Intégration de l'Euro-croissance sur un contrat retraite

Hanah Malka

▶ **To cite this version:**

Hanah Malka. Intégration de l'Euro-croissance sur un contrat retraite. Gestion des risques [q-fin.RM]. 2014. dumas-01073568

HAL Id: dumas-01073568

https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01073568

Submitted on 10 Oct 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mémoire présenté devant
l'UFR de Mathématique et d'Informatique
pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'Actuaire de Strasbourg

et l'admission à l'Institut des Actuaires

le _____

Par : Hanah MALKA

Titre: Intégration de l'Euro-croissance sur un contrat retraite

Confidentialité : ☑ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres du jury de l'Institut des Actuaires signature

M. David DUBOIS
M. Alexandre YOU

Membres du jury de l'UdS :

M. Jean BERARD
M. Karl-Théodor EISELE
M. Jacques FRANCHI
M. Jean-Lucien NETZER

Invités :

M. David FITOUCHI
Mme Stéphanie FOATA

M. Christian HESS

Mme Magali KELLE-VIGON

Mme Myriam MAUMY-BERTRAND
M. Jean MODRY
M. Vincent VIGON

Secrétariat : Mme Maire-Lantz

Bibliothèque : Mme Christine Disdier

Entreprise :

AGIPI

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :
Noémie WILLMANN

Signature :

Invité :
Sylvain GADENNE

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Mémoire présenté devant

l'UFR de Mathématique et Informatique

pour l'obtention du Master Mathématiques et Application, spécialité Statistique, parcours Actuariat

le _____

Par : Hanah MALKA

Titre: Intégration de l'Euro-croissance sur un contrat retraite

Confidentialité : ☑ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres du jury de l'Institut des Actuaires signature

M. David DUBOIS

M. Alexandre YOU

Membres du jury de l'UdS :

M. Jean BERARD

M. Karl-Théodor EISELE

M. Jacques FRANCHI

M. Jean-Lucien NETZER

Invités :

M. David FITOUCHI

Mme Stéphanie FOATA

M. Christian HESS

Mme Magali KELLE-VIGON

Mme Myriam MAUMY-BERTRAND

M. Jean MODRY

M. Vincent VIGON

Entreprise :
AGIPI

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :
Noémie WILLMANN

Signature :

Invité :
Sylvain GADENNE

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Secrétariat : Mme Floriane Maire-Lantz

Bibliothèque : Mme Christine Disdier

Résumé

Mots-clés : Euro diversifié, Euro-croissance, provision technique de diversification, participation aux bénéfices, modèle Actif-Passif, rente viagère

Le contexte économique concernant les contrats d'assurance-vie est actuellement en pleine mutation. En effet, les taux de rendement actuels des fonds en euros étant en berne, un récent rapport, dénommé « rapport Berger-Lefebvre » préconise la mise en place de contrats Euro-croissance afin de « dynamiser l'épargne des ménages pour financer l'investissement et la compétitivité ». Le fonctionnement de ces contrats est proche de celui des contrats euro diversifiés. Toutefois, ce qui distingue les contrats Euro-croissance des contrats euro diversifiés, c'est leur fiscalité : en cas de transfert d'un contrat existant vers le fonds Euro-croissance, l'antériorité fiscale du contrat d'origine est préservée ce qui n'est pas le cas pour un contrat euro diversifié. Nul doute que cette avancée considérable de l'Euro-croissance par rapport à l'euro diversifié, favorisera son développement.

Institués il y a dix ans par la loi Fillon du 21 août 2003 à l'occasion de la création du PERP (Plan d'Epargne Retraite Populaire) avant d'être étendus à l'assurance-vie par la loi du 26 juillet 2005, les fonds euro diversifiés reposent sur une mécanique complexe qui consiste à offrir à l'assuré une garantie du capital non pas à tout moment, mais uniquement à une échéance prédéfinie. Ce différé donne à l'assureur une marge de manœuvre supplémentaire pour chercher de la performance à travers une « provision technique de diversification », investie en actifs risqués.

En couverture de ses engagements, l'assureur constitue deux provisions, à savoir : une provision mathématique représentative de la garantie au terme et une provision technique de diversification source de rendement potentiel. Au terme du contrat, la restitution de l'épargne constituée sur le fonds Euro-croissance peut être faite de deux manières : sous forme de capital ou sous forme de rente. La seconde alternative requiert une analyse supplémentaire dans la mesure où l'on souhaite effectuer une seconde phase Euro-croissance lors de la de restitution du capital.

L'enjeu de ce mémoire est d'étudier l'intégration du support Euro-croissance sur un contrat retraite. Dans ce cadre-là, en phase de restitution, la provision mathématique relative à la rente viagère est placée sur le fonds Euro-croissance générant ainsi une nouvelle provision technique de diversification dont le rôle est d'assurer la revalorisation annuelle des arrérages.

Afin de mener à bien cette étude, la modélisation Actif-Passif de deux phases Euro-croissance distinctes sera étayée : une première lors de constitution de l'épargne et une seconde lors de sa restitution. L'essence même du problème étant de garantir un équilibre entre l'actif et le passif tout au long de la projection.

Une étude stochastique permettra de rendre compte de la sensibilité de la performance du contrat Euro-croissance à la stratégie d'allocation d'actifs employée ainsi qu'à la garantie au terme.

Par ailleurs, la revalorisation des arrérages étant assurée exclusivement par l'arbitrage d'une part de la provision technique de diversification vers la provision mathématique, on explicitera la difficulté inhérente à ce mode de revalorisation en termes de qualité. Cette difficulté ayant pour origine, une limitation par la réglementation de l'arbitrage de la provision technique de diversification vers la provision mathématique, mêlée à la contrainte de croissance des arrérages dans le temps. Ainsi, on analysera clairement ce problème pour déduire ensuite les moyens qui permettent d'y remédier.

Abstract

Keywords: “Euro diversifié”, “Euro-croissance”, diversification provision, Profit Sharing, Asset-Liability model, life annuity

The economic context surrounding life insurance contracts is currently changing. Indeed, the current yields of euro funds falling, a recent report called "rapport Berger-Lefebvre” advocates the introduction of “Euro-croissance” contracts in order to "boost households’ savings to finance investment and competitiveness". The operation of these contracts is close to that of the “euro diversifié” contracts. However, what distinguishes “Euro-croissance” contracts from “euro diversifié” contracts is their taxation: it is possible to convert an existing contract into a “Euro-croissance” contract without forfeiting tax benefits, which is not the case for a “euro diversifié” contract. There is no doubt that this significant advance in the “Euro-croissance” compared to the “euro diversifié” will encourage their development.

Established ten years ago by the Fillon law of 21 August 2003 on the occasion of the creation of “PERP (Plan d’Epargne Retraite Populaire)” before being extended to life insurance by the law of 26 July 2005, “euro diversifié” funds are based on a complex mechanism which is to provide insured persons guaranteed capital not at any time but only at a pre-specified deadline. This delay gives the insurer an additional room for manoeuvre to seek performance through a “diversification provision" invested in risky assets.

To cover his liabilities, the insurer constitutes two provisions namely: a mathematical provision representative of the guaranteed portion and a diversification provision which is a source of potential return. At the end of the contract, the savings restitution can be made in two ways: in the form of either a lump sum or a life annuity. The second option requires a supplementary analysis since we wish to establish a second phase of “Euro-croissance” during the savings restitution.

The aim of this report is to integrate the “Euro-croissance” on a pension contract. In this context, during the restitution phase, the mathematical provision for life annuity is invested in on “Euro-croissance” fund, generating a new diversification provision whose role is to ensure the annuity upgrading.

In order to carry out this study, we will detail the Asset-Liability modeling of two distinct “Euro-croissance” phases: a first during the savings constitution and a second during its restitution. The essence of the problem is to ensure a balance between assets and liabilities throughout the projection.

A stochastic study will illustrate the sensitivity of “Euro-croissance” contract’s performance to the asset allocation strategy and to the guaranteed portion.

Furthermore, the annuity upgrading being ensured by the conversion of a part of the diversification provision into mathematical provision, we will explain the difficulty caused by this revaluation method. This problem is related to a limitation by regulation of diversification provision conversion into mathematical provision and the constraint concerning the growth in annuities. Therefore, we will analyze this problem in order to deduce the ways to resolve it.

Remerciements

Avant d'entamer tout développement sur cette expérience professionnelle, je souhaiterais exprimer mes plus vifs remerciements à l'égard de mon maître de stage, Noémie WILLMANN, actuaire. Durant ces six mois de stage de fin d'études, elle a su m'encadrer et me faire évoluer avec beaucoup de patience et de pédagogie, tout en me laissant une grande autonomie dans mon travail.

Je remercie Christophe FRANTZ, directeur Technique et Financier, qui m'a accueillie au sein de son équipe. La confiance dont il a fait preuve à mon égard, sa simplicité ainsi que ses conseils avisés, m'ont permis d'acquérir de précieuses compétences et d'effectuer ce stage dans une ambiance saine et cordiale.

Un grand merci à Stéphane RITTER, responsable du service Etudes Produits et Résultats Techniques, pour son accueil. Son implication et ses conseils avisés, tout au long du déroulement du stage, ont grandement contribué à l'accomplissement de ce mémoire.

Je remercie mon tuteur Sylvain GADENNE pour sa formidable contribution au développement de ce projet. Ses excellents conseils ainsi que la clarté de ses enseignements m'ont permis de mener à bien la rédaction de cette étude.

Ma reconnaissance va également à Elise, Emmanuel, Frédéric, Marc et Vitalli, membres de l'équipe Etudes Produits et Résultats Techniques, qui m'ont chaleureusement accueillie au sein de leur équipe.

Enfin, j'adresse ma gratitude à tous les membres du corps professoral de l'Université de Strasbourg pour toutes les connaissances et le savoir-faire qu'ils nous ont transmis.

Sommaire

Résumé 2

Abstract 3

Remerciements 4

Sommaire 5

Abréviations 10

Introduction 11

Partie I : Présentation générale d'un contrat Euro-croissance 12

Chapitre I. Cadre du modèle 13

Section 1. L'association et les produits proposés 13

I. L'association AGIPI 13

II. Gamme de contrats 13

Section 2. Les produits AGIPI associés à l'Euro-croissance 13

I. Focus sur les contrats 13

1. Capitalisation : Contrat Clef 13

2. Assurance-vie : Contrat Cler 14

3. Retraite : Contrat Far 14

II. Processus d'intégration 14

1. Intégration de l'Euro-croissance sur le produit retraite Far 14

2. Caractéristiques du produit Far 15

Chapitre II. Contexte économique 16

Section 1. Limites des produits d'assurance-vie classiques 16

I. Fonds en euros 16

II. Unités de compte 16

III. Limites des produits classiques 16

Section 2. L'euro diversifié : une alternative pertinente 17

I. Historique et textes fondateurs 17

II. Mécanisme d'un contrat euro diversifié 18

Chapitre III. Produit Euro-croissance 19

Section 1. Le rapport Berger-Lefebvre 19

Section 2. L'Euro-croissance : une avancée par rapport à l'euro diversifié 19

I. Euro diversifié : perte l'antériorité fiscale en cas de transfert 19
II. Euro-croissance : conservation de l'antériorité fiscale en cas de transfert 19
Section 3. Fonctionnement de l'Euro-croissance 20
Section 4. Présentation générale du modèle 21
I. Fréquence d'évaluation 21
II. Structure du modèle 22
1. Euro-croissance I : Phase de constitution 22
2. Euro-croissance II : Phase de restitution 22
III. Architecture du modèle 24
IV. Notations 24
V. Paramètres du modèle 25
1. Caractéristiques de calcul 25
2. Caractéristiques des polices 25
3. Caractéristiques de charges 25
4. Hypothèses actuarielles 25
5. Hypothèses financières 25
Partie II : Modélisation du Passif 26
Chapitre I. Modélisation du contrat pour une police « éternelle » 28
Section 1. Phase de constitution 28
I. Détail des différents postes du passif 28
1. Versement net 28
2. Montant garanti au terme (MGT) 29
3. Provision mathématique (PM) 30
4. Provision Technique de Diversification (PTD) 30
II. Exemple de versement 31
1. Hypothèses de calcul 31
2. Calculs initiaux 32
3. Bilan en fin de première quinzaine 32
III. Sortie en capital, transfert ou décès avant le terme 33
1. Sortie en capital ou transfert 33
2. Décès 34
IV. Taux d'actualisation 34
1. Définitions préalables 35

2. Méthode 1 : Expression du taux d'actualisation en fonction du TME 36
3. Méthode 2 : Expression du taux d'actualisation comme fonction du TEC..... 39
V. Interaction entre les provisions : Arbitrage PTD vers PM 43
1. Objectif et réglementation..... 43
2. Description du mécanisme..... 44
VI. Compte et affectation de la participation aux bénéfices..... 46
1. Description du compte de Participation aux Bénéfices 46
2. Modes d'affectation de la Participation aux Bénéfices..... 46
Section 2. Phase de conversion..... 51
I. Droits acquis en phase de constitution 51
1. Expression des droits en euros..... 51
2. Expression des droits en termes de rente..... 51
II. Phase de restitution – Euro-croissance II 52
1. Contrainte sur les taux 52
2. Provisions techniques initiales 53
3. Taux d'actualisation..... 53
Section 3. Phase de restitution 55
I. Montant d'arrérage annuel..... 55
1. Revalorisation par lissage de la PTD..... 56
2. Revalorisation par arbitrage de PTD vers PM..... 57
3. Arrérage..... 58
II. Provisions techniques..... 59
1. Provision mathématique 59
2. Provision de diversification 60
III. Actif 60
1. Retrait annuel de l'arrérage probabilisé 61
2. Retrait annuel de l'arrérage entier..... 62
Section 4. Entrées et sorties du modèle 63
1. Détail des opérations existantes 63
2. Ordre de survenance des entrées et sorties : Cinématique des flux 64
Chapitre II. Modélisation du nombre réel de polices 66
Section 1. Le décès 66
Section 2. Le rachat 67

I. Définition 67
II. Différents types de rachat 67
1. Rachats structurels 67
2. Rachats dynamiques 68
Section 3. Le transfert 68
I. Modalités de transfert 68
II. Evaluation du taux de transfert 68
Chapitre III. Modélisation des montants totaux 70
Section 1. Phase de constitution 70
I. Prestations 70
II. Garantie finale et provisions techniques 70
1. Montant Garanti au terme 70
2. Provisions techniques 71
Section 2. Phase de restitution 71
I. Provision mathématique 71
II. Provision technique de diversification 72
Partie III : Modélisation de l'Actif 73
Chapitre I. Spécificités de l'actif dans le cadre de l'Euro-croissance 74
Section 1. Cantonnement des actifs 74
Section 2. Comptabilisation des actifs en valeur de marché 74
Section 3. Gestion des fonds propres 74
Section 4. Distinction « Univers Risque Neutre » et « Monde réel » 75
Chapitre II. Modélisation de l'actif 76
Section 1. Stratégie d'allocation d'actifs statique 76
Section 2. Modélisation de l'actif sans risque 76
I. Duration 77
II. Rendement des obligations 77
Section 3. Modélisation de l'actif risqué 77
I. Présentation générale du modèle de Black-Scholes 77
1. Hypothèses du modèle 77
2. Solution du modèle 78
II. Hypothèses retenues 79
III. Calibration du modèle 79

Partie IV : Résultats et analyses 80
Chapitre I. Equilibre Actif-Passif 81
Section 1. Phase de constitution 81
Section 2. Phase de restitution 81
Chapitre II. Phase de constitution : indicateurs de rentabilité 83
Section 1. Les indicateurs de rentabilité 83
I. Taux de rendement interne 84
II. Probabilité d'apport de fonds propres 84
Section 2. Sensibilité des indicateurs aux paramètres 84
I. Sensibilité des indicateurs à la proportion garantie au terme 84
II. Sensibilité des indicateurs à la stratégie d'allocation d'actif 85
Chapitre III. Phase de restitution : analyse de la revalorisation des rentes 87
Section 1. Sensibilité de la revalorisation des rentes à l'arbitrage PTD vers PM 87
I. Impact de l'arbitrage sur la revalorisation des rentes 87
II. Paramétrage du pourcentage de la contrainte d'arbitrage 88
Section 2. Fonds Euro-croissance vs fonds euros 91
I. Rendement de l'actif identique sur les deux fonds 91
II. Euro-croissance : Meilleure espérance de rendement 93
Conclusion 96
Glossaire 97
Table des illustrations 98
Bibliographie 99

Abréviations

MGT : Montant Garanti au Terme

OPCVM : Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobilières

PB : Participation aux Bénéfices

PERP : Plan d'Epargne Retraite Populaire

PM : Provision Mathématique

PPE : Provision pour Participation aux Excédents

PT : Provisions Techniques

PTD : Provision Technique de Diversification

TCAM : Taux de Croissance Annuel Moyen

TEC : Taux d'Echéance Constante

TME : Taux Moyen des Emprunts d'Etat

TRI : Taux de Rendement Interne

UC : Unités de Compte

VL : Valeur Liquidative de la part

Introduction

L'assurance-vie constitue une forme de placement très utilisée actuellement en France. Toutefois, l'offre actuelle présente quelques limites et peut encore faire l'objet d'améliorations. En effet, le rendement des contrats en euros demeure trop faible et les contrats en unités de compte n'offrent pas suffisamment de garanties pour les assurés. Tous ces éléments poussent les assureurs à élaborer de nouveaux produits.

Parmi les contrats innovants mis en place, on retrouve les contrats Euro-croissance qui semblent être un bon compromis entre rendement et garantie. Le principe de ces contrats est le suivant : une garantie de capital uniquement au terme est offerte à l'assuré. En contrepartie de ce différé, l'assuré peut espérer un meilleur rendement de son capital investi en comparaison à celui offert sur un fonds en euros.

Pour honorer ses engagements, l'assureur constitue d'une part une provision mathématique lui permettant d'assurer la restitution de la garantie au terme, et d'autre part une provision technique de diversification qui absorbe les fluctuations du marché et sert de moteur de performance du contrat.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'intégration du support Euro-croissance sur un contrat retraite déjà existant. L'étude permettant de mener à bien cette analyse s'articulera en quatre parties dont on détaille le contenu.

Dans une première partie, on présentera le contexte actuel du marché de l'assurance vie pour mettre en exergue l'avancée que représente l'Euro-croissance par rapport aux contrats déjà existants.

Dans une deuxième partie, on détaillera la modélisation des différents postes du passif pour chacune des deux phases qui caractérisent le contrat, à savoir, la phase de constitution de l'épargne ainsi que la phase de restitution, ces deux phases étant totalement distinctes. L'ensemble des mécanismes du produit ainsi que les différents paramètres qui permettent d'optimiser la revalorisation des arrérages seront étayés.

La troisième partie concernera la modélisation de l'actif en représentation des engagements de l'assureur. Les spécificités de l'actif dans le cadre du contrat Euro-croissance y seront mises en évidence.

Dans la quatrième partie, les principaux résultats découlant de la modélisation effectuée seront étayés. L'adéquation Actif-Passif de la modélisation des deux phases de constitution et de restitution sera vérifiée. Dans le cadre de la modélisation de l'Euro-croissance en phase de service des rentes proposée, on analysera le rendement annuel moyen des rentes sur le fonds Euro-croissance en comparaison à celui observé sur le fonds en euros. La réalisation d'un second Euro-croissance en phase de restitution ayant tout de même pour finalité de garantir une revalorisation des rentes plus attrayante que sur le fonds en euros.

Partie I : Présentation générale d'un contrat Euro-croissance

Chapitre I. Cadre du modèle

Section 1. L'association et les produits proposés

I. L'association AGIPI

AGIPI est une association d'assurés pour la Retraite, l'Epargne, la Prévoyance et la Santé. Elle propose des solutions qui répondent aux besoins de protection liés à chaque étape de la vie : protection de la famille et de l'activité professionnelle, protection du patrimoine, de la retraite et du grand âge.

AGIPI est partenaire d'AXA. Le partenariat entre l'association et son assureur définit le rôle de chacun :

- AGIPI veille aux intérêts des adhérents dans la conception, la tarification, et la gestion en toute transparence des solutions d'assurance qu'elle propose
- AXA garantit les contrats AGIPI et les propose aux adhérents au travers de ses conseillers

II. Gamme de contrats

AGIPI propose une large gamme de produits à destination de professionnels médicaux, artisans, commerçants, professions libérales et salariés.

Dans le cadre de ce mémoire, on se limitera à présenter les produits qui ont fait l'objet d'une intégration du support Euro-croissance. A savoir, les produits Cler et Clef associés au domaine de l'Epargne ainsi que le contrat retraite Madelin Far.

Section 2. Les produits AGIPI associés à l'Euro-croissance

I. Focus sur les contrats

1. Capitalisation : Contrat Clef

Ce contrat permet de diversifier la stratégie patrimoniale de l'adhérent dans une perspective spécifique de transmission. Il est destiné à répondre aux objectifs de placement de personnes disposant d'un patrimoine important.

2. Assurance-vie : Contrat Cler

Ce contrat permet de constituer un capital par des versements libres, sur une gamme complète de supports, de préparer la retraite, d'organiser la transmission du patrimoine, de prévoir une éventuelle perte d'autonomie.

Il propose des conventions de gestion innovantes qui permettent de simplifier et optimiser la répartition de l'épargne sur différents supports.

3. Retraite : Contrat Far

Le Far est un contrat de rente viagère différée. Il permet de constituer un complément de retraite personnelle par l'alimentation régulière d'un compte de retraite bénéficiant des avantages de la loi Madelin[1]. La restitution du capital au terme du contrat se fait obligatoirement sous forme de rente.

Il semble utile de rappeler le contenu de la loi Madelin et du régime Madelin Agricole. Pour les assurés qui exercent une profession indépendante, les cotisations sont fiscalement déductibles dans la limite des plafonds fixés :

- Par l'article 154 bis du Code général des impôts (CGI) pour les travailleurs non-salariés non agricoles (loi Madelin)
- Par l'article 154 bis OA du CGI pour les exploitants agricoles affiliés à la MSA (régime Madelin Agricole)

II. Processus d'intégration

1. Intégration de l'Euro-croissance sur le produit retraite Far

L'objectif d'AGIPI est d'intégrer le fonds Euro-croissance sur les trois contrats énoncés précédemment. Dans le cadre de cette étude, nous considérerons la mise en place du fonds Euro-croissance sur le produit retraite Far uniquement. Ce choix a été établi à la lumière de plusieurs éléments dont on explicite le contenu.

Tout d'abord, l'intégration du support Euro-croissance sur ce produit implique la modélisation à la fois de la phase de constitution ainsi que de la phase de restitution sous forme de rente. Finalement, cette modélisation spécifique au contrat Far inclut donc implicitement celle des deux autres produits Cler et Clef, dans la mesure où pour ces deux derniers produits, on doit modéliser uniquement la phase d'accumulation, vu que leur restitution se fait sous forme de capital dans la majorité des cas. A titre de précision, notons que la phase de service des rentes est réalisée

[1] Les principaux avantages associés au contrat retraite Madelin sont : la déduction fiscale de l'investissement, du bénéfice imposable et l'exonération de l'ISF imputable à la valeur de capitalisation du contrat (uniquement en phase de constitution ou à la fois lors des phases constitution et restitution selon certaines conditions). L'adhérent à un tel contrat pourra bénéficier des avantages énoncés ci-dessus, sous réserve qu'il satisfasse certaines contraintes.

sur le fonds Euro-croissance, ce qui pose des difficultés en matière de méthode de provisionnement et mode de revalorisation des rentes à mettre en œuvre lors de cette période.

Ensuite, le contrat Far étant un produit retraite, la durée de détention du capital est généralement située sur le long terme, ce qui représente un aspect important du point de vue de l'Euro-croissance dans la mesure où la durée du contrat doit être au minimum égale à 8 ans. Il s'agit également d'un produit dont la liquidité n'est pas nécessaire pour l'adhérent durant le cours du contrat.

Enfin, la souscription au contrat retraite Far permet aux adhérents de bénéficier des avantages propres au régime Madelin.

L'ensemble de ces arguments mène à penser que l'intégration du fonds Euro-croissance sur le Far fera certainement l'objet d'une forte attention sur le marché. C'est pour ces raisons qu'une analyse spécifique concernant l'intégration de l'Euro-croissance sur ce produit s'avère à la fois logique et pertinente.

2. Caractéristiques du produit Far

a. Alimentation

L'adhérent à un contrat Far peut effectuer des versements à tout moment en phase de constitution. La répartition des versements entre les différents supports d'investissement est la suivante :

- En convention de gestion : le versement est réparti automatiquement selon les proportions prévues par la convention de gestion
- En gestion libre : l'adhérent précise la répartition souhaitée entre les différents supports, à défaut le versement est réparti proportionnellement à la provision d'épargne sur chacun des supports

b. Garantie de rente pour chaque versement

Chaque versement affecté au fonds euros et / ou au fonds Euro-croissance permet à l'adhérent d'acquérir une fraction de rente garantie à vie, calculée sur la base des conditions de taux technique et de table de mortalité contractuelles à la date de versement.

Chapitre II. Contexte économique

Section 1. Limites des produits d'assurance-vie classiques

En assurance-vie, il existe deux principaux produits : le fonds en euros et les unités de compte (ou UC).

Un contrat est dit monosupport lorsque le capital est placé sur un unique support d'investissement, à savoir le fonds en euros. Un contrat est qualifié de produit multisupport, lorsqu'il dispose d'au moins un fonds en euros et de plusieurs supports exprimés en unités de compte (OPCVM[2], actions, obligations, etc.). Pour mieux cerner les caractéristiques propres à chacun de ces produits, définissons chacun d'entre eux.

I. Fonds en euros

Le fonds en euros est le support qui garantit la sécurité du capital. Les sommes versées sur ce type de support sont garanties à tout moment par l'assureur. Elles ne peuvent pas baisser et sont revalorisées chaque année d'un rendement : le taux technique et la participation aux bénéfices.

En contrepartie de cette sécurité qui requiert une gestion prudente, les gains sont généralement limités.

II. Unités de compte

Les contrats en unités de compte sont des produits dont les sommes sont placées sur des supports financiers de diverses natures (actions, obligations, etc.). Pour chaque versement effectué, l'assuré se voit garantir un certain nombre de parts correspondant. L'assureur s'engage uniquement à lui reverser le nombre de parts au terme du contrat. La valeur de la part étant totalement soumise à l'évolution à la hausse ou à la baisse des marchés.

L'intérêt d'un contrat en UC est de pouvoir prétendre à un meilleur rendement que celui d'un contrat en euros, en investissant le capital sur plusieurs supports financiers. En contrepartie, de cette meilleure espérance de rendement, l'assuré porte le risque de voir la valeur de la part diminuer.

III. Limites des produits classiques

Les fonds en euros étant essentiellement composés d'obligations, leur rendement s'apparente pour une grande partie au Taux Moyen des Emprunts d'Etat (TME). On peut donc s'intéresser à l'évolution de cet indice au cours des dernières années.

[2] OPCVM : Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobilières

D'après le graphique ci-dessous, on remarque une claire tendance à la baisse du TME au cours des dernières années malgré certaines variations locales à la hausse. Cela a évidemment impacté à la baisse le rendement des obligations souveraines détenues par les assureurs entrainant la diminution du rendement des fonds en euros.

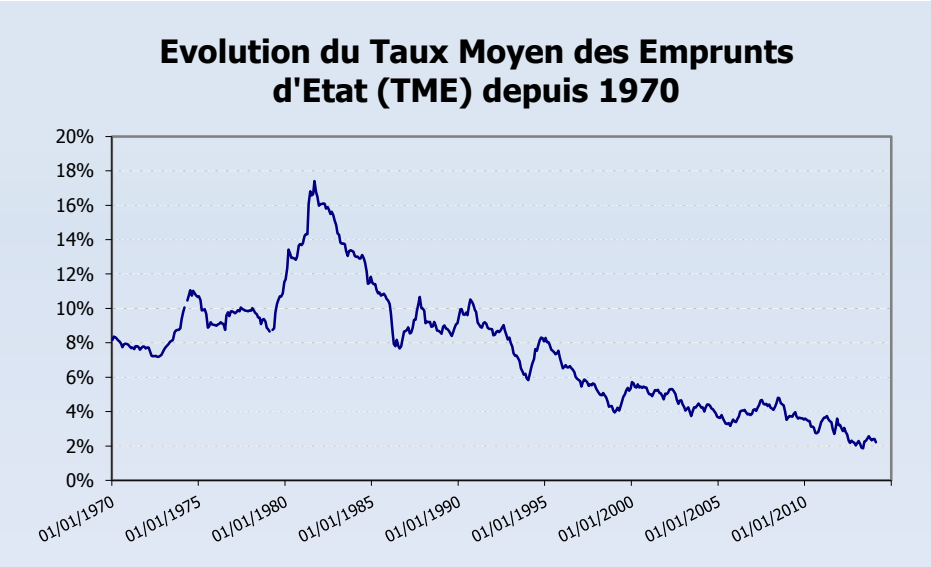

FIGURE 1 : Evolution du TME depuis 19703

Section 2. L'euro diversifié : une alternative pertinente

Un contrat en euro diversifié est un contrat d'assurance-vie, introduit dans notre législation en 2003, mais peu développé jusqu'à présent. Il repose sur la logique suivante : dans la mesure où l'assuré n'a pas nécessairement besoin de disposer en permanence d'une garantie sur la totalité de son épargne, une garantie du capital à terme seulement permettrait de répondre à ses préférences tout en lui permettant de bénéficier d'une meilleure espérance de rendement. Une telle disposition, en assouplissant les contraintes de passif des assureurs, permet une allocation plus dynamique de leurs actifs.

I. Historique et textes fondateurs

L'apparition des contrats en euro diversifié a eu lieu dans le cadre de la loi Fillon du 21 août 2003, qui prévoyait la mise en place d'un système d'épargne de retraite complémentaire au régime obligatoire. Ce nouveau système était plus connu sous le nom de Plan d'Epargne Retraite Populaire (PERP).

[3] L'historique du TME a été extrait d'une base d'AGIPI qui elle-même est alimentée tous les mois à partir du site de la Banque de France.

Le contrat euro diversifié donne naissance à une nouvelle provision, dénommée « provision technique de diversification », qui conformément au décret n°2004-342 relatif au PERP, correspond à :

Décret n°2004-342 :
Provision technique de diversification : provision destinée à absorber les fluctuations des actifs du plan et sur laquelle chaque participant détient un droit individualisé sous forme de parts. Cette provision est abondée par une partie des cotisations versées par les participants et par la part des résultats du plan qui n'est pas distribuée sous forme de provision mathématique. Elle se réduit par imputation des pertes et par conversion des parts des participants en provision mathématique.

La loi Breton de Juillet 2005, pour la confiance et la modernisation de l'économie, étend les contrats euro diversifiés à l'assurance-vie. Le but étant « d'encourager la détention durable d'actions » (Articles L. 142-1 à L. 142-4 du Code des Assurances).

Le 2 avril 2013, le rapport Berger-Lefebvre[4] est publié, incitant à la détention d'actions par les ménages afin de dynamiser leur épargne financière. Pour remplir cet objectif, ce rapport propose la création de contrats Euro-croissance, dont le mécanisme est identique à celui du contrat euro diversifié. La différence résidant principalement au niveau de la réglementation fiscale.

II. Mécanisme d'un contrat euro diversifié

Pour un contrat en euro diversifié, il existe deux types d'engagements différents :

- un engagement exprimé en euros
- un engagement exprimé en nombre de parts

Dans un tel contrat, la garantie de capital est offerte seulement au terme et non à tout moment comme dans les contrats en euros. L'assureur a alors la possibilité de placer une plus grande partie des capitaux collectés en actifs risqués. L'assuré peut alors espérer une meilleure rémunération.

[4] Rapport rédigé par les députés Karine Berger et Dominique Lefebvre.

Chapitre III. Produit Euro-croissance

Section 1. Le rapport Berger-Lefebvre

Le 2 avril 2013, le rapport Berger-Lefebvre préconise la réorientation de l'épargne des Français vers davantage de placements en actions. Il suggère que cette réorientation se fasse majoritairement via des contrats d'assurance-vie, ce qui obligerait les assureurs à élaborer des contrats appropriés.

L'une des mesures phares du rapport concerne la création d'un nouveau contrat d'assurance-vie dit « Euro-croissance » sur le principe d'un contrat « euros diversifié » dans l'objectif de voir contribuer l'assurance-vie au financement de l'économie.

La finalité recherchée au travers de cette réallocation substantielle des contrats existants est le dégagement de 20 milliard d'euros supplémentaires susceptibles d'être investis en actions.

Section 2. L'Euro-croissance : une avancée par rapport à l'euro diversifié

I. Euro diversifié : perte l'antériorité fiscale en cas de transfert

Le développement d'un nouveau contrat « Euro-croissance » qui ne bénéficierait d'une garantie du capital qu'à terme, permettra de concilier le souhait des épargnants d'une certaine sécurité de leurs placements, tout en préservant un rendement suffisant et la capacité des assureurs à financer l'économie.

Si ce type de produit existe d'ores et déjà, de par l'euro diversifié, son développement est aujourd'hui entravé. En effet, le transfert des fonds détenus sous forme d'un contrat en euros vers un contrat euro diversifié n'est pas direct. Il nécessite de clore le contrat existant ce qui entraîne la perte de l'antériorité fiscale du contrat initial ainsi que les conséquences fiscales d'un dénouement de contrat (prélèvements sociaux). Autrement dit, la date d'ouverture du contrat initial n'est pas conservée mais elle est remplacée par la date de transfert du contrat. Par conséquent, les avantages associés à la durée de détention du contrat d'origine ne sont donc pas préservés : le calcul du délai des huit ans lié au prélèvement forfaitaire libératoire [5] est réinitialisé à zéro.

II. Euro-croissance : conservation de l'antériorité fiscale en cas de transfert

Il convient donc de permettre la transformation d'un contrat d'assurance vie en euros en un contrat en euro diversifié ou l'ajout de compartiments diversifiés à un contrat existant, tout en

[5] Fiscalité associée à un contrat d'assurance-vie en cas de rachat. Le taux d'imposition des intérêts générés par le contrat, étant dégressif avec l'ancienneté du contrat.

préservant l'antériorité fiscale des contrats, à la manière du dispositif Fourgous[6] qui a permis le développement des contrats multisupports depuis 2005.

C'est sur ce point-là que le contrat Euro-croissance se distingue du contrat euro diversifié. En effet, le contrat Euro-croissance présente une avancée par rapport à ce dernier dans la mesure où il permet une telle transformation. En clair, en transférant ses placements vers le fonds Euro-croissance, l'épargnant transfère aussi bien ses capitaux que la date de souscription du précédent contrat.

Afin de souscrire un tel contrat, il existe deux alternatives. La première possibilité qu'a souhaité favoriser le texte de loi est celle du transfert d'un contrat en cours vers l'Euro-croissance en conservant donc l'antériorité fiscale du contrat d'origine. La seconde possibilité consiste pour l'épargnant à souscrire directement dans un nouveau contrat d'assurance-vie incluant à l'origine un support Euro-croissance.

Dans le cadre d'AGIPI, les adhérents aux contrats Cler, Clef et Far pourront profiter de deux alternatives : transférer une adhésion existante en conservant l'antériorité fiscale ou alors réaliser une nouvelle adhésion.

Section 3. Fonctionnement de l'Euro-croissance

Le principe de ces contrats est le suivant : l'assureur garantit à l'assuré un capital au terme contractuel de l'adhésion. Ce capital garanti correspond à la prime versée par l'adhérent nette de chargements (à condition que le pourcentage garanti de cette cotisation nette de frais vaille 100 %). Au terme du contrat, l'assuré touche donc au minimum sa cotisation nette de frais. Notons de plus que la restitution de l'épargne au terme du contrat peut se faire soit sous forme de capital, soit sous forme de rente viagère.

Pour assurer ses engagements, l'assureur doit constituer deux provisions obligatoires : la provision mathématique (PM) et la provision technique de diversification (PTD). La provision mathématique correspond, lors de chaque inventaire, à l'actualisation de la garantie au terme. Son rôle est de restituer au terme du contrat le capital garanti, c'est-à-dire la prime nette initiale. La provision technique de diversification, quant à elle, constitue un moteur de performance. Elle est comptabilisée en nombre et en valeur de parts. En guise de précision, la valeur de la part est soumise à une contrainte : elle ne doit pas descendre en dessous d'une valeur minimale.

Pour mieux visualiser le fonctionnement du contrat, voici un schéma reprenant le processus caractérisant l'Euro-croissance sous l'hypothèse simpliste d'un unique versement initial.

[6] Dispositif voté le 26 Juillet 2005, permettant de transformer un contrat d'assurance-vie monosupport en un contrat multisupport, sans avoir à clôturer le contrat et donc sans perte de l'antériorité fiscale.

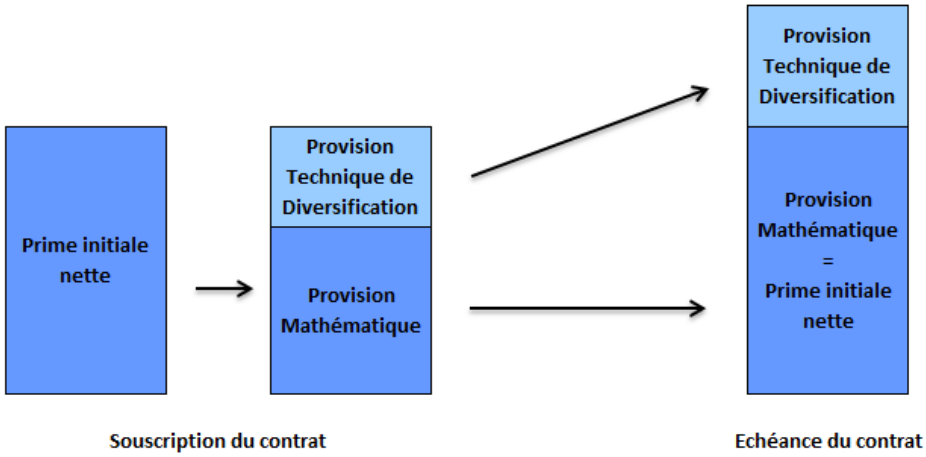

FIGURE 2 : Fonctionnement de l'Euro-croissance

Section 4. Présentation générale du modèle

Dans le cadre de notre analyse, étant donné que l'on souhaite intégrer le fonds Euro-croissance sur un produit retraite déjà existant, on étudie la restitution de l'épargne sous forme de rente viagère dont la provision mathématique est gérée sur le fonds Euro-croissance.

De plus, il semble important de préciser que dans le cadre de cette forme de restitution, on réalise deux phases d'Euro-croissance distinctes au cours de la vie du contrat :

- Une lors de la constitution
- Une lors de la restitution

Ainsi, deux dates caractérisent le contrat : la date de souscription du contrat ainsi que la date de restitution. Cette dernière est plus communément dénommée « date de conversion » en référence à l'âge de conversion du capital en rente viagère.

Notre objectif est de modéliser le bilan associé au fonds Euro-croissance pour un échantillon d'adhérents présentant les mêmes caractéristiques. De manière plus précise, l'ensemble de ces adhérents ont même âge à la souscription et même âge de conversion du capital en rente. Ils effectuent de plus les mêmes versements sur le fonds, d'où leur garantie au terme est identique.

I. Fréquence d'évaluation

Dans le modèle, on évalue l'ensemble des postes du bilan lors de chaque quinzaine. Il s'agit de la fréquence d'évaluation utilisée dans la réalité. De plus, la date de projection retenue est celle du 1er Janvier 2014.

Il est à noter que l'on compte deux quinzaines par mois, la première s'étendant du premier au 15 du mois, et la seconde s'étendant du 16 à la fin du mois.

II. Structure du modèle

1. Euro-croissance I : Phase de constitution

Cette première phase s'inscrit dans la constitution de l'épargne entre la date de souscription et l'échéance du contrat. Le terme du contrat marquant le début de la phase de restitution de l'épargne sous forme de rente viagère.

Cette étape est caractérisée par l'apport de versements (initial et / ou complémentaire(s)). Chaque versement est subdivisé en deux compartiments : la PM et la PTD. Ces deux tiroirs vont fluctuer jusqu'au terme du contrat et donner lieu ainsi à deux types de droits pour l'assuré dont on précise le contenu. Etant donné que notre étude est basée sur un produit en rente viagère, on exprime ces droits en termes de rente.

A la fin de la phase de restitution, la PM dont le rôle est de restituer la prime nette initiale au terme du contrat (également appelée montant garanti au terme), est convertie sous forme de rente viagère à verser à partir de l'âge de conversion. Quant à elle, la PTD, dont le rôle est de contribuer à réaliser du rendement supplémentaire par rapport au MGT, donne également droit à une fraction de rente. En effet, le montant atteint par celle-ci au terme du contrat est simplement converti et restitué sous forme de rente viagère. Pour obtenir la valeur de la PTD au terme du contrat, on multiplie le nombre de parts acquis à la fin du contrat par la valeur de la part atteinte à ce même moment.

La somme de ces deux fractions de rente viagère va constituer l'arrérage de base ou plus exactement l'arrérage initial que l'assuré touchera en phase de restitution.

2. Euro-croissance II : Phase de restitution

Une fois l'épargne constituée par accumulation de versements revalorisés par le rendement du fonds, il s'agit de la restituer en engageant une seconde et nouvelle phase Euro-croissance, totalement distincte de la première.

D'une part, on évalue la somme des deux provisions PM et PTD au terme du contrat. Cette somme matérialise les droits acquis par l'assuré, exprimés en euros.

D'autre part, dans le cadre de la nouvelle phase Euro-croissance liée à la phase de restitution, on calcule la PM et la PTD initiales de manière suivante. La PM initiale correspond au capital constitutif de la rente de base au taux d'actualisation en vigueur en début de phase de restitution. La différence entre les droits acquis par l'assuré au terme du contrat et la PM initiale constitue alors la PTD initiale de la phase de restitution.

Afin de mieux visualiser la méthodologie employée lors de la constitution des provisions initiales en phase de restitution, le schéma ci-dessous reprend le mécanisme (T correspond à la durée séparant la date de souscription et le terme du contrat en nombre de quinzaines).

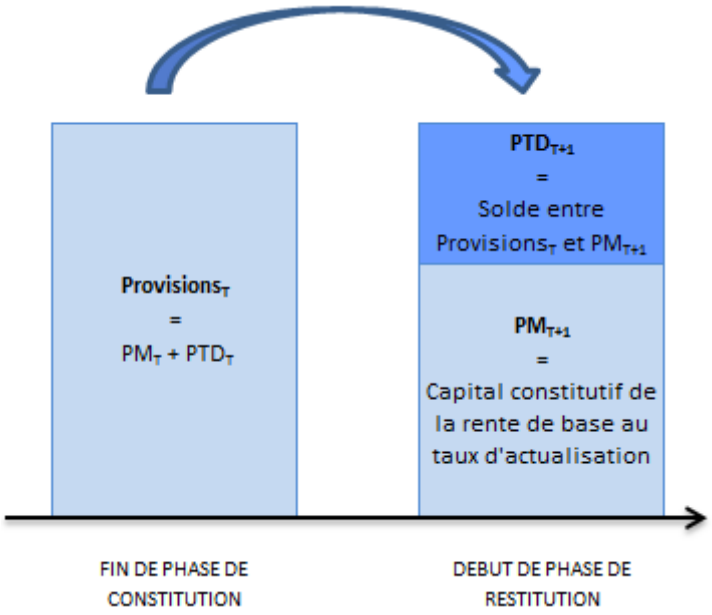

FIGURE 3 : Calcul de la PM et de la PTD initiales en phase de restitution

En phase de restitution, la PTD est restituée à l'assuré progressivement sous forme de revalorisation des arrérages. Le schéma ci-dessous illustre ce mécanisme de revalorisation, dont le fondement est le suivant : chaque année une fraction de PTD (partie colorée) est convertie en PM et vient augmenter l'arrérage précédent.

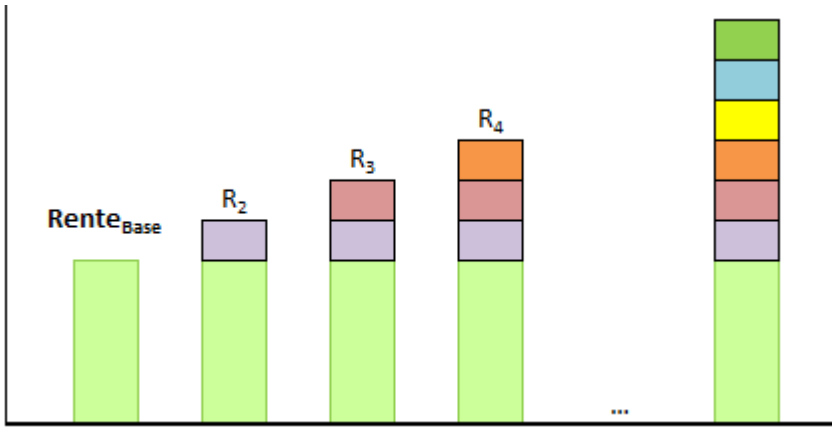

FIGURE 4 : Revalorisation des arrérages par conversion de parts de PTD en PM

Il semble utile de remarquer que la différence entre le taux technique de chaque rente, garanti lors de chaque versement en phase de constitution, et le taux d'actualisation en vigueur au moment de la restitution, est à l'origine de la création de la PTD initiale en phase de restitution. En effet, l'absence de différence entre ces deux taux empêche la réalisation d'un nouvel Euro-croissance en phase de restitution.

On conclut donc qu'un nouvel Euro-croissance en phase de restitution ne peut être établi que sous contrainte que le taux technique de chaque fraction de rente soit inférieur au taux

d'actualisation en vigueur lors de la période marquant la transition entre la phase de constitution et la phase de restitution.

III. Architecture du modèle

Afin de s'assurer une modélisation avec le plus de justesse possible, on segmente le modèle en trois blocs :

- Modélisation du contrat pour une police éternelle
- Modélisation du nombre réel d'assurés
- Modélisation du fonds pour un portefeuille d'assurés présentant les mêmes caractéristiques en tenant compte des chutes

IV. Notations

Dans le cadre de notre étude, certains concepts reviendront souvent. En vue de faciliter la lecture de ce mémoire, nous reprenons ici l'ensemble des notations principalement utilisées.

C : Age de conversion du capital en rente
T : Durée de la phase de constitution exprimée en nombre de quinzaines
N : Durée de la phase de constitution exprimée en nombre d'années
V_t : Versement brut de chargements en quinzaine t
V_t^N : Versement net de chargements en quinzaine t
PM_t : Provision mathématique en quinzaine t
PTD_t : Provision technique de diversification en quinzaine t
NP_t : Nombre de parts en quinzaine t
RP_t : Montant racheté en quinzaine t
P_t^- : Montant du poste P avant opération (Versement, arbitrage PTD vers PM, etc.) en quinzaine t
P_t^+ : Montant du poste P après opération (Versement, arbitrage PTD vers PM, etc.) en quinzaine t
DdP : Début de période
FdP : Fin de période
β_t : Taux de frais sur versement en quinzaine t
α_t : Pourcentage du versement net garanti en fin de contrat
ρ_t : Taux technique en vigueur lors de la quinzaine t (exprimé en base annuelle)
Θ_t : Table de mortalité en vigueur lors de la quinzaine t
C : Age de l'assuré à la conversion du capital en rente
τ_t : Taux d'actualisation en vigueur lors de la quinzaine t (exprimé en base quinzaine)
${}_tp_x$: Probabilité qu'un individu d'âge x vive encore t années
q_x : Probabilité de décès dans l'année pour un individu d'âge x
$\ddot{a}_x^{y,z}$: Capital constitutif d'une rente viagère, versant un euro annuellement à termes à échoir, à partir de l'âge x, au taux technique y et avec la table de mortalité z
$a_x^{y,z}$: Capital constitutif d'une rente viagère, versant un euro annuellement à termes échus, à partir de l'âge x, au taux technique y et avec la table de mortalité z
NB_t : Nombre réel de polices en quinzaine t

D_t : Nombre de décès en quinzaine t
R_t : Nombre de sorties en capital pour cas exceptionnels et transferts en quinzaine t
P_t : Prestations versées en quinzaine t
n : Nombre total d'arrérages à verser jusqu'à l'espérance de vie

Dans un souci de clarté, on numérotera les quinzaines relatives à la phase de constitution de 1 à T. Puis, on recommencera la numérotation des quinzaines à partir de l'indice 1 en phase de restitution.

V. Paramètres du modèle

Lors de la lancée d'une simulation d'un contrat Euro-croissance, plusieurs champs doivent être renseignés.

1. Caractéristiques de calcul

- Taux d'actualisation pour le calcul des PM
- Taux technique des rentes

2. Caractéristiques des polices

- Age de souscription
- Age de conversion
- Montant et date des versements

3. Caractéristiques de charges

- Taux de frais sur versement

4. Hypothèses actuarielles

- Table de mortalité
- Loi des sorties en capital pour cas exceptionnels et des transferts

5. Hypothèses financières

- Rendement obligataire
- Rendement des actions

Partie II : Modélisation du Passif

Cette modélisation des différents postes du passif, consiste à évaluer les engagements de l'assureur vis-à-vis des assurés chaque quinzaine. En vue d'obtenir une vision précise du contrat, on segmente le passif en trois blocs distincts :

- Modélisation du contrat pour une police éternelle ayant effectué divers versements sur le fonds
- Modélisation du nombre réel de polices
- Modélisation du contrat pour un échantillon d'adhérents ayant les mêmes caractéristiques

Le premier bloc donne la projection des éléments actuariels pour une police (au sens de « une unité ») qui a un capital égal à la somme de versements effectués. L'idée véhiculée par l'expression « police éternelle » est la suivante : à chaque pas de projection, on calcule tous les éléments « comme si » le nombre de polices à cette date était égal à 1. Mais bien évidemment, cela ne signifie pas que dans les calculs de ce bloc on suppose l'absence de mortalité future, bien au contraire.

Le deuxième bloc projette l'évolution réelle du nombre de polices.

Le troisième bloc projette l'évolution des provisions techniques pour un échantillon de polices présentant les mêmes caractéristiques.

Chapitre I. Modélisation du contrat pour une police « éternelle »

Il semble utile de rappeler que dans ce chapitre, on s'attache à modéliser l'évolution du contrat pour une police présente à chaque pas de projection. En d'autres termes, on fait l'hypothèse qu'à chaque période, le portefeuille est composé d'une police.

Section 1. Phase de constitution

Cette phase se traduit par l'apport d'un versement initial et éventuellement de versements réguliers et / ou complémentaires dans le fonds. L'ensemble de ces versements vont permettre à l'adhérent de se constituer un capital qui va fluctuer selon le rendement de l'actif en couverture du contrat.

La valorisation d'un versement effectué sur le fonds, a lieu lors de la quinzaine suivant la réception de ce versement. Par souci de précision quant à l'ordre et au moment de la valorisation de chaque opération, il est à noter que chaque versement est valorisé en fin de période. De plus, lors de leur intégration dans le fonds, chaque cotisation fait l'objet d'une décomposition en plusieurs éléments. Le schéma ci-dessous détaille cette décomposition dont les différents postes seront explicités par la suite.

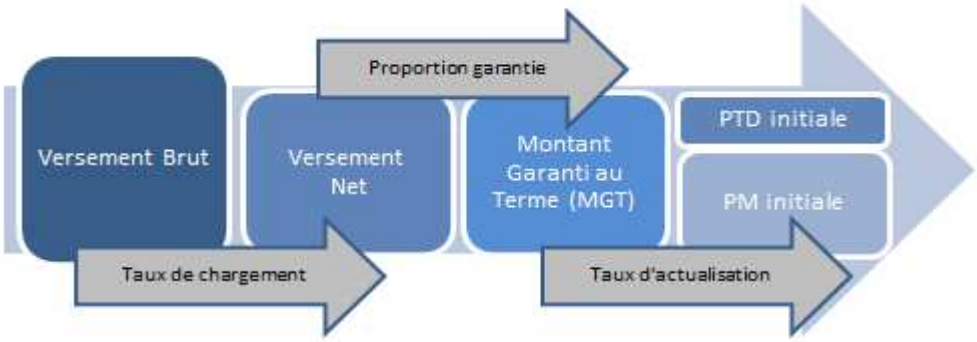

FIGURE 5 : Calcul initial de la PM et de la PTD en phase de constitution

I. Détail des différents postes du passif

1. Versement net

Le versement net en date t (noté V_t^N) est obtenu par simple application du taux de chargement au versement brut.

$$V_t^N = V_t \times (1 - \beta_t)$$

Avec :

V_t : Versement brut de chargements
β_t : Taux de frais sur versement

2. Montant garanti au terme (MGT)

Le montant garanti au terme (MGT) associé à un versement, correspond à la part du versement net de frais qui est restitué à l'adhérent de manière certaine au terme du contrat. Conformément aux dispositions des textes actuels, cette proportion doit être comprise entre 80 % et 100 %. Mathématiquement, le montant garanti au terme est obtenu selon la relation suivante :

$$MGT_t^{Versement} = V_t \times (1 - \beta_t) \times \alpha_t$$

Avec :

V_t : Versement brut de chargements
β_t : Taux de frais sur versement
α_t : Pourcentage du versement net garanti en fin de contrat

Toutes ces valeurs sont paramétrables dans le modèle, de sorte à ce qu'elles puissent être spécifiées lors de chaque quinzaine t, mis à part le pourcentage du versement net garanti au terme, noté α_t, que l'on fixe à 100 %. La motivation à l'origine de ce choix est la suivante : le contrat sur lequel on intègre l'Euro-croissance dans ce modèle, est un produit retraite. Généralement, les personnes qui souscrivent à un tel contrat souhaitent une forte sécurité de leur capital.

Afin de garantir le taux technique ainsi que la table de mortalité en vigueur au moment du versement, on convertit le montant garanti au terme associé en fraction de rente en tenant compte de ces caractéristiques :

$$Rente_t^{MGT} = \frac{MGT_t^{Versement}}{\ddot{a}_C^{\rho_t, \vartheta_t}}$$

Avec :

ρ_t : Taux technique contractuel en quinzaine t (exprimé en base annuelle)
ϑ_t : Table de mortalité contractuelle en quinzaine t
C : Age de conversion du capital en rente
$\ddot{a}_C^{\rho_t, \vartheta_t}$: Capital constitutif d'une rente viagère, versant un euro annuellement à termes à échoir, à partir de l'âge C, au taux technique ρ_t et avec la table de mortalité ϑ_t

Dans le cadre de notre modèle, la table de mortalité retenue est une table par génération, à savoir la TGF 05.

Le capital garanti au terme lié au versement vient augmenter le montant garanti au terme précédent, noté MGT_t^-. On a :

$$MGT_t^+ = MGT_t^- + MGT_t^{Versement}$$

3. Provision mathématique (PM)

Le rôle de la provision mathématique est de restituer le capital garanti au terme du contrat (c'est-à-dire à l'âge de conversion). Formellement, la provision mathématique associée au versement effectué en quinzaine t, correspond à l'actualisation du montant garanti au terme :

$$PM_t^{Versement} = \frac{MGT_t^{Versement}}{(1+\tau_t)^{T-t}}$$

Avec :

τ_t : Taux d'actualisation en quinzaine t, afférent à la durée T-t (exprimé en base quinzaine)
T : Nombre total de quinzaines séparant la date de souscription et l'échéance de la garantie

Si le taux d'actualisation en base annuelle relatif à la quinzaine t est noté τ_t^{BA}, on obtient le taux d'actualisation équivalent en base quinzaine, par la relation suivante :

$$\tau_t = (1+\tau_t^{BA})^{\frac{1}{24}} - 1$$

La nouvelle provision mathématique, juste après le versement complémentaire, sera directement calculée comme l'actualisation du nouveau montant garanti au terme, MGT_t^+.

$$PM_t^+ = \frac{MGT_t^+}{(1+\tau_t)^{T-t}}$$

4. Provision Technique de Diversification (PTD)

La provision technique de diversification a pour rôle de générer du capital supplémentaire par rapport au montant garanti au terme. Les montants investis au titre d'engagements donnant lieu à la constitution d'une provision de diversification sont sujets à des fluctuations à la hausse ou à la baisse dépendant de l'évolution des marchés financiers.

Cette provision est comptabilisée en nombre et en valeur de part. Lors d'une période donnée, la valeur de la part est identique pour tous les assurés. A l'ouverture du fonds Euro-croissance, l'assureur fixe une valeur pour cette part. Dans le cadre de notre modèle, la valeur initiale de la part est fixée à 10 €.

L'assureur s'engage sur le nombre de parts ainsi que sur une valeur minimale de la part initiale, notée $VL^{Garantie}$. Cette valeur minimale de la part est exprimée en pourcentage de la valeur initiale. Ce pourcentage n'est pas encore précisé dans le projet d'arrêté qui nous est disponible à présent. Dans le cadre de notre étude, ce pourcentage est fixé à 5 %, soit une valeur minimale de la part de 0,5 €.

Chaque versement contribue à alimenter la provision technique de diversification. Le montant de provision technique de diversification supplémentaire engendré par l'apport d'un versement, est donné par la différence entre le versement net et la provision mathématique :

$$PTD_t^{Versement} = V_t^N - PM_t^{Versement}$$

L'expression de cette provision en termes de nombre de parts est la suivante :

$$NP_t^{Versement} = \frac{PTD_t^{Versement}}{VL_t}$$

Avec :

VL_t : Valeur de la part lors de la quinzaine t

Suite au versement complémentaire, le nombre de parts global NP_t^+ est déterminé par incrémentation du nombre de parts précédents, noté NP_t^-. On a :

$$NP_t^+ = NP_t^- + NP_t^{Versement}$$

Afin de garantir le taux technique ainsi que la table de mortalité en vigueur au moment du versement sur la part diversifiée du contrat, on convertit le nombre de parts en fraction de rente en tenant compte des caractéristiques en vigueur :

$$Rente_t^{NP} = \frac{NP_t^{Versement}}{\ddot{a}_C^{\rho_t, \vartheta_t}}$$

Avec :

$NP_t^{Versement}$: Nombre de parts associé au versement effectué en quinzaine t
C : Age de conversion du capital en rente
ρ_t : Taux technique contractuel en quinzaine t (exprimé en base annuelle)
ϑ_t : Table de mortalité contractuelle en quinzaine t
$\ddot{a}_C^{\rho_t, \vartheta_t}$: Capital constitutif d'une rente viagère, versant un euro annuellement à termes à échoir, à partir de l'âge C, au taux technique ρ_t et avec la table de mortalité ϑ_t

Il est à noter que la valeur de la part n'est nullement impactée par l'opération du versement, elle demeure constante avant et après cette opération. Seul le nombre de part augmente lors de l'apport d'un versement dans le fonds.

II. Exemple de versement

1. Hypothèses de calcul

Prenons l'exemple d'un versement initial de 1 000 € sur le fonds Euro-croissance. En tenant compte des hypothèses suivantes :

- Age à la souscription : 39
- Age de conversion : 65
- Taux de frais sur versement : 5 %
- Proportion garantie : 100 %
- Taux d'actualisation annuel : 2 %
- VL initiale : 10 €

2. Calculs initiaux

Comme précisé précédemment, la valorisation d'un versement a lieu en fin de quinzaine suivant la réception de celui-ci. On détaille donc les différents postes associés à ce versement en quinzaine 1.

Versement net de frais :

$$V_1^N = 1000 \times (1 - 0{,}05) = 950$$

Montant garanti au terme associé au versement :

$$\mathrm{MGT}_1 = 1000 \times (1 - 0{,}05) \times 100\,\% = 950$$

Taux d'actualisation (en base quinzaine) :

$$\tau_1 = (1 + 0{,}02)^{\frac{1}{24}} - 1 \simeq 0{,}08\,\%$$

Durée de la phase de constitution de l'épargne en nombre de quinzaines :

$$T = (65 - 39) \times 24 = 624$$

Provision mathématique associée au versement :

$$PM_1 = \frac{950}{(1 + 0{,}08\,\%)^{624-1}} = 568{,}2$$

Provision technique de diversification relative au versement :

$$PTD_1 = 950 - 568{,}2 = 381{,}8$$

Nombre de parts de PTD :

$$NP_1^{Versement} = \frac{381{,}8}{10} = 38{,}18$$

3. Bilan en fin de première quinzaine

En fin de première quinzaine, on place les fonds en couverture de la provision mathématique dans des actifs non risqués de manière à garantir la restitution du montant garanti au terme de la garantie. Quant à elle, la provision technique de diversification est placée en actifs risqués de manière à dynamiser la performance du fonds. Le bilan du fonds en fin de première quinzaine est représenté dans le schéma ci-dessous.

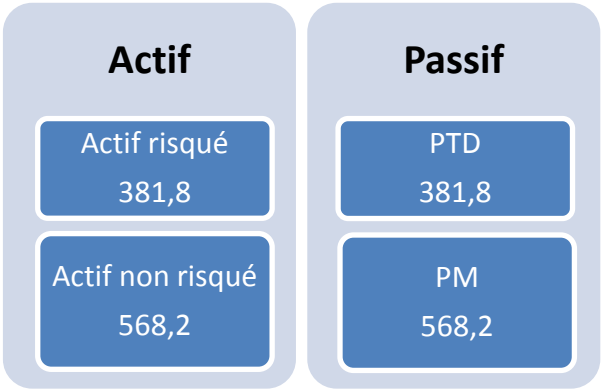

FIGURE 6 : Bilan du contrat en quinzaine 1

III. Sortie en capital, transfert ou décès avant le terme

1. Sortie en capital ou transfert

La sortie en capital est une forme de rachat par l'assuré d'une partie ou de la totalité de son épargne avant le terme. Ce type de rachat n'est autorisé que dans certains cas très particuliers, dont le détail sera explicité dans le paragraphe 2.2.2.3. Le transfert constitue également une forme de rachat total de l'épargne.

En cas de désinvestissement partiel du fonds, le montant garanti au terme est impacté au prorata des sommes désinvesties. Le montant garanti au terme après rachat (noté MGT_t^+) est donné par :

$$MGT_t^+ = MGT_t^- \times \left(1 - \frac{RP_t}{PM_t^- + PTD_t^-}\right)$$

Avec :

RP_t : Montant racheté
MGT_t^- : Montant garanti au terme avant rachat
PM_t^- : Provision mathématique avant rachat
PTD_t^- : Provision technique de diversification avant rachat

Le calcul de la provision mathématique après le rachat découle directement du nouveau montant garanti au terme. En effet, elle correspond à l'actualisation au terme de ce dernier.

La provision technique de diversification est également diminuée au prorata des sommes rachetées. De manière plus précise, la valeur de la part n'est nullement affectée par cette opération. Seul le nombre de parts est impacté de la manière suivante :

$$NP_t^+ = NP_t^- \times \left(1 - \frac{RP_t}{PM_t^- + PTD_t^-}\right)$$

Avec :

NP_t^- : Nombre de parts avant rachat

RP_t : Montant racheté
PM_t^- : Provision mathématique avant rachat
PTD_t^- : Provision technique de diversification avant rachat

2. Décès

En cas de décès de l'assuré avant le terme prévu au contrat, la totalité de l'épargne est reversé au(x) bénéficiaire(s) à son niveau atteint au moment du décès.

IV. Taux d'actualisation

Comme définie précédemment, la provision mathématique à l'instant t correspond à l'actualisation au terme du montant garanti à l'échéance (MGT). L'évaluation de cette provision nécessite donc le calcul intermédiaire d'un taux d'actualisation pour chaque quinzaine projetée. Or, la réglementation encadre de manière très précise ce taux d'actualisation, et le définit comme étant fonction d'un indice obligataire.

Pour ce qui concerne la réglementation des contrats en euro diversifié, le taux d'actualisation était spécifié comme une fonction du Taux Moyen des Emprunts d'Etat (TME). Pour reprendre les termes précis du Code des Assurances, voici un extrait de l'article A. 142-1 :

> ***Article A. 142-1*** **du Code des Assurances :**
> a) [...] les provisions mathématiques des adhérents sont calculées, pour chaque inventaire, d'après un taux au plus égal à 75 % du taux moyen des emprunts de l'État français calculé sur une base semestrielle, sans pouvoir dépasser, au-delà de huit ans, le plus bas des deux taux suivants : 3,5 % ou 60 % du taux moyen indiqué ci-dessus.

Or, les arrêtés réglementaires qui concernent le fonds Euro-croissance et dont la sortie définitive est prévue pour septembre 2014, sont en constante évolution. En particulier, pour ce qui concerne le taux d'actualisation, le projet d'arrêté initial penchait pour une évaluation identique à celle de l'euro diversifié, à savoir un taux d'actualisation qui serait fonction du TME. Puis, une modification a été entreprise, exprimant le taux d'actualisation comme une fonction de l'indice Taux de l'Echéance Constante (TEC). Voici un extrait du projet de l'article :

***Article A. 134-1* du Code des Assurances :**
a) Par dérogation au 1° de l'article A. 331-1-1, les provisions mathématiques sont calculées, pour chaque inventaire, d'après un taux au plus égal à :
1) pour chacun des engagements, 80 % de la moyenne mensuelle de l'indice TECn, publié par la Banque de France, où n correspond à la valeur la plus proche de l'échéance de la garantie du souscripteur. Lorsque l'échéance de la garantie du souscripteur ne correspond pas à un indice TECn disponible, une interpolation linéaire est réalisée entre les moyennes mensuelles des deux indices TECn encadrant le plus directement l'échéance.
2) par défaut, 80 % de la moyenne mensuelle du TECn où n correspond à la duration des engagements au passif de la comptabilité auxiliaire d'affectation ;
Le choix de la méthode prévue en 1) n'est pas réversible.
b) Les tarifs sont pratiqués conformément à l'article A. 335-1 ;
c) Les provisions mathématiques peuvent être calculées d'après un taux différent de celui retenu pour l'établissement du tarif.

Dans le cadre de notre modèle, on souhaite projeter les taux d'actualisation futurs de manière déterministe. En d'autres termes, la projection de ces taux est établie à partir des seules informations disponibles à la date de projection, fixée au 1er Janvier 2014. Afin de tenir compte de la méthode exposée dans chacun des deux articles cités précédemment, on élaborera cette projection à partir de chacun des indices obligataires qui y sont mentionnés, à savoir le TME et le TEC. Auparavant, il convient de définir quelques notions inhérentes à la méthodologie employée pour la projection future des taux d'actualisation.

1. Définitions préalables

a. Taux zéro-coupon

Un instrument financier « zéro-coupon » est un instrument qui ne donne lieu à aucun paiement intermédiaire d'intérêts. On dit aussi qu'il n'y a pas de détachement de coupon intermédiaire. Cet instrument donne donc lieu à deux flux :

- Un flux initial
- Un flux final de remboursement

On appelle taux zéro-coupon, le taux actuariel de cet instrument.

b. Taux *forward*

Afin d'estimer les taux d'actualisation futurs, il est nécessaire de faire intervenir la notion de taux *forward*. Par définition, un taux *forward* est un taux portant sur une période future, dont la déduction se fait à partir des taux côtés aujourd'hui sur le marché.

A titre d'exemple, la courbe des taux zéro-coupon actuelle contient de nombreuses informations sur les taux qui prévaudraient dans le futur. Par conséquent, à partir des taux zéro-coupon de différentes échéances extraits de cette courbe, on peut déduire les taux *forward* implicites.

Le taux *forward* vu en t pour une période démarrant en x et d'échéance y est noté $F(t,x,y)$. On le calcule comme suit.

$$F(t,x,y) = \left[\frac{\left(1+R(t,y)\right)^{y-t}}{\left(1+R(t,x)\right)^{x-t}}\right]^{\frac{1}{y-x}} - 1$$

Avec :

$R(t,\ x)$: Taux zéro-coupon vu en t et d'échéance x
$R(t,\ y)$: Taux zéro-coupon vu en t et d'échéance y

Dans notre cas particulier, étant donné que l'on souhaite projeter les taux d'actualisation de manière déterministe à partir de la courbe des taux en vigueur au moment de la projection, la date de projection est t=0 (correspondant au 1er Janvier 2014). D'où, la formule permettant d'obtenir les taux *forward* vus en date 0.

$$F(0,x,y) = \left[\frac{\left(1+R(0,y)\right)^{y}}{\left(1+R(0,x)\right)^{x}}\right]^{\frac{1}{y-x}} - 1$$

Avec :

$R(0,\ x)$: Taux zéro-coupon vu en 0 et d'échéance x
$R(0,\ y)$: Taux zéro-coupon vu en 0 et d'échéance y

2. Méthode 1 : Expression du taux d'actualisation en fonction du TME

Conformément à l'article A. 142-1, le taux d'actualisation est fonction du TME. Ainsi, il semble intéressant de projeter cet indice sur la durée de projection. Pour ce faire, rappelons la définition du TME. Le TME correspond au taux moyen des emprunts d'Etat à taux fixes pour une durée supérieure ou égale à 7 ans.

Dans ce cadre-là, il nous est possible de déduire une évaluation déterministe des TME futurs, à partir de la courbe des taux zéro-coupon datant de la date de projection (1er Janvier 2014). En effet, à chaque pas de projection, le TME peut être estimé par la moyenne des taux zéro-coupon de maturité supérieure ou égale à 7 ans. Certes, cela suppose que les emprunts d'Etat sont équirépartis entre les maturités, ce qui n'est pas forcément le cas dans la réalité. Mais cette technique demeure tout de même intéressante à explorer.

En vue d'appliquer cette méthode de projection des TME, on se réfère à la courbe des taux zéro-coupon publiée par l'Institut des Actuaires lors de chaque fin de mois. Cette courbe comprend un taux zéro-coupon par mois sur une période de 100 ans. L'avantage de cette courbe est qu'elle permet d'obtenir un TME mensuellement. Ce qui se rapproche le plus de la fréquence d'évaluation de notre modèle, qui est la quinzaine.

Nous projetterons annuellement les TME, à partir de la courbe des taux zéro-coupon issue du 1er Janvier 2014. Etant donné, la fréquence de projection annuelle, nous extrayons uniquement les taux de la courbe au 1er Janvier de chaque année.

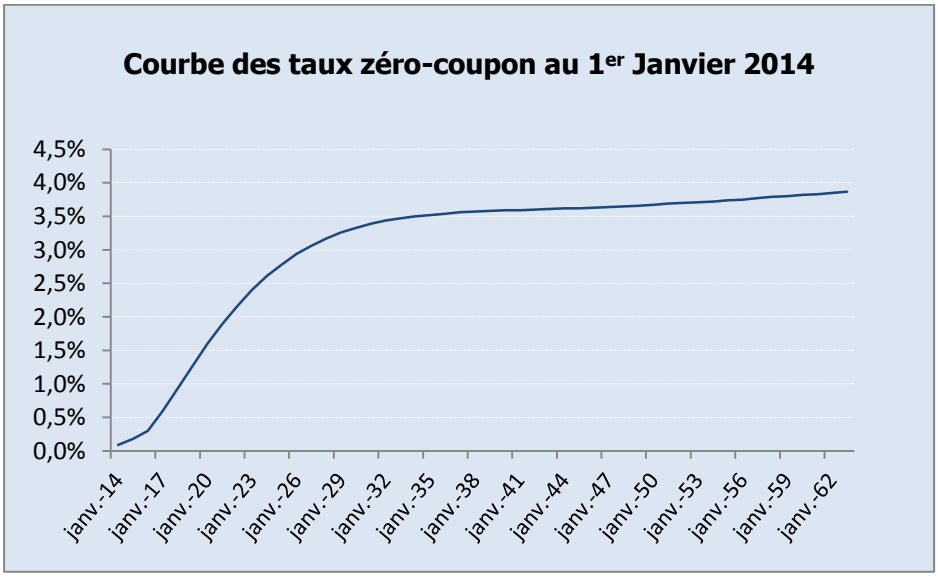

FIGURE 7 : Courbe des taux zéro-coupon au 1er Janvier 20147

Cette méthode de calcul du taux d'actualisation nécessite la connaissance des taux zéro-coupon pour une durée supérieure ou égale à 7 ans, à chaque pas de projection. Pour ce faire, on dispose donc de la courbe des taux zéro-coupon datant du moment de la projection. Il s'agit d'en extraire les taux *forward* zéro-coupon. En effet, le taux zéro-coupon à la date d'inventaire t et de durée d, correspond au taux *forward* vu au 1er Janvier 2014 entre les dates t et $t + d$. Le schéma ci-dessus retrace les différentes étapes nécessaires à la projection du TME.

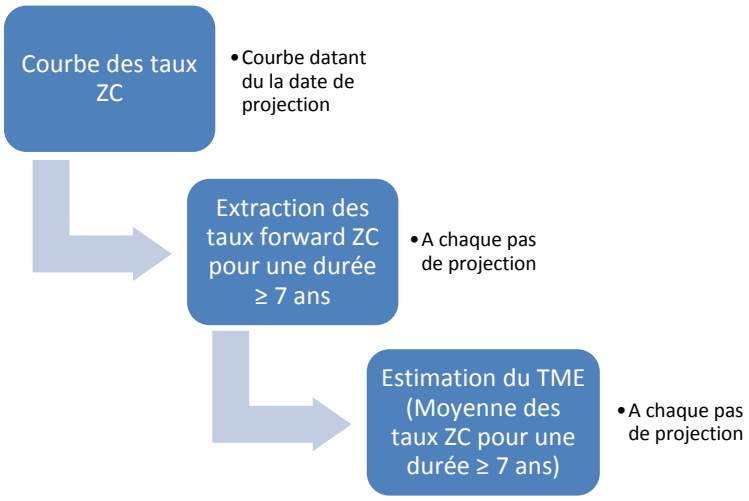

FIGURE 8 : Processus de projection des TME

[7] Courbe publiée chaque fin de mois, par la commission « Indices et références de marché » de l'Institut des actuaires, avec l'aide des SIX Telekurs France.

En appliquant le processus décrit ci-dessus, on obtient une demi-matrice de taux *forward* zéro-coupon. Dans cette demi-matrice, chaque colonne correspond à une année de projection et chaque ligne matérialise une maturité du taux *forward* zéro-coupon. Comme explicité précédemment, on évalue uniquement des taux *forward* zéro-coupon dont la maturité est supérieure ou égale à 7 ans, étant donné que le calcul du TME ne tient compte que de ces échéances-là. Ensuite, on effectue la moyenne de chaque colonne matérialisant l'estimation du TME pour l'année concernée. Le graphe ci-dessous retrace la courbe des taux *forward* zéro-coupon pour une durée supérieure ou égale à 7 ans aux pas de projections : 1, 2, 3 et 4.

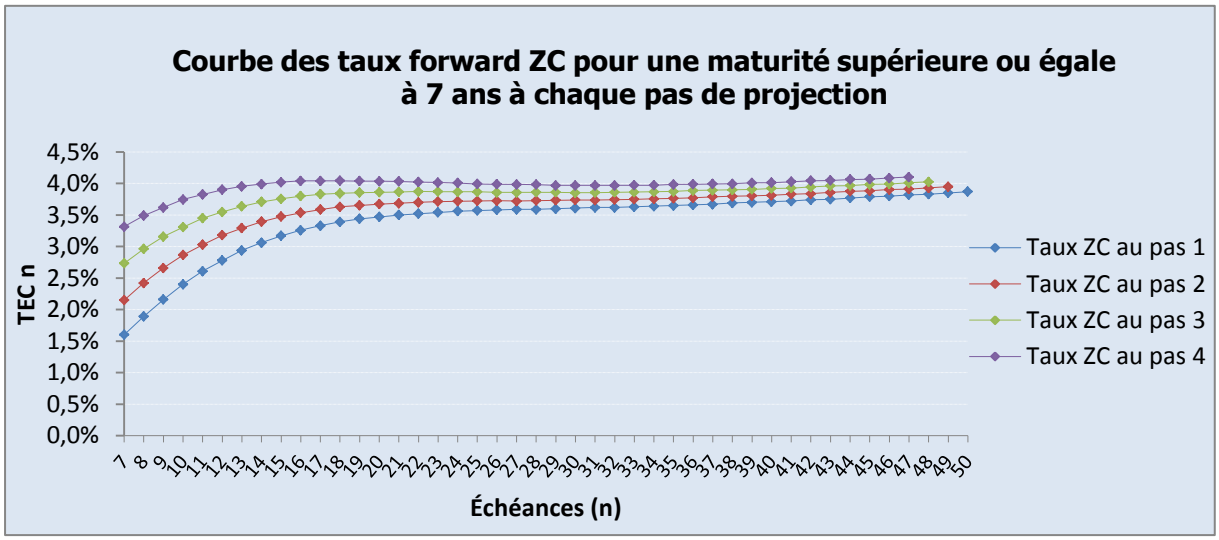

FIGURE 9: Projection de la courbe des taux ZC pour les pas 1, 2, 3 et 4

L'obtention d'une demi-matrice de taux *forward* uniquement, s'explique par le fait, qu'à mesure que l'on avance dans l'horizon de projection, on dispose de moins en moins de taux zéro-coupon dans la courbe des taux issue de la date de projection. Ce qui nous empêche d'évaluer les TME au-delà d'une certaine date. Par ailleurs, il convient de remarquer que plus on s'éloigne dans l'horizon de projection et plus la précision de l'estimation du TME s'amoindrit. En effet, pour les dates de projection lointaines, on ne peut calculer que des taux *forward* ZC de faible maturité.

Pour être plus clair, la courbe des taux zéro-coupon utilisée dans le cadre de notre étude s'arrête à Janvier 2063. Ainsi, pour l'année de projection 2056 par exemple, on ne dispose que du taux *forward* zéro-coupon pour une maturité de 7 ans. D'où l'estimation du TME à cette date-là ne sera basée que sur ce taux-là.

Une fois les TME projetés, on peut donc estimer les taux d'actualisation futurs comme suit : avant 8 ans, nous prendrons comme taux d'actualisation 75 % du TME et au-delà de 8 ans, nous prendrons le minimum entre 3,5 % et 60 % du TME. Le graphe ci-dessous met en évidence les taux d'actualisation ainsi estimés sur un horizon de 44 ans. On précise que ces taux sont exprimés en base annuelle.

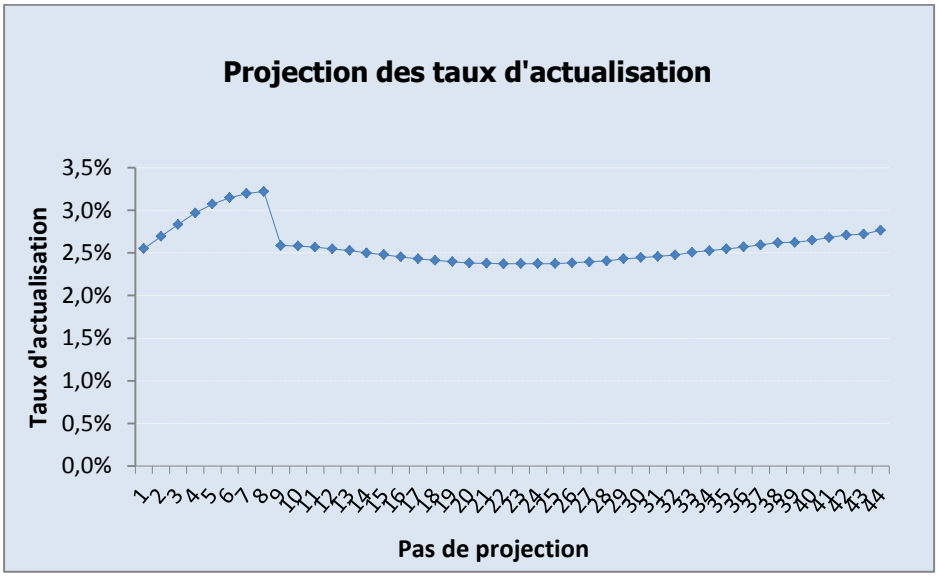

FIGURE 10 : Projection des taux d'actualisation

La variation brusque du taux d'actualisation observée au pas de projection 8 est liée au changement de réglementation à cette date-là.

3. Méthode 2 : Expression du taux d'actualisation comme fonction du TEC

En tenant compte du projet de l'article A. 134-1, le taux d'actualisation dépendrait de la moyenne mensuelle de l'indice TECn. L'indice quotidien TECn, Taux de l'Echéance Constante n ans, pour n variant de 1 à 30, est le taux de rendement actuariel d'une valeur du Trésor fictive dont la durée de vie serait à chaque instant égale à n années. Ce taux est obtenu par interpolation linéaire entre les taux de rendement actuariels annuels des 2 valeurs du Trésor qui encadrent au plus proche la maturité n. Quotidiennement, le taux TEC est publié pour 10 échéances : 1, 2, 3, 5, 7, 10, 15, 20, 25 et 30 ans.

Dans le cadre de notre étude, nous nous référons à la moyenne mensuelle des TEC journaliers relatifs au mois de Janvier 2014. Nous obtenons ainsi une courbe de taux TEC avec 10 échéances[8].

[8] Cette courbe a été tirée du site de la Banque de France.

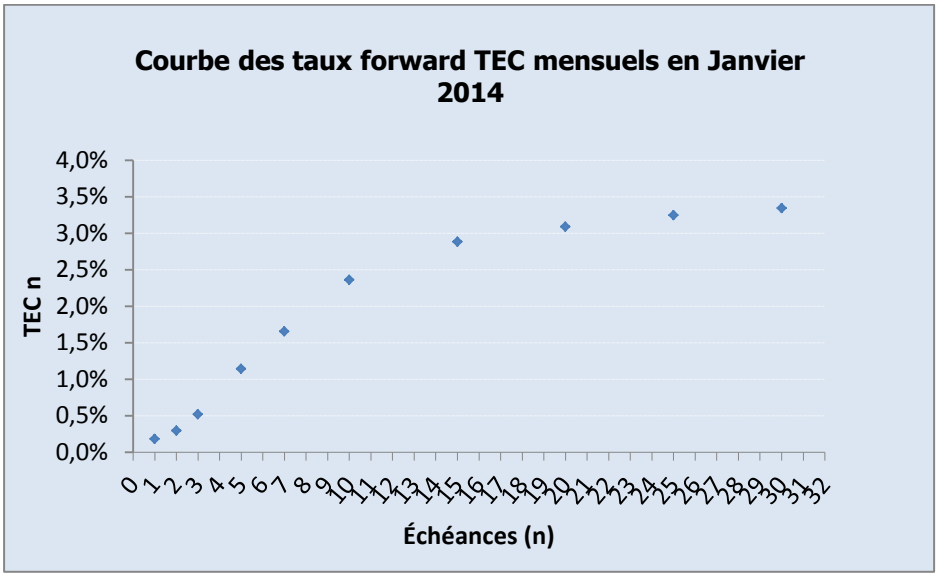

FIGURE 11: Moyenne mensuelle des taux TEC en Janvier 2014

En vue de projeter les taux d'actualisation à partir de cette courbe, il semble intéressant de calculer les taux *forward* implicites. Or, on ne dispose que de 10 échéances pour un horizon de 30 ans. C'est pourquoi, une première alternative consisterait à interpoler la courbe linéairement pour les échéances manquantes pour pouvoir ensuite évaluer les taux *forward*. La formule utilisée pour interpoler entre deux points, dénommés « point inférieur » et « point supérieur », est la suivante.

$$y_i = y_1 + (y_2 - y_1) \times \frac{(x_i - x_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Avec :

x_1 : Abscisse du point inférieur
x_2 : Abscisse du point supérieur
x_i : Abscisse du point à interpoler
y_1 : Ordonnée du point inférieur
y_2 : Ordonnée du point supérieur

A titre d'exemple, la courbe des taux TEC mensuels dont nous disposons affiche pour des maturités de 3 ans (x_1) et de 5 ans (x_2) respectivement, des taux de rendement de 0,52 % et de 1,14 %. Le taux recherché est celui de l'échéance de 4 ans. Par interpolation, on obtient :

$$y_4 = 0{,}52\,\% + (1{,}14\,\% - 0{,}52\,\%) \times \frac{(4-3)}{(5-3)} = 0{,}83\,\%$$

Il semble important de noter que la technique d'interpolation linéaire est simple à appliquer dans la pratique et émet des résultats corrects. Cependant, il existe d'autres techniques bien plus performantes, comme la méthode des splines. Cette dernière consiste à interpoler en se servant de polynômes.

Par ailleurs, étant donné que nous souhaitons projeter de manière déterministe les taux TEC pour en déduire les taux d'actualisation futurs, il faudrait extrapoler la courbe. Plusieurs techniques d'extrapolation ont été proposées sous Solvabilité II, notamment la méthode de Smith-Wilson dans

la « Quantitative Impact Study 5 »[9]. Cette méthode consiste à converger progressivement vers un taux à long terme (Ultimate Forward Rate ou UFR). Bien que ce procédé permette d'obtenir des résultats très satisfaisants, sa mise en œuvre demeure toutefois très complexe. Ne disposant pas du temps nécessaire à l'élaboration d'une telle méthode, et l'extrapolation de la courbe des taux TEC ne constituant pas la problématique centrale de ce mémoire, nous n'avons pas pu mettre en œuvre une telle méthode. L'hypothèse selon laquelle il y a stabilité des taux au-delà de 30 ans a été retenue.

a. Interpolation linéaire sur la courbe des taux TEC

Comme explicité, on interpole la courbe linéairement pour estimer le taux des échéances manquantes. Ainsi, on obtient la courbe donnée dans le graphe ci-dessous.

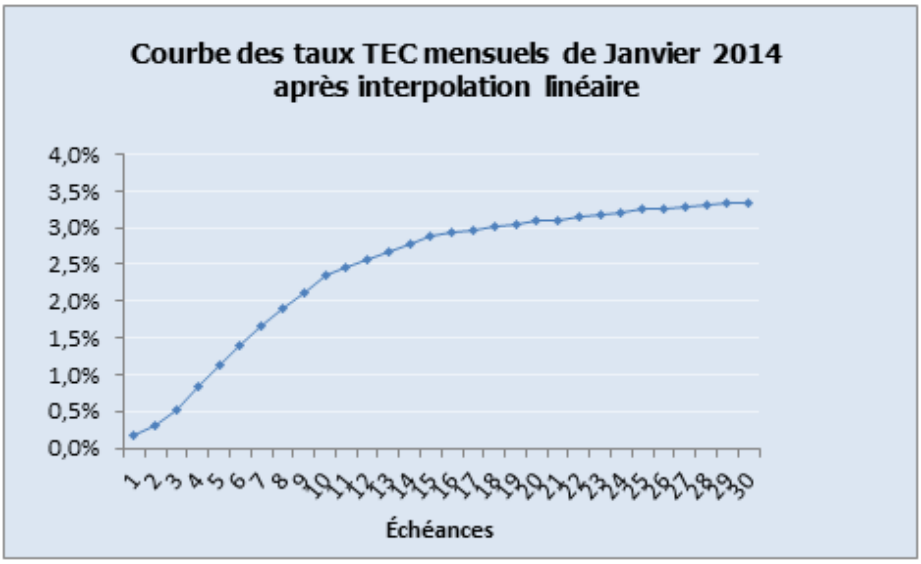

FIGURE 12: Interpolation linéaire sur la courbe des taux TEC

A partir de la courbe des taux TEC complétée par interpolation linéaire pour les échéances manquantes, on calcule donc les taux *forward* TEC pour chaque à de projection. Le graphe ci-dessous met en évidence la courbe des taux TEC *forward* pour les pas de projection 1, 2, 3 et 4.

[9] Cinquième étude publiée par l'EIOPA le 14 Mars 2011. Son objectif est de définir l'impact de Solvabilité II sur le bilan des entreprises.

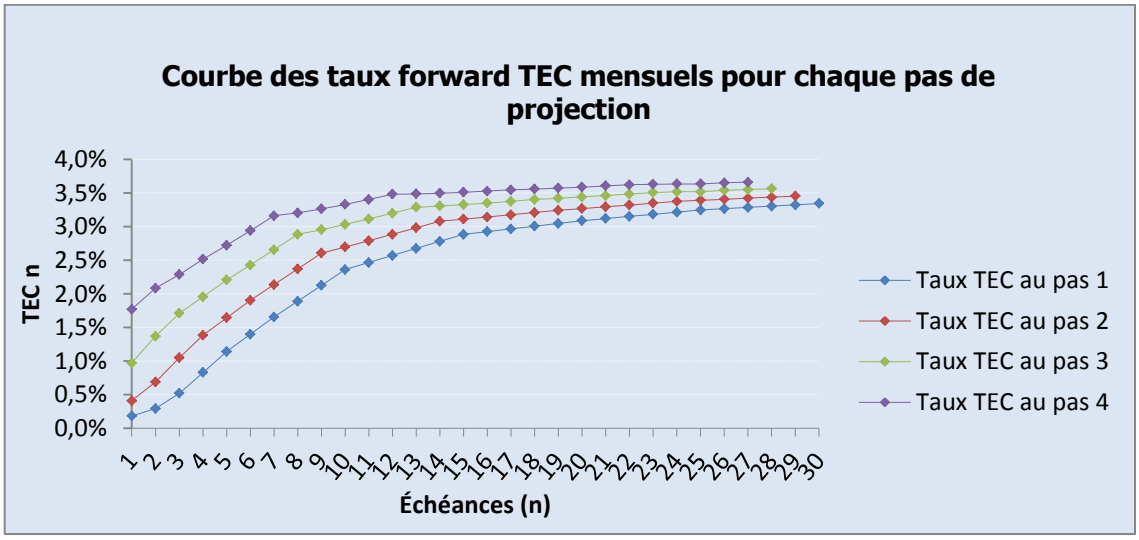

FIGURE 13: Courbe des taux TEC à quatre pas de projection

On remarque que lorsqu'on avance d'un pas dans l'horizon de projection, la courbe de taux projetée présente une échéance en moins par rapport à celle du pas précédent. Cela s'explique par le fait, que l'information future disponible à un instant donné, diminue lorsqu'on avance dans le temps. Quant à la forme de la courbe des taux TEC projetée que l'on a obtenue pour les pas de projection 1, 2, 3 et 4, on peut la qualifiée de correcte. En effet, elle est croissante et concave. Cependant, pour les pas de projections davantage lointains, la courbe présente quelques coudes. Pour illustrer ce fait, voici la courbe des taux TEC projetée pour le pas de projection 8.

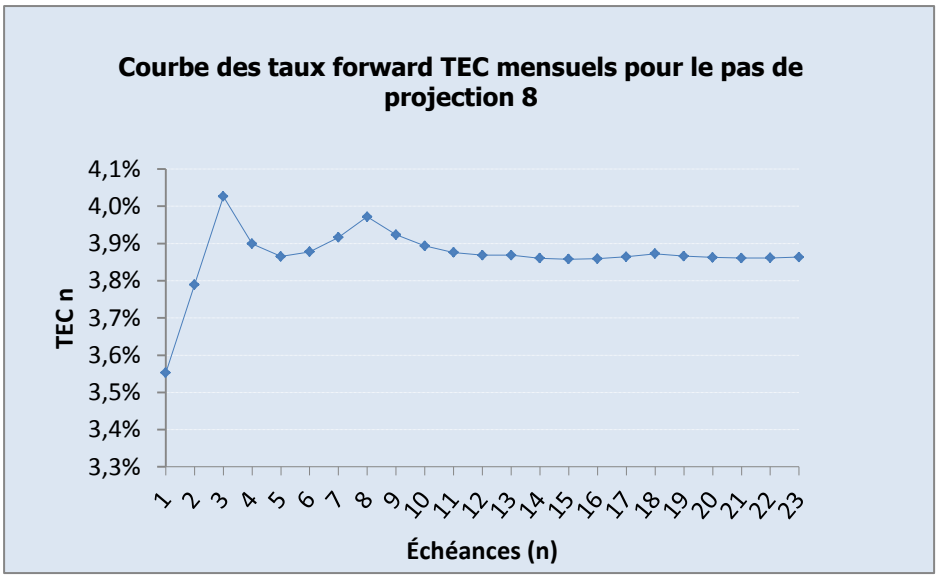

FIGURE 14: Courbe des taux forward TEC pour le pas 8

On constate clairement l'apparition de pics, qui sont particulièrement marqués aux échéances 3 et 8. Il s'agit d'une conséquence directe de l'utilisation de la technique d'interpolation linéaire pour compléter la courbe des taux sous-jacente à la projection.

C'est pour cette raison qu'on envisage une autre possibilité présentée dans le paragraphe suivant.

b. Interpolation linéaire sur les *forward*

L'idée est de calculer tous les taux TEC *forward* possibles à partir de la courbe des taux TEC mensuels disponible et non encore complétée par interpolation linéaire pour les échéances manquantes. On représente les courbes ainsi projetées pour les pas de projection 1, 2, 3 et 4.

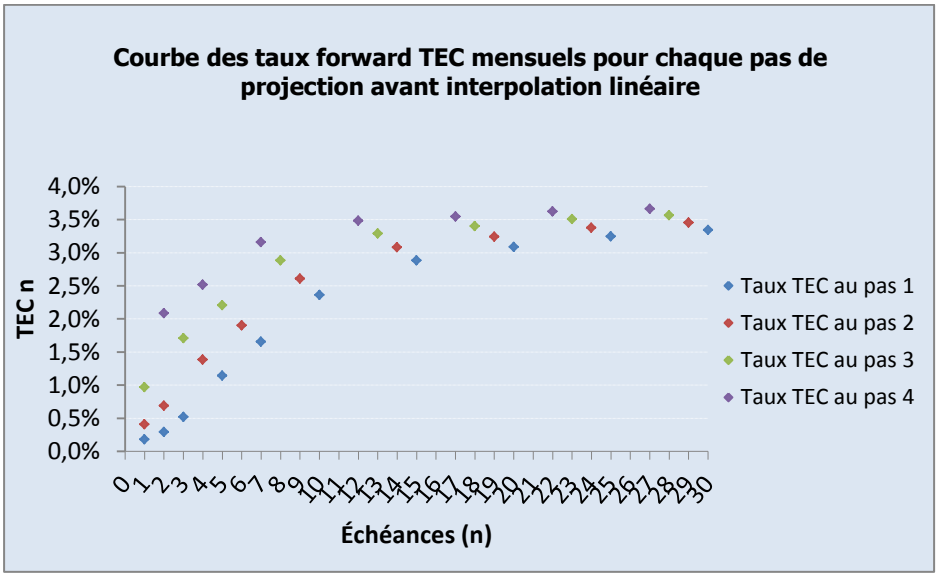

FIGURE 15 : Courbes des taux forward TEC projetées avant interpolation linéaire

Pour chaque pas de projection, on effectue une interpolation linéaire sur les taux *forward* TEC afin de restituer les taux *forward* des échéances manquantes. L'étape suivante consiste à déduire les taux TEC manquants dans la courbe de base (TEC mensuels de Janvier 2014). Le souci que présente cette méthode est le fait qu'à partir de chaque courbe de taux *forward* projetée, il est possible de déduire une estimation du TEC manquant dans la courbe de base. Autrement dit, on peut déduire plusieurs valeurs possibles pour un seul taux TEC. C'est pourquoi, on ne se réfère qu'à la courbe projetée présentant le plus de taux TEC *forward* de différentes échéances avant interpolation, pour restituer les taux TEC manquants dans la courbe de base.

V. Interaction entre les provisions : Arbitrage PTD vers PM

1. Objectif et réglementation

Cette opération peut être effectuée lors de chaque début de quinzaine. Elle consiste à transférer une part de la provision technique de diversification vers la provision mathématique. La finalité recherchée au travers de cette opération, est la sécurisation des plus-values engendrées par les placements en actif risqué. Les placements en actif risqué permettent de couvrir les engagements représentés par la provision de diversification et constituent le moteur de performance du contrat.

Au fur et à mesure que le terme du contrat approche, l'assureur bascule une partie de la provision technique de diversification vers la provision mathématique pour sécuriser le capital.

En ce qui concerne le montant de PTD à convertir en PM lors d'une quinzaine donnée, il est limité par la réglementation. En effet, des conditions portant sur la valeur de la PTD non garantie par rapport à un pourcentage de la PM doivent être satisfaites au préalable. Le projet de l'article A. 134-6 du Code des Assurances explicite clairement les deux contraintes qui doivent être réalisées en vue d'établir une telle opération. En voici l'extrait :

> ***Article A. 134-6*** **du Code des Assurances :**
> La conversion mentionnée à l'article R. 134-7 ne peut s'effectuer qu'après quatre ans, dès lors que, après la conversion, le montant de la provision de diversification des engagements du contrat, diminué de la garantie mentionnée au II de l'article R. 134-5, est supérieur ou égal à 20 % de la provision mathématique des engagements du contrat.

En écriture mathématique, cela revient à satisfaire le système ci-dessous.

∀ t > 96,

$$PTD_t - PTD_t^{Garantie} > 20\,\% \times PM_t$$

Où l'ensemble des éléments (PTD et PM) tiennent déjà compte du transfert de provision, étant donné que les textes recommandent la vérification de cette contrainte après conversion.

2. Description du mécanisme

Il s'agit de transférer une part de la provision technique de diversification vers la provision mathématique par diminution du nombre de parts de la provision technique de diversification. Pour calculer le montant maximal de PTD à convertissable en PM, on définit tout d'abord le nombre de parts cible (maximal) de PTD pouvant faire l'objet d'un tel transfert (noté y_t^{max}). Le nombre de parts que l'on souhaite convertir est quant à lui noté y_t.

Dans un souci de clarté, nous traiterons de manière distincte ce système de contraintes pour la phase de constitution et celle de restitution.

a. Phase de constitution

La conversion de parts de provision technique de diversification en provision mathématique ayant lieu en début de quinzaine, les éléments contenus dans l'inéquation ci-dessus peuvent être détaillés comme suit. Conformément à la réglementation, on considère ces éléments juste après la prise en compte de la conversion de y_t parts.

$$PTD_t = \left(NP_{t-1}^{FdP} - y_t\right) \times VL_{t-1}$$
$$PTD_t^{Garantie} = \left(NP_{t-1}^{FdP} - y_t\right) \times VL^{Garantie}$$
$$PM_t = PM_{t-1}^{FdP} + y_t \times VL_{t-1}$$

On déduit donc l'expression de l'inéquation ci-dessus, compte tenu de ces composantes, ainsi que le nombre de parts maximal convertissable (y_t^{max}).

∀ t > 96,

$$(NP_{t-1}^{FdP} - y_t) \times VL_{t-1} - (NP_{t-1}^{FdP} - y_t) \times VL^{Garantie} > 20\,\% \times (PM_{t-1}^{FdP} + y_t \times VL_{t-1})$$

$$y_t < \frac{1}{1{,}2 \times VL_{t-1} - VL^{Garantie}} \times [NP_{t-1}^{FdP} \times (VL_{t-1} - VL^{Garantie}) - 0{,}2 \times PM_{t-1}^{FdP}] = y_t^{max}$$

b. Phase de restitution

En phase de restitution, les postes contenus dans l'inéquation doivent être détaillés avec prise en compte de l'opération de lissage dont le contenu sera explicité dans le paragraphe 2.1.3.1.2. L'opération de lissage s'inscrit dans le cadre de la revalorisation de l'arrérage et a lieu également en début de période.

$$PTD_t = \left(NP_t^{DdP,\,après\ lissage} - y_t\right) \times VL_{t-1}$$

$$PTD_t^{Garantie} = \left(NP_t^{DdP,\,après\ lissage} - y_t\right) \times VL^{Garantie}$$

$$PM_t = PM_t^{DdP,\,après\ lissage} + y_t \times VL_{t-1}$$

Compte tenu de ces détails, l'inéquation est réécrite de la manière suivante.

∀ t > 96,

$$\left(NP_t^{DdP,\,après\ lissage} - y_t\right) \times VL_{t-1} - \left(NP_t^{DdP,\,après\ lissage} - y_t\right) \times VL^{Garantie} > 20\,\% \times \left(PM_t^{DdP,\,après\ lissage} + y_t \times VL_{t-1}\right)$$

$$y_t < \frac{1}{1{,}2 \times VL_{t-1} - VL^{Garantie}} \times \left[NP_t^{DdP,\,après\ lissage} \times (VL_{t-1} - VL^{Garantie}) - 0{,}2 \times PM_t^{DdP,\ après\ lissage}\right] = y_t^{max}$$

Une fois le nombre de parts plafond calculé, on peut déduire le montant de PTD à convertir en PM, noté $PTD_t^{Arbitrage}$.

$$PTD_t^{Arbitrage} = Min(y_t,\, y_t^{max}) \times VL_{t-1}$$

Cette opération a pour effet d'augmenter le montant garanti au terme. Le montant garanti au terme engendré par cette opération d'arbitrage est donné par la formule ci-dessous :

$$MGT_t^{Arbitrage} = PTD_t^{Arbitrage} \times (1 + \tau_{t-1})^{T-(t-1)}$$

Avec :

τ_{t-1} : Taux d'actualisation en quinzaine t-1, afférent à la durée T-(t-1) (exprimé en base quinzaine)
T : Nombre total de quinzaines séparant la date de souscription et l'échéance de la garantie

L'obtention de la valeur de la nouvelle provision mathématique se fait par l'actualisation du nouveau montant garanti au terme.

Il semble utile de remarquer que cette opération d'arbitrage n'exerce aucun effet sur la valeur de la part. Seul le nombre de parts est affecté à la baisse suite à la conversion de PTD en PM.

VI. Compte et affectation de la participation aux bénéfices

La Participation aux Bénéfices sur le support Euro-croissance est déterminée lors de l'établissement du compte de résultats commun à l'ensemble des adhérents lors de chaque quinzaine. Ce compte se situe au cœur des interactions Actif-Passif. Le maintien de l'égalité entre l'actif et le passif à chaque période, est assuré par ce compte.

1. Description du compte de Participation aux Bénéfices

Selon l'article A. 331-4 du Code des assurances, le compte de participation aux résultats comporte en recettes :

- Le montant des primes versées
- Les produits nets de placements
- La variation des plus ou moins-values latentes des actifs du contrat
- Les éventuelles rétrocessions de commission
- Les montants arbitrés en comptabilité auxiliaire

En charges :

- Les charges des prestations versées aux adhérents et des montants transférés
- Les charges des provisions techniques, y compris celles résultant d'écarts actuariels des provisions mathématiques, avant attribution de participation aux résultats
- Les frais
- Le cas échéant, le solde débiteur net de déduction de l'exercice précédent
- Les montants arbitrés entre comptabilités auxiliaires

Dans le cadre de notre modélisation, le rendement de l'actif a lieu entre le début et la fin de période. La valorisation de ce rendement est effectuée lors de chaque quinzaine en fin de période. Un des rôles du rendement de l'actif est de financer la variation de la provision mathématique qui survient entre le début et la fin de chaque période. En effet, en fin de période la provision mathématique correspond à l'actualisation du nouveau MGT à un nouveau taux d'actualisation la PM et à une quinzaine de moins par rapport à celle évaluée en début de période. Le solde restant correspond au solde de Participation aux Bénéfices :

$$PB_t = \left(A_t^{FdP} - A_t^{DdP}\right) - \left(PM_t^{FdP,\, avant\ PB} - PM_t^{DdP,\, après\ arbitrage}\right)$$

2. Modes d'affectation de la Participation aux Bénéfices

Dans le cadre du contrat Euro-croissance, l'affectation de la PB peut être panachée entre provision de diversification et provision mathématique.

Lorsque le compte de participation aux bénéfices présente un solde créditeur, ce solde est distribué soit par revalorisation de la valeur de la part, soit au travers de la création de nouvelles parts, soit au travers d'une revalorisation des engagements en euros (autrement dit, du MGT). Dans

le cas contraire, c'est-à-dire lorsque le solde du compte de participation aux bénéfices est débiteur, les pertes sont entièrement absorbées par la valeur de la part ou par un appel de fonds propres externes.

En théorie, il est possible de modifier le mode d'affectation de la participation à chaque arrêté ou encore de combiner plusieurs modes de distribution lors d'un arrêté. Dans ce cadre-là, la politique de revalorisation peut être utilisée comme une variable de pilotage commerciale et technique. Dans notre modèle, on fait l'hypothèse suivante : lors d'une quinzaine donnée, la distribution de la PB se fait d'une unique façon parmi les trois énoncées précédemment.

Par ailleurs, notons qu'en phase de restitution de la rente, la participation aux bénéfices ne se peut se faire qu'au travers de revalorisation de la valeur de la part.

a. Revalorisation de la valeur de la part

Ce mode de revalorisation intervient que le solde du compte participations aux bénéfices soit créditeur ou débiteur. En admettant que nous souhaitions affecter la totalité du solde du compte de participation aux bénéfices par revalorisation de la valeur de la part, on note VL_t^{PB} la valeur ajoutée (ou retraitée dans le cas où le solde est débiteur) suite à la distribution de la PB, lors de la quinzaine t. Mathématiquement, elle est calculée comme le rapport entre la PB à distribuer et le nombre de parts après versement.

$$VL_t^{PB} = \frac{PB_t}{NP_t^-}$$

Avec :

NP_t^- : Nombre de parts en quinzaine t avant affectation de la PB

En cas de diminution de la valeur de la part, celle-ci ne peut descendre en dessous de la valeur minimale. La nouvelle valeur de part, après affectation de la participation aux bénéfices, est donc donnée par la relation suivante.

$$VL_t^+ = Max\left(VL_t^- + VL_t^{PB}; VL^{Garantie}\right)$$

En reprenant l'exemple énoncé précédemment, et en admettant que le rendement moyen annuel de l'actif a été de 3,5 %, le solde du compte de PB vaut donc : 0,89 €.

Le solde de ce compte étant positif, il s'agit donc de distribuer la PB sous l'une des trois formes possibles.

À titre d'exemple, reprenons le cas précédent, d'un unique assuré possédant 38,18 parts de 10 euros, soit 381,80 euros de PTD, lors de la première quinzaine. En supposant que le rendement de l'actif en deuxième quinzaine soit de 3,5 % (en base annuelle), le solde du compte de PB en fin de quinzaine est évalué à 0,89 euros. On souhaite donc affecter ce solde sous forme de revalorisation de la valeur de la part. La valeur de part passera donc à $10 + \frac{0{,}89}{38{,}18} = 10{,}02$ euros ce qui entraine une nouvelle PTD à valeur de $10{,}02 \times 38{,}18 = 382{,}69$ euros correspondant bien aux 381,80 euros de départ revalorisés de 0,89 euros.

b. Revalorisation du nombre de parts

Le mode d'attribution de la PB en valeur de parts et en PM sur le fonds Euro-croissance, déterminé à chaque inventaire mensuel par l'assureur, est identique pour l'ensemble des adhérents. Sur la revalorisation en nombre de parts, le taux peut être différent par contrat. En d'autres termes ce mode d'affectation de PB est discriminatoire, c'est-à-dire que l'assureur peut sélectionner un groupe d'assurés auquel il souhaite affecter la PB sous cette forme. Rien ne l'oblige à l'affecter sous cette forme à l'ensemble des adhérents. De plus, ce mode de revalorisation ne peut être mis en œuvre que lorsque le solde du compte participations aux bénéfices est créditeur. En notant NP_t^{PB}, le nombre de parts à ajouter par le mécanisme d'attribution de la PB, on le calcule de la manière suivante :

$$NP_t^{PB} = \frac{PB_t}{VL_t^-}$$

Suite à l'affectation du solde créditeur de PB sous forme de parts, le nombre de parts global est déterminé par incrémentation du nombre de parts précédent .

$$NP_t^+ = NP_t^- + NP_t^{PB}$$

La valeur de la part n'est quant à elle aucunement affectée par cette opération, d'où son montant demeure constant.

$$VL_t^+ = VL_t^-$$

A titre d'illustration de ce mécanisme d'affectation de PB, reprenons le cas précédent d'un unique assuré possédant 38,18 parts de 10 euros, soit 381,8 euros de PTD à qui nous souhaitons affecter une revalorisation de 0,89 euros. Le nombre de parts passe donc à $38{,}18 + \frac{0{,}89}{10} = 38{,}27$ ce qui engendre une nouvelle PTD à valeur de $10 \times 38{,}27 = 382{,}7$, correspondant bien aux 381,80 euros initiaux revalorisés de 0,89 euros.

c. Revalorisation des engagements exprimés en euros

Cette revalorisation doit être identique pour tous les assurés. En cas de distribution de la PB sous forme de revalorisation de la provision mathématique, on augmente simplement la PM du montant de la PB à affecter. Bien évidemment, la hausse de la PM engendrée par cette affectation de PB, entraîne une hausse du montant garanti au terme. Ce mode de distribution de la PB constitue également un moyen de sécuriser la PB puisqu'il permet de garantir la restitution de PB transférée au terme du contrat.

Toutefois, il convient de noter qu'en vertu du projet d'arrêté de l'article A. 134-2 du Code des Assurances, une condition de revalorisation des engagements en euros est spécifiée. Pour reprendre les termes du projet de l'article explicitant cette contrainte :

> ***Article A. 134-2* du Code des Assurances :**
> Le pourcentage prévu au II de l'article R. 134-6 s'élève à 10 %.

Le pourcentage mentionné dans le II de l'article R. 134-6 fait référence à la condition de revalorisation des engagements exprimés en euros comme suit : les engagements en euros (c'est-à-dire la PM) ne peuvent être revalorisés par dotation de PB que si la PTD diminuée de l'engagement résultant de la valeur minimale, non nulle, de la part, est supérieure à 10 % de la PM. Pour être plus

précis, l'engagement résultant de la valeur minimale de la part correspond à la fraction de PTD garantie (notée $PTD_t^{Garantie}$). On évalue son montant à une date donnée, en pondérant le nombre de parts cumulées à cette date par la valeur minimale de la part (égale à 0,5 € dans notre modèle). En écriture mathématique, la contrainte de revalorisation explicitée ci-dessus revient à respecter à tout instant l'inéquation suivante.

$$PTD_t - PTD_t^{Garantie} > 10\,\% \times PM_t$$

Avec :

$PTD_t^{Garantie} = NP_t \times VL^{Garantie}$

Cependant, cette condition doit être respectée avant et après la revalorisation de la provision mathématique. En notant x_t le montant de participation aux bénéfices que l'on affecte à la revalorisation de la provision mathématique, il s'agit de déterminer le montant x_t^{max} qui constitue le plafond que x_t ne doit pas dépasser. Pour évaluer ce montant cible lors de chaque quinzaine t, il s'agit de réécrire l'inéquation précédente juste avant la distribution de PB en fin de période.

$$PTD_t - PTD_t^{Garantie} > 10\,\% \times (PM_t + x_t)$$

En résolvant cette inéquation, on obtient alors le seuil maximal de PB revalorisable sous forme de PM.

$$x_t < 10 \times \left(PTD_t - PTD_t^{Garantie}\right) - PM_t = x_t^{max}$$

Notre modèle calcule donc le montant de participation aux bénéfices maximal x_t^{max} pouvant être revalorisé sous forme d'engagements en euros. Ainsi, le montant de participation aux bénéfices effectivement revalorisé ne peut excéder x_t^{max}. L'éventuel surplus sera attribué en valeur de provision technique de diversification. Le montant de participation aux bénéfices converti en provision mathématique vaut donc :

$$x_t = Min(x_t^{max};\ PB_t)$$

Avec :

τ_t : Taux d'actualisation en quinzaine t, afférent à la durée T-t (exprimé en base quinzaine)
x_t : Montant de PB revalorisé en PM
T : Nombre de quinzaines séparant la date de souscription et le terme du contrat

L'augmentation de la provision mathématique par dotation de la participation aux bénéfices a pour conséquence d'augmenter la garantie au terme (MGT). Il s'agit donc d'évaluer le montant garanti au terme supplémentaire (noté MGT_t^{PB}) engendré par le transfert du montant x_t de participation aux bénéfices vers la provision mathématique.

$$MGT_t^{PB} = x_t \times (1 + \tau_t)^{T-t}$$

Le montant garanti au terme global après affectation vaut donc :

$$MGT_t^{+} = MGT_t^{-} + MGT_t^{PB}$$

Après revalorisation par affectation de la PB, la provision mathématique peut être évaluée de deux manières équivalentes :

- Actualisation du nouveau montant garanti au terme sur T-t quinzaines

- Augmentation de la provision mathématique avant affectation de la PB du montant de PB

$$PM_t^+ = \frac{MGT_t^+}{(1+\tau_t)^{T-t}} = PM_t^- + x_t$$

Il semble utile de préciser que le mécanisme employé précédemment afin de revaloriser la PM et implicitement le MGT par attribution de PB, n'est praticable que lorsque le portefeuille est composé d'une unique police. En effet, dans le cadre d'un modèle tenant compte de plusieurs polices, la méthode employée se veut différente. Une fois que le montant final de PB attribuable en revalorisation des PM est déterminé, il faut effectuer une revalorisation à un taux identique pour tous les adhérents.

Certes, le bloc de modélisation dans lequel on se trouve permet de modéliser les différents postes pour une unique police éternelle et il n'est donc pas utile de calculer un tel taux. Mais en vue de généraliser ce modèle à plusieurs adhérents, on précise tout de même la manière dont ce taux, noté ∂_t^{PB}, est évalué.

$$\partial_t^{PB} = \frac{x_t^{Totale}}{PM_t^{Totale}}$$

Avec :

PM_t^{Totale} : Provision Mathématique globale en quinzaine t (pour tous les adhérents)
x_t^{Totale} : Montant de participation aux bénéfices attribuable à l'ensemble des adhérents au contrat au titre de la quinzaine t

Ainsi, on revalorise la provision mathématique ainsi que la garantie au terme de chaque adhérent du taux ∂_t^{PB}. Ce mode de revalorisation est donc intéressant pour l'assuré car il permet de conserver ses gains jusqu'au terme du contrat.

A titre d'illustration de ce mécanisme d'affectation de PB, reprenons le cas précédent d'un unique assuré possédant 568,64 euros de provision mathématique en fin de deuxième quinzaine en représentation d'un montant garanti au terme de 950 euros. Nous souhaitons lui affecter une revalorisation de 0,89 euros en deuxième quinzaine. Le montant garanti au terme passe donc à $950 + 0{,}89 \times \left(1 + 0{,}08\,\%\right)^{624-2} = 951{,}49$ et la provision mathématique vaut $568{,}64 + 0{,}89 = 569{,}93$.

Le tableau ci-dessous résume les différentes valeurs prises par la valeur de la part, le nombre de parts et le montant garanti au terme selon le choix du mode d'affectation de la participation aux bénéfices.

	Revalorisation VL	Distribution de parts	Revalorisation du MGT
Valeur de la part	**10,02 €**	10,00 €	10,00 €
Nombre de parts	38,18	**38,27**	38,18
Valeur du MGT	950,00 €	950,00 €	**951,49 €**

FIGURE 16 : Exemple d'affectation de la PB sous les trois formes possibles

Section 2. Phase de conversion

Cette section permet d'illustrer le passage de l'Euro-croissance relatif à la phase de constitution de l'épargne à celui lié à la phase de restitution. En effet, lors de cette dernière phase, on lance un nouvel Euro-croissance.

En vue de faciliter la compréhension du mémoire, on réinitialise la numérotation des quinzaines, notées t, à partir de l'indice 1.

I. Droits acquis en phase de constitution

1. Expression des droits en euros

Au terme de la période de constitution de l'épargne, c'est-à-dire à l'âge de conversion, on calcule les droits acquis par l'assuré. Plus précisément lors de la quinzaine précédent l'âge de conversion de capital en rente, notée T, on calcule les droits acquis par l'adhérent en termes de provision. Ces droits correspondent simplement à la somme de la PM et de la PTD au terme de la phase de constitution.

$$CC_T^{FdP} = PM_T^{FdP} + PTD_T^{FdP}$$
$$CC_T^{FdP} = PM_T^{FdP} + NP_T^{FdP} \times VL_T$$

Avec :

T : Nombre de quinzaines séparant la date de souscription et l'échéance du contrat
NP_T^{FdP} : Nombre de parts en fin de quinzaine T
VL_T : Valeur de la part lors de la quinzaine T

2. Expression des droits en termes de rente

Parallèlement, on calcule les droits acquis par l'assuré en termes de rente, c'est-à-dire le pied de rente qu'il touchera au minimum chaque année. Le pied de rente de base correspond à la somme de deux fractions de rente :

- Une fraction liée au capital garanti (MGT)
- Une fraction liée à la PTD

L'évaluation de la première fraction de rente liée à la garantie au terme (MGT), est établie en sommant l'ensemble des fractions de rente associées aux capitaux garantis (MGT) de chacun des versements effectués sur le fonds.

$$Rente_{MGT} = \sum_{t=1}^{T} Rente_t^{MGT}$$

Avec :

T : Nombre de quinzaines séparant la date de souscription et l'échéance du contrat
$Rente_t^{MGT}$: Garantie au terme (MGT) liée au(x) versement(s) effectués lors de la quinzaine t exprimée en fraction de rente

La seconde fraction relative aux droits matérialisés par la provision de diversification, est calculée comme le produit entre le nombre part total exprimé en fraction de rente et la valeur de la part au terme de la phase de constitution.

$$Rente_{PTD} = \left(\sum_{t=1}^{T} Rente_t^{NP}\right) \times VL_T$$

Avec :

T : Nombre de quinzaines séparant la date de souscription et l'échéance du contrat
VL_T : Valeur de la part lors de la quinzaine T
$Rente_t^{NP}$: Nombre de parts lié au(x) versement(s) effectués lors de la quinzaine t exprimé en fraction de rente

Le pied de rente de base, ou plus précisément l'arrérage initial que l'assuré touchera jusqu'à sa mort est exprimé comme suit.

$$Rente_{Base} = Rente_{MGT} + Rente_{PTD}$$

II. Phase de restitution – Euro-croissance II

Il semble important de noter que les textes actuels sont largement focalisés sur la réglementation de la phase de constitution, et cela en dépit de la phase de restitution. En effet, l'encadrement par les textes de cette dernière est à ce jour assez flou voire inexistant. A titre d'exemple, la question quant au taux d'actualisation à utiliser lors de cette phase, se pose à nous.

Toutefois, il est possible de proposer une modélisation de cette phase à la lumière des mécanismes du contrat.

1. Contrainte sur les taux

Une remarque importante s'impose quant à la possibilité d'établir une nouvelle phase Euro-croissance lors de la restitution de la rente. En effet, pour envisager une telle possibilité, il faudrait que le taux technique de chacune des fractions de rente viagère garanties à l'assuré soit inférieur au taux d'actualisation en vigueur au moment de la conversion. Si tel n'est pas le cas, on ne peut réaliser un second Euro-croissance. Cela s'explique par le fait que la génération de PTD en tout début de phase de restitution est la conséquence directe de la différence entre ces deux taux. Donc dans le cas où cette contrainte sur les taux n'est pas vérifiée, la phase de restitution de l'arrérage ne peut pas être engagée sur le fonds Euro-croissance.

De manière plus explicite, en théorie, pour qu'un Euro-croissance puisse être établi en phase de restitution, il faudrait que la moyenne des taux techniques relatifs à chaque versement pondérés

par la valeur du versement, soit inférieure au taux d'actualisation en vigueur au tout début de la phase de restitution.

Mais dans la pratique, cette contrainte est davantage élargie. En effet, étant donné que chaque versement est stocké dans un compartiment avec les caractéristiques en vigueur lors de la quinzaine de sa valorisation (taux technique de la rente et table de mortalité), on réalise alors un Euro-croissance séparé pour chacun des compartiments.

2. Provisions techniques initiales

Pour pouvoir engager une seconde phase Euro-croissance lors de la restitution du capital, on calcule les provisions initiales qui lui sont inhérentes. On commence par évaluer le montant de la PM à l'âge de la conversion, qui correspond au capital constitutif de la rente de base annuelle au taux d'actualisation :

$$PM_1^{DdP} = Rente_{Base} \times \ddot{a}_C^{\tau_t^{BA}, \vartheta_t}$$

Avec :

C : Age de conversion du capital en rente
τ_t^{BA} : Taux d'actualisation en vigueur lors de la quinzaine t (exprimé en base annuelle)
ϑ_t : Table de mortalité en vigueur lors de la quinzaine t
$\ddot{a}_C^{\rho_t, \vartheta_t}$: Capital constitutif d'une rente viagère, versant un euro annuellement à termes à échoir, à partir de l'âge C, au taux technique ρ_t et avec la table de mortalité ϑ_t

La provision de diversification initiale est ensuite déduite par différence entre la somme des droits acquis exprimés en euros et cette nouvelle provision mathématique initiale en phase de restitution.

$$PTD_1^{DdP} = CC_T^{FdP} - PM_1^{DdP}$$

L'expression de la provision de diversification en nombre de parts est déduite au travers de la formule ci-dessous.

$$NP_1^{Restitution} = \frac{PTD_1^{DdP}}{VL_T}$$

Avec :

VL_T : Valeur de la part lors de la quinzaine T

3. Taux d'actualisation

Les textes actuels n'explicitent pas la nature du taux d'actualisation à utiliser en phase de restitution pour le calcul des provisions mathématiques. En phase de constitution, ce taux est défini comme fonction d'un indice obligataire (TME ou TECn) dont l'échéance est proche de la durée restant à courir entre le moment du calcul et le terme du contrat.

Dans la lignée de cette réglementation, il serait possible d'envisager pour la phase de restitution la prise en compte d'un indice obligataire du même type. En ce qui concerne l'échéance à considérer pour cet indice à une date donnée, il semble pertinent de la prendre comme égale à la durée séparant la date de calcul et l'espérance de vie de l'assuré.

Section 3. Phase de restitution

Cette section détaille de manière explicite la méthode de calcul de l'arrérage, le mécanisme de sa revalorisation ainsi que le mode de provisionnement établi lors de la phase de restitution. Cette dernière étape soulève une problématique d'adossement actif-passif dans la mesure où ces deux blocs ne tiennent pas tous les deux compte de la mortalité pouvant survenir entre l'âge de conversion et la date de versement de l'arrérage. En effet, le calcul de la provision mathématique tient compte implicitement de la mortalité. Par contre, l'actif n'intègre pas cette mortalité éventuelle. Ce décalage entre les considérations crée un déséquilibre actif-passif qu'il va falloir effacer.

Ainsi, après avoir détaillé le calcul de l'arrérage initial et son mode de revalorisation annuel, on explicitera clairement la problématique liée au provisionnement pour ensuite mettre en évidence les deux alternatives possibles qui permettent d'y pallier.

I. Montant d'arrérage annuel

Chaque année, on revalorise l'arrérage de base par attribution d'une fraction de la provision technique de diversification. Cette attribution est faite via deux mécanismes : celui du lissage de la provision technique de diversification et celui du transfert de la PTD vers la PM. Ces deux modes de revalorisation prennent la forme d'une conversion d'une partie des parts de provision de diversification de l'assuré en provision mathématique.

Avant de détailler la méthodologie employée dans le cadre de la revalorisation des arrérages, il peut être intéressant de bien la visualiser au travers du schéma ci-dessous.

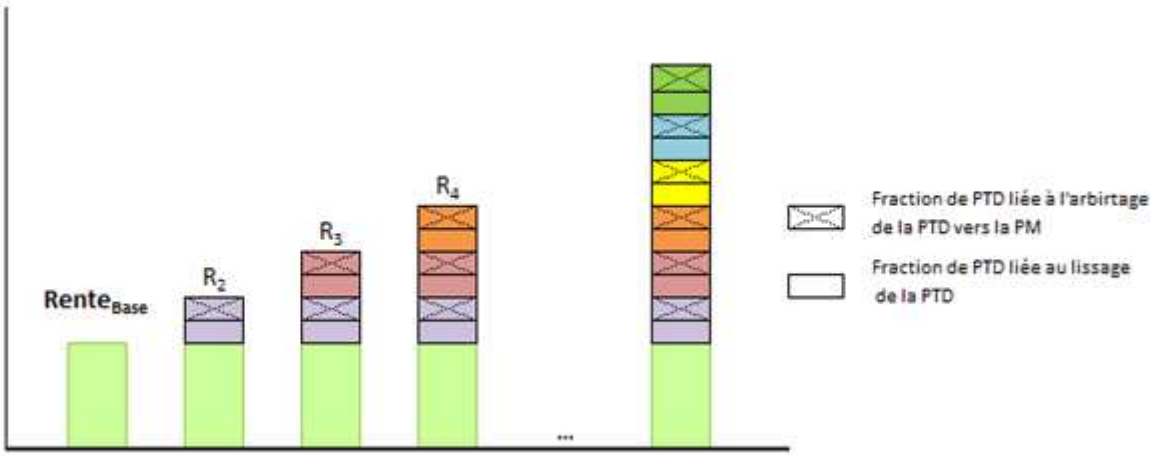

FIGURE 17 : Revalorisation des arrérages par lissage de la PTD et arbitrage de PTD en PM

1. Revalorisation par lissage de la PTD

Ce mode de revalorisation consiste à distribuer chaque année une fraction de la provision de diversification. Cette distribution a lieu en début de chaque année. Le calcul de cette fraction de rente se fait comme suit.

∀ t =24n+1, avec n ∈ $\mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire chaque année)

$$F_t^{PTD,\,Liss} = \frac{PTD_t^{DdP}}{\ddot{a}_{A_t}^{0,\Theta_t}}$$

Avec :

PTD_t^{DdP} : Provision de diversification en disponible au début de la quinzaine t
Θ_t : Table de mortalité en vigueur lors de la quinzaine t
A_t : Age de l'assuré en quinzaine t
$\ddot{a}_{A_t}^{0,\Theta_t}$: Capital constitutif d'une rente viagère, versant un euro annuellement à termes à échoir, à partir de l'âge A_t, au taux 0 et avec la table de mortalité Θ_t

Cette opération consistant à distribuer une part de provision de diversification annuellement, a pour effet de diminuer le nombre de parts de PTD. Ce dernier est évalué comme suit.

∀ t =24n+1, avec n ∈ $\mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire chaque année)

$$NP_t^{Liss} = \frac{F_t^{PTD,\,Liss}}{VL_{t-1}}$$

Avec :

VL_{t-1} : Valeur de la part en quinzaine t

Par ailleurs, dans un souci d'assurer la croissance des arrérages à mesure que l'on avance dans le temps, il est nécessaire de lisser l'affectation de la part de PTD relative à l'année t sur toute la durée de vie restante de l'assuré. En effet, les arrérages versés aux adhérents ne peuvent être volatils. Ainsi, on lisse la distribution de la fraction de PTD relative à l'année t et notée F_t^{PTD}, comme suit.

∀ t =24n+1, avec n ∈ $\mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire chaque année)

$$R_t^{PTD,\ Liss} = \frac{F_t^{PTD,\,Liss}}{\ddot{a}_{A_t}^{\rho_t,\Theta_t}}$$

Avec :

ρ_t : Taux technique en vigueur lors de la quinzaine t (exprimé en base annuelle)
Θ_t : Table de mortalité en vigueur lors de la quinzaine t
A_t : Age de l'assuré en quinzaine t
$\ddot{a}_{A_t}^{\rho_t,\Theta_t}$: Capital constitutif d'une rente viagère, versant un euro annuellement à termes à échoir, à partir de l'âge A_t, au taux technique ρ_t et avec la table de mortalité Θ_t

Etant donné que l'on provisionne les rentes au taux d'actualisation et que l'on calcule la fraction de PTD au taux technique, cela génère à nouveau de la PTD qui doit être réaffectée au compte de la PTD globale. On évalue alors le nombre de parts qu'il faut réallouer à la PTD.

∀ t =24n+1, avec n ∈ $\mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire chaque année)

$$NP_t^{Réalloué,\,Liss} = \frac{\left(F_t^{PTD,\,Liss} - R_t^{PTD,\,Liss} \times \ddot{a}_{A_t}^{\tau_t^{BA},\vartheta_t}\right)}{VL_{t-1}}$$

Avec :

τ_t^{BA} : Taux d'actualisation en vigueur lors de la quinzaine t (exprimé en base annuelle)
ϑ_t : Table de mortalité en vigueur lors de la quinzaine t
$\ddot{a}_{A_t}^{\tau_t^{BA},\vartheta_t}$: Capital constitutif d'une rente viagère, versant un euro annuellement à termes à échoir, à partir de l'âge A_t, au taux d'actualisation τ_t^{BA} et avec la table de mortalité ϑ_t

2. Revalorisation par arbitrage de PTD vers PM

En plus du lissage de la PTD qui consiste à transférer de la PTD vers la PM, on effectue un transfert supplémentaire. On arbitre un nombre de parts de PTD égal au nombre maximal possible afin de satisfaire la contrainte explicitée en 2.1.5.2. Ainsi, la fraction de PTD arbitrée est donnée par le produit entre le nombre de parts seuil et la valeur de la part.

∀ t =24n+1, avec n ∈ $\mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire chaque année)

$$F_t^{PTD,\,Arbi} = y_t^{max} \times VL_{t-1}$$

Afin d'assurer la croissance des arrérages, on lisse la distribution de cette fraction de PTD comme suit.

∀ t =24n+1, avec n ∈ $\mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire chaque année)

$$R_t^{PTD,\,Arbi} = \frac{F_t^{PTD,\,Arbi}}{\ddot{a}_{A_t}^{\rho_t,\vartheta_t}}$$

Avec :

ρ_t : Taux technique en vigueur lors de la quinzaine t (exprimé en base annuelle)
ϑ_t : Table de mortalité en vigueur lors de la quinzaine t
A_t : Age de l'assuré en quinzaine t
$\ddot{a}_{A_t}^{\rho_t,\vartheta_t}$: Capital constitutif d'une rente viagère, versant un euro annuellement à termes à échoir, à partir de l'âge A_t, au taux technique ρ_t et avec la table de mortalité ϑ_t

De manière similaire au premier mode de revalorisation effectué, on doit réallouer un certain nombre de parts de PTD arbitrée à la PTD globale du fait de la différence entre le taux utilisé pour le provisionnement (taux d'actualisation, τ_t^{BA}) et celui utilisé pour le calcul de la fraction de rente (taux technique, ρ_t). On évalue alors le nombre de parts qu'il faut réallouer à la PTD.

∀ t =24n+1, avec n ∈ $\mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire chaque année)

$$NP_t^{Réalloué,\,Arbi} = \frac{\left(F_t^{PTD,\ Arbi} - R_t^{PTD,\,Arbi} \times \ddot{a}_{A_t}^{\tau_t^{BA},\Theta_t}\right)}{VL_{t-1}}$$

Avec :

τ_t^{BA} : Taux d'actualisation en vigueur lors de la quinzaine t (exprimé en base annuelle)
Θ_t : Table de mortalité en vigueur lors de la quinzaine t
$\ddot{a}_{A_t}^{\tau_t^{BA},\Theta_t}$: Capital constitutif d'une rente viagère, versant un euro annuellement à termes à échoir, à partir de l'âge A_t, au taux d'actualisation τ_t^{BA} et avec la table de mortalité Θ_t

3. Arrérage

Chaque année, on verse le montant de rente de base calculé précédemment, revalorisé par la distribution de PTD. La formulation de l'arrérage annuel, noté R_t est donc donnée par la somme de trois éléments : la rente de base, le cumul de fractions de rente liées au lissage de la PTD et le cumul de fractions de rente liées à l'arbitrage de parts de PTD en PM.

En t = 1,

$$R_t^{Certain} = Rente_{Base}$$

∀ t =24n+1, avec n ∈ $\mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire chaque année)

$$R_t^{Certain} = Rente_{Base} + \sum_{i=1}^{t}\left(R_i^{PTD,\ Liss} + R_i^{PTD,\,Arbi}\right)$$

Il est important de noter que l'objectif de la réalisation d'un second Euro-croissance en phase de rente serait de garantir une revalorisation de l'arrérage plus intéressante, que si nous avions géré la provision mathématique associée sur un fonds en euros. Cependant, la difficulté soulevée par l'Euro-croissance réside dans le fait que la revalorisation de l'arrérage ne se fait que par distribution de la PTD. Or, avec ce type de revalorisation, il est impossible de distribuer la fraction de PTD afférente à une année donnée en une fois. En effet cela engendrerait des arrérages volatils, ce qui va à l'encontre des objectifs de base de tout assureur. Par conséquent on est dans l'obligation de lisser la fraction de PTD afférente à une année donnée sur la durée de vie restante de l'assuré. Cette solution permet certes de garantir la croissance des arrérages. Toutefois, elle a pour effet de cumuler des fractions de PTD jusqu'à la fin de la vie de l'assuré. Ainsi, une grande part de la PTD de l'assuré est conservée jusqu'à la fin de sa vie au lieu d'être distribuée.

Afin de pallier au mieux à ce problème, l'idée serait de convertir chaque année le maximum de parts de provision technique de diversification en provision mathématique. Le calcul du seuil maximal de parts qu'il est possible de convertir chaque année est clairement explicité dans la réglementation (voir le paragraphe 2.1.1.5.). Par ailleurs, dans la contrainte concernant cet arbitrage, la part de PTD non garantie convertissable en PM est exprimée en pourcentage de la PM. Ainsi, afin d'assurer une revalorisation optimale des arrérages, il serait opportun que la réglementation diminue ce pourcentage en particulier en phase de restitution. En effet, cela permettrait de convertir une plus grande part de la provision technique de diversification chaque année. Autrement dit, une

restriction en matière de cette contrainte d'arbitrage un peu moins sévère, favoriserait une revalorisation annuelle des arrérages plus performante.

Pour illustrer clairement l'impact de cette contrainte sur la qualité de revalorisation des arrérages, nous avons paramétré ce pourcentage. Cela permet d'étudier la sensibilité de la revalorisation de l'arrérage au montant de PTD autorisé à la conversion. En vue d'apprécier au mieux cette sensibilité, on utilise l'indicateur de rendement moyen des rentes. Les résultats de cette étude seront présentés dans la partie 4 de ce mémoire.

II. Provisions techniques

1. Provision mathématique

En phase de restitution, le calcul de la provision mathématique est effectué chaque année. La provision mathématique correspond simplement au capital constitutif de la rente. On note de plus que le calcul de cette provision se fait en début de chaque année après distribution de l'arrérage pour l'année en cours. Par ailleurs, l'expression de cette provision n'est pas la même selon qu'on se situe en début ou en cours d'année. Ainsi, pour une année donnée, on distinguera la formulation de cette provision selon que l'on se situe en première quinzaine ou en une des 23 autres.

a. Expression de la PM en première quinzaine d'une année

Lors d'une quinzaine t qui coïncide avec le début d'année, la provision mathématique en début de période correspond au capital constitutif d'une rente viagère versant annuellement R_t à partir de l'âge actuel de l'assuré, noté A_t. Cette provision est calculée avec les caractéristiques en vigueur lors de cette quinzaine, à savoir avec le taux d'actualisation τ_t^{BA} et la table de mortalité Θ_t .

$\forall$ t = 24n+1, avec n $\in \mathbb{N}$ (c'est-à-dire chaque année en première quinzaine)

$$PM_t^{DdP} = R_t^* \times a_{A_t}^{\tau_t^{BA},\Theta_t}$$

Avec :

R_t^* : Arrérage annuel versé lors de la quinzaine t (*= Certain ou Probabilisé)
τ_t^{BA} : Taux d'actualisation en vigueur lors de la quinzaine t (exprimé en base annuelle)
Θ_t : Table de mortalité en vigueur lors de la quinzaine t
$\ddot{a}_{A_t}^{\tau_t^{BA},\Theta_t}$: Capital constitutif d'une rente viagère, versant un euro annuellement à termes échus, à partir de l'âge A_t, au taux d'actualisation τ_t^{BA} et avec la table de mortalité Θ_t

La différenciation entre arrérage certain ($R_t^{Certain}$) et arrérage probabilisé ($R_t^{Probabilisé}$) est volontairement précisée ici. On expliquera l'origine de cette distinction lors de la présentation de la problématique d'adossement actif-passif au point 2.1.3.3.1. L'expression formelle de ce que l'on nomme arrérage probabilisé $R_t^{Probabilisé}$ sera donnée.

b. Expression de la PM en cours d'année

Lors d'une quinzaine située en cours d'année, la provision mathématique correspond simplement à celle de la quinzaine précédente désactualisée d'une période.

∀ t ≠ 24n+1, avec n ∈ ℕ (c'est-à-dire en cours d'année)

$$PM_t^{DdP} = PM_{t-1}^{DdP} \times (1 + \tau_t)$$

Avec :

τ_t : Taux d'actualisation en vigueur lors de la quinzaine t (exprimé en base quinzaine)

2. Provision de diversification

La provision de diversification en quinzaine t est donnée par le produit entre le nombre de parts et la valeur de la part. En particulier, lors de la première quinzaine de chaque année, son montant est donné par :

∀ t = 24n+1, avec n ∈ ℕ (c'est-à-dire chaque année en première quinzaine)

$$PTD_t^{DdP} = \left(NP_{t-1} - NP_t^{Liss} - NP_t^{Arbi} + NP_t^{Réalloué,\,Liss} + NP_t^{Réalloué,\,Arbi}\right) \times VL_{t-1}$$

En fin de quinzaine, la PTD ne peut être abondée que par attribution de PB sous forme de revalorisation de la PTD (l'attribution de PB ayant lieu en fin de quinzaine).

III. Actif

En phase de restitution, le versement de l'arrérage a lieu en tout début de chaque année. Cela a pour effet de diminuer l'actif du montant de l'arrérage versé. En ce qui concerne le montant de l'arrérage versé, son évaluation soulève un questionnement : lors d'une année donnée, doit-on considérer l'arrérage certain ou l'arrérage probabilisé ?

Etant donné que l'on se situe dans le bloc de modélisation du fonds pour une police éternelle, on devrait à priori considérer l'arrérage dans sa totalité (c'est-à-dire l'arrérage certain). En effet, dans ce bloc, on suppose qu'il y a une police présente chaque année dans le portefeuille. Par conséquent, le versement de l'arrérage a lieu de manière sûre chaque année. En considérant ainsi le retrait annuel à l'actif de l'arrérage total, on ne tient pas compte de la mortalité éventuelle entre l'âge de conversion de l'épargne en rente et l'année du versement de l'arrérage. Par contre, le calcul de la provision mathématique tient compte de cette mortalité éventuelle puisque son expression correspond au capital constitutif de la rente viagère. Autrement dit, son calcul intègre des arrérages futurs probabilisés et non pas certains.

Dans ce cadre-là, on a d'une part l'actif qui n'intègre pas du tout la mortalité et d'autre part, le passif - constitué de la provision mathématique et de la provision technique de diversification – qui tient compte partiellement de la mortalité. En effet, la provision mathématique prend en considération la mortalité entre les années tandis que la provision technique de diversification n'en tient pas compte, étant donné qu'elle découle de l'actif lui-même non probabilisé par la mortalité. Cette considération engendre alors un décalage actif- passif.

Afin de mieux illustrer l'essence du problème, on détaille le calcul de la provision mathématique. A une date donnée, cette provision correspond à la valeur actuelle probable des engagements futurs de l'assureur envers l'assuré. Elle est donc donnée par le produit entre le montant de l'arrérage et le capital constitutif d'une rente viagère versant un euro annuellement à termes échus. On s'intéresse à élucider le contenu du capital constitutif de la rente viagère versant un euro annuellement à termes échus.

$$a_x = \sum_{i=1}^{w-x} 1 \times \ {}_ip_x \times \frac{1}{(1+\tau_i)^i}$$

Avec :

${}_ip_x$: Probabilité qu'un individu d'âge x vive encore pendant i années
τ_i : Taux d'actualisation de l'année i
w : Dernier âge de la table

D'après la formule ci –dessus, on constate que : à l'âge x+1, la rente d'un montant de 1 euro est versée avec probabilité ${}_1p_x$, à l'âge x+2 avec une probabilité ${}_2p_x$, à l'âge x+3 avec probabilité ${}_3p_x$, etc. Ainsi, le calcul de la provision mathématique tient compte de la mortalité éventuelle entre l'âge de conversion et l'âge de versement de chacun des arrérages.

Autrement dit, entre deux années consécutives, sous l'hypothèse que l'arrérage n'est pas revalorisé par arbitrage de la PTD vers la PM, on constate que : l'actif diminue du montant de l'arrérage, tandis que la provision mathématique diminue de moins que le montant de l'arrérage étant donné que son calcul tient compte de la mortalité. Par conséquent, l'actif décroit plus vite que le passif. Ainsi, en début de chaque année, lors du calcul de la provision mathématique, on constate un décalage entre l'actif et le passif. Pour rétablir l'équilibre entre les deux blocs, il existe deux possibilités :

- Soit on probabilise l'arrérage sortant chaque année. Ainsi, on retraite à l'actif l'arrérage probabilisé. Cela fait disparaître le décalage entre l'actif et le passif
- Soit on ne probabilise pas l'arrérage sortant à l'actif, ce qui crée un trou au niveau de l'actif

Nous allons illustrer les deux alternatives possibles, à savoir la prise en compte de l'arrérage probabilisé ou de l'arrérage entier.

1. Retrait annuel de l'arrérage probabilisé

Afin de combler ce décalage, l'idée est de probabiliser l'arrérage sortant chaque année. Ainsi, l'arrérage en année i est versé avec probabilité ${}_ip_x$. Mathématiquement, la formulation de l'arrérage est la suivante.

Pour t = 1,

$$R_t^{Probabilisé} = Rente_{Base} \times {}_{\frac{t-1}{24}}p_C = Rente_{Base}$$

∀ t =24n+1, avec n ∈ $\mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire chaque année)

$$R_t^{Probabilisé} = Rente_{Base} \times {}_{\frac{t-1}{24}}p_C + \sum_{\substack{i=1 \\ i=24k+1 \\ k\in\{1,\dots,n\}}}^{t} {}_{\frac{t-i}{24}}p_{A_i}\left(R_i^{PTD,\ Liss} + R_i^{PTD,\ Arbi}\right)$$

Avec :

C : Age de l'assuré à la conversion du capital en rente
A_i : Age de l'assuré en quinzaine i
$Rente_{Base}$: Rente de base (ou arrérage initial)
$R_i^{PTD,\ Liss}$: Fraction de rente liée à la revalorisation de l'arrérage en date i par lissage de la PTD
$R_i^{PTD,\ Arbi}$: Fraction de rente liée à la revalorisation de l'arrérage en date i par arbitrage de la PTD vers la PM

Chaque année, on calcule la provision mathématique à partir de cet arrérage probabilisé. De plus, on retranche à l'actif ce montant d'arrérage là. En début d'année, après versement de l'arrérage, le niveau de l'actif est donné par :

∀ t =24n+1, avec n ∈ $\mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire chaque année)

$$A_t^{DdP} = A_{t-1}^{FdP} - R_t^{Probabilisé}$$

En adoptant une telle méthodologie, l'actif et le passif sont parfaitement adossés à chaque pas de la projection.

2. Retrait annuel de l'arrérage entier

Dans l'optique où l'on a forcément une police présente chaque année dans le portefeuille, on retranche chaque année l'arrérage non probabilisé. Comme explicité précédemment, cela crée un trou au niveau de l'actif en chaque début d'année qu'il va falloir combler.

On commence par évaluer le trou (noté T) créé en chaque début d'année. Il est donné par la différence entre la provision mathématique et le montant de l'actif disponible à la date d'évaluation. Mathématiquement, il s'écrit comme suit.

∀ t =24n+1, avec n ∈ $\mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire chaque année)

$$T_t^{DdP} = A_t^{DdP,\ avant\ équilibrage} - PM_t^{DdP}$$

On décide d'amortir ce trou par appel de fonds propres externes. Au niveau de la modélisation, cela revient à augmenter l'actif en début de période du montant du trou manquant. Bien évidemment, cet appel de fonds propres externes s'inscrit dans les besoins du modèle et ne le fausse donc pas.

En adoptant cette méthodologie, on rétablit l'égalité entre l'actif et le passif, assurant ainsi la cohérence de notre modélisation.

Section 4. Entrées et sorties du modèle

1. Détail des opérations existantes

a. Participation aux Bénéfices

Cette opération est effectuée aussi bien en phase de constitution qu'en phase de restitution. Le solde de PB est évalué et affecté lors de la fin de chaque quinzaine. Plus précisément, l'évaluation et l'attribution de ce solde en phase de constitution, précède la valorisation du versement. En effet, les gains et les pertes imputables au fonds Euro-croissance ne doivent affecter que les parts ayant contribué à la réalisation de ces mêmes gains et pertes. Ainsi, il n'est pas judicieux de verser de la PB à une part qui n'a pas contribué à la création de cette PB.

b. Versement

Bien évidemment, l'adhérent ne peut effectuer de versement dans le fonds qu'en phase de constitution. De plus, tout versement effectué sur le fonds, est valorisé en fin de période. Pour être plus précis, la fréquence de valorisation étant celle de la quinzaine, chaque versement est valorisé en fin de quinzaine suivant sa réception.

c. Lissage de la provision technique de diversification

Cette opération consiste à distribuer annuellement une fraction de provision technique de diversification en phase de restitution. L'objectif d'un tel procédé est de revaloriser l'arrérage chaque année. On emploie ce mécanisme tout début de la première quinzaine de chaque année.

d. Arbitrage PTD vers PM

Cette opération qui consiste à convertir des parts de provision technique de diversification en provision mathématique peut être effectuée en phase de constitution et en phase de restitution de l'épargne. Elle est effectuée en tout début de quinzaine.

En particulier, en phase de restitution, on réalise cette opération dans l'objectif de revaloriser l'arrérage. De plus, on l'effectue en début de quinzaine après avoir réalisé le lissage de la provision technique de diversification.

e. Arrérage

Ce type de sortie ne peut avoir lieu qu'en phase de restitution. Dans la pratique, cette opération a lieu 4 ou 12 fois par an en début de quinzaine, selon que l'assuré souhaite obtenir l'arrérage trimestriellement ou mensuellement. Dans le cadre de notre modèle, on verse l'arrérage annuellement, à savoir en début de la première quinzaine de l'année.

f. Décès

Les décès sont évalués tout au long du contrat annuellement. Les décès qui concernent une année sont évalués en tout début d'année. Leur prise en compte a lieu en fin de première quinzaine de chaque année.

g. Sorties en capital et transferts

Les sorties en capital dans des cas exceptionnels (rachats totaux ou partiels) et les transferts de l'adhésion ne peuvent avoir lieu qu'en phase de constitution. De telles sorties afférentes à une année sont prises en compte en tout début d'année. Leur intégration dans les calculs a lieu en fin de première quinzaine de l'année.

2. Ordre de survenance des entrées et sorties : Cinématique des flux

Le schéma ci-dessous met en évidence l'ordre dans lequel on valorise chacune des opérations possibles.

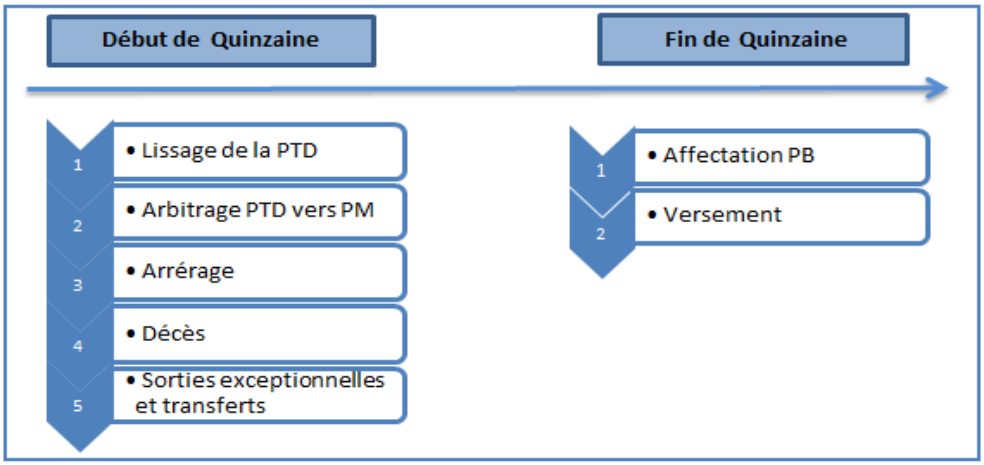

FIGURE 18 : Ordre de survenance des entrées et sorties

a. Les flux en phase de constitution

De façon plus précise, les flux qui caractérisent la phase de constitution sont : les versements, l'affectation de la participation aux bénéfices, l'arbitrage de PTD vers la PM, les prestations liées aux décès, celles liées aux sorties en capital pour les cas exceptionnels et aux transferts. L'ordre de valorisation de ces flux est mis en évidence dans le schéma ci-dessous.

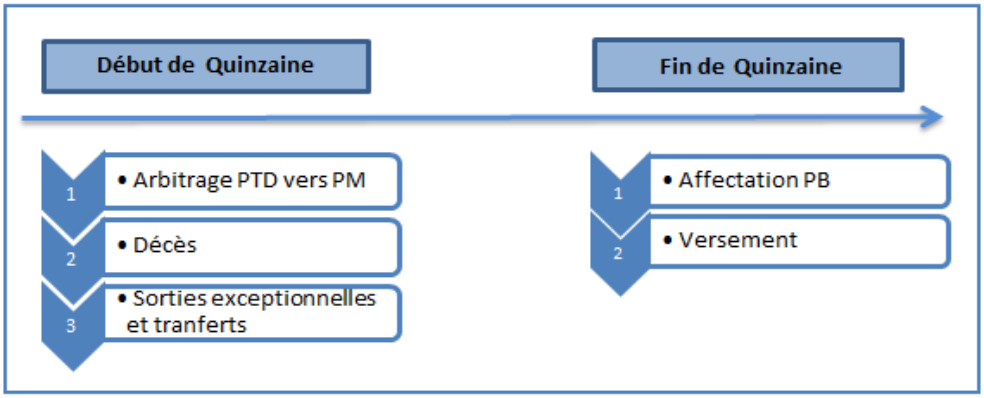

FIGURE 19 : Ordre de survenance des entrées et sorties en phase de constitution

b. Les flux en phase de restitution

Quant aux flux qui caractérisent la phase de restitution, on énumère : le lissage de la PTD, l'arbitrage de la PTD vers la PM, l'affectation de la participation aux bénéfices, les prestations liées aux arrérages et la prise en compte du nombre de décès. Leur ordre de valorisation est établi dans le schéma ci-dessous.

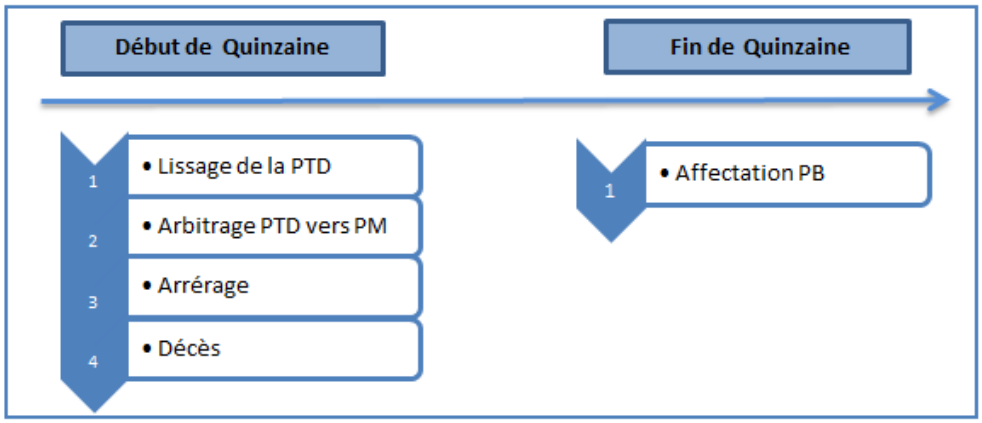

FIGURE 20 : Ordre de survenance des entrées et sorties en phase de restitution

Chapitre II. Modélisation du nombre réel de polices

La modélisation du passif consiste à évaluer les engagements de l'assureur vis-à-vis des assurés chaque période. Il s'agit donc d'évaluer l'évolution des sorties déterminées par les taux de décès et de rachats pour pouvoir en déduire l'évolution des provisions techniques au cours du temps pour l'ensemble du portefeuille : la provision mathématique (PM) et la provision technique de diversification (PTD).

En phase de constitution, les sorties prises en considération sont celles dont la cause est : le décès, le transfert ou la sortie en capital pour cas exceptionnels. Les prestations correspondent alors à la somme de la provision mathématique et de la provision technique de diversification. En phase de restitution, l'unique cause de sortie possible est le décès. Elle ne donne droit à aucune prestation. Seul le nombre de polices du modèle est impacté dans ce cas-là.

Section 1. Le décès

La survenance de décès d'un assuré en phase de constitution de l'épargne engendre le paiement d'une prestation, égale à la somme de la provision mathématique et de la provision technique de diversification à leur niveau atteint au moment du décès. Cependant, si le décès survient en phase de restitution, cela engendre l'arrêt du versement de l'arrérage. Par conséquent, en phase de constitution, il n'y a pas vraiment de risque porté par l'assureur en cas de décès de l'assuré. En effet, si l'assuré décède avant le terme, l'assureur verse simplement l'épargne au bénéficiaire à son niveau atteint au moment du décès. Il ne se préoccupe donc pas de restituer le montant garanti au terme. Par contre, en phase de restitution, le risque principal porté par l'assureur est celui d'une trop longue survie de l'assuré par rapport à ce qu'il aurait prévu le concernant. En effet, si l'assuré vit plus longtemps que prévu, l'assureur doit tout de même continuer à verser l'arrérage. On conclut donc que le risque prépondérant pour l'assureur est celui d'une trop longue survie de l'assuré. Ce raisonnement nous pousse à opter pour la table par génération des femmes TGF 00-05. En effet, les taux de mortalité des femmes sont moins élevés que ceux des hommes. Cela nous permet donc d'obtenir une vision prudente.

Dans le cadre de notre modèle, nous faisons l'hypothèse que cette table reproduit au mieux la mortalité de notre portefeuille d'assurés. Ainsi, les taux de mortalité pris en compte dans notre projection, correspondent aux q_x de la table. L'âge de l'assuré à la souscription du contrat étant indiqué en entrée, le modèle récupère le taux de mortalité pour chaque année de projection à partir de la table de mortalité. A titre de précision, on note que les décès sont supposés arriver en début d'année et les prestations associées sont réglées après la survenance.

∀ t =24n+1, avec n ∈ ℕ (c'est-à-dire chaque année)

$$D_t = NB_t^{DdP} \times {}_1q_{A_t}$$

Avec :

NB_t^{DdP} : Nombre de polices présentes dans le portefeuille en début de quinzaine t
A_t : Age de l'assuré en quinzaine t

${}_1q_{A_t}$: Probabilité pour un individu d'âge A_t de décéder dans l'année

Section 2. Le rachat

I. Définition

Le rachat est une option permettant à l'assuré, lorsqu'il l'exerce, de retirer tout ou partie de son épargne à tout moment avant la date d'échéance prévue au contrat. On parle respectivement de rachat total et de rachat partiel.

Le Code des Assurances stipule que la valeur de rachat est égale à la somme de la provision mathématique et de de la provision technique de diversification aux niveaux atteints au moment du rachat. Il est possible d'exprimer cette option comme un call américain dont on rappelle les caractéristiques : contrat permettant à son souscripteur d'acquérir l'instrument concerné appelé sous-jacent, à un prix fixé à l'avance (prix d'exercice) et à tout moment avant une date déterminée (date de maturité). Dans notre cas, l'option de rachat a pour sous-jacent la valeur courante de l'épargne.

$$max\ (PM_t + PTD_t\ ; 0)$$

II. Différents types de rachat

1. Rachats structurels

Deux facteurs principaux expliquent les taux de rachats structurels. D'une part la situation personnelle de l'assuré, notamment la dégradation de sa situation financière, mais aussi toute autre situation ou choix irrationnel des assurés. D'autre part, l'ancienneté du contrat, notamment à cause de la fiscalité, est un facteur d'augmentation du taux de rachat. En effet, la fiscalité est de plus en plus avantageuse au cours du temps. L'imposition sur le rendement du contrat est de :

- 35 % pour les sorties avant 4 ans
- 15 % pour les sorties entre 4 et 8 ans
- 7,5 % au-delà

Ainsi il est peu intéressant de racheter son contrat avant 8 ans.

Dans le cadre du produit Far, l'adhérent ne peut demander un rachat total ou partiel de son compte de retraite durant la phase de constitution, que dans l'une des circonstances prévues par l'article L. 123-23 du Code des Assurances. Cinq cas sont répertoriés dans cet article :

- Expiration des droits de l'assuré aux allocations chômage
- Cessation d'activité non salariée de l'assuré à la suite d'un jugement de liquidation judiciaire
- Invalidité de l'assuré
- Décès du conjoint ou du partenaire lié par un pacte civil de solidarité

- Situation de surendettement de l'assuré définie à l'article L. 330-1 du Code de la Consommation

Dans le cadre du produit Far que nous modélisons, seul ce type de rachat (sortie en capital pour cas exceptionnels) n'est autorisé.

2. Rachats dynamiques

Les rachats dynamiques correspondent à la somme de rachats structurels et des rachats conjoncturels. Ils ne peuvent pas être négatifs ni supérieurs à 100 %.

Par définition, les rachats conjoncturels interviennent dans un contexte fortement concurrentiel lorsque l'assuré arbitre son contrat d'assurance au profit d'autres supports financiers (produits assurantiels, bancaires ou immobiliers). En d'autres termes, ce type de rachat est une conséquence de l'écart constaté entre le taux que les assurés se sont vu servir par l'assureur et un taux dépendant de l'environnement économique.

Le rachat conjoncturel n'étant pas autorisé dans le cadre du produit Far, on n'en tient pas compte dans notre modélisation.

Section 3. Le transfert

I. Modalités de transfert

L'adhérent peut demander le transfert de son compte de retraite en cours de constitution (c'est-à-dire avant le terme prévu au contrat) vers un contrat d'assurance vie de même nature et souscrit dans le même cadre fiscal.

La valeur de transfert de l'adhésion est à tout à moment égale à la somme des deux éléments suivants, aux niveaux atteints au moment du transfert :

- Provision mathématique
- Provision technique de diversification

On remarque que la valeur de transfert est identique à la valeur de rachat.

II. Evaluation du taux de transfert

En vue de tenir compte dans notre modèle, des transferts des adhésions Far vers d'autres contrats, on se réfère à une loi de transfert des contrats Far élaborée par AXA[10]. Le calcul de cette loi a été effectué à partir du portefeuille d'AGIPI. Le taux de transfert est évalué en fonction de l'ancienneté du contrat.

[10] AXA est le porteur du risque contenu dans les contrats conçus par AGIPI.

Ancienneté	Loi de transfert "BE" FAR
1	0,31%
2	0,68%
3	1,27%
4	1,31%
5	1,03%
6	1,34%
7	1,60%
8	1,17%
9	1,31%
10	1,27%
11	1,91%
12	1,30%
13	1,90%
14	1,82%
15	1,27%
16	1,70%
17	1,80%
18	1,86%
19	1,92%
20	1,98%
21	2,04%
22	2,10%
23	2,16%
24	2,22%
25	2,28%
26	2,34%
27	2,40%
28	2,46%
29	2,52%
30	2,58%

FIGURE 21 : Loi de transfert des contrats Far

Chapitre III. Modélisation des montants totaux

Ce chapitre permet d'évaluer l'ensemble des postes du passif pour le portefeuille global. A chaque période donnée, le montant global (pour tout le portefeuille) d'un poste est donné par le produit entre le nombre de polices présent à cette période et le montant du poste pour une police éternelle.

Section 1. Phase de constitution

Les sorties (décès, transferts et sorties exceptionnels en capital) sont supposées survenir en début d'année (en début de la première quinzaine). Les prestations associées, à savoir le versement de la somme des droits individuels à l'assuré ou au(x) bénéficiaire(s) désigné(s), ont lieu immédiatement au moment de la survenance (c'est-à-dire en fin de première quinzaine). Dans cette section, on détaille le montant des prestations généré par ces sorties ainsi que son impact sur les différents postes du passif.

I. Prestations

Chaque année, le montant total des prestations engendré par l'ensemble des sorties du portefeuille est donné par la formule suivante.

∀ t =24n+1, avec n ∈ ℕ (c'est-à-dire chaque année)

$$P_t^{globale,\,FdP} = (D_t + R_t) \times \left(PM_t^{police\ éternelle,\ FdP} + PTD_t^{police\ éternelle,\ FdP}\right)$$

Avec :

D_t : Nombre de décès évalués en quinzaine t
R_t : Nombre de rachats évalués en quinzaine t

Les prestations à verser aux assurés en raison de leur sortie du portefeuille, viennent diminuer les provisions et l'actif.

II. Garantie finale et provisions techniques

1. Montant Garanti au terme

En fin de quinzaine t, le montant garanti au terme global c'est-à-dire pour tout le portefeuille, est donné par la pondération du montant garanti au terme pour une unique police « éternelle » par le nombre total de polices présentes à ce moment-là. En particulier en fin de première quinzaine d'une année, le nombre de polices tient compte des sorties, matérialisées par les taux évalués dans le chapitre précédent.

$$MGT_t^{global,\,FdP} = NB_t^{FdP} \times MGT_t^{police\ éternelle,\ FdP}$$

Avec :

NB_t^{FdP} : Nombre de personnes réellement présentes dans le portefeuille en fin de quinzaine t

2. Provisions techniques

a. Provision mathématique

De même, en fin de quinzaine t, la provision mathématique globale est donnée par l'expression suivante.

$$PM_t^{globale,\,FdP} = NB_t^{FdP} \times PM_t^{police\ éternelle,\ FdP}$$

b. Provision technique de diversification

En fin de quinzaine t, la provision technique de diversification agrégée vaut :

$$PTD_t^{globale,\,FdP} = NB_t^{FdP} \times PTD_t^{police\ éternelle,\ FdP}$$

Section 2. Phase de restitution

L'unique cause de sortie en phase de restitution est le décès de l'assuré. Cela ne génère le paiement d'aucune prestation de la part de l'assureur. L'arrêt du versement de l'arrérage constitue l'unique conséquence de la survenance d'un tel évènement. Par ailleurs, on précise que les décès sont pris en compte après le paiement des arrérages. Le paiement des arrérages ayant lieu en tout début de la première quinzaine d'une année.

De manière similaire à la section précédente, chacun des éléments du passif (PM et PTD) en date t, correspond à une combinaison entre le nombre de polices réellement présentes dans le portefeuille en date t et le poste pour une police individuelle.

I. Provision mathématique

En phase de restitution, la provision mathématique globale correspond au cumul des capitaux constitutifs de la rente de base individualisés. Pour une quinzaine donnée, on ne provisionne que pour les têtes encore présentes au sein du portefeuille. Ainsi, la provision mathématique globale est donnée par la formule ci-dessous.

$$PM_t^{globale,\,FdP} = NB_t^{FdP} \times PM_t^{police\ éternelle,\ FdP}$$

II. Provision technique de diversification

De même, lors d'une quinzaine donnée, la provision technique de diversification agrégée correspond à la somme des PTD individualisées de chacune des polices encore présentes dans le portefeuille.

$$PTD_t^{globale,\,FdP} = NB_t^{FdP} \times PTD_t^{police\ éternelle,\ FdP}$$

Partie III : Modélisation de l'Actif

Chapitre I. Spécificités de l'actif dans le cadre de l'Euro-croissance

Section 1. Cantonnement des actifs

Conformément à l'article L 142-2 du Code des Assurances, les actifs d'un contrat en euro diversifié sont cantonnés. En d'autres termes, l'ensemble des primes récoltées à provenance des adhérents vont alimenter un fonds d'actifs unique dont les gains et les pertes ne seront partagés qu'entre les adhérents du contrat. Dans ce cadre-là, une comptabilité spécifique à ce contrat doit être établie afin de satisfaire à principe de cantonnement.

De manière plus précise, la participation aux bénéfices pour ces contrats provient uniquement des actifs en représentation de ce contrat. En d'autres termes, le rendement supplémentaire servi ou retraité aux adhérents (selon que le rendement soit positif ou négatif) via la participation aux bénéfices, ne peut provenir que des actifs du fonds cantonné et ce rendement n'ira pas alimenter ou consommer la participation aux bénéfices d'autres contrats.

Section 2. Comptabilisation des actifs en valeur de marché

Dans le cadre de l'Euro-croissance, les actifs sont évalués en valeur de marché. Par conséquent, plusieurs provisions existant dans un contrat en euros disparaissent : la provision pour dépréciation durable, la réserve de capitalisation et la provision pour risque d'exigibilité. En contrepartie de cette élimination, la provision technique de diversification est créée en vue d'amortir les fluctuations de l'actif comptabilisées en valeur de marché.

On rappelle succinctement le rôle de ces provisions :

- La provision pour risque d'exigibilité (PRE) permet d'enregistrer une partie des moins-values globales d'un ensemble de placements (actifs classés R. 332-20) tels les immeubles, actions et autres valeurs à revenus variables
- La réserve de capitalisation conserve les plus-values lors de la vente d'obligations. En cas de moins-values, il est possible de puiser dans cette réserve
- La provision pour dépréciations durables (PDD) permet d'affecter en provision la différence entre la valeur d'achat et la valeur recouvrable des titres pour lesquels une dépréciation durable a été constatée

Section 3. Gestion des fonds propres

Les actifs doivent au minimum couvrir la provision mathématique et la partie garantie de la provision technique de diversification. Pour être plus précis, la partie garantie de la PTD correspond au nombre de parts contenues dans le fonds pondéré par 5 % de la valeur initiale de la part (le pourcentage de 5 % est celui spécifié dans notre modèle, il peut encore changer selon la

réglementation). Dans le cas contraire l'assureur devra compléter les actifs du fonds cantonné avec un apport de fonds propres et avertir les assurés de l'insuffisance d'actifs (Article A. 132-5-3 du Code des Assurances : Information en cas d'insuffisance d'actifs).

Section 4. Distinction « Univers Risque Neutre » et « Monde réel »

Il est important de comprendre l'univers de projection dans lequel on se place. Deux univers existent : l'univers « risque neutre » et l'univers « monde réel ».

Lorsque l'on se place dans un univers « risque neutre », nous sommes dans une logique d'évaluation selon laquelle tous les actifs ont une performance moyenne égale au taux sans risque. De ce point de vue, Les investisseurs sont supposés neutres au risque.

En univers « monde réel », l'objectif est que les simulations produites reflètent le plus fidèlement possible la réalité. Pour cela, les modèles sont calibrés sur les données historiques. On peut donc parler de projection en probabilité historique.

Le théorème de Girsanov nous permet d'établir un lien entre ces deux types de projection : la projection en probabilité historique se caractérise par l'ajout d'une prime de risque dans la dérive des processus. En effet, si un investisseur prend le risque d'investir dans des actions plutôt que dans des obligations sans risque, il est logique qu'en contrepartie la rentabilité attendue soit plus élevée.

Dans le cadre de notre modèle, les scénarios sont simulés en monde réel, c'est-à-dire sous la probabilité historique, afin de considérer la distribution réelle des paiements futurs.

Chapitre II. Modélisation de l'actif

Dans le cadre de notre modélisation, on considère un modèle simpliste où il n'y aurait que des obligations ainsi que des actions. Ainsi, la provision mathématique initiale est investie en obligations tandis que la provision technique de diversification initiale est placée en actions.

De manière générale, la proportion entre classes d'actifs n'est pas dépendante de la répartition des investissements au passif entre la provision mathématique et la provision technique diversification. En effet, on ne place pas forcément toute la provision mathématique en actif non risqué et toute la provision technique de diversification en actif risqué. Suivant l'évolution du marché financier, l'assureur peut décider d'investir comme il le souhaite, à condition évidemment de respecter les règlementations mises en place. C'est justement le rôle de l'allocation d'actifs.

Dans le cadre des contrats conçus par AGIPI, c'est AXA qui s'occupe d'allouer l'actif entre les différentes classes possibles. Après communication par AGIPI à AXA de la valeur de la provision mathématique à chaque arrêté des comptes, AXA s'occupe d'allouer l'actif de manière optimale. Dans notre modèle, on adopte une stratégie d'allocation d'actifs dont on explicite ici le contenu.

Section 1. Stratégie d'allocation d'actifs statique

La stratégie d'allocation d'actifs implémentée dans notre modèle est celle du rebalancement annuel des actifs vers une même allocation fixe. Cette stratégie consiste à conserver chaque période le même pourcentage d'actifs pour chaque classe d'actifs. L'allocation initiale étant fixée par la proportion de la PM initiale et de la PTD initiale en pourcentage du versement net initial. Chaque fin de période, on effectue des rebalancements afin que les actifs se retrouvent dans leur proportion initiale. Du fait que les actifs conservent à chaque pas de projection la même allocation, cette stratégie est qualifiée d'allocation statique.

Section 2. Modélisation de l'actif sans risque

La provision mathématique est couverte à l'actif par des obligations sans risque. On modélise donc des investissements en obligations sans risque à taux fixe ne délivrant pas de coupons (zéro-coupon), de maturités déterminées de façon à minimiser l'écart de duration actif-passif. Par définition, l'obligation à taux fixe est un instrument de dette assorti d'un taux d'intérêt qui donne droit au versement d'intérêts, à fréquence prédéterminée (au terme uniquement dans le cas des zéro-coupons). Il s'agit de l'obligation la plus répandue en finance.

En ce qui concerne la maturité des obligations à choisir en phase de constitution, nous avons envisagé l'option suivante : à chaque versement, on achète des obligations de maturité égale à la durée séparant la date actuelle et le terme du contrat.

Quant aux zéro-coupon à acheter en début de phase de restitution, on peut prendre pour maturité la duration du passif évaluée sur la phase de restitution. Dans ce cadre-là, il nous faut donc mesurer la duration du passif en vue d'en déduire la maturité des obligations à acheter.

I. Duration

On appelle duration la mesure qui permet d'évaluer la date moyenne des sorties de flux financiers d'un portefeuille. Mathématiquement, la duration est exprimée ainsi :

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{t(i) \times F_i}{(1+\tau_i)^{t(i)}}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{F_i}{(1+\tau_i)^{t(i)}}}$$

Avec :

N : Nombre total de périodes
F_i : Flux financier en date $t(i)$
$t(i)$: Durée en nombre d'années séparant l'année i et $t(i)$
τ_i : Taux d'actualisation de l'année i

La duration correspond donc à la moyenne des durées des flux financiers, pondérées par la valeur actualisée de ces mêmes flux financiers. Cet indicateur est très utilisé en gestion actif-passif, l'objectif étant d'ajuster la duration de l'actif et du passif.

II. Rendement des obligations

Le rendement annuel des obligations est estimé de façon déterministe, à partir de l'indice obligataire TECn où n correspond à la maturité de l'obligation considérée.

Section 3. Modélisation de l'actif risqué

Dans le cadre de notre modèle, l'actif risqué est constitué d'un ensemble d'actions dont les fluctuations sont modélisées de manière stochastique.

I. Présentation générale du modèle de Black-Scholes

Le modèle de Black-Scholes, publiée en 1973, est le modèle de référence pour la modélisation de l'évolution du cours des actions.

1. Hypothèses du modèle

Le modèle Black-Scholes repose sur un certain nombre d'hypothèses :

- Les marchés sont parfaits et efficients
- Aucun frais de courtage n'est prélevé

- Les variations du cours du sous-jacent sont réparties suivant une loi log normale. Cette hypothèse est correcte en première approximation.
- Le taux sans risque μ du sous-jacent est constant
- La volatilité σ du sous-jacent est constante

Sous les hypothèses énoncées ci-dessus, Black et Scholes proposent de modéliser la trajectoire du prix d'une action ne versant pas de dividende par un mouvement brownien géométrique donné par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu d_t + \sigma dB_t^P$$

Avec :

S_t : Valeur de l'action à la date t
μ : Rendement instantané de l'action
σ : Volatilité des actions
$(B_t^P)_{t\geq 0}$: Mouvement brownien standard sous la probabilité historique P
B_t^P : Variable réelle de loi normale centrée de variance t

2. Solution du modèle

Cette équation différentielle stochastique, de condition initiale $S_0 > 0$, admet une unique solution donnée par le brownien :

$$S_t = S_0 \, exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t^P\right)$$

On peut donc en déduire le rendement de l'actif entre deux pas de temps consécutifs l et t, tels que t > l :

$$S_t = S_l \, exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-l) + \sigma(B_t^P - B_s^P)\right)$$

Avec :

$(B_t^P)_{t\geq 0}$: Mouvement brownien standard sous la probabilité historique P
$B_t^P - B_s^P$: Variable réelle de loi normale centrée de variance (t-s)

Cette solution montre que le processus des prix est log-normal. Par ailleurs les rendements logarithmiques $R(t)$ sont indépendants et identiquement distribués suivant une loi normale.

$$R(t) = ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) \sim N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right)$$

II. Hypothèses retenues

Les hypothèses de ce modèle sont très restrictives : continuité des trajectoires, constance de la volatilité, log-normalité des rendements, etc. Un certain nombre d'observations empiriques contredisent manifestement ces hypothèses : les prix sautent soudainement, la volatilité n'est pas constante. Par conséquent, on considèrera que le rendement instantané des actions varie dans le temps.

Concernant les actions, nous supposons également que :

- La compagnie peut acheter et vendre sans frais de transactions autant d'actions qu'elle souhaite
- Les titres peuvent êtres non entiers

III. Calibration du modèle

Etant donné que nous nous plaçons dans l'univers monde réel, le rendement instantané des actions μ est égal au taux sans risque augmenté d'une prime de risque. Le taux sans risque est obtenu à partir de la projection déterministe de l'indice obligataire TECn. La valeur choisie pour la prime de risque des actions est 3 %. Donc le taux de rendement instantané utilisé en date t vaut $\mu_t = r_t + 3\ \%$.

La volatilité des actions, notée σ, a été fixée à 22 %. Ce choix est arbitraire mais respecte les ordres de grandeur de la volatilité de ce type d'actifs observée sur le marché.

Partie IV : Résultats et analyses

Chapitre I. Equilibre Actif-Passif

Tous les éléments du bilan sont comptabilisés en valeur de marché. La partie Actif comprend l'ensemble des actifs du fonds cantonné avec leur niveau en fin de chaque quinzaine. La partie Passif comprend les deux provisions du produit : la PM et la PTD.

Ici encore il est primordial de s'assurer que le bilan est équilibré chaque année et donc une vérification annuelle est mise en place pour s'assurer que l'Actif est égal au Passif.

Section 1. Phase de constitution

Dans le cadre de notre modèle, on évalue le bilan à chaque pas de projection. En prenant l'exemple d'un versement initial de 1000 euros par un assuré âgé de 39 ans à la souscription. On place la provision mathématique initiale dans de l'actif non risqué (en obligations) et la provision technique de diversification dans de l'actif risqué (actions). Lors de chaque début et fin de quinzaine, on vérifie l'égalité entre l'actif et le passif.

A titre d'exemple, on élabore le bilan du fonds Euro-croissance pour les dix premières années.

Année	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quinzaine	24	48	72	96	120	144	168	192	216	240
ACTIF										
Obligations	579	593	608	624	639	655	671	688	705	723
Actions	407	432	459	486	515	545	577	610	645	681
Total Actif	**986**	**1026**	**1067**	**1110**	**1154**	**1200**	**1248**	**1298**	**1350**	**1404**
PASSIF										
PM	579	591	602	615	627	639	652	665	678	692
PTD	407	435	464	495	527	561	596	633	672	712
Total Passif	**986**	**1026**	**1067**	**1110**	**1154**	**1200**	**1248**	**1298**	**1350**	**1404**
Vérification Bilan	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK

FIGURE 22 : Exemple de bilan du fonds sur les 10 premières années de la phase de constitution

Section 2. Phase de restitution

Dans le cadre de notre modélisation, la provision mathématique relative à la rente viagère est gérée sur le fonds Euro-croissance. La revalorisation des arrérages est donc assurée par la conversion d'une partie des parts de PTD en PM chaque année.

Par ailleurs, comme nous l'avons évoqué plus haut, en phase de restitution, on est confronté à un décalage entre les considérations de mortalité qui engendre un déséquilibre actif-passif. Autrement dit, si on retranche à l'actif chaque année l'arrérage certain, la provision mathématique diminue moins vite que l'actif entre deux années consécutives. En effet, la provision mathématique diminue d'un montant inférieur à celui de l'arrérage car son calcul tient compte de la mortalité entre deux années successives tandis que l'actif diminue exactement du montant de l'arrérage. Deux solutions possibles ont été envisagées pour rétablir cet l'équilibre :

- Le retrait à l'actif d'un arrérage probabilisé (par la mortalité éventuelle entre l'âge au terme et l'âge au moment du versement de l'arrérage)
- Le retrait à l'actif de l'arrérage certain (non probabilisé)

Même si nous avons tenu compte de ces deux alternatives dans notre modèle, la seconde s'avère plus efficace d'un point de vue pratique, dans la mesure où l'on obtient des arrérages non probabilisés et qui peuvent faire l'objet d'analyse (comme nous le ferons dans le chapitre 3 de cette même partie). Toutefois, cette seconde alternative engendre une insuffisance à l'actif qu'il nous faut combler par un appel de fonds propres externes. Notons bien que cet appel de fonds propres externes s'inscrit dans les besoins du modèle.

Etant donné la complexité de notre modélisation, la vérification de son adéquation actif-passif s'avère primordiale. C'est pour cette raison que l'on établit le bilan du fonds à chaque pas de projection.

Dans la continuité du cas particulier énoncé plus haut, voici un extrait du bilan des 10 premières années en phase de restitution. On précise que ce bilan a été établi en début année soit en même temps que l'opération d'appel de fonds propres externes. Le choix du début d'année s'inscrit donc dans une visée illustrative du mécanisme d'appel de fonds propres externes.

Année	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Quinzaine	**1**	**25**	**49**	**73**	**97**	**121**	**145**	**169**	**193**	**217**
ACTIF										
Actif avant appel de fonds	2530	2532	2537	2540	2541	2540	2535	2529	2519	2506
Appel de fonds	0	5	6	6	7	7	8	8	8	9
Total Actif	**2530**	**2537**	**2543**	**2546**	**2548**	**2547**	**2543**	**2537**	**2527**	**2515**
PASSIF										
PM	2213	2173	2167	2169	2171	2170	2167	2162	2155	2145
PTD	317	364	376	377	377	377	376	375	372	370
Total Passif	**2530**	**2537**	**2543**	**2546**	**2548**	**2547**	**2543**	**2537**	**2527**	**2515**
Vérification Bilan	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK

FIGURE 23 : Exemple de bilan en phase de restitution

Au travers du bilan établi à chaque pas de projection, on conclut que l'équilibre actif-passif est bien vérifié à chaque date.

Chapitre II. Phase de constitution : indicateurs de rentabilité

Dans ce chapitre, on s'intéresse à apprécier la performance du contrat Euro-croissance du point de vue de l'assuré en phase de constitution. Autrement dit, il s'agit d'évaluer la rémunération de l'assuré au terme de cette première étape. Par ailleurs, on évalue le risque porté par l'assureur durant cette phase.

Au terme de cette phase, l'assuré acquiert un arrérage de base correspondant à la somme de deux fractions de rente. La première est associée au montant garanti au terme de l'ensemble des versements effectués sur le fonds. La seconde est liée à la PTD à son niveau atteint au terme du contrat. Le montant de l'arrérage de base dépendra donc fortement du niveau atteint par la PTD au terme, du fait que la fraction liée au MGT est connu et fixée d'avance.

Dans le cadre de cette analyse, nous émettons les hypothèses suivantes :

- Date de projection : 1er Janvier 2014
- Age à la souscription : 39 ans
- Age de conversion du capital en rente : 65 ans
- Versement initial et unique : 1000 €
- Taux de frais sur versement : 5 %
- Taux technique : 1,25 %
- Taux d'actualisation en phase de constitution : projection déterministe à partir de l'indice obligataire TECn
- Rendement des obligations : déterminé à partir de l'indice obligataire TECn
- Rendement des actions : projection stochastique avec le modèle de Black-Scholes (Le taux sans risque à chaque pas de projection est variable et est projeté de manière déterministe à partir de l'indice obligataire TECn. La prime de risque des actions est fixée à 3 % et leur volatilité à 22 %.)
- Allocation de l'actif statique : elle est fixe tout au long du contrat
- Mode de distribution de la PB : Revalorisation de la valeur de la part

Section 1. Les indicateurs de rentabilité

Au terme de la phase de constitution, on calcule les droits acquis par l'assuré en termes de provisions. Si l'on note N la durée de la phase de constitution en nombre d'années, ces droits acquis sont donnés par la somme de la provision mathématique et de la provision technique de diversification à leur niveau atteint au terme du contrat. Formellement, ces droits sont donnés par la formule suivante :

$$CC_N = PM_N + PTD_N$$

Cette somme est déterminante dans la mesure où son niveau déterminera à la fois le montant de l'arrérage de base et le montant de la provision technique de diversification initiale en phase de restitution. Autrement dit, elle matérialise la performance du contrat sur la phase de constitution.

I. Taux de rendement interne

En guise de première approche, il peut être intéressant d'évaluer le taux de rendement interne (TRI) de la moyenne des droits acquis par l'assuré en euros au terme de la phase de constitution. Ce taux est un indicateur de rentabilité pour l'assuré. Il permet de mesurer la vraie rentabilité du capital investi.

Si l'on définit l'investissement sur le fonds Euro-croissance par une série de cash-flows C_i, i ∈ $\{0, \dots, N\}$ (avec N la durée de la phase de constitution en nombre d'années), le TRI est le taux actuariel r pour lequel la somme des cash-flows actualisés positifs et négatifs est nulle. Mathématiquement, le TRI satisfait l'équation suivante :

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{C_i}{(1+r)^i} = 0$$

Dans le cadre de notre exemple, il y a au total deux flux, à savoir :

- Un flux initial sortant correspondant au versement brut effectué par l'assuré
- Un flux final entrant correspondant aux droits acquis par l'assuré exprimés en euros

II. Probabilité d'apport de fonds propres

Cet indicateur s'avère intéressant du point de vue de l'assureur car il lui permet d'évaluer le risque qu'il porte. Il s'agit du nombre de scénarios pour lequel l'assureur a dû effectuer un appel de fonds propres externes rapporté au nombre de scénarios total.

Section 2. Sensibilité des indicateurs aux paramètres

I. Sensibilité des indicateurs à la proportion garantie au terme

Dans le cadre de notre modèle, la proportion du versement net garantie au terme du contrat étant de 100 %, la provision mathématique à l'échéance du contrat est donc forcément égale au versement initial net de frais. Au terme du contrat, l'assuré récupère donc de manière sûre le versement net investi sur le fonds. Il peut être intéressant d'observer l'impact d'une diminution de la garantie au terme sur le TRI de la moyenne des droits acquis par l'assuré au terme du contrat ainsi que sur la probabilité d'apports de fonds propres par l'assureur.

On souhaite donc étudier la sensibilité du TRI de la moyenne des droits acquis par l'assuré en termes de provisions à la proportion du versement net de frais garantie au terme. Ainsi, pour chaque proportion garantie, nous générons donc 1000 scénarios des droits acquis par l'assuré au terme du contrat. Puis, à partir de la moyenne de ces 1000 scénarios, nous évaluons le taux de rendement interne correspondant. Afin d'évaluer le risque porté par l'assureur dans chaque cas de figure, on évalue la probabilité d'apport de fonds propres externes sur ces 1000 scénarios.

Le nombre de scénarios à effectuer dans chacun des cas de figure traités devrait idéalement être très élevé. Cependant dans la pratique, on choisit ce nombre de manière à réduire le temps de calcul et obtenir des résultats qui soient robustes.

Quelle que soit la proportion garantie, l'allocation en obligations est fixée à 70 % et celle en actions à 30 %. Les résultats obtenus sont reportés dans le graphique suivant.

Proportion du versement net garantie au terme	TRI de l'espérance des droits acquis au terme	Probabilité d'apport de fonds propres
80%	3,73%	0,00%
85%	3,55%	0,00%
90%	3,78%	0,00%
95%	3,72%	0,50%
100%	3,75%	1,00%

FIGURE 24 : Evolution du TRI et de la probabilité d'apport de fonds en fonction de la proportion garantie

Il apparait clairement que la probabilité d'apport de fonds propres s'annule dès lors que la proportion du versement net, garantie au terme, diminue. Lorsque le pourcentage garanti au terme est égal à 100 %, cette probabilité vaut 1 %, soulignant le fait que la provision technique de diversification est insuffisante et ne permet pas d'absorber la totalité des chocs à l'actif. Autrement dit, elle ne joue pas son rôle d'amortisseur.

Quant au taux de rendement interne de la moyenne des droits acquis par l'assuré au terme, on ne note pas de tendance particulière. Toutefois une diminution de l'engagement en euros (par exemple 90 % du versement net) permettrait à la fois d'optimiser la performance du contrat et d'amoindrir le risque d'appel de fonds propres externes par l'assureur.

II. Sensibilité des indicateurs à la stratégie d'allocation d'actif

A présent, on fige la proportion du versement net garanti au terme à 100 % pour pouvoir évaluer la sensibilité des indicateurs à la stratégie d'allocation d'actifs. Dans ce cadre-là, les proportions initiales d'obligations et d'actions ne sont pas déterminées en fonction de la proportion de la PM et de la PTD initiales en pourcentage du versement net initial, mais de manière arbitraire.

Cinq cas d'allocations d'actifs ont été traités, à savoir :

- 50 % obligations / 50 % actions
- 60 % obligations / 40 % actions
- 70 % obligations / 30 % actions
- 80 % obligations / 20 % actions
- 90 % obligations / 10 % actions

Pour chaque allocation testée, on génère 1000 scénarios des droits acquis par l'assuré au terme, dont on évalue la moyenne pour déduire le TRI correspondant. On calcule également la probabilité d'apport de fonds propres externes dans chaque cas de figure.

Allocation Obligations / Actions	TRI de l'espérance des droits acquis au terme	Probabilité d'apport de fonds propres
50 % / 50 %	4,15%	6,00%
60 % / 40 %	3,93%	3,50%
70 % / 30 %	3,62%	0,50%
80 % / 20 %	3,26%	0,00%
90 % / 10 %	3,22%	0,00%

FIGURE 25 : Evolution du TRI et de la probabilité d'apport de fonds en fonction de l'allocation d'actifs

Au travers des résultats obtenus, il apparait clairement que le taux de rendement interne de la moyenne des droits acquis par l'assuré au terme du contrat croît à mesure que la proportion investie en actions est élevée. Autrement dit, l'espérance de rendement du portefeuille est d'autant plus grande que la proportion investie en actions est élevée. Toutefois, le risque pour l'assureur de devoir apporter des fonds propres externes va également de pair avec la proportion investie en actions.

Chapitre III. Phase de restitution : analyse de la revalorisation des rentes

Avant la mise en place de l'Euro-croissance sur le produit Far, le système en vigueur prévoyait de gérer la provision mathématique relative à la rente viagère sur le fonds en euros afin d'assurer sa revalorisation chaque année. Dans le cadre de l'intégration du support Euro-croissance sur ce produit, on décide de placer cette provision mathématique sur le fonds Euro-croissance, générant ainsi une nouvelle provision technique de diversification et donc un second et nouvel Euro-croissance propre à la phase de restitution.

En plaçant la provision mathématique relative à la rente viagère sur le fonds Euro-croissance plutôt que sur le fonds en euros, l'objectif évidemment recherché est celui d'obtenir une meilleure revalorisation des rentes. Sinon l'intérêt d'un tel procédé serait totalement nul. Un indicateur qui pourrait être intéressant afin d'évaluer la performance des rentes est celui du rendement annuel moyen observé entre le début et la fin de la phase de restitution (la fin de la phase de restitution coïncidant en moyenne avec l'espérance de vie de l'assuré).

Dans le cadre de ce chapitre, nous proposerons une analyse de la « qualité » de revalorisation des rentes sur le fonds Euro-croissance, basée sur une approche déterministe. Autrement dit, nous émettrons des hypothèses de rendement à l'actif constant tout au long de la projection afin de simplifier au mieux le modèle et pouvoir ainsi tirer des conclusions significatives et pertinentes.

Section 1. Sensibilité de la revalorisation des rentes à l'arbitrage PTD vers PM

I. Impact de l'arbitrage sur la revalorisation des rentes

Conformément à la réglementation, à une année donnée, la conversion de parts de provision technique de diversification en provision mathématique n'est autorisée que dans la limite suivante :

$$PTD_t - PTD_t^{Garantie} > 20\,\% \times PM_t$$

Pour analyser l'impact créé sur la revalorisation des rentes par le fait d'arbitrer de la PTD vers la PM, il serait intéressant dans un premier temps, de comparer l'évolution des arrérages dans deux cas de figure extrêmes :

- Avec arbitrage annuel de la PTD vers la PM dans la limite maximale autorisée
- Sans arbitrage

Afin d'établir une telle comparaison, on émet les hypothèses suivantes :

- Rendement annuel de l'actif : 3,5 %
- Taux d'actualisation annuel : 2 %
- Taux technique des rentes : 1,25 %

- Age de souscription : 39 ans
- Age au terme : 65 ans
- Versement initial unique : 1000 €

Ces hypothèses sont supposées constantes tout au long de la projection.

Par ailleurs, le nombre total d'arrérages à verser entre l'âge au terme de l'assuré et l'âge correspondant à son espérance de vie, est noté n. Dans le cas particulier énoncé ci-dessus, ce nombre vaut 30 ($n = 30$).

A partir des hypothèses émises, on simule à l'aide de notre modèle le montant des 30 arrérages à verser dans chaque cas de figure étudié : avec et sans arbitrage. On représente ensuite les deux séries d'arrérages obtenues dans le graphe ci-dessous.

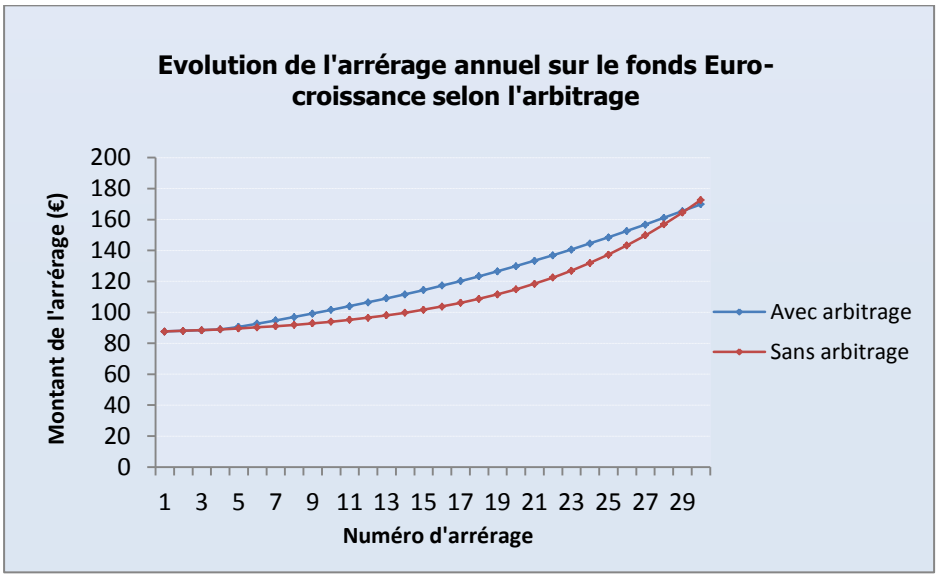

FIGURE 26 : Evolution des arrérages en fonction de l'arbitrage

D'après le graphique ci-dessus, on remarque que l'opération d'arbitrage annuelle dans la limite maximale autorisée (20 %) a pour effet d'augmenter le montant annuel des arrérages de manière très considérable.

II. Paramétrage du pourcentage de la contrainte d'arbitrage

Dans le cadre d'un Euro-croissance en phase de service des rentes, l'unique mode de revalorisation des arrérages est celui de la distribution de parts de PTD chaque année (obtenue par conversion de parts de PTD en PM). Afin d'assurer la croissance des arrérages avec le temps, on se doit de lisser la distribution de la fraction de PTD calculée au titre de chaque année. Cela a pour effet de cumuler une grande part de la PTD jusqu'à la fin de la vie de l'assuré et d'amoindrir la revalorisation de ses arrérages. Pour pallier au mieux à ce problème l'idée serait de convertir chaque année le maximum de parts de PTD autorisées par la réglementation afin d'assurer une revalorisation intéressante du point de vue de l'assuré. Etant donné que les textes qui concernent l'encadrement de la phase de restitution ne sont pas encore sortis, on pourrait envisager que la

restriction quant au nombre de parts de PTD seuil à arbitrer en PM, soit moins forte en phase de restitution qu'en phase de constitution.

C'est pourquoi, on décide de paramétrer le pourcentage contenu dans la contrainte liée à l'arbitrage de la PTD vers la PM, afin d'observer l'effet sur la revalorisation des arrérages d'une variation de ce pourcentage.

Pour étudier la sensibilité de la revalorisation des arrérages au pourcentage défini précédemment, on établit l'indicateur suivant : le rendement annuel moyen des arrérages. Il correspond à la moyenne des taux de croissance annuel moyen (TCAM) observé entre le premier arrérage et chacun des arrérages versés jusqu'à l'espérance de vie.

Ainsi, pour un pourcentage de la contrainte d'arbitrage fixé (noté P), on simule la série des n arrérages versés. Puis, pour chaque i $\in \{2, \dots, n\}$, on calcule le TCAM observé entre le premier arrérage (arrérage de base) et le i^{ème} arrérage.

Pour $P \in [0\,\%; 100\,\%]$fixé, $\forall$ i $\in \{2, \dots, n\}$,

$$TCAM_i^P = \left(\frac{R_i^{Certain}}{R_1^{Certain}}\right)^{\left(\frac{1}{i-1}\right)} - 1$$

Avec :

$R_1^{Certain} = R_1^{Probabilisé} = Rente_{Base}$
$R_i^{Certain}$: i^{ème} arrérage versé

On effectue ensuite la moyenne de l'ensemble des taux de croissance annuelle moyen obtenus pour chaque échéance. Cette moyenne matérialise le rendement annuel moyen de la série des arrérages simulée.

$$\overline{TCAM}^P = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} TCAM_i^P$$

Afin d'observer la tendance du rendement annuel moyen des arrérages en fonction de la valeur du pourcentage de la contrainte d'arbitrage, on reporte les résultats obtenus dans le graphique suivant :

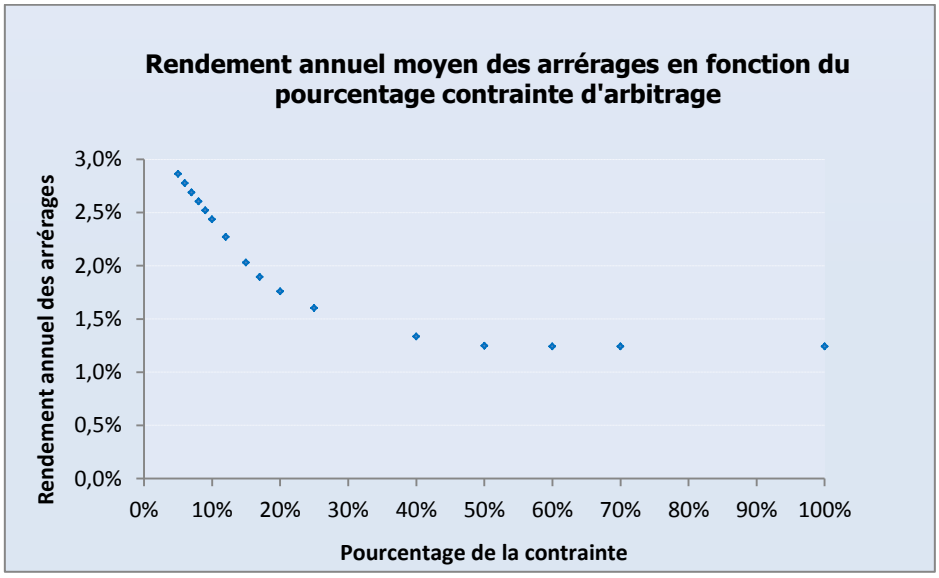

FIGURE 27 : Rendement annuel moyen des arrérages selon le pourcentage de la contrainte d'arbitrage

On constate que plus le pourcentage liée à la contrainte sur la conversion de parts de PTD en PM est élevé, et plus le rendement annuel moyen des rentes diminue. En d'autres termes, moins il est possible de convertir de parts de PTD et moins la revalorisation des arrérages est intéressante du point de vue de l'assuré.

Au-delà de 60 %, le rendement annuel moyen des arrérages se stabilise à 1,24 %, matérialisant le fait qu'aucun arbitrage de PTD vers la PM n'est possible du fait de la réglementation trop stricte.

Un autre indicateur pour évaluer la qualité de revalorisation en fonction du pourcentage de la contrainte d'arbitrage serait le cumul des rentes. On représente dans le graphe ci-dessous le cumul des arrérages en fonction du pourcentage P.

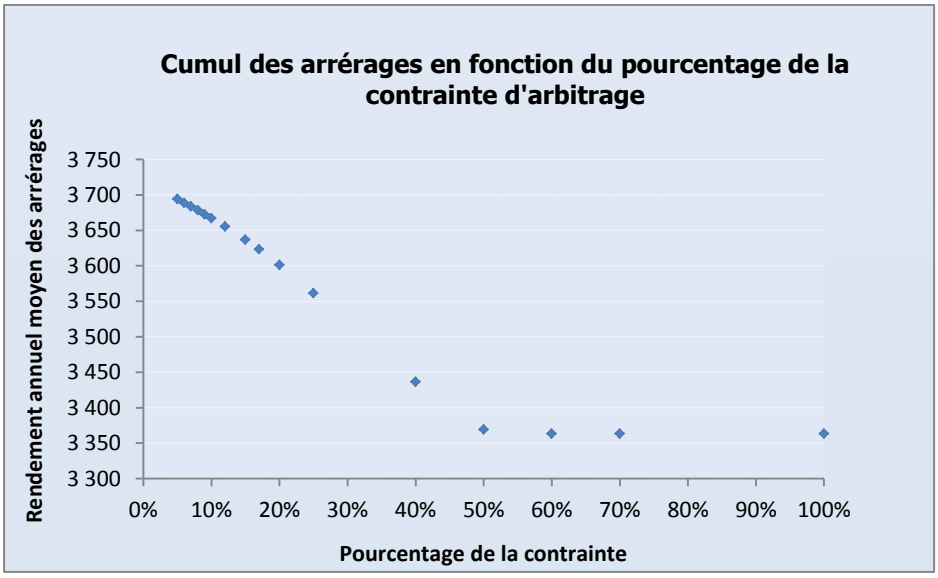

FIGURE 28 : Cumul des arrérages en fonction du pourcentage de la contrainte d'arbitrage

On remarque clairement que le cumul des arrérages est d'autant plus élevé que le pourcentage de la contrainte d'arbitrage est faible.

A la lumière des indicateurs présentés, on déduit qu'en phase de restitution, l'opération d'arbitrage de PTD vers la PM, en plus de celle du lissage de la PTD contribue grandement à la revalorisation des rentes. Afin de pouvoir revaloriser les arrérages de manière considérable sans être restreint par la contrainte qui concerne l'arbitrage de la PTD vers la PM, l'idéal serait que la réglementation soit moins stricte en phase de restitution.

Section 2. Fonds Euro-croissance vs fonds euros

I. Rendement de l'actif identique sur les deux fonds

En plaçant la provision mathématique relative à la rente viagère sur le fonds Euro-croissance plutôt que sur le fonds en euros, la finalité recherchée est évidemment d'assurer une meilleure revalorisation des arrérages.

Ainsi, il peut être intéressant d'observer ce qu'il se passe si l'on suppose un rendement annuel de l'actif sur le fonds Euro-croissance identique au rendement annuel du fonds en euros. On reprend les mêmes hypothèses que celles émises dans la précédente section, à savoir :

- Rendement annuel de l'actif : 3,5 %
- Taux d'actualisation annuel : 2 %
- Taux technique des rentes: 1,25 %
- Age de souscription : 39 ans
- Age au terme : 65 ans
- Versement initial unique : 1000 €

En admettant que la provision mathématique soit placée sur le fonds en euros, la provision mathématique serait donc calculée en tenant compte du taux technique de la rente. En effet, à une date donnée t, elle correspondrait au capital constitutif de la rente viagère au taux technique. Le rendement annuel effectif des arrérages serait donc donné par la différence entre le taux de rendement du fonds en euros et le taux technique des rentes. Ainsi, pour simuler le montant des arrérages futurs sur le fonds en euros, il suffit de capitaliser l'arrérage de base au taux correspondant à la différence entre le taux de rendement du fonds en euros et le taux technique de l'arrérage de base. Mathématiquement, cela s'écrit :

$\forall$ i $\in \{1, \dots, n\}$,

$$R_i^{Fonds\ euros} = Rente_{Base} \times (1 + \partial - \rho)^{i-1}$$

Avec :

$Rente_{Base}$: Montant de l'arrérage de base (initial)
∂ : Taux de rendement annuel du fonds en euros
ρ : Taux technique de l'arrérage de base

Le graphique suivant représente l'évolution des arrérages sur le fonds en euros et sur le fonds Euro-croissance. En particulier, pour ce qui concerne le fonds Euro-croissance, on simule l'évolution des arrérages dans deux cas de figure : avec arbitrage annuel de la PTD vers la PM dans la limite maximale autorisée (par la réglementation actuelle) et sans arbitrage.

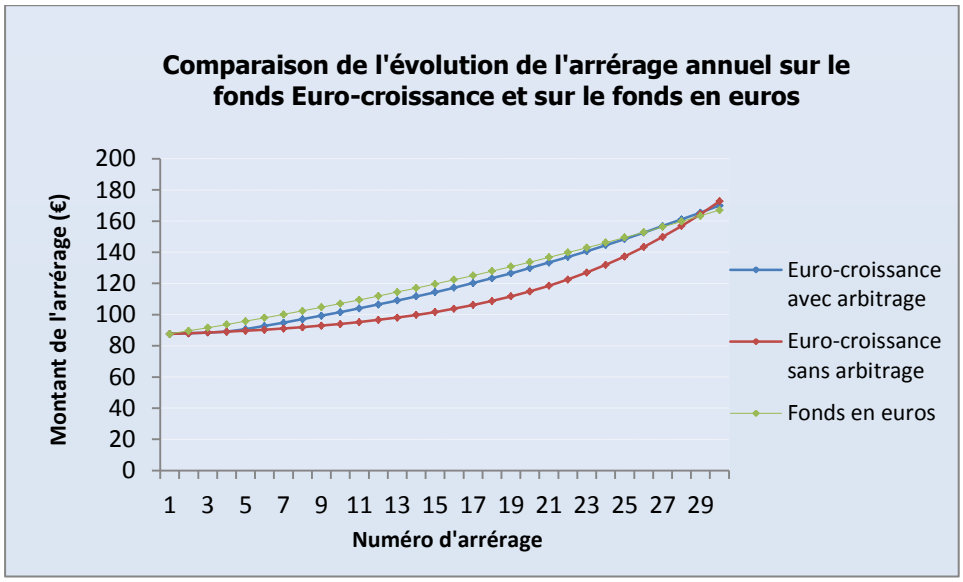

FIGURE 29 : Comparaison de l'évolution des arrérages sur le fonds en euros et sur le fonds Euro-croissance

A taux de rendement identique, on remarque que la valeur des arrérages sur le fonds en euros dépasse celle des arrérages sur le fonds en Euro-croissance, et ce, que l'on arbitre de la PTD vers la PM ou non.

Etant donné ces constats, étudions l'impact que pourrait engendrer un assouplissement de la contrainte d'arbitrage de la PTD vers la PM. Autrement dit, observons les conséquences d'une variation à la baisse du pourcentage de la contrainte d'arbitrage sur le rendement annuel moyen des arrérages.

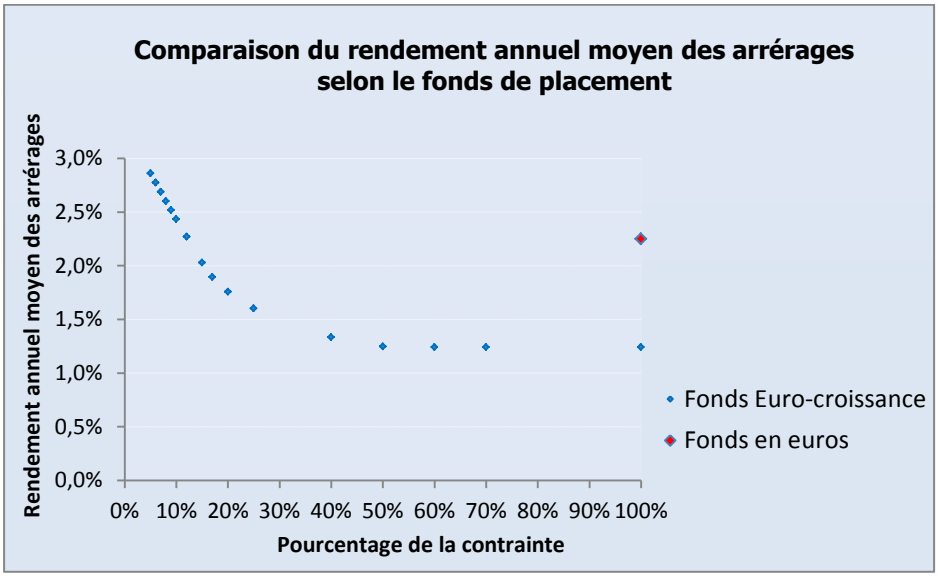

FIGURE 30 : Comparaison du rendement annuel moyen des arrérages sur le fonds en euros et sur le fonds Euro-croissance

Tout d'abord, notons que sur le graphique, on a associé le rendement annuel moyen des arrérages sur le fonds en euros à un pourcentage de la contrainte d'arbitrage égal à 100 %. Cela est volontaire dans la mesure où on veut signifier qu'il n'y a pas d'arbitrage possible dans le cadre du fonds en euros (puisque qu'il n'y a qu'une seule provision, à savoir la PM).

Par ailleurs, on remarque que le rendement annuel moyen des arrérages sur le fonds Euro-croissance est très sensible au pourcentage de la contrainte d'arbitrage. En effet, pour ramener le niveau de rendement sur l'Euro-croissance à celui du fonds en euros, il faudrait légèrement diminuer le pourcentage de la contrainte d'arbitrage. Cela reviendrait donc à assouplir la restriction quant au nombre parts seuil à arbitrer.

De plus, en diminuant légèrement le pourcentage lié à la contrainte d'arbitrage, le rendement annuel moyen des arrérages sur le fonds Euro-croissance dépasse sensiblement celui observé sur le fonds en euros. D'où l'intérêt de revoir à la baisse la valeur du pourcentage de la contrainte d'arbitrage.

II. Euro-croissance : Meilleure espérance de rendement

En plaçant la provision mathématique relative à la rente viagère sur le fonds Euro-croissance plutôt que sur le fonds en euros, la finalité recherchée est évidemment de « profiter » de la meilleure espérance de rendement de l'actif sur le fonds Euro-croissance par rapport à celle du fonds en euros, pour pouvoir garantir une meilleure revalorisation des arrérages.

Dans cette logique-là, on pourrait envisager un scénario dans lequel le rendement de l'actif sur le fonds Euro-croissance serait supérieur au rendement observé sur le fonds en euros. Il serait alors intéressant de confronter la tendance du rendement annuel moyen des arrérages sur le fonds en euros à celle des arrérages placés sur le fonds Euro-croissance. Dans ce cadre-là, nous émettons les hypothèses supplémentaires suivantes :

- Rendement annuel de l'actif sur le fonds Euro-croissance : 4 %

- Rendement annuel de l'actif du fonds en euros : 3,5 %

Sous les hypothèses émises, comparons dans un premier temps l'évolution des arrérages sur le fonds en euros et sur le fonds Euro-croissance en tenant compte de deux cas de figure : avec arbitrage annuel de la PTD vers la PM dans la limite maximale autorisée et sans arbitrage.

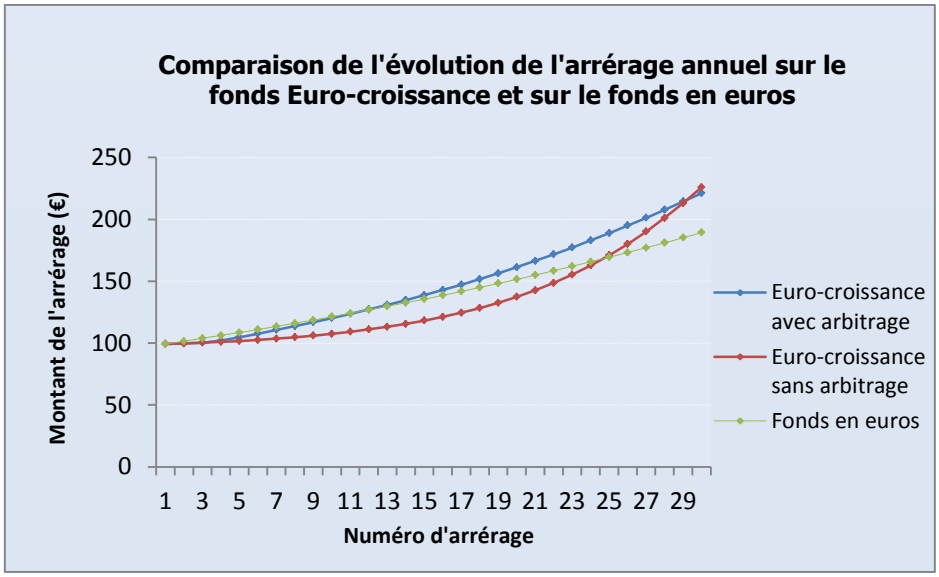

FIGURE 31 : Comparaison de l'évolution des arrérages sur le fonds Euro-croissance et sur le fonds euros

Même pour un taux de rendement à l'actif de l'Euro-croissance supérieur à celui du fonds euros, la seule opération de lissage de PTD ne suffit pas à garantir une revalorisation des arrérages sur le fonds Euro-croissance qui soit à minima égale à celle sur le fonds en euros. Le graphique ci-dessus illustre donc clairement la contribution de l'opération d'arbitrage de parts de PTD en PM dans la qualité de revalorisation des arrérages.

A présent, étudions l'impact d'une variation du pourcentage lié à la contrainte d'arbitrage sur le rendement annuel moyen des arrérages.

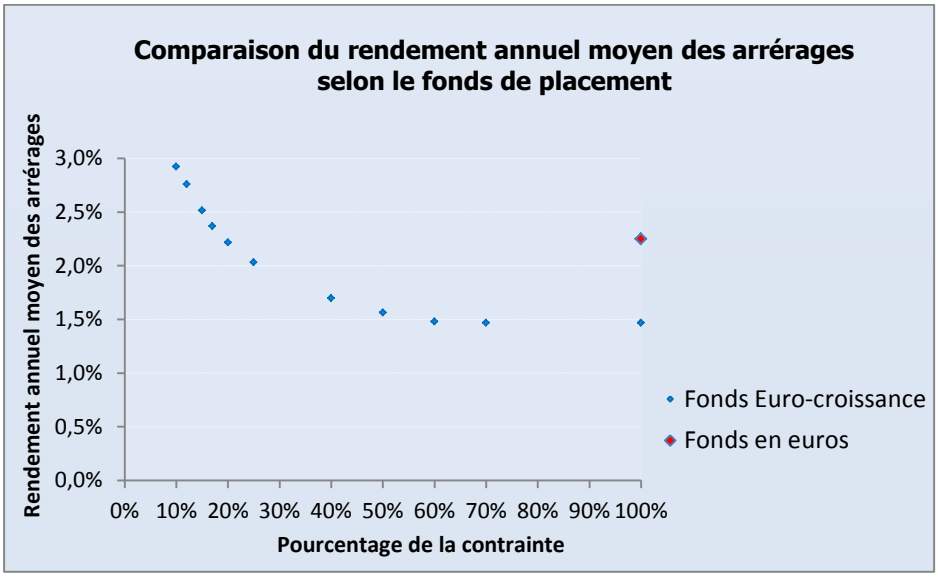

FIGURE 32 : Comparaison du rendement annuel moyen des arrérages selon le fonds de placement et selon le pourcentage de la contrainte d'arbitrage

Si l'on se réfère à l'état actuel de la contrainte d'arbitrage (pourcentage de 20 %), le rendement annuel moyen des arrérages sur le fonds Euro-croissance est de 2,22 %, c'est-à-dire légèrement inférieur à celui offert par le fonds en euros, qui lui est de 2,25 %. Toutefois, si l'on ramène pourcentage de la contrainte d'arbitrage à 17 %, le rendement annuel moyen des arrérages sur le fonds Euro-croissance dépasse celui garanti sur le fonds euros.

Bien évidemment, plus le rendement de l'actif sur l'Euro-croissance est élevé par rapport à celui du fonds en euros et moins il est nécessaire d'arbitrer de parts de PTD vers la PM pour assurer un meilleur rendement annuel moyen des arrérages sur l'Euro-croissance que sur le fonds en euros. Autrement dit, il n'est pas forcément utile de diminuer le pourcentage de la contrainte d'arbitrage dans un tel cas de figure.

En conclusion, cette contrainte d'arbitrage de la PTD vers la PM joue un rôle capital dans la revalorisation des arrérages sur le fonds Euro-croissance. Certes, l'objectif recherché au travers de cette contrainte est de maintenir un seuil suffisant de provision technique de diversification à chaque période, étant donné qu'elle constitue une source de rendement potentiel. Mais en phase de restitution, le but primordial, n'est-il pas avant tout de restituer une rente optimale aux assurés plutôt que d'espérer encore et toujours plus de rendement futur dont la probabilité de pouvoir le reverser s'amoindrit à mesure que l'on avance dans le temps ?

Il s'agit donc de trouver un compromis entre rendement futur potentiel de l'Euro-croissance et qualité de revalorisation actuelle des arrérages. Le souci en phase de restitution n'étant pas tant d'assurer un meilleur rendement futur mais plutôt de distribuer le rendement actuel aux assurés sous forme de revalorisation des arrérages.

Par ailleurs, n'oublions pas que la nécessité de l'opération d'arbitrage pour l'optimisation de la revalorisation des arrérages nait du fait, que la fraction de PTD distribuée au titre d'une année doit être lissée sur la durée de vie restante de l'assuré, afin d'assurer la croissance des arrérages dans le temps. C'est pourquoi, lors de chaque année, on doit arbitrer un nombre de parts de PTD suffisamment élevé pour éviter le cumul d'une trop grande part de PTD jusqu'à la fin de la vie de l'assuré.

Conclusion

Le principal résultat de ce mémoire réside dans la modélisation de la phase de restitution de l'épargne sur le fonds Euro-croissance. A savoir la gestion de la provision mathématique relative à l'arrérage acquis au terme de la phase de constitution sur le fonds Euro-croissance, ainsi que sa revalorisation annuelle par conversion de parts de provision technique de diversification en provision mathématique.

L'étude stochastique a quant à elle permis de mettre en évidence la sensibilité de la performance du contrat Euro-croissance à la stratégie d'allocation d'actifs initiale et au pourcentage du versement net garanti au terme.

Hormis les analyses stochastiques, l'étude déterministe a mis en exergue le fait que, la réalisation d'une seconde phase Euro-croissance lors du service des rentes ne peut être intéressante en termes de la qualité de revalorisation des arrérages, uniquement s'il est possible d'arbitrer suffisamment de provision technique de diversification vers la provision mathématique.

Certes, l'espérance de rendement annuel moyen des arrérages devrait à priori être plus élevée sur le fonds Euro-croissance que sur le fonds en euros. Toutefois, cette espérance de rendement sur le fonds Euro-croissance est fortement conditionnée par la contrainte d'arbitrage de la provision technique de diversification vers la provision mathématique. Car quand bien même l'espérance de rendement du fonds Euro-croissance peut être importante, la revalorisation des arrérages ne va pas forcément de pair. En effet, le rendement potentiel étant contenu dans la provision technique de diversification, la revalorisation des arrérages va dépendre de la part de cette provision qui sera distribuée chaque année. Or, la distribution d'une fraction de PTD au titre d'une année doit être lissée sur la durée de vie restante de l'assuré afin d'assurer la croissance des arrérages dans le temps. Cela a pour effet d'amoindrir la revalorisation des arrérages.

Donc si parallèlement à cet objectif de croissance des arrérages, la réglementation est trop restrictive en matière d'arbitrage de la provision technique de diversification vers la provision mathématique, la revalorisation des arrérages sur le fonds Euro-croissance pourrait s'avérer insuffisante par rapport à celle garantie sur le fonds en euros, et cela uniquement lors des périodes où le rendement de l'actif sur l'Euro-croissance serait particulièrement bas. L'intérêt de la réalisation d'un nouvel Euro-croissance en phase de restitution serait donc limité.

Certes l'objectif de la contrainte d'arbitrage s'inscrit dans la conservation d'un seuil suffisant de la provision technique de diversification non garantie vu que cette dernière constitue un moteur de performance. Mais il semblerait qu'en phase de restitution le souci principal de l'assureur soit de restituer à l'assuré un arrérage optimal.

Finalement, l'idéal serait de déterminer à chaque période la part de provision technique de diversification à arbitrer qui permette de garantir à la fois un meilleur rendement futur du fonds et l'optimalité en termes de revalorisation actuelle des arrérages.

Glossaire

Courbe des taux
La structure par terme des taux d'intérêt (ou courbe des taux) est la fonction qui, à une date donnée, associe pour chaque maturité le niveau du taux d'intérêt.

Déterministe
L'approche de modélisation déterministe suppose une relation fonctionnelle entre les variables observées.

Provision pour participation aux excédents (PPE)
Les assureurs ne sont pas obligés de distribuer immédiatement la participation aux bénéfices (PB) prévue par la législation, ils ont huit ans pour le faire. La partie non distribuée de la PB vient alimenter un compte de provision, appelé provision pour participation aux excédents.

Stochastique
L'approche de modélisation stochastique considère que les observations sont des réalisations d'une variable aléatoire.

Taux technique (d'une rente)
Il s'agit du taux de revalorisation minimum garanti de la rente sur lequel s'engage un assureur pour un contrat d'assurance.

Terme
Date marquant la fin du contrat. Il s'agit également de la date de conversion du capital en rente.

TME
C'est le taux de rendement sur le marché secondaire des emprunts d'État à taux fixe supérieurs à 7 ans. Cet indice sert de référence pour le calcul des taux techniques maxima utilisables pour les opérations d'assurance vie. Il est publié mensuellement.

Table des illustrations

FIGURE 1 : Evolution du TME depuis 1970 17
FIGURE 2 : Fonctionnement de l'Euro-croissance 21
FIGURE 3 : Calcul de la PM et de la PTD initiales en phase de restitution 23
FIGURE 4 : Revalorisation des arrérages par conversion de parts de PTD en PM 23
FIGURE 5 : Calcul initial de la PM et de la PTD en phase de constitution 28
FIGURE 6 : Bilan du contrat en quinzaine 1 33
FIGURE 7 : Courbe des taux zéro-coupon au 1er Janvier 2014 37
FIGURE 8 : Processus de projection des TME 37
FIGURE 9: Projection de la courbe des taux ZC pour les pas 1, 2, 3 et 4 38
FIGURE 10 : Projection des taux d'actualisation 39
FIGURE 11: Moyenne mensuelle des taux TEC en Janvier 2014 40
FIGURE 12: Interpolation linéaire sur la courbe des taux TEC 41
FIGURE 13: Courbe des taux TEC à quatre pas de projection 42
FIGURE 14: Courbe des taux forward TEC pour le pas 8 42
FIGURE 15 : Courbes des taux forward TEC projetées avant interpolation linéaire 43
FIGURE 16 : Exemple d'affectation de la PB sous les trois formes possibles 50
FIGURE 17 : Revalorisation des arrérages par lissage de la PTD et arbitrage de PTD en PM 55
FIGURE 18 : Ordre de survenance des entrées et sorties 64
FIGURE 19 : Ordre de survenance des entrées et sorties en phase de constitution 65
FIGURE 20 : Ordre de survenance des entrées et sorties en phase de restitution 65
FIGURE 21 : Loi de transfert des contrats Far 69
FIGURE 22 : Exemple de bilan du fonds sur les 10 premières années de la phase de constitution 81
FIGURE 23 : Exemple de bilan en phase de restitution 82
FIGURE 24 : Evolution du TRI et de la probabilité d'apport de fonds en fonction de la proportion garantie 85
FIGURE 25 : Evolution du TRI et de la probabilité d'apport de fonds en fonction de l'allocation d'actifs 86
FIGURE 26 : Evolution des arrérages en fonction de l'arbitrage 88
FIGURE 27 : Rendement annuel moyen des arrérages selon le pourcentage de la contrainte d'arbitrage 90
FIGURE 28 : Cumul des arrérages en fonction du pourcentage de la contrainte d'arbitrage 90
FIGURE 29 : Comparaison de l'évolution des arrérages sur le fonds en euros et sur le fonds Euro-croissance 92
FIGURE 30 : Comparaison du rendement annuel moyen des arrérages sur le fonds en euros et sur le fonds Euro-croissance 93
FIGURE 31 : Comparaison de l'évolution des arrérages sur le fonds Euro-croissance et sur le fonds euros 94
FIGURE 32 : Comparaison du rendement annuel moyen des arrérages selon le fonds de placement et selon le pourcentage de la contrainte d'arbitrage 95

Bibliographie

Articles

[1] BERGER K., LEFEBVRE D. (2013), « Rapport au premier ministre : Dynamiser l'épargne financière des ménages pour financer l'investissement et la compétitivité ».

[2] DONIO M., PLANCHET F. (2009), « Variable annuities et contrats euro diversifiés : quelle place en assurance vie ? », *La tribune de l'Assurance*, 2009, n°139, p. 50-51.

Ouvrages

[1] COHEN A. (2006) « *Comprendre les nouveaux contrats d'assurance diversifiés pour apprécier leurs perspectives de développement* ». Altia.

[2] HULL J. (2008) « *Options, futures et autres actifs dérivés* ». 6ème édition. Pearson Education.

Cours

[1] GADENNE S. (2013-2014) *Modélisation actuarielle.*

Mémoires

[1] CHEMINAIS P., DUMONTROTY H. (2005) *Les contrats diversifiés*. CEA.

[2] GUILLOTIN G. (2011) *Analyse des contrats d'assurance vie diversifiés.* Dauphine.

[3] HAZAEL-MASSIEUX P. (2013) *Etude des leviers d'optimisation du besoin en capital et de la rentabilité des contrats en euro diversifié sous Solvabilité 1 et 2. Application aux contrats Euro-croissance.* EURIA.

[4] MOLINES A.S. (2010) *Eurodiversifié : une possibilité d'améliorer l'espérance de rentabilité des assurés ?* ISUP.

Sites internet

[1] http://www.strategies-options.com/fic/154-representation-du-mouvement-d-un-actif-financier.html

[2] http://www.yats.com/doc/fixed-income-tp-002-statements.pdf

[3] http://assurance-vie.lesdossiers.com/fiches-pratiques/definition-lexique-assurance-vie

[4] http://www.actuaries.org/AFIR/Colloquia/Rome/Lam_Barbier.pdf

[5] http://www.institutdesactuaires.com/gene/main.php?base=379

[6] http://blog.bforbank.com/fiscalite/tag/Euro-croissance/

[7] https://www.banque-france.fr/economie-et-statistiques/changes-et-taux/les-indices-obligataires.html