



HAL
open science

Identification, gestion et analyse de mesures d'atténuation des risques pris par un assureur dans un contrat de retraite supplémentaire

Pierre Damilo

► **To cite this version:**

Pierre Damilo. Identification, gestion et analyse de mesures d'atténuation des risques pris par un assureur dans un contrat de retraite supplémentaire. Gestion des risques [q-fin.RM]. 2014. dumas-01073561

HAL Id: dumas-01073561

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01073561>

Submitted on 10 Oct 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Mémoire présenté devant
l'UFR de Mathématique et Informatique
pour l'obtention du Master Mathématiques et Application, spécialité Statistique, parcours
Actuariat**

le Jeudi 02/10/2014

Par : Pierre DAMILO

Titre: Identification, Gestion et Analyse de Mesures d'atténuation des Risques pris par un
Assureur dans un contrat de retraite supplémentaire

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Entreprise :

Nom : Optimind Winter

Signature :

Membres du jury de l'UdS :

- M. Jacques Franchi
- M. Karl-Théodor Eisele
- M. Jean-Lucien Netzer
- M. Jean Bérard

Invités :

- M Vincent Vignon
- M. David Dubois
- M. Pierre Devolder
- M. Jean Modry
- Mme Magali Kelle-Vignon
- M. Alexandre You
- M. David Fitouchi
- Mme Stéphanie Foata
- M. Christian Hess
- M. Sylvain Gadenne
- Mme Myriam Maumy-Bertrand

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Thomas CHAN OU TENG

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

***Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)***

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Secrétariat : Mme Stéphanie RICHARD

Bibliothèque : Mme Christine Disdier

OPTIMIND WINTER

Mémoire d'Actuariat

L'identification, la gestion et l'étude des mesures d'atténuation des risques pris par un assureur dans un contrat de retraite supplémentaire

Pierre DAMILO

Université de Strasbourg

Diplôme Universitaire des Actuares de Strasbourg



REMERCIEMENTS

Je souhaite tout d'abord remercier Christophe EBERLE et Julie NORGUET pour m'avoir permis d'effectuer mon stage au sein d'Optimind Winter, ainsi que Pierre-Alain BOSCHER pour m'avoir accueilli dans son service « Protection Sociale ».

Je remercie tout particulièrement mon maître de stage : Thomas CHAN OU TENG pour m'avoir encadré et dirigé au cours de la rédaction de mon mémoire ainsi que pour son aide et ses conseils.

Je tiens également à adresser mes remerciements à l'ensemble des collaborateurs avec lesquels j'ai travaillé au cours de mon stage pour leurs conseils et leur bonne humeur, et plus particulièrement à Cyril MANACH et Aude LE GAL pour leur relecture de différentes parties de mon mémoire.

Je joins à ces remerciements, mon tuteur universitaire : Pierre DEVOLDER pour avoir suivi mon travail sur ce mémoire, ainsi que l'ensemble des professeurs et intervenants qui ont participé à ma formation d'actuaire.

RÉSUMÉ

Mots Clés : *Risques, Retraite Supplémentaire, Cotisations définies, Prestations définies, Modèle de Merton, Modèle de Cox-Ingersoll-Ross, Modèle de Vasicek, Mesure du risque, Value at Risk, Tail Value at Risk, Variance, Ecart-Type.*

Ce mémoire traite des risques pour l'assureur d'un contrat de retraite supplémentaire, afin que celui-ci puisse au mieux gérer ce genre de contrat qui a vocation à se développer dans l'avenir. Il tente aussi de répondre à la question suivante : « **Quels sont les risques pris par un assureur dans un contrat de retraite supplémentaire, comment les gérer et quelles sont les mesures d'atténuations efficaces qui peuvent être mises en place ?** ».

Après avoir présenté la retraite, nous identifierons les risques qui y sont liés. Il s'agit du risque de longévité, risque de marché, risque d'inflation, risque de rachat et risque législatif.

Pour chacun de ces risques nous proposons des mesures pour en atténuer les effets ou les gérer. Ainsi nous modéliserons, sur la base d'une population fictive de rentiers, un programme de réassurance mais aussi différentes stratégies d'investissement sur le marché, une clause de revalorisation des pensions et l'impact d'un changement de date de départ à la retraite.

Ce modèle est basé sur plusieurs hypothèses dont des modèles de diffusion pour simuler la valeur des obligations, des actifs et de l'inflation. Nous utiliserons respectivement un modèle de Cox-Ingersoll-Ross, un modèle de Merton et un modèle de Vasicek pour modéliser ces valeurs.

Les résultats de cette modélisation sont comparés avec les résultats d'un modèle témoin, qui n'a pas fait l'objet d'une atténuation des risques. Nous pourrions ainsi conclure sur l'efficacité de chacune des propositions de gestion des risques que nous avons formulées.

Pour comparer les risques, nous nous baserons sur l'observation des quantiles du résultat global de l'assureur, mais aussi sur ceux du résultat maximum et du résultat minimum. Nous comparerons également des valeurs de mesure du risque telles que l'écart-type, le semi-écart-type, la VaR ou la TVaR.

On conclura sur l'efficacité de plusieurs mesures annoncées : la réassurance, une stratégie d'investissement basée en priorité sur des obligations, un placement suivant les taux Forward et sur une date d'ouverture des droits tardive.

Par contre, la mesure consistant en l'instauration d'une clause d'indexation fixe de la pension de retraite ou les mesures d'atténuation du risque de rachat seront jugées inefficaces.

ABSTRACT

Keywords : *Risk, Supplemental Retirement, Defined contribution, Defined Benefit, Model Merton, Model of Cox-Ingersoll-Ross, Model of Vasicek, Risk measurement, Value at Risk, Tail Value at Risk, Variance, Standard Deviation.*

This report aims to analyze risks of a contract of extra pension for the insurer. Then, he will be able to handle this kind of contract in a better way. That is essential since the extra pension contracts are intended to increase in the future. This approach allows to answer the question: **"What are the risks taken by an insurer with a contract of additional pension, how to manage them and what measures must be taken ? »**

After presenting retirement, we will identify the risks which are associated with it. These are the longevity risk, the market risk, the inflation risk, the lapse risk and legislative risk.

For each of these risks, measures are proposed to mitigate their impacts. Thus, a model will be detailed. This model is based on a fictitious population of annuitant, a reinsurance program, but also different investment strategies on the market, a pensions revaluation clause and the impact of a retirement date change.

This model is based on several assumptions whose diffusion models to simulate the value of bonds, and asset inflation. We will use respectively a Cox model-Ingersoll-Ross model of Merton and Vasicek model to model these values.

The modeling results are compared with results from a standard model. Finally, we can conclude on the effectiveness of each risk management proposal that we have made.

To compare the risks, we will use the quantiles of the insurer's result, but also the maximum result and minimum result. Then, we compare the risk measures values as the standard deviation, the semi-standard deviation, VaR or TVAR.

We conclude on the effectiveness of several measures announced: reinsurance, investment strategy mainly based on bonds, an investment related to the forward rate and later retirements.

Nevertheless, the introduction of a clause which holds indexation of pensions and lapse risk mitigation measures will be judged as ineffective.

LISTE DES ABRÉVIATIONS ET LEXIQUE

ARRCO : Association pour le Régime de Retraite COmplémentaire des salariés

AGIRC : Association Générale des Institutions de Retraite des Cadres

CNAV : Caisse Nationale d'Assurance Vieillesse

COR : Conseil d'Orientation des Retraites

EDS : Equation Différentielle Stochastique

PASS : Plafond Annuel de la Sécurité Sociale (37 548 € en 2014)

QV : Quotient de vieillesse : Rapport du nombre d'actif et du nombre de retraité d'une population

RR : Rente de Retraite

TGF : Table Générationnelle des Femmes

TGH : Table Générationnelle des Hommes

TME : Taux Moyen des Emprunts d'Etat : c'est le taux de rendement sur le marché secondaire des emprunts d'État à taux fixe supérieurs à 7 ans.

TR : Taux de remplacement : Rapport du montant de la retraite sur le dernier revenu d'activité.

TVaR : Tail Value-At-Risk

VaR : Value-At-Risk (Valeur sous risque)

Formules Usuelles :

$v = \frac{1}{1+i}$: Facteur d'actualisation en fonction du taux d'intérêt i .

$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \times {}_k p_x$: Capital constitutif d'une rente viagère à termes échus d'un assuré d'âge x , où ${}_k p_x$ est la probabilité, pour un assuré d'âge x de survivre pendant k années.

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS.....	2
RÉSUMÉ.....	3
ABSTRACT.....	5
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET LEXIQUE	7
SOMMAIRE.....	8
PRESENTATION D'OPTIMIND WINTER	11
INTRODUCTION	12
1. PRESENTATION DE LA RETRAITE	14
1.1 MODE DE FINANCEMENT.....	14
1.1.1 <i>Système par répartition</i>	14
1.1.2 <i>Système par capitalisation</i>	15
1.2 MODE DE GESTION	17
1.2.1 <i>Gestion en Prestations Définies (DB)</i>	17
1.2.2 <i>Gestion en Contributions Définies (DC)</i>	18
1.3 THEORIE DES 3 PILIERS.....	19
1.3.1 <i>Les régimes de Base et Complémentaires</i>	20
1.3.2 <i>La retraite supplémentaire d'entreprise</i>	22
1.3.3 <i>La retraite supplémentaire individuelle</i>	25
2. IDENTIFICATION DES RISQUES D'UN CONTRAT DE RETRAITE COLLECTIF	
SUPPLEMENTAIRE.....	26
2.1 RISQUE DE LONGEVITE	26
2.2 RISQUE DE MARCHE	27

2.3	RISQUE D'INFLATION	27
2.4	RISQUE LEGISLATIF	28
2.5	RISQUE DE RACHAT.....	29
3.	METHODOLOGIE ET MODELE.....	30
3.1	DESCRIPTIF DU MODELE	30
3.2	LA POPULATION ETUDIEE	31
3.2.1	<i>Méthodologie</i>	31
3.2.2	<i>La Population initiale</i>	32
3.2.3	<i>Les données de calibrage</i>	33
3.2.4	<i>La Population obtenue</i>	35
4.	NOTIONS ESSENTIELLES.....	36
4.1	MESURE DU RISQUE.....	36
4.1.1	<i>La variance / L'écart type</i>	36
4.1.2	<i>La semi-variance / Le semi-Ecart-Type</i>	36
4.1.3	<i>La Value-At-Risk (VaR)</i>	37
4.1.4	<i>La Tail Value-At-Risk (TVaR)</i>	38
4.2	MOUVEMENT BROWNIEN	38
5.	ANALYSE DE L'IMPACT DE CES RISQUES.....	39
5.1	HYPOTHESES TECHNIQUES.....	39
5.1.1	<i>Table de Mortalité</i>	39
5.1.2	<i>Taux Techniques</i>	39
5.1.3	<i>Hypothèses de modélisation</i>	39
5.2	MODELISATION DES RISQUES SANS ATTENUATION (EXPERIENCE TEMOIN)	41
5.2.1	<i>Modélisation de la longévité</i>	41
5.2.2	<i>Modélisation du risque de marché</i>	42
5.2.3	<i>Modélisation de l'inflation</i>	50

5.2.4	<i>Modélisation d'un changement de législation</i>	52
5.2.5	<i>Modélisation du risque de rachat</i>	52
5.2.6	<i>Le Résultat de l'expérience témoin</i>	53
5.3	MESURES D'ATTENUATION ET DE GESTION DES RISQUES	56
5.3.1	<i>Réassurance</i>	56
5.3.2	<i>Surprime en cas de changement de table de mortalité</i>	57
5.3.3	<i>Stratégie d'investissement sur le marché</i>	58
5.3.4	<i>Investissement sur des Taux Forward</i>	59
5.3.5	<i>Clause d'indexation de la pension</i>	59
5.3.6	<i>Age de départ à la retraite</i>	60
5.3.7	<i>Pénalités de rachat et/ou prime de fidélité</i>	60
5.4	MODELISATION DES RISQUES APRES ATTENUATION	61
5.4.1	<i>Impact d'une réassurance en excédent de durée</i>	61
5.4.2	<i>Modélisation du risque de marché</i>	65
5.4.3	<i>Impact d'un investissement sur des taux Forward</i>	69
5.4.4	<i>Impact d'une clause d'indexation des pensions</i>	74
5.4.5	<i>Impact d'un changement de législation</i>	77
5.4.6	<i>Impact des pénalités de rachat et primes de fidélité</i>	81
6.	CONCLUSION	82
	TABLE DES GRAPHIQUES	85
	TABLE DES TABLEAUX	87
	BIBLIOGRAPHIE	89
	ANNEXES	91

PRÉSENTATION D'OPTIMIND WINTER

➤ La société Optimind Winter

Né de la fusion d'Optimind et du cabinet WINTER & Associés en 2012, OPTIMIND WINTER est aujourd'hui Leader de l'actuariat conseil et en gestion des risques, la société intervient principalement auprès des assureurs, des mutuelles, des banques, des institutions de prévoyance et des grandes entreprises. Composée d'actuaire, de consultants fonctionnels et techniques, OPTIMIND WINTER propose à ses clients une double compétence métier et système d'information permettant de mieux maîtriser le management et la réalisation de leurs projets.

➤ Le Métier « Protection Sociale »

La Protection Sociale est un des métiers de référence de l'expertise qu'OPTIMIND WINTER propose à ses clients. Les consultants d'OPTIMIND WINTER représentent l'une des plus fortes concentrations d'expertise du conseil français en Protection Sociale, rassemblant une pluridisciplinarité de compétences : actuariat, communication RH, formation, gestion administrative, logiciel, etc.

OPTIMIND WINTER intervient auprès des Branches, des entreprises, des administrations publiques et des collectivités territoriales sur l'ensemble des métiers de la Protection Sociale : Santé, Prévoyance, Dépendance, Retraite, Épargne Salariale et Passifs sociaux.

Sur l'ensemble des régimes de la Protection Sociale, OPTIMIND WINTER accompagne ses clients tout au long de la vie des dispositifs : conception d'un nouveau régime, évolution, sélection des organismes assureurs, mise en gestion, pilotage technique, négociations annuelles, gestion administrative, information et sensibilisation des salariés.

INTRODUCTION

L'évolution actuelle de la démographie et de l'environnement économique des pays développés engendrent, depuis quelques années, une remise en cause des régimes de retraite mis en place après la seconde Guerre Mondiale.

Les nombreuses réformes modifiant, entre autres, l'âge de départ légal à la retraite, montrent que les régimes de retraite obligatoires par répartition font l'objet d'une adaptation lente et peu sensible. Par conséquent les régimes de bases ne semblent pas pouvoir offrir une prestation suffisante à l'ensemble de la population sur le long terme. C'est pourquoi la mise en place de retraites supplémentaires d'entreprise devient une solution pertinente. En effet, alors qu'auparavant la retraite supplémentaire était utilisée pour se rapproché d'un taux de remplacement à 100 % plus que pour couvrir un réel besoin, elle est aujourd'hui presque indispensable pour s'assurer d'un niveau de retraite convenable suite aux diminutions des prestations des régimes complémentaires.

La structure par capitalisation des régimes d'entreprises les protège des problèmes démographiques qui fragilisent les régimes légaux. Cependant d'autres risques liés à cette structure obligent les entreprises à externaliser leurs engagements auprès d'assureurs. Les assureurs de ce type de contrat de retraite supplémentaire sont alors exposés à des risques non négligeables, comme le prouve l'effondrement de certain fonds de pension anglais. Afin de tenir les engagements pris sur le long terme envers l'assuré, l'assureur doit s'imposer une rigueur dans la gestion des risques liés au contrat. Il apparait alors essentiel que l'assureur ait une connaissance complète des risques auxquels il est exposé, dans le but de les maîtriser et de les atténuer.

Cette situation soulève la problématique suivante : « **Quels sont les risques pris par un assureur dans un contrat de retraite supplémentaire, comment les gérer et quelles sont les mesures d'atténuations efficaces qui peuvent être mises en place ?** ».

Ce mémoire répondra à cette question, en présentant tout d'abord les systèmes de retraites, avant d'identifier les principaux risques lié à un contrat de retraite. Après avoir présenté les données sur lesquelles porterons nos études, nous mesurons l'impact de différentes mesures d'atténuations sur les risques subi par l'assureur. Enfin, nous présenterons les résultats avant de conclure sur l'efficacité de chaque méthode d'atténuation proposée.

1. PRÉSENTATION DE LA RETRAITE

Définition¹ : « Un régime de retraite est un mécanisme systématique et organisé soit par base légale soit par règlement en vue d'octroyer des revenus aux personnes âgées. »

1.1 MODE DE FINANCEMENT

1.1.1 SYSTEME PAR REPARTITION

Le système de retraite par répartition se base sur un principe fondamental de solidarité intergénérationnelle. Il s'agit d'un système de financement collectif, c'est les cotisations des actifs actuels qui financent les prestations de retraite des retraités actuels. L'équilibre actuariel du régime repose sur l'équation suivante : la somme de toutes les cotisations salariales (C) est égale à la somme de toutes les pensions de retraite servies (R) :

$$C = \sum_z tx_{c_z} \times S_z = \sum_j p_j = R$$

Où :

tx_{c_z} est le taux de cotisation de l'actif z

S_z est le salaire actuel de l'actif z

p_j est la pension du retraité j

Si on suppose que le taux de cotisation est uniforme entre tous les cotisants et que l'on note I_t le nombre total d'actif à la date t, \bar{S} le salaire moyen des actifs, J_t le nombre total de retraité à la date t et \bar{p} la pension moyenne des retraités, alors :

$$C = I_t \times tc_c \times \bar{S} = \bar{p} \times J_t = R$$

Ce qui nous permet d'exprimer le niveau d'équilibre des pensions de retraite comme :

$$\bar{p} = QV_t \times tx_c \times \bar{S}$$

¹ Source : cours « Assurance Vie III » de Pierre DEVOLDER.

avec : $QV_t = \frac{I_t}{J_t}$, le quotient de vieillesse à la date t .

Grâce à cette dernière expression, il est évident que le niveau de pensions dépend directement du quotient de vieillesse et donc de la démographie de la population. On remarque par contre, que comme les cotisations sont immédiatement redistribuées, il n'y a aucune forme d'épargne et donc, à priori, il n'y a aucun impact du taux d'intérêt dans cet équilibre.

Dans un régime par répartition, les cotisations actuelles sont immédiatement utilisées pour payer les retraites actuelles. C'est pourquoi l'arrêt d'un régime de répartition est délicat. D'une part, car les cotisants actuels ne percevront aucunes prestations en contrepartie des cotisations déjà effectuées et d'autre part, car l'arrêt de ce régime entraîne immédiatement l'arrêt des rentes de retraite en cours, puisque aucune réserve n'est prévue en répartition. Ce problème de dernière génération explique le fait qu'un régime en répartition ne peut être mis en place qu'au niveau d'un Etat « immortel » et ne peut pas être utilisé au sein d'une entreprise, sujette au risque d'une cessation d'activité.

1.1.2 SYSTEME PAR CAPITALISATION

Il s'agit d'un système où le financement repose sur le placement des contributions jusqu'à l'âge de départ à la retraite. Ainsi, ce sont les cotisations d'aujourd'hui qui financent les prestations de demain. Il n'est alors pas nécessaire d'avoir de nouveaux entrants pour pérenniser le système.

L'équilibre du régime s'obtient en égalisant les cotisations capitalisées jusqu'à l'âge de retraite et le capital constitutif des prestations de retraite. Pour un assuré individuel, nous obtenons l'équation suivante :

$$\sum_{t=0}^{x_r-x} Tx_Cot_t \times S_t \times (1+i)^{x_r-x-t} = P \times \sum_{k=x_r}^{\infty} v^k \times {}_{k-x_r}p_{x_r}$$

Avec :

x : L'âge de l'adhérent

x_r : L'âge de départ à la retraite

Tx_Cot_t : Le taux de cotisation à la date t

S_t : Le salaire à la date t

i : Le taux d'intérêt

P : Le niveau de la pension de retraite

v : Le facteur d'actualisation ($v = \frac{1}{(1+i)}$)

${}_t p_x$: La probabilité de survie pendant t années pour un individu d'âge x . (${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$ où l_x est le nombre de personnes vivantes d'âge x)

On note que cet équilibre ne dépend pas du rapport démographique contrairement à l'équilibre en répartition. Cependant, l'équation fait intervenir le taux d'intérêt i , ainsi ce système est sensible à la stratégie d'investissement de l'assureur et du taux de rendement des actifs de placement.

Le problème de dernière génération présent dans un système en répartition n'est pas posé dans un système par capitalisation. En effet, les prestations futures sont provisionnées avec les cotisations actuelles, ainsi une réserve est disponible en permanence aussi bien pour payer les retraites en cours que pour garantir les droits acquis des cotisants.

Dans la suite de ce mémoire nous ne traiterons que les régimes d'entreprises, car ces régimes sont des systèmes par capitalisation pour les raisons que nous avons évoquées dans la partie précédente et qui rendent impossible un régime par répartition au sein d'une entreprise.

1.2 MODE DE GESTION

1.2.1 GESTION EN PRESTATIONS DEFINIES (DB)

Les systèmes de gestion en prestations définies sont des systèmes qui garantissent explicitement le niveau de la rente de retraite future versée aux bénéficiaires en fonction de paramètres tels que le salaire ou la durée d'affiliation du participant.

Les cotisations versées n'influencent pas directement le niveau des prestations, mais afin de conserver l'équilibre du régime, le financement est ajusté sur l'engagement annoncé.

Ce système présente l'avantage de garantir un niveau de retraite pour l'affilié, mais présente une incertitude conséquence sur le coût du financement. Il existe deux formes de régimes en prestations définies : les régimes différentiels et les régimes additifs.

Les **régimes différentiels** garantissent à l'assuré un niveau de rente global. L'assureur versera alors à l'assuré une rente en complément de celles déjà perçues au travers d'autres régimes, afin que ce dernier, après addition de toutes ses prestations, détienne le niveau de rente garanti à la signature du contrat (aucune prestation supplémentaire ne sera versée si les pensions des autres régimes dépassent le niveau garanti). Ce type de régime est alors soumis à un risque supplémentaire, celui de voir un désengagement des prestations de la Sécurité Sociale (et/ou des régimes complémentaires) qui augmenterait sensiblement l'engagement de l'entreprise auprès de son salarié.

Les **régimes additifs** garantissent à l'assuré un niveau de rente supplémentaire déterminé à la signature du contrat sans tenir compte des autres prestations de retraites perçues par l'assuré.

Exemple de régime en prestations définies (additif) : L'affilié percevra une rente de retraite (RR) égale à 30% de son salaire final pour une carrière de 40 ans. Ainsi son montant annuel sera :

$$RR = \frac{\text{Min}(N; 40)}{40} \times 30\% \times S_f$$

N : Ancienneté du salarié dans le régime.

Cette rente est indépendante des cotisations effectuées (et éventuellement insuffisantes) ou de la rentabilité des actifs de couverture.

1.2.2 GESTION EN CONTRIBUTIONS DEFINIES (DC)

Ce système de gestion en contributions définies (ou cotisations définies) sont des systèmes qui explicitent les cotisations à verser au régime (souvent en fonction du salaire). Ainsi chaque actif détient un capital personnel en fonction des cotisations effectuées au cours de sa vie active.

Au moment du départ à la retraite le capital disponible est transformé en rente. Le capital, et donc le niveau des prestations, dépend des cotisations effectuées mais aussi du rendement des actifs de placement, ainsi il est relativement incertain.

L'avantage de ce système est qu'il atténue toute dérive structurelle du financement car la prestation est calculée selon le capital disponible à la date de liquidation.

Exemple de régime en contributions définies : la cotisation de l'affilié au régime sera de 10% de son salaire. Ainsi son capital disponible au départ à la retraite sera de :

$$K = \sum_{t=x_a}^{x_r} 10\% \times S_t \times (1+i)^{x_r-x_a+t}$$

Où :

x_a est l'âge d'affiliation au régime

x_r est l'âge de départ à la retraite

i est le taux de rendement des actifs de placement

S_t est le salaire de l'assuré à la date t .

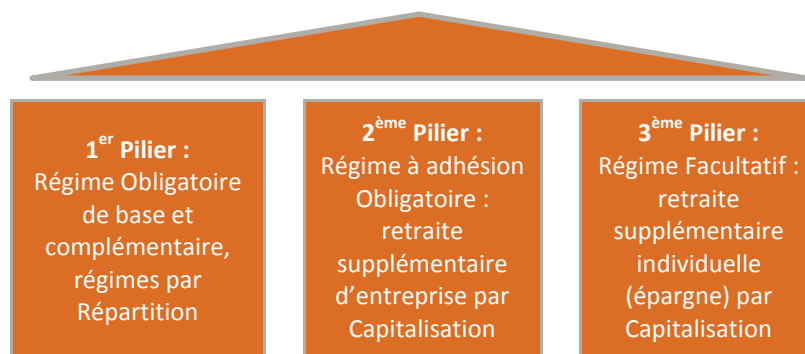
Ainsi, à l'âge de liquidation de la rente, on détermine le niveau de la RR comme :

$$RR = \frac{K}{a_{x_r}}$$

1.3 THÉORIE DES 3 PILIERS

Un régime de retraite repose sur trois composantes principales : les régimes obligatoires (de base et complémentaire) qui assurent une pension de base à tous les individus, les régimes supplémentaires professionnels qui offrent un complément de pension aux salariés d'une entreprise ou d'une profession, et l'épargne individuelle qui est souscrite librement par chacun en fonction de ses revenus et de la pension désirée.

La commission européenne représente ainsi un régime de retraite structuré selon 3 piliers qui reprennent ces composantes :



La représentation des « piliers » peut différer d'une organisation ou d'un Etat à un autre, par exemple la Suisse intègre au second pilier des régimes de branche par répartition tandis que la banque mondiale y intègre les régimes individuels obligatoires. De plus, certains auteurs² décrivent les régimes de retraites en plus de trois piliers (généralement quatre ou cinq). Dans ce mémoire, nous respecterons la représentation proposée par la commission européenne³ que nous venons de présenter.

² Gérard CORNILLEAU et Henri STERDYNIK, *Les cinq piliers de la retraite*, 30 mai 2003, OFCE

³ *Les retraites complémentaires dans le marché unique*, Juin 1997, Livre Vert de la Commission Européenne

1.3.1 LES REGIMES DE BASE ET COMPLEMENTAIRES

Deux modèles ont fortement influencés les régimes de bases actuels, chacun avec sa conception du rôle que doit tenir la Sécurité Sociale.

- **Le modèle Bismarckien**

Le nom du modèle est dû au chancelier allemand Otto Eduard Leopold von BISMARCK qui a instauré les premières assurances sociales aux salariés du secteur privé entre 1880 et 1889.

Les régimes qui suivent ce modèle attribuent une retraite proportionnelle aux revenus perçus durant la vie active. L'objectif principal est d'offrir un taux de remplacement (TR) significatif et ainsi permettre aux retraités de maintenir leur niveau de vie pendant la retraite.

De tels systèmes offrent alors des prestations relativement généreuses, ce qui limite l'importance des 2^{ème} et 3^{ème} piliers.

- **Le modèle de Beveridge**

Le nom du modèle est dû à l'économiste britannique William Henry BEVERIDGE qui a rédigé le rapport « Social Insurance and Allied Services » en 1942 et qui préconise la mise en place d'un système de protection sociale d'après-guerre.

Les régimes de retraite inspirés par Beveridge couvrent l'ensemble de la population et doivent fournir un revenu minimum, d'un montant indépendant au niveau du revenu d'activité. Selon BEVERIDGE, l'État doit subvenir aux besoins de la population par une protection sociale limitée qui verse des prestations d'un niveau juste suffisant pour permettre de vivre.

Tout supplément de retraite est censé provenir de l'épargne individuelle ou des régimes de retraite professionnels. Dans ce système, une grande partie de la rémunération de retraite est issue du 2^{ème} et du 3^{ème} pilier.

En France, les régimes de base et complémentaire sont des régimes en répartition qui se rapprochent davantage du modèle de Bismarck.

- **Le régime de base en France**

Pour la majorité des salariés Français, le régime de base est géré par la Caisse Nationale d'Assurance Vieillesse (CNAV). Il s'agit d'un système en répartition et en prestations définies.

Pour les personnes nées après 1973, la prestation est calculée selon la formule suivante :

$$RR = SAM \times 50\% \times \frac{\text{Min (Nombre de Trimestre ; 172)}}{172}$$

Où *SAM* est la moyenne des 25 meilleurs salaires annuels.

Ce niveau de rente peut être majoré dans certains cas (carrière plus longue que 172 trimestres, majoration enfants,...)

- **Le régime complémentaire en France**

Il existe plusieurs régimes complémentaires en France, le plus majoritaire est le régime ARRCO-AGIRC qui est également un système en répartition et en point à cotisations définies pour tous les salariés cadres et non cadres (ARRCO) ou cadres exclusivement (AGIRC). Alors que ce régime complémentaire offrait des prestations conséquentes permettant d'obtenir des taux de remplacement élevés, les pensions offertes ont progressivement diminuées leur niveau, obligeant les salariés à cotiser à des retraites supplémentaires pour conserver un taux de remplacement conséquent.

Ci-dessous les taux de cotisations des salariés et employeurs au titre de l'ARRCO-AGIRC à partir de 2015 :

		Salarié Non Cadre		Salarié Cadre	
		Taux de cotisation à la charge de l'employeur	Taux de cotisation à la charge du salarié	Taux de cotisation à la charge de l'employeur	Taux de cotisation à la charge du salarié
Arrco	Tranche 1	4,65%	3,10%	4,65%	3,10%
	Tranche 2	12,15%	8,10%		
Agirc	Tranche B			12,75%	7,80%
	Tranche C			0,19% + Librement entre 0% et 20%	20,55% moins la part employeur

Tranche 1 (ou A) : Part du salaire inférieure au PASS
 Tranche 2 : Part du salaire des non cadres comprise entre le PASS et 3 PASS
 Tranche B : Part du salaire des cadres comprise entre le PASS et 4 PASS
 Tranche C : Part du salaire des cadres comprise entre le 4 PASS et 8 PASS

Tab 1 : Taux de cotisation aux régimes ARRCO et AGIRC

Un panorama des régimes de base et complémentaires est proposé en annexe.

1.3.2 LA RETRAITE SUPPLEMENTAIRE D'ENTREPRISE

La retraite supplémentaire d'entreprise est un engagement pris par une entreprise au profit de ses salariés. Cet engagement est le plus souvent une rente versée au salarié à partir de son départ à la retraite. Afin d'honorer leurs engagements sans en subir les risques, la plupart des entreprises externalisent cette charge auprès d'un assureur. De plus, cette externalisation des risques est à présent imposée par la réglementation⁴ pour les nouveaux contrats et fortement conseillée pour ceux déjà existant.

⁴ Article 33 de l'avant-projet de loi garantissant l'avenir et la justice du système de retraites et Directive 2008/94/CE du parlement européen relative à la protection des travailleurs salariés en cas d'insolvabilité de l'employeur.

Les assureurs proposent principalement trois formes de contrats aux entreprises pour les salariés :

- Le premier en prestations définies, est souvent appelé Article 39⁵ (ou retraite chapeau).
- Le deuxième en cotisations définies, est appelé Article 83³.
- Le dernier en cotisations définies, appelé Article 82³.

Cependant les articles 39 et 83 sont les contrats souscrits par la plus grande majorité. En 2011, les contrats à prestations définies (article 39) représentent 32% de l'ensemble des cotisations de contrats de retraite d'entreprises. Les contrats à cotisations définies (article 83) s'établissent à 41%.⁶

○ **Article 39**

Ce contrat est un contrat en prestations définies, il assure aux salariés un niveau de rente viagère défini lors de la mise en place du contrat, en fonction de leur salaire et de leur ancienneté dans l'entreprise au moment du départ à la retraite. L'entreprise finance intégralement les coûts liés à cet engagement. C'est également l'entreprise qui est responsable de l'exactitude de la provision constituée et du choix des actifs de couverture. Au moment du départ à la retraite d'un salarié, l'entreprise prélève sur la provision constituée le montant du capital constitutif de la rente viagère promise et le verse à l'assureur qui gèrera ensuite les prestations dues à l'ancien salarié.

Sur ce type de contrat l'assureur ne subit pas de risque lors de la phase de constitution, puisque il appelle intégralement le capital constitutif lors du départ à la retraite. L'assureur peut détenir la provision du contrat et conseiller l'entreprise sur celle-ci, mais la responsabilité de la provision reste à la charge de l'employeur. Ainsi une insuffisance de

⁵ En référence à l'article du code général des impôts qui régit la fiscalité des cotisations et prestations de ce type de contrat.

⁶ Chiffres issus de l'article « Les contrats de retraite d'entreprises en 2011 » de la Fédération Française des Sociétés d'Assurances (FFSA)

provision lors d'un départ à la retraite d'un salarié affecte uniquement l'entreprise qui doit alors combler le fonds afin de tenir son engagement.

Ce type de contrat présente l'avantage de fidéliser les collaborateurs de l'entreprise, car seuls les salariés présents dans l'entreprise au moment de leur départ pourront prétendre au versement de cette rente. Au contraire, un collaborateur qui quitte l'entreprise avant la retraite perdra l'ensemble des droits qu'il a acquis dans cette entreprise.

- **Article 83**

Il s'agit d'un contrat en cotisations définies, le taux de cotisation en fonction du salaire est donc défini lors de la souscription du contrat. L'adhésion est obligatoire pour tous les salariés visés et le financement est partagé entre l'employeur et le salarié. Les sommes versées par chaque assuré sont placées sur un compte personnel. Les actifs de couverture de cette épargne sont choisis par l'entreprise (ou l'assuré dans certains cas).

Lors du départ à la retraite, le salarié possède alors une épargne personnelle constituée avec l'aide de l'entreprise et dont la valeur dépend de la performance des actifs de placement. L'assureur verse alors à l'ancien salarié, une rente viagère dont l'arrérage est calculé de façon à ce que son capital constitutif soit égal au montant disponible dans le fonds personnel de l'assuré.

Dans ce type de contrat, ni l'assureur ni l'entreprise ne sont sensibles au risque lors de la phase de constitution du capital. En effet, l'assurance ne s'engage sur aucun niveau de rente, celui-ci sera calculé selon le capital disponible au moment du départ en retraite du salarié. L'entreprise s'engage uniquement au versement d'un part de la cotisation au profit de l'assuré et non sur le niveau du capital disponible ou sur la prestation. Tous les risques de la phase de constitution sont supportés par le salarié.

Pour le salarié, ce contrat a l'avantage de constituer une épargne définitivement acquise, même en cas de départ de l'entreprise.

○ **Article 82**

Il s'agit également d'un contrat à cotisations définies dont le mode de fonctionnement s'apparente à celui de l'article 83. Les différences notoires entre ces deux contrats sont :

- Premièrement, le mode d'adhésion : un contrat « Article 83 » est obligatoire pour l'ensemble du personnel de l'entreprise ou pour une catégorie objective de salarié uniquement, contrairement à un contrat « Article 82 » qui est à adhésion facultative.
- La seconde différence est due à la première, l'adhésion facultative du contrat « Article 82 » ne lui permet pas d'obtenir les exonérations d'imposition dont bénéficient les deux autres types de contrat présentés. C'est pourquoi, on appelle aussi un contrat Article 82, un contrat en sursalaire, car les primes versées par l'employeur sont considérées fiscalement comme une rémunération s'ajoutant au salaire brut du salarié.
- Enfin, l'article 82 présente l'avantage du choix de type de prestation, en effet, le salarié peut choisir lors de son départ en retraite entre une prestation en rente viagère ou un versement en capital.

Ce contrat est néanmoins un contrat très peu répandu, surtout à cause de l'absence d'exonération fiscale.

1.3.3 LA RETRAITE SUPPLEMENTAIRE INDIVIDUELLE

La retraite supplémentaire individuelle est composée de toutes les initiatives personnelles et facultatives prises par un salarié dans le but de disposer de ressources supplémentaires lors de sa retraite.

Le plus souvent, cette retraite du 3^{ème} pilier est un contrat d'épargne ou un contrat d'assurance vie individuel. Mais ce type de retraite peut prendre d'autres formes comme l'investissement (Immobilier, PME, ...) lors de la vie active en vue d'une cession lors de la retraite (Par exemple : vente en viager d'un bien immobilier).

2. IDENTIFICATION DES RISQUES D'UN CONTRAT DE RETRAITE COLLECTIF SUPPLÉMENTAIRE

2.1 RISQUE DE LONGÉVITÉ

Le risque de longévité est un risque de long terme, qui correspond au risque que les rentiers vivent en moyenne significativement plus longtemps que prévu.

Ce risque entraîne souvent des modifications de tables de mortalité au cours du temps, c'est également ce risque qui obligent les assureurs à utiliser des tables de mortalité par génération pour provisionner les contrats de rente viagère, car on observe que les tables de mortalité instantanée surestime la probabilité de décès des générations futures.

Il est clair que ce risque est sensible aux évolutions de la société qui peuvent modifier l'espérance de vie d'une population de façon imprévisible, comme, par exemple, une avancée médicale (découverte d'un vaccin, meilleurs traitements des personnes en fin de vie, ...).

La réalisation de ce risque provoque des versements de prestations de retraite sur une durée plus longue que prévu. Cela nécessite ainsi un niveau de provision plus élevé que prévu. Cette augmentation de provision engendre une charge pour l'assureur qui doit puiser dans ses fonds propres pour faire face à cette exigence.

On remarque ainsi aisément qu'un contrat de rente viagère est particulièrement sensible au risque de longévité.

Actuellement, la tendance décrite, notamment par l'INSEE⁷, est à une augmentation de l'espérance de vie, renforçant l'impact du risque de longévité sur la provision des assureurs.

⁷ Insee/Dese n° G2008-04 : « Les projections démographiques : principaux mécanismes et retour sur l'expérience française »

2.2 RISQUE DE MARCHÉ

Les provisions d'assurances étant placées sur les marchés financiers, le résultat de l'assureur dépend du niveau de cotation des actifs de placements. Ainsi, le risque d'une variation importante des prix sur le marché, entraînant la dévaluation des actifs de placement de l'assureur est appelé risque de marché.

Contrairement à une modèle de retraite par répartition, la retraite par capitalisation dépend fortement du rendement des actifs placés sur les marchés financiers. Les assureurs, n'ayant pas la capacité à proposer des régimes par répartition comme nous l'avons déjà évoqué précédemment, sont particulièrement sensibles à ce risque.

On note aussi une double influence de ce risque sur les contrats vie. En effet, en outre de potentiellement pénaliser les niveaux de provisions constitués via une dévaluation du cours de cotation, les marchés financiers déterminent également les taux d'intérêt, ainsi une variation des taux d'intérêt des emprunts d'Etat peut amener à une modification du TME qui détermine le taux techniques servant à la détermination des provisions mathématiques. Un choc à la baisse sur les taux d'intérêt engendrerait alors une baisse du taux technique et obligerait alors l'assureur à une augmentation de ses provisions.

Actuellement, et suite à la crise financière, le risque de marché est particulièrement surveillé par les assureurs qui l'ont intégré dans la plupart de leurs modélisations. Le comportement général observé est d'ailleurs une plus grande prudence vis-à-vis de ce risque.

2.3 RISQUE D'INFLATION

Un aspect primordial d'un système de retraite est le maintien du niveau de vie du retraité tout au long de sa retraite. C'est pourquoi, le niveau des pensions dépend très souvent du niveau de l'inflation. Dans ce cas, l'assureur s'expose au risque d'inflation. C'est le risque d'une hausse générale des prix, qui entraîne une baisse du pouvoir d'achat. Pour compenser

cette baisse de pouvoir d'achat une majorité des réévaluations sont au minimum au niveau de l'inflation.

Il est alors évident qu'une inflation particulièrement importante et/ou sur une longue période engendrera une augmentation des prestations versées futures et donc une augmentation des provisions que doit détenir l'assureur.

De plus, souvent les clauses d'indexation ne prévoient pas de réévaluation à la baisse des pensions en cas de déflation, le niveau des prestations n'a donc jamais vocation à baisser accentuant encore plus le risque d'inflation subi par l'assureur.

Actuellement, l'inflation est surveillée par la Banque Centrale Européenne (BCE) dont l'objectif principal est le maintien de la valeur de l'inflation proche du niveau cible, fixé à 2%.

2.4 RISQUE LÉGISLATIF

L'actualité récente a encore démontré que les choix politiques réalisés impactent de façon non négligeable l'engagement de l'assureur envers les retraités. En effet, les contrats de retraite supplémentaire se réfèrent souvent à la date de départ en retraite pour déterminer le début du versement des rentes. Une modification de l'âge minimum de départ, de l'âge minimum d'acquisition du taux plein ou bien encore du nombre de trimestres exigés influence les assurés dans leur choix du moment de leur départ en retraite.

C'est pourquoi les assureurs sont soumis au risque « législatif ». C'est le risque d'une modification de la loi impactant, directement ou non, les régimes de retraite.

Par exemple, le repoussement de l'âge légal de départ en retraite diffère la date de début des prestations et diminue la durée moyenne des pensions (sous l'hypothèse d'une espérance de vie constante), ce qui diminue considérablement l'engagement de l'assureur. Au contraire, une politique de diminution de l'âge de départ en retraite engendrerait une augmentation de l'engagement de l'assureur envers ses assurés.

Actuellement, la tendance de la législation est de suivre l'évolution de l'espérance de vie. Il donc d'avantage probable de voir un nouveau différencement de l'âge de départ à la retraite.

2.5 RISQUE DE RACHAT

C'est le risque que des adhérents retirent leur épargne et exigent le versement de la provision qui leur est attribuée. Il peut mettre en péril la mutualisation des risques sur laquelle repose la viabilité du contrat.

De plus, un rachat entraîne un flux sortant pour l'assureur, cette demande de flux oblige l'assureur à vendre ses actifs de façon imprévue et donc sous-optimale par rapport à la stratégie d'investissement initiale. Le rachat entraîne des problèmes stratégiques et de gestion d'actif/passif.

Le rachat ne peut intervenir que dans le cas d'un compte individualisé, c'est pourquoi seuls les contrats en cotisations définies sont soumis à ce risque.

Dans un contrat de retraite supplémentaire, un assuré ne peut demander le rachat de son contrat que dans certaines situations :

- Expiration des droits à l'allocation chômage en cas de licenciement
- Invalidité de l'assuré en 2^{ème} ou 3^{ème} catégorie
- Décès du conjoint (marié ou pacsé)
- Situation de surendettement de l'assuré et uniquement sur demande du juge ou président de la commission de surendettement.

3. METHODOLOGIE ET MODELE

3.1 DESCRIPTIF DU MODÈLE

Nous développerons dans cette partie la méthodologie de notre modèle ainsi que les différentes étapes de nos simulations.

Notre objectif est donc d'observer le résultat d'un contrat de retraite supplémentaire pour l'assureur d'une population (fermée) de rentiers. Nous allons donc simuler l'évolution de cette population au cours du temps et jusqu'à son extinction.

Ainsi, une simulation annuelle correspondra à :

- La détermination du décès ou de la survie de chaque assuré.
- Nous établirons ensuite le montant des provisions que doit constituer l'assureur en début et en fin de période en fonction du nombre et de l'âge des survivants ainsi que le montant de leur annuité.
- La détermination du résultat annuel de l'assureur comme étant la somme de la variation de provision, du montant total des prestations versées au cours de l'année et des produits financiers de l'année (Nous intégrerons également le prix de la réassurance le cas échéant)

Cette simulation annuelle sera ensuite répétée jusqu'au décès du dernier survivant.

Ce processus sera réitéré un grand nombre de fois afin d'observer un nombre de réalisations suffisantes pour réaliser une distribution cohérente du résultat global de l'assureur.

3.2 LA POPULATION ÉTUDIÉE

Nous nous baserons sur l'étude d'une population fermée, car comme nous l'avons vu précédemment, la pérennité d'un système par capitalisation ne nécessite pas de nouveaux entrants.

Ne disposant pas des données réelles sur le type de population nécessaire, notre étude se base sur une population fictive de rentiers. Cette population aura été constituée selon l'observation d'une population d'actifs réellement observée.

Les données nécessaires à notre étude sont :

- L'âge des rentiers (date de naissance)
- Le sexe des rentiers
- Le montant annuel de la rente de retraite

Nous allons à présent décrire la méthode de création de cette population.

3.2.1 METHODOLOGIE

Nous effectuerons la construction d'une population de rentiers à partir d'une population réelle d'actifs que nous observons. Cette population est projetée sur une durée déterminée, ainsi nous obtenons une population similaire à une population de futurs rentiers.

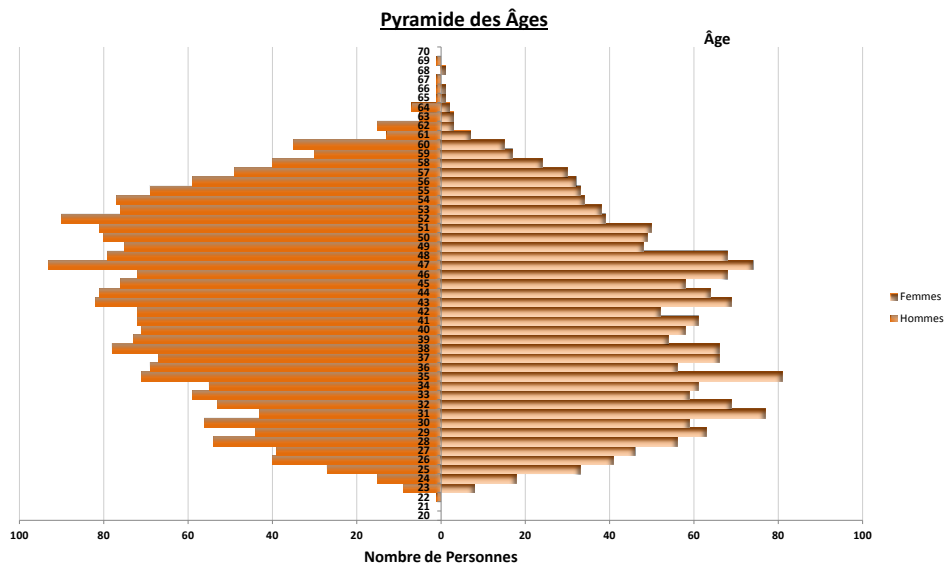
Pour effectuer cette projection, nous suivons la procédure suivante :

- Détermination de la durée de projection,
- Vieillesse de la population ($\text{âge projeté} = \text{âge actuel} + \text{durée de projection en année}$),
- Suppression des salariés dont l'âge n'atteint pas l'âge de départ en retraite,
- Détermination aléatoire de la présence des rentiers au terme (simulation en fonction de la probabilité de décès et de turnovers)
- Projection du salaire selon un profil de carrière déterminé,
- Détermination de la rente de retraite en fonction d'un taux de remplacement déterminé,
- Si la taille de l'effectif est insuffisante, on réitère la procédure en modifiant la durée de projection.

On peut noter qu'on ne prend pas en compte les éventuels entrants dans l'entreprise au cours de notre projection. Nous ne distinguerons pas non plus les prestations annuelles en fonction de l'ancienneté du salarié dans l'entreprise ou dans le régime.

3.2.2 LA POPULATION INITIALE

La population réelle observée est issue des données de l'effectif d'une entreprise française du secteur de la logistique. Cette population comporte 4 268 salariés, dont la moyenne d'âge est **42,7** ans.



Graph 1 : Pyramide des âges de la population initiale

Statistiques par Sexe	
Nombre de femmes	1 912
% de femme	45%
Nombre d'hommes	2 356
% d'homme	55%

Tab 2 : Statistiques par sexe de la population initiale

Le salaire moyen de cette population est de **32 510 €**

Même si cette population n'est pas issue d'un portefeuille d'assuré en retraite supplémentaire auprès d'un assureur, il est cohérent de raisonner à partir de ces éléments car le secteur d'activité de l'entreprise ne la dispose pas, à priori, à une déviation de la sinistralité par rapport à la population nationale ou une population d'assurés.

3.2.3 LES DONNEES DE CALIBRAGE

Nous disposons également des données propres à l'entreprise concernant le profil de carrière annuel, qui s'établit à **3,5%** pour les cadres et **3%** pour les non cadres, ainsi que du taux de turnover annuel observé sur les années 2008, 2009 et 2010 dans cette entreprise.

Age	Taux de turnover
20 - 24 ans	19,0%
25 - 29 ans	12,2%
30 - 34 ans	7,7%
35 - 39 ans	6,4%
40 - 44 ans	4,1%
45 - 49 ans	3,1%
50 - 54 ans	2,6%
55 - 65 ans	1,4%

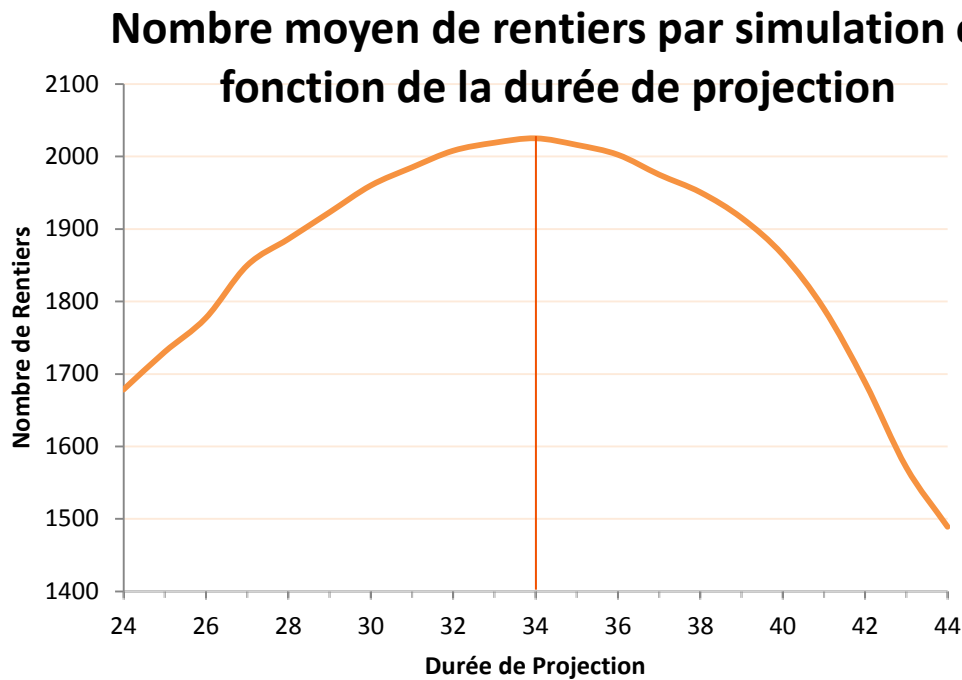
Tab 3 : Taux de turnover appliqués

Ces éléments étant simplifié par tranche d'âge et issus uniquement des statistiques observés sur 3 ans, ils ne sont sans doute pas assez robustes pour décrire précisément le comportement des salariés de cette entreprise. Cependant, ces données ont été validées par les commissaires aux comptes lors de l'audit des comptes de cette société et correspondent à la politique de ressources humaines appliquées dans l'entreprise. Nous utiliserons donc ces mêmes données pour créer notre population.

Afin de tenir compte de la probabilité de décès pendant la durée de projection, nous utiliserons les tables de mortalités instantanées TF-002 et TH-002.

La durée de projection est choisie afin de maximiser le nombre de rentiers dans notre population. Elle est ainsi fixée à **34 ans** comme nous le montre le graphique suivant,

illustrant le nombre moyen de rentiers obtenu sur plusieurs simulations en fonction de la durée de projection.



Graph 2 : Nombre moyen de rentiers obtenu en fonction de la durée de projection

Nous considérerons un âge de départ à la retraite identique pour tous fixé, dans un premier temps, à **65 ans**.

Le taux de remplacement retenu est de **10%**.

En effet, une étude du COR⁸ indique que le taux de remplacement moyen, hors retraite supplémentaire, se situe autour de 70%. De plus, deux études de la DREES⁹ indiquent que le niveau de pension moyen octroyé par un régime supplémentaire (2 053 € annuel) représente 13,6% de la pension moyenne versée par les régimes obligatoires (15 072 € annuel). On retrouve alors un taux de remplacement moyen, issu du 3^{ème} pilier, d'environ 10%.

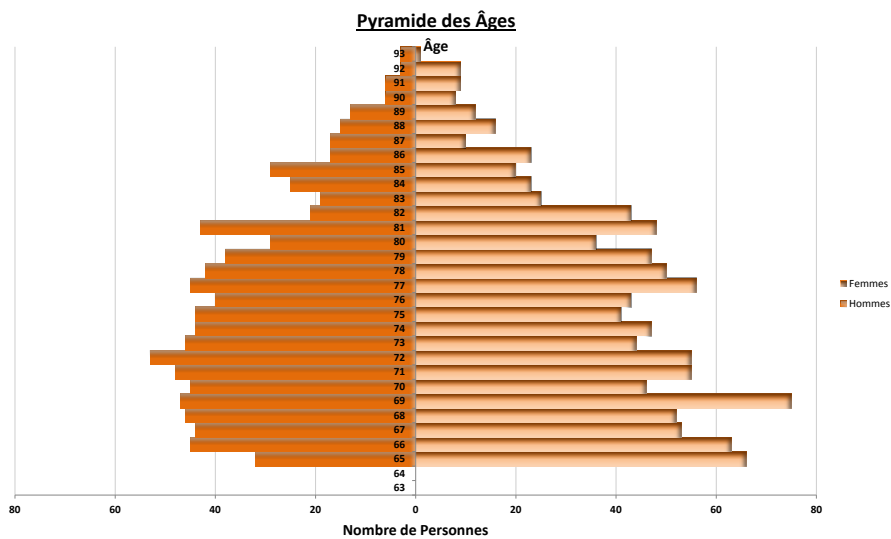
⁸ « Projections de taux de remplacement pour les générations 1950 à 1990 sur la base de cas types » du Conseil d'Orientation des Retraites (COR)

⁹ « La retraite supplémentaire facultative en France : Panorama statistique », Patrick AUBERT, mai 2010 et « Les retraités et les retraites - édition 2013 », Laurent LEQUIN, 2013

Nous pouvons voir ce taux de remplacement comme un régime à prestations définies et ainsi l'arréage de rente apparaissant dans notre population est égal à 10% du salaire final projeté.

3.2.4 LA POPULATION OBTENUE

Nous obtenons une population de **1 989** rentiers. La moyenne d'âge se situe à **75,6** ans. L'arréage de rente moyenne est de **6 691 €**, ce qui représente environ 20% du salaire moyen de la population initiale.



Graph 3 : Pyramide des âges de la population finale de rentiers

Statistiques par Sexe	
Nombre de femmes	1 081
% de femme	54%
Nombre d'hommes	908
% d'homme	46%

Tab 4 : Statistiques par sexe de la population finale de rentiers

La population obtenue est cohérente et relativement équilibrée. De plus, nous disposons à priori d'un portefeuille de rentiers suffisamment hétérogène et nombreux pour tirer des conclusions sur la base des résultats que nous obtiendrons.

4. NOTIONS ESSENTIELLES

4.1 MESURE DU RISQUE

4.1.1 LA VARIANCE / L'ECART TYPE

La variance est une mesure de dispersion autour de la moyenne. Elle reflète donc l'ampleur des écarts entre les observations et la moyenne. Ainsi on retient souvent cette notion pour la mesure du risque. Il s'agit de la moyenne des écarts au carré entre les observations et leur moyenne empirique.

On note la variance :

$$\text{var}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E} \left[(X - \mathbb{E}(X))^2 \right]$$

Où $\mathbb{E}(X) = \int X d\mathbb{P}$ est l'espérance de la variable X et \bar{X} la moyenne empirique de cette variable aléatoire.

L'écart type est la racine carrée de la variance, on le note σ

$$\sigma_X = \sqrt{\text{var}(X)}$$

4.1.2 LA SEMI-VARIANCE / LE SEMI-ECART-TYPE

La semi-variance est une mesure de dispersion au-dessus (ou en dessous) de la moyenne. La différence entre cette mesure et la variance est le fait qu'on considère uniquement les valeurs supérieures (ou inférieures) à la moyenne. On note la semi-variance supérieure : ζ_+ , et la semi-variance inférieure : ζ_- .

$$\zeta_+ = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\text{Max}(X_i; \bar{X}) - \bar{X})^2 = \mathbb{E} \left[(X - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{1}_{X > \mathbb{E}(X)} \right]$$

$$\zeta_- = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\text{Min}(X_i; \bar{X}) - \bar{X})^2 = \mathbb{E} \left[(X - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{1}_{X < \mathbb{E}(X)} \right]$$

Cette notion est une mesure du risque adéquate dans les cas où seules les variations au-dessus (ou en dessous) de la moyenne engendrent des pertes pour l'assureur (par exemple : pour le risque de longévité, seules les personnes avec une durée de vie plus longue que prévue pénalisent les comptes de l'assureur, les personnes qui décèdent avant l'âge prévu engendrent, au contraire, un gain pour l'assurance).

De façon similaire à l'écart-type pour la Variance, nous définissons le Semi-Ecart-Type comme la racine carrée de la Semi-Variance.

4.1.3 LA VALUE-AT-RISK (VAR)

On appelle Value-at-Risk de niveau $\alpha \in [0,1]$ le quantile de niveau α

$$\text{VaR}_\alpha(X) = x_\alpha \text{ où } \mathbb{P}(X \leq x_\alpha) = \alpha$$

Ou encore :

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \inf(x, \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha)$$

Cette mesure du risque (de niveau 99,5% ou 0,5% selon la nature du risque) correspond à la mesure retenue dans la directive européenne Solvabilité 2 pour déterminer le SCR (*Solvency Capital Requirement*) : capital de solvabilité réglementaire minimum. Ainsi, cette mesure est adaptée au point de vue de l'assureur pour lequel le risque se traduit par une augmentation du capital à immobiliser.

4.1.4 LA TAIL VALUE-AT-RISK (TVAR)

La *Tail Value-at-Risk* notée $TVaR(X; \alpha)$ est définie par

$$TVaR(X; \alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_t(X) dt$$

La *Tail-VaR* est la moyenne des VaR de niveau supérieur à α .

On retient souvent cette mesure pour les risques de grandes ampleurs. On mesure ici le montant moyen d'un sinistre en sachant qu'il est supérieur au quantile d'ordre α .

4.2 MOUVEMENT BROWNIEN

Le mouvement Brownien a été mis en avant en 1828 par le botaniste Robert BROWN qui observait alors les mouvements très irréguliers de particules en suspension dans l'eau. C'est en 1923 que Nicola Wiener réalise une étude mathématique qui démontre l'existence du mouvement Brownien. Depuis, de nombreux auteurs (Itô, Meyer, Williams, Black, Merton,...) ont utilisé et développé la notion de mouvement Brownien (ou de Wiener).

Voici les principales propriétés de ce processus :

Soit B est un mouvement Brownien (standard), on note B_t la valeur du processus à la date t .

- a) $\forall s \leq t : B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0 ; t - s)$
- b) $\forall t_0 < \dots < t_n : (B_{t_n} - B_{t_{n-1}} ; \dots ; B_{t_1} - B_{t_0} ; B_{t_0})$ sont indépendantes.

Autrement dit, les accroissements d'un mouvement Brownien sont des variables aléatoires réelles, indépendantes de la trajectoire antérieure du processus (y compris la valeur actuelle) et sont de loi gaussienne centrée (Standard).

Nous admettrons également que les trajectoires d'un mouvement Brownien sont continues et qu'elles sont presque sûrement nulle-part différentiables.

5. ANALYSE DE L'IMPACT DE CES RISQUES

5.1 HYPOTHÈSES TECHNIQUES

5.1.1 TABLE DE MORTALITE

Comme la réglementation¹⁰ l'impose, les capitaux constitutifs de rente seront calculés avec les probabilités de décès issues des tables de mortalité par génération homologuées par le ministère de l'économie et des finances les plus récentes (TGF 05 et TGH 05).

Les probabilités de décès utilisées dans notre modélisation pour simuler la survenance des décès seront basées sur les tables de mortalités instantanées (TH-002 et TF-002). En effet, si le provisionnement et le décès étaient basés sur les mêmes tables, le résultat de l'assureur serait toujours nul, en moyenne.

5.1.2 TAUX TECHNIQUES

Les capitaux constitutifs des rentes viagères seront calculés en appliquant le taux technique légal¹¹ pour un contrat d'assurance sur la vie (maximum de 60% du TME moyen des 6 derniers mois). Pour le mois de juin 2014, ce taux technique était de 1,25%.

5.1.3 HYPOTHESES DE MODELISATION

Plusieurs hypothèses seront utilisées pour notre modélisation, nous les listons ci-dessous :

- Si un décès survient, il survient en milieu d'année, l'assureur devra donc s'acquitter de la moitié de la prestation annuelle de l'assuré l'année du décès.

¹⁰ Article A335-1 du code des assurances

¹¹ Article A132-1 du code des assurances

- Les différentes valeurs économiques (Inflation, Valeur des actions, Taux d'intérêt, ...) sont indépendantes les unes par rapport aux autres.
- L'évolution de la provision au cours de l'année est linéaire, exceptée la variation de la provision due à la revalorisation des pensions qui est intégralement constituée le 31/12/N.
- L'assureur investit chaque année dans des obligations d'Etat d'échéance 1 an et dans des actifs risqués répliquant le CAC40.
- On considère que la périodicité de versement des prestations n'a pas d'influence sur les capitaux constitutifs des rentes, ni sur les provisions de ces mêmes rentes. On néglige ainsi le facteur correctif de la provision d'une rente égale à $\frac{m-1}{2m}$ où m est le nombre annuel de versement de la prestation (d'intervalle de temps régulier). Au vu de la valeur du facteur de correction ainsi que l'objectif de comparaison des résultats, cette simplification n'a pas d'impact majeur sur la fiabilité de nos résultats.
- On néglige les différents frais de gestion du contrat (ou on suppose qu'ils sont immédiatement utilisés dès perception de la prime unique de la part de l'entreprise). Ainsi dès réception de la prime, celle-ci est immédiatement utilisée soit en provision, soit en frais de gestion.
- Nous considérons, enfin, qu'un résultat bénéficiaire est intégralement réaffecté en tant que fonds propres, ainsi un résultat excédentaire n'apportera pas de produits financiers pour les années futures. De même, il n'est mis en place aucune provision d'égalisation ou participation aux bénéfices pour l'entreprise.

5.2 MODÉLISATION DES RISQUES SANS ATTÉNUATION (EXPÉRIENCE TÉMOIN)

Dans le but de pouvoir observer l'impact des mesures d'atténuations proposées, nous allons d'abord modéliser les risques cités dans la partie précédente sans essayer de les atténuer. Nous comparons ensuite les résultats de cette première modélisation et ceux de la modélisation avec les mesures d'atténuations afin de conclure sur l'efficacité de nos propositions.

5.2.1 MODELISATION DE LA LONGEVITE

Afin de mesurer l'impact sur les résultats de l'assureur d'une population soumise au risque de longévité, nous effectuons un choc sur la table de mortalité utilisée pour simuler les décès uniquement. Ainsi la table de mortalité utilisée par l'assureur pour la détermination de ses provisions ne sera pas affectée par ce choc, il utilisera toujours les tables par générations imposées par le code des assurances.

L'intensité de cet abattement est choisie en fonction du taux de décès observé en 2011 sur la population Française.

On dénombre 545 057 décès¹² en France en 2011 pour une population totale de 64 933 400¹³. On observe ainsi un taux de décès de 0,84%. Nous disposons également de la structure de la population Française par tranche d'âge et par sexe en 2011¹⁴. On peut alors calculer le nombre de décès théoriques à partir de cette structure de population et des tables de mortalité. Théoriquement, le nombre de décès en 2011 en France aurait dû être de 641 510, soit un taux de décès de 0,99%. Le taux d'abattement à effectuer pour que la table de mortalité soit en concordance avec la réalité observée est d'environ 17,7%.

¹² «Décès par commune, département et région de 2003 à 2012», Octobre 2013, INSEE

¹³ Source : Insee, estimations de population (résultats provisoires arrêtés à fin 2013)

¹⁴ Source : Insee, estimations de population (résultats provisoires arrêtés à fin 2013)

Dans notre cas, nous accentuerons volontairement cet abattement, dans le but de voir clairement l'impact du risque de longévité et ainsi pouvoir tirer toutes les conclusions nécessaires quant à l'atténuation de celui-ci.

On fixe alors cet abattement à **25%**.

Ainsi on aura pour chaque âge x , la probabilité de décès utilisée dans notre modèle (q_x) sera

$$q_x = q_x^{TH-TF} \times (1 - 25\%)$$

Chaque année la survenance ou non du décès d'un assuré sera déterminée par une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre q_x .

5.2.2 MODELISATION DU RISQUE DE MARCHÉ

On note W_t la valeur d'un mouvement brownien standard à la date t , r_t la valeur du taux d'intérêt court à la date t , l_t celle du taux d'intérêt long et S_t la valeur d'un actif de marché à la date t .

Dans l'ensemble des modèles présentés ci-dessous, nous supposons vérifiées les hypothèses suivantes :

- Les marchés sont parfaits : absence de coût de transaction et d'impôts,
- Les marchés sont complets : tout actif est répliquable,
- Absence d'opportunités d'arbitrage,
- Les obligations et les actions ne versent pas de flux intermédiaires (ni coupons ni dividendes).

➤ **Modèle de Vasicek (basé sur un processus d'Ornstein-Uhlenbeck) :**

Ce modèle, décrit par Oldrich Vasicek¹⁵ en 1977, simule l'évolution des taux d'intérêt nominaux de court terme selon une équation stochastique différentielle basée sur un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

Avec :

a : force de rappel ou de retour à la moyenne

b : taux d'intérêt de long terme

σ : volatilité du taux d'intérêt r_t

Ce modèle présente plusieurs avantages pour la simulation des taux d'intérêt, le premier est la prise en compte de l'effet de retour à la moyenne constaté sur les marchés. Le second est une certaine facilité de modélisation, en effet, les paramètres sont relativement explicites, la compréhension et la mise en place de ce modèle sont alors facilement accessibles.

Le principal inconvénient de ce type de modèle est qu'il intègre, avec une probabilité non nulle, des taux nominaux négatifs, alors que cela est, de façon évidente, impossible sur les marchés : on préférera toujours ne pas placer (prêter) d'argent que de le placer (prêter) à taux négatif.

De nombreuses autres variantes à ce modèle ont vu le jour depuis, nous présenterons les principales d'entre elles, qui se basent pour la plupart sur la structure proposée par Vasicek.

¹⁵ Vasicek, Oldrich (1977), "An Equilibrium Characterisation of the Term Structure", Journal of Financial Economics 5 (2): 177–188.

➤ **Modèle de Cox – Ingersoll – Ross :**

Modèle introduit par John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll et Stephen A. Ross¹⁶ en 1985, et améliore le modèle de Vasicek en proposant une solution au problème des potentiels taux nominaux négatifs. L'équation stochastique différentielle devient :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

a : vitesse de retour à la moyenne

b : le taux de long terme

σ : la volatilité du processus

Avec l'intégration du facteur $\sqrt{r_t}$ le taux ne peut en aucun cas devenir négatif (sous condition que $2ab > \sigma^2$)

Par contre, avec l'ajout de ce facteur, les paramètres du modèle deviennent moins explicites, notamment la volatilité σ .

➤ **Modèle de Hull et White**

Le modèle de Hull et White¹⁷ (1990) est également une extension du modèle de Vasicek et se veut plus flexible en proposant des paramètres variant avec le temps. Ainsi l'équation de diffusion du modèle devient :

$$dr_t = a(b_t - r_t)dt + \sigma r_t^\beta dW_t$$

Les paramètres a et σ sont laissés constants car Hull et White parlent, eux-mêmes, d'un risque de sur-apprentissage du modèle si on laisse trop de liberté aux paramètres.

On note que si on prend $b_t = b$ et $\beta = 1/2$ alors on retrouve le modèle de Cox-Ingersoll-Ross.

¹⁶ Cox, J.C., J.E. Ingersoll and S.A. Ross (1985), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica* 53: 385–407

¹⁷ John Hull and Alan White, "Pricing interest-rate derivative securities", *The Review of Financial Studies*, Vol 3, No. 4 (1990) pp. 573–592

➤ **Modèle de Brennan et Schwartz**

L'idée du modèle de Brennan et Schwartz (1979)¹⁸ est de supposer que le taux long contient de l'information sur la valeur future du taux court. La structure par termes des taux est ainsi expliquée par la diffusion jointe :

$$dr_t = (a_1 + b_1(l_t - r_t))dt + \sigma_1 r_t dW_{1t}$$

$$dl_t = l_t(a_2 + b_2 r_t + c_2 l_t)dt + \sigma_2 l_t dW_{2t}$$

La variation du taux court est donc directement fonction de la différence entre le taux long et le taux court.

Ce modèle tente de décrire le lien qu'on observe en pratique entre les taux de long terme et les taux de court terme. Néanmoins, ce modèle a été invalidé par Hogan et Duffie qui ont prouvé qu'il n'y avait pas de solution réelle à ce système d'EDS et, qu'il était possible d'exhiber un arbitrage.

➤ **Modèle de Black et Scholes :**

Une des hypothèses du modèle de Black et Scholes¹⁹ (1973), qu'on appellera par abus de langage modèle de Black Scholes, décrit l'évolution d'un actif risqué selon un processus stochastique différentiel. L'objectif de cette hypothèse est de poser un cadre de l'évolution de l'actif dans le but de déterminer le prix d'une option. Cette hypothèse a ensuite été souvent réutilisée pour simuler le cours d'une action en dehors de la détermination de la valeur d'une option. Le processus est décrit par l'équation suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

¹⁸ Michael J. Brennan, Eduardo S. Schwartz, "A continuous time approach to the pricing of bonds", Journal of Banking & Finance, Volume 3, Issue 2, July 1979, Pages 133–155

¹⁹ Black Fischer ; Scholes Myron (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy 81 (3): 637–654

D'où :

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\}$$

μ : Taux de rendement moyen de l'actif

σ : volatilité constante de l'actif

Cette équation présente l'avantage de posséder une solution explicite qu'on vient d'exposer. Ainsi, la loi du cours de l'action est une loi connue et de paramètres explicites (log-normale de moyenne μ et d'écart-type σ). Cette propriété rend le calibrage du modèle simple, tout comme son application pratique.

La principale critique à ce modèle est que la théorie est fondée sur des distributions normales qui sous-estiment grandement les effets extrêmes (crise boursières, bulles spéculatives, ...). De plus, ce modèle repose sur de nombreuses hypothèses relativement restrictives.

➤ **Modèle de Merton**

Parmi les hypothèses restrictives qu'on trouve dans le modèle de Black et Scholes se trouve le caractère continu du processus. Ainsi, en 1976, Merton propose un modèle similaire²⁰ à celui de Black et Scholes mais avec un processus de poisson simulant des sauts dans le cours de l'actif. L'équation différentielle de Merton devient alors :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t + S_t G dN(t)$$

D'où

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N(t)} G_k \right\}$$

²⁰ Merton R. C. (1976) "Option pricing when the underlying stock returns are discontinuous", Journal of Financial Economics, 3, p. 125-144

Avec :

μ : Taux de rendement moyen de l'actif

σ : volatilité constante de l'actif

$N(t)$: processus de poisson d'intensité λ

G : Variable aléatoire de loi Normale centrée

L'ajout de ces sauts complexifie l'interprétation et le calibrage des paramètres, mais la densité de la loi du cours de l'actif reste identifiable.

➤ **Choix des modèles et Calibrage**

Modèle de Taux

Afin d'éviter les difficultés liées à la probabilité non nulle d'un taux nominal négatif dans le modèle de Vasicek, nous utiliserons le modèle de Cox-Ingersoll-Ross pour simuler l'évolution du taux d'intérêt. Le calibrage du modèle de Cox-Ingersoll-Ross est issu de l'historique des taux d'intérêt mensuel du marché primaire des émissions d'obligations de l'Etat Français à plus de 7 ans²¹ entre octobre 2004 et juillet 2014.

Nous nous basons sur l'équation stochastique discrétisée, nous obtenons :

$$\frac{r_{t+1}}{\sqrt{r_{t+1}}} = \frac{ab}{\sqrt{r_t}} + \sqrt{r_t}(1 - a) + \varepsilon \text{ où } \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Ainsi on choisit les paramètres a et b de façon à minimiser l'erreur ε , tout en respectant la contrainte : $2ab > \sigma^2$ nécessaire afin d'obtenir un taux positif. Le solveur d'Excel nous donne la solution suivante :

$$a = 0,58\%$$

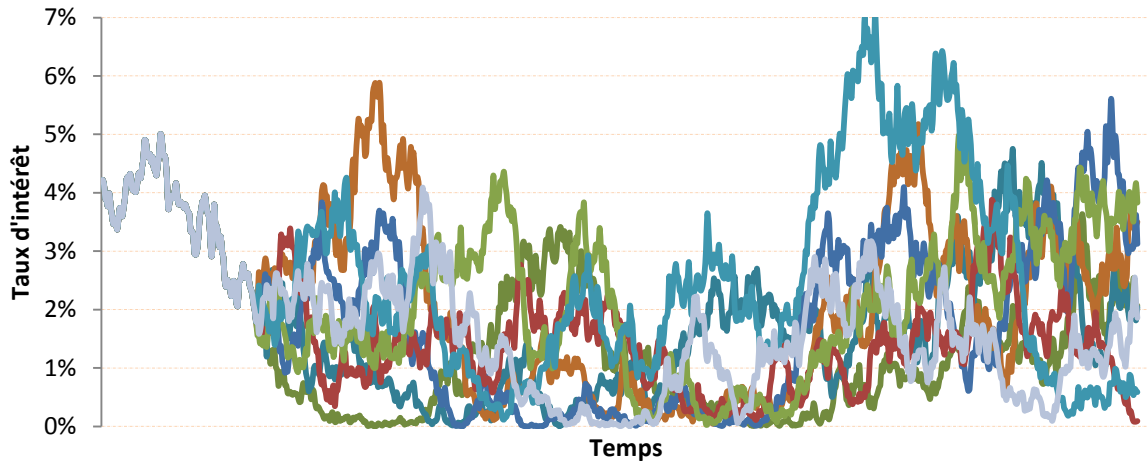
$$b = 2,07\%$$

$$\sigma = 1,55\%$$

Où σ est l'écart type des erreurs observées.

²¹ Source : Banque de France

Ci-dessous un tableau montrant quelques trajectoires simulées par le modèle de Cox-Ingersoll - Ross



Graph 4 : Evolution Stochastique du taux d'intérêt

Modèle de l'actif

Le rendement de l'actif risqué sera simulé en se basant sur le modèle de Merton qui reflètera mieux la réalité des variations du cours d'une action qu'un modèle classique de Black et Scholes. Le calibrage du modèle de Merton est basé sur l'historique des rendements mensuels du CAC 40 entre le 01/01/2004 et le 01/08/2014²².

On obtient de la formule de diffusion du modèle que le logarithme du rendement est :

$$\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma(W_{t+1} - W_t) + \sum_{k=1}^{N(t+1)} G_k - \sum_{k=1}^{N(t)} G_k$$

Conditionnellement à $N(t)=n$, nous avons que :

$$\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma\mathcal{N}(0,1) + \sum_{k=1}^n \mathcal{N}(\theta, \varpi^2)$$

²² Source : Investing.com

Donc

$$\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) \sim \mathcal{N}\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + n\theta; (\sigma^2 + n\varpi^2)^2\right]$$

En conditionnant par tous les n possibles on obtient la densité suivante :

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma^2 + n\varpi^2}} \exp\left[-\frac{\left(x - n\theta - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2(\sigma^2 + n\varpi^2)}\right]$$

On utilise ensuite le maximum de vraisemblance afin de déterminer les paramètres du modèle. Il convient alors de maximiser la (log-)vraisemblance du modèle :

$$L(x) = \prod_i f(x_i) \rightarrow l(x) = \ln(L(x)) = \sum_i \ln(f(x_i))$$

Où x_i est l'observation n°i du logarithme du rendement

Nous résolvons le programme de maximisation avec la fonction *nlm* de R. Les résultats retenus sont les suivants :

$$\lambda = 27,75 \%$$

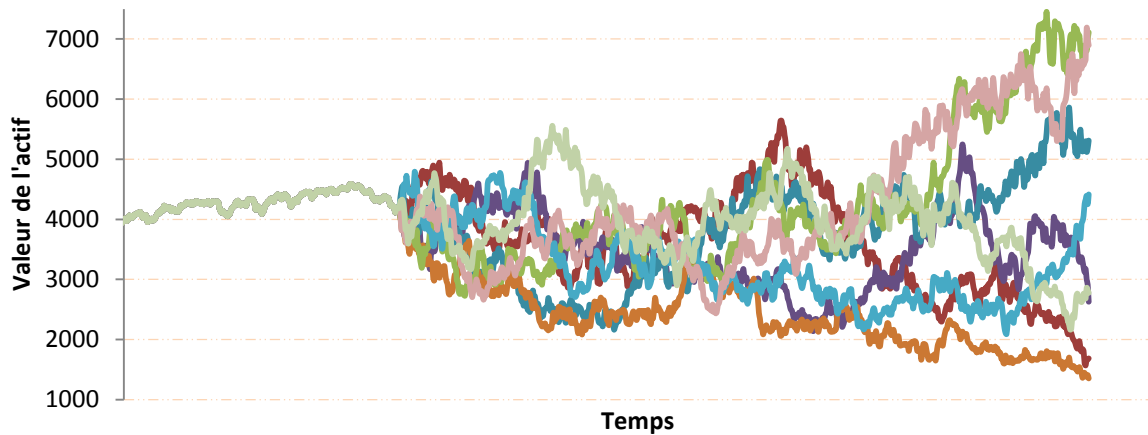
$$\mu = 0,104 \%$$

$$\sigma = 2,12 \%$$

$$\theta = 6,47 \%$$

$$\varpi = 8,56 \%$$

Le graphique ci-dessous illustre quelques trajectoires du CAC40 simulées par le modèle de Merton :



Graph 5 : Evolution Stochastique d'un CAC40

L'observation de ce graphique montre que la volatilité de l'actif est sensiblement plus importante que celle réellement observée. Néanmoins, nous décidons de conserver ce taux, car il expose l'assureur au risque de marché, nous permettant alors de mieux mesurer l'efficacité des mesures d'atténuations que nous proposerons.

5.2.3 MODELISATION DE L'INFLATION

L'inflation se comportant de manière similaire à un taux d'intérêt, on propose alors de simuler sa valeur par un modèle de Vasicek. Ce modèle présente l'avantage d'obtenir des résultats négatifs avec une probabilité non nulle. Cette caractéristique est un problème pour simuler le taux d'intérêt, cependant, l'inflation n'était pas obligatoirement positive, ce modèle décrit cette valeur de façon cohérente.

Le calibrage du modèle de Vasicek modélisant l'inflation est basé sur l'observation de l'inflation annuelle²³ depuis l'instauration de la BCE comme banque centrale européenne ayant comme mission de contrôler l'inflation de la (future) zone Euro le 01/06/1998.

²³ Source : INSEE

Nous avons utilisé la méthode des moindres carrés afin d'estimer les paramètres de l'équation différentielle stochastique qu'on a réécrit avec un pas de temps d'une année ($dt = 1$), on obtient alors :

$$r_{t+1} = r_t(1 - a) + ab + \sigma\varepsilon \text{ avec } \varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Le résultat de la régression linéaire réalisée sur nos données donne :

$$r_{t+1} = 0,3363 r_t + 0,0115 + \delta$$

On obtient alors :

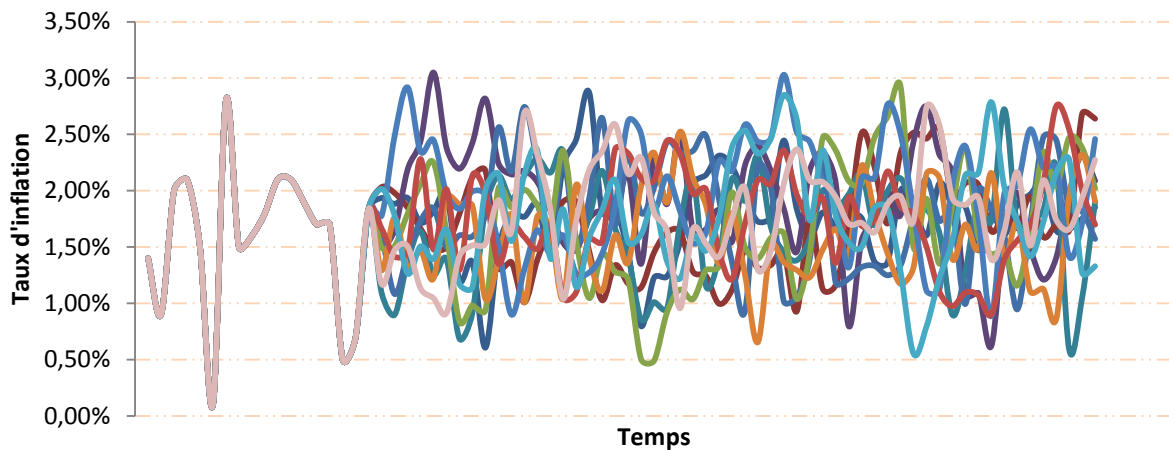
$$a = 1 - 0,3363 = 0,6637$$

$$b = \frac{0,0115}{0,6637} = 0,017$$

On détermine ensuite σ comme l'écart-type observé de δ , on a alors :

$$\sigma = 0,0054$$

Nous représentons quelques trajectoires de l'inflation annuelle simulées par le modèle de Vasicek :



Graph 6 : Evolution Stochastique de l'Inflation

5.2.4 MODELISATION D'UN CHANGEMENT DE LEGISLATION

De nombreuses modifications législatives peuvent intervenir et impacter un régime de retraite supplémentaire (fiscalité, obligation pour les entreprise de proposer un contrat de retraite supplémentaire, ...).

Nous ne considérerons que deux cas de changement de législation pouvant impacter un régime de retraite supplémentaire. Ces cas considérés sont des changements de date de départ à la retraite. Ce changement législatif est déjà intervenu ces dernières années et d'autres modifications de cet âge de départ ont été évoquées au cours de propositions. Nous avons choisi cette modification car nous considérons qu'elle était, d'une part la plus probable à court terme et d'autre part, la plus impactante pour un régime de retraite.

5.2.5 MODELISATION DU RISQUE DE RACHAT

Le risque de rachat est un risque relativement faible du point de vue d'un assureur d'un contrat de retraite supplémentaire par rapport aux autres risqués évoqués. En effet, les scénarii, que nous avons décrit dans la section précédente, et qui ouvrent le droit au rachat dans un contrat de retraite supplémentaire sont limités et souvent méconnus des assurés,. C'est pourquoi la survenance d'un rachat est peu fréquente en pratique. D'autant plus, qu'un rachat est possible uniquement sur un contrat à cotisations définies, car celui-ci attribue une épargne personnalisée et acquise pour chaque salarié, contrairement à un contrat à prestations définies.

De plus, la modélisation rigoureuse de la survenance d'un de ces scénarii d'une part, et la rationalisation des critères de décision de l'assuré d'autre part, sont des sujets dépassant le cadre de ce mémoire.

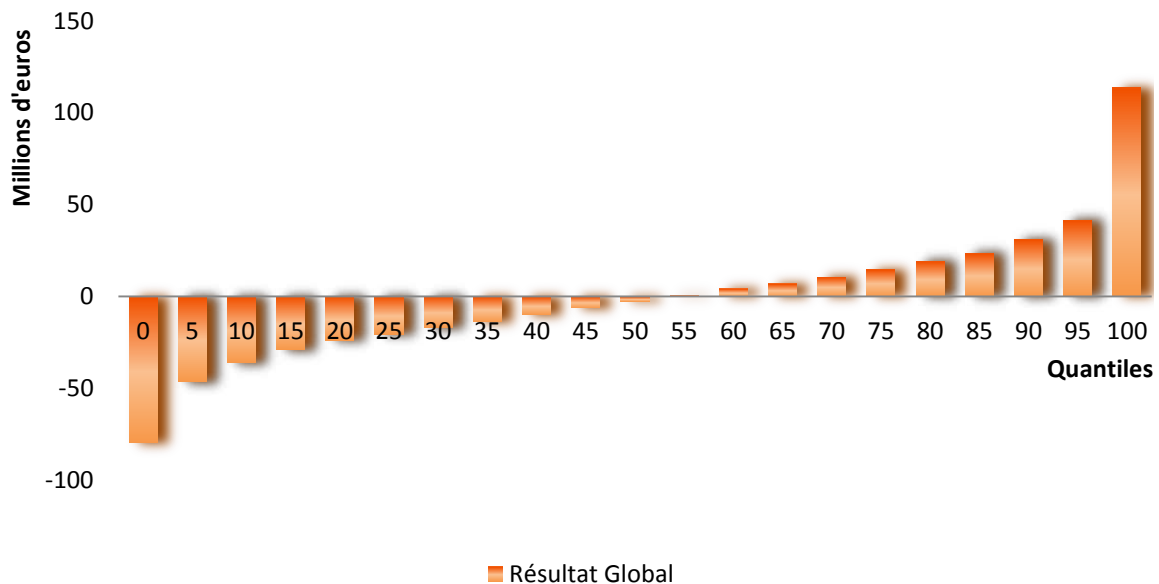
Au vu des précédents arguments qui nous amènent à penser que l'impact de ce risque reste limité pour l'assureur, et des contraintes techniques pour une modélisation cohérente, nous avons décidé de ne pas tenir compte de ce point dans notre modèle final. Cependant, nous évoquerons tout de même ce sujet dans nos propositions d'atténuation de risques et nous discuterons des impacts envisageables sur le résultat de l'assureur.

5.2.6 LE RESULTAT DE L'EXPERIENCE TEMOIN

Les différentes simulations nous permettent d'observer les résultats annuels pour chacune des simulations. Nous sommes l'ensemble des résultats annuels d'une simulation afin d'obtenir le résultat global de l'assureur sur ce scénario.

Nous pouvons ensuite présenter la distribution de ces résultats globaux en calculant les quantiles empiriques de nos observations.

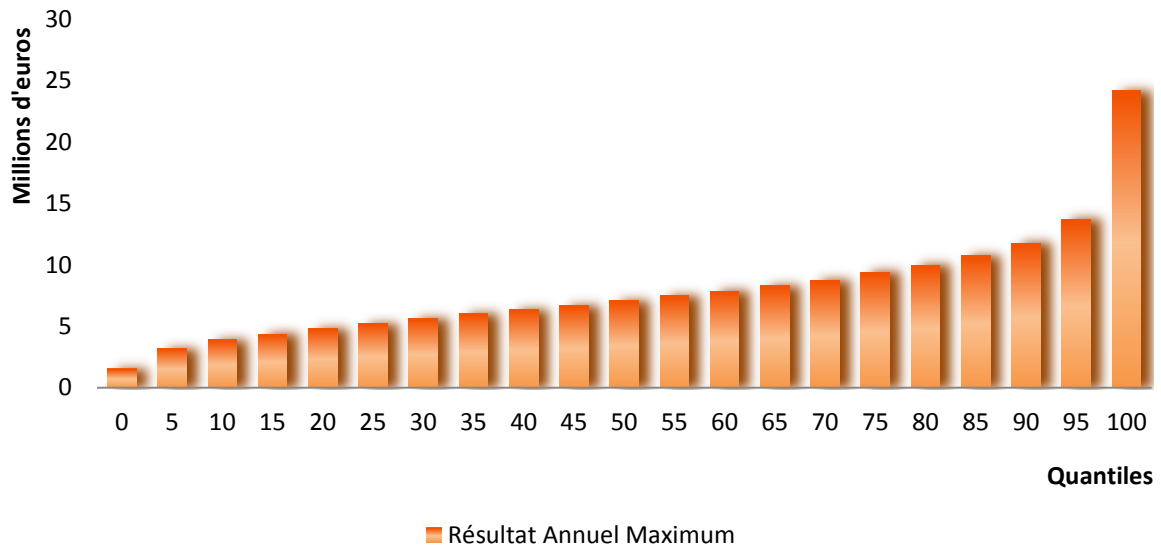
Quantiles des résultats globaux



Graph 7 : Quantiles des résultats globaux (expérience témoin)

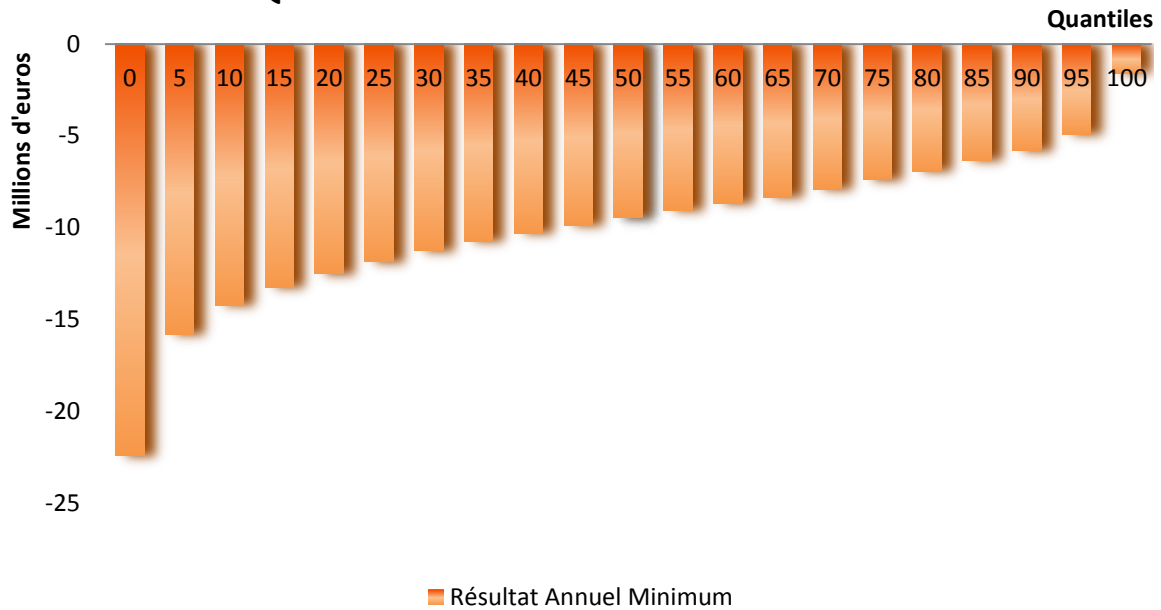
Nous présentons également la distribution du résultat annuel maximum et minimum pour chacune des simulations effectuées :

Quantiles des résultats maximum



Graph 8 : Quantiles des résultats maximum (expérience témoin)

Quantiles des résultats minimum



Graph 9 : Quantiles des résultats minimum (expérience témoin)

Enfin, nous présenterons également le résultat des mesures de risque que nous avons présenté dans la partie précédente :

Mesure du Risque	Résultat Global	Résultat Annuel Maximum	Résultat Annuel Minimum
Moyenne	-2 788 K€	7 558 K€	-9 796 K€
Ecart Type	26 474 K€	3 221 K€	3 345 K€
Semi Ecart Type +	26 586 K€	3 828 K€	2 984 K€
Semi Ecart Type -	26 346 K€	2 652 K€	3 724 K€
VaR 0,5%	-70 754 K€	1 924 K€	-20 711 K€
TVaR 0,5%	-78 819 K€	1 638 K€	-21 799 K€

Tab 5 : Les Mesures du Risque (expérience témoin)

La moyenne, comme la médiane, est légèrement négative. La distribution est assez équilibrée, comme le prouve le fait que l'écart-type est très proche des Semi-Ecart-Types (positif et négatif).

Ces résultats seront comparés avec les résultats similaires des modélisations faisant intervenir une atténuation d'un risque. Nous pourrons ainsi conclure sur son efficacité en fonction des critères de mesure du risque.

5.3 MESURES D'ATTÉNUATION ET DE GESTION DES RISQUES

5.3.1 REASSURANCE

Afin de se prémunir contre le risque de longévité, l'assureur peut mettre en place une réassurance en excédent de durée. Le réassureur prendra à sa charge les pensions de retraite des assurés ayant soit dépassés une certaine durée en retraite soit ayant dépassés un certain âge selon les modalités du traité de réassurance.

Il existe deux types d'indemnisation du réassureur :

- Prise en charge complète de la rente viagère jusqu'au décès de l'assuré
- Versement d'un montant égal au capital constitutif de la rente viagère résiduelle (l'assureur conserve alors un risque de longévité : il peut être gagnant si le décès survient rapidement après l'indemnisation ou perdant si l'assuré survie plus longtemps que la durée prévue lors du calcul, par la réassurance, du capital constitutif).

De plus, il peut exister des notions de portée dans ce type de contrat, obligeant l'assureur à reprendre à sa charge les rentes des assurés survivants ayant été réassurés pendant une durée maximale fixée par le traité.

Nous considérerons une réassurance en excédent de durée où le réassureur prendra à sa charge toutes les prestations dues à un assuré dont l'âge dépasse l'espérance de vie nationale de 3 ans. D'après l'INSEE, la durée de vie moyenne en France, en 2013 est de 78,7 ans pour les hommes et 84 ans pour les femmes. On considère donc que le réassureur interviendra lorsqu'un assuré homme atteint l'âge de 82 ans ou lorsqu'une assurée femme atteint l'âge de 87 ans. On suppose également que les termes du traité de réassurance sont fixes pour toute la durée de simulation et ne seront donc pas affectés par une potentielle modification de l'espérance de vie au cours du temps.

Impact sur le résultat / provision de l'assureur :

- La provision de chaque assuré ne sera plus établie sur le capital constitutif d'une rente viagère, mais sur le capital d'une rente temporaire d'âge déterminé.
- La provision de l'assureur devra tenir compte d'une partie prévoyant le paiement de la prime de réassurance si l'assuré atteint l'année précédant l'âge défini dans le contrat.
- Les prestations des assurés d'âge supérieur à 82 ans pour les hommes et 87 ans pour les femmes ne seront plus versées par l'assureur.
- Il se dégage un coût annuel correspondant à la prime de réassurance fixée annuellement en fonction du nombre d'homme (respectivement femme) atteignant l'âge de 81 ans (respectivement 86 ans) dans le portefeuille assuré en début d'année. Pour chaque assuré de 81 ans (respectivement 86 ans), la prime unique de réassurance le concernant sera de :

$$p^{Réass} = {}_1p_{81} \times a_{82} + chgmt$$

Dans cette prime de réassurance, nous négligeons totalement le terme d'actualisation sur 1 an, cela a pour effet de légèrement surestimer la prime et donc le coût pour l'assureur.

Nous estimons que les chargements du réassureur sont de 8%. En effet, nous savons d'expérience que les contrats d'assurance vie ont des frais de chargement d'environ 10% (taux de « marché » pour les contrats décès), les réassureurs ont généralement des frais de chargement inférieurs à ceux des assureurs. Nous choisissons ainsi ce taux à partir de ces éléments.

5.3.2 SURPRIME EN CAS DE CHANGEMENT DE TABLE DE MORTALITE

Une deuxième mesure d'atténuation du risque de longévité peut être la surprime en cas de changement de table de mortalité. Il s'agirait alors d'une seconde prime demandée à l'entreprise pour reconstituer les provisions des rentiers selon les probabilités de décès

d'une nouvelle table de mortalité réglementaire émise par le ministère de l'économie et des finances.

Ainsi, en cas de dérive conséquente de la mortalité, une nouvelle table serait éditée. L'assureur bénéficierait alors d'un montant de nouvelles primes lui permettant de faire face à ce changement de réglementation.

Cependant, une telle surprime correspondrait à une charge importante pour l'entreprise. Pour éviter cela, on peut considérer une surprime étalée sur toute la durée du contrat en prévision d'une éventuelle modification de table. Ce supplément de ressources est ensuite épargné par l'assureur et utilisé en cas de sous-mortalité.

Dans ce deuxième cas, l'assureur n'appellerait pas de nouvelle prime en cas de changement réglementaire, ce qui constitue un risque en cas de mauvaise estimation de ce changement lors de la tarification de la « surprime ».

Nous ne modéliserons pas cette situation dans notre modèle pour deux raisons :

- Le modèle n'introduit pas la possibilité d'un changement de table de mortalité au cours du temps.
- La prime payée par l'entreprise est une prime unique, on ne peut donc pas fractionner cette surprime sur plusieurs paiements. Cette raison fait que l'instauration d'une telle mesure n'est pas adaptée au contrat que nous simulons.

5.3.3 STRATEGIE D'INVESTISSEMENT SUR LE MARCHE

L'assureur doit développer une stratégie d'investissement adaptée aux risques couverts. Il doit alors effectuer un arbitrage sur le placement des provisions entre des actions volatiles à fort rendement ou des obligations à rendement plus faible. Nous allons étudier l'effet de plusieurs répartitions possibles entre ces deux actifs de placement sur le résultat du contrat de retraite supplémentaire de l'assureur.

Nous comparerons alors trois modélisations avec des niveaux de partage différents entre les actions et les obligations :

- Expérience témoin (Obligations : 50%, Actions : 50%)
- Majorité d'Actions (Obligations : 25%, Actions : 75%)
- Majorité d'Obligations (Obligations : 75%, Actions : 25%)

5.3.4 INVESTISSEMENT SUR DES TAUX FORWARD

Définition²⁴ (Taux Forward) : Un taux d'intérêt Forward est un taux d'intérêt qui s'applique à une période dont le départ se situe à une date future. Souvent, ce terme désigne des taux d'intérêt à termes implicites (l'information est contenue dans la courbe de taux).

Pour se prémunir du risque de taux d'intérêt, l'assureur peut, dès aujourd'hui, se garantir du taux de placement entre deux dates futures grâce au taux Forward. A partir de la courbe des taux zéro coupon, on peut calculer les taux Forward en vigueur actuellement. Lorsque l'assureur met en place une telle stratégie d'investissement, il accepte de conserver les conditions de la structure de la courbe des taux actuelle pendant toute la durée du contrat.

5.3.5 CLAUSE D'INDEXATION DE LA PENSION

Une manière de supprimer l'incertitude concernant l'inflation future est de stipuler contractuellement un taux de réévaluation des pensions constant au cours du temps. L'assureur ne sera plus contraint de revoir ses engagements selon la valeur de l'inflation et/ou de ses modifications d'anticipation de cette valeur.

Par contre, l'assureur s'engage à revaloriser la rente de retraite servie au seuil indiqué dans le contrat chaque année, même si une revalorisation au niveau de l'inflation lui aurait été plus favorable.

²⁴ Source : iotafinance.com

5.3.6 AGE DE DEPART A LA RETRAITE

Souvent, l'assureur fait référence à l'âge légal de départ à la retraite dans la rédaction de ses contrats de retraite, afin de définir la date de début de versement des pensions. Si tel est le cas, il s'expose au risque législatif sur ce point.

L'assureur peut s'émanciper du pouvoir législatif en ne faisant plus référence à l'âge légal de départ à la retraite dans la rédaction de ses contrats de retraite supplémentaire. L'assureur peut alors définir lui-même l'âge de début de liquidation de la pension qui ne dépendra plus des décisions politiques prises dans le futur.

5.3.7 PENALITES DE RACHAT ET/OU PRIME DE FIDELITE

Pour décourager les possibles rachats, l'assureur peut mettre en place des pénalités de rachat qui abaisseraient le montant de la provision mathématique et donc la valeur de rachat. Cependant, la loi encadre ce type de pénalité (montant maximum de la pénalité : 10% de la PM, aucune pénalité ne pourra être appliquée pour des contrats en cours depuis plus de 8 ans).

Afin d'éviter ce type de contraintes, l'assureur peut également mettre en place des primes de fidélité qui augmentent la provision mathématique des contrats arrivés à échéance. L'intérêt du rachat sera d'autant moins important que cette prime est élevée, ce qui incite les assurés à conserver leur contrat même en cas de difficultés financières.

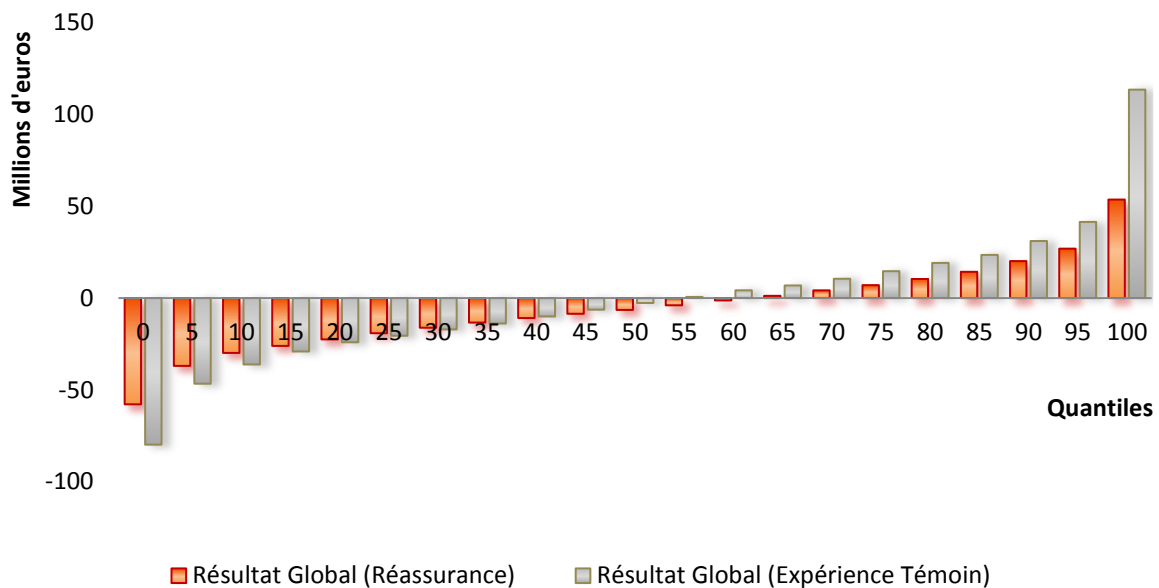
5.4 MODÉLISATION DES RISQUES APRÈS ATTÉNUATION

Nous allons à présent modéliser les mesures d'atténuation que nous venons de présenter et les comparer avec les résultats de l'expérience témoin afin de conclure sur l'efficacité de chacune d'elle.

5.4.1 IMPACT D'UNE REASSURANCE EN EXCEDENT DE DUREE

La réassurance modélisée est une réassurance en excédent de durée de 82 ans pour un homme et 87 ans pour une femme.

Quantiles des résultats globaux

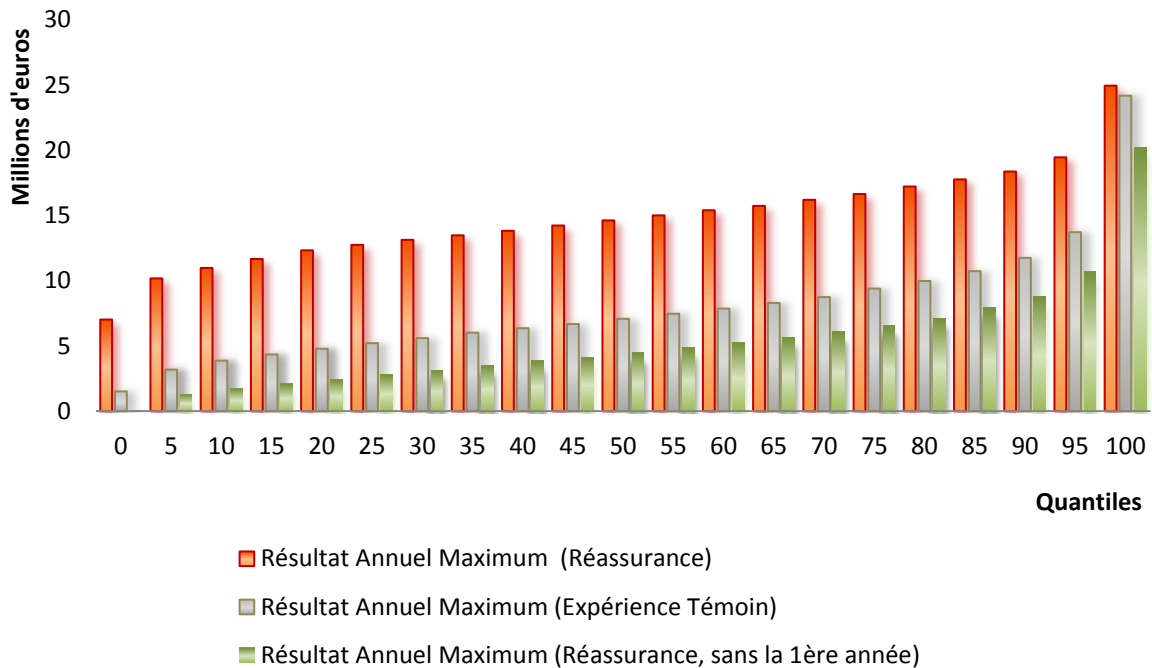


Graph 10 : Comparaison des quantiles des résultats globaux en fonction de la présence ou non d'un programme de réassurance

Les résultats avec un programme de réassurance sont nettement atténués par rapport au modèle sans réassurance. En effet, la réassurance va pénaliser les résultats bénéficiaires à cause de la prime de réassurance qui devra être payée, en revanche elle va permettre aux résultats déficitaires d'être moins impactés. On remarque que la réassurance joue bien son rôle de lisser les résultats. On peut également noter que le programme de réassurance simulé ne paraît pas optimal, en effet, l'atténuation des résultats bénéficiaires semble plus

importante que l'atténuation des résultats déficitaires. On pourrait sans doute obtenir un programme plus optimal en changeant, par exemple l'âge contractuel d'intervention de la réassurance ou en changeant les taux de chargement appliqués. L'estimation du programme de réassurance optimal n'entre pas dans le cadre de ce mémoire.

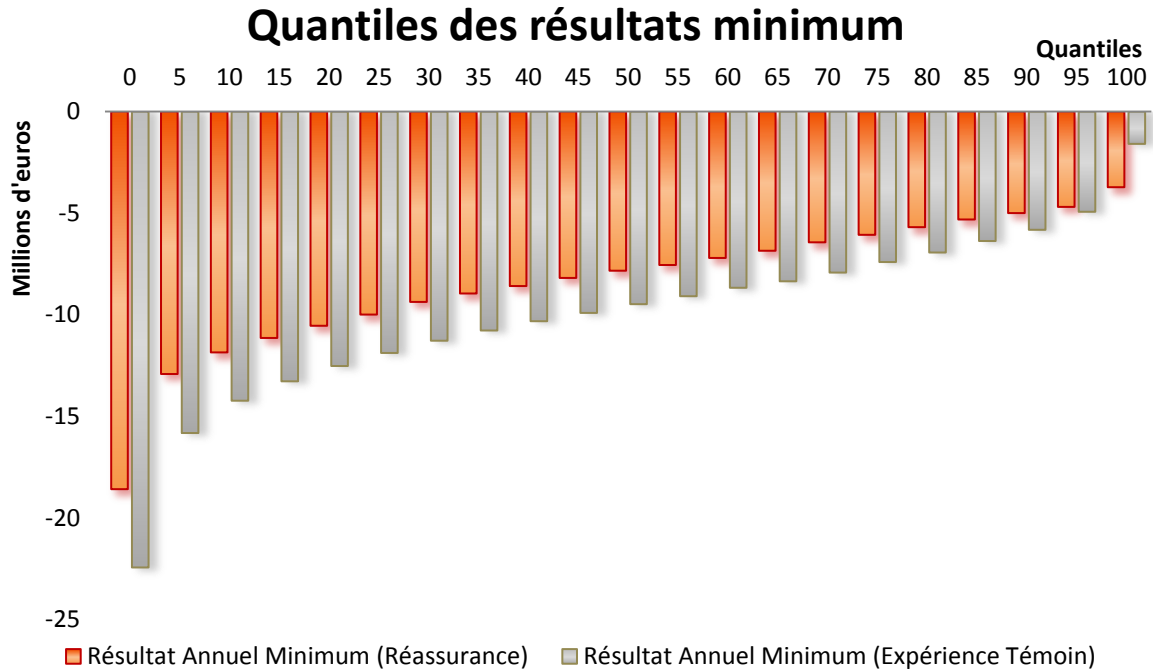
Quantiles des résultats maximum



Graph 11 : Comparaison des quantiles des résultats maximum en fonction de la présence ou non d'un programme de réassurance

Le résultat maximal est toujours supérieur avec une réassurance que sans réassurance. Ceci s'explique par le fait que l'assureur va bénéficier, la première année, d'un résultat très favorable, car il perçoit de la part de l'entreprise une prime unique correspondant aux capitaux constitutifs des rentes viagères, alors qu'il ne va provisionner qu'une rente temporaire plus une part en prévision de la prime de réassurance qu'il devra potentiellement payer. Ce dernier montant étant bien inférieur à la prime perçue entraîne un premier résultat largement excédentaire.

Si on retire la première année dans le calcul du maximum, on observe que les quantiles avec réassurance sont toujours inférieurs que ceux sans réassurance, ce qui confirme notre 1^{ère} observation sur le lissage des résultats.



Graph 12 : Comparaison des quantiles des résultats minimum en fonction de la présence ou non d'un programme de réassurance

On note ici la même observation que celle déjà invoquée du lissage du résultat : le programme de réassurance entraîne une hausse des résultats minimum.

Mesure du Risque	Résultat Global (Réassurance)	Résultat Global (Expérience Témoin)	Evolution (%)
Moyenne	-5 849 K€	-2 788 K€	-109,8%
Ecart Type	19 429 K€	26 474 K€	-26,6%
Semi Ecart Type +	19 858 K€	26 586 K€	-25,3%
Semi Ecart Type -	18 996 K€	26 346 K€	-27,9%
VaR 0,5%	-54 116 K€	-70 754 K€	-23,5%
TVaR 0,5%	-57 695 K€	-78 819 K€	-26,8%

Tab 6 : Comparaison des mesures du risque des résultats globaux en fonction de la présence ou non d'un programme de réassurance

Le programme de réassurance permet de baisser l'écart-type de près de 25%, et le capital réglementaire à immobiliser d'un pourcentage similaire. La réassurance atténue bien le risque pour l'ensemble des critères présentés.

Mesure du Risque	Résultat Annuel Maximum (Réassurance)	Résultat Annuel Maximum (Expérience Témoin)	Evolution (%)
Moyenne	14 720 K€	7 558 K€	94,8%
Ecart Type	2 878 K€	3 221 K€	-10,7%
Semi Ecart Type +	2 972 K€	3 828 K€	-22,3%
Semi Ecart Type -	2 782 K€	2 652 K€	4,9%
VaR 0,5%	7 781 K€	1 924 K€	304,5%
TVaR 0,5%	7 061 K€	1 638 K€	331,1%

Tab 7 : Comparaison des mesures du risque des résultats minimum en fonction de la présence ou non d'un programme de réassurance

Mesure du Risque	Résultat Annuel Minimum (Réassurance)	Résultat Annuel Minimum (Expérience Témoin)	Evolution (%)
Moyenne	-8 206 K€	-9 796 K€	-16,2%
Ecart Type	2 666 K€	3 345 K€	-20,3%
Semi Ecart Type +	2 267 K€	2 984 K€	-24,0%
Semi Ecart Type -	3 087 K€	3 724 K€	-17,1%
VaR 0,5%	-17 378 K€	-20 711 K€	-16,1%
TVaR 0,5%	-18 414 K€	-21 799 K€	-15,5%

Tab 8 : Comparaison des mesures du risque des résultats maximum en fonction de la présence ou non d'un programme de réassurance

Au vu des résultats, la réassurance atténue considérablement le risque sur les contrats de retraite supplémentaire. En effet, l'ensemble des mesures du risque pour les résultats globaux sont en baisse par rapport à l'expérience témoin.

Comme très souvent, la diminution du risque entraîne également une baisse du résultat moyen, ici de près de -100%.

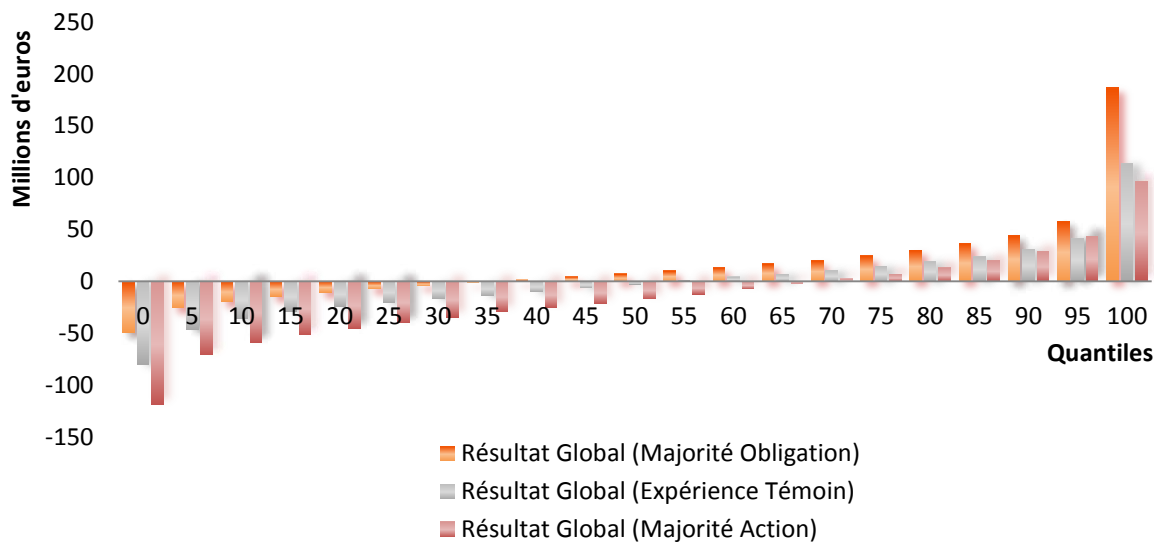
L'efficacité de la réassurance pour atténuer le risque est clairement mise en avant par cette modélisation. L'assureur a donc tout intérêt à mettre en place ce type de traité, s'il veut réduire le risque de son portefeuille.

5.4.2 MODELISATION DU RISQUE DE MARCHE

Pour rappel nous avons reproduit les simulations de l'expérience témoin en changeant la répartition entre les obligations et les actifs dans l'investissement de l'assureur :

- Expérience Témoin (50% Obligations, 50% Actions)
- Majorité Obligations (75% Obligations, 25% Actions)
- Majorité Actions (25% Obligations, 75% Actions)

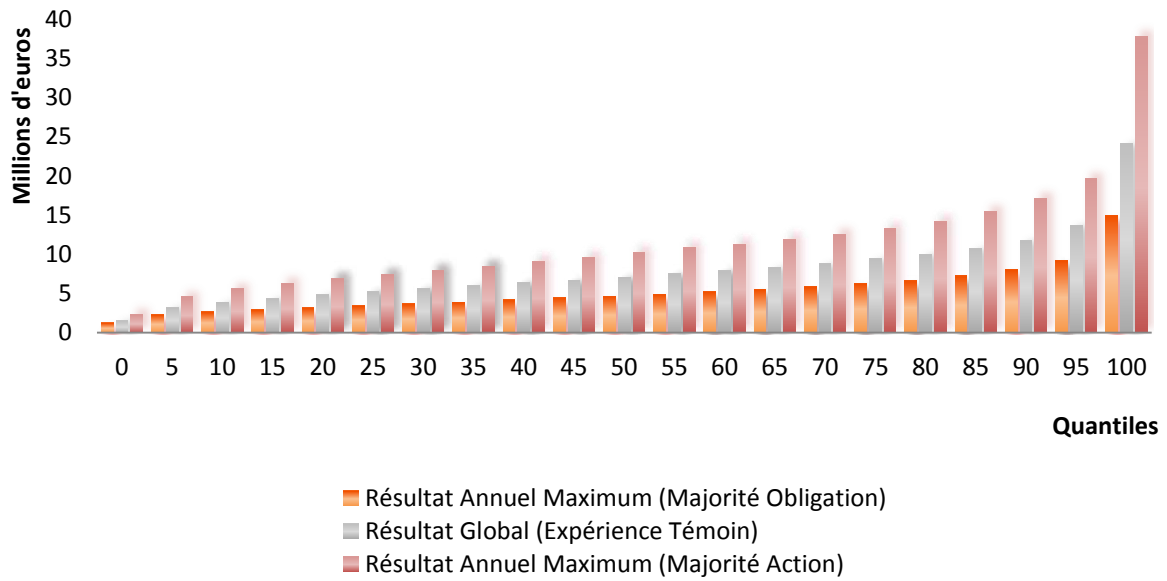
Quantiles des résultats globaux



Graph 13 : Comparaison des quantiles des résultats globaux en fonction de la part d'action et d'obligation dans l'investissement de l'assureur

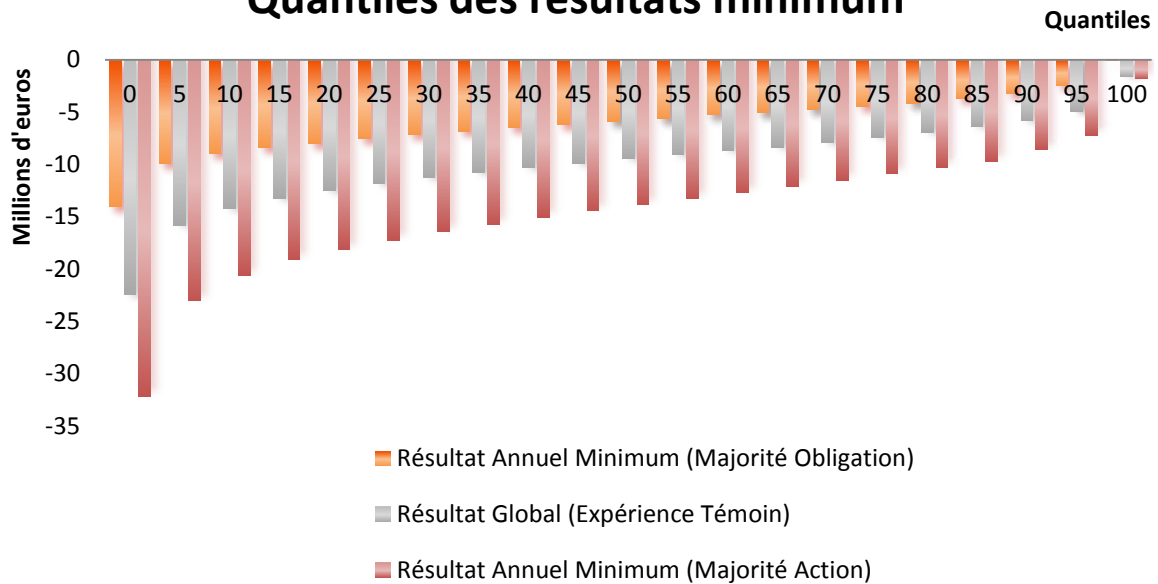
On voit sur ce graphique que les résultats globaux avec une répartition davantage portée sur les obligations sont toujours plus élevés que les résultats avec des actions. Un placement en obligation va donc atténuer les risques de déficit sans atténuer les potentiels résultats positifs. Cela va à l'encontre du précepte selon lequel, réduire un risque entraîne une baisse du résultat moyen. Nous expliquerons la raison de cette observation ci-après.

Quantiles des résultats maximum



Graph 14 : Comparaison des quantiles des résultats maximum en fonction de la part d'action et d'obligation dans l'investissement de l'assureur

Quantiles des résultats minimum



Graph 15 : Comparaison des quantiles des résultats minimum en fonction de la part d'action et d'obligation dans l'investissement de l'assureur

On remarque sur ces deux graphiques qu'un placement majoritaire sur le marché des actifs entraîne une augmentation du risque pris par l'assureur. En effet, lors d'une diversification

portée davantage sur le risque action, on observe des résultats maximum plus importants mais aussi des résultats minimum plus déficitaires. Au contraire, un placement en obligations ne nous permet pas d'obtenir des résultats maximum très importants mais limite également les résultats en cas de déficit.

Mesure du Risque	Résultat Global (Expérience Témoin)	Résultat Global (Majorité d'Obligation)	Ecart (Témoin - Majorité d'Obligation)	Résultat Global (Majorité d'Action)	Ecart (Témoin - Majorité d'Action)
Moyenne	-2 788 K€	10 512 K€	477,0%	-15 663 K€	-461,8%
Ecart Type	26 474 K€	26 246 K€	-0,9%	34 628 K€	30,8%
Semi Ecart Type +	26 586 K€	30 747 K€	15,7%	35 697 K€	34,3%
Semi Ecart Type -	26 346 K€	21 957 K€	-16,7%	33 571 K€	27,4%
VaR 0,5%	-70 754 K€	-44 095 K€	37,7%	-103 254 K€	-45,9%
TVaR 0,5%	-78 819 K€	-48 627 K€	38,3%	-115 688 K€	-46,8%

Tab 9 : Comparaison des mesures d'atténuation des risques pour les résultats globaux en fonction de la part d'action et d'obligation dans l'investissement de l'assureur

Ce tableau montre que le placement sur les obligations augmente le résultat global moyen et diminue le semi-écart-type négatif (écart-type calculé sur les observations en dessous de la moyenne) qui représente ici le réel risque (qui est le risque qu'un résultat se trouve sous la moyenne). Cette stratégie de placement a également pour effet de baisser les capitaux réglementaires à immobiliser (VaR) ainsi que la TVaR. Le placement majoritaire sur les obligations permet donc une diminution du risque subi par l'assureur mais aussi d'augmenter le résultat moyen. Au contraire, un placement majoritaire en action augmente considérablement le risque, comme le montre l'augmentation des mesures du risque présentées mais baisse également le résultat moyen.

Ces résultats surprenant s'expliquent par le contexte de calibrage des modèles stochastiques pour les actions et les obligations. En effet, les calibrages de ces modèles sont basés sur les données récentes et intègrent alors les effets des différentes crises qui ont eu lieu depuis 2008. La crise boursière influence à la baisse les taux de rendement moyen des actions, tandis que la crise de la dette influence à la hausse les taux d'intérêt. Le cumul de ces deux effets, rend les obligations plus performantes, en moyenne, que les actions, tout en conservant leur aspect moins volatil. Cela a pour conséquence qu'un investissement en obligation est à la fois moins risqué et plus rentable.

Sous les conditions actuelles du marché (taux d'intérêt très faible et regain de la valeur des actions), il semble évident que l'aspect volatil des actions engendrerait un risque pour l'assureur mais leurs rendements moyens seraient meilleurs que ceux des obligations. Nos conclusions sur l'atténuation du risque par l'investissement en obligations ne seraient pas remis en cause, mais celle sur l'augmentation de la moyenne oui.

Mesure du Risque	Résultat Annuel Maximum (Expérience Témoin)	Résultat Annuel Maximum (Majorité d'Obligation)	Ecart (Témoin - majorité d'Obligation)	Résultat Annuel Maximum (Majorité d'Action)	Ecart (Témoin - majorité d'Action)
Moyenne	7 558 K€	5 039 K€	-33,3%	10 832 K€	43,3%
Ecart Type	3 221 K€	2 168 K€	-32,7%	4 710 K€	46,2%
Semi Ecart Type +	3 828 K€	2 631 K€	-31,3%	5 586 K€	45,9%
Semi Ecart Type -	2 652 K€	1 738 K€	-34,5%	3 856 K€	45,4%
VaR 0,5%	1 924 K€	1 553 K€	-19,3%	2 643 K€	37,4%
TVaR 0,5%	1 638 K€	1 371 K€	-16,3%	2 396 K€	46,3%

Tab 10: Comparaison des mesures d'atténuation des risques pour les résultats maximum en fonction de la part d'action et d'obligation dans l'investissement de l'assureur

Mesure du Risque	Résultat Annuel Minimum (Expérience Témoin)	Résultat Annuel Minimum (Majorité d'Obligation)	Ecart (Témoin - majorité d'Obligation)	Résultat Annuel Minimum (Majorité d'Action)	Ecart (Témoin - majorité d'Action)
Moyenne	-9 796 K€	-6 022 K€	38,5%	-14 312 K€	-46,1%
Ecart Type	3 345 K€	2 285 K€	-31,7%	4 798 K€	43,4%
Semi Ecart Type +	2 984 K€	2 148 K€	-28,0%	4 232 K€	41,8%
Semi Ecart Type -	3 724 K€	2 425 K€	-34,9%	5 393 K€	44,8%
VaR 0,5%	-20 711 K€	-12 573 K€	39,3%	-29 749 K€	-43,6%
TVaR 0,5%	-21 799 K€	-13 906 K€	36,2%	-32 246 K€	-47,9%

Tab 11 : Comparaison des mesures d'atténuation des risques pour les résultats minimum en fonction de la part d'action et d'obligation dans l'investissement de l'assureur

L'analyse des résultats sur les maximum et minimum des résultats, montre qu'une stratégie d'investissement majoritaire en action accroît la probabilité de réaliser un résultat très bénéficiaire mais augmente aussi la probabilité de réaliser un résultat très déficitaire. Alors qu'une stratégie en obligation ne permettra pas de réaliser des résultats exceptionnellement bénéficiaire mais ne pourront pas non plus être exceptionnellement déficitaire.

Ceci confirme notre conclusion : plus la stratégie d'investissement de l'assureur est portée sur les actions, plus il s'expose au risque. Au contraire plus l'assureur investit sur des obligations, moins il est soumis au risque de variation de ses résultats (et notamment au risque de perte).

Dans notre cas, l'assureur à tout intérêt à porter son investissement en obligation (et aucun intérêt à investir en action) car cela diminue son risque tout en augmentant son résultat moyen. Par contre avec des données non influencées par les effets des crises, l'investissement en action permettrait d'obtenir un résultat moyen plus élevé mais accroîtrait le risque.

5.4.3 IMPACT D'UN INVESTISSEMENT SUR DES TAUX FORWARD

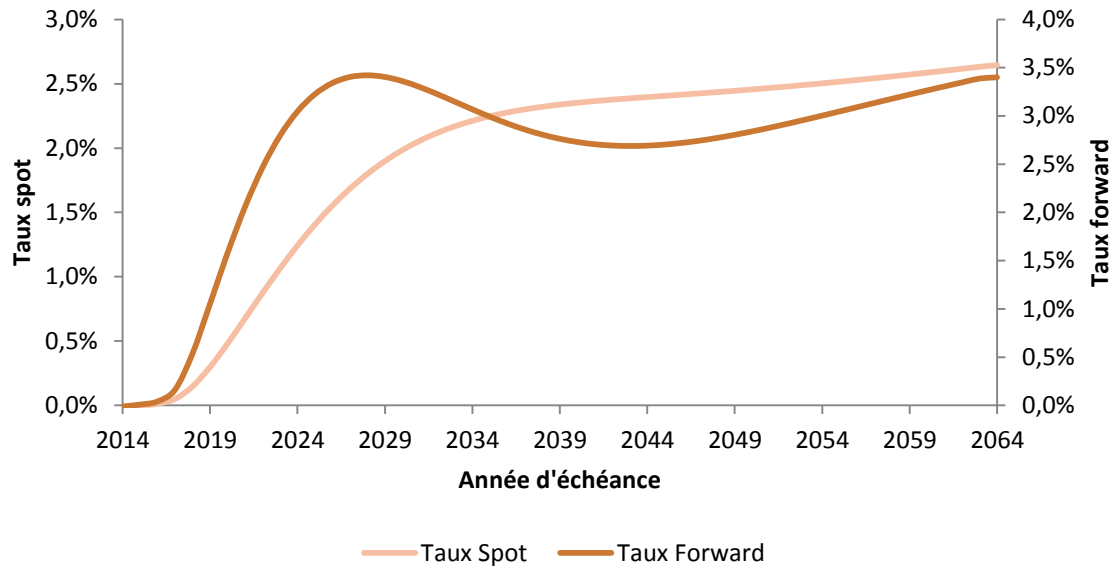
Les taux Forward ont été calculés sur la base de la courbe des taux « fin AOUT 2014 » publiée par l'Institut des Actuaire.

Nous notons ${}_1f_t$ le taux Forward auquel un investisseur peut s'assurer d'un placement à la date t pour un an. Nous noterons également s_k le taux Spot (ou taux instantané) en vigueur dès aujourd'hui et dont l'échéance est dans k années. L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage sur les marchés donne la relation entre les taux Forward d'échéance 1 an les taux Spot suivante :

$${}_1f_t = \frac{(1 + s_t)^t}{(1 + s_{t-1})^{t-1}} - 1$$

Nous représentons alors la courbe des taux ainsi que la courbe de taux Forward en résultant :

Courbe des Taux Forward et Spot

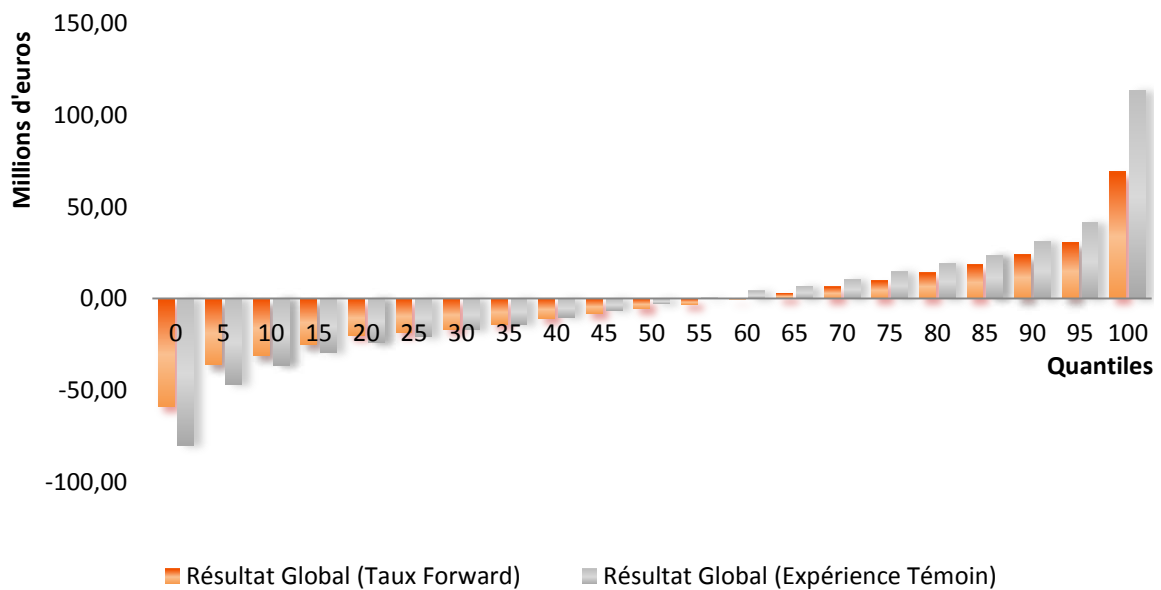


Source : Institut des Actuaire (Fin Août 2014)

Graph 16 : Courbe des Taux Forward et Spot

Nous avons simulé les résultats de l'assureur si celui-ci s'assure dès aujourd'hui d'investir au taux Forward. Les résultats des simulations sont présentés ci-dessous :

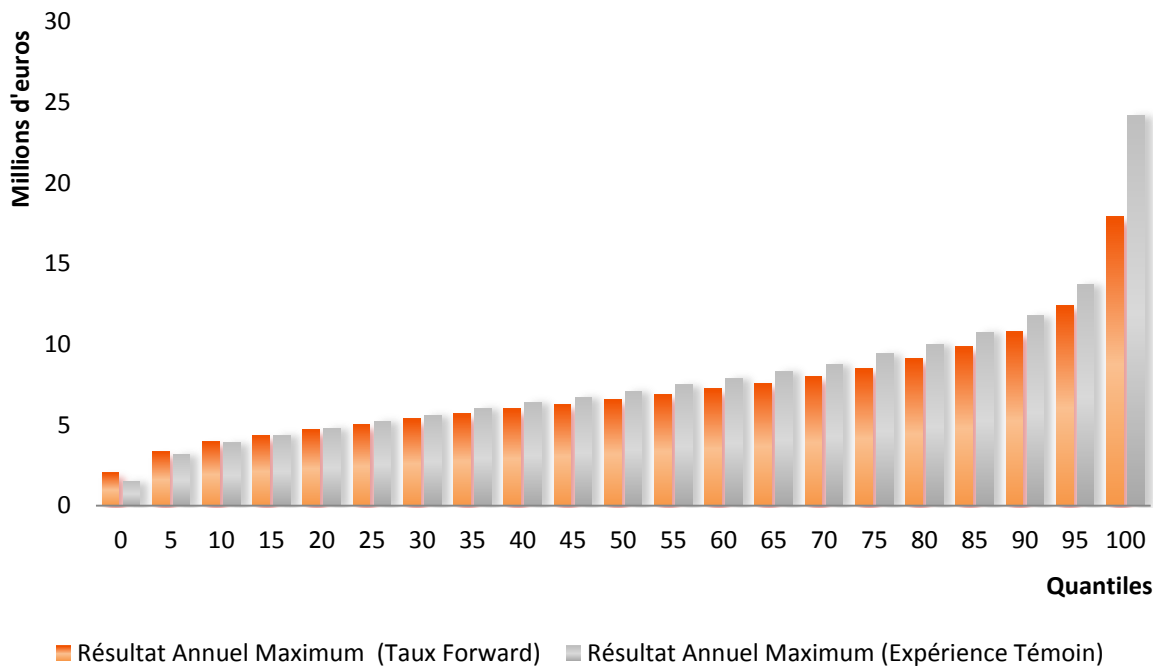
Quantiles des résultats globaux



Graph 17 : Comparaison des quantiles des résultats globaux entre une stratégie d'investissement basée sur les taux Forward ou non

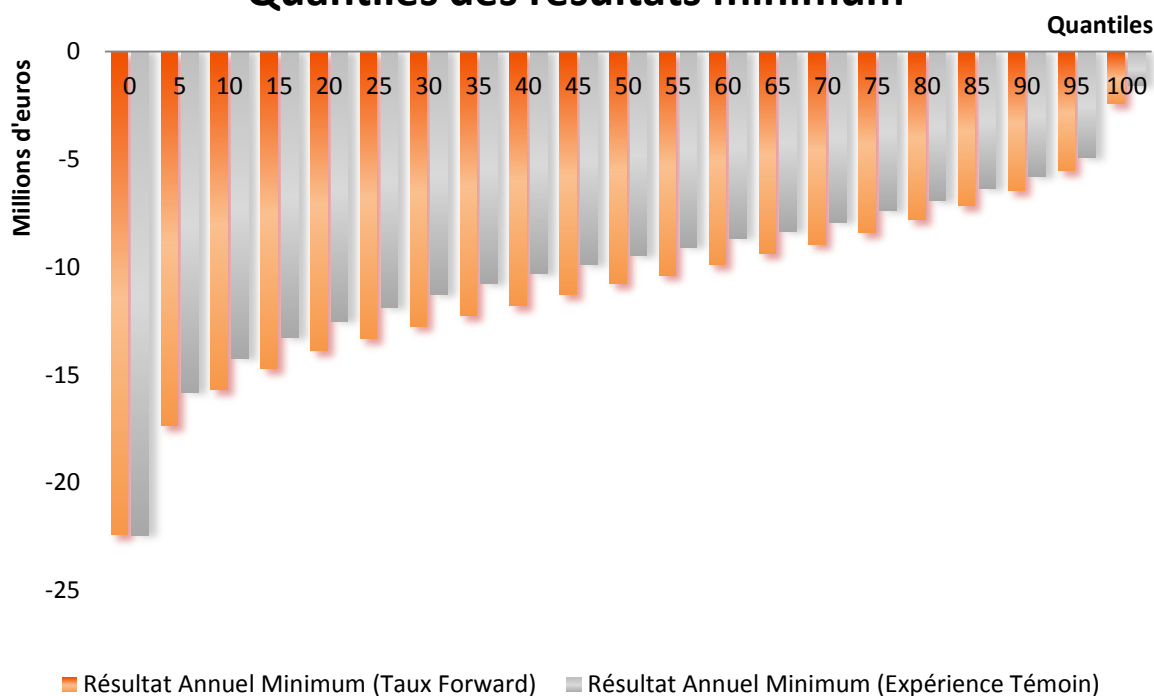
La comparaison des quantiles des résultats globaux nous montre que l'investissement sur le taux Forward diminue le risque, dans la mesure où les résultats globaux minimum sont plus élevés avec cette stratégie que dans l'expérience témoin, le résultat global maximum est quant à lui plus élevé dans l'expérience témoin que dans la modélisation avec les taux Forward. On assiste donc à un lissage des résultats, synonyme de diminution de l'écart type et donc du risque.

Quantiles des résultats maximum



Graph 18 : Comparaison des quantiles des résultats maximum entre une stratégie d'investissement basée sur les taux Forward ou non

Quantiles des résultats minimum



Graph 19 : Comparaison des quantiles des résultats minimum entre une stratégie d'investissement basée sur les taux Forward ou non

Au vu de ces graphiques, nous constatons que les écarts entre les quantiles du résultat maximum et minimum sont assez faibles. On note tout de même que le résultat maximal est atténué par les taux Forward alors qu'au contraire les résultats minimum sont légèrement plus importants après utilisation des Forward.

Mesure du Risque	Résultat Global (Taux Forward)	Résultat Global (Expérience Témoin)	Evolution (%)
Moyenne	-5 521 K€	-2 788 K€	-98,0%
Ecart Type	22 561 K€	26 474 K€	-14,8%
Semi Ecart Type +	22 515 K€	26 586 K€	-15,3%
Semi Ecart Type -	22 596 K€	26 346 K€	-14,2%
VaR 0,5%	-62 864 K€	-70 754 K€	11,2%
TVaR 0,5%	-68 494 K€	-78 819 K€	13,1%

Tab 12 : Comparaison des quantiles des résultats globaux entre une stratégie d'investissement basée sur les taux Forward ou non

Comme annoncé, il l'écart type a diminué de près de 15% grâce aux taux Forward, confirmant l'efficacité de cette mesure sur l'atténuation du risque. Cependant le résultat moyen a également diminué suite à cette stratégie d'investissement.

Mesure du Risque	Résultat Annuel Maximum (Taux Forward)	Résultat Annuel Maximum (Expérience Témoin)	Evolution (%)
Moyenne	7 051 K€	7 558 K€	-6,7%
Ecart Type	2 749 K€	3 221 K€	-14,7%
Semi Ecart Type +	3 335 K€	3 828 K€	-12,9%
Semi Ecart Type -	2 213 K€	2 652 K€	-16,5%
VaR 0,5%	2 251 K€	1 924 K€	17,0%
TVaR 0,5%	2 089 K€	1 638 K€	27,5%

Tab 13 : Comparaison des quantiles des résultats maximum entre une stratégie d'investissement basée sur les taux Forward ou non

Mesure du Risque	Résultat Annuel Minimum (Taux Forward)	Résultat Annuel Minimum (Expérience Témoin)	Evolution (%)
Moyenne	-10 996 K€	-9 796 K€	12,2%
Ecart Type	3 563 K€	3 345 K€	6,5%
Semi Ecart Type +	3 299 K€	2 984 K€	10,5%
Semi Ecart Type -	3 830 K€	3 724 K€	2,9%
VaR 0,5%	-21 176 K€	-20 711 K€	2,2%
TVaR 0,5%	-22 114 K€	-21 799 K€	1,4%

Tab 14 : Comparaison des quantiles des résultats minimum entre une stratégie d'investissement basée sur les taux Forward ou non

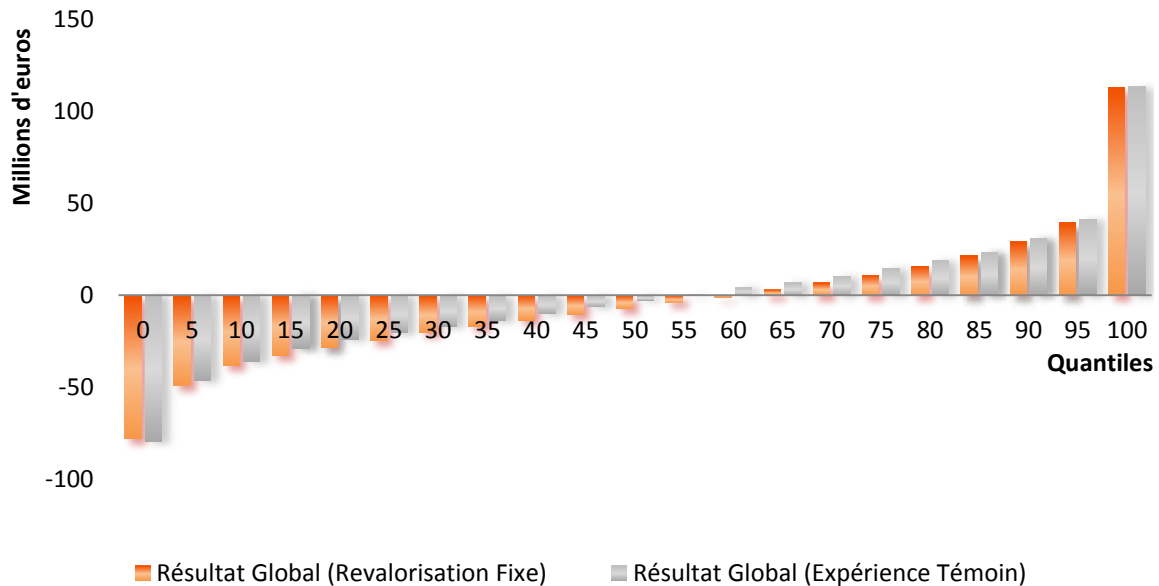
Ces deux derniers tableaux confirment les résultats déjà annoncés en observant les quantiles.

On conclut donc sur l'efficacité de cette mesure d'atténuation puisque celle-ci diminue toutes les mesures du risque obtenues sur les résultats globaux (baisse des écarts types et du montant réglementaire à immobiliser).

5.4.4 IMPACT D'UNE CLAUSE D'INDEXATION DES PENSIONS

La clause d'indexation fixe est choisie à 1,8% (identique à la moyenne de long terme utilisée dans le modèle de Vasicek).

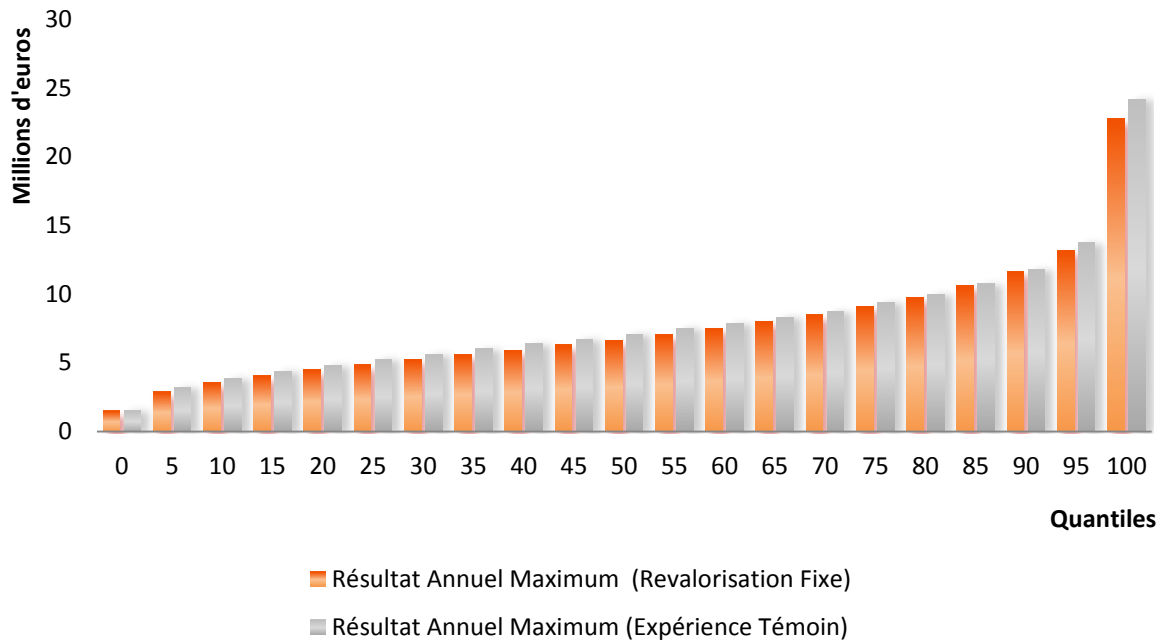
Quantiles des résultats globaux



Graph 20 : Comparaison des quantiles des résultats globaux en fonction de la présence ou non d'une clause d'indexation fixe de la pension

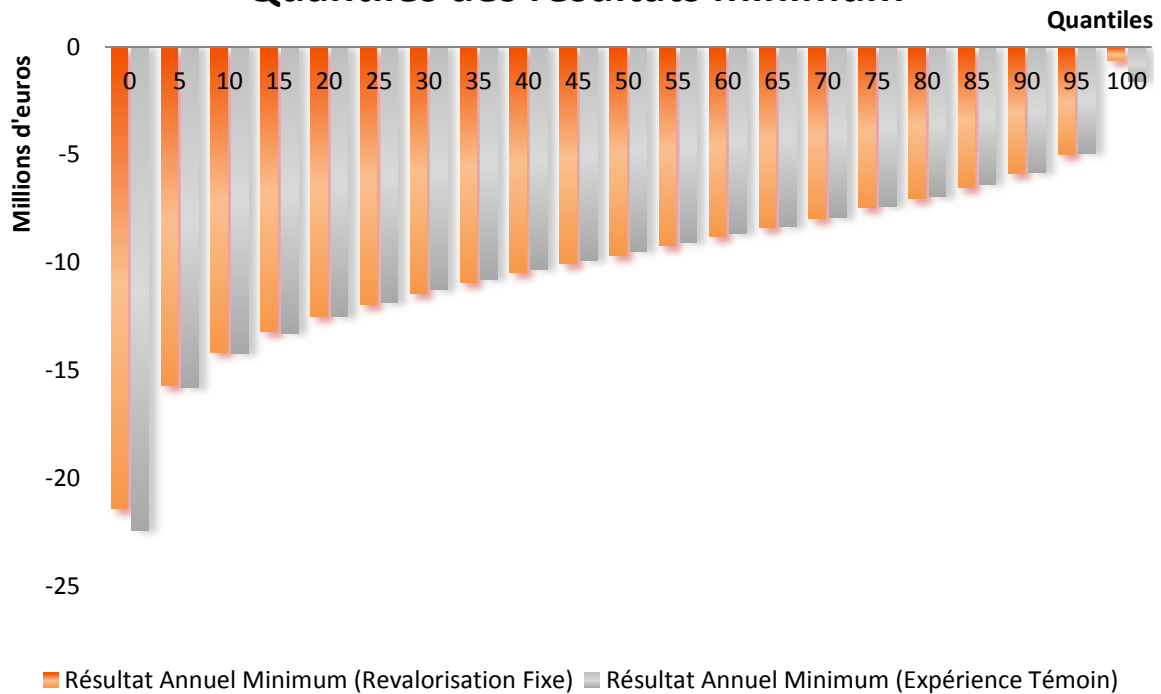
L'ensemble des quantiles sont très proche avec ou sans la clause de revalorisation fixe. Il ne semble pas que cette mesure soit efficace pour atténuer les risques.

Quantiles des résultats maximum



Graph 21 : Comparaison des quantiles des résultats maximum en fonction de la présence ou non d'une clause d'indexation fixe de la pension

Quantiles des résultats minimum



Graph 22 : Comparaison des quantiles des résultats minimum en fonction de la présence ou non d'une clause d'indexation fixe de la pension

Sur l'ensemble des graphiques proposés nous n'observons qu'une très légère différence entre les deux modélisations.

Mesure du Risque	Résultat Global (Revalorisation Fixe)	Résultat Global (Expérience Témoin)	Evolution (%)
Moyenne	-2 885 K€	-2 788 K€	-3,5%
Ecart Type	26 743 K€	26 474 K€	1,0%
Semi Ecart Type +	28 041 K€	26 586 K€	5,5%
Semi Ecart Type -	25 463 K€	26 346 K€	-3,4%
VaR 0,5%	-71 845 K€	-70 754 K€	1,5%
TVaR 0,5%	-77 971 K€	-78 819 K€	-1,1%

Tab 15 : Comparaison des mesures du risque sur les résultats globaux en fonction de la présence ou non d'une clause d'indexation fixe de la pension

Mesure du Risque	Résultat Annuel Maximum (Revalorisation Fixe)	Résultat Annuel Maximum (Expérience Témoin)	Evolution (%)
Moyenne	7 231 K€	7 558 K€	-4,3%
Ecart Type	3 201 K€	3 221 K€	-0,6%
Semi Ecart Type +	3 834 K€	3 828 K€	0,2%
Semi Ecart Type -	2 622 K€	2 652 K€	-1,1%
VaR 0,5%	1 879 K€	1 924 K€	-2,3%
TVaR 0,5%	1 608 K€	1 638 K€	-1,8%

Tab 16 : Comparaison des mesures du risque sur les résultats maximum en fonction de la présence ou non d'une clause d'indexation fixe de la pension

Mesure du Risque	Résultat Annuel Minimum (Revalorisation Fixe)	Résultat Annuel Minimum (Expérience Témoin)	Evolution (%)
Moyenne	-9 878 K€	-9 796 K€	0,8%
Ecart Type	3 306 K€	3 345 K€	-1,2%
Semi Ecart Type +	3 025 K€	2 984 K€	1,3%
Semi Ecart Type -	3 588 K€	3 724 K€	-3,6%
VaR 0,5%	-20 330 K€	-20 711 K€	-1,8%
TVaR 0,5%	-21 259 K€	-21 799 K€	-2,5%

Tab 17 : Comparaison des mesures du risque sur les résultats minimum en fonction de la présence ou non d'une clause d'indexation fixe de la pension

Au vu de ces résultats, nous voyons que l'impact de cette clause d'indexation est très faible à la fois sur les quantiles et sur les différentes mesures du risque. En effet, les évolutions des mesures du risque ne dépassent pas 5%.

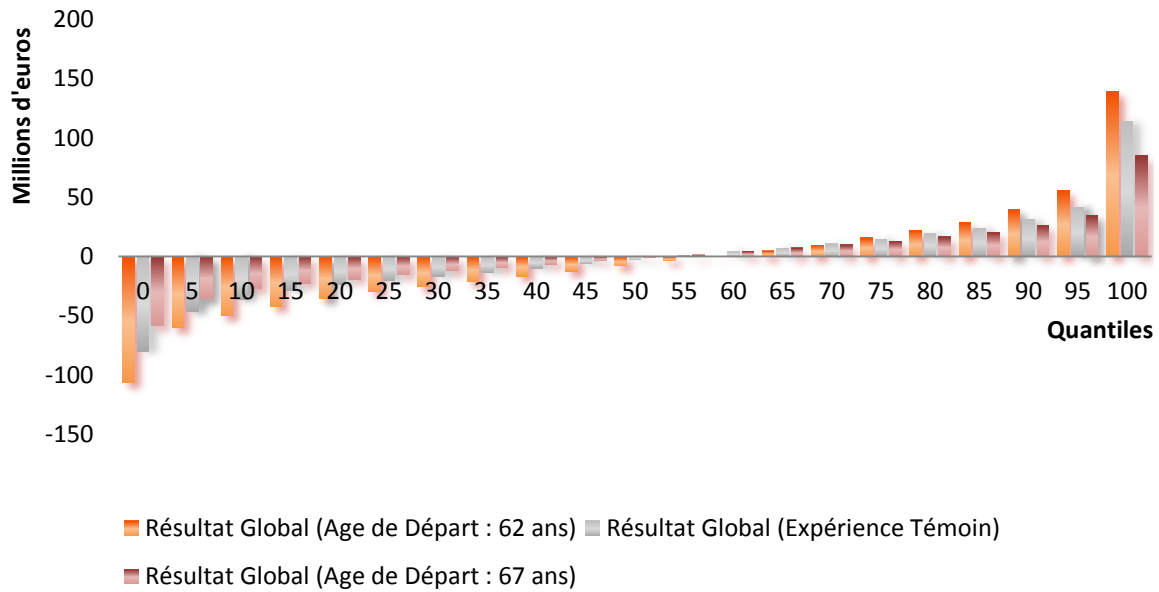
On peut conclure sur l'inefficacité de cette mesure pour l'atténuation du risque lié à l'inflation lorsque la clause est fixée au niveau « moyen » attendu pour celle-ci. Il est naturel que, si cette clause est fixée à un niveau inférieur à la moyenne attendue de l'inflation, le résultat de l'assureur se trouvera amélioré par rapport à l'expérience témoin, mais l'assureur se mettra en difficulté commerciale pour attirer les assurés.

5.4.5 IMPACT D'UN CHANGEMENT DE LEGISLATION

A partir de l'hypothèse centrale d'un départ à 65 ans, nous avons réalisé les mêmes modélisations avec, d'abord, un âge de départ plus tardif : à 67 ans puis un âge de départ plus favorable aux salariés : 62 ans.

Nous avons reconstitué les simulations avec la même population projetée que celle sur laquelle nous avons effectué l'expérience témoin, en changeant uniquement la condition d'accès au régime (remplacement de 65 ans par 62 ou 67 ans). La population obtenue est de 2 256 individus pour la simulation à 62 ans et 1 783 individus dans la simulation à 67 ans.

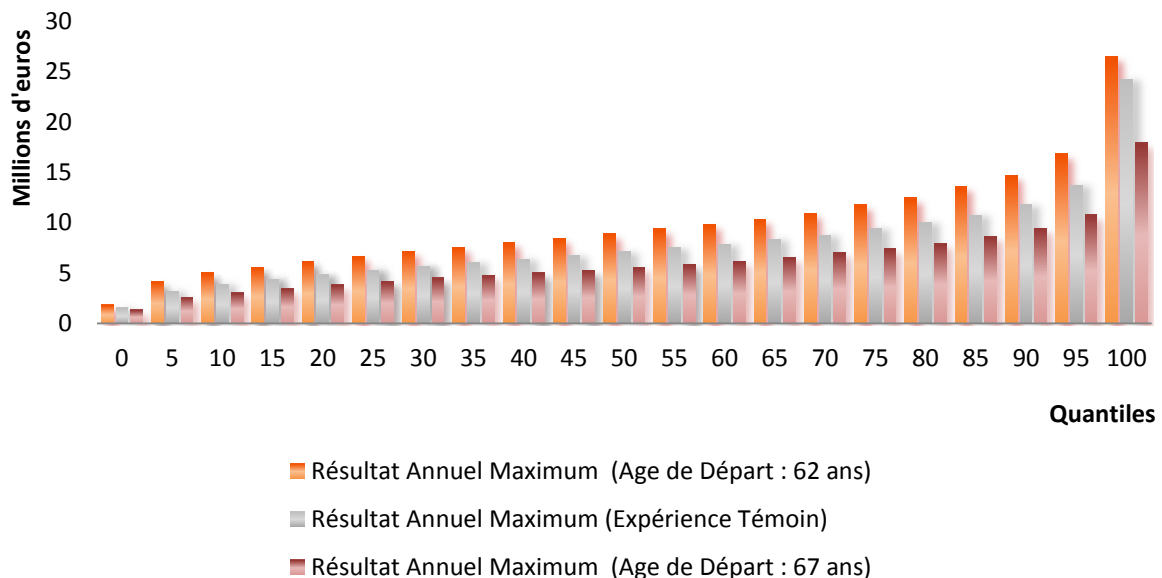
Quantiles des résultats globaux



Graph 23 : Comparaison des quantiles des résultats globaux en fonction de la date de départ à la retraite

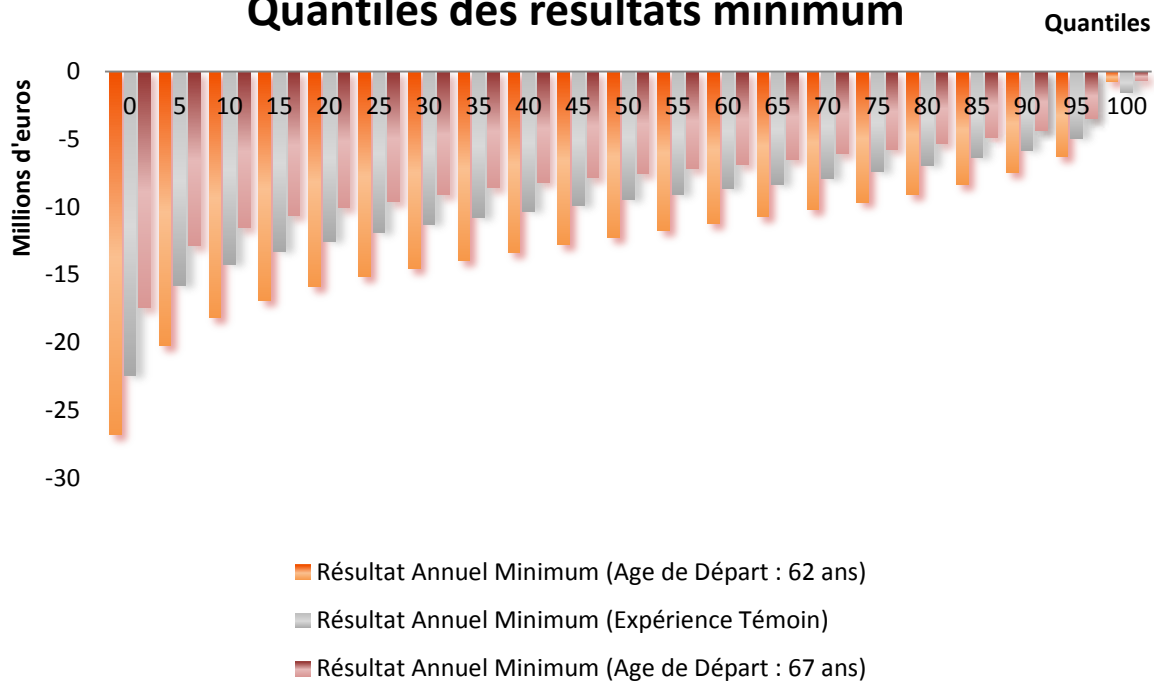
Un départ à la retraite à 62 ans entraîne des résultats pouvant être plus élevés qu'un cas de départ plus tardif mais peut également engendrer des résultats plus négatifs. Au contraire, un départ à 67 ans limitera les résultats très positifs mais aussi les résultats très négatifs.

Quantiles des résultats maximum



Graph 24 : Comparaison des quantiles des résultats maximum en fonction de la date de départ à la retraite

Quantiles des résultats minimum



Graph 25 : Comparaison des quantiles des résultats minimum en fonction de la date de départ à la retraite

Ces deux derniers graphiques, montrent encore que plus l'âge de départ à la retraite est tardif, moins le gain potentiel est élevé mais la perte potentielle est également moins élevée.

En effet, pour une rente débutant à 62 ans, l'assureur s'engage sur une période plus longue, il est alors soumis aux différents aléas qui peuvent survenir sur toute cette période et à leur effet sur le long terme. Au contraire, un départ à 67 ans sera moins risqué puisque l'engagement de l'assureur sera plus faible et la durée moyenne du contrat plus courte.

Mesure du Risque	Résultat Global (Expérience Témoin)	Résultat Global (Départ : 62 ans)	Evolution (62 ans - Témoin)	Résultat Global (Départ : 67 ans)	Evolution (67 ans - Témoin)
Moyenne	-2 788 K€	-6 406 K€	-129,8%	-830 K€	70,2%
Ecart Type	26 474 K€	35 363 K€	33,6%	21 267 K€	-19,7%
Semi Ecart Type +	26 586 K€	37 277 K€	40,2%	21 748 K€	-18,2%
Semi Ecart Type -	26 346 K€	33 427 K€	26,9%	20 779 K€	-21,1%
VaR 0,5%	-70 754 K€	-96 135 K€	35,9%	-54 707 K€	-22,7%
TVaR 0,5%	-78 819 K€	-102 636 K€	30,2%	-60 215 K€	-23,6%

Tab 18 : Comparaison des mesures du risque sur les résultats globaux en fonction de l'âge de départ à la retraite

Mesure du Risque	Résultat Annuel Maximum (Expérience Témoin)	Résultat Annuel Maximum (Départ : 62 ans)	Evolution (62 ans - Témoin)	Résultat Annuel Maximum (Départ : 67 ans)	Evolution (67 ans - Témoin)
Moyenne	7 558 K€	7 231 K€	-4,3%	5 986 K€	-20,8%
Ecart Type	3 221 K€	3 201 K€	-0,6%	2 535 K€	-21,3%
Semi Ecart Type +	3 828 K€	3 834 K€	0,2%	3 035 K€	-20,7%
Semi Ecart Type -	2 652 K€	2 622 K€	-1,1%	2 078 K€	-21,6%
VaR 0,5%	1 924 K€	1 879 K€	-2,3%	1 606 K€	-16,5%
TVaR 0,5%	1 638 K€	1 608 K€	-1,8%	1 369 K€	-16,4%

Tab 19 : Comparaison des mesures du risque sur les résultats maximum en fonction de l'âge de départ à la retraite

Mesure du Risque	Résultat Annuel Minimum (Expérience Témoin)	Résultat Annuel Minimum (Départ : 62 ans)	Evolution (62 ans - Témoin)	Résultat Annuel Minimum (Départ : 67 ans)	Evolution (67 ans - Témoin)
Moyenne	-9 796 K€	-9 878 K€	0,8%	-7 734 K€	-21,0%
Ecart Type	3 345 K€	3 306 K€	-1,2%	2 796 K€	-16,4%
Semi Ecart Type +	2 984 K€	3 025 K€	1,3%	2 532 K€	-15,2%
Semi Ecart Type -	3 724 K€	3 588 K€	-3,6%	3 071 K€	-17,5%
VaR 0,5%	-20 711 K€	-20 330 K€	-1,8%	-16 084 K€	-22,3%
TVaR 0,5%	-21 799 K€	-21 259 K€	-2,5%	-17 085 K€	-21,6%

Tab 20 : Comparaison des mesures du risque sur les résultats minimum en fonction de l'âge de départ à la retraite

Sans surprise, nous constatons qu'un départ à 62 ans est plus risqué pour l'assureur du point de vue de toutes les mesures du risque (augmentation des écarts-types, VaR et TVaR et diminution du résultat moyen) tandis qu'un départ plus tardif entraîne une baisse de la variation, mais également du capital réglementaire à immobiliser (VaR) pour l'assureur.

L'assureur est donc sensible aux modifications législatives qui pourraient modifier l'âge de départ légal. Il a ainsi tout intérêt à s'émanciper du législateur en fixant contractuellement des âges de début de versement de la pension.

5.4.6 IMPACT DES PENALITES DE RACHAT ET PRIMES DE FIDELITE

Comme nous l'avons déjà stipulé, le risque de rachat n'est pas intégré à notre modèle, ainsi les conclusions que nous pourrions tenir sur ce sujet ne seront pas vérifiées par une étude quantitative mais seront simplement de remarques qui décrivent les évolutions attendues, à priori, sur le résultat de l'assureur.

Il est difficile de prédire le comportement d'un assuré d'autant plus lorsque celui-ci est dans un des cas ouvrant le droit au rachat d'un contrat de retraite (décès du conjoint, surendettement, invalidité de l'assuré, ...).

Il semble, cependant, que si un assuré dans cette situation est enclin à racheter son contrat, il ne sera que faiblement influencé par une prime de fidélité future ou une pénalité de rachat. En effet, il s'agit souvent de situation « d'urgence » où le besoin de fonds immédiatement disponibles prévaut sur une anticipation de gains potentiels futurs.

S'il est peu probable qu'elle modifie le comportement face au rachat de l'assuré, la pénalité de rachat aura au minimum un rôle mécanique sur les prestations à verser en cas de rachat, qui devraient alors être inférieures aux prestations versées en l'absence d'une pareille pénalité. Cet effet est cependant limité puisque la loi n'autorise pas une pénalité supérieure à 10% de la provision mathématique ou l'application d'une telle pénalité sur des épargnes de plus de 8 ans.

La prime de fidélité, quant à elle, aurait davantage un effet inverse sur les résultats de l'assureur, si on conserve notre hypothèse d'un effet casi-nulle sur le comportement de l'assuré. En effet, une telle mesure augmentera la provision détenue par les salariés au moment de leur départ à la retraite, engendrant ainsi une hausse des arrérages de rentes annuelles dues par l'assureur. Combinée avec les effets du risque de longévité, une telle mesure risquerait de pénaliser les résultats de l'assureur sur le long terme.

6. CONCLUSION

La retraite supplémentaire, qui était vue comme un avantage dans la politique de recrutement ou de fidélisation d'une entreprise devient, aujourd'hui, de plus en plus une nécessité pour les salariés afin de conserver un taux de remplacement similaire à celui offert par les régimes obligatoires, il y a encore quelques années.

Le législateur a pris conscience des risques qui pèsent sur les entreprises qui proposent ce genre d'avantages à leurs salariés et oblige dorénavant l'externalisation de ces engagements auprès d'un assureur. Il est alors primordial pour l'assureur de gérer de façon adaptée ces risques.

C'est pour cela que nous avons modélisé les risques subis par un assureur d'un tel contrat, puis nous avons proposé des mesures pour gérer et atténuer ces risques.

Nos résultats montrent que l'assureur est principalement soumis à trois risques majeurs sur un contrat de retraite supplémentaire : le risque de longévité, le risque de marché et le risque législatif.

A l'inverse, l'assureur est peu sensible au risque d'inflation et à priori aussi peu impacté par le risque de rachat.

Pour faire face à ces risques, nous avons montré l'efficacité de méthodes d'atténuation des risques. A contrario, nous avons également pu voir que d'autres méthodes étaient quasi inefficaces.

- La réassurance :

Cette mesure a un impact important sur les risques, permettant à la fois de dégager une économie sur le capital réglementaire à immobiliser et sur les mesures du risque (Ecart-type, VaR, ...) de près de 25%.

- Une stratégie d'investissement majoritairement axée vers les obligations :

Cette stratégie permet de limiter les risques d'un résultat extrême (très positif ou très négatif). Les effets sur les différentes mesures du risque (baisse de l'écart-type négatif de 16%, et baisse de la VaR de plus de 30%) permettent également de conclure sur l'efficacité de cette stratégie d'investissement au détriment d'une stratégie tournée vers les actions.

- Une date de début de liquidation tardive et fixée contractuellement :

Nous avons pu voir que plus l'âge de début de liquidation est retardé, plus le risque subi par l'assureur est réduit. En effet, l'écart-type des résultats globaux entre un âge de départ à 65 ans et un âge de départ à 67 ans est réduit d'environ 20%, l'ordre de grandeur est le même en ce qui concerne la VaR et la TVaR. La stipulation de l'âge de liquidation de la pension permet à l'assureur de ne plus dépendre des décisions politiques sur l'âge légal de départ à la retraite.

Les méthodes jugées efficaces ne sont pas toujours toutes appliquées dans des cas concrets. En effet, la réassurance est une mesure rependue, mais celle en excédent de durée est moins utilisée que d'autres structures de réassurance. Les raisons sont : la gestion de ce traité de réassurance est relativement lourde et difficile à mettre en place, le prix d'une telle réassurance est relativement important pour l'assureur, et enfin le réassureur hésite à s'engager sur une longue durée et sur un risque en constante évolution. Tous ces éléments contraignent la mise en place de ce type de traité pour des assureurs de retraite supplémentaire.

Aussi, la date de début de versement des primes est, en pratique, souvent liée à la date de départ légal à la retraite, malgré nos remarques sur la diminution des risques en cas de date fixée dans le contrat. Ce point s'explique par le souhait des assurés qui désirent percevoir leurs revenus immédiatement à la fin de leur activité professionnelle.

Le modèle que nous avons mis en place repose sur des hypothèses, pour certaines, assez restrictives. Il est alors important de prendre conscience des limites que ces hypothèses peuvent créer.

La plus importante d'entre elle est l'hypothèse d'indépendance entre les différentes valeurs économiques et financières (Inflation, Taux d'intérêt, Valeur de l'Actif, ...), alors que l'expérience nous démontre clairement l'existence de liens de corrélation entre ces valeurs.

De plus, les calibrages de nos modèles stochastiques ont été effectués sur la base de données impactées par les crises de ces dernières années. Ainsi des propriétés particulières propres à cette situation (taux de rendement des obligations supérieur à celui des actions) ont eu des effets contraires à ceux observés habituellement sur la modélisation du risque de marché.

Il serait également intéressant de voir les effets de nos mesures sur une population réelle et ouvertes, c'est-à-dire en prenant en compte les entrées de rentiers dans le régime. Mais également d'analyser les risques qui pèsent sur l'entreprise dans la phase de constitution des capitaux constitutifs de retraite.

Enfin, le risque de rachat, que nous avons écarté puisqu'il n'influence, à priori, que marginalement le résultat de l'assureur pourrait faire l'objet d'une étude plus approfondie. Le comportement des assurés pourrait ainsi être modélisé et nous pourrions établir des conclusions claires sur l'impact de ce risque et des éventuelles mesures d'atténuations du risque sur le résultat de l'assureur.

TABLE DES GRAPHIQUES

Graph 1 : Pyramide des âges de la population initiale	32
Graph 2 : Nombre moyen de rentiers obtenu en fonction de la durée de projection	34
Graph 3 : Pyramide des âges de la population finale de rentiers	35
Graph 4 : Evolution Stochastique du taux d'intérêt	48
Graph 5 : Evolution Stochastique d'un CAC40	50
Graph 6 : Evolution Stochastique de l'Inflation	51
Graph 7 : Quantiles des résultats globaux (expérience témoin)	53
Graph 8 : Quantiles des résultats maximum (expérience témoin)	54
Graph 9 : Quantiles des résultats minimum (expérience témoin)	54
Graph 10 : Comparaison des quantiles des résultats globaux en fonction de la présence ou non d'un programme de réassurance	61
Graph 11 : Comparaison des quantiles des résultats maximum en fonction de la présence ou non d'un programme de réassurance	62
Graph 12 : Comparaison des quantiles des résultats minimum en fonction de la présence ou non d'un programme de réassurance	63
Graph 13 : Comparaison des quantiles des résultats globaux en fonction de la part d'action et d'obligation dans l'investissement de l'assureur	65
Graph 14 : Comparaison des quantiles des résultats maximum en fonction de la part d'action et d'obligation dans l'investissement de l'assureur	66

Graph 15 : Comparaison des quantiles des résultats minimum en fonction de la part d'action et d'obligation dans l'investissement de l'assureur	66
Graph 16 : Courbe des Taux Forward et Spot	70
Graph 17 : Comparaison des quantiles des résultats globaux entre une stratégie d'investissement basée sur les taux Forward ou non	70
Graph 18 : Comparaison des quantiles des résultats maximum entre une stratégie d'investissement basée sur les taux Forward ou non	71
Graph 19 : Comparaison des quantiles des résultats minimum entre une stratégie d'investissement basée sur les taux Forward ou non	72
Graph 20 : Comparaison des quantiles des résultats globaux en fonction de la présence ou non d'une clause d'indexation fixe de la pension	74
Graph 21 : Comparaison des quantiles des résultats maximum en fonction de la présence ou non d'une clause d'indexation fixe de la pension	75
Graph 22 : Comparaison des quantiles des résultats minimum en fonction de la présence ou non d'une clause d'indexation fixe de la pension	75
Graph 23 : Comparaison des quantiles des résultats globaux en fonction de la date de départ à la retraite	78
Graph 24 : Comparaison des quantiles des résultats maximum en fonction de la date de départ à la retraite	78
Graph 25 : Comparaison des quantiles des résultats minimum en fonction de la date de départ à la retraite	79

TABLE DES TABLEAUX

Tab 1 : Taux de cotisation au titre des régimes ARRCO et AGIRC	22
Tab 2 : Statistiques par sexe de la population initiale	32
Tab 3 : Taux de turnover appliqués	33
Tab 4 : Statistiques par sexe de la population finale de rentiers	35
Tab 5 : Les Mesures du Risque (expérience témoin)	55
Tab 6 : Comparaison des mesures du risque des résultats globaux en fonction de la présence ou non d'un programme de réassurance	63
Tab 7 : Comparaison des mesures du risque des résultats minimum en fonction de la présence ou non d'un programme de réassurance	64
Tab 8 : Comparaison des mesures du risque des résultats maximum en fonction de la présence ou non d'un programme de réassurance	64
Tab 9 : Comparaison des mesures d'atténuation des risques pour les résultats globaux en fonction de la part d'action et d'obligation dans l'investissement de l'assureur	67
Tab 10: Comparaison des mesures d'atténuation des risques pour les résultats maximum en fonction de la part d'action et d'obligation dans l'investissement de l'assureur	68
Tab 11 : Comparaison des mesures d'atténuation des risques pour les résultats minimum en fonction de la part d'action et d'obligation dans l'investissement de l'assureur	68
Tab 12 : Comparaison des quantiles des résultats globaux entre une stratégie d'investissement basée sur les taux Forward ou non	72
Tab 13 : Comparaison des quantiles des résultats maximum entre une stratégie d'investissement basée sur les taux Forward ou non	73

Tab 14 : Comparaison des quantiles des résultats minimum entre une stratégie d'investissement basée sur les taux Forward ou non	73
Tab 15 : Comparaison des mesures du risque sur les résultats globaux en fonction de la présence ou non d'une clause d'indexation fixe de la pension	76
Tab 16 : Comparaison des mesures du risque sur les résultats maximum en fonction de la présence ou non d'une clause d'indexation fixe de la pension	76
Tab 17 : Comparaison des mesures du risque sur les résultats minimum en fonction de la présence ou non d'une clause d'indexation fixe de la pension	76
Tab 18 : Comparaison des mesures du risque sur les résultats globaux en fonction de l'âge de départ à la retraite	79
Tab 19 : Comparaison des mesures du risque sur les résultats maximum en fonction de l'âge de départ à la retraite	80
Tab 20 : Comparaison des mesures du risque sur les résultats minimum en fonction de l'âge de départ à la retraite	80

BIBLIOGRAPHIE

Lilia ALLAG, *Modélisation et allocation stratégique d'actifs dans le cadre du référentiel Solvabilité*, 2008, Mémoire d'Actuariat, Institut de Sciences Financière et d'Assurances (Université Claude Bernard - Lyon1)

BLACK Fischer, SCHOLES Myron, *"The Pricing of Options and Corporate Liabilities"*, 1973, Journal of Political Economy 81 (3): 637–654

Michael J. BRENNAN, Eduardo S. SCHWARTZ, *"A continuous time approach to the pricing of bonds"*, 1979, Journal of Banking & Finance, Volume 3, Issue 2, Pages 133–155

Gérard CORNILLEAU et Henri STERDYNIK, *Les cinq piliers de la retraite*, 30 mai 2003, Observatoire Français des Conjonctures Economiques

COX, J.C., J.E. INGERSOLL and S.A. ROSS, *"A Theory of the Term Structure of Interest Rates"*, 1985, Econometrica 53: 385–407

Quentin GUIBERT, *Analyse de la solvabilité d'un régime de retraite supplémentaire*. 2010, Mémoire d'Actuariat, Institut de Sciences Financière et d'Assurances (Université Claude Bernard - Lyon1)

Quentin GUIBERT et Frédéric PLANCHET, *Quels sont les risques associés à un régime de retraite ?*, 2013, La Lettre de l'Observatoire des Retraites n°20 (Décembre 2013)

John HULL and Alan WHITE, *"Pricing interest-rate derivative securities"*, 1990, The Review of Financial Studies, Vol 3, No. 4, pp. 573–592

MERTON R. C., *"Option pricing when the underlying stock returns are discontinuous"*, 1976, Journal of Financial Economics, 3, p. 125-144

Stéphane REBAUDO, *Réaliser un panorama des 3 piliers de retraite dans différents pays européens (incluant la France)*. 2008, Mémoire d'Actuariat, Université Paris Dauphine

Sophie TERRIER, *Les Rentés Viagères : Mortalité d'expérience et Réassurance*, 2001, Mémoire d'Actuariat, Le Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM)

Les retraites complémentaires dans le marché unique, Juin 1997, Livre Vert de la Commission Européenne (http://europa.eu/documents/comm/green_papers/pdf/com-1997-283_fr.pdf)

VASICEK Oldrich, *"An Equilibrium Characterisation of the Term Structure"*, 1977, Journal of Financial Economics 5 (2): 177–188

Autres Sources :

Banque de France

Conseil d'Orientation des Retraites

LassuranceRetraite.fr

Institut des Actuaire

Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques

Investing.com

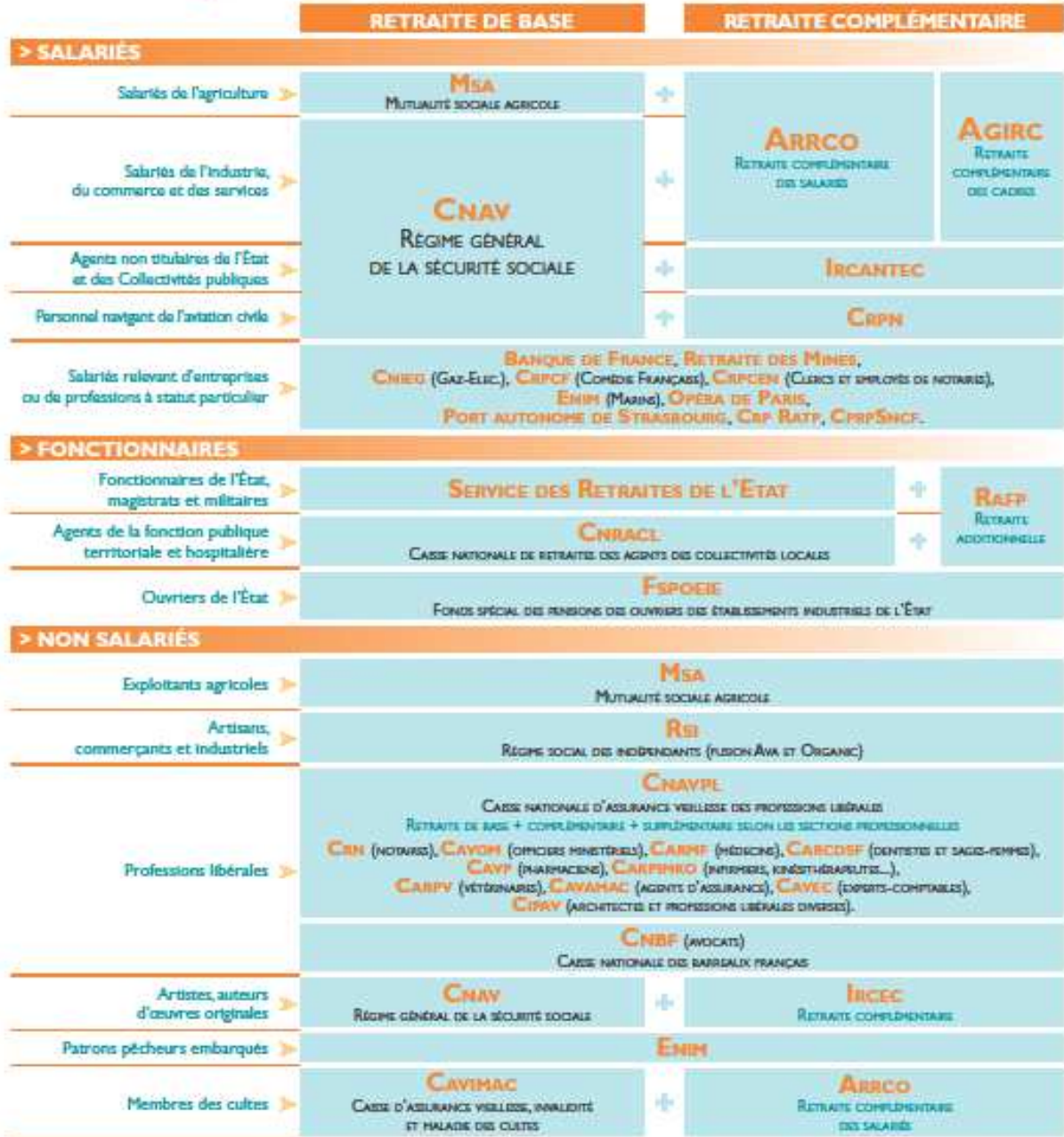
lotafinance.com

Optimind Winter

ANNEXES

Annexe 1 : Panorama des Régimes de Retraite

Panorama des régimes de retraite



Ce courrier a une valeur purement indicative. Pour plus de précisions : Adressez-vous à vos organismes de retraite (leurs coordonnées figurent dans votre courrier) ou consultez le site www.info-retraite.fr

Annexe 2 : Code de Simulation d'une trajectoire de Vasicek²⁵

```
simule_Vasicek<-function(alpha,b,sigma,T1,T2,r_init,nb_pas,nb_it)
{
  pas_temps=(T2-T1)/nb_pas
  trajectoire=matrix(nrow=(nb_pas+1), ncol=nb_it, byrow=FALSE)

# Parametres de la loi utilisee pour effectuer la simulation
  coeff=exp(-alpha*pas_temps)
  incr=b*(1-exp(-alpha*pas_temps))
  sd_incr=sigma*sqrt((1-exp(-2*alpha*pas_temps))/(2*alpha))

for (j in 1:nb_it)
{
# Initialisation de r
  r=matrix(NA,nrow=nb_pas+1,ncol=1)
  r[1]=r_init

  for (boucle_pas in (2:(nb_pas+1)))
    {
      r[boucle_pas]=coeff*r[boucle_pas-1] + incr + rnorm(1,0,sd_incr)
    }

# Formatage de la sortie
  trajectoire[,j]<-r
}

return(trajectoire)
}
```

²⁵ Source : cours « Simulation en R » de Jean BERARD

Annexe 3 : Code de Simulation d'une Trajectoire de Cox-Ingersoll-Ross²⁶

```
simule_CIR <-function(alpha,b,sigma,T1,T2,r_init,nb_pas,nb_it)
{
  pas_temps=(T2-T1)/nb_pas
  trajectoire=matrix(nrow=(nb_pas+1), ncol=nb_it, byrow=FALSE)

  # Parametres de la loi utilisée pour effectuer la simulation
  deg_lib=4*b*alpha/sigma^2
  coeff=(sigma^2*(1-exp(-alpha*pas_temps)))/(4*alpha)
  coeff2=4*alpha*exp(-alpha*pas_temps)/(sigma^2*(1-exp(-alpha*pas_temps)))

  for (j in (1:nb_it))
  {
    # Initialisation de r
    r=matrix(NA,nrow=nb_pas+1,ncol=1)
    r[1]=r_init

    for (boucle_pas in (2:(nb_pas+1)))
    {
      r[boucle_pas]=coeff*rchisq(n, deg_lib, ncp=coeff2*r[boucle_pas-1])
    }

    # Formatage de la sortie
    trajectoire[,j]<-r
  }
  return(trajectoire)
}
```

²⁶ Source : cours « Simulation en R » de Jean BERARD

Annexe 4 : Code de Simulation d'une Trajectoire de Merton

```

Simule_Merton<-function(mu,lambda,sigma,T1,T2,S_init,nb_pas,nb_it,mu2,sigma2)
{
  Trajectoire<-matrix(ncol=nb_it,nrow=T2-T1)
  for (b in (1:nb_it))
  {
    poisson<-matrix("numeric",ncol=2,nrow=1)
    poisson[1,]<-c(T1,0)
    k=T1
    while (k<T2)
    {
      j<-rexp(1,lambda)
      k=k+j
      if (k<T2)
        poisson<-rbind(poisson,c(j,rnorm(1,mu2,sigma2)))
    }
    poisson<-apply(poisson,2,cumsum)
    W<-vector("numeric")
    W[1]<-0
    Traj <- matrix(ncol=2, nrow=1)
    Traj[1,]=c(T1, S_init)
    h=1
    for (i in 2:(T2-T1))
    {
      W[i]<-W[i-1]+rnorm(1,u,1)
      if (i>poisson[h+1,1])
        h=min(h+1,lenght(poisson[,1]))
      S = Traj[1,2]*exp((mu-sigma**2/2)*(i-1)+sigma*W[i]+poisson[h,2])
      Traj<-rbind(Traj,c(T1+i,S))
    }
    Trajectoire[,b]=Traj[,2]
  }
  return(Trajectoire)
}

```