



**HAL**  
open science

# L'ORSA : approche par générateur de scénarios économiques non-paramétriques

Augustin Monnery

► **To cite this version:**

Augustin Monnery. L'ORSA : approche par générateur de scénarios économiques non-paramétriques. Gestion des risques [q-fin.RM]. 2014. dumas-01073579

**HAL Id: dumas-01073579**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01073579>**

Submitted on 10 Oct 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# L'ORSA :

Approche par générateur de scénarios

économiques non-paramétrique

## Table des matières

|                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------|----|
| Remerciements .....                                                     | 4  |
| Résumé.....                                                             | 5  |
| Abstract .....                                                          | 6  |
| Introduction.....                                                       | 7  |
| I. Contexte .....                                                       | 10 |
| 1. Solvabilité II .....                                                 | 10 |
| a. Pilier 1 : Exigences quantitatives .....                             | 10 |
| b. Pilier 2 : Exigences qualitatives et surveillance prudentielle ..... | 13 |
| c. Pilier 3 : Information publique et reporting prudentiel .....        | 14 |
| 2. L'ORSA : Pièce centrale du pilier 2 .....                            | 15 |
| a. Généralités .....                                                    | 15 |
| b. Les trois dimensions de l'ORSA .....                                 | 17 |
| i. Évaluation du besoin global de solvabilité .....                     | 17 |
| ii. Écart par rapport à la formule standard.....                        | 18 |
| iii. Respect permanent des exigences de capital .....                   | 20 |
| c. La démarche du groupe Tuillet.....                                   | 21 |
| II. Données de travail et hypothèses .....                              | 23 |
| 1. Activité de l'organisme.....                                         | 23 |
| 2. Situation économique initiale .....                                  | 24 |
| 3. Business Plan .....                                                  | 27 |
| III. Générateur de scénarios économiques .....                          | 29 |
| 1. Principes généraux d'un GSE .....                                    | 29 |
| a. Approche paramétrique .....                                          | 29 |
| b. Approche non-paramétrique .....                                      | 31 |
| c. Méthode de Monte-Carlo .....                                         | 35 |
| d. Pseudo-aléatoire ou quasi-aléatoire ? .....                          | 37 |
| 2. Risque action .....                                                  | 47 |
| a. Approche non-paramétrique .....                                      | 47 |
| b. Mouvement brownien géométrique.....                                  | 49 |
| c. <i>Backtesting</i> .....                                             | 55 |
| 3. Risque de taux .....                                                 | 59 |
| a. Approche non-paramétrique .....                                      | 59 |
| b. Modèle de Cox-Ingersoll-Ross .....                                   | 61 |
| c. Comparaison des prix des zéros coupons .....                         | 68 |

|                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------|-----|
| IV. Besoin global de solvabilité .....                         | 69  |
| 1. Problématique.....                                          | 69  |
| 2. Risque action .....                                         | 70  |
| 3. Risque de taux .....                                        | 73  |
| 4. Risque de spread .....                                      | 77  |
| 5. Risque immobilier.....                                      | 80  |
| 6. Risque santé non-SLT .....                                  | 82  |
| 7. BSCR et risque opérationnel.....                            | 85  |
| 8. Distribution du ratio de couverture .....                   | 89  |
| 9. Distribution du ratio Sinistres à Primes.....               | 93  |
| V. Écart par rapport à la formule standard.....                | 94  |
| 1. Problématique.....                                          | 94  |
| 2. Risque action .....                                         | 95  |
| 3. Risque de taux .....                                        | 96  |
| 4. Risque de spread .....                                      | 97  |
| 5. Risque immobilier.....                                      | 98  |
| 6. Risque santé non-SLT .....                                  | 99  |
| 7. Risque opérationnel .....                                   | 100 |
| 8. Corrélations entre les risques.....                         | 101 |
| 9. Limite de la formule standard .....                         | 103 |
| 10. Conclusion .....                                           | 104 |
| VI. Respect permanent des exigences de capital .....           | 105 |
| 1. Problématique.....                                          | 105 |
| 2. Résultats.....                                              | 106 |
| VII. Vers un générateur semi-paramétrique.....                 | 108 |
| 1. Prise en compte de la dépendance entre les variations ..... | 108 |
| 2. Correction par chocs locaux via loi de Pareto .....         | 109 |
| 3. Correction par chocs locaux via chaîne de Markov.....       | 111 |
| 4. Impacts sur le risque Action .....                          | 114 |
| Conclusion .....                                               | 116 |
| Bibliographie.....                                             | 117 |
| Table des figures.....                                         | 118 |
| Table des tableaux.....                                        | 119 |

## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Jérôme Sander, responsable de l'entité Tuillet Actuariat pour m'avoir permis d'effectuer mon stage final au sein du cabinet Tuillet. Au cours de ces quelques mois, il a pu me transmettre sa vision du milieu de l'actuariat et m'apprendre beaucoup. Je suis très reconnaissant d'avoir eu l'opportunité de pouvoir travailler sur un sujet aussi original et nouveau.

Mes remerciements vont à l'équipe Actuariat, Edouard, Fabien, François et Matthieu qui ont su répondre à mes questions et m'épauler durant toute la durée du stage ainsi qu'aux personnes travaillant dans les autres entités du cabinet Tuillet, que ce soit l'équipe Risk & Management, Système d'Information ou encore Audit pour leur accueil chaleureux.

Je remercie également Monsieur Jean Modry pour avoir accepté d'être mon tuteur universitaire et pour m'avoir orienté dans la rédaction du mémoire. Sa disponibilité et sa qualité d'expertise m'ont été très précieuses durant ce stage.

Je tiens également à remercier l'ensemble des professeurs et intervenants de l'Université de Strasbourg pour leur enseignement durant ces trois années de formation.

Merci à ma famille, mes amis et camarades de promotion pour leur présence et support durant mon cursus universitaire. Je remercie tout particulièrement mes parents pour la confiance qu'ils m'accordent et leur soutien immuable.

Enfin une pensée émue pour Dominique Neuburger, parti bien trop tôt.

## Résumé

La nouvelle directive européenne Solvabilité II posera de nouveaux standards pour les acteurs du marché de l'assurance. Solvabilité II a pour objectif principal de renforcer la solvabilité des organismes assureurs via une meilleure évaluation de leurs risques.

Le pilier 2 de la directive via l'*ORSA* prescrit aux entreprises d'établir une évaluation interne des risques et de la solvabilité. L'*ORSA* doit être vu comme un processus décisionnel dans lequel l'impact des choix stratégiques de l'entreprise est reflété sur le niveau de solvabilité et ce d'une manière prospective. L'*ORSA* se décompose en trois calculs : le besoin global de solvabilité, la mesure de l'écart de profil de risque par rapport à la formule standard et le respect permanent des exigences réglementaires.

Pour réaliser un *ORSA*, une entreprise doit pouvoir projeter sa situation économique sur tout l'horizon de son *Business Plan*. Pour se faire, elle doit donc développer un outil de projection. L'objet de ce mémoire est de présenter une approche pour répondre aux besoins de l'*ORSA*.

Nous présenterons dans ce mémoire un générateur de scénarios économiques non-paramétrique qui nous permettra de projeter les différentes variables qui influent sur la solvabilité de l'entreprise considérée. Ce générateur de scénarios s'appuie sur une technique de tirage aléatoire qui rappelle le *Bootstrap* non-paramétrique.

Comme toutes méthodes de projection stochastique, ce générateur repose sur des nombres aléatoires. Une étude comparative entre les nombres pseudo-aléatoires et quasi-aléatoires sera effectuée afin de déduire quels sont les nombres aléatoires les plus adaptés à notre générateur.

Le générateur ainsi obtenu nous permettra de répondre aux trois dimensions de l'*ORSA* et cela notamment via l'étude du niveau du ratio de solvabilité.

## Abstract

The new European directive Solvency II will set standards for all the actors of the insurance market. The main objective of Solvency II is to strengthen the insurers' solvency through a better assessment of their risks.

The pillar 2 of the directive, by the ORSA, requires companies to establish an internal risk assessment and solvency. ORSA should be seen as a decision-making process in which the impact of strategic choices of the company is reflected in the level of solvency and in a prospectively way. The ORSA process is divided into three calculations : the overall solvency needs, the measuring of the difference in risk profile compared to the standard formula assumption and a continuous compliance with the regulatory capital requirements.

To produce an ORSA, the company must be able to project its economic situation throughout the duration of its Business Plan. To do so, it must develop a forecasting tool. The purpose of this paper is to present an approach to meet the needs of the ORSA process.

We will present in this paper a non-parametric generator for economic scenarios that will allow us to project the different variables that affect the solvency of the company. This generator is based on a random draw technique reminiscent the non-parametric Bootstrap.

Like all methods of stochastic projections, the generator is based on random numbers. A comparative study between pseudo-random numbers and almost-random numbers will be presented to infer which are the most suitable for our generator.

The generator thus obtained allows us to address all three dimensions of the ORSA process and this particularly through the study of the level of the solvency ratio.

## Introduction

À partir du 1<sup>er</sup> Janvier 2016 la directive Solvabilité II entre en vigueur, les assureurs établis en Europe devront répondre à de nouvelles exigences prudentielles. Ce changement de référentiel de solvabilité a occupé les acteurs du monde de l'assurance depuis plus de dix ans et continuera d'être au cœur des problématiques actuarielles pendant encore des années. L'*EIOPA*<sup>1</sup> souhaite créer un environnement dans lequel les assureurs européens pourront être comparés au niveau de leur solvabilité et ce d'une manière équitable et réfléchie. Un véritable changement de philosophie apparaît : l'approche est désormais fondée sur des grands principes plutôt que sur des règles figées qui ne prenaient pas assez en compte les spécificités de l'activité d'assureur, l'objectif étant d'amener les entreprises à mieux appréhender et gérer leurs risques.

Solvabilité II prescrit dans son deuxième pilier une approche interne du risque et de la solvabilité : l'*ORSA*<sup>2</sup>. Ce processus d'analyse des risques, propre à l'organisme, doit être vu comme un outil de gestion par le pilotage de la solvabilité et de l'exposition aux risques inhérents à l'activité de l'entreprise. C'est aujourd'hui le sujet qui occupe la majorité des assureurs car l'*ORSA* est un exercice nouveau et complexe. L'*ORSA* est un dispositif transversal qui s'attache à l'appréhension interne des risques et à la projection de l'activité afin d'en déduire la santé financière au regard de la solvabilité et ce au moment de la projection mais aussi dans le futur. Afin de produire un rapport *ORSA* probant et de qualité, l'organisme doit pouvoir répondre aux trois dimensions de l'*ORSA* :

- L'évaluation du besoin global de solvabilité
- La mesure de l'écart de profil de risque par rapport à la formule standard
- Le respect permanent des exigences de capital

Il faut donc que l'organisme adopte une vision prospective de sa solvabilité, qui dépendra de l'évolution de son activité et reposera sur les hypothèses intrinsèques du *Business Plan* retenu par son conseil d'administration.

---

<sup>1</sup> *European Insurance and Occupational Pensions Authority*

<sup>2</sup> *Own Risk and Solvency Assessment*



L'*ORSA* repose sur une prise en compte du profil de risque propre à l'entreprise et sur une identification précise des risques internes et externes que ce soit à court ou à long terme.

Ce mémoire a pour objectif de présenter une approche originale pour l'*ORSA* via un générateur de scénarios économiques non-paramétrique qui permettra de projeter l'activité de l'entreprise et les risques sous-jacents afin de répondre aux attentes de l'ACPR<sup>1</sup>. De nombreux acteurs utilisent aujourd'hui des modèles mathématiques complexes afin de projeter l'environnement de taux ou le cours des actifs financiers ; un générateur de scénarios économiques non-paramétrique permet de projeter de façon aléatoire les variables cibles qui sont sous-jacentes aux risques auxquels l'organisme assureur est exposé mais cela sans faire appel à ces modèles sophistiqués.

Dans un premier temps, le contexte dans lequel ce mémoire prend place sera présenté. La deuxième partie du mémoire portera sur le descriptif de l'entreprise pour laquelle un *ORSA* sera effectué. La troisième partie représente le cœur du mémoire, elle développera l'approche retenue pour le générateur de scénarios économiques. Ensuite la quatrième partie traitera du besoin global de solvabilité. La cinquième partie présentera les résultats obtenus pour la mise en évidence d'écart avec la formule standard. Enfin la sixième partie établira si le maintien des exigences de capital est respecté durant la durée du *Business Plan*. Pour finir, la septième partie présentera des évolutions possibles pour le générateur.

---

<sup>1</sup> Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution

*« Markets can remain irrational a lot  
longer than you and I can remain solvent. »*

A. Gary Shilling<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Forbes, 1993

# I. Contexte

## 1. Solvabilité II

### a. Pilier 1 : Exigences quantitatives

Le pilier 1 de la directive Solvabilité II a pour objectif de définir les règles quantitatives. Ces règles donnent des standards d'évaluation, que ce soit pour les actifs, les passifs ou les besoins réglementaires de solvabilité. La différence par rapport à Solvabilité I réside dans l'évaluation *Market Consistent*<sup>1</sup> et non plus en valeur comptable des différents postes du bilan : la représentation du bilan est désormais économique et la transparence au niveau de la solvabilité de l'organisme est améliorée. La valorisation des actifs est par conséquent immédiate et correspond à la valeur de marché des actifs à la date de clôture du bilan, c'est l'approche *Mark-to-Market*. S'il n'existe pas de cotation, nous pouvons utiliser l'approche *Mark-to-Model* afin d'obtenir une valeur de l'actif qui sera estimée par un modèle.

En ce qui concerne les provisions techniques : il est imposé aux assureurs d'avoir la « meilleure vision » de leurs engagements et non plus une vision prudente comme il était d'usage avec Solvabilité I. Pour se faire, nous considérons que la valeur des provisions techniques correspond à la valeur de transfert immédiat des engagements de l'assureur entre deux parties parfaitement informées et consentantes. Deux cas de figure sont alors possibles :

- Les contrats sont dits *hedgeable*<sup>2</sup>, ce qui signifie que la chronique de flux de passif peut être répliquée par la détention d'une combinaison d'actifs financiers. Nous pouvons en déduire que la valeur économique de ce passif est égale à la valeur de marché de la combinaison d'actifs qui le réplique par relation d'équivalence. La provision technique pour ce type de risque est appelée valeur de transfert. Peu de

---

<sup>1</sup> Evaluation cohérente avec les marchés financiers, qui rejoint la notion de Faire Value des normes IFRS.

<sup>2</sup> Couvrable

contrats entrent dans cette catégorie, il s'agit notamment des contrats en unités de comptes.

- Les contrats sont dits *non-hedgeable*, ce qui signifie qu'il n'existe pas d'instruments financiers permettant d'approcher correctement la chronique de flux. Il faut alors scinder l'évaluation de la provision technique en deux parties. Considérons la valeur *Best Estimate* des passifs qui est égale à la moyenne pondérée des futurs cash-flows probables actualisés. À ce *Best Estimate* s'ajoute une *Risk Margin* qui représente le coup d'immobilisation de capital qui correspond aux SCR liés à la détention de ces contrats. En effet, comme nous le verrons dans le prochain point, détenir des contrats d'assurance génère des obligations en termes de niveau de fonds propres. Cette *Risk Margin* est vue comme le montant additionnel qu'un repreneur éventuel pourrait exiger lorsqu'il récupère les obligations envers les assurés qu'un autre assureur lui aurait cédées.

Le pilier 1 définit également les exigences en matière de fonds propres qui découlent de l'activité de l'assureur. Deux niveaux de capital seront à déterminer :

- Le *MCR*<sup>1</sup> qui représente le niveau minimal de capital requis. Il est issu d'un calcul simple, qui est une fonction linéaire des provisions techniques, primes, capitaux sous risques, impôts et frais. Cette formule est calibrée sur la base d'une perte maximale possible de fonds propres à un horizon d'un an et associée à un niveau de confiance de 80 %. En dessous de ce seuil, l'autorité de contrôle peut infliger des sanctions lourdes à l'entreprise qui transgresse ces règles prudentielles comme par exemple le retrait d'agréments qui permettent à l'entreprise de commercialiser des contrats d'assurance.
- Le *SCR*<sup>2</sup> qui représente un montant de capital qui correspond à une perte maximale possible de fonds propres à un horizon d'un an et associée à un niveau de confiance de 99,5 %. Ce *SCR* prend en compte les principaux risques quantifiables via des sous-modules de risques. Il est possible de calculer ce montant soit par l'utilisation de la formule standard (avec ou sans *USP*<sup>3</sup>) soit par un modèle interne (total ou partiel). Le *SCR* est défini par une structure en arbre puisque nous considérons un montant de

---

<sup>1</sup> *Minimum Capital Requirement*

<sup>2</sup> *Solvency Capital Requirement*

<sup>3</sup> *Undertaking Specific Parameters*

fonds propres au global qui provient de sous-montants réglementaires liés à chaque branche d'activité.

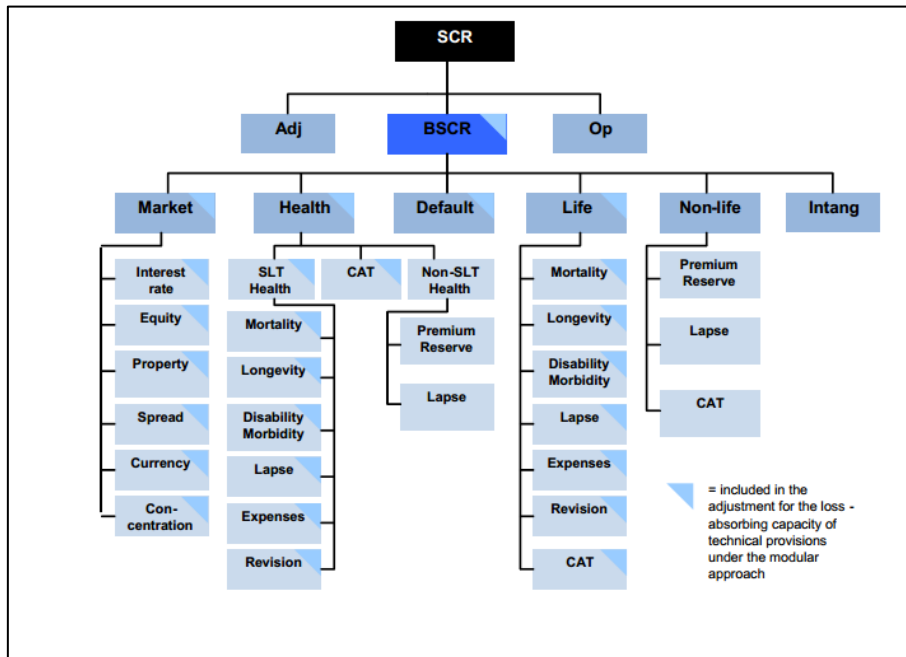


Figure 1 – Cartographie des risques dans Solvabilité II (EIOPA 30/04/2014)

Dans un troisième temps, le pilier 1 définit les règles d'éligibilité des éléments de capital. Les fonds propres disponibles par l'organisme assureur sont égaux à la différence entre l'actif et le passif, cette différence est appelée actif net. En fonction de la qualité des éléments de fonds propres qui correspondent à cet actif net, ils sont classés dans des Tiers. Cette classification repose sur 5 critères : subordination, capacité d'absorption, permanence, perpétuité et absence de charges financières. Il existe des contraintes sur les éléments de fonds propres qui vont être mis en couverture des montants réglementaires, ces limites quantitatives au niveau des proportions sont fixées en fonction de la classification des actifs, que ce soit pour le SCR ou pour le MCR.

## b. Pilier 2 : Exigences qualitatives et surveillance prudentielle

Le pilier 2 de la directive définit les exigences en matière de gouvernance. La directive Solvabilité II prescrit la mise en place d'un système de gouvernance efficace, qui garantit une gestion saine et prudente de l'activité via le pilotage de la solvabilité à travers le respect des exigences de capital.

Pour respecter ces exigences, il faut que l'entreprise d'assurance fonctionne selon un schéma clair, établi comme suit :

- Donner à l'AMSB<sup>1</sup> un rôle central en qualité de superviseur du processus ORSA
- Définir des fonctions clés ainsi qu'une séparation des responsabilités
- Avoir des processus décisionnels et de contrôle interne
- Disposer d'un système efficace de transmission d'information et de données
- Produire une documentation interne écrite sur les procédures d'organisation

Ces exigences sont les bases nécessaires pour que les entreprises puissent mettre en place un système de gestion des risques efficace. Il faut pouvoir déceler, déclarer, mesurer et gérer les risques et cela en permanence, que ce soit au niveau groupe ou au niveau individuel.

Ce système de gestion des risques doit dépasser le pilier 1. En effet l'approche ne se limite plus aux risques considérés dans la formule standard mais à tous les risques supportés par l'entreprise, qu'ils soient matériels ou non, quantifiables ou non. Les entreprises doivent démontrer qu'elles adoptent une attitude de « personne prudente » face aux risques qu'elles supportent. Le pilier 2 encourage donc les entreprises à adopter une vision ERM<sup>2</sup> afin qu'elles soient en mesure d'apprécier et de mesurer les risques auxquels elles sont exposées, notamment via le processus ORSA qui sera détaillé par la suite.

---

<sup>1</sup> Administrative, Management and Supervisory Body

<sup>2</sup> Enterprise Risk Management

### c. Pilier 3 : Information publique et reporting prudentiel

Le pilier 3 traite de la transparence vis-à-vis du marché. En effet, les piliers 1 et 2 n'auraient que très peu de valeur si aucune communication sur ceux-ci n'était faite aux assurés, intermédiaires, concurrents, agences de notation ou encore analystes financiers.

Le grand principe ici est le suivant : une harmonisation complète du *reporting* de solvabilité via des états Solvabilité II à rendre à l'autorité de contrôle mais aussi à publier afin que le marché ait accès aux informations relatives à la solvabilité de la compagnie. Pour cela, il est demandé aux organismes d'assurance de diffuser annuellement un rapport de solvabilité et de situation financière qui sera un descriptif de la performance financière et du profil de risque. En plus de ce rapport annuel public, les organismes devront veiller à fournir des états trimestriels à l'ACPR. En cas de non-respect du *MCR* et/ou du *SCR*, il sera demandé à l'entreprise de spécifier les dispositions particulières à prendre pour palier à ces manquements.

À noter que le superviseur peut délivrer une autorisation qui permettra à l'organisme assureur de ne pas rendre publiques certains points du rapport prudentiel, jugés trop confidentiels ou stratégiques.

## 2. L'ORSA : Pièce centrale du pilier 2

### a. Généralités

L'ORSA est défini par l'article 45 de la directive 2009/138/CE plus communément appelée Solvabilité II. L'ORSA ou encore évaluation interne des risques et de la solvabilité constitue l'ensemble des processus visant à former un outil d'analyse décisionnelle et stratégique permettant à la compagnie de comprendre et d'évaluer, d'une manière continue et prospective les risques auxquels elle fait face dans l'exercice de son activité. L'entreprise doit montrer via l'ORSA qu'elle a su cartographier ses risques et qu'elle est consciente de son exposition et *in fine*, qu'elle a la capacité de se couvrir face à ces risques ou de prendre des décisions stratégiques afin de minimiser son exposition. Cette appréciation se fait en interne, c'est tout l'intérêt de l'ORSA. En effet, la démarche ORSA fait partie intégrante de la stratégie de l'entreprise et est donc propre à chaque organisme.

Les entreprises, via l'AMSB et la fonction gestion des risques, sont invitées à mettre en place un processus de réflexion et à challenger l'approche qui est faite dans le pilier 1 concernant les risques qui sont issus de l'activité de l'entreprise. En effet, la formule standard a été calibrée pour correspondre aux entreprises d'assurance du marché européen et ce en moyenne, or il n'existe aucun organisme possédant les caractéristiques « moyennes » du marché et par conséquent l'adéquation à la formule standard n'est que partielle. L'ORSA donne l'opportunité aux acteurs du monde de l'assurance de s'affranchir de la formule standard pour cet exercice et de proposer une évaluation de la solvabilité qui leur est propre.

Il existe au sein de l'ORSA une certaine liberté au niveau de l'évaluation des risques et de la solvabilité. Les textes réglementaires sur l'ORSA ne sont pas normatifs : le choix des mesures et des méthodes d'évaluation sont propres à l'entreprise et à sa situation. Le principe de proportionnalité a été néanmoins retenu et cadre les acteurs : les moyens mis en œuvre doivent être proportionnés à la taille de l'entreprise et à la complexité de l'activité. Avec l'ORSA, l'entreprise montre qu'elle dispose d'un système de gestion des risques en adéquation avec le *Business Plan* qu'elle envisage.



Les assureurs doivent prendre en compte les évolutions futures qui pourraient impacter leur solvabilité et ce non plus à un horizon d'un an mais à un horizon au moins égal à la durée du *Business Plan*.

L'*ORSA* traite de nombreux sujets, en voici une liste non-exhaustive :

- Produire une cartographie des risques
- Rechercher de relations entre les risques
- Avoir une réflexion sur ces risques
- Développer une couverture pour ces risques
- Adopter une vision long-terme
- Anticiper des changements économiques

Pour se faire, l'entreprise devra développer un outil de calcul qui sera adapté à son activité et qui fera intervenir de nombreuses fonctions de l'entreprise. Des échanges entre toutes les fonctions clés de l'entreprise et l'organe d'administration *AMSB* doivent avoir lieu afin de produire un *ORSA* qui correspond à la réalité économique de l'entreprise. Elle devra également se fixer un indicateur qui lui permettra de suivre sa solvabilité comme par exemple le ratio de couverture ou un niveau de probabilité de ruine économique.

## b. Les trois dimensions de l'ORSA

### i. Évaluation du besoin global de solvabilité

Le besoin global de solvabilité représente pour l'entreprise le montant de fonds propres nécessaires pour assurer à la fois sa solvabilité et l'ensemble des moyens nécessaires à la bonne poursuite du *Business Plan* qui induit un certain profil de risque et une certaine appétence aux risques. C'est à l'assureur de définir comment effectuer l'évaluation de ce besoin compte tenu de la nature spécifique des risques qu'il supporte.

Le besoin global de solvabilité repose sur :

- Une cartographie des risques supportés
- La dimension prospective de l'évaluation
- L'appétence aux risques de l'entreprise via les indicateurs définis
- Les actions futures du management au niveau du profil de risque

Il correspond au montant que l'organisme doit détenir afin de permettre son développement attendu tel qu'il est spécifié dans le *Business Plan*. Le besoin global de solvabilité va être le montant qui permettra à l'entreprise de maintenir les contraintes qu'elle se sera fixée dans le *Business Plan*. C'est un objectif de solvabilité qui dépasse les contraintes réglementaires.

Notons que le besoin global de solvabilité peut ne pas être couvert par les fonds propres détenus par l'organisme étant donné que ce n'est pas un montant réglementaire, à l'inverse du *SCR* qui lui doit être couvert. Le management devra néanmoins expliquer quelles sont les actions à mettre en place pour garantir le respect de ces exigences. Notons que si le besoin global de solvabilité est inférieur au *SCR* alors le respect des exigences réglementaires entraîne une couverture du besoin globale de solvabilité.

## ii. Écart par rapport à la formule standard

L'un des objectifs de l'ORSA est d'explicitier l'écart entre le profil de risque considéré dans la formule standard et le profil de risque effectif de l'entreprise. Cet écart peut varier en fonction de la méthode retenue par l'entreprise pour le calcul du SCR réglementaire (via formule standard ou utilisation d'USP) et l'approche de l'entreprise face aux risques considérés dans l'ORSA. Afin de mettre en évidence cet écart, il faut que l'organisme appréhende les écarts sur chacun des risques supportés ainsi qu'au global. L'entreprise peut, à partir de la projection des risques qu'elle supporte, connaître la distribution de ceux-ci et donc en déduire le quantile à 99,5 % qui correspond au niveau de confiance prescrit dans le pilier 1. Elle peut ensuite en déduire le choc correspondant pour chaque risque et la comparaison de ces chocs avec ceux spécifiés dans le pilier 1 de la directive Solvabilité II donnera une idée de l'écart de profil de risque.

Schématiquement :

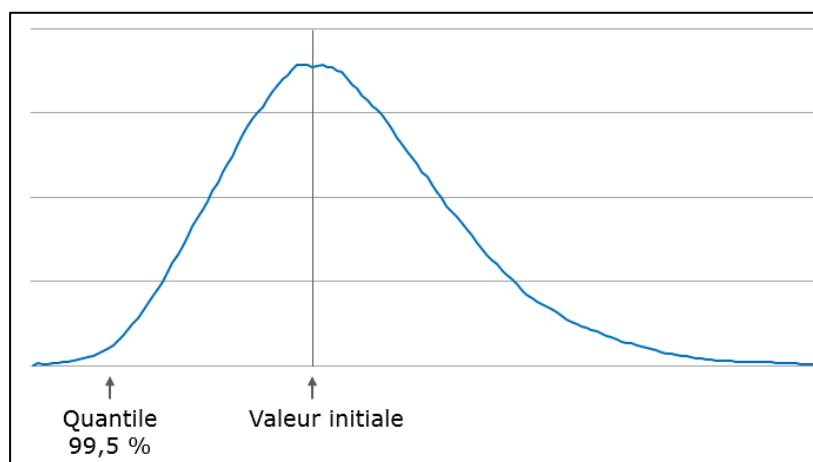


Figure 2 – Distribution du risque et illustration du quantile

Une dimension supplémentaire de la mise en évidence d'écarts repose sur la prise en compte des corrélations effectives entre les différentes VaR des risques. Ces coefficients de corrélation jouent un rôle majeur dans l'agrégation des risques dans les sous-modules de risques et pour le calcul du SCR. La sensibilité du besoin global de solvabilité à ces coefficients est donc très élevée.

Des matrices de corrélations ont été données par l'EIOPA, ces matrices ont été calibrées de la même façon que les différents chocs utilisés dans la formule standard, c'est-à-dire sur l'ensemble des entreprises du marché européen. Il paraît donc opportun de calculer des coefficients propres à l'entreprise afin d'effectuer une agrégation via des coefficients qui ont du sens pour l'entreprise. Il est important de noter que peu d'acteurs du marché se sont lancés dans cet exercice en raison de sa complexité, la méthode développée dans ce mémoire permet d'apporter une réponse simple à la question des corrélations.

L'EIOPA, à travers la publication des spécifications techniques, donne une démarche pour calculer ces coefficients de corrélations. Les coefficients donnés par l'EIOPA sont des *tail correlation*, c'est-à-dire des coefficients de corrélation entre les queues de distributions des risques. Ils ne correspondent donc pas au bien connu coefficient de corrélation linéaire entre deux risques A et B issu du calcul suivant :

$$\rho = \frac{Cov(A, B)}{\sqrt{Var(A)Var(B)}}$$

La *tail correlation* sera choisie de telle sorte qu'elle permette de minimiser au mieux l'erreur d'agrégation au niveau des VaR entre deux risques centrés A et B non-indépendants définie par :

$$\rho = \text{Argmin} ( | VaR(A + B)^2 - VaR(A)^2 - VaR(B)^2 - 2\rho VaR(A)VaR(B) | )$$

Avec  $\rho \in [-1 ; 1]$

Comme nous le verrons dans la partie III. 1. b. le générateur de scénarios économiques utilisé dans le cadre de ce mémoire permet de projeter les différents risques en maintenant les corrélations, nous pouvons donc récupérer la distribution des risques seuls mais aussi des sommes deux à deux de tous les risques corrélés et donc permet de trouver, pour chaque couple de risques, le coefficient de *tail correlation* qui minimise l'écart d'agrégation. La comparaison des coefficients issus de ce calcul et des coefficients donnés par l'EIOPA donnera une dimension supplémentaire à l'étude des écarts avec la formule standard.

### iii. Respect permanent des exigences de capital

L'approche prospective de l'*ORSA* est induite par le fait que l'organisme assureur doit respecter les exigences réglementaires de solvabilité à tout moment et ce jusqu'à l'horizon de projection spécifié par le *Business Plan*. Cette dimension de l'*ORSA* est la plus complexe étant donné qu'à chaque scénario et à chaque période, il faut dresser le compte de résultat et construire le bilan de l'assureur. Afin de projeter l'activité de l'entreprise, il va falloir projeter des variables aléatoires grâce à un générateur de scénarios économiques. Il s'agit de projeter l'évolution de l'actif et du passif de l'assureur sur tout l'horizon du *Business Plan*.

Cette projection de la situation de l'assureur lui permet de prendre des décisions stratégiques quant à sa politique de gestion. En effet, considérons une mutuelle qui suite à une décision de son Conseil d'Administration recourt à un *Business Plan* qui comporte une politique commerciale agressive, par exemple un niveau des cotisations en baisse afin d'attirer de nouveaux clients et gagner en part de marché : si la mutuelle s'aperçoit via l'*ORSA* qu'elle court un risque majeur de solvabilité dû à cette politique, elle peut dès aujourd'hui prendre des positions pour contrer ce risque et changer sa politique commerciale et l'adapter à son objectif de résultat mais aussi au niveau de solvabilité souhaité. Elle ajustera son *Business Plan* afin de maintenir un niveau de solvabilité futur qui respecte les contraintes fixées tout en essayant d'atteindre les cibles de résultat espéré. Cela illustre parfaitement le fait que l'*ORSA* est, d'un point de vue macro, un processus décisionnel et non pas uniquement un résultat émanant d'un calcul. Son champ de manœuvre est vaste et permet à l'assureur de prendre en compte toutes les spécificités de son activité ainsi que l'impact des hypothèses issues de son *Business Plan*.

### c. La démarche du groupe Tuillet

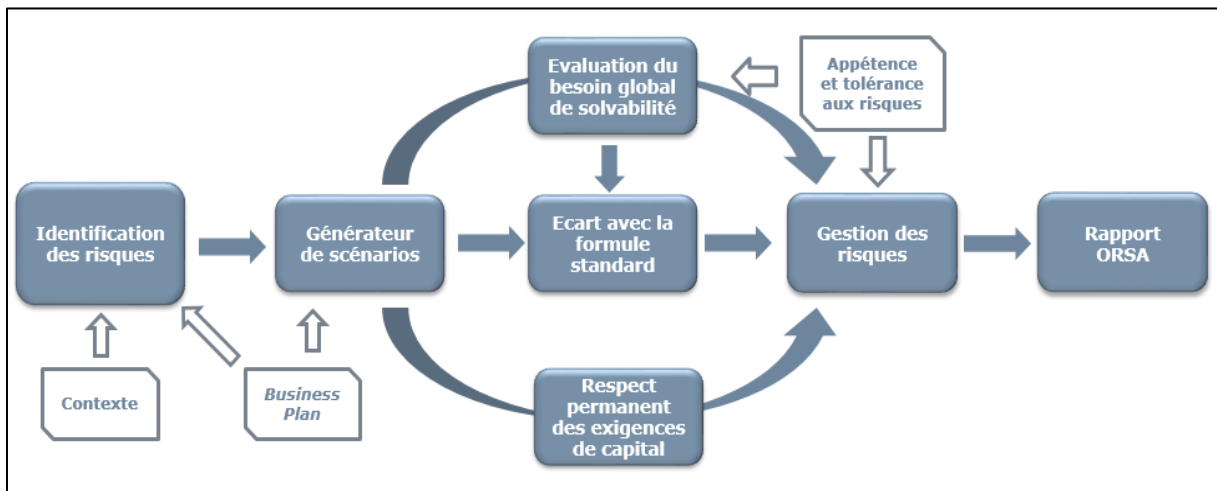


Figure 3 – Schéma récapitulatif de l'approche ORSA

Le contexte et le *Business Plan* influent sur la cartographie des risques puisque l'exposition aux risques dépend du contexte financier et technique. C'est via l'analyse du contexte financier externe comme l'évolution des taux d'intérêt par exemple et celle du contexte financier interne comme la composition du portefeuille d'actifs financiers détenus que des hypothèses sont prises dans le *Business Plan* en ce qui concerne le contexte financier futur. De même, l'analyse du contexte technique externe, comme l'évolution du coût des soins en santé ou bien de la performance des concurrents et celle du contexte technique interne comme par exemple le nombre de nouveaux adhérents permettent d'émettre des hypothèses quant au contexte technique futur. C'est sur la base de ces analyses de contextes que le *Business Plan* sera construit mais pas seulement : la stratégie de l'entreprise dépendra également de l'appétence aux risques pour tout ce qui concerne les règles définies en matière d'évaluation interne de solvabilité.

Le générateur de scénarios permet de projeter les différents risques considérés et prend en compte les hypothèses issues du *Business Plan*. Grâce à ce générateur qui projette l'activité de l'organisme, il est possible de répondre aux trois dimensions de l'*ORSA*, à savoir l'évaluation du besoin global de solvabilité, la mise en évidence d'écart au niveau du profil de risque de l'organisme et celui supposé dans la formule standard ainsi que le respect permanent des exigences de capital.

L'appétence et la tolérance aux risques influent l'évaluation du besoin global de solvabilité dans le sens où elles fixent des règles au niveau de la solvabilité et donc permettent de tirer des conclusions sur l'évolution de la situation financière de l'entreprise. La gestion des risques dépend également de ces règles de solvabilité puisqu'elle est en charge d'assurer la cohérence des actions qui découlent des résultats obtenus dans l'évaluation de la solvabilité.

*In fine*, la rédaction d'un rapport *ORSA*, récapitulant tout le processus, constitue l'élément clé pour l'autorité de contrôle puisque l'organisme, à travers ce rapport, tâchera de démontrer que ses besoins de solvabilité sont couverts. Ce rapport fournira également aux agences de notation un éclairage sur la qualité de la gestion des risques au sein de l'entreprise, la capacité de réflexion interne, la production de résultats probants et sur la performance des choix stratégiques. L'entreprise veillera à maintenir un équilibre entre transparence requise et protection de sa stratégie commerciale vis-à-vis de la concurrence.

## II. Données de travail et hypothèses

### 1. Activité de l'organisme

Dans ce mémoire, nous allons illustrer la démarche *ORSA* pour une mutuelle française, relevant du code de la Mutualité.

Cette entreprise réalise son activité en France et dans le domaine de la santé, non-assimilable à une activité orientée assurance vie<sup>1</sup>. En d'autres termes, les deux principaux modules de risques qui concernent cette entreprise sont le risque de marché et le risque de santé non-SLT. Ces deux modules constitueront le *BSCR*<sup>2</sup>, auquel s'ajoutera le module risque opérationnel afin d'obtenir le *SCR*. Nous ne considérons pas le module de risque défaut dans ce mémoire.

Nous ne considérerons pas d'ajustement au titre de la capacité d'absorption des provisions techniques et des impôts différés sur le *SCR*. L'effet d'absorption vient de la capacité de réduction des pertes via la participation aux bénéfices. Le risque santé étant un risque non-vie, la réglementation n'impose aucune obligation de participation aux bénéfices et donc il n'y a pas d'effet d'absorption. À des fins de simplifications, nous ne considérons pas les ajustements liés aux impôts différés sur le *SCR*.

---

<sup>1</sup> Non-SLT dans la cartographie des risques issue de la directive Solvabilité II

<sup>2</sup> *Basic Solvency Capital Requirement*



## 2. Situation économique initiale

Notons que pour des raisons de confidentialité, les valeurs inscrites au bilan sont proportionnelles aux valeurs réelles du bilan de l'entreprise et ont été arrondies.

L'immobilier se décompose en un immeuble utilisé comme siège social pour 8 000 000 € à Paris et de 2 000 000 € d'investissement à Lyon.

Le portefeuille financier se décompose en actions :

- Deutsch Bank AG pour 2 000 000 € / 60 474 titres / S&P : A
- Total SA pour 1 000 000 € / 22 457 titres / S&P : AA-
- L'Oréal pour 3 000 000 € / 23 493 titres / S&P : A-
- Renault SA pour 1 000 000 € / 17 109 titres / S&P : BB+
- AXA SA pour 3 000 000 € / 148 441 titres / S&P : A-

Le portefeuille obligataire se décompose en obligations :

- GDF SUEZ 3,046% 17/10/2018 pour 7 500 000 € / 226 778 titres / S&P : A
- LVMH 4,775 % 29/06/2017 pour 5 500 000 € / 49 165 titres / S&P : A+
- AIR LIQUIDE 5,25 % 18/07/2017 6 500 000 € / 56 488 titres / S&P : A+
- BPCE 4,23 % 16/02/2019 pour 5 500 000 € / 50 715 titres / S&P : A
- BOUYGUES 6,125 % 03/07/2016 pour 5 000 000 € / 46 343 titres / S&P : BBB

Nous avons donc une allocation d'actifs du type :

- 20 % actions
- 60 % obligations
- 20 % immobiliers

En ne considérant que les actifs liquides, c'est-à-dire les actions et obligations, l'allocation est la suivante :

- 25 % actions
- 75 % obligations

Le nombre de titres étant calculé par rapport à la valeur de marché au 31/12/2013 des différents actifs, date à laquelle nous projetons l'activité de l'entreprise pour cet exemple.

Le passif est composé du *Best Estimate* qui représente ici la meilleure estimation de la provision pour sinistres à payer pour l'activité santé *non-SLT* ainsi que de la *Risk Margin* adossée à ce *Best Estimate*.

Les fonds propres sont et seront calculés dans les projections par différence entre la valeur de l'actif, c'est-à-dire la valeur des placements et la valeur du passif qui équivaut à la somme du *Best Estimate* et de la *Risk Margin*.

Les cotisations perçues au titre de l'année 2013 sont de 149 400 000 €, pour un niveau de prestation de 121 500 000 €. Le ratio Sinistres à Primes de l'entreprise s'établit donc à un niveau de 81,33 %. À ces prestations s'ajoutent des frais de l'ordre de 7 290 000 €. Nous ne considérons pas de variations de provisions entre 2012 et 2013. Nous en déduisons donc un résultat simplifié au titre de l'année 2013 est de 20 610 000 €.

Finalement nous obtenons le bilan économique simplifié de l'entreprise au 31/12/2013 :

| Actif              |                     | Passif                       |                     |
|--------------------|---------------------|------------------------------|---------------------|
| <b>Placements</b>  |                     | <b>Fonds propres</b>         |                     |
|                    |                     |                              | <b>41 000 000 €</b> |
| <b>Immobilier</b>  |                     |                              |                     |
|                    | <b>10 000 000 €</b> |                              |                     |
| <b>Actions</b>     |                     | <b>Provisions techniques</b> |                     |
|                    | <b>10 000 000 €</b> |                              |                     |
| <b>Obligations</b> |                     | <b>Best Estimate</b>         | <b>7 785 000 €</b>  |
|                    | <b>30 000 000 €</b> | <b>Risk Margin</b>           |                     |
|                    |                     |                              | <b>1 215 000 €</b>  |
| <b>Total</b>       | <b>50 000 000 €</b> | <b>Total</b>                 | <b>50 000 000 €</b> |

Figure 4 – Bilan de l'entreprise

Et le compte de résultat :

| <b>Charges</b>             |                      | <b>Produits</b>    |                      |
|----------------------------|----------------------|--------------------|----------------------|
| <b>Prestations</b>         | <b>121 500 000 €</b> | <b>Cotisations</b> | <b>149 000 000 €</b> |
| <b>Frais</b>               | <b>7 290 000 €</b>   |                    |                      |
| <b>Variation provision</b> | <b>- €</b>           |                    |                      |
| <b>Total</b>               | <b>128 790 000 €</b> | <b>Total</b>       | <b>149 000 000 €</b> |

Figure 5 – Compte de résultat

### 3. Business Plan

Les hypothèses relatives au *Business Plan* sont les suivantes :

- La projection se fait sur 3 années
- Pas de diversification d'activité durant les années à venir
- Prédiction de l'augmentation du nombre d'adhérents de 3 % par an
- Les cotisations sont constantes et indexées sur le nombre d'adhérents
- Les prestations et les frais sont aléatoires, indexés sur le nombre d'adhérents
- Proportion constante des différentes classes d'actifs liquides dans le temps
- Notation des actifs figée dans le temps
- Allocation du résultat proportionnellement à chaque actif liquide
- Pas de risque de taux au passif (règlement du passif en quelques mois)
- Pas de réassurance
- Pas d'imposition

L'entreprise souhaite maintenir sur ces trois années un ratio de couverture de *SCR* de l'ordre de 175 %. En effet d'après les spécifications techniques de l'*EIOPA*, ce ratio de 175 % correspond à une probabilité de défaut dans l'année de 0,05 % et satisfait par équivalence à une notation de contrepartie A. Elle se fixe comme objectif de solvabilité de maintenir dans 80 % des cas un ratio d'au moins 175 %.

En termes mathématiques :

$$\mathbb{P}\left(\frac{FP_t}{SCR_t} \geq 175\% \right) \geq 80\% \quad \forall t \in \{1,2,3\}$$

Où  $FP_t$  est la valeur des fonds propres en fin d'année t

$SCR_t$  est la valeur du *SCR* calculée en fin d'année t

L'entreprise souhaite maintenir sur ces trois années un ratio Sinistres à Primes inférieur à 85 % dans 80 % des cas. En effet, le ratio Sinistres à Primes initial est de 81,33 %, l'entreprise se donne un droit de dégradation de ce ratio jusqu'à 85 % tous les cinq ans<sup>1</sup>.

Mathématiquement :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_t}{P_t} < 85\% \right) \geq 80\% \quad \forall t \in \{1,2,3\}$$

Où  $S_t$  représente les prestations payées sur l'année t

$P_t$  représente les cotisations perçues au titre de l'année t

Il y a donc une double approche prospective avec des objectifs à la fois sur la solvabilité via le maintien d'un certain niveau du ratio de solvabilité qui impactera le besoin global de solvabilité mais aussi sur le résultat espéré via une borne maximale fixée pour le ratio Sinistres à Primes.

---

<sup>1</sup> Comprendre que 20 % correspond à une chance sur cinq

### III. Générateur de scénarios économiques

#### 1. Principes généraux d'un GSE

##### a. Approche paramétrique

Une compagnie exerçant une activité d'assurance doit pouvoir modéliser et projeter au mieux les risques qu'elle supporte afin de répondre aux différents besoins de l'ORSA. Pour cela la compagnie doit pouvoir projeter d'un côté ses risques techniques, liés à son activité, et de l'autre les risques financiers qui découlent des actifs détenus en regard des passifs. Pour mener à bien le pilotage de son activité, l'organisme se doit de posséder un outil lui permettant de projeter à la fois son actif et son passif tout en maintenant les liens qui existent entre ces deux parties du bilan.

Utiliser des projections déterministes ne correspond pas aux principes issus de la directive Solvabilité II. En effet ces projections ne permettent pas de prendre en compte les divers scénarios pouvant impacter l'assureur, le caractère stochastique des variables aléatoires considérées étant alors rejeté. Pour pallier à cette carence, les entreprises utilisent des modèles stochastiques dans leurs outils afin de déduire, sous certaines hypothèses de modèles et de paramètres, la distribution de leurs risques à une échéance donnée.

Un générateur de scénarios économiques paramétrique repose sur une théorie mathématique poussée. En effet, l'utilisation de modèles mathématiques complexes est courante pour la modélisation des taux d'intérêt, du rendement des actions et indices ou encore de l'évolution des prix de l'immobilier. La recherche en mathématiques appliquées offre aux institutions financières des outils de plus en plus pointus afin de modéliser les différentes variables pouvant les impacter mais non sans une prise de risque.

Le risque ici s'illustre à travers le risque de modèle. C'est un risque complexe qui est alimenté par deux sous-risques : le risque d'erreur de spécification et le risque d'erreur d'estimation. À chaque variable considérée, il faut choisir un modèle pour la projeter, c'est une étape délicate car il existe un grand nombre de modèles, le risque serait donc d'utiliser un modèle qui n'est pas adéquat. De plus, chaque modèle repose sur des paramètres qui doivent être estimés, cela donne lieu à un choix sur la méthode utilisée pour l'estimation : citons par exemple le maximum de vraisemblance et la méthode des moments qui parfois donnent des résultats équivalents mais dans d'autres cas peuvent donner des résultats qui diffèrent. De plus, la bonne utilisation de certains modèles repose sur des hypothèses restrictives qui ne sont pas toujours vérifiées comme par exemple les hypothèses faites sur l'indépendance des variables ou sur les distributions.

Le choix d'une structure de dépendance entre les risques joue un rôle important dans la projection de l'activité d'un assureur. Solvabilité II autorise une approche simple, basée sur des matrices de corrélations qui découle de l'hypothèse de distributions elliptiques des risques. Des modèles plus complexes font intervenir les copules afin de modéliser les liens de dépendance entre plusieurs risques. Encore une fois, cette étape est difficile car il faut trouver la copule adéquate et estimer correctement ses paramètres.

## b. Approche non-paramétrique

Comme le dit Sophie Echardour<sup>1</sup> : « L'ORSA ne doit pas être une usine à gaz. Il doit être un outil souple et réactif [...] Il doit servir à éclairer les décisions stratégiques de croissance ». Cette image de l'ORSA ne coïncide pas avec la réalité du marché. Beaucoup de petites et moyennes structures ne savent pas comment amorcer leurs travaux et se retrouvent face à un exercice nouveau et surtout complexe. Même si l'objectif de l'ORSA n'est pas la création d'un modèle interne, les outils de calcul développés s'en rapprochent ; de plus, de nombreux acteurs du marché de l'assurance, particulièrement en assurance vie-épargne, utilisent des méthodes sophistiquées<sup>2</sup> pour répondre aux différents besoins de l'ORSA. Ces méthodes ont prouvé leurs efficacités mais peu d'acteurs ont les ressources nécessaires pour les mettre en place, les petites et moyennes structures sont dépassées sur le plan technique.

La base de l'approche non-paramétrique réside dans le fait que le prédicteur n'a pas de forme déterminée, en d'autres termes, aucune hypothèse n'est faite sur la distribution sous-jacente des variables. Cette méthode permet de projeter les variables sous-jacentes aux risques sans émettre d'hypothèses sur la loi qui les régit. La caractérisation de ce principe au sein d'un générateur de scénarios économiques nécessite plusieurs étapes, qui rappellent le principe du *Bootstrap*<sup>3</sup> non-paramétrique :

- Identification des risques
- Création d'une base historique de valeurs quotidiennes des indices de risques
- Création d'une base historique de variations quotidiennes des indices de risques
- Tirages aléatoires de lignes de variations dans la base de variations
- Projection des indices via une approche multiplicative au niveau des variations

Cette méthode de projection sera appelée méthode de projection par *Bootstrap* historique dans la suite du mémoire.

---

<sup>1</sup> Interview publié dans l'article « Gestion des risques : priorité à l'ORSA » issu de l'actuariat n°08 de Mars 2013

<sup>2</sup> Méthode Replicating Portfolio, Curve-Fitting ou Least-Square Monte-Carlo

<sup>3</sup> Méthode d'inférence statistique basée sur le rééchantillonnage



Le seul paramètre nécessaire au modèle est l'horizon de projection. En ce qui concerne l'historique, nous retiendrons de manière idéale un historique de valeurs le plus profond possible afin de capter le maximum d'informations. Une limitation volontaire de l'historique reviendrait à piloter les résultats en limitant l'information disponible en négligeant une partie du spectre de variations possibles.

L'hypothèse forte qui est faite ici est l'indépendance entre les variations quotidiennes. Cette hypothèse rappelle l'hypothèse d'efficience faible des marchés financiers.

L'hypothèse d'efficience des marchés financiers est un des concepts fondateurs de la théorie financière moderne. Un marché est dit efficient dans sa forme faible si l'information contenue dans les prix observés dans le passé est parfaitement représentée dans les prix actuels. Si les marchés sont efficients, cela signifie qu'il n'est pas possible de battre le marché, c'est-à-dire de réaliser des profits anormalement élevés en prenant des positions d'après les évolutions du marché.

Cette hypothèse se traduit par une indépendance des rendements journaliers. En effet, si l'hypothèse d'une marche aléatoire est rejetée pour le cours d'un actif, le marché ne peut être efficient car les accroissements de prix passés pourraient aider à anticiper les variations futures et donc d'en déduire des positions futures qui permettraient de générer des gains certains.

Nous étendons cette hypothèse à tous les indices de risques et non plus uniquement aux indices financiers.

Rappelons que le célèbre modèle d'évaluation des options de Black-Scholes repose sur cette hypothèse d'efficience faible des marchés et considère que les log-rendements observés constituent une suite de variables aléatoires, indépendantes et identiquement distribués selon une loi Gaussienne.

Pour illustrer la méthode, voici un exemple de construction de base de variations et de projection des différents indices :

| Date \ Indice    | Indice 1 | Indice 2 | Indice 3 | Indice 4 | ... |
|------------------|----------|----------|----------|----------|-----|
| Début historique | 45,2     | 0,0315   | 0,0051   | 125,1    | ... |
| ...              | 46,1     | 0,0321   | 0,0047   | 126,3    | ... |
| ...              | ...      | ...      | ...      | ...      | ... |
| Fin d'historique | 46,4     | 0,0152   | 0,0123   | 120,1    | ... |

Tableau 1 – Base de valeurs historiques

*Etape 1*

| Date \ Indice    | Indice 1 | Indice 2 | Indice 3 | Indice 4 | ... |
|------------------|----------|----------|----------|----------|-----|
| Début historique | 1,99 %   | 1,90 %   | -7,84 %  | 0,96 %   | ... |
| ...              | -0,25 %  | 0,28 %   | -4,71 %  | -0,32 %  | ... |
| ...              | ...      | ...      | ...      | ...      | ... |
| Fin d'historique | -1,24 %  | 0,74 %   | 0,28 %   | -0,11 %  | ... |

Tableau 2 – Base de variations historiques

*Etape 2*

| Date \ Indice     | Indice 1 | Indice 2 | Indice 3 | Indice 4 | ... |
|-------------------|----------|----------|----------|----------|-----|
| Début projection  | 46,4     | 0,0152   | 0,0123   | 120,1    | ... |
| ...               | 46,5     | 0,0161   | 0,0118   | 121,2    | ... |
| ...               | ...      | ...      | ...      | ...      | ... |
| Fin de projection | 47,2     | 0,0187   | 0,0084   | 123,7    | ... |

Tableau 3 – Projections des indices

L'étape 1 consiste à calculer les variations journalières pour chaque indice de risque à partir de la base des valeurs afin de constituer la base de variations.

L'étape 2 consiste à tirer aléatoirement dans cette base des lignes de variations et à les appliquer aux valeurs de début de projection de chaque indice, nous pouvons ainsi projeter pas à pas les différents indices. En itérant un grand nombre de fois cette opération, nous pouvons récupérer la distribution empirique des indices à l'horizon de temps voulu et en déduire les *VaR* correspondantes.

Il est clair que les liens de dépendance historique sont maintenus via cette méthode de projection. En effet, comme nous procédons à un tirage aléatoire de lignes de variations, si certains indices ont tendance à avoir des variations corrélées, alors dans la projection, cette corrélation sera maintenue.

Nous verrons dans la partie traitant des écarts par rapport à la formule standard qu'il sera possible de déduire les corrélations deux à deux et de les comparer avec les corrélations fournies par l'*EIOPA*.

### c. Méthode de Monte-Carlo

Le terme méthode de Monte-Carlo désigne toute méthode permettant de calculer une valeur numérique en utilisant des processus aléatoires. Cet ensemble de méthodes porte le nom de Monte-Carlo en référence aux quartiers de Monaco du même nom où se situe le célèbre casino. Les méthodes de Monte-Carlo trouvent des applications dans divers domaines scientifiques tels que la physique ou l'économie. Le développement de ces méthodes a été boosté par les recherches effectuées lors de la Seconde Guerre Mondiale par Von Neumann et Ulam qui utilisaient ces méthodes afin de résoudre des équations aux dérivées partielles lors de travaux sur les premières armes nucléaires. Von Neumann développa à l'époque des programmes pour l'*ENIAC*<sup>1</sup> afin de mettre en pratique ces méthodes de Monte-Carlo, l'opération étant entièrement financée par l'armée américaine.

Ces méthodes reposent sur la loi forte des grands nombres qui stipule que la moyenne empirique d'un échantillon d'observations aléatoires se rapproche d'autant plus de la moyenne théorique que le nombre d'observations augmente.

Autrement dit la moyenne empirique d'un échantillon converge presque-sûrement vers la moyenne théorique :

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = \mathbb{E}(X)\right) = 1$$

Où  $\mu_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$  avec  $X_i$  indépendantes et de même loi que  $X$

L'objectif cible qui nous intéresse dans le cadre de calcul de solvabilité est la fonction de répartition des risques afin d'en déduire les quantiles au seuil voulu. La loi forte des grands nombres a permis à Glivenko et Cantelli d'énoncer le théorème fondamental de la statistique : la connaissance d'un échantillon de grande taille de réalisations d'une variable aléatoire permet de connaître la loi de probabilité sous-jacente de cette variable. Le théorème de Glivenko-Cantelli stipule que, presque sûrement, la fonction de répartition empirique déduite d'un échantillon de réalisations d'une variable aléatoire converge uniformément vers la fonction de répartition de cette variable aléatoire.

---

<sup>1</sup> *Electronic Numerical Integrator And Computer*

Mathématiquement, nous avons la fonction de répartition empirique :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{X_i \leq x\}}$$

Où  $X_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  réalisation de la variable aléatoire  $X$

Le théorème de Glivenko-Cantelli nous donne :

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \|F_n - F\|_{\infty} = 0 \right) = 1$$

Où  $F$  est la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$

Et avec

$$\| \cdot \|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} ( |F_n(x) - F(x)| )$$

Grâce à ce théorème puissant, nous pouvons donc estimer nos quantiles empiriquement à la suite d'un grand nombre de simulations de nos variables aléatoires. Pour simuler des variables aléatoires, il faut tout d'abord disposer de nombres aléatoires. Il existe différentes méthodes pour les obtenir, c'est ce que nous allons étudier dans la partie suivante.

#### d. Pseudo-aléatoire ou quasi-aléatoire ?

Les générateurs de nombres aléatoires comme le *Rnd* d'*Excel-VBA* appartiennent à la famille des générateurs congruentiels, qui est une sous-famille des générateurs de nombres pseudo-aléatoires comme le célèbre *Mersenne Twister*. Ces générateurs fabriquent des nombres  $y_k$  apparemment indépendants et identiquement distribués de loi uniforme sur l'intervalle  $[0;1]$  selon le schéma suivant :

$$y_k = g(s_k)$$

$$\text{Où } s_k = f(s_{k-1})$$

Avec  $f$  la fonction de transfert d'un terme à l'autre de la suite  $s_k$  et  $g$  la fonction de sortie qui transforme  $s_k$  en un nombre aléatoire uniforme sur  $[0;1]$ . La suite des  $s_k$  est initialisée à  $s_0$ , c'est la graine, qui est en pratique choisie aléatoirement comme par exemple l'heure à laquelle la simulation est lancée. Ces deux fonctions sont déterministes, la suite des  $y_k$  est donc une suite déterministe de nombres pseudo-aléatoires.

Ces suites de nombres aléatoires ne sont pas à discrédance faible, cela se traduit par mauvaise répartition de la suite sur l'intervalle  $[0;1]$ .

La détermination de la discrédance dans un espace de dimension 1 revient à chercher l'intervalle  $I$  de  $[0;1]$  qui contient la densité la plus anormalement faible ou élevée de points comparativement à volume.

La discrédance est une mesure de non-uniformité d'une suite  $x$  de nombres aléatoires et est définie comme suit :

$$D_n^*(x) = \sup_{I \in [0;1]} \left( \frac{A(I, x)}{\text{Card}(x)} - \lambda(I) \right)$$

Où  $x$  est une suite de  $n$  points sur l'intervalle  $[0;1]$

$I$  est un intervalle quelconque de  $[0;1]$

$A(I, x)$  désigne le nombre de point de  $x$  appartenant à  $I$

$\lambda$  est la mesure de *Lebesgue* sur  $[0;1]$

$D_n^*(x)$  est la discrédance de  $x$  par rapport à  $I$

Il est clair que  $D_n^*(x)$  prend des valeurs dans l'intervalle  $[0;1]$ . En effet le rapport  $\frac{A(I,x)}{\text{Card}(x)}$  est compris entre 0 et 1 puisque  $A(I, x)$  varie entre 0 et  $\text{Card}(x)$ .

$\lambda(I)$  est également compris entre 0 et 1 puisque nous avons :

$$\lambda(I) = b - a$$

Où  $a$  et  $b$  sont les bornes de l'intervalle  $I$

Et comme  $a$  et  $b$  appartiennent à  $[0;1]$  et  $b \geq a$ , nous avons forcément  $\lambda(I)$  compris entre 0 et 1 et par conséquent  $D_n^*(x)$  est compris entre 0 et 1.

Les suites qui admettent des discrédances qui convergent rapidement<sup>1</sup> vers 0 lorsque  $n$  augmente sont qualifiées de suites à discrédance faible et sont appelées suites équiréparties.

À l'inverse des générateurs pseudo-aléatoire, les générateurs quasi-aléatoires construisent des suites qui admettent des discrédances faibles. L'un des générateurs les plus connus de nombres quasi-aléatoires est l'algorithme du Tore, ce générateur de nombres quasi-aléatoires se base sur les nombres premiers. Une suite  $u_k$  de nombres quasi-aléatoires selon l'algorithme du Tore est définie par :

$$z_k = k\sqrt{p} - [k\sqrt{p}]$$

Où  $z_k$  est le  $k^{\text{ème}}$  nombre quasi-aléatoire de la suite

$p$  est un nombre premier

$[.]$  représente l'opérateur valeur entière

Nous pouvons illustrer graphiquement la notion de discrédance via le logiciel R et le package *randtoolbox*. Voici deux graphiques représentant 2500 réalisations de variables aléatoires uniformes sur l'intervalle  $[0;1]$  d'abord générées via une méthode pseudo-aléatoire et dans un second temps par une méthode quasi-aléatoire.

---

<sup>1</sup>  $D_n^*(x) = O(n^{-1} \log(n))$  d'après Franck Jedzejewski dans « Modèles aléatoires et physique probabiliste »

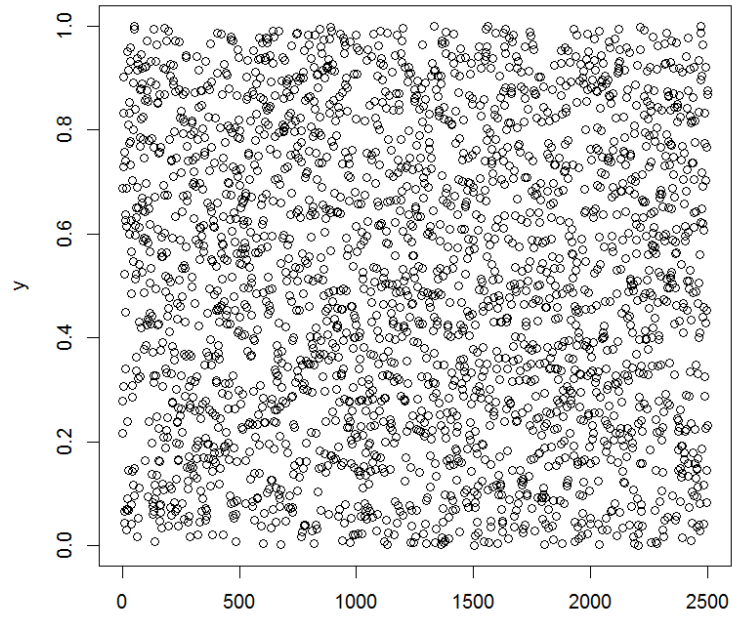


Figure 6 – Représentation de 2500 termes d’une suite  $y$  pseudo-aléatoire sur  $[0;1]$

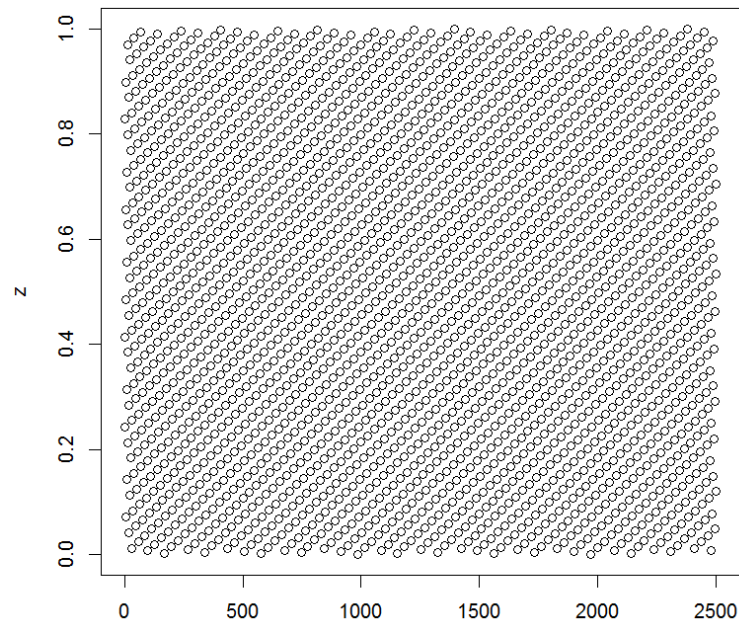


Figure 7 – Représentation de 2500 termes d’une suite  $z$  quasi-aléatoire sur  $[0;1]$

Nous pouvons remarquer que les points sont mieux répartis sur l’intervalle  $[0;1]$  avec le générateur quasi-aléatoire. Les points semblent être rangés, c’est une illustration de la discrédance faible qui est garantie par ces générateurs, en effet l’écart entre les points est aléatoire mais reste assez constant.



A l'inverse, certaines régions du graphique présenté en figure 6 contiennent un nombre important de points alors que d'autres sont complètement vides, cela montre le manque de qualité de la distribution des points via un générateur pseudo-aléatoires. Avec le package *DiceDesign* et via la fonction *discrepancyCriteria* dans R nous obtenons pour le premier échantillon de 2500 tirages une discrédance de 0,0028006 et une discrédance de 0,0002440 pour le deuxième échantillon de 2500 tirages également, le résultat observé graphiquement est donc confirmé par l'écart important au niveau des discrédances et ce avec un faible nombre de tirages.

L'intérêt de ces générateurs est de permettre une convergence plus rapide lors d'estimations par méthode de Monte Carlo. Lorsque l'estimation par méthode de Monte-Carlo repose sur des nombres quasi-aléatoires nous parlerons d'estimation par méthode quasi-Monte-Carlo.

Thérond et Planchet<sup>1</sup> mettent en évidence un biais systémique entre les termes d'une suite de nombres quasi-aléatoires issus de l'algorithme du Tore. En effet, il existe une dépendance terme à terme dans la suite des valeurs de la suite. Pour pallier à ce problème, ils conseillent l'utilisation d'un générateur se basant sur l'algorithme du Tore mélangé qui se définit ainsi :

$$m = \lfloor \alpha N \tilde{u} + 1 \rfloor$$

$$u_m = m\sqrt{p} - \lfloor m\sqrt{p} \rfloor$$

Où  $m$  est un nombre aléatoire

$\alpha$  est un coefficient de mélange

$N$  est le nombre de tirages effectués

$\tilde{u}$  est une variable aléatoire uniforme sur  $[0;1]$  de type *Rand*

$p$  est un nombre premier

$\lfloor . \rfloor$  représente l'opérateur valeur entière

---

<sup>1</sup> Article « Simulation de trajectoires de processus continus »

Au lieu d'utiliser le tirage  $u_n$  pour le tirage de la  $n^{\text{ème}}$  variable uniforme, nous préférons utiliser  $u_m$  avec  $m$  aléatoire. L'idée derrière cette manipulation est de briser la suite et donc de réduire à 0 la dépendance terme à terme. Le générateur ainsi obtenu présente les mêmes bonnes caractéristiques de répartition que le Tore mais sans la dépendance terme à terme. En effet, le coefficient  $\alpha$  a pour but de réduire le nombre de tirages qui donneraient le même indice et par conséquent au même nombre aléatoire. Toujours d'après Théron et Planchet,  $\alpha = 10$  est satisfaisant.

Nous allons à présent illustrer l'utilité de ces nombres quasi-aléatoires via des applications dans quelques exemples mathématiques simples.

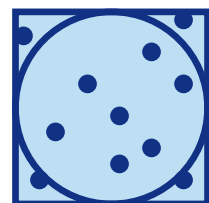
➤ Estimation de la valeur de  $\frac{\pi}{4}$  :

Pour calculer la valeur de  $\frac{\pi}{4}$ , nous nous plaçons dans un carré de côté 1. Nous traçons le cercle inscrit dans ce carré, il est donc de diamètre 1. Le ratio aire du cercle divisé par l'aire du carré donne  $\frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4}$ . Pour estimer la valeur recherchée, nous tirons un nombre  $n$  de variables aléatoires uniformes sur  $[0;1]^2$ . Nous comptons le nombre de points qui sont dans le cercle et le divisons par le nombre présents dans le carré, c'est-à-dire  $n$ . Cela donne un estimateur de  $\frac{\pi}{4}$ . Pour information, la valeur réelle est de 0,7854.

Un point de coordonnées  $(x; y)$  appartient au cercle unité

si  $x$  et  $y$  sont tels que :

$$x^2 + y^2 \leq 1$$



En simulant des couples via un générateur de nombres aléatoires, nous pouvons calculer une estimation  $\hat{e}$  de la valeur de  $\frac{\pi}{4}$  :

$$\hat{e} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{(u_i; v_i) \text{ tels que } u_i^2 + v_i^2 \leq 1\}}$$

Où  $(u_i; v_i)$  est un couple de variables aléatoires uniformes sur  $[0;1]^2$ .

Nous observons les résultats suivants :

| Nombre de simulations | Estimation |       | Ecart relatif (valeur absolue) |        |
|-----------------------|------------|-------|--------------------------------|--------|
|                       | Rand       | Tore  | Rand                           | Tore   |
| 100                   | 0,820      | 0,770 | 4,41%                          | 1,96 % |
| 200                   | 0,8150     | 0,780 | 3,77 %                         | 0,69 % |
| 500                   | 0,804      | 0,780 | 2,37 %                         | 0,69 % |
| 1000                  | 0,803      | 0,782 | 2,24 %                         | 0,43 % |

Tableau 4 – Résultats pour l'estimation de  $\frac{\pi}{4}$

Nous remarquons une convergence plus rapide vers la valeur réelle avec le générateur quasi-aléatoire. Avec 100 simulations en quasi-aléatoire, l'estimation est plus précise qu'avec 1000 réalisations en pseudo-aléatoires. Le gain en termes de budget de simulations est ici d'un facteur supérieur à 10.

➤ Estimation d'un quantile :

Nous allons chercher à retrouver la valeur du quantile d'ordre 99,5 % d'une loi Normale centrée réduite. Pour se faire nous allons simuler deux échantillons de mêmes tailles, l'un s'appuyant sur des nombres pseudo-aléatoires, l'autre sur des nombres quasi-aléatoires.

Grâce à la méthode de la transformée inverse nous pouvons à partir des réalisations uniformes en déduire des réalisations de variables aléatoires. En effet si  $F_X$  est la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$  et si  $U$  est une variable aléatoire uniforme sur  $[0;1]$ , nous savons que  $F_X^{-1}(U)$  est de même loi que  $X$ . En utilisant ce procédé, nous estimons empiriquement le quantile d'ordre 99,5 % d'une loi Normale centrée réduite avec un générateur pseudo-aléatoire et avec un générateur quasi-aléatoire. Notons que le quantile d'ordre 99,5 % d'une loi Normale centrée réduite vaut 2,5758.

Nous observons les résultats suivants :

| Nombre de simulations | Estimation du quantile |        | Ecart relatif (valeur absolue) |        |
|-----------------------|------------------------|--------|--------------------------------|--------|
|                       | Rand                   | Tore   | Rand                           | Tore   |
| 100                   | 2,8826                 | 2,5373 | 11,91 %                        | 1,50 % |
| 200                   | 2,3148                 | 2,4159 | 10,13 %                        | 6,21 % |
| 500                   | 2,5206                 | 2,4848 | 2,14 %                         | 3,53 % |
| 1000                  | 2,3900                 | 2,5340 | 7,22 %                         | 1,62 % |
| 2000                  | 2,3393                 | 2,5539 | 9,18 %                         | 0,85 % |
| 5000                  | 2,4303                 | 2,5642 | 5,65 %                         | 0,45 % |
| 10000                 | 2,4441                 | 2,5750 | 5,11%                          | 0,03%  |

Tableau 5 – Résultats pour l’estimation du quantile

Nous pouvons remarquer qu’avec un échantillon de 2 000 réalisations, le quantile est approché avec une erreur absolue relative de moins d’un pourcent avec le générateur quasi-aléatoire. Même avec 10 000 réalisations via le générateur pseudo-aléatoire, l’écart absolu relatif est encore supérieur à 5 %. Le gain en termes de budget de simulations est ici d’un facteur de 50.

➤ Estimation d’une intégrale :

Si  $f$  est une fonction quelconque, intégrable ou non, et si nous souhaitons calculer la valeur de l’intégrale suivante :

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Par un changement de variable élémentaire  $z = \frac{x-a}{b-a}$ , nous pouvons nous ramener à étudier finalement une intégrale sur l'intervalle [0;1] :

$$I = (b - a) \int_0^1 f((b - a)z + a) dz$$

Nous pouvons approximer cette valeur par :

$$\hat{I} = \frac{(b - a)}{n} \sum_{i=1}^n f((b - a)z_i + a)$$

Où  $z_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  point d'une séquence de n nombres aléatoires sur [0;1]

Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$$

C'est la fonction de densité d'une variable X qui suit une loi Normale centrée réduite. Nous savons que l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  de cette fonction vaut 1. Nous souhaitons illustrer l'intérêt des nombres quasi-aléatoires pour l'estimation de cette intégrale.

Posons  $I_t$  l'intégrale suivante :

$$I_t = \int_{-t}^t f(x) dx$$

Il est clair que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I_t = 1$ , et donc en posant  $t = 20$  nous considérons un intervalle suffisamment grand pour obtenir une valeur très proche de cette limite puisque la probabilité d'observer une valeur supérieur à 20 ou inférieure à - 20 pour une variable aléatoire suivant une loi Normale centrée réduite est infinitésimale. Nous souhaitons donc évaluer la valeur d' $I_{20}$ .

Nous utilisons une série de nombres pseudo-aléatoires et une série de nombres quasi-aléatoires et calculons la valeur de l'estimateur  $\hat{I}_{20}$  d' $I_{20}$  et comparons les résultats obtenus :

| Nombre de simulations | Estimation de l'intégrale |        | Ecart relatif (valeur absolue) |        |
|-----------------------|---------------------------|--------|--------------------------------|--------|
|                       | Rand                      | Tore   | Rand                           | Tore   |
| 100                   | 1,1977                    | 0,9786 | 19,77 %                        | 2,14 % |
| 200                   | 1,1402                    | 0,9803 | 14,02 %                        | 1,97 % |
| 500                   | 1,1170                    | 0,9893 | 11,70 %                        | 1,07 % |
| 1000                  | 0,9850                    | 0,9997 | 1,50 %                         | 0,03 % |

Tableau 6 – Résultats pour l'estimation du quantile

Comme prévu, l'estimation de la valeur de l'intégrale via une estimation quasi-Monte-Carlo est plus performante que celle obtenue par Monte-Carlo classique. La convergence est bien plus rapide. Le gain en termes de budget de simulations est ici d'un facteur de 5.

➤ Estimation du prix d'un actif financier complexe :

Les premiers travaux sur l'estimation du prix de *Collateralized Mortgage Obligation*<sup>1</sup> ont été effectués au début des années 1990 par Spassimir Paskov lors de son doctorat à l'Université de Columbia<sup>2</sup> sous la responsabilité de Joseph Frederik Traub et reposaient sur l'utilisation de générateurs quasi-aléatoires. En effet pour *pricer* ce produit complexe, Paskov avait besoin d'évaluer une intégrale dans un espace de dimension 360. L'utilisation de nombres quasi-aléatoires lui a permis de réduire considérablement le temps de calcul et ainsi de produire un outil permettant de retourner le prix d'un *CMO* en quelques minutes contre quelques heures avec la méthode reposant sur un générateur pseudo-aléatoire, soit un gain considérable en temps de calcul.

<sup>1</sup> Obligation garantie par une hypothèque

<sup>2</sup> « New Methodologies for Valuing Derivatives »

À travers ces quatre exemples, nous avons pu montrer l'intérêt de ces nombres quasi-aléatoires. L'objectif initial était incontestablement de réduire le temps de calcul de l'outil, la solution retenue fut de travailler avec les nombres quasi-aléatoires. Ils nous ont permis de diminuer le nombre de simulations et donc de gagner en temps de calcul mais également en précision.

Dans la suite du mémoire, dès lors que des tirages aléatoires seront nécessaires, ils seront produits par une méthode de génération quasi-aléatoire via l'algorithme du Tore mélangé.

Nous proposons à présent de comparer les approches non-paramétrique et paramétrique sur deux exemples, le risque action et le risque de taux.

## 2. Risque action

### a. Approche non-paramétrique

Pour illustrer l'approche non-paramétrique sur le risque action, nous considérons l'action Deutsch Bank AG valorisée sur le marché allemand XETRA basée à Frankfurt. L'historique que nous utilisons s'étale du 06/09/2004 au 31/12/2013, nous récupérons le cours de l'action sur cette période pour les jours où le marché était ouvert.

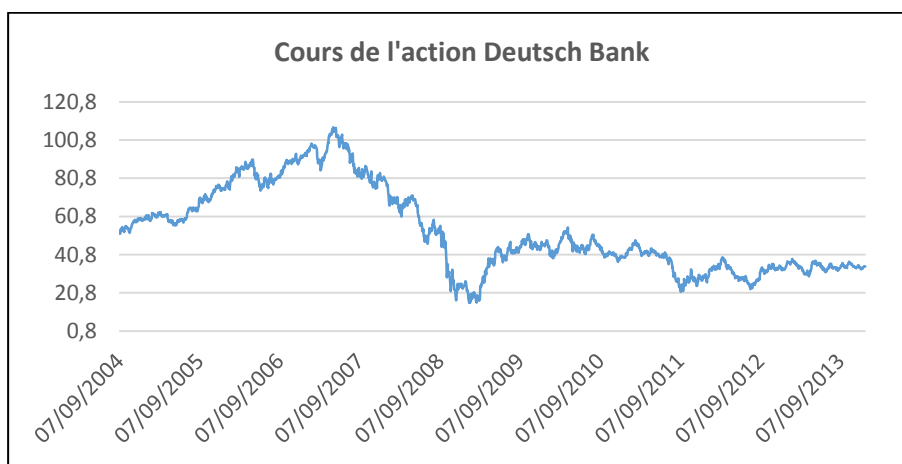


Figure 8 – Cours de l'action Deutsch Bank du 06/09/2004 au 31/12/2013

À partir du cours  $S_t$ , nous pouvons calculer les variations journalières :

$$r_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$$

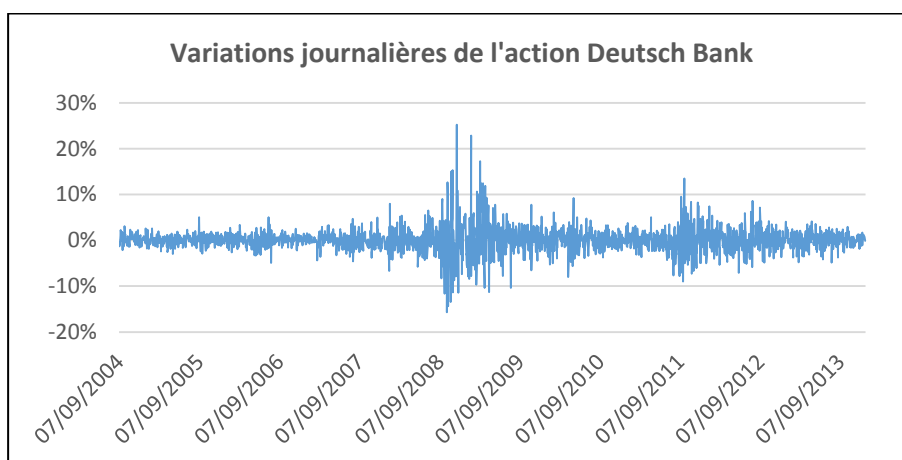


Figure 9 – Variations journalières de l'action Deutsch Bank



Nous remarquons les périodes de fortes variations depuis fin 2007 avec la crise des subprimes et financière.

Pour projeter le cours de l'action, nous allons tirer aléatoirement des variations dans l'historique des variations journalières et nous allons les appliquer à la valeur au 31/12/2013 à fin de projeter le niveau du cours de l'action à 1 an. Nous ferons l'hypothèse qu'une année de cotation contient 252 jours, ainsi pour projeter à un an il nous faudra tirer 252 variations.

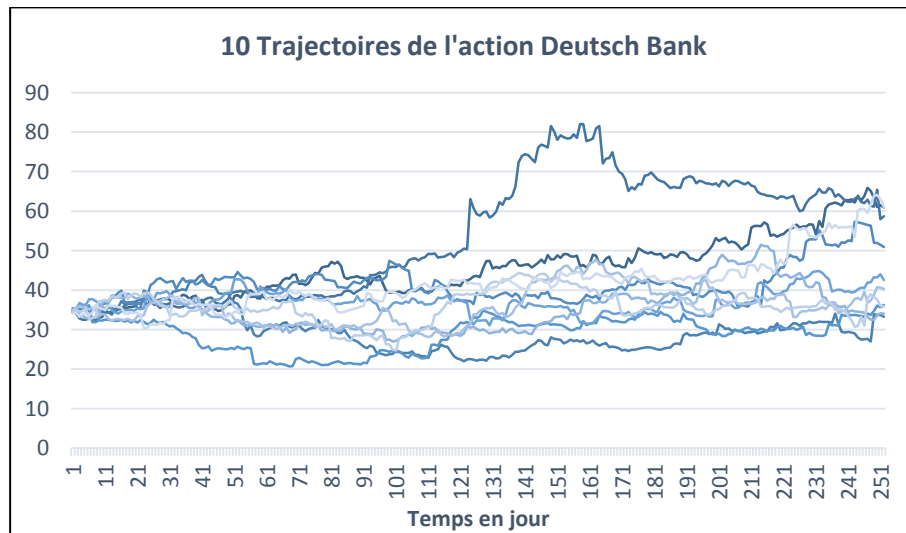


Figure 10 – 10 Trajectoires de l'action Deutsch Bank

Nous remarquons une projection assez volatile, marquée par des sauts d'amplieurs variables. Ces projections nous permettent de déduire une distribution du niveau de l'action Deutsch Bank à l'horizon de temps souhaité.

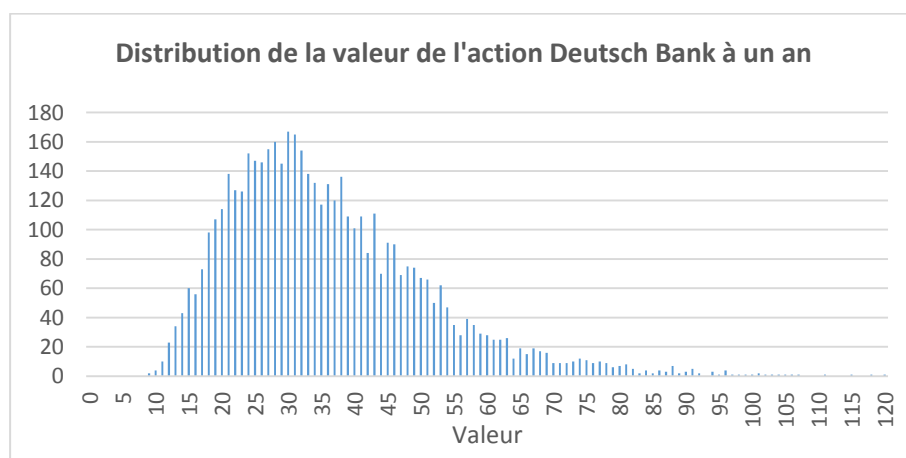


Figure 11 – Distribution de la valeur de l'action Deutsch Bank à un an

## b. Mouvement brownien géométrique

L'hypothèse faite ici est que le cours de l'action suit un processus qui est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Où  $\mu$  est le rendement par unité de temps

$\sigma$  est la volatilité instantanée

$W_t$  est un mouvement brownien standard

Cette équation se résout explicitement grâce au lemme d'Itô. En effet nous avons :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t = d \ln S_t$$

Le lemme d'Itô nous donne :

$$dF(X_t, t) = \frac{\partial F(X_t, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial F(X_t, t)}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(X_t, t)}{\partial x^2} (dX_t)^2$$

Où  $F(x, t)$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$

$X_t$  est un processus stochastique solution de  $dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$

$W_t$  est un mouvement brownien standard

Appliqué à la fonction  $F(S_t, t) = \ln(S_t)$ , nous obtenons :

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t$$

$$\frac{\partial F(S_t, t)}{\partial t} dt = 0$$

$$\frac{\partial F(S_t, t)}{\partial x} dS_t = \frac{1}{S_t} dS_t$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(S_t, t)}{\partial x^2} (dS_t)^2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} (dS_t)^2 \approx -\frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt = -\frac{\sigma^2}{2} dt$$

Puisque :

$$(dS_t)^2 = (S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t)^2 \approx \sigma^2 S_t^2 dt$$

Finalement nous obtenons :

$$d \ln S_t = \frac{1}{S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - \frac{\sigma^2}{2} dt = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t$$

Et par intégration :

$$\ln S_t = \ln(S_0) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t$$

Et en passant à l'exponentielle :

$$S_t = \exp \left( \ln(S_0) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right)$$

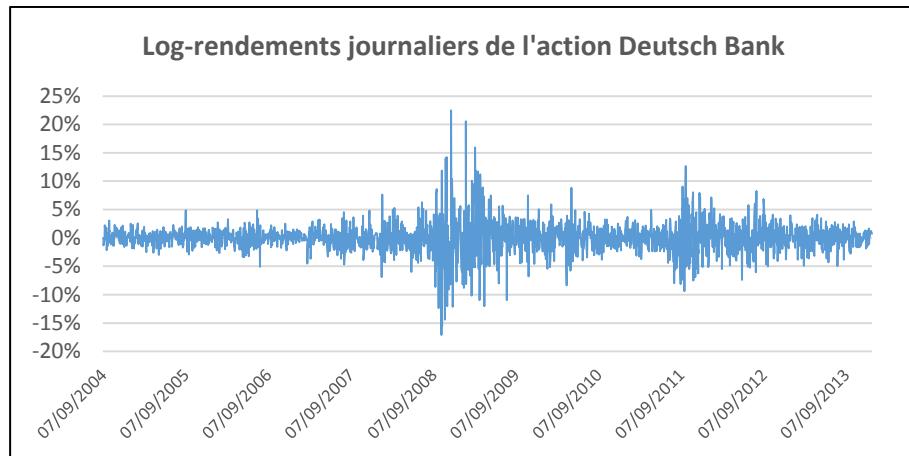
Nous trouvons que  $S_t$  suit une loi log-normale de paramètres  $\ln(S_0) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t$  et  $\sigma\sqrt{t}$  car  $\sigma W_t = \sigma\sqrt{t}W_1$  car  $W_t$  suit une loi Normale  $\mathcal{N}(0, t)$  et donc nous pouvons utiliser la simplification suivante  $W_t = \sqrt{t} W_1$ .

Afin d'effectuer des projections du cours de l'action, il va falloir estimer les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ . L'hypothèse historique retenue est celle de normalité et d'indépendance des log-rendements. L'estimation des paramètres est donc identique à l'estimation des paramètres pour une loi Normale. Notons  $m = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$ , le drift du brownien géométrique.

Nous avons donc :

$$r_i = \ln \left( \frac{S_i}{S_{i-1}} \right)$$

Nous observons graphiquement 2358 log-rendements sur la période considérée :



**Figure 12 – Log-rendements journaliers de l’action Deutsch Bank**

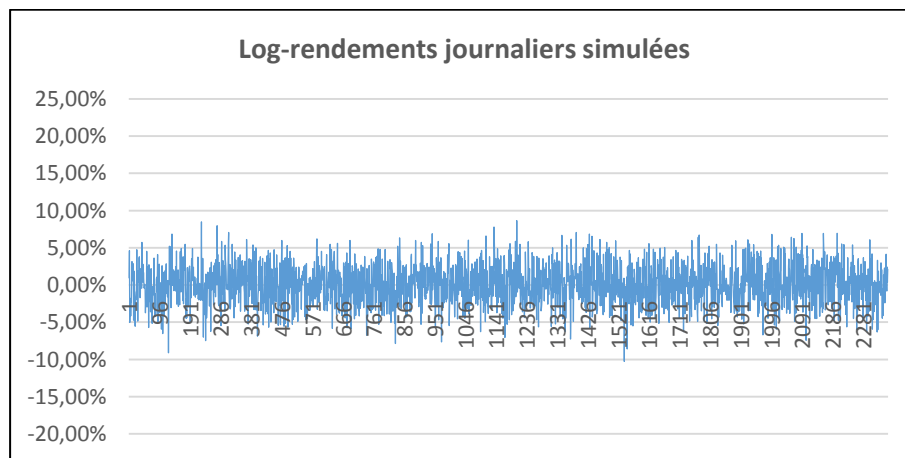
Nous obtenons les estimations suivantes :

$$\hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i = -0,0183 \%$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - \hat{m})^2 = 0,0678 \%$$

Nous pouvons en déduire  $\hat{\mu} = 0,0156 \%$ .

Nous simulons un échantillon de 2358 lois Normale de paramètres  $\hat{m}$  et  $\hat{\sigma}$ , voici un *plot* simple de ces réalisations :



**Figure 13 – Log-rendements journaliers de l’action Deutsch Bank**

Nous remarquons immédiatement la différence avec le graphique présenté en figure 11. La volatilité des log-rendements simulés est bien moindre que celle présentée par les log-rendements observés, il semblerait donc que l'adéquation à une loi Normale ne soit pas parfaite.

Comparons maintenant la densité d'une loi Normale de paramètres  $\hat{m}$  et  $\hat{\sigma}$  avec la fonction de densité empirique associée aux log-rendements observés afin de vérifier graphiquement si l'adéquation à une loi Normale paraît cohérente.

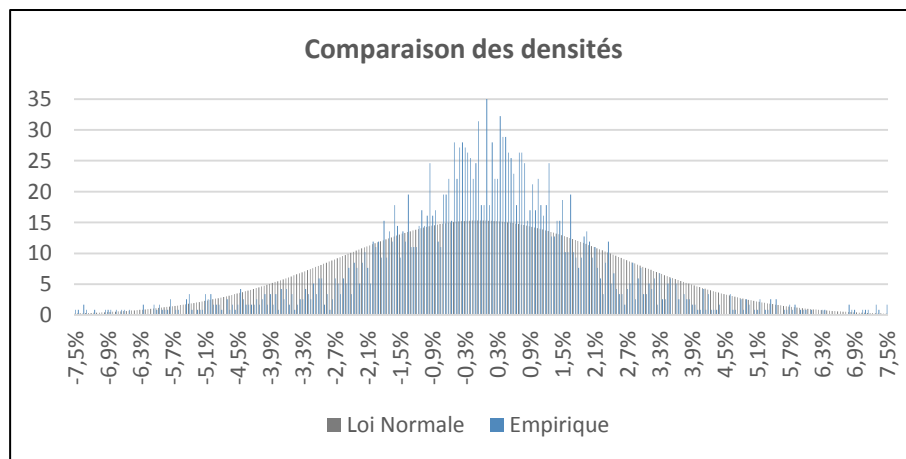


Figure 14 – Comparaison des densités empirique et Normale

La différence entre les deux densités est très marquée, cela confirme le caractère non-normal des log-rendements. Nous pouvons également tracer le diagramme quantile-quantile afin d'observer l'adéquation à la loi Normale.

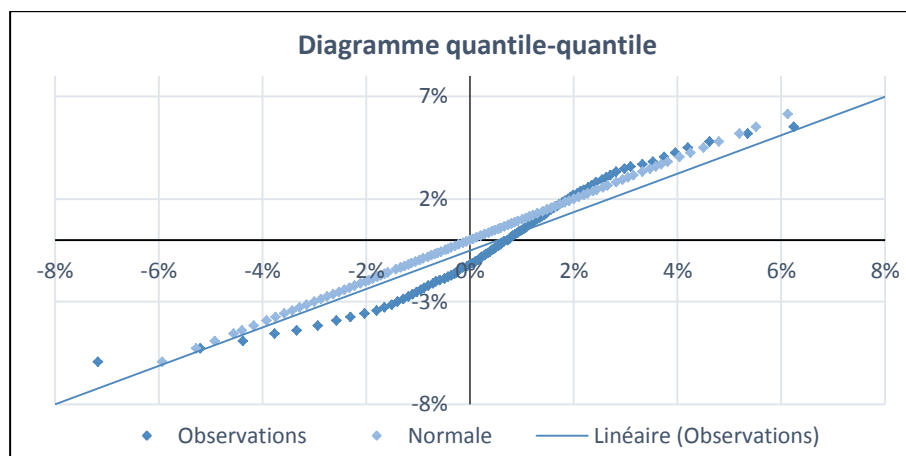


Figure 15 – Diagramme quantile-quantile

Le diagramme quantile-quantile nous renseigne sur la qualité de l'adéquation à la loi Normale, si l'adéquation est parfaite, alors les quantiles des observations centrées et réduites, représentés en bleu foncés, doivent correspondre aux quantiles de la loi Normale centrée et réduite, représentés en bleu ciel, ce qui n'est pas le cas. La droite issue d'une régression linéaire sur les quantiles des observations centrées réduites admet pour équation :

$$y = 0,9354 x - 0,0051$$

L'ajustement n'est donc pas probant car si l'adéquation à une loi Normale serait justifiée si cette droite d'équation aurait comme équation  $y = x$  à cause de l'égalité des quantiles.

L'hypothèse de normalité des log-rendements est rejetée par une analyse graphique. L'utilisation d'un test statistique n'est pas nécessaire tant la différence entre les deux densités est marquée. Néanmoins, nous allons conserver les paramètres estimés précédemment et poursuivre le raisonnement puisque c'est l'hypothèse retenue pour la projection via mouvement brownien géométrique.

Pour simuler différentes trajectoires de taux il faut discrétiser le processus  $S_t$ . En effet nous allons chercher la valeur du taux non pas d'une manière continue qui est impossible à implémenter mais à chaque pas de discrétisation.

Nous avons :

$$\frac{S_{t+\tau}}{S_t} = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t + \tau - t) + \sigma(W_{t+\tau} - W_t)\right) = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma\sqrt{\tau}W_1\right)$$

Puisque  $W_{t+\tau} - W_t$  est de même loi que  $W_{t+\tau-t} = W_\tau$  par propriété de stationnarité des accroissements du mouvement brownien. Et comme  $W_\tau$  suit une loi Normale  $\mathcal{N}(0, \tau)$ , nous pouvons utiliser la simplification suivante  $W_\tau = \sqrt{\tau} W_1$

Nous en déduisons l'expression :

$$S_{t+\tau} = S_t \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma\sqrt{\tau}W_1\right)$$

À partir de la valeur observée au 31/12/2013 et des paramètres  $\hat{\mu}$  et  $\hat{\sigma}^2$  nous pouvons projeter le cours de l'action à un horizon d'un an avec un pas  $\tau$  d'un jour.

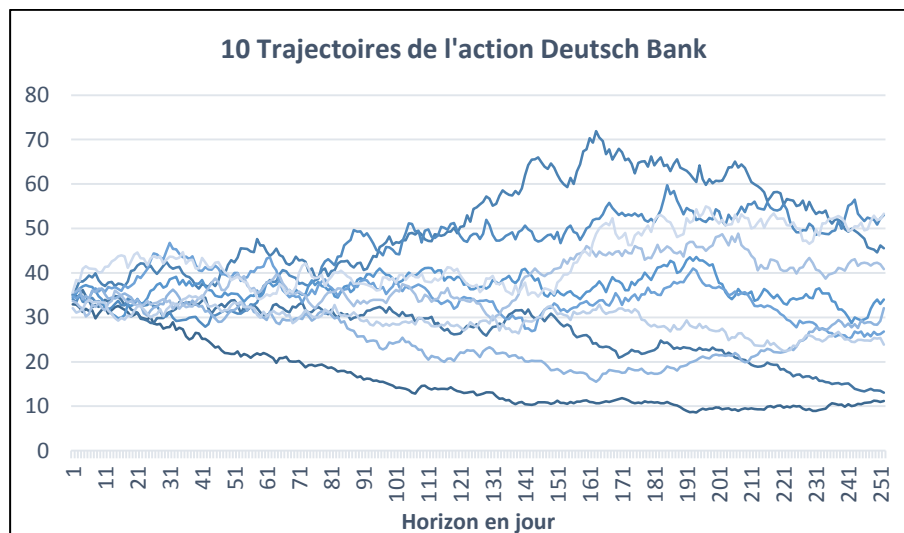


Figure 16 – 10 Trajectoires de l'action Deutsch Bank

Nous remarquons une volatilité également assez marquée mais il est assez difficile à la vue de ces résultats de différencier les deux méthodes de projection. De plus, comme nous l'avons remarqué, l'hypothèse de normalité des log-rendements est très forte puisque la densité empirique des log-rendements et celle de loi Normale de paramètres estimés à l'aide des observations ne se ressemblent pas.

Afin de comparer les résultats obtenus, nous allons mettre en place un processus de type *Backtesting* sur l'année 2013 afin de mettre en évidence quelle est la meilleure façon de projeter le cours de l'action à l'aide de critères statistiques robustes.

### c. Backtesting

Le *Backtesting* est défini ainsi par Philippe Jorion<sup>1</sup> :

« Le *Backtesting* est un ensemble de procédures statistiques dont le but est de vérifier que les pertes réelles observées *ex-post* sont en adéquation avec pertes prévues *ex-ante*. Cela implique de comparer systématiquement l'historique des prévisions de *Value-at-Risk* aux rendements observés du portefeuille »

Nous souhaitons effectuer un *Backtesting* sur l'année 2013 et sur le cours de l'action Deutsch Bank AG. Pour se faire, nous allons utiliser pour la méthode de projection *Bootstrap* historique l'historique jusqu'au 31/12/2012 et pour la méthode de projection via Brownien géométrique, nous allons estimer nos paramètres sur l'historique disponible jusqu'au 31/12/2012. Nous allons ensuite projeter au jour le jour le cours de l'action. À partir de deux jeux de 2 000 scénarios de cours, nous pouvons obtenir la distribution au jour le jour, nous pouvons ensuite identifier deux *VaR* au seuil 5 % pour le cours du jour suivant, obtenues via la méthode *Bootstrap* historique et via la méthode de projection utilisant un Brownien géométrique. Nous comparerons ensuite le cours réellement observé par rapport aux deux prédictions de *VaR* sur toute l'année 2013.

Notons que le *Backtesting* est une procédure obligatoire pour les institutions financières soumises à la réglementation Bâle II qui ont mis en place des modèles d'évaluation internes de la *VaR*.

Définissons la *hit function* comme l'indicatrice associée à l'observation *ex-post* de la violation de la prédiction de la *VaR ex-ante* :

$$I_t(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } S_t < VaR_{t|t-1}(\alpha) \\ 0 & \text{si } S_t > VaR_{t|t-1}(\alpha) \end{cases}$$

Où  $S_t$  est le cours observé en t

$VaR_{t|t-1}(\alpha)$  est la *VaR* de niveau  $\alpha$  estimée en t-1 qui prévaut en t

---

<sup>1</sup> Ouvrage : « *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk* »



Peter Christoffersen<sup>1</sup> estime qu'une prévision de *VaR* est valide si la suite des  $I_t$  satisfait à l'hypothèse de couverture non-conditionnelle et à l'hypothèse d'indépendance terme à terme.

L'hypothèse de couverture non-conditionnelle est satisfaite si la probabilité de réalisation *ex-post* d'une violation de la *VaR ex-ante* est précisément égale au taux de couverture de la *VaR*. C'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(I_t(\alpha) = 1) = \mathbb{E}(I_t(\alpha)) = \alpha$$

Sous cette hypothèse de couverture non-conditionnelle, nous avons que la variable  $I_t(\alpha)$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\alpha$ .

Nous définissons le *failure rate* comme la somme des termes de la séquence des *hit functions* divisée par le nombre d'observations. Nous avons :

$$\frac{N}{T} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T I_t(\alpha)$$

Sous l'hypothèse de couverture non-conditionnelle, nous avons :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{N}{T} = \alpha$$

Si nous admettons l'hypothèse d'indépendance des termes de la séquence, il est clair que  $N$  suit une loi Binomiale de paramètre  $T$  et  $\alpha$ .

En pratique,  $N$  suit une loi Binomiale de paramètre  $T$  et  $p$  inconnu. Il va donc falloir tester statistiquement si nous avons bien  $p = \alpha$

Nous proposons de tester cette hypothèse via deux tests, tout d'abord via une approximation Normale et ensuite via un test plus puissant s'appuyant sur les ratios de vraisemblance, le test de Kupiec.

---

<sup>1</sup> Article : «*Evaluation Interval Forecasts* »

➤ Approximation Normale

Si  $N$  suit une loi Binomiale de paramètre  $T$  et  $p$  alors nous avons :

$$\mathbb{E}(N) = pT$$

$$Var(N) = p(1 - p)T$$

Nous allons comparer cette statistique de test à une loi Normale centrée réduite. Les hypothèses à tester sont :

$$H_0 : \mathbb{E}(N) = \alpha T$$

$$H_1 : \mathbb{E}(N) \neq \alpha T$$

Sous l'hypothèse  $H_0$  nous pouvons construire la statistique de test  $z$  :

$$z = \frac{N - \alpha T}{\sqrt{\alpha(1 - \alpha)T}}$$

Nous allons calculer les statistiques de test sur une année de projection au jour le jour qui repose sur des *VaR* estimées à l'aide de 2 000 scénarios quotidiens.

Avec  $T = 252$  jours et avec un seuil de 5 % nous nous attendons à observer 12,6 violations. Pour la méthode de projection basée sur le *Bootstrap* historique, nous observons 7 violations et obtenons une statistique de -1,62 et pour la méthode de projection basée sur le Brownien géométrique, nous observons 2 violations et obtenons une statistique de -3,06.

Nous comparons ces deux statistiques de test au quantile d'ordre  $1 - \frac{\alpha}{2}$  d'une loi Normale centrée réduite. Ce quantile vaut en valeur absolue 1,96. Nous en déduisons donc que l'hypothèse  $H_0$  n'est pas rejetée pour un niveau de risque de première espèce de 5 % pour la méthode de projection via *Bootstrap* historique car la valeur de la statistique de test est inférieure en valeur absolue au quantile en valeur absolue. L'hypothèse  $H_0$  est cependant rejetée pour la méthode de projection basée sur le Brownien géométrique.

➤ Test de Kupiec

Kupiec<sup>1</sup> propose un test basé sur le ratio de vraisemblance. L'hypothèse  $H_0$  reste la même mais il compare la valeur ratio de vraisemblance  $RV$  à une loi du Chi-deux à un degré de liberté :

$$RV = -2 \ln[(1 - \alpha)^{T-N} \alpha^N] + 2 \ln \left[ \left(1 - \frac{N}{T}\right)^{T-N} \left(\frac{N}{T}\right)^N \right]$$

Nous obtenons un ratio de vraisemblance de 3,10 pour la méthode de projection basée sur le *Bootstrap* historique et de 14,3 pour la méthode de projection basée sur le Brownien géométrique.

Le quantile d'ordre 95 % d'une loi du Chi-Deux à un degré de liberté vaut 3,84. L'hypothèse  $H_0$  n'est donc pas rejetée pour la méthode *Bootstrap* historique mais est rejetée pour la méthode basée sur le Brownien géométrique.

En conclusion, en se basant sur les résultats du *Backtesting*, nous pouvons dire que la méthode de projection via *Bootstrap* historique est mieux adaptée que la méthode basée sur le Brownien géométrique car elle offre une meilleure capacité de prédiction et produit une volatilité en adéquation avec le cours étudié, elle permet donc de projeter plus justement.

---

<sup>1</sup> Article : « Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models »

### 3. Risque de taux

#### a. Approche non-paramétrique

La courbe de taux utilisée est la courbe EUSR au 31/12/2013, éditée par *Bloomberg*. Cette courbe est établie à partir des obligations d'Etats, libellées en euro, c'est une combinaison des courbes de taux des Etats ayant une notation AAA par *Fitch* à la date de construction.

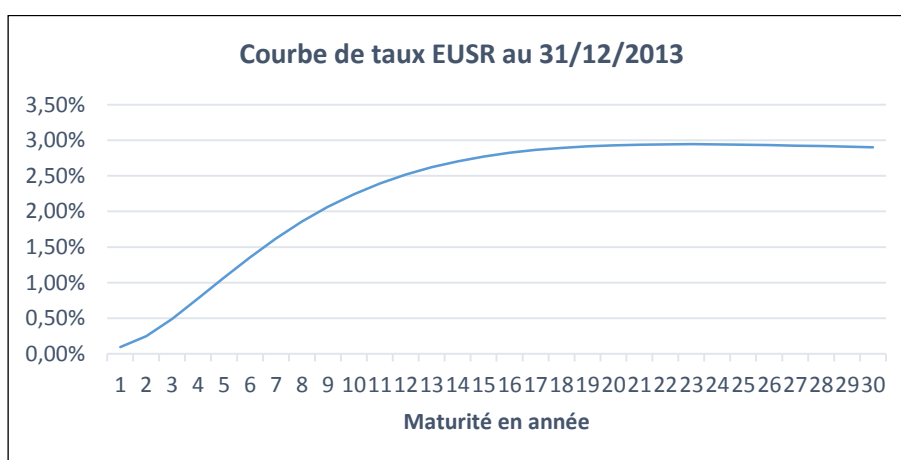


Figure 17 – Courbe de taux EUSR 31/12/2013

Pour utiliser la méthode de projection non-paramétrique, il faut récupérer l'historique de cette courbe, nous utilisons *Bloomberg* afin de récupérer son historique. La courbe de taux est caractérisée par une multitude de taux de différentes maturités. Chacune de ces maturités sera considérée comme un indice de risque différent, nous aurons donc à projeter trente indices car la courbe est caractérisée par trente taux de maturités allant de 1 à 30.

À partir de la courbe au 31/12/2013, nous projetons la courbe jour par jour grâce à la méthode de projection décrite dans la partie III. 1. b.

Voici les résultats obtenus pour 10 simulations :

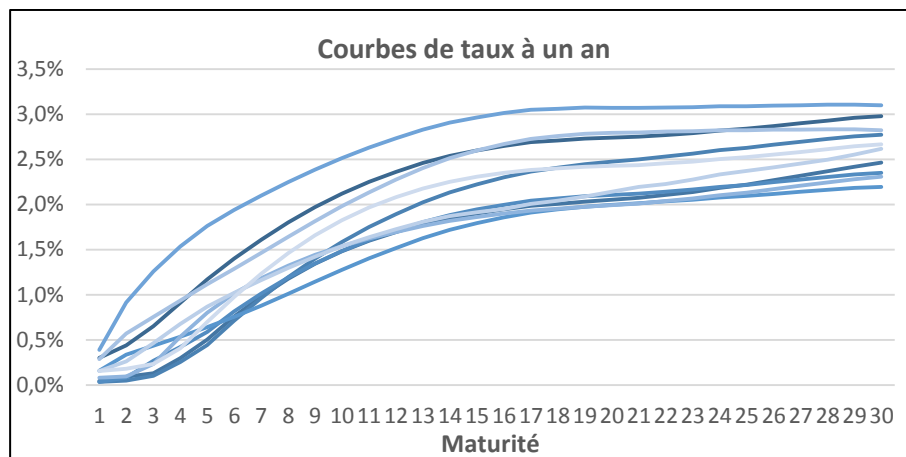


Figure 18 – Courbes de taux à un an

Nous pouvons remarquer une certaine volatilité des taux et cela à chaque maturité. Il apparait des disparités importantes au niveau des taux et ce même à des maturités faibles. Il est bon de rappeler que ces courbes ont été obtenues avec la méthode de projection basée sur le *Bootstrap* historique et donc résultent d'une application de variations déjà observées, ces courbes sont donc probables malgré leur aspect particulier.

## b. Modèle de Cox-Ingersoll-Ross

Le prix d'une obligation zéro-coupon supposée sans risque à la date  $t$  et de maturité  $T$  se définit comme le montant à investir afin de récupérer 1 € en  $T$ , notons ce prix  $B(t, T)$ .

Le taux au comptant ou encore taux spot est solution de l'équation :

$$R(t, T) = -\frac{\log(B(t, T))}{T - t}$$

Le taux au court est défini comme la limite du taux spot lorsque  $T$  tend vers  $t$  :

$$r(t) = \lim_{T \searrow t} R(t, T)$$

Nous proposons de modéliser la dynamique du taux court par un processus de taux.

Il existe une multitude de modèles de taux, qu'il soit d'équilibre ou d'arbitrage, mono ou multifactoriel. Le processus de taux d'intérêt  $r_t$  relatif à un modèle d'équilibre, basé sur un seul facteur stochastique est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma r_t^\kappa dW_t^{\mathbb{Q}}$$

Où  $a > 0$  est la force de retour à la moyenne

$b > 0$  est la moyenne des taux à long terme

$\sigma > 0$  est la volatilité instantanée du taux

$W_t$  est mouvement brownien standard sous la probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}$

En prenant  $\kappa$  égal à 0 nous retrouvons le modèle de Vasicek et en prenant  $\kappa$  égal à 0,5 nous retrouvons le modèle de Cox-Ingersoll-Rox. Quel que soit le  $\kappa$ , nous avons un effet de retour à la moyenne  $b$ , qui représente la valeur du taux court à long terme, et ceci à une force  $a$  qui correspond à la vitesse à laquelle le taux va converger vers sa valeur moyenne. En effet, si  $r_t$  est inférieur à  $b$ , nous observons alors que la variation  $dr_t$  admet une espérance positive car le terme  $(b - r_t)$  sera positif et le terme  $\sigma r_t^\kappa dW_t^{\mathbb{Q}}$  est d'espérance nulle, le processus  $r_t$  aura donc tendance à se rapprocher de  $b$  de manière croissante. Inversement, si  $r_t$  est supérieur à  $b$ , nous avons que la variation  $dr_t$  admet une espérance négative car le terme  $(b - r_t)$  sera négatif et le terme  $\sigma r_t^\kappa dW_t^{\mathbb{Q}}$  admet toujours une espérance nulle, le processus  $r_t$  aura tendance à approcher  $b$  de manière décroissante.

Le choix d'un modèle de taux n'est pas facile, chaque modèle présente ses avantages et inconvénients. Le modèle de Vasicek repose sur l'équation différentielle vue précédemment, avec  $\kappa$  égal à 0. Ce qui signifie que  $r_t$  suit un processus gaussien qui ne garantit pas la positivité des taux. C'est le défaut majeur de ce modèle, c'est pourquoi nous préférons à celui-ci le modèle de Cox-Ingersoll-Ross qui ne permet pas au taux d'être négatif<sup>1</sup>. De plus, dans le modèle de Cox-Ingersoll-Ross, la volatilité instantanée dépend de la racine carré du taux observé à l'instant  $t$  et donc n'est pas constante. Plus généralement si le taux d'intérêt s'approche de 0, comme la volatilité  $\sigma\sqrt{r_t}$  décroît également vers 0, c'est le terme  $a(b - r_t)$  qui va dominer pour la future variation, or comme nous l'avons vu précédemment, quand  $r_t$  est petit, plus petit que  $b$ , le taux sera tiré vers le haut, ce qui garantit un effet répulsif aux alentours de 0 et ce vers des valeurs positive.

L'équation différentielle stochastique :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t^{\mathbb{Q}}$$

admet une unique solution sous la probabilité risque neutre donnée par :

$$r_t = r_0 + \int_0^t a(b - r_s)ds + \int_0^t \sigma\sqrt{r_s}dW_s^{\mathbb{Q}} \quad (*)$$

Intéressons-nous maintenant aux prix des zéro-coupons.

Si les taux d'intérêts sont déterministes alors le prix d'un zéro-coupon en date  $t$  et de maturité  $T-t$  est :

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)$$

Si les taux d'intérêts sont aléatoires alors le prix d'un zéro-coupon en date  $t$  et de maturité  $T-t$ , sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage est :

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \middle| \mathcal{F}_t\right)$$

Où la tribu  $\mathcal{F}_t$  représente l'information disponible à la date  $t$ .

---

<sup>1</sup> Notons que des taux négatifs ont pu être observés sur les marchés ces dernières années

Sous l'hypothèse que les taux d'intérêts suivent le processus (\*), nous avons une formule fermée pour le prix des zéro-coupons donnée par :

$$P(t, T) = A(t, T) \exp(-C(t, T) r_t)$$

Avec

$$A(t, T) = \left( \frac{2\gamma \exp\left(\frac{(a + \gamma)(T - t)}{2}\right)}{2\gamma + (a + \gamma)(\exp(\gamma(T - t)) - 1)} \right)^{\frac{2ab}{\sigma^2}}$$

$$C(t, T) = \frac{2\gamma (\exp(\gamma(T - t)) - 1)}{2\gamma + (a + \gamma)(\exp(\gamma(T - t)) - 1)}$$

$$\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$$

Pour simuler différentes trajectoires de taux il faut discrétiser le processus  $r_t$ . En effet nous allons chercher la valeur du taux non pas d'une manière continue qui est impossible à implémenter mais à chaque pas de discrétisation.

Posons  $\tau$  le pas de la discrétisation, nous avons :

$$r_{t+\tau} = r_t + \int_t^{t+\tau} a(b - r_s) ds + \int_t^{t+\tau} \sigma \sqrt{r_s} dW_s^{\mathbb{Q}}$$

Pour discrétiser ce processus, il faut s'appuyer sur une méthode de discrétisation. La méthode retenue est la méthode d'Euler. Une solution donnée par cette approche est de considérer les fonctions dans les intégrales comme constantes sur l'intervalle de temps considéré. Nous obtenons ainsi un développement d'Itô-Taylor à l'ordre 1 de  $r_{t+\tau}$  :

$$r_{t+\tau} \approx r_t + a(b - r_t)(t + \tau - t) + \sigma \sqrt{r_t}(W_{t+\tau} - W_t)$$

Or  $W_{t+\tau} - W_t$  est de même loi que  $W_{t+\tau-t} = W_\tau$  par propriété de stationnarité des accroissements du mouvement brownien. Et comme  $W_\tau$  suit une loi Normale  $\mathcal{N}(0, \tau)$ , nous pouvons utiliser la simplification suivante  $W_\tau = \sqrt{\tau} W_1$  et obtenons :

$$r_{t+\tau} \approx r_t + \tau a(b - r_t) + \sigma \sqrt{r_t \tau} W_1$$



Pour simuler une trajectoire de ce processus, à chaque étape de simulation, nous simulons une loi Normale centrée réduite  $W_1$  et nous incrémentons  $r_t$  d'une variation :

$$dr_t = \tau a(b - r_t) + \sigma \sqrt{r_t \tau} W_1$$

À noter que la condition  $2ab > \sigma^2$  doit être vérifiée afin de garder un taux strictement positif lors de la discrétisation. Lorsque l'on considère le processus non-discrétisé, cette condition n'est pas nécessaire mais dès lors que l'on utilise une méthode de discrétisation elle devient indispensable. Cette condition permet de maintenir un drift suffisamment important afin de garantir que le processus n'atteigne pas 0.

Il reste à estimer les paramètres du modèle, pour se faire nous allons utiliser la méthode de Moindres Carrés Ordinaires avec comme cible l'écart entre la valeur des zéros coupons issus de la courbe de taux observée et les prix théoriques donnés par le modèle.

La courbe de taux utilisée est la même que pour l'approche non-paramétrique. Nous nous plaçons au 31/12/2013 pour estimer nos paramètres. Le prix d'un zéro-coupon de maturité T adossée à cette courbe de taux vaut :

$$\tilde{P}(0, T) = \frac{1}{(1 + r_T)^T}$$

C'est en fait la valeur que l'on investit au 31/12/2013 au taux  $r_T$  afin de récupérer 1 € à l'horizon de temps T.

Nous obtenons alors la courbe de prix zéro-coupons issue de cette courbe :

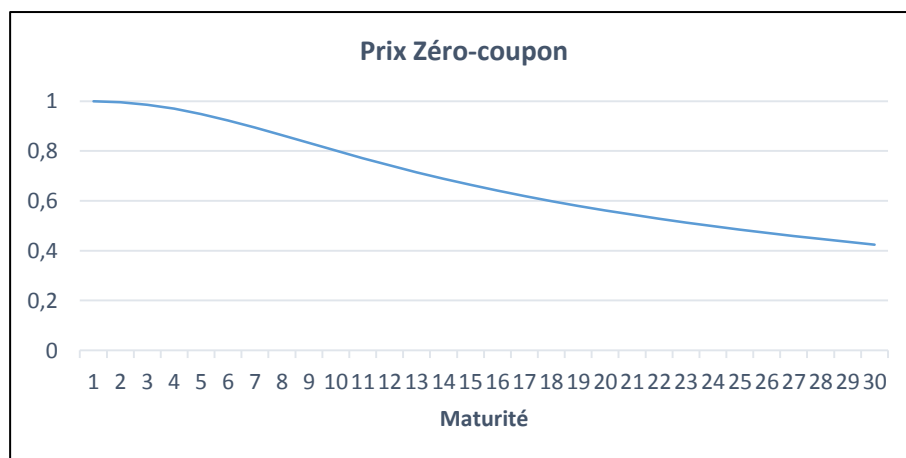


Figure 19 – Courbe de prix ZC issue de la courbe de taux EUSR 31/12/2013

Nous souhaitons trouver  $a^*$ ,  $b^*$  et  $\sigma^*$  tels que :

$$(a^*, b^*, \sigma^*) = \operatorname{Argmin} \left( \sum_{i=0}^n (\tilde{P}(0, i) - P(0, i))^2 \right)$$

Où  $i$  représente les différentes maturités.

Nous fixons  $\sigma^*$  à 1,48% qui correspond à la volatilité journalière du taux de maturité un an observé sur l'historique disponible, à savoir du 06/09/2004 au 31/12/2013. Le programme de minimisation de la somme des carrés des erreurs d'approximation du prix donne comme résultats :

$$a^* = 25,24\%$$

$$b^* = 3,46\%$$

Nous pouvons à présent comparer les prix des zéro-coupons avec la formule fermée et ceux issus directement de la courbe de taux EUSR afin de vérifier si la régression est probante. Graphiquement les deux courbes de prix sont très proches :

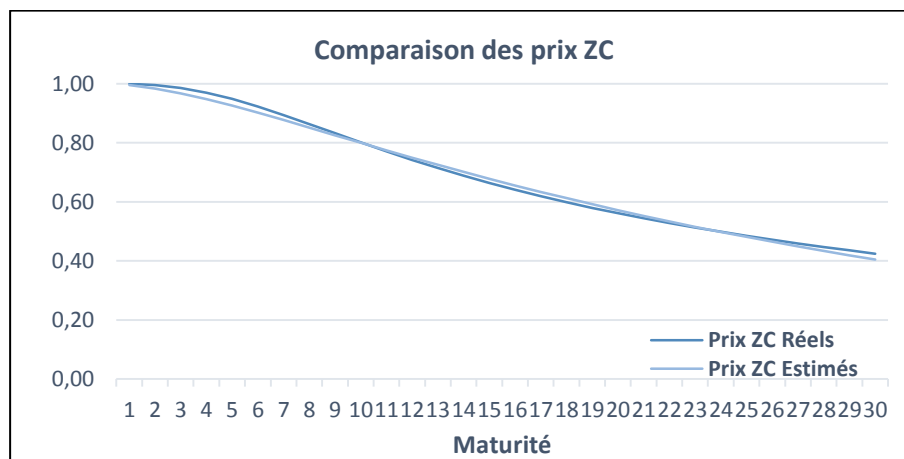


Figure 20 – Comparaison des courbes de prix ZC

Le  $R^2$  associé à cette régression est de 99,60 %, elle peut donc être qualifiée d'efficace. Les paramètres du modèle ont été estimés via une méthode d'estimation *ad hoc*, cela signifie nous avons pris comme cible une variable autre que la variable d'intérêt pour estimer les paramètres. Concrètement, nous avons choisi d'effectuer une régression sur les prix afin d'en déduire les paramètres du processus de taux court puisqu'il existe une relation entre ces deux variables, exprimée par une formule fermée.

Nous pouvons à présent projeter le taux court.

Voici une réalisation de 10 scénarios de taux courts avec les paramètres estimés et avec un pas de discrétisation d'un jour :

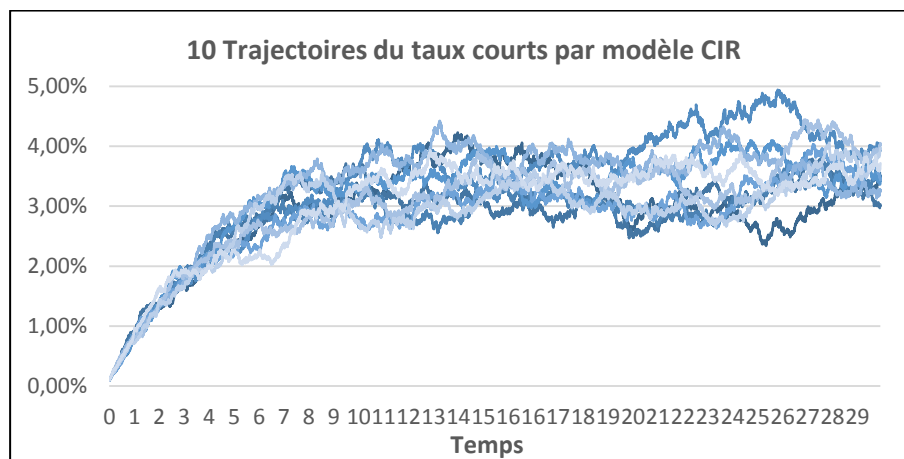


Figure 21 – 10 Trajectoires de taux courts par modèle CIR

Nous remarquons que les différentes trajectoires tendent vers  $b^*$  ce qui est cohérent car il représente la valeur limite du taux court. Les taux mettent environ 15 ans avant de converger vers  $b^*$ . Les taux courts simulés sont peu variables lorsque la maturité est faible, elle augmente avec le temps.

Le taux court va nous permettre de déduire à chaque maturité la courbe de taux issue du modèle car il permet de calculer le prix des zéro-coupons.

L'expression de la courbe des taux futurs est :

$$R(t, T) = - \frac{\ln(P(t, T))}{T - t}$$

Nous souhaitons obtenir une courbe de taux à un an. Aux 10 scénarios de taux observés précédemment, nous en déduisons 10 courbes de taux différentes à un an. Graphiquement :

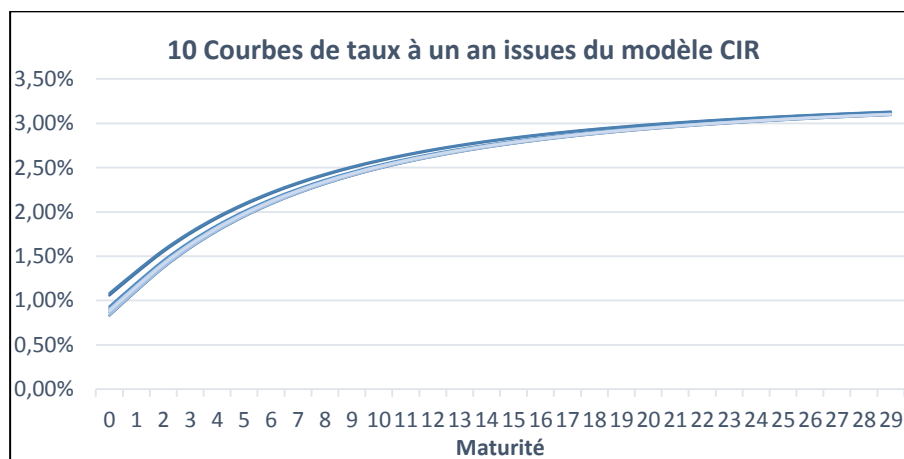


Figure 22 – 10 Courbes de taux à un an issues du modèle CIR

Nous pouvons remarquer que les courbes obtenues sont très peu volatiles, ce phénomène s'explique par le fait que la courbe est uniquement caractérisée par le niveau taux court à un an puisque le prix  $P(1, T)$  dépend du taux  $r_1$  qui change à chaque simulation mais aussi des termes  $A(1, T)$  et  $C(1, T)$  qui eux sont égaux à chaque simulation puisqu'ils dépendent uniquement des paramètres  $a^*, b^*, \sigma^*$  qui sont fixes. Le processus de taux ne produit pas une forte volatilité pour des maturités courtes, il en découle une forte ressemblance entre les courbes de taux obtenues.

### c. Comparaison des prix des zéros coupons

Pour comparer les deux méthodes de projection, nous allons comparer les prix des zéro-coupons avec ces nouvelles courbes de taux aux maturités 1, 5, 10 et 20 ans. Les résultats sont présents dans le tableau suivant :

| Maturité | Moyenne |                  | Médiane |                  | VaR 0,5 % |                  | TVaR 0,5 % |                  |
|----------|---------|------------------|---------|------------------|-----------|------------------|------------|------------------|
|          | CIR     | <i>Bootstrap</i> | CIR     | <i>Bootstrap</i> | CIR       | <i>Bootstrap</i> | CIR        | <i>Bootstrap</i> |
| 1 an     | 0,9886  | 0,9949           | 0,9886  | 0,9997           | 0,9868    | 0,9137           | 0,9865     | 0,8644           |
| 5 ans    | 0,9067  | 0,9594           | 0,9067  | 0,9624           | 0,9015    | 0,8802           | 0,9007     | 0,8376           |
| 10 ans   | 0,7805  | 0,8277           | 0,7805  | 0,8287           | 0,7748    | 0,6788           | 0,7739     | 0,6365           |
| 20 ans   | 0,5595  | 0,5953           | 0,5595  | 0,5998           | 0,5552    | 0,4172           | 0,5545     | 0,3923           |

Tableau 7 – Comparaison des résultats avec modèle CIR et *Bootstrap* historique

À la vue de ces résultats, nous pouvons remarquer que la méthode de projection par *Bootstrap* historique donne des prix de zéro-coupon en moyenne légèrement plus élevés mais avec une plus grande volatilité. Avec le modèle Cox-Ingersoll-Ross, les courbes de taux ont tendance à se rapprocher plus la maturité augmente, les prix des zéro-coupons convergent donc en fonction de la maturité. Avec le *Bootstrap* historique, nous observons une volatilité des courbes de taux et ce à n'importe quelle maturité ce qui entraîne une plus grande variabilité des prix.

## IV. Besoin global de solvabilité

### 1. Problématique

Le *Business Plan* donne la contrainte temporelle à respecter au niveau de la solvabilité :

$$\mathbb{P}\left(\frac{FP_t}{SCR_t} \geq 175\% \right) \geq 80\% \quad \forall t \in \{1,2,3\}$$

Où  $FP_t$  est la valeur des fonds propres en fin d'année t

$SCR_t$  est la valeur du *SCR* calculée en fin d'année t

La recherche du besoin global de solvabilité va donc correspondre à vérifier si la valeur initiale des fonds propres permettra de respecter la contrainte de solvabilité. Pour se faire, il va falloir projeter le niveau de fonds propres de l'entreprise et également calculer les *SCR* à chaque date anniversaire durant la projection et ce jusqu'à l'horizon spécifié par le *Business Plan* puisque la contrainte en dépend et que nous en aurons besoin pour la partie respect permanent des exigences réglementaire de capital.

Il va donc falloir projeter les risques inhérents à l'activité de la mutuelle. Ces projections reposeront sur la méthode du *Bootstrap* historique qui a été précédemment présentée.

Les fonds propres de l'entreprise seront calculés à partir de 10 000 scénarios à chaque pas de temps et nous pourrons donc en déduire une distribution des fonds propres à chaque date. Les fonds propres seront issus d'une situation particulière du bilan qui sera induite par chaque scénario. À chaque bilan correspondra alors un montant de *SCR* qui sera calculé en fonction du scénario réalisé. En effet, le *SCR* calculé en fin de première année dépendra de la situation du portefeuille financier, obligatoire ou du niveau des prestations servies. Comme nous obtenons 10 000 réalisations de bilans, nous obtiendrons 10 000 réalisations de *SCR* et ce à un an, deux ans et trois ans.

## 2. Risque action

Les entreprises d'assurance investissent dans des actions afin d'améliorer leur performance financière, mais il va de soi que l'excès de rendement obtenu est dû à une augmentation du risque pris. Les entreprises sont exposées à la baisse des cours des actions détenues, ce choc représente une part importante du *SCR* car les chocs indiqués dans les textes de la directive Solvabilité II sont conséquents.

Le *SCR* pour le risque action est défini comme suit :

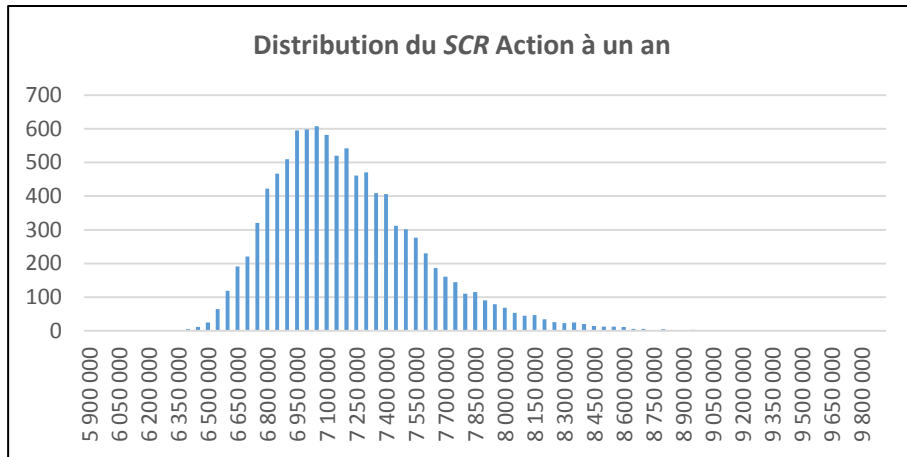
$$SCR_{Action} = Choc\_Action * VM_0$$

Où  $VM_0$  représente la valeur de marché initiale du portefeuille financier

$Choc\_Action$  représente le choc à appliquer à la valeur du portefeuille

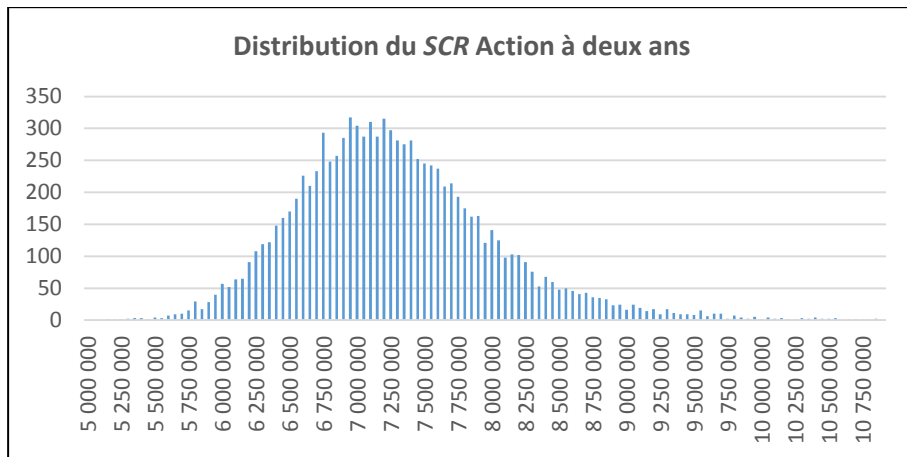
Le choc action dans les dernières spécifications de l'*EIOPA* est soit de 46,5 % pour les actions cotées sur des marchés régulés et appartenant à des entreprises de l'Espace Economique Européen ou à l'Organisation de Coopération et de Développement Economiques, soit de 56,5 % pour les autres. Ici toutes les actions font parties de l'Espace Economique Européen, le choc est donc de 46,5 %. Nous en déduisons un *SCR* pour le risque action de 4 650 000 € car la valeur du portefeuille d'actions est de 10 000 000.

À présent intéressons-nous à la projection du *SCR* Action. À la fin de la première année nous obtenons via la méthode de projection par *Bootstrap* historique, une distribution de la valeur du portefeuille financier après réallocation du résultat. Nous en déduisons la distribution du *SCR* Action à un an en appliquant le choc de 46,5 % à chacun des réalisations.



**Figure 23 – Distribution du SCR Action à un an**

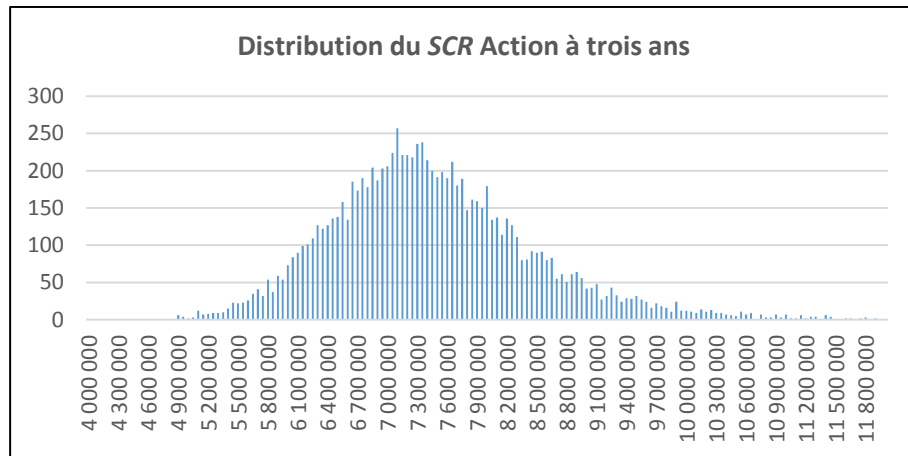
En projetant maintenant à deux ans, nous obtenons également la distribution du portefeuille financier et ainsi celle du *SCR Action* en fin de deuxième année en appliquant le choc sur la valeur du portefeuille.



**Figure 24 – Distribution du SCR Action à deux ans**

Nous procédons de même pour la projection à trois ans et obtenons la distribution du *SCR Action* en fin de troisième année.





**Figure 25 – Distribution du SCR Action à trois ans**

Nous pouvons remarquer que les distributions sont plus étendues, la volatilité des variables est augmentée, cela est cohérent puisque nous considérons un horizon temporel plus élevé et donc le cours des différentes actions qui composent le portefeuille peut prendre des valeurs dans un spectre plus large.

Pour alléger le corps du mémoire, seule la distribution à trois ans sera présentée pour les autres risques.

### 3. Risque de taux

Les organismes pratiquant l'assurance sont amenés à investir dans des obligations, que ce soit pour la sécurité qu'elles offrent par rapport aux actions mais aussi pour les besoins liés à leurs gestions actif-passif. Un risque de taux existe pour tous les actifs dont la valeur est sensible aux changements de la structure de la courbe des taux et donc typiquement les obligations.

Nous considérons dans notre modélisation qu'il n'y a pas de risque de taux sur le passif, en effet, pour une mutuelle pratiquant une activité santé non-SLT, la cadence de règlement est très élevée et par conséquent le *Best Estimate* n'est que très peu impacté par des variations de taux.

La valeur de marché d'une obligation se calcule en actualisant les flux futurs qu'elles engendrent. L'actualisation à un taux plus ou moins élevé fait varier la valeur de l'obligation. Si les taux augmentent, la valeur de l'obligation baisse car les facteurs d'actualisation sont moins élevés et inversement si les taux baissent, la valeur de l'obligation augmente car les facteurs d'actualisation sont plus élevés. Nous ne considérons donc que le choc de hausse des taux qui entraînent une baisse de la valeur du portefeuille obligataire.

La directive Solvabilité II impose pour le calcul du *SCR Taux* de choquer la courbe des taux utilisée pour le calcul du prix des obligations. Nous allons donc calculer la valeur du portefeuille obligataire en utilisant la courbe de taux de l'*EIOPA* et ensuite avec la courbe de taux de l'*EIOPA* choquée.

Les chocs multiplicatifs sur les vingt premières années sont donnés par maturité :

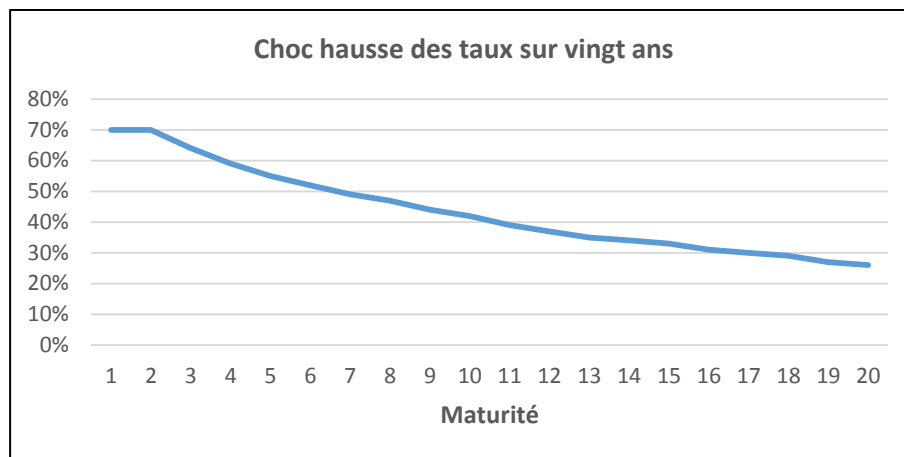


Figure 26 – Choc de hausse de taux par rapport à la maturité sur vingt ans

Nous observons une déformation de la courbe de taux *EIOPA* en appliquant les chocs multiplicatifs :

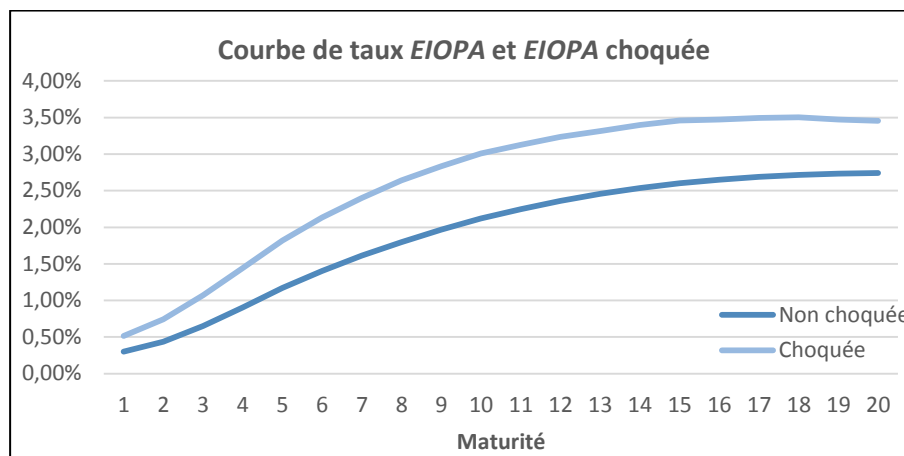


Figure 27 – Courbe de taux *EIOPA* et *EIOPA* choquée

Le *SCR* pour le risque de taux est défini comme suit :

$$SCR_{Taux} = \sum_{i=1}^K SCR_{Taux}^i$$

Où  $SCR_{Taux}^i$  est la valeur du choc pour l'obligation  $i$

$K$  est le nombre d'obligations détenues

Et avec :

$$SCR_{Taux}^i = Choc\_taux_i * VM_i$$

Où  $Choc\_taux_i$  est le choc en pourcentage de valeur de l'obligation i pour 1 €

$VM_i$  est la valeur de marché des obligations de type i

$$Choc\_taux_i = \frac{Valeur\_Oblig_i - Valeur\_Choquée\_Oblig_i}{Valeur\_Oblig_i}$$

Où  $Valeur\_Oblig_i$  est la valeur de l'obligation i avec la courbe de taux EIOPA

$Valeur\_Choquée\_Oblig_i$  est la valeur de l'obligation i avec la courbe choquée

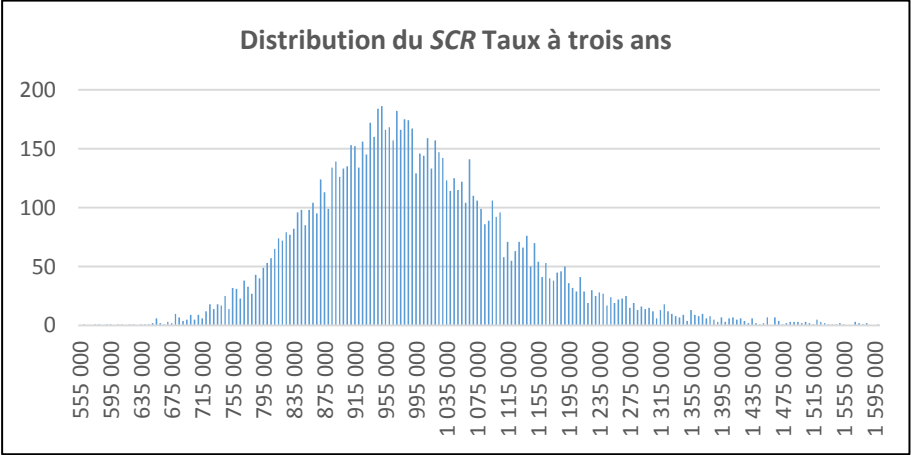
| Obligation  | Choc   | Valeur de marché | SCR       |
|-------------|--------|------------------|-----------|
| GDF SUEZ    | 2,78 % | 7 500 000 €      | 208 332 € |
| LVMH        | 1,21 % | 5 500 000 €      | 66 410 €  |
| AIR LIQUIDE | 1,68 % | 6 500 000 €      | 109 290 € |
| BPCE        | 3,43 % | 5 500 000 €      | 188 818 € |
| BOUYGUES    | 0,95 % | 5 000 000 €      | 47 625 €  |

Tableau 8 – Chocs sur les obligations dans le cadre du SCR Taux

Nous en déduisons un SCR pour le risque de taux de 620 476 €. Ce montant correspond à un choc de l'ordre de 2,07 % sur la valeur initiale du portefeuille obligataire. Ce choc est peu élevé car les obligations ont une durée assez faible et donc la différence de taux utilisé pour l'actualisation n'est pas très importante. Pour des passifs ayant des durées élevées, le SCR sera bien plus conséquent.

L'outil nous permet de projeter les courbes de taux et donc d'en déduire la valeur des obligations à la fin de la première année, de la deuxième année et de la troisième année.

En réappliquant les chocs précédents à chaque valeur des obligations, nous pouvons en déduire la distribution du SCR Taux dans un an, deux ans et trois ans.



**Figure 28 – Distribution du SCR Taux à trois ans**

## 4. Risque de spread

Le risque de spread est le risque de baisse de valeur des titres obligataires liée à un changement des spread de crédit par rapport à la courbe des taux d'intérêt sans risque. Ce risque est caractérisé par l'accroissement de l'écart entre le niveau de taux d'un emprunt dit « sans risque » et les taux de rendement actuariels d'une obligation. Si le spread associé à l'émetteur d'une obligation augmente, alors la valeur de l'obligation diminuera. Il est donc important de prendre en compte le risque d'augmentation du spread.

Graphiquement :

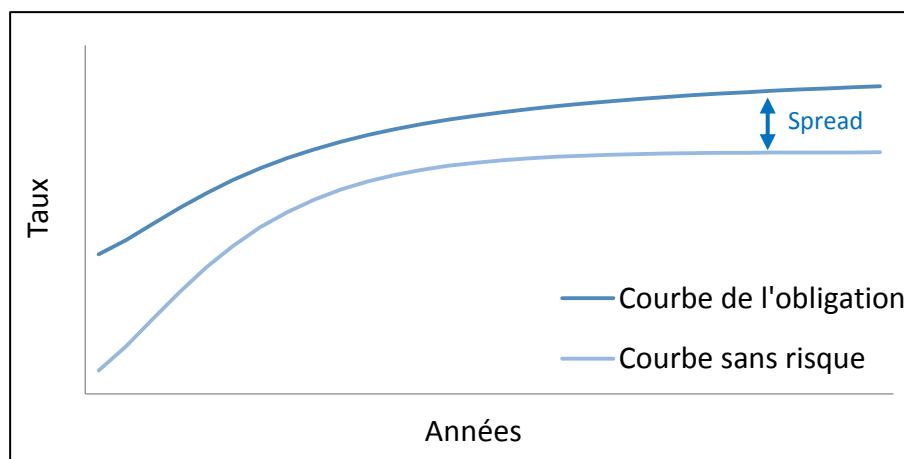


Figure 29 – Illustration du Spread existant entre deux courbes de taux

Les spécifications techniques donnent les chocs à appliquer à la valeur de l'obligation. En fonction de la qualité de l'émetteur et de la durée de l'obligation, des coefficients viendront s'appliquer à la valeur de l'obligation et correspondront au choc réglementaire.

Comme pour le risque de taux, il n'y a pas d'impact du spread sur le passif puisque l'on suppose que la cadence de règlement est suffisamment élevée pour que l'actualisation ne joue pas un rôle important dans le calcul de la provision pour sinistres à payer.

| <i>credit quality step</i><br><i>duration<sub>i</sub></i><br><i>(years)</i> | 0                                                    | 1                                                    | 2                                                    | 3                                                    | 4                                                    | 5                                                    | 6                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| up to 5                                                                     | 0.9 %.<br><i>duration<sub>i</sub></i>                | 1.1 %.<br><i>duration<sub>i</sub></i>                | 1.4 %.<br><i>duration<sub>i</sub></i>                | 2.5 %.<br><i>duration<sub>i</sub></i>                | 4.5 %.<br><i>duration<sub>i</sub></i>                | 7.5 %.<br><i>duration<sub>i</sub></i>                | 7.5 %.<br><i>duration<sub>i</sub></i>                |
| More than 5 and up to 10                                                    | 4.5% + 0.5 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 5)   | 5.5% + 0.6%.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 5)    | 7.0% + 0.7%.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 5)    | 12.5% + 1.5%.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 5)   | 22.5% + 2.5%.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 5)   | 37.5% + 4.2%.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 5)   | 37.5% + 4.2%.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 5)   |
| More than 10 and up to 15                                                   | 7.2% + 0.5 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 10)  | 8.4% + 0.5 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 10)  | 10.5% + 0.5 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 10) | 20.0% + 1.0 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 10) | 35.0% + 1.8 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 10) | 58.5% + 0.5 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 10) | 58.5% + 0.5 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 10) |
| More than 15 and up to 20                                                   | 9.7% + 0.5 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 15)  | 10.9% + 0.5 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 15) | 13.0% + 0.5 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 15) | 25.0% + 1.0 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 15) | 44.0% + 0.5 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 15) | 61.0% + 0.5 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 15) | 61.0% + 0.5 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 15) |
| More than 20                                                                | 12.2% + 0.5 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 20) | 13.4% + 0.5 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 20) | 15.5% + 0.5 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 20) | 30.0% + 0.5 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 20) | 46.6% + 0.5 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 20) | 63.5% + 0.5 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 20) | 63.5% + 0.5 %.(<br><i>duration<sub>i</sub></i> - 20) |

Figure 30 – Calcul du choc pour le risque de Spread

Nous obtenons pour le portefeuille obligataire les chocs suivants :

| Obligation  | Choc   | Valeur de marché | SCR       |
|-------------|--------|------------------|-----------|
| GDF SUEZ    | 6,33%  | 7 500 000 €      | 474 772 € |
| LVMH        | 4,55%  | 5 500 000 €      | 250 140 € |
| AIR LIQUIDE | 4,59%  | 6 500 000 €      | 298 371 € |
| BPCE        | 10,47% | 5 500 000 €      | 575 993 € |
| BOUYGUES    | 5,87%  | 5 000 000 €      | 293 380 € |

Tableau 9 – Chocs sur les obligations dans le cadre du SCR Spread

Nous obtenons un SCR Spread de 1 892 656 €. Ce montant correspond à un choc de 6,31 % sur la valeur du portefeuille obligataire.

Comme pour le risque de taux, nous projetons grâce aux générateurs la valeur des obligations sur toute la durée du *Business Plan*. En réappliquant les chocs obtenus précédemment nous pouvons obtenir la distribution du *SCR Spread* à chaque pas de temps en réappliquant les chocs précédents à chaque obligation.

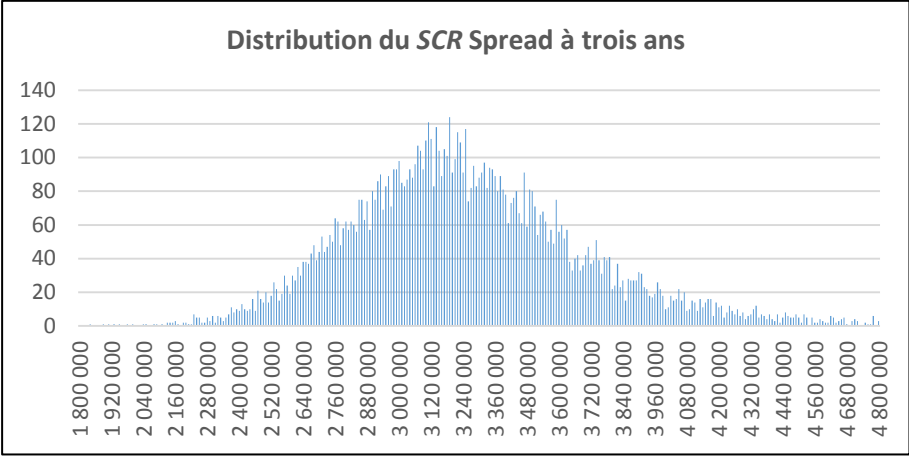


Figure 31 – Distribution du SCR Spread à trois ans



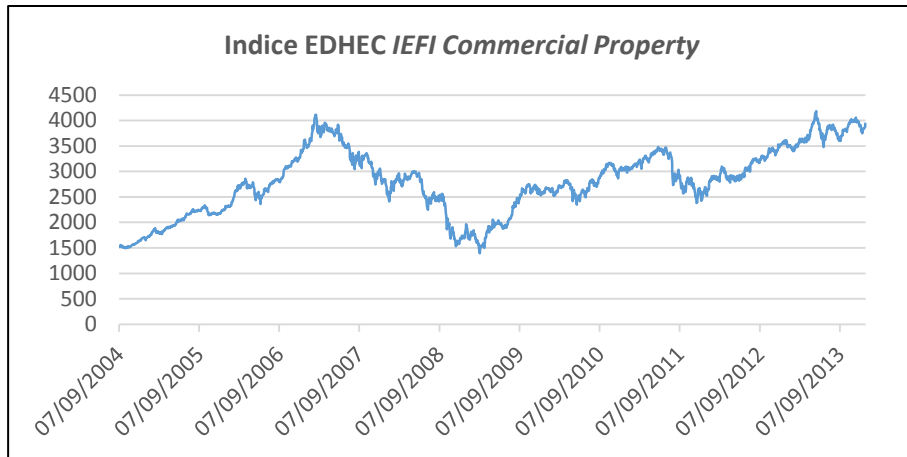
## 5. Risque immobilier

Les entreprises possèdent de l'immobilier, que ce soit à des fins d'exploitation ou en qualité d'investissement, au même titre que les obligations ou actions mais en se déconnectant des marchés financiers. Le risque est que la valeur des biens détenus baissent et impactent négativement le bilan économique de la compagnie. De plus comme ces biens sont peu liquides, il est difficile d'effectuer des achats et reventes pour profiter des variations du marché sur un horizon temporel court.

La formule standard pour le risque immobilier est semblable à celle pour les actions. Le *SCR* se calcule en effectuant un choc multiplicatif de 25 % sur la valeur de l'immobilier. L'entreprise possède 10 000 000 € d'immobilier, le *SCR* immobilier vaut donc 2 500 000 €.

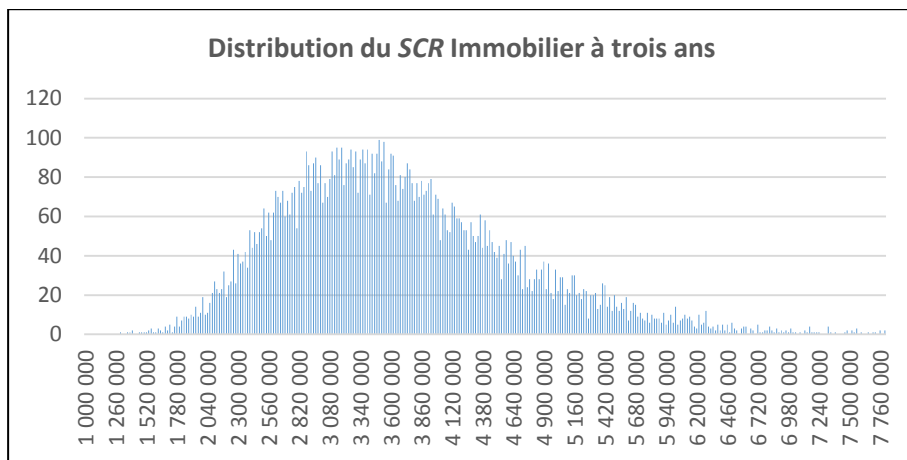
Nous devons à présent projeter la valeur de l'immobilier détenu par l'entreprise, or il n'existe pas d'historique de la valeur des immeubles détenus, il va donc falloir utiliser un proxy pour l'indice de risque sous-jacent au risque immobilier. Après avoir effectué de nombreuses recherches, nous avons décidé d'utiliser l'indice EDHEC *IEIF Commercial Property*.

Cet indice est basé sur le rendement de sociétés civiles de placement immobilier. Les SCPI investissent en majorité dans des propriétés en ayant comme but la rentabilité financière. L'indice est construit à partir des rendements de SCPI qui satisfont à un critère de liquidité suffisamment élevée, ce critère défini par l'EDHEC. L'indice peut être considéré comme un proxy pour le marché de l'immobilier en France car l'indice est totalement transparent, la liste des SCPI qui le composent peut être trouvée, de plus l'indice est diversifié et est exposé au minimum au risque de marché.



**Figure 32 – Evolution de l'indice EDHEC IEFI Commercial Property**

En utilisant cet indice pour notre base de valeurs pour le risque immobilier, nous pouvons projeter la valeur de l'immobilier à trois ans. Nous obtenons donc la distribution de la valeur de l'immobilier à chaque pas de temps. À chaque réalisation de valeur de l'immobilier sera associé un SCR issu d'un choc de 25 %, nous obtenons donc la distribution du SCR Immobilier à chaque date.



**Figure 33 – Distribution du SCR Immobilier à trois ans**

## 6. Risque santé non-SLT

L'entreprise exerce une activité de mutuelle santé pour laquelle elle verse à ses assurés des prestations qui correspondent à des remboursements de frais médicaux. Cela correspond au module de risque santé non-SLT dans la cartographie des risques dans la directive Solvabilité II.

Ce module de risque prend en compte le risque de provisionnement et le risque de prime. Le risque de prime provient des fluctuations au niveau du montant des cotisations perçues et de la fréquence qui impacteraient la mutuelle au niveau de sa capacité à faire face aux sinistres de l'année. Le risque de provisionnement provient du fait que le niveau des frais peut varier et donc que la provision faite *ex-ante* ne permettra pas de couvrir les prestations à venir.

Le SCR pour le risque santé non-SLT se calcule via la formule suivante :

$$SCR_{Santé\ non-SLT} = Choc_{Santé\ non-SLT} * V_{Santé\ non-SLT}$$

Où  $Choc_{Santé\ non-SLT}$  représente le choc dans la directive Solvabilité II

$V_{Santé\ non-SLT}$  représente le volume associé à l'activité santé non-SLT

Nous avons :

$$Choc_{Santé\ non-SLT} = 3 * \sigma_{Santé\ non-SLT}$$

Avec  $\sigma_{Santé\ non-SLT}$  représente l'écart-type du ratio combiné global du portefeuille d'assurance santé non-SLT, qui vaut d'après les spécifications techniques 5 % pour le segment d'activité propre aux remboursements de frais médicaux.

$$V_{Santé\ non-SLT} = V_{Cotisations} + V_{Provisions}$$

Avec  $V_{Cotisations}$  le maximum entre le volume de cotisation perçues au titre de l'année passée et le volume des cotisations espéré par la mutuelle au titre de l'activité d'assurance santé non-SLT l'année suivante et  $V_{Provisions}$  le volume des provisions pour futurs sinistres pour l'activité d'assurance santé non-SLT, c'est-à-dire le *Best Estimate*.

Nous avons :

$$V_{Cotisations} = 149\,400\,000 \text{ €}$$

$$V_{Provisions} = 7\,785\,000 \text{ €}$$

Nous en déduisons un SCR santé non-SLT de 23 577 750 € qui correspond à un choc de 15 % sur le volume total.

Grâce à l'outil de projection, nous pouvons projeter la provision pour sinistres à payer via un indice de coût moyen par personne protégée propre à l'entreprise qui servira de base de valeurs à l'outil.

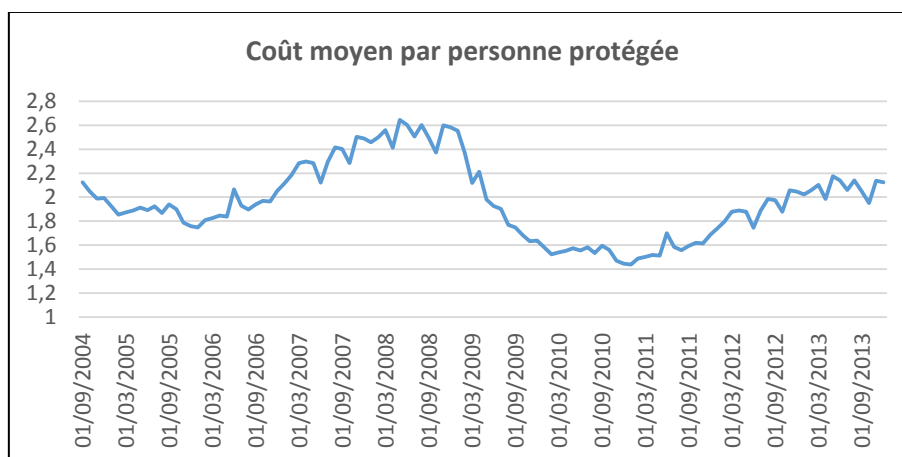


Figure 34 – Coût moyen par personne protégée

Le niveau des cotisations est déterministe, l'aléa porte donc uniquement sur la variation du volume des provisions qui dépend de la projection de l'indice du coût moyen en santé. Le niveau des cotisations et la provision dépend du nombre d'adhérents qui par hypothèse du *Business Plan* croit de 3 % chaque année.

Nous obtenons la distribution du *SCR Santé* non-SLT en appliquant le choc de 15 % sur la valeur de volume associé à l'activité santé qui est projetée via la méthode de *Bootstrap* historique en utilisant l'indice de coût moyen par personne protégée comme base de valeurs.

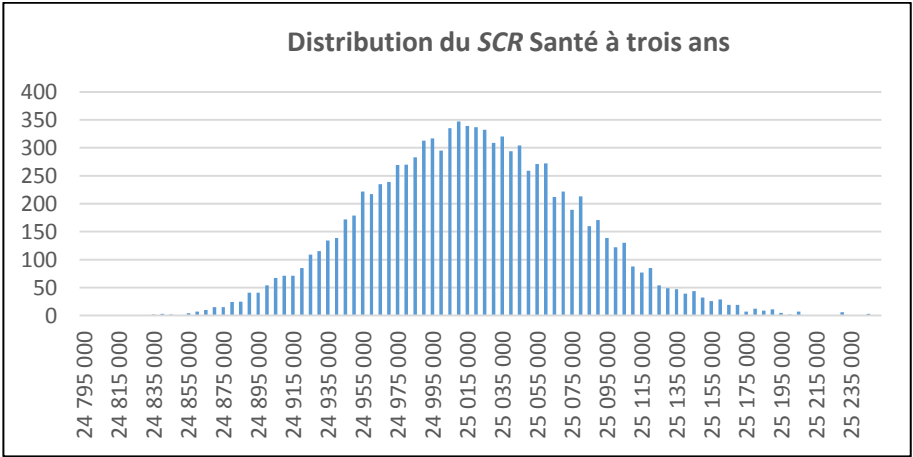


Figure 35 – Distribution du SCR Santé à trois ans

## 7. BSCR et risque opérationnel

Le risque opérationnel est le risque de pertes émanant de procédures internes inadéquates ou défailtantes, qu'elles soient d'origine humaine, informatique ou extérieure à l'entreprise. Le risque opérationnel inclut les risques légaux mais pas les risques émanant des décisions stratégiques ou encore les risques de réputation.

Le capital réglementaire associé au risque opérationnel viendra compléter le *BSCR* qui correspond à l'agrégation des différents risques précédemment traités.

Le *SCR* Opérationnel pour une mutuelle exerçant uniquement une activité en santé non-SLT se définit ainsi :

$$SCR_{Opérationnel} = \text{Min}(0,3 * BSCR ; Op)$$

Où  $Op$  est défini comme le montant en risque du aux activités de santé non-SLT

Nous avons :

$$Op = \text{Max}(Op_{Cotisations} ; Op_{Provisions})$$

Avec :

$$Op_{Cotisations} = 0,03 * Cotisations_t + 0,03 * \text{Max}(0 ; Cotisations_t - 1,2 * Cotisations_{t-1})$$

Où  $Cotisations_t$  représente les cotisations perçues sur l'année écoulée  
 $Cotisations_{t-1}$  représente les cotisations perçues l'année précédente

Et :

$$Op_{Provisions} = 0,03 * \text{Max}(0 ; Best Estimate_t)$$

Pour calculer le montant de capital réglementaire au titre du risque opérationnel il faut au préalable avoir calculé le *BSCR*. Nous avons déjà tous les modules de risques considérés dans cet exemple, il suffit maintenant d'agrèger ces différents montants avec la matrice des corrélations.

Au sein du risque de marché, nous avons la matrice de corrélations suivante :

| CorrMkt       | Interest | Equity | Property | Spread | Currency | Concentration |
|---------------|----------|--------|----------|--------|----------|---------------|
| Interest      | 1        |        |          |        |          |               |
| Equity        | A        | 1      |          |        |          |               |
| Property      | A        | 0.75   | 1        |        |          |               |
| Spread        | A        | 0.75   | 0.5      | 1      |          |               |
| Currency      | 0.25     | 0.25   | 0.25     | 0.25   | 1        |               |
| Concentration | 0        | 0      | 0        | 0      | 0        | 1             |

Figure 36 – Matrice de corrélation pour les sous-modules du risque de marché

Notons que le risque de change et de concentration ne sont pas traités pour le risque de marché car la mutuelle possède uniquement des produits financiers libellés en Euro et que les placements sont diversifiés, il n’y a pas de contrepartie surpondérée au niveau de l’allocation d’actifs de l’entreprise.

Dans l’exemple traité ici, le risque de taux impacte uniquement l’actif via une diminution de la valeur du portefeuille obligataire lorsque les taux augmentent. En effet, nous avons considéré que le passif n’était que très peu sensible aux variations de taux et donc que le risque de taux au passif pouvait être négligé. Dans ce cas-là, le coefficient A vaut 0 d’après les spécifications techniques EIOPA.

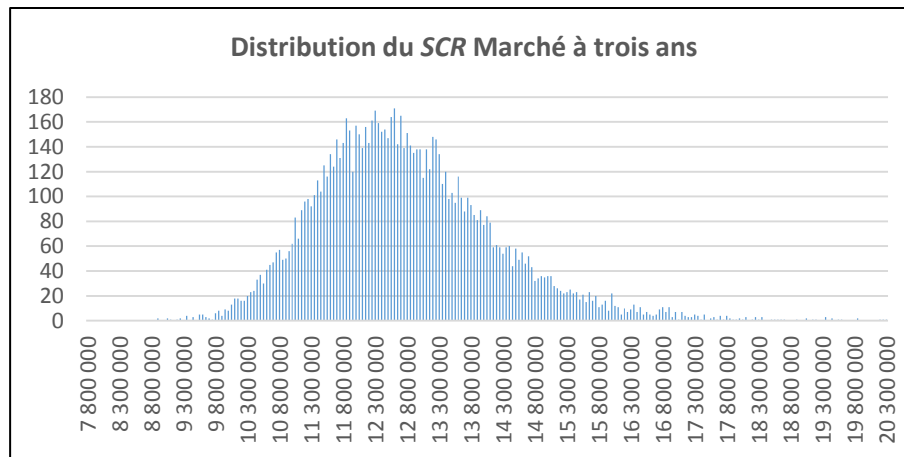
Nous pouvons calculer la valeur du *SCR* Marché par la formule suivante :

$$SCR_{Marché} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} SCR_i SCR_j}$$

Où  $i,j$  représentent les différents couples possibles du module risque de marché

Nous obtenons un *SCR* Marché en date 0 de 8 198 173 €.

En fin de première année, deuxième année et troisième année, nous obtenons une distribution du *SCR* Marché comme nous avons plusieurs réalisations de *SCR* à ces dates.



**Figure 37 – Distribution du SCR Marché à trois ans**

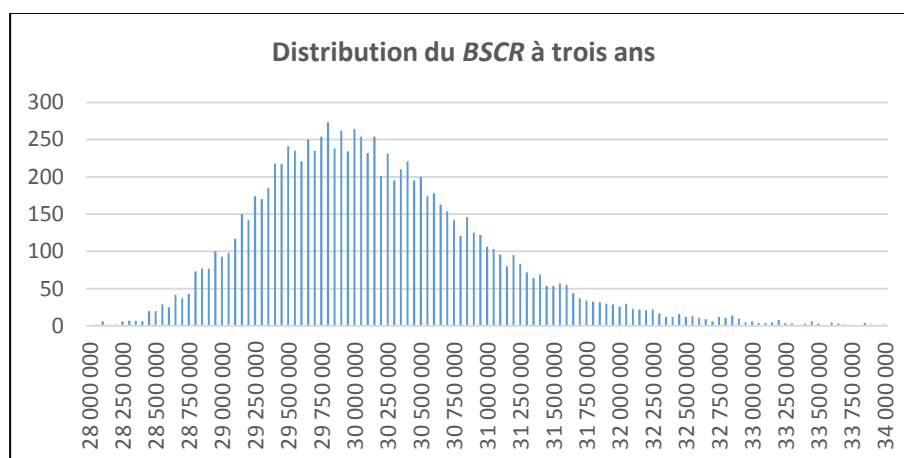
Pour calculer le *BSCR*, il faut également rapprocher le *SCR* Marché avec le *SCR* Santé. Comme ce sont les deux seuls modules de risque considérés, la formule d'agrégation s'écrit :

$$BSCR = \sqrt{SCR_{Marché}^2 + SCR_{Santé}^2 + 2 * 0,25 * SCR_{Marché} * SCR_{Santé}}$$

Le coefficient 0,25 correspond à la corrélation entre le module de risque Marché et Santé et provient des spécifications techniques *EIOPA*.

Nous pouvons calculer à présent la valeur du *BSCR* qui vaut 26 828 485 €.

Nous avons également la distribution du *BSCR* à trois ans puisque nous projetons tous les sous-modules de risques à trois ans, nous obtenons la distribution :



**Figure 38 – Distribution du BSCR à trois ans**



Nous pouvons à présent calculer le montant réglementaire lié au risque opérationnel. Dans cet exemple, les cotisations perçues chaque année sont nettement supérieures à la valeur du *Best Estimate*. La conséquence est qu'au final, le *SCR* pour le risque opérationnel est constant chaque année car il est impacté par le niveau de primes plus que par le niveau du *Best Estimate*. De plus, dans la formule pour le risque opérationnel, les 30 % du *BSCR* sont toujours supérieurs au montant en risque du aux activités de santé non-SLT, le résultat est donc toujours « drivé » par ce dernier.

Nous obtenons comme valeur pour le *SCR* Opérationnel un montant de 4 351 456 € en début de projection, de 4 482 000 € en fin de première année, de 4 616 460 € en fin de deuxième année et de 4 754 954 € en fin de troisième année.

Cette constance dans le montant réglementaire associé au risque opérationnel est une particularité de la situation de la mutuelle. En effet, celle-ci possède des provisions très faibles comparées aux montants de cotisations perçues, comme la cadence de règlement est très élevée pour son activité, les cotisations perçues servent à régler les prestations. Comme les cotisations sont déterminées par avance dans le *Business Plan*, il n'y a pas d'aléa au niveau du risque opérationnel dans les projections.

## 8. Distribution du ratio de couverture

Nous avons toutes les informations nécessaires à la construction du ratio de solvabilité qui correspond au montant de fonds propres déflatés par le SCR.

Nous observons la distribution du SCR qui, pour rappel, équivaut à la somme du BSCR et du montant réglementaire au titre du risque opérationnel.

Le SCR initial vaut 31 180 106 €. Le montant de fonds propres vaut 61 610 000 € et correspond aux fonds propres initiaux auxquels viennent s'ajouter le résultat de l'année précédente. Cela nous donne un ratio de solvabilité initial de 198 %.

Nous observons la distribution du SCR à trois ans :

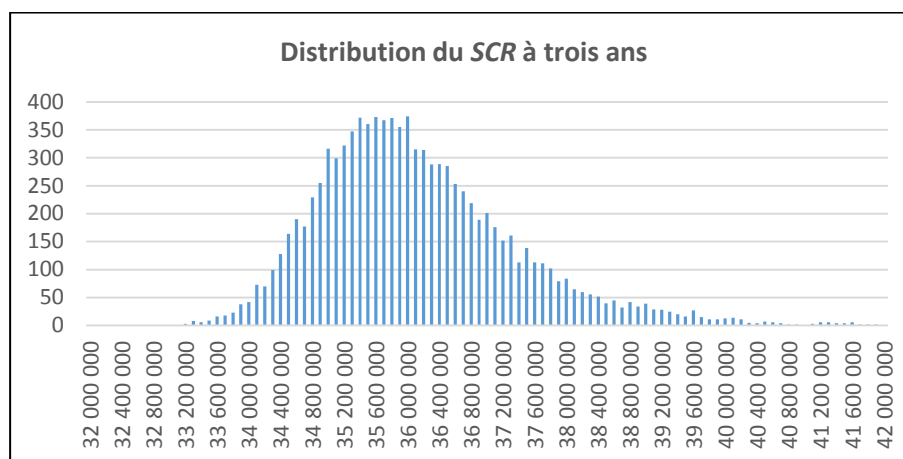


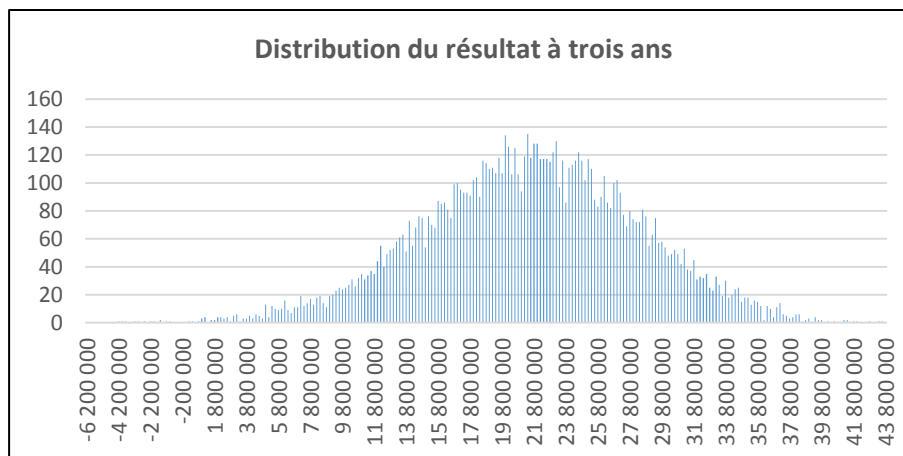
Figure 39 – Distribution du SCR à trois ans

Nous devons à présent nous intéresser au calcul des fonds propres. Pour se faire nous devons dresser à chaque pas de temps le résultat de l'exercice puisqu'il va impacter les fonds propres.

Le résultat simplifié de l'année t se définit ainsi :

$$\text{Résultat}_t = \text{Cotisations}_t - \text{Prestations}_t - \text{Frais}_t - \Delta\text{Provisions}$$

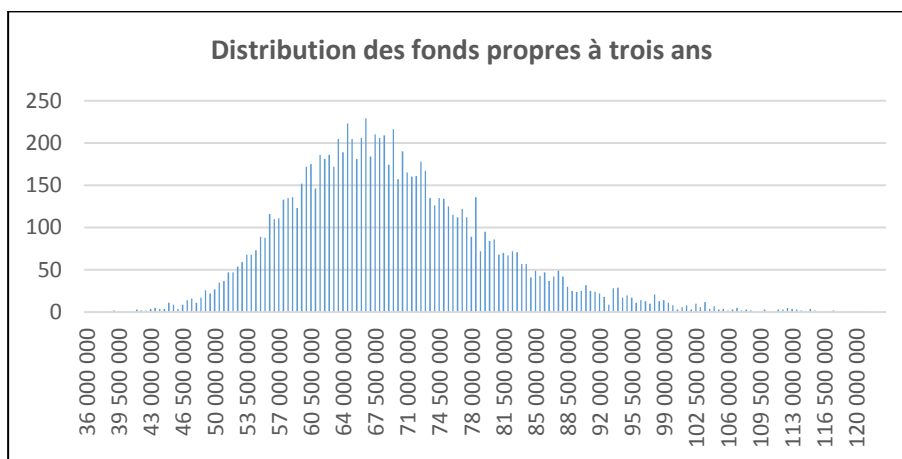
Les frais suivent un indice de frais propre à l'entreprise. Nous obtenons la distribution du résultat en fonction de chaque scénario et ce à un an, deux ans et trois ans.



**Figure 40 – Distribution du résultat à trois ans**

À la fin de chaque année, le résultat remonte en fonds propres. S’il est positif, les fonds propres vont être augmentés, s’il est négatif, les fonds propres vont diminuer. Du côté de l’actif, le résultat sera réinvesti dans les actifs liquides s’il est positif ; s’il est négatif, un désinvestissement sera opéré afin de compenser la perte réalisée.

Nous obtenons la distribution des fonds propres via la projection des divers postes du bilan et via l’incorporation du résultat.



**Figure 41 – Distribution des fonds propres à trois ans**

Nous pouvons à présent calculer nos ratios de couverture et ce à chaque date durant la projection. Nous obtenons les résultats suivants :

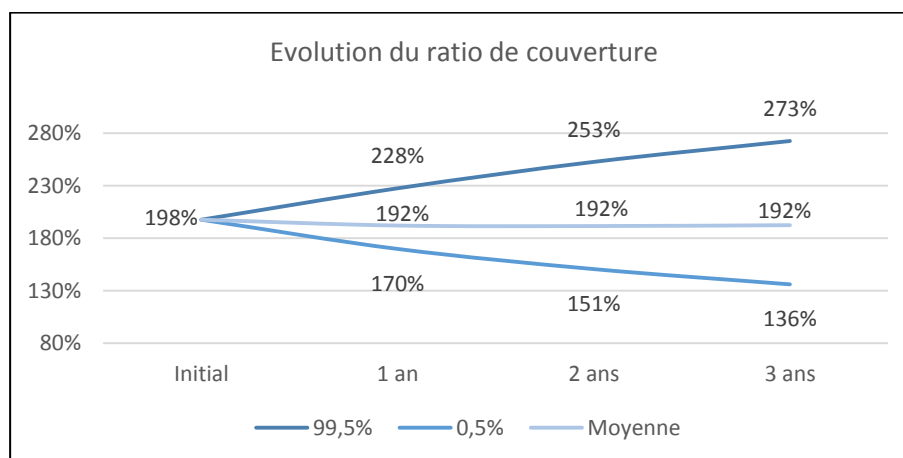


Figure 42 – Evolution du ratio de couverture dans le temps

Rappelons la contrainte que l'entreprise s'était fixée :

$$\mathbb{P}\left(\frac{FP_t}{SCR_t} \geq 175\% \right) \geq 80\% \quad \forall t \in \{1,2,3\}$$

Où  $FP_t$  est la valeur des fonds propres en fin d'année t

$SCR_t$  est la valeur du SCR calculée en fin d'année t

Nous observons à la fin de la première année, une probabilité de couverture du ratio de 175 % de 96,74 %, la contrainte est donc satisfaite pour la première année. À la fin de la deuxième année la contrainte est satisfaite, en effet nous observons une probabilité de couverture du ratio de 81,95 %. À la fin de troisième année, le ratio est de 76,09 %. Il semble donc que le montant de fonds propres initial n'est pas suffisant pour couvrir la contrainte fixée par le *Business Plan*.

Toutes choses égales par ailleurs, cela correspond à manque de fonds propres de l'ordre de 979 000 € à la fin de la troisième année.

Le but de l'ORSA est d'adapter la stratégie de l'entreprise face aux résultats observés. Nous pouvons suggérer à la mutuelle trois plans d'action.

L'entreprise peut décider de revoir à la hausse le niveau des cotisations afin d'engendrer un résultat plus élevé et donc augmenter à terme ses fonds propres. Si la mutuelle décide d'augmenter de 2 % ses primes par rapport au *Business Plan* initial, les probabilités de couverture du ratio de 175 % passent à 98,00 % la première année, 89,07 % pour la deuxième année et 82,53 % pour la troisième année. La contrainte est donc ici satisfaite pour toute la durée du *Business Plan*.

Le montant qui manque au niveau des fonds propres peut être impacté sur les primes futures afin de respecter la contrainte, le montant manquant à la fin de la troisième année peut être répercuté sur le niveau de cotisation demandé par la mutuelle en début de troisième année afin de s'assurer du maintien de la contrainte.

L'entreprise peut également décider d'émettre des titres participatifs ou subordonnés pour un volume de 979 000 € afin d'augmenter les fonds propres de ce montant. En effet, ces titres sont assimilés aux fonds propres mais ne donnent ni droit de vote ni de part dans le capital.

## 9. Distribution du ratio Sinistres à Primes

Rappelons que la mutuelle s'est également fixée un objectif sur le ratio sinistres à primes définie par :

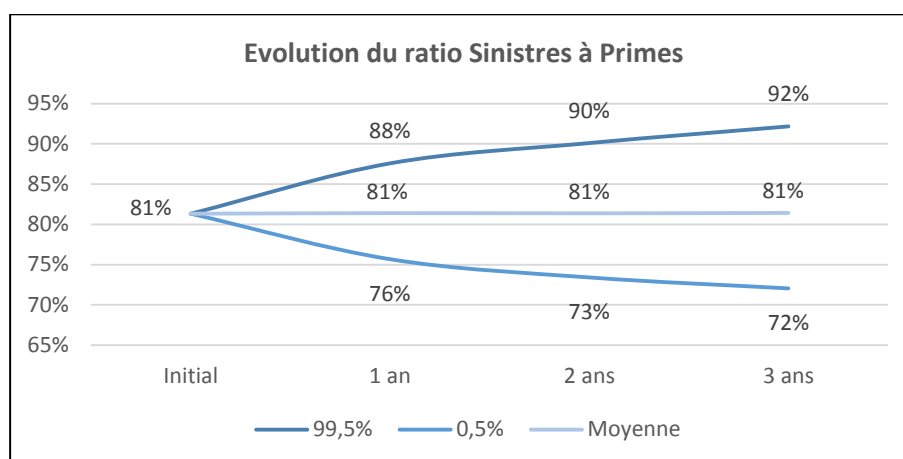
$$\mathbb{P}\left(\frac{S_t}{P_t} < 85\%\right) \geq 80\% \quad \forall t \in \{1,2,3\}$$

Où  $S_t$  représente les prestations payées sur l'année t

$P_t$  représente les cotisations perçues au titre de l'année t

Nous pouvons projeter notre sinistralité et comme les cotisations sont supposées constantes par hypothèse de *Business Plan* nous pouvons avoir la distribution à un an, deux ans et trois ans du ratio S/P.

Nous obtenons les résultats suivants :



**Figure 43 – Evolution du ratio Sinistres à Primes**

À la fin de la première année, la probabilité que le ratio Sinistres à Primes soit en-dessous de 85 % vaut 93,81 %, 86,52 % à la fin de la deuxième année et 81,86 % à la fin de la troisième année. La contrainte est donc respectée sur toute la durée du *Business Plan*.

## V. Écart par rapport à la formule standard

### 1. Problématique

La problématique ici est de comparer la valeur du *SCR* qui, rappelons-le, est le montant de capital exigé par l'autorité de contrôle qui permet à l'entreprise de faire face à un choc bicentenaire et ce à un horizon temporel d'un an avec un montant de capital calculé cette fois-ci en interne, qui est propre à l'entreprise et ce en utilisant la même métrique, une *VaR* à un an et à un seuil de 99,5 %.

L'idée est donc de calculer un besoin en capital qui correspond également au niveau de couverture de 99,5 % et à un horizon de temps d'un an mais en utilisant le générateur de scénarios économiques non-paramétrique. Les différences observées en termes de choc sur les valeurs initiales permettront de mettre en évidence les écarts de profil de risque par rapport aux hypothèses sous-jacentes à la formule standard.

Cette partie doit *in fine* mettre en évidence l'adéquation ou la non-adéquation du profil de risque de l'entreprise aux hypothèses issues du pilier 1 de la directive.

## 2. Risque action

Le besoin en capital pour le risque action se définit comme suit :

$$BC_{Action} = VM_0 - q_{0,5\%}(VM_1)$$

Où  $VM_0$  représente la valeur de marché du portefeuille financier en  $t = 0$

$VM_1$  représente la valeur aléatoire du portefeuille financier en  $t = 1$

$q_{0,5\%}(\cdot)$  représente la fonction quantile

En projetant via le générateur de scénarios économiques non-paramétrique chacune des actions comme cela a été présenté dans la partie II. 2. a. nous pouvons obtenir la distribution de la valeur du portefeuille à un an, avant réallocation du résultat, et nous pouvons en déduire la valeur du quantile qui nous intéresse.

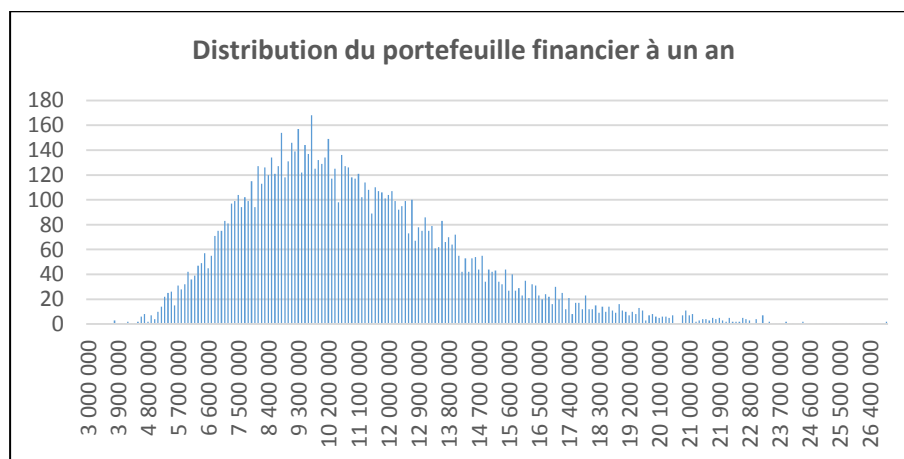


Figure 44 – Distribution de la valeur du portefeuille actions à un an

Nous pouvons trouver le quantile empirique au seuil 0,5 %, ce quantile vaut 4 981 479 €, cela correspond à un choc de 49,81 %. Le SCR Action vaut 4 650 000 € et correspond à un choc de 46,5 %.

L'écart est donc de 331 748 €. L'outil de projection donne un choc légèrement supérieur à celui prescrit par la formule standard qui était pourtant déjà significatif.



### 3. Risque de taux

Le générateur de scénarios économiques permet de projeter les différentes courbes de taux utilisées pour l'actualisation des flux de chaque obligation. En effet, nous n'utilisons pas la même courbe pour chaque obligation. Les émetteurs des obligations sont notés par les agences de notation et nous attribuons à chaque obligation des courbes de taux en accord avec la notation de l'émetteur et donc sommes en adéquation avec le profil de risque de chacun des émetteurs des obligations et donc avec le profil de risque du portefeuille. Le risque porte sur la variation de ces courbes de taux.

En simulant un grand nombre de scénarios possibles comme cela a été présenté dans la partie II. 3. a. nous pouvons arriver à la distribution de la valeur du portefeuille obligataire à un an, choqué par les changements de taux.

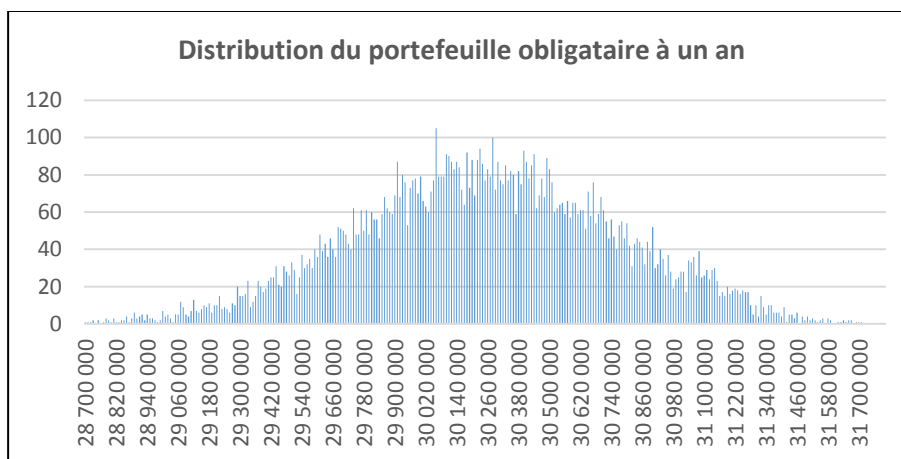


Figure 45 – Distribution de la valeur du portefeuille obligataire à un an (Taux)

Nous pouvons trouver le quantile empirique au seuil 0,5 %, ce quantile vaut 28 852 114 €. Le montant de capital est donc égal à la valeur du portefeuille obligataire en début de projection, 30 000 000 € auquel nous soustrayons ce quantile, nous obtenons au final un besoin en capital de 1 147 886 €, cela correspond à un choc de 3,83 %.

Le SCR Taux vaut 620 476 €. L'écart est donc de 527 410 €, soit 85 % en plus. L'outil de projection donne un choc nettement supérieur à celui indiqué dans la formule standard.

## 4. Risque de spread

Comme pour le risque de taux, les courbes de taux qui correspondent à chaque obligation sont projetées, ainsi que la courbe de taux sans risque. Nous pouvons donc observer à un an la variation de spread en comparant le spread initial et le spread à un an.

Nous obtenons la distribution de la valeur du portefeuille obligataire à un an, choqué par le changement de spread :

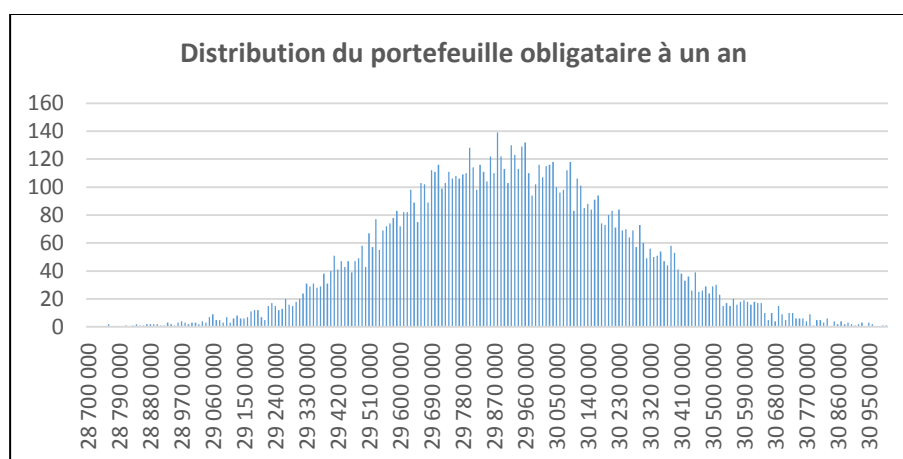


Figure 46 – Distribution de la valeur du portefeuille obligataire à un an (Spread)

Nous obtenons un quantile de 29 031 754 € et un besoin en capital d'une valeur de 968 246 €. Ce montant correspond à un choc de 3,23 %.

Le SCR Spread vaut 1 892 656 €. Nous observons donc un écart de – 924 410 €. L'outil de projection donne un choc inférieur à la formule standard, ceci est expliqué par l'hypothèse de maintien des notations dans le temps. En effet, dans les hypothèses de la formule standard<sup>1</sup>, il est indiqué que le changement de notation est pris en compte, or nous avons fait l'hypothèse que les émetteurs conservent la même notation durant la projection. L'écart s'explique donc par la divergence des hypothèses prises.

<sup>1</sup> EIOPA : « Underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation »

## 5. Risque immobilier

À partir du cours de l'indice EDHEC *IEIF Commercial Property*, nous pouvons projeter la valeur du portefeuille immobilier via la méthode du *Bootstrap* historique. Nous obtenons ainsi la distribution à un an de la valeur de l'immobilier :

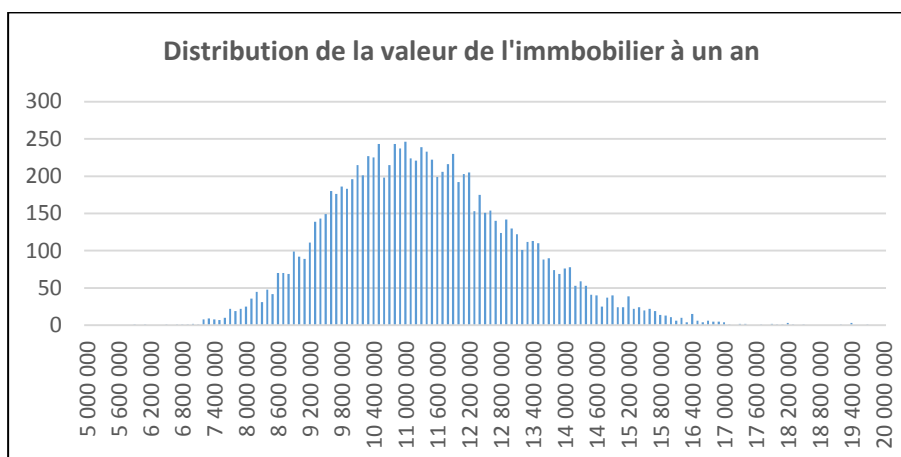


Figure 47 – Distribution de la valeur de l'immobilier à un an

Nous obtenons un quantile à 0,5 % de 7 593 8350 €. Le besoin en capital vaut 2 406 650 € car la valeur initiale de l'immobilier est de 10 000 000 €. Cela correspond à un choc de 24,05 %.

Le SCR Immobilier vaut 2 500 000 € et correspond à un choc de 25 %.

L'outil de projection donne donc un choc légèrement inférieur aux recommandations de la formule standard.

## 6. Risque santé non-SLT

En reprenant l'indice de coût moyen en santé et en appliquant la méthode de projection par *Bootstrap* historique nous pouvons projeter l'indice et en utilisant une approche multiplicative nous pouvons récupérer le volume de l'activité associé à la santé à un an grâce à la formule suivante :

$$Volume\_santé_1 = \frac{Indice\_coût\_moyen_1}{Indice\_coût\_moyen_0} * Volume\_santé_0$$

Le besoin en capital pour le risque santé est défini ainsi :

$$BC_{Santé} = q_{99,5\%}(Volume\_santé_1) - Volume\_santé_0$$

Nous cherchons en fait à mesurer l'augmentation au seuil 99,5 % du volume de l'activité santé qui serait due à une augmentation du coût moyen par personne protégée.

Nous obtenons la distribution du volume projeté à un an :

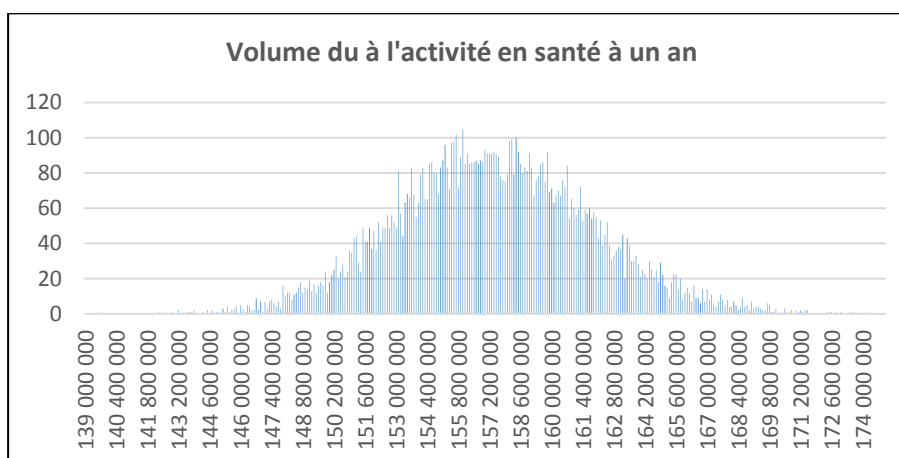


Figure 48 – Distribution du à l'activité en santé à un an

Nous en déduisons le quantile à 99,5 % qui vaut 169 274 068 €, la valeur initiale du volume étant de 157 185 000 €, nous en déduisons un besoin en capital de 12 089 068 € qui correspond à un choc de 7,69 %. Le SCR Santé s'établissait à 23 577 750 €, cela représente un écart de – 11 488 682 €. C'est un écart très significatif. Il semblerait ici que la formule standard soit, pour notre mutuelle, assez prudente.

## 7. Risque opérationnel

Le risque opérationnel est estimé à partir d'une approche interne au cabinet, c'est l'entité Tuillet *Risk & Management* qui est en charge du projet.

Afin de calculer un besoin en capital propre à l'entreprise, l'approche a été scindée en deux groupes de risques : les risques non-extrêmes et extrêmes.

Pour les risques dits non-extrêmes, définis comme ceux pour lesquels la gravité est inférieure à l'échelle d'évaluation se base sur une approche fréquence / gravité issue de la cartographie des risques par une approche *Bottom Up*<sup>1</sup>.

Pour les risques extrêmes, définis comme ceux pour lesquels la gravité n'est pas bornée, lorsqu'une base de données est disponible, une méthode *Loss Distribution Approach*<sup>2</sup> est mise en place ou une estimation des quantiles par la théorie des valeurs extrêmes. Lorsqu'aucun historique n'est disponible, une approche par « dires d'expert » est choisie. Une estimation de loi est faite à partir des informations délivrées par l'expert et le quantile est estimé grâce aux hypothèses faites sur la loi supposée et sur les paramètres estimés sur la base des informations données par l'expert.

Néanmoins, pour notre étude, le *SCR* Opérationnel ne sera pas challengé, le montant du besoin en capital au titre du risque opérationnel correspond donc au *SCR* Opérationnel.

---

<sup>1</sup> Approche ascendante des risques

<sup>2</sup> Estimation de la perte totale à un an via une méthode *Monte Carlo*

## 8. Corrélations entre les risques

La corrélation entre les risques dans la directive Solvabilité II repose sur les matrices de corrélation. Nous allons montrer à quel point ces coefficients sont importants.

Prenons pour exemple le module de risque Marché et les divers risques qui le constituent. Nous avons les SCR suivants :

- Taux : 620 476 €
- Action : 4 650 000 €
- Immobilier : 2 500 000 €
- Spread : 1 892 656 €

La matrice d'agrégation est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 100 \% & 0 \% & 0 \% & 0 \% \\ 0 \% & 100 \% & 75 \% & 75 \% \\ 0 \% & 75 \% & 100 \% & 50 \% \\ 0 \% & 75 \% & 50 \% & 100 \% \end{pmatrix}$$

Le SCR Marché vaut avec cette matrice 8 198 173 €.

Si nous nous donnons la matrice où les risques sont décorrélés complètement, nous avons comme matrice d'agrégation :

$$\begin{pmatrix} 100 \% & 0 \% & 0 \% & 0 \% \\ 0 \% & 100 \% & 0 \% & 0 \% \\ 0 \% & 0 \% & 100 \% & 0 \% \\ 0 \% & 0 \% & 0 \% & 100 \% \end{pmatrix}$$

Le SCR Marché vaut avec cette matrice 6 642 662 €.

Si nous nous donnons la matrice où les risques sont corrélés complètement, nous avons comme matrice d'agrégation :

$$\begin{pmatrix} 100 \% & 100 \% & 100 \% & 100 \% \\ 100 \% & 100 \% & 100 \% & 100 \% \\ 100 \% & 100 \% & 100 \% & 100 \% \\ 100 \% & 100 \% & 100 \% & 100 \% \end{pmatrix}$$

Le SCR Marché vaut avec cette matrice 9 663 123 €.

Ceci illustre le fait que les coefficients jouent un rôle très important, l'accroissement relatif entre la valeur la plus faible calculée et la valeur la plus haute est de 45 %.

Nous proposons donc de recalculer des coefficients de corrélations propres à l'entreprise afin d'agrèger les différents besoins en capitaux de la façon la plus juste.

Nous utilisons la méthode donnée dans les spécifications techniques, nous allons calculer la *tail correlation* de telle sorte qu'elle permette de minimiser au mieux l'erreur d'agrégation au niveau des *VaR* entre nos risques centrés pris deux à deux :

$$\rho = \text{Argmin} (| VaR(A + B)^2 - VaR(A)^2 - VaR(B)^2 - 2\rho VaR(A)VaR(B) |)$$

Avec  $\rho \in [-1 ; 1]$

Grâce à l'outil de projection, nous pouvons obtenir la distribution des sommes deux à deux et en déduire les *VaR* correspondantes. En utilisant un programme de minimisation, nous obtenons la matrice de corrélation suivante :

$$\begin{pmatrix} 100 \% & -48 \% & -35 \% & 30 \% \\ -48 \% & 100 \% & 40 \% & 11 \% \\ -35 \% & 40 \% & 100 \% & 4 \% \\ 30 \% & 11 \% & 4 \% & 100 \% \end{pmatrix}$$

Nous allons utiliser cette matrice pour agréger les différents besoins en capitaux puisque ces coefficients sont ceux qui correspondent vraiment à l'entreprise considérée.

Rappelons la valeur du *SCR* Marché est de 8 198 173 €. En agrégeant les montants des différents besoins en capitaux avec la matrice précédente, nous pouvons trouver la valeur du besoin en capital global au titre du risque de Marché. Nous obtenons un montant de 6 351 100 €.

En prenant en compte les spécificités de la mutuelle, que ce soit au niveau des risques auxquels elle est exposée mais aussi au niveau des corrélations entre ces risques, nous obtenons une différence de 1 847 074 € au niveau du besoin en capital, soit un écart important, de plus de 29 %.

## 9. Limite de la formule standard

L'outil de projection nous permet de récupérer la somme des quatre risques qui composent le module risque de Marché. Nous pouvons en déduire la distribution de cette somme :

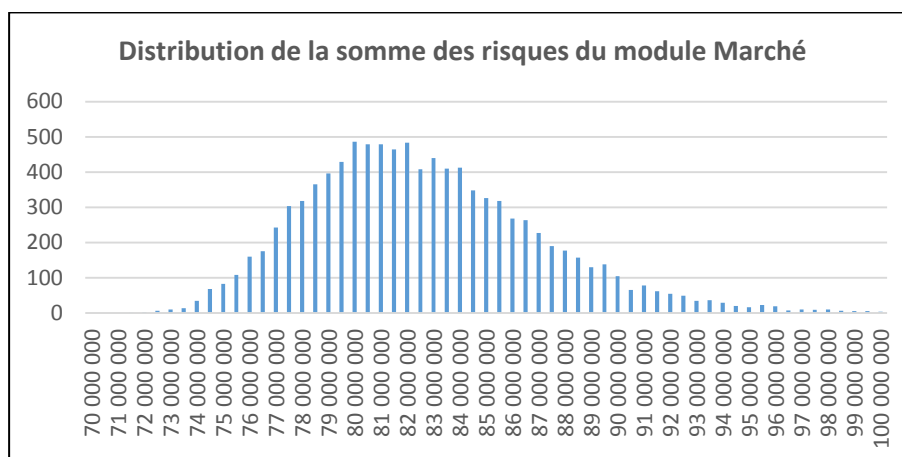


Figure 49 – Distribution de la somme des risques du module Marché

Nous en déduisons le quantile au seuil 0,5 %, il vaut 73 681 912 €. Nous pouvons donc dire qu'au sens de solvabilité II le besoin en capital vaut 6 318 088 car la valeur initiale des risques est de 80 000 000 €, décomposés en 30 000 000 € pour le risque de taux et pour le risque de spread, 10 000 000 € pour risque action et pour le risque immobilier.

L'idée est de vérifier si la formule d'agrégation des risques fournie par l'*EIOPA* donne ce même montant en utilisant les besoins en capitaux et les coefficients calculés précédemment.

Nous obtenons en utilisant la formule d'agrégation un montant de 6 351 100 €. Nous n'arrivons pas au montant calculé sur la somme des quatre risques. L'intuition que nous avons eue est que la prise en compte des corrélations ne suffit pas, il faudrait considérer les liens de dépendance d'ordre supérieur à deux entre les variables.



## 10. Conclusion

Voici un tableau récapitulatif des écarts avec la formule standard :

| Risque     | SCR          | BC           | Ecart         | Relatif |
|------------|--------------|--------------|---------------|---------|
| Action     | 4 650 000 €  | 4 981 748 €  | 331 748 €     | 7,13%   |
| Taux       | 620 476 €    | 1 147 886 €  | 527 410 €     | 85,00%  |
| Spread     | 1 892 656 €  | 968 246 €    | -924 410 €    | -48,84% |
| Immobilier | 2 500 000 €  | 2 406 650 €  | -93 350 €     | -3,73%  |
| Santé      | 23 577 750 € | 12 089 068 € | -11 488 682 € | -48,73% |

Tableau 10 – Ecart avec la formule standard

Nous remarquons des écarts relatifs importants au niveau du risque de Taux, Spread et Santé, il semblerait donc que le profil de risque de la mutuelle s'éloigne du profil de risque supposé dans la formule standard.

Pour le risque Action et Immobilier, il semblerait que l'adéquation à la formule standard soit relativement correct. Le profil de risque est donc ici proche de celui supposé dans la formule standard.

À travers la mise en évidence d'écarts plus ou moins importants, nous pouvons conclure que la formule standard est relativement prudente puisqu'elles imposent des capitaux réglementaires qui sont plus élevés que les besoins en capitaux calculés pour l'entreprise.

## VI. Respect permanent des exigences de capital

### 1. Problématique

L'ORSA prescrit un troisième calcul de solvabilité, qui se trouve être le respect permanent des exigences de capital, cette contrainte se manifeste au niveau du ratio de solvabilité :

$$\mathbb{P}\left(\frac{FP_t}{SCR_t} \geq 100\% \right) \geq 100\% \quad \forall t \in \{1,2,3\}$$

Où  $FP_t$  est la valeur des fonds propres en fin d'année t

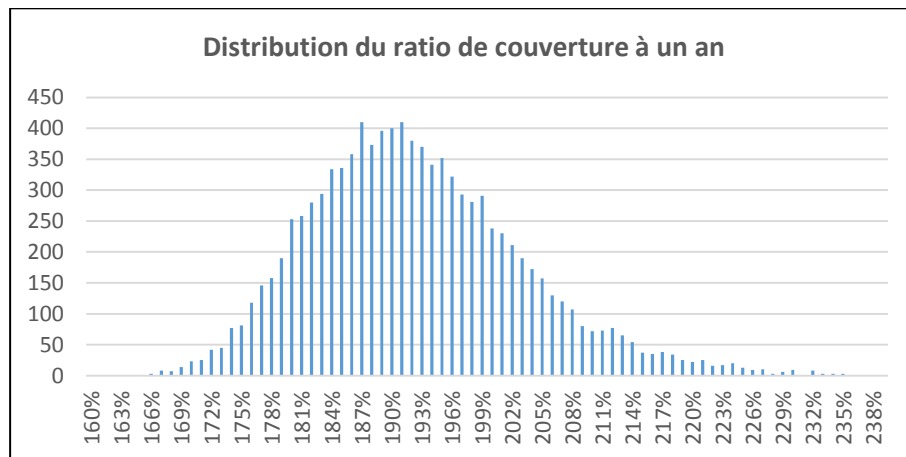
$SCR_t$  est la valeur du SCR calculée en fin d'année t

Cela signifie concrètement que l'entreprise doit, sur tout l'horizon de temps spécifié dans le *Business Plan*, détenir des fonds propres qui doivent être supérieurs au SCR.

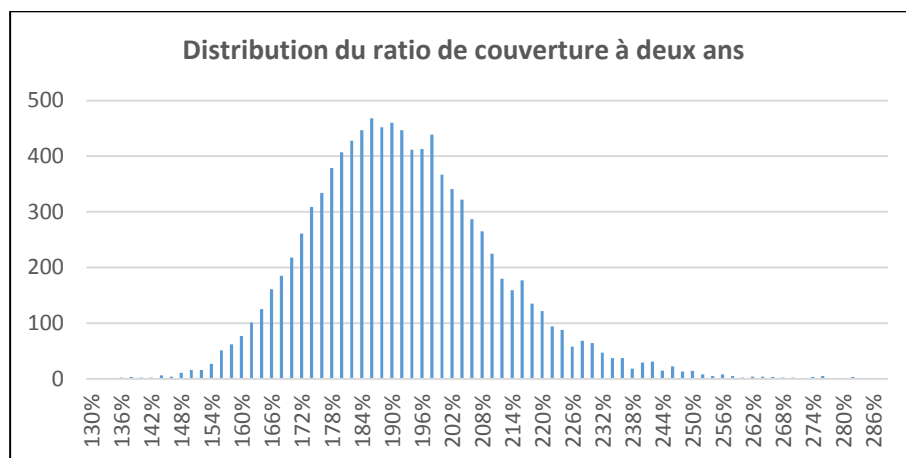
L'intérêt de cette mesure est de pouvoir prédire la situation au niveau de la solvabilité de l'entreprise. En effet, si nous observons que cette contrainte réglementaire n'est pas respectée durant la projection, l'entreprise pourra revoir son *Business Plan* afin de faire en sorte qu'elle soit respectée.

## 2. Résultats

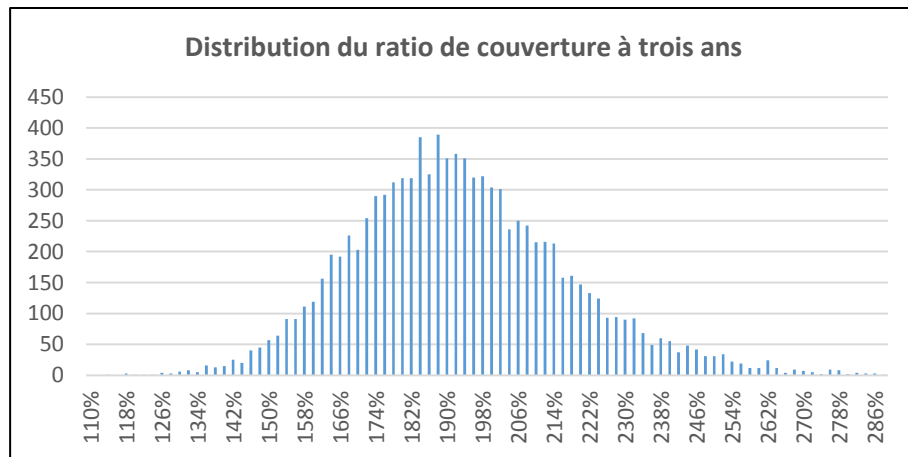
Nous avons déjà toutes les informations nécessaires à l'estimation de ces probabilités, nous observons la distribution des ratios de solvabilité à un an, deux ans et trois ans :



**Figure 48 – Distribution du ratio de couverture à un an**



**Figure 49 – Distribution du ratio de couverture à deux ans**



**Figure 50 – Distribution du ratio de couverture à trois ans**

Sous les hypothèses de projections, l’entreprise respecte la contrainte chaque année car aucun ratio n’est observé en-dessous du seuil réglementaire de 100 %.

## VII. Vers un générateur semi-paramétrique

### 1. Prise en compte de la dépendance entre les variations

L'hypothèse d'indépendance entre les variations journalières est une hypothèse forte qui peut être remise en cause.

Pour conserver la dépendance entre les variations, nous pouvons sélectionner non plus une ligne de variations mais un ensemble de lignes de variations. En utilisant ce procédé, nous pourrions donc conserver par exemple, une évolution baissière durable sur plusieurs jours comme cela est le cas dans une période de crise ou une évolution à la hausse dans le cas d'une période de bulle. Nous effectuerons donc des tirages de fenêtres de variations journalières et nous projeterons les indices grâce à ces séquences de variations.

Le choix de la taille de la fenêtre de sélection des variations est important car elle influence la volatilité des résultats, cela sera un paramètre important du générateur. Nous fixerons pour l'exemple une taille de fenêtre égale à 6 jours.

## 2. Correction par chocs locaux via loi de Pareto

L'idée ici est de perturber les variations par un coefficient aléatoire et indépendant de la série à chaque pas de projection. En effet, il y a une probabilité non-nulle que les variations observées dans le passé ne reflètent pas le risque réel qui est supporté. Les variations de l'ordre d'un sur deux cents ans n'ont que très peu de chance de se trouver dans notre historique. En perturbant la série des variations, nous essayerons de capter les variations extrêmes qui peuvent survenir.

Pour perturber la série des variations, nous déciderons de les multiplier par un coefficient  $\eta$  qui suivra une loi de Pareto de type I.

Si  $X$  suit loi de Pareto de type I de paramètres  $x_{min}$  et  $\alpha$  alors la fonction de répartition s'écrit pour tout  $x > x_{min}$  :

$$\mathbb{P}(X < x) = 1 - \left(\frac{x}{x_{min}}\right)^{-\alpha}$$

Et par dérivation, la fonction de densité s'écrit pour tout  $x > x_{min}$  :

$$f(x) = \frac{\alpha x^{-(\alpha+1)}}{x_{min}^{-\alpha}}$$

Les moments d'ordre  $n$  peuvent être calculés dès lors que  $n < \alpha$  :

$$\mu_n = \frac{\alpha x_{min}^n}{\alpha - n}$$

Le choix des paramètres  $x_{min}$  et  $\alpha$  est déterminant sur les chocs imposés à la série des variations. Une condition mise en avant par Dacorogna<sup>1</sup> est l'égalité entre l'espérance du carré des variations et l'espérance du carré des variations perturbées afin de maintenir la variance inchangée.

---

<sup>1</sup> Article : « *Bootstrapping the Economy* »

Nous avons donc, en appelant  $\tilde{v}_i$  la  $i^{\text{ème}}$  variation perturbée et  $v_i$  la  $i^{\text{ème}}$  variation :

$$\mathbb{E}(\tilde{v}_i^2) = \mathbb{E}(\eta v_i^2) = \mathbb{E}(\eta^2 v_i^2) \quad (1)$$

Et par indépendance de  $v_i$  et  $\eta$  :

$$\mathbb{E}(\tilde{v}_i^2) = \mathbb{E}(\eta^2) * \mathbb{E}(v_i^2)$$

Pour maintenir l'égalité, il faut donc avoir :

$$\mathbb{E}(\eta^2) = 1$$

Le moment d'ordre 2 s'écrit donc sous la contrainte (1) :

$$\mathbb{E}(\eta^2) = \frac{\alpha x_{min}^2}{\alpha - 2} = 1 \quad (2)$$

Il paraît nécessaire de ne pas trop perturber à la baisse les variations puisque nous nous intéressons à un choc aléatoire qui va perturber à la hausse nos variations, nous choisissons donc un seuil  $x_{min} = 80\%$ .

Nous pouvons à présent trouver la valeur  $\alpha$  qui satisfait à la contrainte (1) en inversant l'équation (2). Nous obtenons :

$$\alpha = \frac{-2}{x_{min}^2 - 1} = 5,555556$$

Graphiquement nous avons :

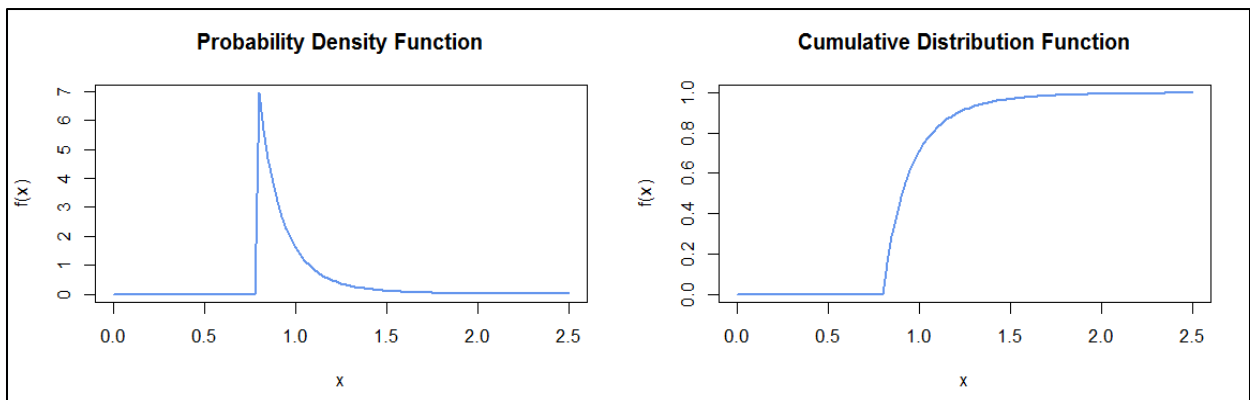


Figure 51 – Fonction de densité et de répartition d'une loi Pareto Type I

### 3. Correction par chocs locaux via chaîne de Markov

Nous allons tenter de modéliser avec le Markov Regime Switching le phénomène de normalité économique et de crise. Ce modèle repose sur une chaîne de Markov qui pourra se trouver dans deux états :

- Etat 1 : un état de normalité économique ou scénario central
- Etat 2 : un état de crise où les variations sont très perturbées

Cette modélisation semble judicieuse à la vue des données historiques :

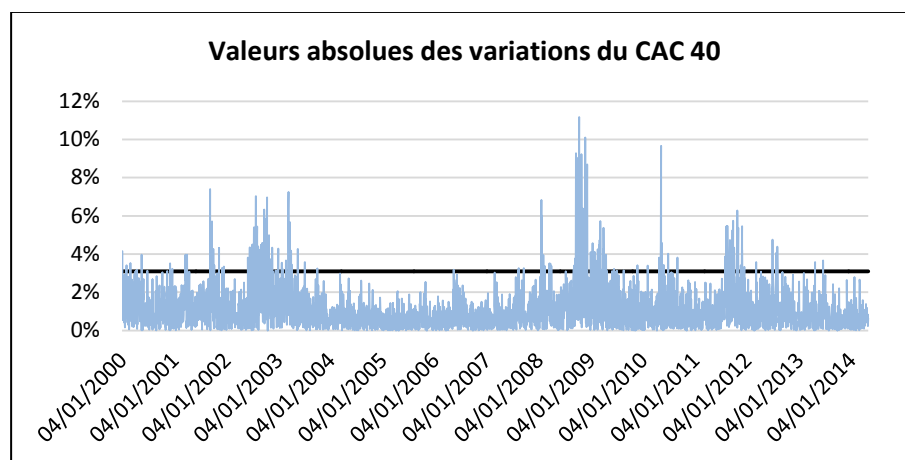


Figure 52 – Valeurs absolues des variations du CAC 40

Lorsque nous regardons l'évolution dans le temps des valeurs absolues des variations journalières du CAC 40, nous remarquons des périodes de volatilité faible du cours avec des variations inférieures à 3,1% qui correspond au quantile à 95% et des périodes de forte volatilité avec des variations pouvant dépasser les 10%. En faisant l'hypothèse que les autres indices peuvent se comporter de la même façon, nous pouvons essayer de modéliser des chocs locaux qui dépendront de l'état dans lequel se trouve la chaîne de Markov.

Notons que sur le graphique précédent nous pouvons observer un effet de *clustering* qui correspond au fait que les fortes variations entraînent des fortes variations, c'est en quelque sorte un effet de regroupement des extrêmes.



L'état du monde à un instant  $t$   $M_t$  sera donc représenté par une chaîne de Markov, s'appuyant sur une matrice de transition  $\mathcal{P}$  donnée par :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

Où  $p_{ij}$  est la probabilité de passer de l'état  $i$  à l'état  $j$

Le critère choisi pour estimer les probabilités de passage de la chaîne de Markov sera ce seuil de 3,1% sur les valeurs absolues des variations journalières qui correspond en fait au quantile à 95% des valeurs absolues des variations observées sur la période étudiée. Si la valeur observée est inférieure à 3,1%, nous considérons que la chaîne se trouve dans l'état 1, sinon elle se trouve dans l'état 2.

Nous pouvons utiliser les estimateurs naturels de  $p_{11}$  et  $p_{22}$  à savoir :

$$\hat{p}_{11} = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n \mathbb{I}\{M_t = 1 \mid M_{t-1} = 1\} = 0,91$$

$$\hat{p}_{22} = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n \mathbb{I}\{M_t = 2 \mid M_{t-1} = 2\} = 0,02$$

Où  $n$  représente le nombre d'observations entre 3 Janvier 2000 et le 2 Mai 2014.

On en déduit immédiatement les complémentaires et donc la matrice :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0,91 & 0,09 \\ 0,98 & 0,02 \end{pmatrix}$$

Nous avons donc 91% de chance de rester dans l'état 1 si l'on se trouve dans l'état 1 à la période précédente et par complémentaire 9% de chance de passer dans l'état 2. De la même façon nous avons 2% de chance de rester dans l'état 2 si l'on s'y trouve à la période précédente et 98% de chance de passer dans l'état 1.

Reste à présent à définir les chocs qui correspondent aux états de la chaîne. L'état 1 correspond à un état de normalité économique, le choc est donc nul, il en résulte que le coefficient vaut 1. En ce qui concerne l'état 2, nous observons la moyenne en-dessous du quantile et la moyenne au-dessus du quantile. Le rapport des deux nous donnera un ratio qui sera notre choc. Nous avons :

$$\mathbb{E}(v|v < q_{99.5\%}(v)) = 0,9\%$$

$$\mathbb{E}(v|v > q_{99.5\%}(v)) = 4,4\%$$

Où  $v$  est la série des valeurs absolues des variations journalières.

Nous en déduisons un choc ponctuel de  $\frac{4,4\%}{0,9\%} = 4,9$

À chaque étape de projection, nous simulerons donc la chaîne de Markov et en déduirons le choc à appliquer aux variations, qui s'écriront donc :

$$\tilde{v}_i = k_i * v_i$$

Où  $k_i = \begin{cases} 1 & \text{si } M_i = 1 \\ 4,9 & \text{si } M_i = 2 \end{cases}$  qui dépendra de la chaîne de Markov et  $v_i$  qui sera tirée

aléatoirement parmi la base de variation.

## 4. Impacts sur le risque Action

Nous appliquons la méthode *Bootstrap* historique, *Bootstrap* historique par fenêtre de projection, *Bootstrap* historique corrigée par loi de Pareto et *Bootstrap* historique corrigée par chaîne de Markov à la projection de l'action Deutsch Bank AG à un horizon d'un an.

Nous observons les résultats suivants :

| Type      | Moyenne | Médiane | VaR 0,5 % | TVaR 0,5 % |
|-----------|---------|---------|-----------|------------|
| Bootstrap | 35,50   | 32,58   | 11,70     | 10,29      |
| Fenêtre   | 35,92   | 33,20   | 11,05     | 9,65       |
| Pareto    | 34,04   | 31,17   | 10,46     | 9,63       |
| Markov    | 34,67   | 27,71   | 3,85      | 2,57       |

Tableau 11 – Résultats des modifications sur la méthode de projection

Nous observons que les résultats se ressemblent pour les trois premières méthodes de projection. La méthode de projection corrigée par chaîne de Markov n'est pas robuste. Elle offre une variabilité trop forte et beaucoup de cours projetés tendent vers 0 avec cette méthode, elle n'est donc pas retenue. Les méthodes de correction par prise en compte de la dépendance journalière entre les variations via le tirage de fenêtres de variations et par la correction des queues de distributions des variations via l'ajout d'un coefficient aléatoire suivant une loi de Pareto donnent des résultats comparables comme le montre la comparaison des fonctions de répartition :

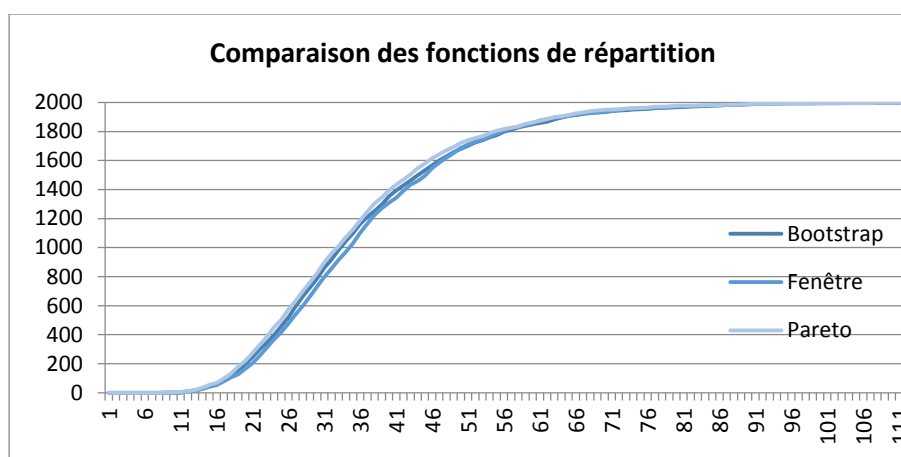


Figure 53 – Comparaison des fonctions de répartition

*« Le nom seul de calcul des probabilités est un paradoxe :  
la probabilité opposée à la certitude, c'est ce qu'on ne sait pas,  
et comment peut-on calculer ce que l'on ne connaît pas ? »*

Henri Poincaré<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Ouvrage : « La Science et l'hypothèse », 1914

## Conclusion

L'*ORSA* est un exercice nouveau et complexe et la mise en place d'un générateur de scénarios économiques se traduit par une charge importante pour les entreprises.

Dans ce mémoire, il a été question d'apporter à une solution abordable à cette charge, que ce soit d'un point de vue pratique et technique. La solution à ce problème est d'utiliser un générateur de scénarios économiques non-paramétrique : ce générateur ne fait pas intervenir de modèles mathématiques complexes qui sont souvent mal appréhendés et dont les hypothèses fortes ne sont que très rarement respectées. Cette approche permet cependant d'obtenir des résultats comparables avec les approches les plus usuelles. La génération de trajectoire repose sur un *Bootstrap* historique qui consiste à projeter les variables en leurs appliquant des variations tirées aléatoirement dans la base des variations passées. Les avantages de cette méthode sont nombreux mais en premier lieu, son réel atout est sa simplicité de fonctionnement, elle est compréhensible par l'ensemble des équipes intervenant sur l'*ORSA* et non pas seulement par la fonction actuarielle. Elle permet de projeter les différents risques et d'en déduire leurs distributions à l'horizon de temps souhaité. De plus, cette technique de projection permet de conserver les liens historiques de dépendance entre les risques et donc de pouvoir produire les matrices de corrélations propres à l'entreprise pour chacun des sous-groupes de risques considérés et ainsi d'ajouter une dimension supplémentaire à la comparaison du profil de risque de l'entreprise et celui qui est supposé dans la formule standard.

Il faut préciser que l'*ORSA* repose également sur une approche qualitative des risques. Il existe des risques non-quantifiables qui ne peuvent être couverts par du capital : la solution est de minimiser son exposition face à ces risques. C'est un travail qui débute par une cartographie de tous les risques liés à l'activité de l'entreprise, qui se poursuit par l'identification des déficiences de gestion qui sont à l'origine des risques non-quantifiables et qui aboutit à des solutions au niveau des processus de gestion. Cette tâche ne relève pas de l'aspect quantitatif de l'*ORSA* mais représente une dimension réelle de l'approche *ERM* qui doit être mise en place pour respecter les exigences découlant de la directive Solvabilité II.

## Bibliographie

Journal officiel de l'Union Européenne : « Directive 2009/138/CE – Solvabilité II », 2009

EIOPA : « Technical Specification for the Preparatory Phase », 2014

EIOPA : « Consultation papers on the proposal for guidelines for the own risk and solvency assessment », 2014

EIOPA : « Guidelines On Forward Looking Assessment Of Own Risks », 2014

EIOPA : « The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation », 2014

ACPR : « Conférence : Solvabilité II, pilier 2 », 2011

Institut des Actuaires : « L'ORSA : Quelques exemples de pratiques actuarielles », 2014

Géraldine BOUISSIERES : « Modélisation prospective du bilan d'un assureur automobile dans le cadre de l'ORSA et analyse de la volatilité du ratio de solvabilité », mémoire ISUP, 2011

Tsanta RAMANAMPISOA : « Application de la méthode Least-Square Monte-Carlo pour la mise en place de l'ORSA en Assurance vie », mémoire ISUP, 2013

L'actuariel n°8 : « Gestion des risques : priorité à l'ORSA », 2013

Franck JEDRZEJEWSKI : « Modèles aléatoires et physique probabiliste », 2009

Frédéric PLANCHET, Pierre-Emmanuel THEROND : « Simulation de trajectoires de processus continus », 2005

Christophe DUTANG, Thibault MARCHAL, Tan N'GUYEN : « Mersenne Twister et Translation irrationnelle du tore : comparaison et mise en œuvre pratique », 2008

Jacques FRANCHI : « Calcul Stochastique », cours Université de Strasbourg, 2013

Romuald ELIE : « Calcul Stochastique pour la finance », cours Université Paris Dauphine

Nicole El Karoui : « Couverture des risques dans les marchés financiers », cours X

Philippe JORION : « Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk », 2006

Peter CHRISTOFFERSEN : « Evaluation Interval Forecasts », 2004

Paul KUPIEC : « Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models », 1995

Christophe HURLIN : « Value-at-Risk et Backtesting », cours Université d'Orléans, 2008

Ulrich MÜLLER, Roland BÜRGI, Michel DACOROGNA : « Bootstrapping the Economy – a non-parametric method of generating consistent future scenarios », SCOR Switzerland, 2004

## Table des figures

|                                                                                                   |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figure 1 – Cartographie des risques dans Solvabilité II ( <i>EIOPA</i> 30/04/2014) .....          | 12  |
| Figure 2 – Distribution du risque et illustration du quantile .....                               | 18  |
| Figure 3 – Schéma récapitulatif de l'approche <i>ORSA</i> .....                                   | 21  |
| Figure 4 – Bilan de l'entreprise.....                                                             | 25  |
| Figure 5 – Compte de résultat .....                                                               | 26  |
| Figure 6 – Représentation de 2500 termes d'une suite $y$ pseudo-aléatoire sur $[0;1]$ .....       | 39  |
| Figure 7 – Représentation de 2500 termes d'une suite $z$ quasi-aléatoire sur $[0;1]$ .....        | 39  |
| Figure 8 – Cours de l'action <i>Deutsch Bank</i> du 06/09/2004 au 31/12/2013 .....                | 47  |
| Figure 9 – Variations journalières de l'action <i>Deutsch Bank</i> .....                          | 47  |
| Figure 10 – 10 Trajectoires de l'action <i>Deutsch Bank</i> .....                                 | 48  |
| Figure 11 – Distribution de la valeur de l'action <i>Deutsch Bank</i> à un an .....               | 48  |
| Figure 12 – Log-rendements journaliers de l'action <i>Deutsch Bank</i> .....                      | 51  |
| Figure 13 – Log-rendements journaliers de l'action <i>Deutsch Bank</i> .....                      | 51  |
| Figure 14 – Comparaison des densités empirique et Normale.....                                    | 52  |
| Figure 15 – Diagramme quantile-quantile.....                                                      | 52  |
| Figure 16 – 10 Trajectoires de l'action <i>Deutsch Bank</i> .....                                 | 54  |
| Figure 17 – Courbe de taux <i>EUSR</i> 31/12/2013 .....                                           | 59  |
| Figure 18 – Courbes de taux à un an .....                                                         | 60  |
| Figure 19 – Courbe de prix <i>ZC</i> issue de la courbe de taux <i>EUSR</i> 31/12/2013.....       | 64  |
| Figure 20 – Comparaison des courbes de prix <i>ZC</i> .....                                       | 65  |
| Figure 21 – 10 Trajectoires de taux courts par modèle <i>CIR</i> .....                            | 66  |
| Figure 22 – 10 Courbes de taux à un an issues du modèle <i>CIR</i> .....                          | 67  |
| Figure 23 – Distribution du <i>SCR</i> Action à un an .....                                       | 71  |
| Figure 24 – Distribution du <i>SCR</i> Action à deux ans.....                                     | 71  |
| Figure 25 – Distribution du <i>SCR</i> Action à trois ans .....                                   | 72  |
| Figure 26 – Choc de hausse de taux par rapport à la maturité sur vingt ans .....                  | 74  |
| Figure 27 – Courbe de taux <i>EIOPA</i> et <i>EIOPA</i> choquée .....                             | 74  |
| Figure 28 – Distribution du <i>SCR</i> Taux à trois ans .....                                     | 76  |
| Figure 29 – Illustration du <i>Spread</i> existant entre deux courbes de taux.....                | 77  |
| Figure 30 – Calcul du choc pour le risque de <i>Spread</i> .....                                  | 78  |
| Figure 31 – Distribution du <i>SCR</i> <i>Spread</i> à trois ans.....                             | 79  |
| Figure 32 – Evolution de l'indice <i>EDHEC IEFI Commercial Property</i> .....                     | 81  |
| Figure 33 – Distribution du <i>SCR</i> Immobilier à trois ans .....                               | 81  |
| Figure 34 – Coût moyen par personne protégée.....                                                 | 83  |
| Figure 35 – Distribution du <i>SCR</i> Santé à trois ans.....                                     | 84  |
| Figure 36 – Matrice de corrélation pour les sous-modules du risque de marché .....                | 86  |
| Figure 37 – Distribution du <i>SCR</i> Marché à trois ans .....                                   | 87  |
| Figure 38 – Distribution du <i>BSCR</i> à trois ans .....                                         | 87  |
| Figure 39 – Distribution du <i>SCR</i> à trois ans.....                                           | 89  |
| Figure 40 – Distribution du résultat à trois ans .....                                            | 90  |
| Figure 41 – Distribution des fonds propres à trois ans.....                                       | 90  |
| Figure 42 – Evolution du ratio de couverture dans le temps .....                                  | 91  |
| Figure 43 – Evolution du ratio Sinistres à Primes .....                                           | 93  |
| Figure 44 – Distribution de la valeur du portefeuille actions à un an.....                        | 95  |
| Figure 45 – Distribution de la valeur du portefeuille obligataire à un an (Taux) .....            | 96  |
| Figure 46 – Distribution de la valeur du portefeuille obligataire à un an ( <i>Spread</i> ) ..... | 97  |
| Figure 47 – Distribution de la valeur de l'immobilier à un an.....                                | 98  |
| Figure 48 – Distribution du à l'activité en santé à un an .....                                   | 99  |
| Figure 49 – Distribution de la somme des risques du module Marché .....                           | 103 |
| Figure 48 – Distribution du ratio de couverture à un an .....                                     | 106 |
| Figure 49 – Distribution du ratio de couverture à deux ans.....                                   | 106 |
| Figure 50 – Distribution du ratio de couverture à trois ans .....                                 | 107 |
| Figure 51 – Fonction de densité et de répartition d'une loi Pareto Type I .....                   | 110 |
| Figure 52 – Valeurs absolues des variations du <i>CAC</i> 40.....                                 | 111 |
| Figure 53 – Comparaison des fonctions de répartition .....                                        | 114 |

## Table des tableaux

|                                                                                            |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tableau 1 – Base de valeurs historiques .....                                              | 33  |
| Tableau 2 – Base de variations historiques .....                                           | 33  |
| Tableau 3 – Projections des indices.....                                                   | 33  |
| Tableau 4 – Résultats pour l'estimation de $\pi/4$ .....                                   | 42  |
| Tableau 5 – Résultats pour l'estimation du quantile .....                                  | 43  |
| Tableau 6 – Résultats pour l'estimation du quantile .....                                  | 45  |
| Tableau 7 – Comparaison des résultats avec modèle CIR et <i>Bootstrap</i> historique ..... | 68  |
| Tableau 8 – Chocs sur les obligations dans le cadre du SCR Taux .....                      | 75  |
| Tableau 9 – Chocs sur les obligations dans le cadre du SCR Spread.....                     | 78  |
| Tableau 10 – Ecart avec la formule standard.....                                           | 104 |
| Tableau 11 – Résultats des modifications sur la méthode de projection.....                 | 114 |