gamma	GLM Log-Normale
CoV	21,79 %	10,89 %	22,11 %	42,18 %	28,86 %

Tableau 17 : CoV de la distribution de charge ultime pour chaque modèle

La moyenne obtenue pour chacune des distributions est relativement proche comme nous pouvons également le constater à partir des fonctions de densités.

La distribution de la charge pour le modèle de Mack possède une queue de distribution plus faible que les autres méthodes. Au contraire, elle est plus forte pour le modèle log-Gamma. Pour les trois autres modèles c'est-à-dire la méthode de Chain-Ladder et les modèles GLM Poisson et Log-Normale, la densité de la distribution est relativement proche pour ces trois modèles.

6.2.2. Quantification du risque de modèle

Nous allons maintenant quantifier le risque de modèle sur la VaR 99,5 % et la TVaR 99 % en utilisant l'approche dite de « modèle de référence ». En vue des premières observations faites sur la distribution de la charge ultime de chaque modèle, nous pouvons nous attendre à des résultats plus différents que la précédente étude menée dans la partie 2 sur un modèle d'actif.

Les valeurs que nous avons obtenues pour les deux mesures de risques étaient assez dispersées et nous allons donc quantifier le risque de modèle en utilisant la valeur absolue et relative du risque de modèle.

Le tableau suivant donne les résultats obtenus pour la valeur absolue et pour la valeur relative du risque de modèle pour les deux mesures de risque, VaR 99,5 % et TVaR 99 %.

Modèle	VaR 99,5 %				
	Chain-Ladder	Mack	GLM Poisson	GLM Log-Gamma	GLM Log-Normale
i	0	1	2	3	4
AM_i	0	-0,2338	0,0765	0,6909	0,1900
RM_i	0	-0,2528	0,0827	0,7472	0,2054

AM	0,6909
RM	0,7472

Tableau 18 : Résultats des mesures absolue et relative du risque de modèle pour la VaR 99,5 %

Modèle	TVaR 99 %				
	Chain-Ladder	Mack	GLM Poisson	GLM Log-Gamma	GLM Log-Normale
i	0	1	2	3	4
AM_i	0	-0,2351	0,0786	0,7015	0,1918
RM_i	0	-0,2510	0,0839	0,7490	0,2048

AM	0,7015
RM	0,7490

Tableau 19 : Résultats des mesures absolue et relative du risque de modèle pour la TVaR 99 %

Nous pouvons constater que les valeurs de AM et de RM sont assez élevées pour la VaR 99,5 % et la TVaR 99 %.

Dans le cadre de solvabilité II, la valeur $(1+AM)$ correspondrait à la proportion par laquelle il faudrait multiplier le capital du modèle de référence pour bien prendre en compte le risque de modèle sur le segment étudié. Dans ce cas, le montant obtenu serait relativement conséquent.

Cette étude nous montre parfaitement la limite de la méthode de calcul pour la quantification du risque de modèle par l'approche dite de « modèle de référence » surtout lorsque l'on utilise des modèles dont les hypothèses ne sont pas totalement vérifiées, ce qui arrive parfois dans la réalité en l'absence de données suffisantes.

Cette seconde étude a présenté une seconde approche de quantification du risque de modèle sur un modèle de provisionnement non-vie en utilisant également la méthode dite de « modèle de référence ».

Contrairement à la première étude, la vérification des hypothèses des modèles de provisionnement s'est avérée un peu plus problématique notamment du fait de la quantité relativement restreinte de données que nous avons à notre disposition. Il s'agit d'un problème auquel doit faire face un actuair. Il doit ainsi s'adapter à cette contrainte et essayer malgré tout de proposer une distribution de la charge ultime pour anticiper les paiements futurs auxquels devra faire face la compagnie.

Les résultats obtenus dans cette étude ont montré que le risque de modèle associé aux deux mesures de risque, VaR 99,5 % et TVaR 99%, était assez conséquent. Cela nous a permis de mettre en évidence la limite de l'approche de quantification du risque modèle par la méthode dite de « modèle de référence », et de nous convaincre qu'une quantification plus précise du risque de modèle doit être réalisée pour ne pas dépendre seulement d'une seule valeur pour le calcul de AM ou de RM.

En effet, notre classe de modèle peut inclure des modèles non adaptés pour l'évaluation du risque étudié et comme les valeurs de AM et RM dépendent d'une borne supérieure, il existe un risque de surestimation du risque de modèle à cause d'un potentiel mauvais choix de modèle.

Toutefois une bonne connaissance du risque à modéliser ainsi que du portefeuille de contrat et des risques sous-jacents, permettraient de faire une sélection préalable plus précise des modèles et ainsi avoir une meilleure estimation du potentiel risque de modèle.

Nous présenterons ainsi dans la partie suivante une piste d'amélioration pour notre approche de quantification du risque de modèle.

Partie 4 :

**Amélioration de
l'approche de
quantification**

Dans cette partie, nous allons proposer une amélioration de la méthode dite de « modèle de référence » que nous avons utilisée pour quantifier le risque de modèle. Pour ce type d'approche, il est impératif que la classe de modèle sélectionnée soit représentative du risque que l'on souhaite modéliser.

Une alternative intéressante serait de prendre en compte l'ensemble des valeurs individualisées pour quantifier le risque de modèle et non la borne supérieure de ces valeurs. Le risque de modèle pourrait alors être calculé à partir de ces valeurs individualisées et de facteur de crédibilité associé à ces différentes valeurs.

L'enjeu principal concerne toutefois la détermination de ces facteurs de crédibilité. La valeur à affecter à ces facteurs devra dépendre de deux critères essentiels : l'avis d'un expert et les résultats statistiques des modèles. Les facteurs de crédibilité seront donc alors pondérés par ces deux avis.

L'avis d'un expert est essentiel car il permet de juger d'une part quelle classe de modèle est la plus adaptée par rapport aux différentes typologies de risques étudiés et des informations disponibles, et d'autre part quels sont les degrés de comparabilité de ces modèles.

L'avis statistique, quant à lui, résulte des différents tests réalisés par les actuaires que ce soit en terme de vérification des hypothèses des modèles, avec un poids plus conséquent affecté aux hypothèses importantes, et de calibrage de leurs paramètres, avec la nécessité de prendre en compte les tests de significativité des paramètres s'ils sont disponibles.

En prenant compte ces facteurs de crédibilité, la valeur obtenue pour la mesure absolue et relative du risque de modèle serait alors :

$$AM_{ajusté} = \sum_{i=0}^{card(\mathcal{L})-1} \omega_i AM_i = \sum_{i=0}^{card(\mathcal{L})-1} \frac{\omega_i \rho(X_i)}{\rho(X_0)} - 1$$

$$RM_{ajusté} = \sum_{i=0}^{card(\mathcal{L})-1} \omega_i RM_i = \sum_{i=0}^{card(\mathcal{L})-1} \frac{\omega_i \rho(X_i) - \rho(X_0)}{\bar{\rho}(\mathcal{L}) - \underline{\rho}(\mathcal{L})}$$

avec :

- \mathcal{L} la classe de modèle contenant l'ensemble des modèles choisis
- ω_i le facteur de crédibilité associé au modèle i
- $\sum_{i=0}^{card(\mathcal{L})-1} \omega_i = 1$
- $\underline{\rho}(\mathcal{L}) = \inf\{\rho(X_i) | X_i \in \mathcal{L}\}, i = 0, \dots, card(\mathcal{L}) - 1$
- $\bar{\rho}(\mathcal{L}) = \sup\{\rho(X_i) | X_i \in \mathcal{L}\}, i = 0, \dots, card(\mathcal{L}) - 1$
- $\rho(X_0)$ = mesure de risque du modèle de référence

Une telle approche présenterait la possibilité de mieux prendre en compte le risque de modèle car on peut remarquer très facilement que $AM_{ajusté} \leq AM$ et $RM_{ajusté} \leq RM$. Cependant, le problème majeur concerne essentiellement la détermination des facteurs de crédibilité qui peut se révéler être une tâche fastidieuse et devra l'objet d'une étude complète. Il faudra toutefois veiller à ce que l'apport d'un avis d'expert ne soit pas à son tour une potentielle source significative de risque de modèle.

Conclusion

L'objet de ce mémoire a été de proposer une première approche pour la quantification du risque de modèle dans le contexte actuel de Solvabilité II. Ce sujet est encore très peu abordé dans le monde actuariel mais l'apparition d'un tel risque peut avoir des influences non négligeables sur le capital des compagnies d'assurance et de réassurance.

Les recherches effectuées sur le risque de modèle, nous ont montré qu'il n'existe pas de définition précise de ce risque et que de multiples sources peuvent être à l'origine de l'apparition du risque de modèle. Nous avons décidé de nous focaliser en particulier sur le risque de spécification, considéré comme sa source principale, et de proposer une méthode de quantification pertinente. Cette méthode était l'approche dite de « modèle de référence », dont l'évaluation du risque de modèle est basée sur deux mesures de risque : la valeur absolue et relative du risque de modèle.

Nous avons d'abord appliqué cette approche sur un modèle d'évaluation d'un actif financier. La quantité importante de données à notre disposition nous a permis de vérifier précisément les hypothèses des modèles stochastiques sélectionnés et de calibrer leurs paramètres. Parmi le modèle de Black & Scholes, le modèle de Merton à saut et le modèle GARCH, le choix du modèle de référence a été appuyé par ces vérifications et par l'application d'un test statistique nommé le *Probability Integral Transform*, test qui permettait de backtester nos modèles sur l'historique de données disponible.

Parmi ces trois modèles, le modèle GARCH s'est avéré adapté en particulier pour nos données. Après application, la quantification du risque de modèle sur la VaR 99,5 % et la TVaR 99 % pour la projection de l'actif pour l'année 2013 n'a pas permis de mettre en évidence l'apparition d'un tel risque sur nos données, notamment à cause de la tendance relativement calme du marché cette année. Cependant, des études futures durant des périodes de marchés beaucoup plus volatiles devront être réalisées pour observer l'évolution de ce risque.

Nous avons ensuite appliqué notre approche cette fois-ci sur un modèle de provisionnement non-vie où la quantité de données mise à notre disposition était moins conséquente. La vérification des hypothèses de la méthode de Chain-Ladder, et des modèles de Mack et GLM (Poisson, Log-Gamma, Log-Normale) s'est avérée par conséquent plus difficile. Le risque de modèle s'est trouvé nettement plus visible sur la VaR 99,5 % et la TVaR 99 % de la distribution de la charge ultime. Cependant, cette quantification dépend énormément de la classe de modèles retenues et parmi ces modèles certains peuvent donner des valeurs pouvant entraîner une surestimation du risque de modèle. Nous avons alors décidé de proposer des améliorations de notre approche de quantification dont l'alternative future serait de prendre en prenant compte des facteurs de crédibilités dépendant d'avis d'experts et d'avis statistiques.

Le risque de modèle reste un risque que les professionnels aussi bien du monde assurantiel que financier doivent continuer à étudier et à approfondir dans les années à venir. L'application de la réforme Solvabilité II en janvier 2016 pourrait conforter la nécessité de quantifier ce risque de manière précise. Les données à la disposition des actuaires ne permettent souvent pas de vérifier complètement les hypothèses des modèles, et le choix d'un modèle pour le portefeuille étudié pourrait s'appuyer alors également sur des avis fournis par les experts. C'est cette raison qui nous a poussée à proposer des améliorations pour notre approche de quantification dite de « modèle de référence » à travers des facteurs de crédibilité. Cependant, la détermination de tels facteurs devra se faire en fonction de plusieurs critères aussi bien qualitatifs que quantitatifs, et cette pondération permettrait de quantifier le risque de modèle d'une manière adéquate en fonction du capital du modèle de référence.

Table des figures

Figure 1 : Calendrier de la réforme Solvabilité II	12
Figure 2 : Les trois piliers	13
Figure 3 : Organigramme des sources potentielles du risque de modèle.....	18
Figure 4 : Courbe historique de l'indice GDDLUS	29
Figure 5 : Exemple d'un saut dans le cours historique.....	33
Figure 6 : Autocorrélation des rendements aux carrés de l'actif.....	36
Figure 7 : Test de normalité des rendements	40
Figure 8 : Prédiction de la volatilité passée.....	43
Figure 9 : Histogramme loi uniforme – modèle GARCH.....	46
Figure 10 : Fonction de répartition loi uniforme – modèle GARCH	46
Figure 11 : Autocorrélogrammes loi uniforme – modèle GARCH	47
Figure 12 : Intervalle de confiance à 95 % du modèle Black & Scholes	49
Figure 13 : Intervalle de confiance à 95 % du modèle Merton à saut	49
Figure 14 : Intervalle de confiance à 95 % du modèle GARCH.....	50
Figure 15 : Paiements cumulés par année de souscription en fonction des années de développement	58
Figure 16 : Vérification de l'hypothèse de linéarité entre les années de développement successives	70
Figure 17 : Vérification graphique de l'hypothèse de variance du modèle de Mack.....	71
Figure 18 : Distribution des résidus des modèles GLM en fonction de la distribution d'une loi normale	75
Figure 19 : Représentation graphique de la fonction de densité de la charge ultime pour chaque modèle.....	78

Liste des tableaux

Tableau 1 : Résultats des statistiques descriptives sur le rendement journalier de l'indice	29
Tableau 2 : Evolution des paramètres du modèle de Black & Scholes	40
Tableau 3 : Evolution des paramètres du modèle de Merton à saut.....	41
Tableau 4 : Evolution des paramètres du modèle GARCH	42
Tableau 5 : Paramètres de chaque modèle pour la projection de l'actif pour l'année 2013	48
Tableau 6 : Etude statistique de la distribution de la VaR 99,5 % obtenue pour chaque modèle.....	51
Tableau 7 : Etude statistique de la distribution de la TVaR 99 % obtenue pour chaque modèle.....	51
Tableau 8 : Résultats mesure absolue du risque de modèle pour la VaR 99,5 %	52
Tableau 9 : Résultats mesure absolue du risque de modèle pour TVaR 99 %	52
Tableau 10 : Résumé des informations de chaque modèle GLM.....	66
Tableau 11 : Résultat du test d'absence d'effet calendaire	70
Tableau 12 : Coefficients de corrélation entre les années de développement	73
Tableau 13 : Statistiques T du test et quantiles de la loi de Student	74
Tableau 14 : Résultats statistiques des tests de normalité pour chaque modèle GLM	74
Tableau 15 : Résultats de l'estimation des paramètres du modèle Poisson.....	76
Tableau 16 : Synthèse des p-valeurs de chaque modèle GLM.....	76
Tableau 17 : CoV de la distribution de charge ultime pour chaque modèle.....	78
Tableau 18 : Résultats des mesures absolue et relative du risque de modèle pour la VaR 99,5 %.....	79
Tableau 19 : Résultats des mesures absolue et relative du risque de modèle pour la TVaR 99 %.....	79

Liste des abréviations

EMS	Exigence de Marge de Solvabilité
SCR	Solvency Capital Requirement
MCR	Minimum Capital Requirement
ORSA	Own Risk Solvency Assesment
PIB	Produit Intérieur Brut
VaR	Value at Risk
TVaR	Tail Value at Risk
AM	Absolute Measure (of model risk)
RM	Relative Measure (of model risk)
GARCH	Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
EDS	Equation Différentielle Stochastique
AIC	Akaike Information Criterion
PIT	Probability Integral Transform
i.i.d	Indépendant et identiquement distribué
CoV	Coefficient of Variation
GAUM	Global Aearospace Underwriting Managers
ODP	Overdispersed Poisson

Bibliographie

- [1] A. E. Renshaw, R. J. Verrall. *A Stochastic Model Underlying the Chain-Ladder Technique*. 1998.
- [2] Alexandre Sakuth, Fengchong Wang. «Model Risk.» 2012.
- [3] Andrew J.G. Cairns. *Parameter and Model Risk in Insurance Modelling*.
- [4] Annette J. Dobson. *Introduction To Generalized Linear Models*. 2002.
- [5] Benoit A. Aubert, Jean-Grégoire Bernard. «Mesure intégrée du risque dans les organisations.».
- [6] Chao Li. *An Estimation of GARCH Models with an Application to Nordea Stock Prices*. 2007.
- [7] Crouhy. *Model Risk - Concepts, Calibration and Pricing*. Risk Books, 2000.
- [8] Davy Sengdy. «Mémoire : Opimisation du SCR Risque de Réserve sous Solvabilité II» .
- [9] Francis X. Diebold, Todd A. Gunther, Anthony S. Tay. *Evaluating Density Forecasts*. 1998.
- [10] Frederic Henrich. «Cours - Exigences Prudentielles en assurance : de Solvabilité I à Solvabilité II.».
- [11] Frédéric Planchet, Pierre-E Thérond. *L'impact de la prise en compte des sauts boursiers dans les problématiques d'assurance*. 2005.
- [12] Institut des Actuaire. «Projet de recommandations pour la maîtrise du risque de modèle.».
- [13] J. A. Nelder, R. W. M. Wedderburn. *Generalized Linear Models*. 1972.
- [14] Jacques Franchi. «Cours - Calcul Stochastique.».
- [15] Jeroen Kerkhof, Bertrand Melenberg, Hans Schumacher. *Model Risk and Regulatory Capital*. 2002.
- [16] John Hull, Alan White. *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*. 1987.
- [17] Julian Lowe. *A Practical Guide To Measuring Reserve Variability Using : Bootstrapping, Operational Time And A Distribution-Free Approach*. 1994.
- [18] Khalid Khaled, Meddahi Samia. *Estimation of the Parameters of the Stochastic Differential Equations Black-Scholes Model Share Price of Gold*. 2010.
- [19] Manon Tessier. «Mémoire : Facteurs impactant l'estimation de la volatilité des réserves en réassurance dommages ».
- [20] Marie-Laure Dreyfus. *Les grands principes de Solvabilité II*. L'Argus de l'assurance.
- [21] *Model Risk*. s.d. www.investopedia.com.
- [22] Nicole Branger, Christian Schlag. *Model Risk : A Conceptual Framework for Risk Measurement and Hedging*. 2004.

- [23] Olivier Roustant. «Cours - Modèle GARCH : Application à la prévision de la volatilité.» 2007.
- [24] P. D. England, R. J. Verrall. *Stochastic claims reserving in general insurance*. 2002.
- [25] Pauline Barrieu, Giacomo Scandolo. *Assessing Financial Model Risk*. 2013.
- [26] Peter Blum. *On some mathematical aspects of dynamic financial analysis*. 2004.
- [27] Philippe Artzner et al. *Coherent measures of risk*. 1998.
- [28] Philip Bertram, Philipp Sibbertsen, Gerhard Stahl. *About the Impact of Model Risk on Capital Reserves : A Quantitative Analysis*. 2011.
- [29] Philipp Sibbertsen, Gehrard Stahl, Corianna Luedtke. *Measuring model risk*. 2008.
- [30] Robert C. Merton. *Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous*. 1975.
- [31] S. G. Kou. *A Jump-Diffusion Model for Option Pricing*. 2002.
- [32] SCOR - Document interne. «ResQ & RWB Best Practice.».
- [33] Selma Jaziri. «Mémoire : Méthodes de provisionnement non-vie et risque de réserve à un an».
- [34] Shaun Wang, Markus Stricker, Stephen J. Strommen. «Model Validation for Insurance Enterprise Risk and Capital Models.» 2014.
- [35] Thomas Mack. *Measuring the Variability of Chain Ladder Reserve Estimates*. 1993.
- [36] Tim Bollerslev. *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*. 1986.

ANNEXES

Annexe 1 : Lemme d'Itô

Soit x qui suit un processus d'Itô de paramètres $\mu(x, t)$ et $\sigma(x, t)$:

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t) dB$$

où B est mouvement brownien géométrique standard

D'après le lemme d'Itô, Si $f(x, t)$ est une fonction de classe $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ alors :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \mu(x, t)dt + \frac{\partial f}{\partial t} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2(x, t)dt$$

Pour la démonstration du modèle de Black & Scholes, il suffit de poser : $f(S_t, t) = \ln(S_t)$

Annexe 2 : Démonstration des équations du modèle de Merton à saut

- Pour l'espérance, il s'agit de la même espérance que celle du modèle Black & Scholes c'est-à-dire :

$$m_1 = E(R) = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$$

- Après calcul, le moment centré d'ordre $2k$ du rendement R s'écrit :

$$m_{2k} = E(R - m)^{2k} = e^{-\lambda} \frac{(2k)!}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (\sigma^2 + n\Omega^2)^k$$

▪ Pour $k = 1$:

$$m_2 = E(R - m)^2 = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (\sigma^2 + n\Omega^2) = e^{-\lambda} \left[\sigma^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} + \Omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\lambda^n}{n!} \right]$$

$$m_2 = e^{-\lambda} [\sigma^2 e^\lambda + \lambda \Omega^2 e^\lambda]$$

$$m_2 = \sigma^2 + \lambda \Omega^2$$

▪ Pour $k = 2$:

$$m_4 = E(R - m)^4 = 3e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (\sigma^2 + n\Omega^2)^2$$

$$= 3e^{-\lambda} \left[\sigma^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} + 2\sigma^2 \Omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\lambda^n}{n!} + \Omega^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 \lambda^n}{n!} \right]$$

Or $n^2 = n(n - 1) + n$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 \lambda^n}{n!} = e^\lambda [\lambda^2 + \lambda]$$

Donc $m_4 = 3e^{-\lambda} [\sigma^4 e^\lambda + 2\sigma^2 \Omega^2 e^\lambda + (\lambda^2 + \lambda) \Omega^4 e^\lambda]$

$$m_4 = 3[\sigma^4 + 2\sigma^2 \Omega^2 + (\lambda^2 + \lambda) \Omega^4]$$

- Pour $k = 3$:

$$m_6 = E(R - m)^6 = 15e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (\sigma^2 + n\Omega^2)^3$$

$$= 15e^{-\lambda} \left[\sigma^6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} + 3\sigma^4\Omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\lambda^n}{n!} + 3\sigma^2\Omega^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2\lambda^n}{n!} + \Omega^6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3\lambda^n}{n!} \right]$$

$$\text{Or } n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3\lambda^n}{n!} = e^{\lambda}[\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda]$$

$$\text{Donc } m_6 = 15e^{-\lambda} [\sigma^6 e^{\lambda} + 3\lambda\sigma^4\Omega^2 e^{\lambda} + 3(\lambda^2 + \lambda)\sigma^2\Omega^4 e^{\lambda} + \Omega^6(\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda)e^{\lambda}]$$

$$m_6 = 15[\sigma^6 + 3\lambda\sigma^4\Omega^2 + 3(\lambda^2 + \lambda)\sigma^2\Omega^4 + \Omega^6(\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda)]$$

Annexe 3 : Application du critère d'information d'Akaike (AIC)

Nous allons présenter l'application de ce critère sur un seul jeu de données historiques (Historique 1999-2009) car les observations faites sur l'ensemble des autres jeux sont identiques.

Nous avons d'abord calculé la log-vraisemblance de chaque modèle GARCH(p,q), $p, q \in \{1,2,3\}^2$. Le tableau ci-dessous donne les résultats obtenus :

p / q	1	2	3
1	17 104	17 072	17 084
2	17 100	17 116	17 097
3	17 085	17 114	17 116

Tableau : Log-vraisemblance GARCH(p,q)

Nous pouvons constater que les log-vraisemblances sont très proches entre elles et que l'ajout de paramètres supplémentaires dans le modèle ne diminue pas de façon significative cette vraisemblance.

Afin de confirmer que le choix du modèle GARCH(1,1) est raisonnable, nous allons tester la significativité des paramètres de chaque modèle GARCH. Si la p-valeur du paramètre est inférieure à 5%, le test de Student est significatif et l'hypothèse H_0 (nullité du paramètre) est rejetée. Voici les résultats obtenus :

GARCH	ω	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3
(1, 1)	1,67E-04	< 2e-16	X	X	< 2e-16	X	X
(1, 2)	1,33E-03	2,20E-05	X	X	9,57E-04	1,00E+00	X
(1, 3)	1,40E-03	2,99E-05	X	X	6,82E-03	1,00E+00	1,00E+00
(2, 1)	2,08E-04	5,85E-01	2,12E-05	X	< 2e-16	X	X
(2, 2)	1,79E-03	5,87E-01	3,97E-04	X	1,25E-02	5,08E-01	X
(2, 3)	2,18E-03	5,93E-01	5,79E-04	X	2,67E-02	7,46E-01	9,07E-01
(3, 1)	3,44E-04	5,87E-01	5,09E-03	1,00E+00	< 2e-16	X	X
(3, 2)	1,80E-01	5,88E-01	5,11E-04	1,00E+00	4,05E-01	8,12E-01	X
(3, 3)	4,79E-01	5,93E-01	1,16E-03	7,80E-01	9,75E-01	6,67E-01	8,40E-01

Légende :

X Paramètre inexistant
 p-valeur non significative : > 0,05

Tableau : p-valeurs des paramètres des modèles GARCH(p,q)

En observant les résultats des p-valeurs, nous pouvons constater que seul l'ensemble des paramètres du modèle GARCH(1,1) sont significatifs.

Annexe 4 : Test du Probability Integral Transform

Modèle Black & Scholes

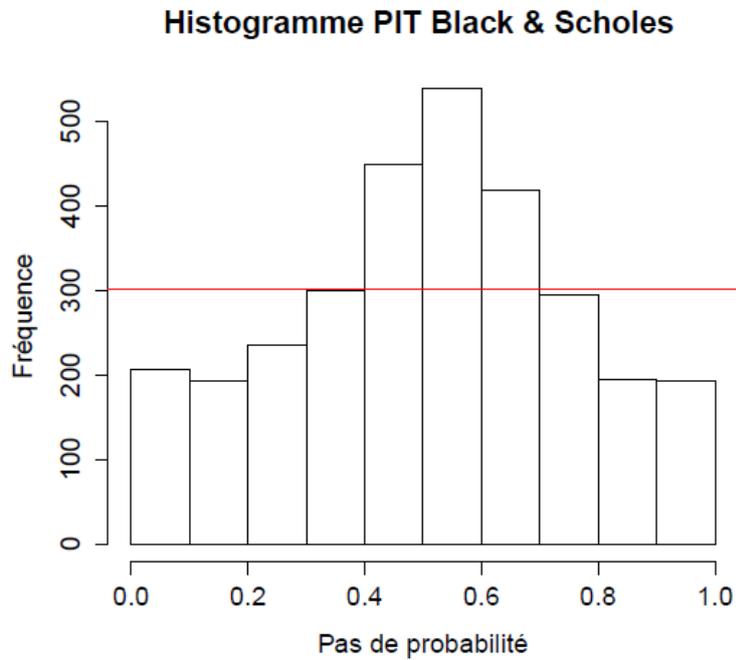


Figure 1 : Histogramme loi uniforme – modèle GARCH

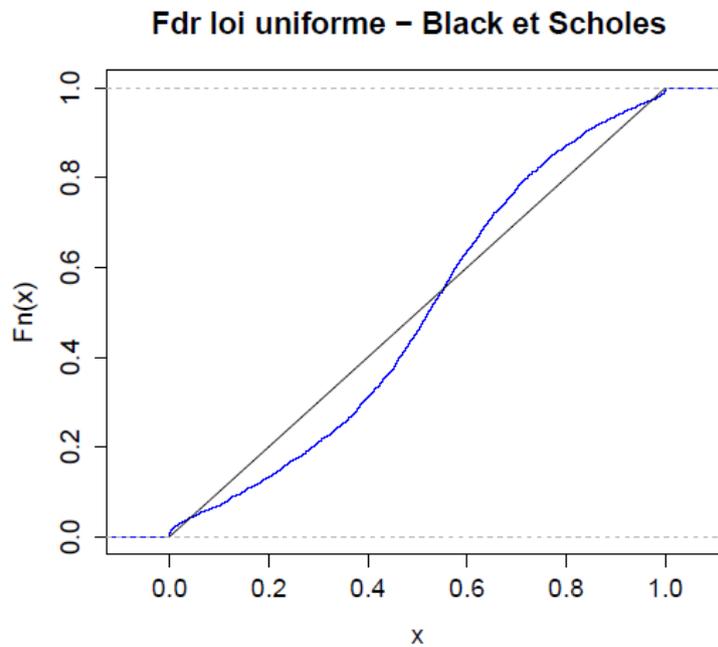


Figure 2 : Fonction de répartition loi uniforme – modèle GARCH

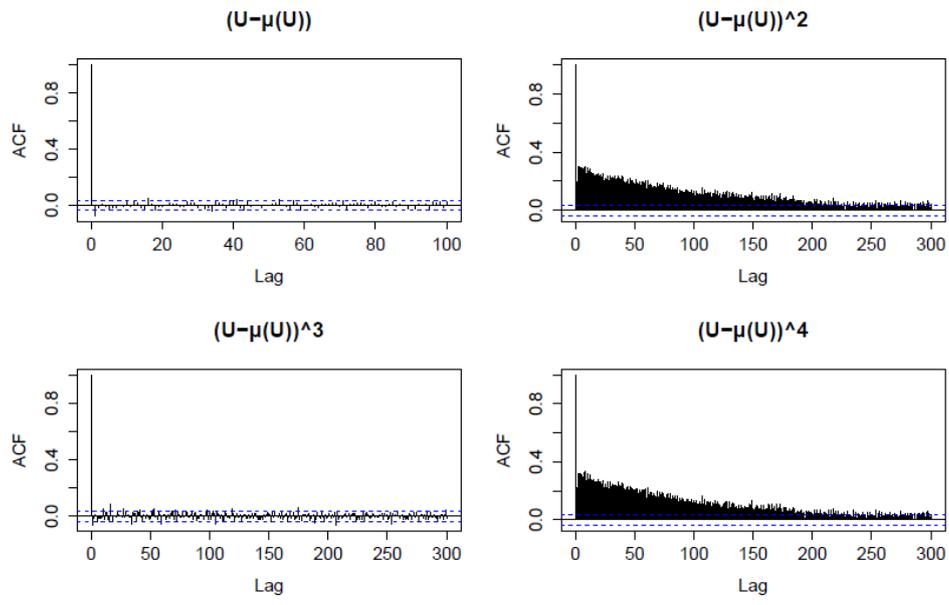


Figure 3 : Autocorrélogrammes loi uniforme – modèle GARCH

Modèle Merton à saut

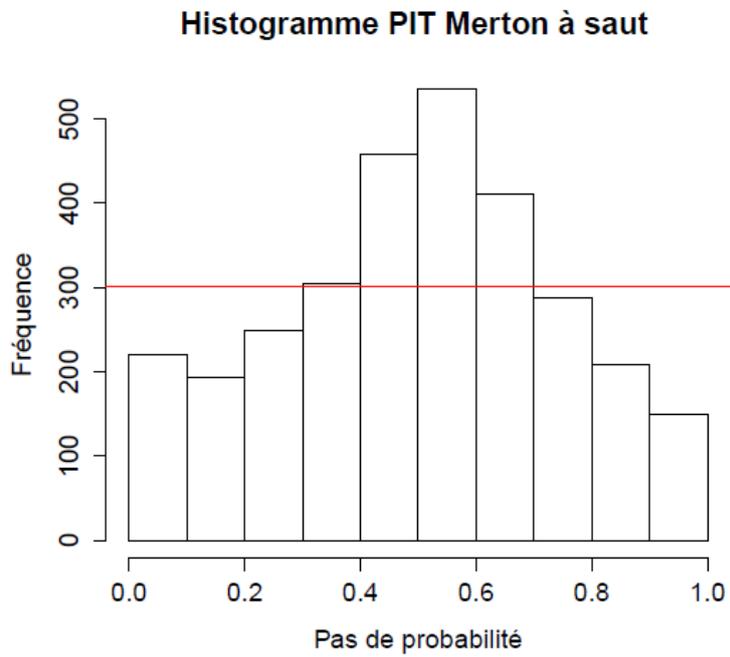


Figure 1 : Histogramme loi uniforme – modèle GARCH

Fdr loi uniforme – Merton à saut

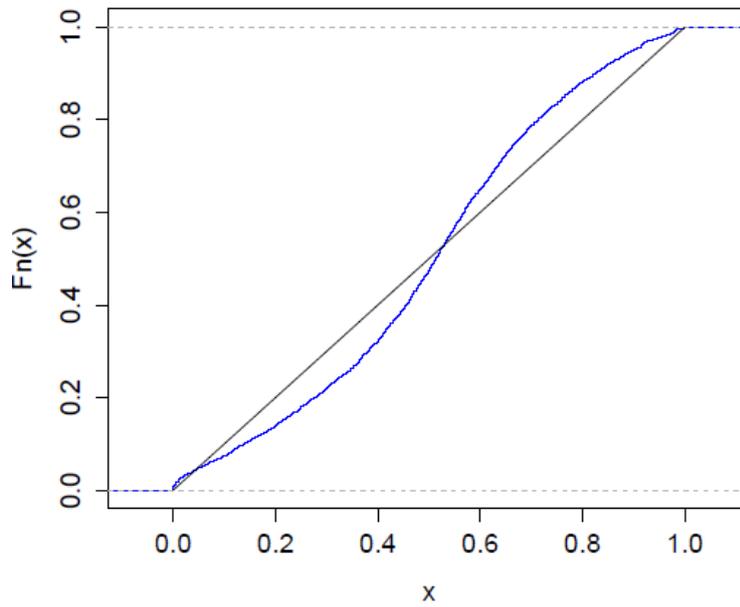


Figure 2 : Fonction de répartition loi uniforme – modèle GARCH

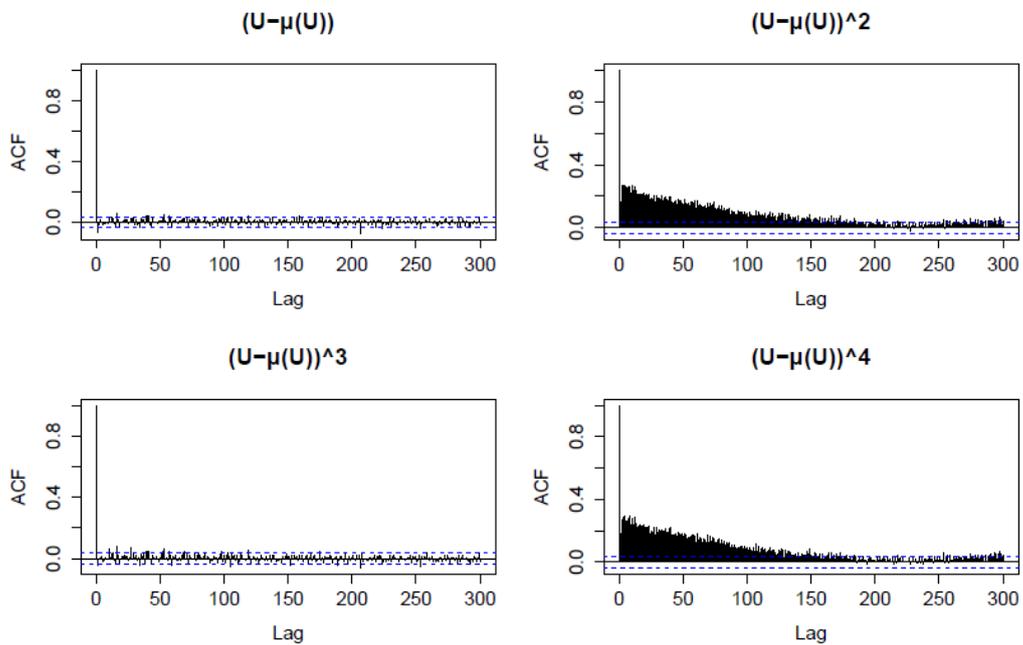


Figure 3 : Autocorrélogrammes loi uniforme – modèle GARCH

Modèle GARCH

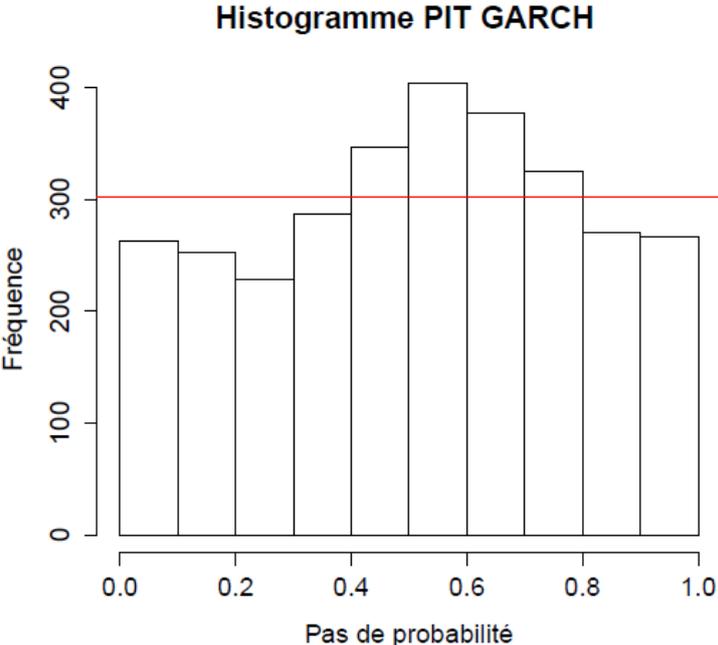


Figure 1 : Histogramme loi uniforme – modèle GARCH

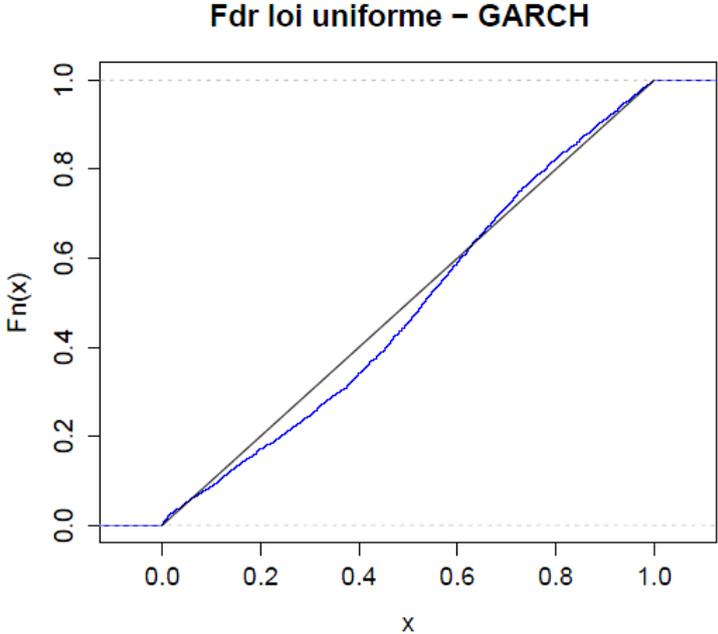


Figure 2 : Fonction de répartition loi uniforme – modèle GARCH

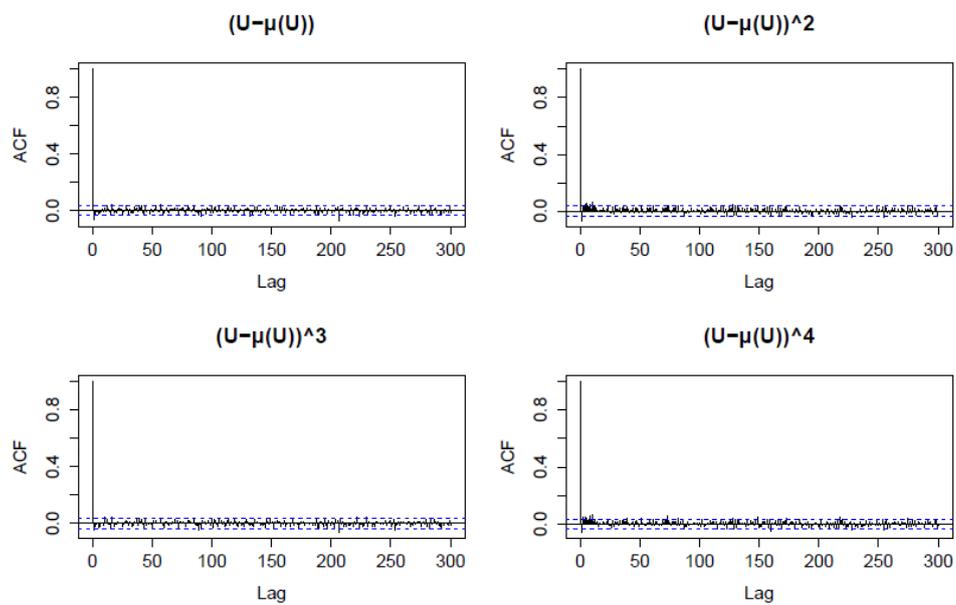


Figure 3 : Autocorrélogrammes loi uniforme – modèle GARCH

Annexe 5 : Test d'absence d'effet calendaire

Ce test proposé par Thomas Mack permet de tester l'indépendance des années de souscription qui peut être remise en cause dû à des effets dit « calendaires ». Ces effets peuvent intervenir par exemple à cause de changements dans la gestion des sinistres ou de l'inflation.

Nous calculons les facteurs de développement individuel $f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ et nous définissons les éléments d'une diagonale D_j par :

$$D_j = \{D_{j,1}, D_{j-1,2}, \dots, D_{2,j-1}, D_{1,j}\} \quad 1 \leq j \leq n$$

Pour chaque colonne j du triangle des facteurs de développement individuels, nous comparons ses éléments à la médiane de cette même colonne que nous notons :

$$med_j = \text{médiane}(f_{1,j}, \dots, f_{n-j,j}) \quad 1 \leq j \leq n$$

Nous construisons ensuite un triangle qui est constitué de valeurs suivantes :

Pour un j fixé,

- Si $f_{i,j} < med_j$, nous donnons la valeur -1
- Si $f_{i,j} = med_j$, nous donnons la valeur 0 (cas d'un nombre impair d'éléments dans la colonne j)
- Si $f_{i,j} > med_j$, nous donnons la valeur +1

Pour chaque diagonal, nous notons par L_j (pour « Larger ») et S_j (pour « Smaller ») le nombre respectivement de « +1 » et de « -1 ». Dans le cas théorique d'absence d'effet calendaire, la probabilité d'être supérieure ou inférieure à la médiane est de 50 % et donc les valeurs de L_j et S_j doivent être très rapprochées.

Nous définissons la variable $Z_j = \min(S_j ; L_j)$ qui théoriquement doit être proche de $\frac{S_j + L_j}{2}$. Dans l'hypothèse d'absence d'effet calendaire, la variable Z_j suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n_j, p)$ avec $n_j = L_j + S_j$ et $p = 0,05$. Thomas Mack a démontré que :

$$E(Z_j) = \frac{n_j}{2} - \binom{n_j - 1}{\lfloor \frac{n_j - 1}{2} \rfloor} \frac{n_j}{2^{n_j}}$$

$$V(Z_j) = \frac{n_j(n_j - 1)}{2} - \binom{n_j - 1}{\lfloor \frac{n_j - 1}{2} \rfloor} \frac{n_j(n_j - 1)}{2^{n_j}} + E(Z_j) - E(Z_j)^2$$

Nous définissons la variable aléatoire $Z = \sum_{k=2}^{n-1} Z_k$ tel que :

$$E(Z) = \sum_{k=2}^{n-1} E(Z_k) \text{ et } V(Z) = \sum_{k=2}^{n-1} V(Z_k).$$

Comme la somme de variables aléatoires binomiales converge vers une variable aléatoire normale, nous supposons que la variable Z suit une loi normale. Nous pouvons donc construire un intervalle de confiance à 95 % permettant de tester notre hypothèse principale.

L'intervalle de confiance est :

$$IC_{normale}^{95\%} = \left[E(Z) - 1,96 \sqrt{V(Z)} ; E(Z) + 1,96 \sqrt{V(Z)} \right]$$

Si notre variable Z appartient à cet intervalle alors nous pouvons conclure à l'absence d'effet calendaire et par conséquent à l'absence de dépendance entre les années de souscription.

Annexe 6 : Résultats de l'estimation des paramètres des modèles GLM

Modèle Poisson					
Paramètre	Estimation	p-valeur	Paramètre	Estimation	p-valeur
μ	13,87	< 2E-16	μ	13,87	< 2E-16
α_2	0,18	< 2E-16	β_2	1,95	< 2E-16
α_3	0,44	< 2E-16	β_3	1,70	< 2E-16
α_4	0,24	< 2E-16	β_4	1,23	< 2E-16
α_5	0,69	< 2E-16	β_5	0,89	< 2E-16
α_6	0,95	< 2E-16	β_6	0,92	< 2E-16
α_7	1,37	< 2E-16	β_7	3,88E-03	< 2E-16
α_8	0,88	< 2E-16	β_8	-0,06	< 2E-16
α_9	1,30	< 2E-16	β_9	-0,64	< 2E-16
α_{10}	0,96	< 2E-16	β_{10}	-0,72	< 2E-16
α_{11}	0,69	< 2E-16	β_{11}	-1,90	< 2E-16
α_{12}	0,70	< 2E-16	β_{12}	-1,54	< 2E-16
α_{13}	0,62	< 2E-16	β_{13}	-1,96	< 2E-16
α_{14}	0,45	< 2E-16	β_{14}	-2,31	< 2E-16
α_{15}	0,95	< 2E-16	β_{15}	-3,27	< 2E-16

Tableau : Résultats de l'estimation des paramètres du modèle Poisson

Modèle Log-Gamma					
Paramètre	Estimation	p-valeur	Paramètre	Estimation	p-valeur
μ	7,21E-02	< 2E-16	μ	7,21E-02	< 2E-16
α_2	-2,01E-03	0,07	β_2	-8,48E-03	5,12E-13
α_3	-2,09E-03	0,07	β_3	-7,96E-03	1,67E-11
α_4	-3,41E-04	0,77	β_4	-5,74E-03	7,43E-07
α_5	-2,45E-03	0,04	β_5	-4,34E-03	2,02E-04
α_6	-3,27E-03	6,99E-03	β_6	-4,60E-03	1,28E-04
α_7	-4,94E-03	8,25E-05	β_7	-1,11E-03	0,37
α_8	-3,35E-03	8,68E-03	β_8	8,49E-05	0,95
α_9	-4,81E-03	3,04E-04	β_9	4,84E-03	9,23E-04
α_{10}	-4,38E-03	1,56E-03	β_{10}	4,33E-03	4,71E-03
α_{11}	-1,34E-03	0,37	β_{11}	1,06E-02	1,41E-08
α_{12}	-3,10E-03	0,05	β_{12}	9,07E-03	4,08E-06
α_{13}	-2,37E-03	0,18	β_{13}	1,21E-02	2,04E-07
α_{14}	-1,11E-03	0,61	β_{14}	1,52E-02	1,41E-07
α_{15}	-4,72E-03	0,11	β_{15}	2,21E-02	2,94E-07

Tableau : Résultats de l'estimation des paramètres du modèle Log-Gamma

Modèle Log-Normale					
Paramètre	Estimation	p-valeur	Paramètre	Estimation	p-valeur
μ	13,83	< 2E-16	μ	13,83	< 2E-16
α_2	0,39	0,08	β_2	1,99	4,02E-14
α_3	0,41	0,08	β_3	1,86	2,17E-12
α_4	0,06	0,81	β_4	1,29	3,61E-07
α_5	0,49	0,04	β_5	0,95	1,58E-04
α_6	0,69	0,01	β_6	1,02	1,01E-04
α_7	1,09	5,63E-05	β_7	0,23	0,37
α_8	0,72	0,01	β_8	-0,01	0,97
α_9	1,09	2,13E-04	β_9	-0,91	1,68E-03
α_{10}	0,99	1,32E-03	β_{10}	-0,80	8,53E-03
α_{11}	0,24	0,45	β_{11}	-1,82	1,39E-07
α_{12}	0,67	0,06	β_{12}	-1,56	1,98E-05
α_{13}	0,49	0,21	β_{13}	-2,03	1,18E-06
α_{14}	0,20	0,67	β_{14}	-2,45	8,50E-07
α_{15}	0,99	0,12	β_{15}	-3,23	1,86E-06

Tableau : Résultats de l'estimation des paramètres du modèle Log-Normale