



**HAL**  
open science

## Les leviers de la rentabilité d'un portefeuille retraite

Lan Zheng

► **To cite this version:**

Lan Zheng. Les leviers de la rentabilité d'un portefeuille retraite. *Économie et finance quantitative [q-fin]*. 2014. dumas-01130690

**HAL Id: dumas-01130690**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01130690>**

Submitted on 12 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année Universitaire 2012/2013

Tuteur de mémoire en entreprise :  
*Patrick MOROSE*

Tuteur académique:  
*Pierre DEVOLDER*

# **Les leviers de la rentabilité d'un portefeuille retraite**

Présenté par Lan ZHENG

## REMERCIEMENTS

En préambule à ce mémoire, je souhaitais adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes du service Souscription & Surveillance du Portefeuille Retraite sur mesure qui m'ont apporté leurs aides au cours de mon stage et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens à remercier sincèrement Madame Nathalie BAUDOUIN, la responsable de ce service, pour avoir accepté ma candidature, pour le temps qu'elle m'a consacré pendant la durée de mon stage et pour la gentillesse qu'elle a lu et corrigé ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent particulièrement à Monsieur Patrick MOROSE du service Inventaire Retraite et Monsieur Hoang Nguyen NGUYEN d'un ALM quantitative analyste chez AVIVA Life Insurance, pour leurs soutiens et leurs conseils qu'ils ont su me donner tout au long de la rédaction de ce mémoire.

Je tiens à remercier également mon tuteur universitaire Monsieur Pierre DEVOLDER, pour ses commentaires et propositions qu'ils ont pu m'aider à bien améliorer mon mémoire.

J'exprime ma gratitude à toutes les personnes qui m'ont toujours encouragé au cours de mon stage et la réalisation de ce mémoire.

Enfin, je souhaite adresser mes plus sincères remerciements à l'ensemble du corps professoral et administratif de l'Université de Strasbourg.

## RESUME

Dans un contexte de crise économique et financière, qui entraîne une diminution du volume de la matière assurable et une baisse des rendements financiers, les sociétés d'assurance ou les assureurs se recentrent sur la valeur économique du client à l'échelle de l'individu. En cas de non rentabilité du produit principal (Type produit de retraite), les sociétés d'assurances chercheront à vendre un produit additionnel (Type produit de prévoyance). Cela permettra de déterminer la rentabilité au niveau de client et non au produit. Pour mesurer la rentabilité nous utiliserons l'indice de rentabilité NBM (New Business Margin) sur les affaires nouvelles. Premièrement, nous calibrons les paramètres nécessaires avec les modélisations de l'actif (Obligation, Action et Immobilier). Deuxièmement, nous nous focaliserons sur le produit de retraite collective Article 83 pour obtenir cet indice de rentabilité NBM en scénario déterministe et en scénario stochastique. Enfin, nous analysons les différents leviers de création de cette valeur en risque historique et en risque neutre.

---

Mots-clés : Rentabilité NBM (New Business Margin), produit principal de retraite, produit de complémentaire prévoyance, Unités de compte, régime à cotisations définies (Article 83), leviers, modélisation de l'actif, modèle de Vasicek, modèle de Black et Scholes.

## **ABSTRACT**

In a context of economic and financial crisis, which causes a decrease of the volume of the insurable material and a reduction of the financial yields, the insurance companies or insurers refocus on the economic value of the customer on the scale of the individual. In case of not profitability of the main product (Type product of retirement), insurance companies will try to make the additional sale (Type product of foresight). It will allow us to determine the profitability at the level of customer, not at the product. To measure the profitability, we shall use the index of profitability NBM (New Business Margin) on the new affaires. Firstly, we calibrate all the necessary parameters with these modelling of the asset (Bond, Share and real estate). Secondly, we will focus on the product of the collective retirement Article 83 to obtain the index of profitability NBM at the deterministic scenario and the stochastic scenario. Finally, we analyse the various levers of creation of the value at the historic risk and the neutral risk.

---

Keywords : Profitability, NBM (New Business Margin), main product of retirement, product of complementary foresight, Unit of Account, regime with defined contributions (Article 83), levers, modeling of the asset, Vasicek model, Black and Scholes model.

## Table des matières

<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>7</b>
<b>PARTIE I : GÉNÉRALITÉS SUR LES RÉGIMES DE RETRAITES .....</b>	<b>9</b>
<b>CHAPITRE 1. PRESENTATION DE L'ORGANISME ASSUREUR .....</b>	<b>10</b>
<b>1. L'ASSURANCE COMME CŒUR DE METIER .....</b>	<b>10</b>
<b>2. GENERALI EN FRANCE .....</b>	<b>11</b>
2.1 <i>Generali France, un acteur de référence de l'assurance dans l'Hexagone.....</i>	<i>11</i>
2.2 <i>Des solutions d'assurance créatives et performantes .....</i>	<i>11</i>
2.3 <i>La Retraite collective au sein de Generali Vie.....</i>	<i>12</i>
<b>CHAPITRE 2. LA RETRAITE EN FRANCE .....</b>	<b>13</b>
<b>1. PRESENTATION DE LA RETRAITE .....</b>	<b>13</b>
<b>2. LES PILIERS DE LA RETRAITE.....</b>	<b>14</b>
2.1 <i>Le régime de base (Sécurité Sociale).....</i>	<i>16</i>
2.2 <i>Les régimes complémentaires .....</i>	<i>20</i>
2.3 <i>Les enjeux de la retraite.....</i>	<i>22</i>
<b>CHAPITRE 3. LA RETRAITE SUPPLEMENTAIRE.....</b>	<b>23</b>
<b>1. CALCUL DES ENGAGEMENTS POUR L'ENTREPRISE.....</b>	<b>24</b>
1.1 <i>Norme IAS 19.....</i>	<i>24</i>
1.2 <i>Préimère de la norme IAS 19.....</i>	<i>24</i>
1.3 <i>Avantages du personnel .....</i>	<i>25</i>
<b>2. FOCUS SUR LA CAPITALISATION.....</b>	<b>27</b>
2.1 <i>Retraite par capitalisation gérée par un fonds de pension .....</i>	<i>28</i>
2.2 <i>Retraite par capitalisation gérée par un assureur .....</i>	<i>30</i>
2.3 <i>Les différences entre le fonds de pension et l'assureur.....</i>	<i>32</i>
<b>3. LES PRODUITS DE RETRAITE COLLECTIVE.....</b>	<b>34</b>
3.1 <i>Les Indemnités de Fin de Carrière (IFC).....</i>	<i>34</i>
3.2 <i>Le produit l'Article 39.....</i>	<i>35</i>
3.3 <i>Le produit l'Article 83.....</i>	<i>38</i>
3.4 <i>Récapitulation de l'Article 83 et l'Article 39.....</i>	<i>46</i>
<b>4. SUPPORT D'INVESTISSEMENT.....</b>	<b>47</b>
4.1 <i>Le fonds en euros .....</i>	<i>47</i>
4.2 <i>Les unités de compte .....</i>	<i>48</i>
4.3 <i>Différences entre les unités de compte et le fonds en euros .....</i>	<i>49</i>
<b>5. LA RENTABILITE D'UNE AFFAIRE NOUVELLE .....</b>	<b>50</b>
<b>PARTIE II : LES MODÈLES D'ACTIFS.....</b>	<b>52</b>
<b>CHAPITRE 1. LE GENERATEUR DE SCENARIOS ÉCONOMIQUES (GSE).....</b>	<b>53</b>
<b>1. PRESENTATION GENERALE DE GSE .....</b>	<b>53</b>
<b>2. PRESENTATION THEORIQUE DES GSE .....</b>	<b>54</b>
<b>CHAPITRE 2. LA MODELISATION DE L'ACTIF .....</b>	<b>55</b>
<b>1. LA MODELISATION DES TAUX D'INTERET.....</b>	<b>56</b>
1.1 <i>Notations.....</i>	<i>57</i>

1.2	<i>Le modèle de Vasicek</i> .....	58
1.3	<i>Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR)</i> .....	59
1.4	<i>La calibration du modèle de Vasicek</i> .....	61
<b>2.</b>	<b>LA MODELISATION DES ACTIONS</b> .....	<b>62</b>
2.1	<i>Le modèle de Black et Scholes</i> .....	63
2.2	<i>Le modèle de Merton</i> .....	64
2.3	<i>La calibration du modèle de Black et Scholes</i> .....	64
<b>3.</b>	<b>LA MODELISATION DE L'IMMOBILIER</b> .....	<b>66</b>
3.1	<i>Les deux types de modélisation</i> .....	66
3.2	<i>La calibration du modèle de Black et Scholes</i> .....	66
<b>4.</b>	<b>LA MODELISATION DE L'INFLATION</b> .....	<b>67</b>
4.1	<i>L'approche de Kaufmann</i> .....	67
4.2	<i>L'approche de Wilkie</i> .....	68
	<b>PARTIE III : LES LEVIERS DE LA VALEUR D'UN PORTEFEUILLE RETRAITE</b> .....	<b>69</b>
	<b>CHAPITRE 1. CALCUL DE LA NEW BUSINESS MARGIN (NBM)</b> .....	<b>70</b>
1.	<b>ANNUALIZED PREMIUM EQUIVALENT (APE)</b> .....	70
2.	<b>LE RESULTAT NET</b> .....	71
2.1	<i>Total des produits de l'exercice t</i> .....	73
2.2	<i>Total des charges de l'exercice t</i> .....	74
2.3	<i>Formules d'évolution de la provision mathématique (PM)</i> .....	75
	<b>CHAPITRE 2. LES HYPOTHESES FINANCIERES ET TECHNIQUES</b> .....	<b>76</b>
1.	<b>HYPOTHESES FINANCIERES AU SENS DE SCENARIO DETERMINISTE</b> .....	76
1.1	<i>Projection de courbe des rendements</i> .....	76
1.2	<i>Projection de courbe d'inflation</i> .....	78
2.	<b>HYPOTHESES FINANCIERES DANS LE CAS DE SCENARIOS STOCHASTIQUES</b> .....	79
3.	<b>HYPOTHESES DE FRAIS GENERAUX ET FRAIS D'ACQUISITION</b> .....	81
4.	<b>LES AUTRES HYPOTHESES</b> .....	82
	<b>CHAPITRE 3. ETUDES DE CAS</b> .....	<b>83</b>
1.	<b>LA DEMOGRAPHIE</b> .....	83
2.	<b>PROPOSITION TARIFAIRE ET PARAMETRES NBM</b> .....	83
3.	<b>PROJECTION RESULTAT EN SCENARIO DETERMINISTE</b> .....	85
3.1	<i>La situation initiale</i> .....	85
3.2	<i>Les impacts des leviers</i> .....	86
3.3	<i>Synthèse générale de l'impact NBM au scénario déterministe</i> .....	91
4.	<b>PROJECTION RESULTAT EN SCENARIO STOCHASTIQUE</b> .....	91
4.1	<i>La situation initiale</i> .....	91
4.2	<i>Les impacts des leviers</i> .....	95
4.3	<i>Synthèse générale de l'impact NBM au scénario stochastique en risque historique</i> .....	99
4.4	<i>Synthèse générale de l'impact NBM au scénario stochastique en risque neutre</i> .....	100
	<b>CONCLUSION</b> .....	<b>102</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE</b> .....	<b>103</b>
	<b>ANNEXES</b> .....	<b>105</b>

<b>1. LA DEMOGRAPHIE</b> .....	105
<b>2. HYPOTHESES FINANCIERES AU SENS DE SCENARIO DETERMINISTE</b> .....	106
<b>3. CONNAISSANCES MATHEMATIQUES</b> .....	106
3.1 <i>Mouvements browniens</i> .....	106
3.2 <i>Processus d'Itô et lemme d'Itô</i> .....	107
3.3 <i>Le modèle de Vasicek</i> .....	108
3.4 <i>Le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR)</i> .....	109
<b>4. LES CODES VBA DE LA SIMULATION DES ACTIFS</b> .....	110

## INTRODUCTION

Aujourd'hui, la retraite est considérée comme une nouvelle vie, un nouveau départ, sur une période longue de plusieurs dizaines d'années (de 20 à 40 ans) où l'inactivité professionnelle laisse place à l'activité personnelle. Cette « deuxième vie » est financée par un système de protection sociale à bout de souffle où les réformes successives proposent des solutions à court terme. Pour garder leur pouvoir d'achat, les français vont devoir s'orienter vers des produits d'épargne retraite collectifs ou individuels.

L'objectif du service Souscription & Surveillance du portefeuille retraite sur mesure de Generali, où mon stage s'est effectué est double :

- Activité de souscription
  - Réaliser les études actuarielles des engagements de retraite pour les prospects
  - Proposer une tarification attractive pour le prospect en adéquation avec les règles de rentabilité du groupe Generali (NBM : New Business Margin)
- Activité de surveillance du portefeuille
  - Actualiser les calculs d'engagement de retraite des entreprises clientes
  - Réaliser les comptes de résultat
  - Etablir chaque année la cartographie des contrats
  - Participer à l'ensemble des projets en matière de retraite collective (évolution réglementaire, étude technique sur les risques, etc.)

Si les régimes obligatoires sont gérés en répartition, les régimes supplémentaires sont, quant à eux, souvent gérés en capitalisation. Il s'agit le plus souvent de régimes privés mais l'état est souvent intervenu dans la réglementation concernant ces « fonds de pension » : d'une part, en procédant à des allègements fiscaux et/ou sociaux des cotisations ou contributions dues par les employeurs ou leurs salariés, d'autre part, en veillant à la mise en place de garanties afin que leurs salariés ne puissent se trouver lésés soit par la faillite du fonds de pension et/ou de l'entreprise promotrice, soit par leur départ de l'entreprise avant l'âge du départ en retraite.

Le sujet de ce mémoire est une valeur d'un portefeuille retraite d'un assureur français. Son objectif est de déterminer l'impact des paramètres sur le calcul d'un indice de la rentabilité appelé NBM (New Business Margin). Le mémoire est présenté comme suit :

Dans la première partie intitulée « GÉNÉRALITÉ SUR LES RÉGIMES DE RETRAITES », nous présenterons, d'abord, brièvement le groupe Generali. Puis, la retraite en France concentrée sur les trois piliers principaux. Ensuite, nous détaillerons les trois piliers selon les deux mécanismes de financement des retraites, soit la retraite par répartition, soit la retraite par capitalisation. Ensuite, les produits d'épargne retraite, notamment les trois types de contrats principaux (Indemnités de Fin de Carrière, Régime à cotisations définies, Régime à prestations définies). Enfin, un focus sur les garanties du contrat Article 83 et une petite présentation à propos de support d'investissement.

Dans la deuxième partie «LES MODÈLES D'ACTIFS », nous faisons une brève présentation concernant le générateur de scénarios économiques. Et nous insistons sur les quatre modélisations de l'actif (Obligation, Action, Immobilier et Inflation). Nous utilisons le modèle de Vasicek pour calibrer les paramètres des obligations et le modèle de Black et Scholes pour calibrer les paramètres des actions et de l'immobilier (du logement).

Dans la dernière partie «LES LEVIERS DE LA VALEUR D'UN PORTEFEUILLE RETRAITE », nous nous focaliserons sur la valeur de la rentabilité NBM. Nous précisons les éléments du total des produits et du total des charges de l'exercice t afin d'obtenir la formule de la NBM. Ensuite, nous déterminerons des hypothèses financières et techniques au sens de scénario déterministe et scénario stochastique pour mieux calculer la NBM. Enfin, nous construirons un portefeuille concernant une population d'assuré avec les taux de versements au contrat souhaités ou accordés pour faire des études de sensibilité en risque historique et risque neutre.

# **PARTIE I : GÉNÉRALITÉS SUR LES RÉGIMES DE RETRAITES**

## CHAPITRE 1. Présentation de l'organisme assureur

### 1. L'assurance comme cœur de métier

Créé à Trieste en 1831, le Groupe s'est développé dans toutes les branches de l'assurance pour accompagner aujourd'hui plus de 70 millions de clients dans le monde entier. Generali fait aujourd'hui partie des principaux groupes mondiaux de services financiers.

En Europe, le Groupe se positionne comme le premier assureur Vie. Generali opère à travers les différents types d'intermédiaires d'assurance : agents généraux, conseillers salariés, courtiers et partenaires, et via des accords avec de grands groupes bancaires européens sur certains territoires. Le Groupe est également le leader européen de la vente directe.

Le Groupe est par ailleurs l'un des acteurs majeurs dans le domaine de l'assistance via sa filiale Europ Assistance.



Plus de **60 pays** dans le monde  
**70 Mds€** de chiffre d'affaires  
**70 millions** de clients  
**80 000** collaborateurs

Generali, elle possède une solidité reconnue par les principales agences de notation :

Agence	Note	Signification	Date
Standard & Poor's	A	Solide avec la qualité moyenne supérieure	23 janvier 2013
Moody's	Baa1	Satisfaisant avec la qualité moyenne inférieure	17 juillet 2012
Fitch Ratings	A-	Haute sécurité avec la qualité moyenne supérieure	19 mars 2013

Les agences de notation ont pour l'activité d'évaluer cet aspect du risque, tant pour les États que pour les principales entreprises émettant des obligations. Au début des années 2010, trois agences se partagent 90 % du marché : Standard & Poor's, Moody's et Fitch Ratings. Chaque agence utilise sa propre codification de notation.

## **2. Generali en France**

### **2.1 Generali France, un acteur de référence de l'assurance dans l'Hexagone**

Implanté dans l'Hexagone dès avril 1832, Generali est devenu un acteur incontournable du marché en s'appuyant sur sa forte dynamique interne et ses acquisitions successives. En 2012, Generali France a réalisé un chiffre d'affaires de 13,8 milliards d'euros (part de marché de l'ordre de 7 %). La France représente un marché majeur pour le Groupe puisque 19 % de l'activité mondiale y est réalisée.

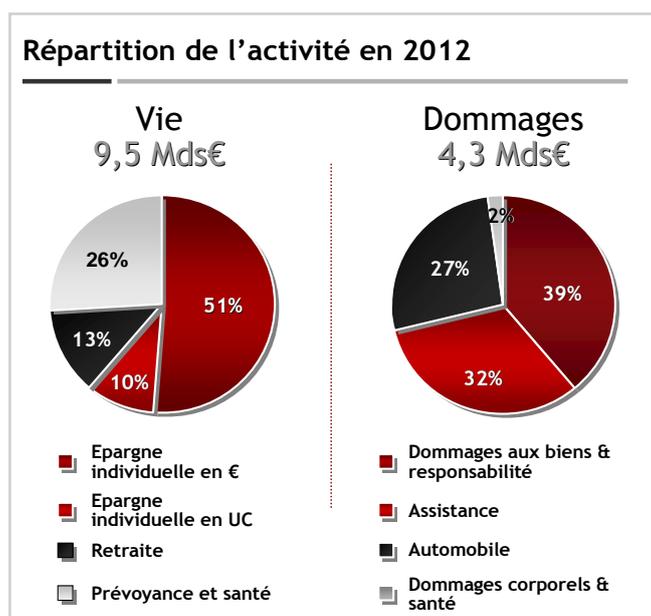
Le groupe opère dans toutes les branches de l'assurance et s'appuie sur plus de 7 000 collaborateurs mobilisés au service des clients ainsi que sur des réseaux de distribution diversifiés. Generali France protège désormais plus de 6 millions d'assurés dans tous les registres de leur vie, et accompagne près de 800 000 professionnels et entreprises dans leur développement.

Innovation et créativité lui ont permis de se positionner comme le leader sur le marché de la Retraite pour les professionnels ainsi que sur le marché Internet de l'épargne et comme un acteur majeur en Epargne individuelle. Generali France fait également partie des tous premiers fournisseurs des conseillers en gestion de patrimoine indépendants et des banques privées. Le Groupe est aussi un acteur majeur de la prévoyance.

### **2.2 Des solutions d'assurance créatives et performantes**

Generali France conçoit et propose des produits et services adaptés à la situation et aux attentes de chaque client. La protection du patrimoine, la préparation de l'avenir, la protection des proches et de la vie quotidienne, la couverture de l'activité professionnelle et de l'entreprise sont au cœur de son métier.

En donnant la priorité à la qualité du conseil et à la performance des garanties, Generali a témoigné au long de son histoire d'un esprit pionnier qui a marqué la profession dans de nombreux domaines : création de l'assistance, indemnités de fin de carrière, assurance pour les plaisanciers, placements profilés, protection juridique médicale, ou plus récemment, premières applications sur Smartphones, etc.



### 2.3 La Retraite collective au sein de Generali Vie

La Direction des Entreprises comprend les Assurances Dommages et les Assurances Collectives. La Direction des Entreprises Collectives de Generali Vie est aujourd'hui un acteur majeur dans les domaines de la prévoyance complémentaire, de la santé, des assurances d'emprunteurs et de la retraite avec un Chiffre d'Affaires de 1,2 milliards d'euros.

Sa stratégie s'inscrit dans le long terme et privilégie la stabilité et la pérennité des relations, avec ses clients, ses intermédiaires et ses partenaires.

Ces produits « standards » ou « sur mesures » sont diffusés par plusieurs canaux de distribution, tous opérant auprès des entreprises :

- le Grand Courtage
- les Courtiers spécialisés
- les Courtiers de province
- les Réseaux Salariés
- les Agents Généraux
- les Institutions de Prévoyance
- les Mutuelles...

Ces solutions de Retraite permettent de compléter les régimes obligatoires et d'externaliser les engagements sociaux en matière d'indemnités de fin de carrière ou de préretraite.

## CHAPITRE 2. La retraite en France

### 1. Présentation de la retraite

En France, le système de retraites est basé pour l'essentiel sur le principe de la répartition, les cotisations des actifs servant à payer les pensions versées aux retraités. Il y a quelques éléments importants :

- En 1945 : création du régime général de Sécurité Sociale qui rassemble tous les salariés du secteur privé ;
- En 1947 : création de l'AGIRC pour la retraite complémentaire des cadres ;
- En 1949 : création du régime d'assurance vieillesse pour les artisans, les commerçants et industriels et pour les professions libérales ;

A partir de cette date et au cours des 20 années qui vont suivre : floraison de diverses caisses de vieillesse.

- En 1961 : création de l'ARRCO ;
- Depuis 1990 : succession de réformes et la dernière en 2013.

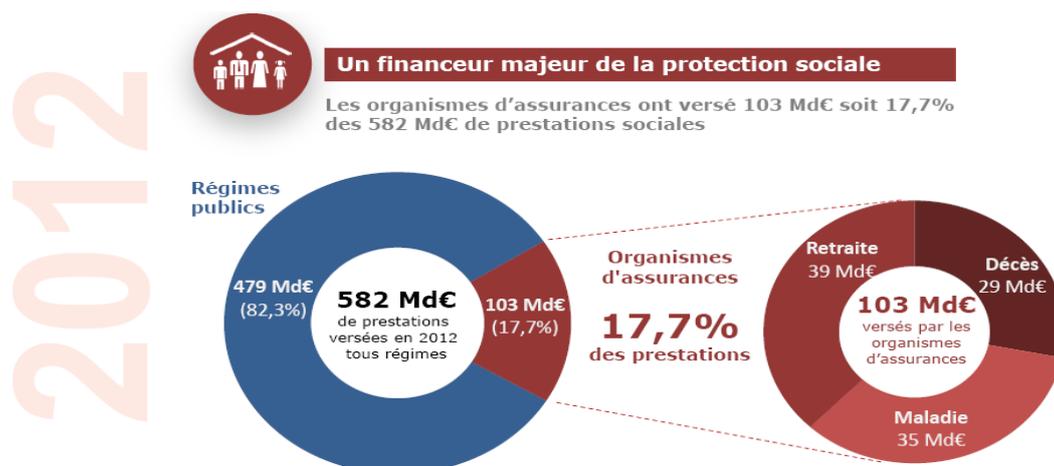
Quelques éléments de la réforme des retraites 2013	Situation avant réforme	Situation après réforme
Age légal de la retraite		62 ans ne bouge pas
Age d'obtention du taux plein*		67 ans ne bouge pas
Durée d'assurance	41,5 ans en 2020	43 ans en 2020 (166 trimestres)
Décote		5% par année de cotisation manquante
Surcote		5% par année de cotisation supplémentaire
<b>Objectif retour à l'équilibre des régimes de retraite en 2020</b>		

\* Taux plein : 50% du salaire annuel moyen calculé sur les 25 meilleures années.

La durée supplémentaire d'espérance de vie gagnée en France est de trois mois en moyenne chaque année, selon l'Institut National d'Études Démographiques (INED). Actuellement, l'espérance de vie est de 78,4 ans pour l'Homme et de 84,1 ans pour la Femme en moyenne.

Au 1<sup>er</sup> juillet 2012, en France métropolitaine, le nombre de retraités du régime général s'élève à 13,0 millions pour environ 18,3 millions de cotisants, soit un rapport de 1,39 cotisant pour un retraité (données de CNAV). Compte tenu de l'allongement de l'espérance de vie, le rapport devrait tomber à 1,4 en 2040 et à 1,35 en 2060.

Par ailleurs, la retraite est une composante majeure de la protection sociale qui est utilisée dans le monde entier, mais la Sécurité Sociale n'est que pour la France. La protection sociale regroupe les différents mécanismes de prise en charge, mis en œuvre au plan collectif et/ou individuel, pour faire face aux conséquences des « risques sociaux ». Les risques sociaux sont des situations susceptibles de compromettre la sécurité économique de l'individu ou de sa famille, en provoquant une baisse de ses ressources ou une hausse de ses dépenses (vieillesse, maladie, invalidité, chômage, maternité, charges de famille, etc.). La protection sociale repose sur soit le principe d'assurance (mutualisation des risques), soit le principe d'assistance (couverture minimale).



Conférence de presse FFSA / 26 juin 2013

8

## 2. Les piliers de la retraite

L'essentiel des revenus des retraités est financé par les cotisations des actifs (employeurs et salariés). Ces cotisations sont mutualisées et réparties entre les retraités : on parle d'un **système par répartition**. En contrepartie, les actifs cotisants obtiennent des droits qu'ils peuvent faire valoir lors de leur départ en retraite et bénéficient ainsi à leur tour de pensions financées par les cotisations des actifs de la génération suivante : c'est le principe de **solidarité intergénérationnelle**.

Un certain nombre de revendications catégorielles ont poussé à la création de deux niveaux de retraite obligatoire : **le régime de base et le régime complémentaire**. Malgré ces deux niveaux, les revenus des retraités sont moins importants qu'à la période d'activité. Le souci de compenser cette baisse a favorisé le développement d'un troisième niveau : **la retraite supplémentaire** qui correspond aux contrats proposés par les assureurs.

Le système collectif de retraite français repose aujourd'hui sur ces trois niveaux (piliers) : le régime de base, les régimes complémentaires et la retraite supplémentaire, et plus un pilier individuel.

Pilier 1 : le régime de base (obligatoire, mécanisme de répartition)

- **La rente Sécurité Sociale**

Pilier 2 : les régimes complémentaires (obligatoire, mécanisme de répartition)

- **Les rentes ARRCO et AGIRC ou autres organismes**

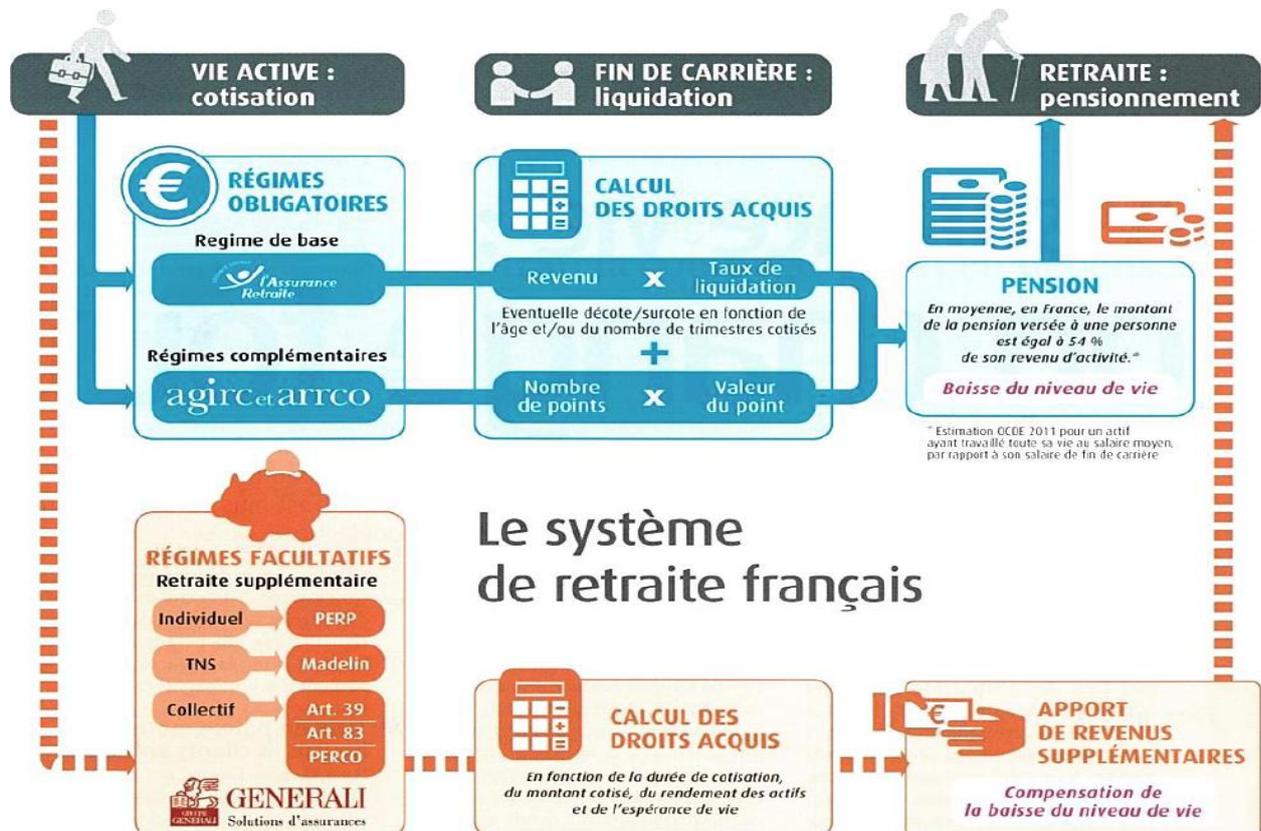
Pilier 3 : la retraite supplémentaire d'entreprise (facultative, mécanisme de capitalisation)

- **Les rentes issues des contrats Article 83 et Article 39**
- **Le capital issu des contrats IFC (Indemnités de Fin de Carrière)**
- **Les mécanismes d'Épargne Salariale (PERE, PERCO)**

Pilier 4 : la retraite supplémentaire individuelle (facultative, mécanisme de capitalisation)

- **PERP, Assurance vie, PEE...**

Dans le système de retraite français par répartition, la retraite Sécurité Sociale représente l'essentiel de la pension (surtout pour les petites retraites), vient ensuite la retraite complémentaire, puis la retraite supplémentaire. L'organisation de l'ensemble forme une pyramide.



Source : « Ambition mag », AVRIL-MAI 2013 N°21, édition Generali

## 2.1 Le régime de base (Sécurité Sociale)

Le régime de base obligatoire est le fondement du système de retraite français. Dans le cadre d'un système par répartition, basé sur la solidarité entre générations, les salariés en activité cotisent pour payer les pensions de retraite de leurs aînés. En contrepartie, ils s'ouvrent des droits à une pension de vieillesse du régime général de la Sécurité Sociale qui permet d'octroyer un premier niveau en matière de pension. Ce régime concerne une population importante et donne la possibilité de transfert de charges entre génération, mais il a une communauté de risque ouverte parce qu'il y a toujours des personnes qui entrent dans le régime.

### 2.1.1 Modèles de base

On peut distinguer historiquement deux modèles de base qui ont influencé le développement des régimes, chacun répondant à une certaine philosophie du rôle de la protection sociale :

#### a) Le modèle «assurantiel »(Bismarck)

La logique Bismarckienne est adossée au travail salarié. L'activité professionnelle fonde la protection sociale sur les solidarités professionnelles. Les prestations ne sont pas uniformes.

Le modèle Bismarckien cherche à stabiliser les statuts sociaux. La solidarité est de type horizontal. Il s'agit d'un principe d'assurance, et l'objectif est d'assurer les salariés contre les risques sociaux par des revenus de remplacement afin de garantir un niveau de vie. Il y a logiquement une proportionnalité importante entre les revenus d'activité et les prestations de retraite octroyées (système contributif).

#### b) Le modèle «assistanciel »(Beveridge)

La logique Beveridgienne est de fournir à tout individu, un droit à un minimum vital. Pour ce faire, on a recours à un financement par l'impôt et chacun bénéficie des mêmes prestations. Les prestations sont naturellement beaucoup plus uniformes et largement moins généreuse que dans le modèle Bismarck.

Le modèle Beveridgien, un principe d'assistance, cherche à mettre l'homme à l'abri de la pauvreté et cherche à établir une justice sociale. C'est une solidarité de type vertical avec la recherche d'une société plus égalitaire, plus solidaire.

Pour le régime de base français, inspiré du modèle Bismarck, le montant de la pension d'un retraité est calculé en fonction :

- de sa durée de cotisation, rapportée à une durée de référence (166 trimestres soit 41,5 ans pour les personnes nées en 1955 et après),
- de son revenu annuel moyen, calculé à partir des 25 meilleures années de la carrière, dans la limite du plafond de la Sécurité Sociale (3 086€ bruts mensuels en 2013),
- d'un taux appliqué au salaire annuel moyen, appelé taux de liquidation, qui diffère en fonction des statuts (pour un salarié du privé le taux plein – maximum – est de 50%). Ce taux peut faire l'objet d'une décote (par exemple, si le nombre d'annuités cotisées est inférieur à la durée de référence) ou d'une surcote (par exemple, en cas de prolongation de l'activité au-delà de la durée de référence).

Le versement de la pension est soumis à des conditions d'âge. On distingue ainsi :

- l'âge minimum légal, soit l'âge d'ouverture des droits à la retraite. Cet âge, actuellement de 62 ans, peut être abaissé dans certaines conditions (ex : invalidité, carrière longue, etc.) ;
- l'âge de taux plein sans décote, soit l'âge à partir duquel le taux plein est automatiquement appliqué (67 ans pour les personnes nées après le 1<sup>er</sup> janvier 1955), sous condition d'annuités ;
- l'âge maximal de départ en retraite, soit l'âge à partir duquel un employeur peut mettre d'office un salarié à la retraite (70 ans).

### **2.1.2 Mécanisme de répartition**

En France, les régimes de retraite sont basés sur le principe de répartition. Il s'agit d'un système fondé sur la solidarité entre les générations, à l'image de la solidarité qui unit les différentes générations d'une même famille. Chaque année, le total des cotisations versées par les actifs et leurs employeurs est réparti entre les retraités sous forme de pension. En contrepartie de cette solidarité avec les générations précédentes, les cotisants acquièrent eux-mêmes des droits sur les générations futures, qui financeront à leur tour leur retraite lorsqu'ils cesseront de travailler.

Dans un système de retraite par répartition simple, les cotisations basées sur les revenus professionnels des salariés en activité financent immédiatement les pensions des retraités. En principe, il n'y a pas de réserve : si le flux de cotisations varie pour des raisons économiques ou démographiques, les pensions ont tendance à varier dans le même sens.

Si les cotisations et les pensions sont fixes, il est assez improbable que la somme collectée coïncide exactement à la somme des pensions à verser. L'équilibre comptable est atteint si :

$$\text{SalaireMoyen} \times \text{NombreCotisants} \times \text{TauxCotisation} = \text{PensionMoyenne} \times \text{NombreRetraités}$$

Alors, cet équilibre est lié à la conjoncture économique, à la démographie et au taux de remplacement :

- La conjoncture économique joue sur le salaire moyen, le nombre de cotisants via le chômage et la reprise ou cessation d'activité des femmes et des jeunes.
- La démographie joue sur le rapport démographique du système de retraite (entre le nombre de cotisants et de retraités) via la natalité, la mortalité et le solde migratoire. Une diminution de ce rapport rend plus difficile le financement du système, puisqu'elle correspond à une augmentation du nombre de pensionnés par rapport au nombre d'actifs payant les pensions.
- Le taux de remplacement moyen (le ratio rapportant entre la pension moyenne au revenu d'activité brut moyen) diminuerait entre 2011 et 2060, de 10 % à 28 %, selon les scénarios et variantes sous l'hypothèse de rendements AGIRC-ARRCO constants (source COR). En 2010, ce taux de remplacement était de 60 %. Le taux de remplacement représente la générosité du système de retraite.

Lorsqu'il s'agit de gérer un excédent des cotisations sur les pensions, la pérennité du système n'est pas menacée parce que les mesures d'équilibrage sont immédiatement favorables à la population (réduction des cotisations, augmentation des pensions, etc.). Dans le cas d'un déficit, ces mesures sont désagréables pour la population. Les leviers suivants peuvent ramener l'équilibre :

- Augmenter la durée effective de cotisation
- Augmenter les cotisations
- Trouver d'autres sources de financement
- Baisser le taux de remplacement
- Réduire les prestations de solidarité

Sinon, le déficit sera financé par la dette publique.

La Sécurité Sociale est un régime en annuités. La pension est calculée à partir de la durée d'assurance validée au régime et d'un salaire de référence qui dépend des revenus d'activité passée. Chaque année, l'assuré acquiert un montant de pension représentant un pourcentage (le taux d'annuité) du salaire de référence; à la date de départ à la retraite, la pension est ainsi égale à une part du salaire de référence multipliée par la durée d'assurance. Les régimes en annuités affichent un objectif de revenu de remplacement.

Formellement, le montant de la pension  $P$  s'écrit :

$$P = D \times A \times SR$$

Où :

- $D$  : la durée d'assurance de l'assuré. Elle s'exprime sous forme d'un nombre d'années ou de trimestres validés par l'assuré dans le régime
- $A$  : le taux d'annuité

Dans un régime en annuités, la pension à la liquidation est calculée en proportion du salaire de référence. Dans les régimes français en annuités, le coefficient de proportionnalité dépend, outre de la durée d'assurance de l'assuré dans la limite de la durée maximale (162 trimestres au 1<sup>er</sup> janvier 2010), d'un paramètre appelé taux de liquidation. Ce taux appliqué ici est appelé «taux plein » qui égale à 50 % au régime général et 75 % dans les régimes de la fonction publique.

Le montant de la pension  $P$  est alors égal au produit du taux de liquidation  $T$ , du coefficient de proratisation (rapport entre la durée d'assurance  $D$  de l'assuré et la durée d'assurance maximale  $D_{max}$ , dans la limite de 1) et du salaire de référence de l'assuré  $SR$  :

$$P = T \times \frac{D}{D_{max}} \times SR$$

Donc, le taux d'annuités, qui représente le montant de pension acquis chaque année exprimé en pourcentage du salaire de référence, est égal au rapport entre le taux de liquidation et la durée d'assurance maximale.

$$A = \frac{T}{D_{max}}$$

Le taux de liquidation peut être défini par rapport à un âge de référence (appelé « âge du taux plein ») et/ou par rapport à une durée d'assurance requise qui correspond à la durée maximale. Si un assuré liquide sa retraite avant l'âge du taux plein avec une durée inférieure à la durée requise, une minoration (décote) du taux de liquidation peut être appliquée. À l'inverse, en cas de départ après l'âge de référence ou avec une durée supérieure à la durée requise, une majoration (surcote) du taux de liquidation peut être appliqué.

- $SR$  : le salaire de référence de l'assuré, qui peut être calculé sur la base de toutes les années de la carrière, d'une seule année, voire d'une demi-année. Ne retenir que les meilleures années de la carrière permet d'éliminer les salaires les plus faibles et de conduire à un salaire de référence plus élevé
  - Régime général : pour les générations 1948 et suivantes, le salaire de référence est la moyenne des 25 meilleures années de salaire dans la limite des plafonds annuels de la Sécurité Sociale.

- Régime de la fonction publique : le dernier traitement hors primes perçu pendant au moins 6 mois.

## 2.2 Les régimes complémentaires

Le régime complémentaire constitue le deuxième niveau du système des retraites. Il est obligatoire et fonctionne selon le principe de répartition. Tous les mois, l'employeur verse à une caisse de retraite complémentaire, la part employeur et salariale de cotisation. Ces cotisations permettent aux salariés d'obtenir des « points de retraite ».

Bénéficiant de montants de pensions faibles au regard de leurs revenus d'activité en fin de carrière dans ce système plafonné, les salariés cadres ont participé en 1947 à la création d'une caisse de retraite complémentaire visant à améliorer leur retraite de base : l'AGIRC (Association Générale des Institutions de Retraite des Cadres).

Soumis aux mêmes conditions d'accès que le régime de base, ce système complémentaire fonctionne par points : chaque cotisant acquiert sur l'ensemble de sa carrière (et non simplement sur ses meilleures années) un nombre de points qu'il fait valoir au moment de sa retraite. La contrepartie monétaire de ces points n'est connue qu'à la date de liquidation, en fonction de la valeur de service du point à cette date. Ce système a été étendu aux non-cadres en 1961 avec la création de l'ARRCO (Association pour le Régime de Retraite Complémentaire des salariés), selon les mêmes modalités. Les salariés cadres y cotisent également.

Le montant de la pension à la date de liquidation s'exprime de la façon suivante :

$$P = N \times VS$$

Où :

- $N$  : le nombre de points total acquis par l'assuré au moment du départ à la retraite
- $VS$  : la valeur de service du point à cette date

Si l'assuré liquide trop tôt ses droits par rapport à un âge de référence, il peut être appliqué un coefficient d'anticipation (équivalent de la décote) réduisant le montant de la pension. Au contraire, en cas de liquidation tardive, un coefficient d'ajournement (équivalent de la surcote) qui est supérieur à 1 peut être retenu par le régime.

- $VS$  : la valeur de service du point est identique pour tous les assurés et permet de convertir les points en euros, à la liquidation mais également au cours de la retraite. Par exemple,  $VS$  en ARRCO : 1,1884€ et en AGIRC : 0,4216€ au 1<sup>er</sup> avril 2010.

- $N$  : le nombre de points acquis au moment du départ à la retraite est la somme des points acquis au cours de la carrière. Dans les régimes complémentaires français, le nombre de points acquis chaque année est égal au rapport entre les cotisations versées et la valeur d'achat du point, c'est-à-dire que :

$$n = \frac{\tau \times S}{VA}$$

Où :

- $\tau$  : le taux de cotisation en vigueur l'année considérée
  - $S$  : le salaire de l'assuré soumis à cotisation
  - $VA$  : la valeur d'achat du point cette année-là
- $VA$  : la valeur d'achat du point, dans les régimes complémentaires français, est un paramètre identique pour tous les assurés de chaque régime dont le mode de revalorisation est fixé par les gestionnaires, actuellement sur le salaire moyen. Par exemple,  $VA$  en ARRCO : 14,4047€ et en AGIRC : 5,0249€ au 1<sup>er</sup> avril 2010.

En 2012, les pensions versées par ces régimes représentent approximativement un tiers de la retraite totale des non-cadres et deux tiers de celle des cadres. Le rapport entre la pension perçue par le retraité (régime de base + régime complémentaire) au moment où il fait valoir ses droits à la retraite et son revenu d'activité est appelé « taux de remplacement ». En France, il est d'un peu plus de 50% pour un salarié au revenu moyen (contre une moyenne d'environ 60% dans les pays de l'OCDE). Il tend à baisser depuis les réformes entamées en 1993 qui visent à combler le déficit des régimes de base. Cette situation incite au développement de la retraite supplémentaire.

**Table : Une comparaison entre les deux régimes de la retraite en répartition**

	Avantages	Inconvénients
Les régimes en annuités (Régime de Base)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Régime à prestations définies</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Un mauvais pilotage des paramètres peut avoir des conséquences à long termes pour tous les participants</li> </ul>
Les régimes en points (Régime complémentaire)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Adapte les paramètres VA et VS en fonction de l'évolution de l'espérance de vie</li> <li>• Les régimes en points sont plus contributifs</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Un mauvais pilotage des paramètres peut avoir des conséquences à long termes pour tous les participants</li> <li>• Derrière le nombre de point acquis, l'assuré ne connaît pas le montant de ses droits</li> </ul>

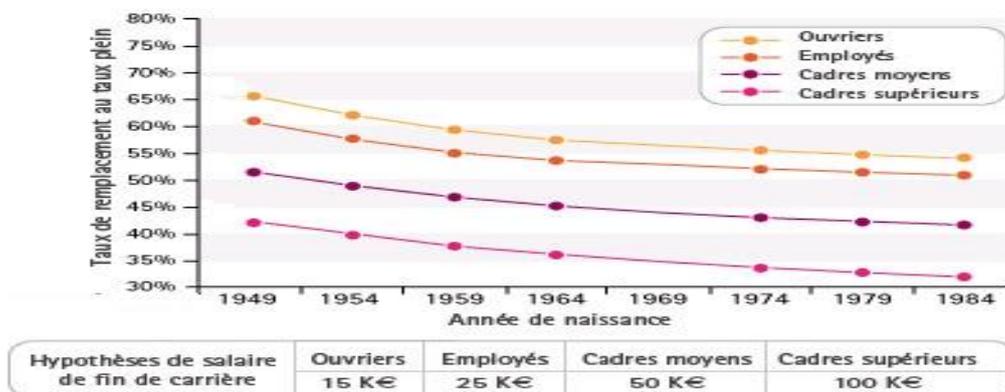
## 2.3 Les enjeux de la retraite

Le contexte de retraite en France est :

- Un pays en voie de vieillissement avec un faible taux de natalité (soit 1,9 enfants par femme, ce taux est inférieur à 2,1 car il peut avoir un renouvellement de la population) et une forte augmentation de l'espérance de vie (1 trimestre /an) ;
- Des taux de remplacement à maintenir :
  - Aujourd'hui : 10 actifs paient pour 4 retraités
  - Demain : 10 actifs paieront pour 7 retraités
- Déficit cumulé des 33 principaux régimes de retraite prévu en 2017 est de 21,3 milliards d'euros. En l'absence de réforme, il pourrait atteindre 53 milliards d'euros en 2030, 75 milliards d'euros en 2040 et jusqu'à 105 milliards d'euros en 2060 (prévisions du COR, le Conseil d'orientation des retraites).

En conséquence, une nouvelle réforme du système des retraites doit apparaître en 2013 avec un allongement des durées de cotisations.

### L'évolution du taux de remplacement bruts des régimes de retraite obligatoires



Source : « La retraite collective », une présentation de Generali

Selon l'évolution du taux de remplacement, on voit qu'un cadre moyen né en 1951 qui partira en 2013 à 62 ans à la retraite disposera d'un revenu équivalent à 55.46 % de son dernier salaire brut ; mais ce même cadre né en 1979 ne percevra que 42.17 % de son dernier salaire brut. Donc, la rente retraite va baisser quand le salaire épart à la retraite plus tard.

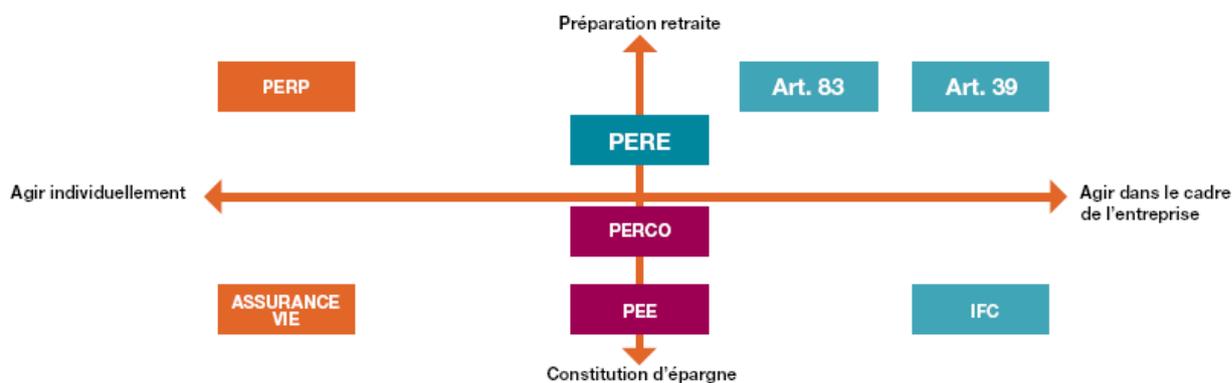
Malgré les réformes successives, l'Etat ne peut pas garantir le maintien des régimes de retraite obligatoires au niveau actuel pour les décennies à venir. Aussi, les français pour conserver leur niveau de vie pendant leur retraite vont devoir compléter les pensions des régimes obligatoires par des systèmes par capitalisation. Ces solutions de retraite seront mises en place, soit par le biais de leur entreprise, soit à titre individuel.

## CHAPITRE 3. La retraite supplémentaire

Au contraire des régimes précédents, la retraite supplémentaire est facultative et fonctionne sur le mode de la capitalisation : les cotisations versées sont placées en actifs (financiers et immobiliers) en vue d'être capitalisées et versées au bénéficiaire sous forme de rentes viagères pendant toute la durée de sa retraite.

Les contrats de retraite supplémentaire sont proposés par les assureurs. Ils peuvent être souscrits :

- individuellement, en tant que particulier (Plan d'épargne retraite populaire – PERP) ou dans le cadre d'activité (« Retraite Madelin » pour les Travailleurs non salariés). C'est l'épargne individuelle organisée au libre choix de chacun.
- Collectivement, dans le cadre de contrats mis en place au sein d'une entreprise ou d'un secteur d'activité (par exemple : Art. 83 ou Art. 39 du Code Général des Impôts), octroyant à chacun des salariés bénéficiaires de ces régimes un complément aux régimes obligatoires. Ces régimes collectifs sont des engagements de retraite pris par les employeurs pour leurs salariés.



Source : « La retraite Collective », une présentation de Generali

Ces différents contrats bénéficient d'une fiscalité particulière, rendue cependant moins attractive depuis quelques années du fait de l'augmentation de la pression fiscale, principalement sur les contrats collectifs. Bien que n'étant pas des contrats de retraite, les contrats d'épargne individuels (assurance vie) ou collectifs (Plan d'épargne entreprise – PEE) restent souvent fortement motivés par la possibilité de se constituer un capital en vue de la retraite, notamment via le versement de primes périodiques.

## 1. Calcul des engagements pour l'entreprise

### 1.1 Norme IAS 19

L'importance des plans de pension et leur incidence sur la vie financière des entreprises ont amené à définir des règles strictes quant à la comptabilisation des plans de pension. Ces normes ont pour objectif de reconnaître dans les comptes de l'entreprise l'existence de promesses contractuelles engendrées par un plan de pension. Les deux principales normes aujourd'hui d'application sont d'une part le FAS 87 (« Financial Accounting Standards ») du côté américain et l'IAS 19 (« International Accounting Standards ») du côté européen. Elles revêtent un caractère obligatoire notamment pour les sociétés désirant être cotées en bourse.

L'objectif de la norme est d'assurer le rattachement à chaque exercice des coûts relatifs aux services rendus par le personnel au cours de ce même exercice.

Tout d'abord, le calcul de l'engagement doit être revu chaque année. A cet effet, les compagnies d'assurances réalisent des actualisations de leurs contrats sur simple demande du client. Ensuite, les différents paramètres utilisés pour le calcul doivent être mis à jour lors de chaque évaluation, et selon les modalités définies par la norme. Enfin, une seule méthode de calcul est utilisée par la norme : **les unités de crédits projetés**. En effet, l'entreprise doit communiquer le descriptif détaillé de son régime, ainsi que des informations précises sur les engagements.

La norme IAS 19 «Avantages du personnel» impose des méthodes d'évaluation et de comptabilisation, elle oblige les employeurs à fournir une liste d'information qu'ils devront publier en annexe des comptes.

### 1.2 P érim ère de la norme IAS 19

Les avantages du personnel désignent toutes formes de contrepartie donnée par une entité au titre des services rendus par son personnel. Ces avantages peuvent résulter soit :

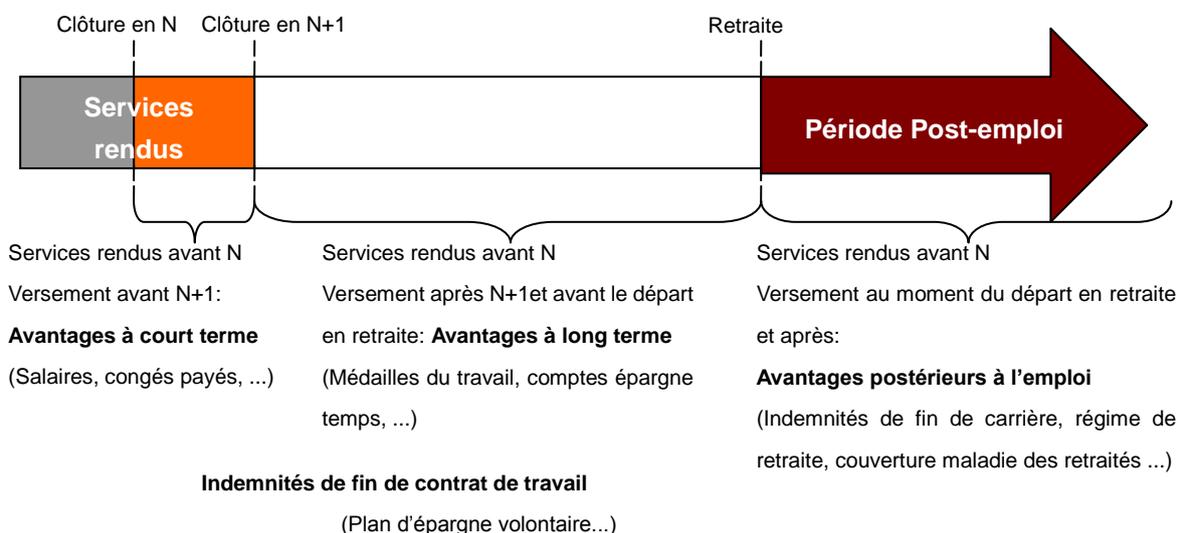
- d'accords passés entre l'entreprise et certains membres du personnel, des groupes de salariés ou de l'ensemble du personnel ;
- de dispositions légales ou d'accords de branches entraînant l'entreprise à cotiser à des régimes nationaux, régionaux, sectoriels ou autres ;
- d'accord d'usage qui donne lieu à une obligation implicite de l'entreprise.

Ces avantages peuvent prendre différentes formes, puisqu'il peut s'agir de la mise en place d'un régime de retraite supplémentaire, ou encore d'indemnités de fin de carrière. Les méthodes d'évaluation et les traitements comptables requis par la norme IAS 19 dépendent alors du type d'avantage perçu par les employés.

La norme distingue quatre catégories d'avantages du personnel :

- Avantages du personnel à court terme
- Avantages postérieurs à l'emploi
- Indemnités de fin de contrat de travail
- Autres avantages à long terme

Le schéma ci-dessous nous présente où se situent ces quatre différents avantages dans la vie professionnelle d'un salarié :



Source : « Indemnités de Fin de Carrière », une présentation de Generali

### 1.3 Avantages du personnel

#### a) Avantages du personnel à court terme

Les avantages à court terme désignent les avantages du personnel (autres que les indemnités de fin de contrat de travail) qui sont dus intégralement dans les douze mois suivant la fin de la période pendant laquelle les membres du personnel ont rendu les services correspondants.

Tous les avantages à court terme doivent se comptabiliser sans actualisation au passif pour ce qui reste à payer et en charges. Ceci s'applique également aux droits pour absences rémunérées (congés annuels) et avantages non monétaires (assistance médicale, logement,

voiture et biens ou services gratuits ou subventionnés). Il faut également comptabiliser les plans d'intéressement et de primes dès que l'entité a une obligation actuelle et que l'évaluation est fiable. Le risque porté par ce type d'avantage est relativement faible du fait du court laps de temps précédant le paiement des prestations et de la relative maîtrise de ce genre de coûts par l'entreprise.

### **b) Avantages postérieurs à l'emploi**

Les avantages postérieurs à l'emploi désignent les avantages du personnel (autres que les indemnités de fin de contrat de travail) qui sont payables postérieurement après le départ à la retraite.

Un régime multi-employeur doit être classé :

- En régime à cotisations définies, si l'obligation de l'entreprise se limite au moment des cotisations qu'elle s'engage à payer au régime ;
- En régime à prestations définies, si l'entreprise s'est engagée à payer des prestations à un niveau prédéterminé aux anciens membres de son personnel.

### **Régimes à cotisations définies**

Dans un régime à cotisations définies, le niveau des cotisations versées est prédéterminé. Une entité verse des cotisations définies à une entité distincte (par exemple, un fonds) et n'aura aucune obligation juridique ou implicite de payer des cotisations supplémentaires si le fonds n'a pas suffisamment d'actifs pour servir tous les avantages correspondant aux services rendus par le personnel pendant la période en cours et les périodes antérieures. Donc, le risque supporté par l'entreprise est relativement faible, généralement payées en partie avec le salarié.

### **Régimes à prestations définies**

Dans un régime à prestations définies, l'obligation de l'entreprise concerne le paiement des prestations : l'entreprise est engagée à payer les prestations quelle que soit l'évolution démographique de la population sous risque (les futurs retraités) et l'évolution des placements financiers de l'éventuel fond de couverture qu'elle a constitué.

L'entité doit utiliser la méthode des unités de crédit projetées pour déterminer la valeur actuelle de son obligation au titre des prestations définies, le coût correspondant des services rendus au cours de la période et, le cas échéant, le coût des services passés.

Par exemple, en France, les Indemnités de Fin de Carrière (IFC), les retraites supplémentaires en « Article 39 » et les complémentaires santé versées pour des retraités sont des régimes à prestations définies. Pour les régimes à prestations définies, la norme IAS 19 impose le recours à des techniques actuarielles pour estimer le montant des avantages à provisionner.

### c) Indemnités de fin de contrat de travail

Les indemnités de fin de contrat de travail sont des avantages du personnel payables à la suite de :

- La décision de l'entité de résilier le contrat de travail du membre du personnel avant l'âge normal de départ à la retraite ;
- La décision du membre du personnel de partir volontairement en échange de ces indemnités.

### d) Autres avantages à long terme

Les autres avantages à long terme désignent les avantages (autres que les avantages postérieurs à l'emploi et les indemnités de fin de contrat de travail) qui ne sont pas dus intégralement dans les douze mois suivant la fin de la période pendant laquelle les membres du personnel ont rendu les services correspondants.

On y trouve :

- Les avantages liés à l'ancienneté, notamment les congés liés à l'ancienneté, les médailles du travail, les jubilés, etc.) ;
- Les rémunérations (salaires, primes et intéressement) différées ou payables douze mois ou plus après la fin de l'exercice en cours ;
- Les indemnités d'incapacité-invalidité et les absences rémunérées de longue durée.

## 2. Focus sur la capitalisation

Le mécanisme de capitalisation, il s'agit d'une **forme d'épargne individuelle ou collective**, qui est placée sur les marchés financiers, consistant pour chaque assuré (et le cas échéant pour son employeur), à verser des cotisations qui lui restent acquises et lui seront reversées à l'âge de la retraite sous la forme d'une rente ou d'un capital. Il n'y a par contre aucune solidarité entre générations. Les pensions sont donc alimentées par une épargne antérieure, et non par une redistribution des actifs vers les retraités. En d'autres termes, il s'agit de mettre de l'argent de côté pour sa future retraite.

En France, avant 1945, les retraites étaient financées par capitalisation. Cependant, la guerre a fait chuter la valeur de l'épargne et ruiné les retraités. Les systèmes de retraite par répartition ont été instaurés pour remédier à cette situation de pauvreté des seniors. Mais les techniques de régime par capitalisation sont utilisées par les souscripteurs pour calculer leur passif IAS19 ou par les fonds de pension anglo-saxon.

La retraite par capitalisation est provisionnée. Les sommes mises en réserve hier financent les pensions d'aujourd'hui, et celles d'aujourd'hui financent les pensions de demain. La gestion de la retraite par capitalisation a toujours une forte composante collective : de par son importance sociale et le montant considérable des sommes en jeu, les différents acteurs du marché sont soumis à des réglementations et des contrôles spécifiques importants.

- Le cadre général peut être individuel (chaque individu gère son capital-retraite) ou collectif (l'État, l'entreprise ou un organisme spécialisé, appelé fonds de pension, collecte et gère les sommes épargnées) ;
- Le système peut être libre ou obligatoire.

## 2.1 Retraite par capitalisation gérée par un fonds de pension

En vue de la gestion de son régime de retraite, l'entreprise crée une entité juridique autonome ayant sa propre structure bilantaire et dont l'objectif unique est la réalisation du plan de pension; c'est la notion de fonds de pension (ou fonds de retraite). Un fonds de pension est un fonds d'investissement spécifique de la retraite par capitalisation. C'est l'outil de l'épargne retraite. Il s'agit d'un organisme financier qui collecte l'épargne des actifs pour la placer aux meilleures conditions du marché. Les cotisations peuvent être versées par les salariés, comme par les non-salariés. Lorsque l'actif arrive à la retraite, le fonds de pension lui verse soit une rente, soit un capital unique. Le fonds peut être géré par l'entreprise elle-même, et les cotisations des salariés sont alors considérées comme une dette de l'entreprise vis-à-vis d'eux. Les flux financiers sont donc :



Le fonds de pension a sa propre structure bilantaire, son unique passif étant par définition les engagements de pension contractés par l'entreprise :

ACTIF	PASSIF
Placements immobiliers	Provision pour engagement de pension
Placements mobiliers	
Trésorerie	

La capitalisation se caractérise par des réserves d'actifs positives :

$$V(t) = V_r(t) + V_a(t)$$

Où :

- $V_r(t)$  : la réserve globale nécessaire pour financer en totalité les droits des personnes déjà retraitées à l'instant  $t$ .
- $V_a(t)$  : la propriété des adhérents actifs, l'excédent des réserves par rapport à la réserve des retraités à l'instant  $t$ .

Dans les méthodes de capitalisation,  $V(t) > V_r(t)$  et  $V_a(t) > 0$ , c'est-à-dire que la réserve des retraités est financée et les actifs disposent d'une réserve strictement positive.

Il n'existe pas une méthode de capitalisation, mais bien une infinité; deux critères permettent de caractériser les différentes techniques :

a) la vitesse de formation des réserves

Une technique de capitalisation va conduire à préfinancer durant la période d'activité le montant nécessaire à l'âge de la retraite pour provisionner en totalité l'engagement. La vitesse à laquelle se forme ce préfinancement durant la période active peut évidemment être variable comme illustre l'exemple suivant :

Exemple : plan de pension en prestations définies

- âge de la retraite : 65 ans
- âge d'affiliation : 25 ans
- méthode n° 1 : «Initial funding »: un versement d'une prime unique à 25 ans finançant la totalité de l'engagement
- méthode n° 2 : «Latefunding »: un financement par versements périodiques entre 60 et 65 ans.

Ces deux méthodes, toutes deux de capitalisation puisque générant des réserves d'actifs strictement positives, sont clairement contrastées et extrêmes : au financement maximal de la première, répond un rythme bien lent pour la seconde.

b) le caractère individuel ou collectif de la méthode

On distingue deux grandes familles de méthodes de capitalisation selon leur degré de solidarité ou d'individualisation dans le phénomène de capitalisation :

- capitalisation individuelle : méthodes dans lesquelles les réserves globales du régime  $V(t)$  peuvent à tout moment être individualisées par affilié. L'équilibre actuariel est alors exigé affilié par affilié
- capitalisation collective : méthodes dans lesquelles les réserves globales ne sont pas individualisables et servent globalement pour l'ensemble du collectif.

## 2.2 Retraite par capitalisation gérée par un assureur

### 2.2.1 Les contraintes des assureurs français en matière de gestion d'actif

Les contraintes réglementaires des assureurs en matière d'actifs en représentation des provisions techniques sont :

- 1) Règle de suffisance : l'actif doit être au moins égal au passif
- 2) Règle de congruence : l'actif financier doit être libellé dans la même monnaie que les provisions mathématiques
- 3) Règle de localisation : pour un risque localisé en France, l'actif financier doit provenir d'un émetteur de l'union européenne
- 4) Règle de sécurité : l'actif financier doit être de bonne qualité :
  - Pour ce faire l'Etat émet une liste d'actif admis en représentation des engagements réglementés
  - Principe de diversification : la structure de l'actif de l'assureur est soumise à des contraintes par classe d'actifs avec une limite maximale :
    - 65 % pour les actions,
    - 40 % pour les actifs immobiliers,
    - 10 % pour les prêts ou le monétaire
  - Principe de dispersion : l'actif ne doit pas être trop concentré par émetteur, il est fixé à 5 % maximum par émetteur

### 2.2.2 Les critères de rentabilités demandés à une société d'assurance

L'assureur est soumis à des obligations de rentabilité vis-à-vis des actionnaires, alors que le fonds de pension à des obligations vis-à-vis des entreprises adhérentes. Les indicateurs de rentabilité d'un assureur sont :

- Le RoRAC
- Le Payback ou « délai de récupération »
- La « New Business Value »
- Le niveau des frais généraux

#### 1) Le RoRAC : Return on risk-adjusted capital

Le Return on Risk-Adjusted Capital (RoRAC) est un rendement des capitaux investis. Variant selon le modèle économique et les exigences de profit de chaque assureur, il permet de déterminer quelle doit être la rentabilité d'une activité pour, à la fois, rémunérer les fonds

propres immobilisés, couvrir les frais de gestion, verser les commissions aux apporteurs, servir un rendement au client et générer un bénéfice pour la compagnie.

La formule du RoRAC :

$$RoRAC = \frac{Net\_Income}{Allocated\_Risk\_Capital}$$

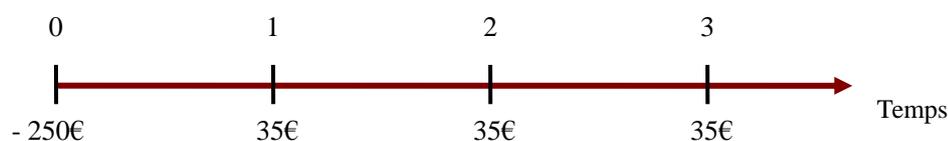
## 2) Le Payback ou « délai de récupération »

Le Payback ou le délai de récupération représente le temps nécessaire pour que les flux de trésorerie dégagés par un investissement mettent pour couvrir l'investissement initial.

Exemple d'un projet d'investissement :

Le montant de l'investissement initial d'une entreprise E est de 250€ à la date 0, le flux futur (cash flow) va être reçu par l'investisseur chaque année avec un montant de 35€. Cette entreprise exige un délai de récupération de 5 ans ou moins. Avec une telle règle de décision, l'entreprise E accepte-t-elle ce projet d'investissement ?

Echéancier en millions d'euros



Solution :

$$\sum_{t=1}^5 F_t = 35M€ \times 5 = 175M€ < 250M€$$

La somme des flux présents et futurs, éventuellement actualisés, ne peut pas couvrir cet investissement initial, et le temps nécessaire est supérieur à 5 ans, donc l'entreprise E rejette ce projet d'investissement.

## 3) La « New Business Value » (NBV)

La notion de New Business Value (NBV) est importante car elle permet de se concentrer sur les contrats nouvellement acquis, et d'en déduire la santé de la compagnie grâce aux indicateurs de production nouvelle.

La NBV de l'année résulte des contrats vendus les 12 derniers mois. Elle reflète combien de contrats ont été vendus, mais aussi combien ils ont été profitables par rapport aux années précédentes. Elle mesure donc la valeur créée pour l'actionnaire par année de production.

Le volume de New Business est exprimé grâce à un indicateur de volume appelé Annualized Premium Equivalent (APE : la cotisation de 1<sup>ère</sup> année l'horizon de calcul) qui comptabilise à 100 % la production à Primes périodiques, et à 10 % la production à Prime Unique sur les affaires nouvelles. Le ratio NBV/APE s'appelle New Business Margin (NBM) et permet de comparer la rentabilité de différents business. C'est un indicateur de production nouvelle.

Le critère principal de sélection des affaires nouvelles est la rentabilité du contrat. L'indicateur de rentabilité préconisé est la NBM. La méthode de calcul du NBM ainsi que les paramètres retenus doivent être conformes à la modélisation mise en place par le service Consolidation de la Valeur.

Pour projeter la rentabilité future, les paramètres suivants sont nécessaires :

- hypothèses financières
- frais d'acquisition
- frais de gestion
- niveau des capitaux propres à immobiliser (DEVISE & Unité de Compte, UC)
- rémunération des capitaux propres
- rendement attendu des capitaux propres
- hypothèse de taux de chute des cotisations futures

sont à mettre à jour chaque année afin de minimiser les écarts avec les chiffres de la rentabilité globale communiqués en fin d'exercice, et calculés par le service Consolidation de la Valeur.

### 2.3 Les différences entre le fonds de pension et l'assureur

Le fonds de pension est une entité autonome chargée de verser les prestations aux membres et toute l'administration. Le bilan d'un fonds de pension se présente dans la section 2.1 et remet au-dessous pour comparer avec le bilan des sociétés d'assurance. Le bilan d'un fonds de pension n'a qu'un seul type de produit.

ACTIF	PASSIF
Placements immobiliers	Provision pour engagement de pension
Placements mobiliers	
Trésorerie	

Du fait de l'inversion du cycle de production et de la durée des engagements souscrits, les sociétés d'assurance doivent constituer des provisions techniques destinées régler les sinistres futurs. Le montant de ces provisions est estimé par les actuaires notamment à partir des cadences de règlement observées en assurance dommage et de la mortalité en assurance vie. Le contenu du bilan des sociétés d'assurance peut se schématiser de la façon suivante :

ACTIF	PASSIF
Capital non appelé	Capitaux propres
Immobilisations incorporelles	
Placements	Passifs subordonnés
Placements pour le compte des preneurs d'une police d'assurance vie et dont le risque est supporté par eux	Provisions techniques
Créances	Provisions techniques relatives à l'assurance vie
Autres éléments d'actif	Autres provisions
	Dépôts reçus des réassureurs
Comptes de régularisation	Dettes
Perte de l'exercice	Comptes de régularisation
	Bénéfice de l'exercice

Le bilan des sociétés d'assurance est composé de produit vie et de produit décès, car l'assureur supporte plusieurs risques biométriques qui incluent la morbidité la longévité et la mortalité

La gestion des actifs d'une société d'assurance est un exercice délicat dans la mesure où le gestionnaire doit s'assurer à tout moment que les actifs en portefeuille sont les meilleurs, non seulement en terme de couple rentabilité/risque mais également au regard des engagements souscrits par l'entreprise et des contraintes comptables et réglementaires. Les engagements pris par les sociétés d'assurance peuvent varier sensiblement d'une entreprise à l'autre. Par exemple, une mutuelle spécialisée dans la couverture du risque santé percevra des cotisations pour rembourser des sinistres sur 18 mois environ. A l'opposé, un fonds de pension percevra des cotisations qui serviront à payer des rentes plusieurs dizaines d'années plus tard.

Les actifs de l'assureur (fonds propre) sont distincts des actifs des assurés (fonds Euro), au contraire, le fonds de pension n'a que des actifs pour les assurés. L'assureur achète les actifs au nom du fonds Euro, mais le fonds de pension achète les actifs en son propre nom. L'assureur a des obligations réglementaires sur les actifs financiers des fonds Euro et pas le fonds de pension.

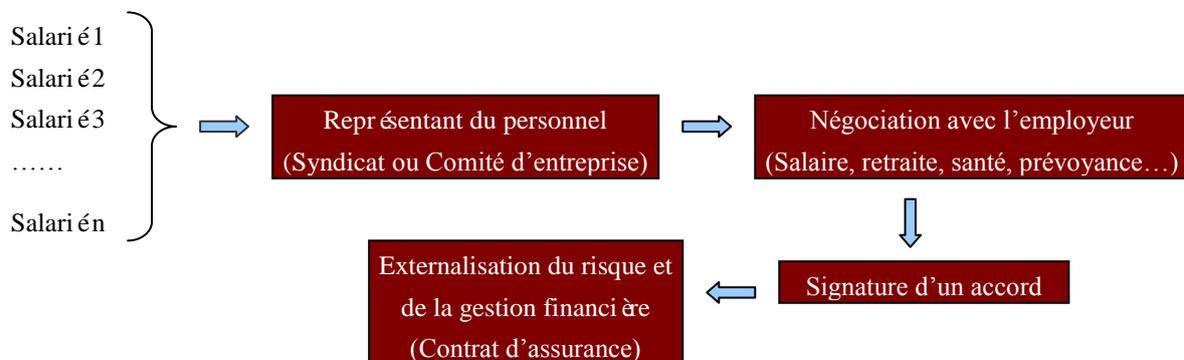
En retraite collective, l'entreprise est un souscripteur pour l'assuré. Alors qu'en fonds de pension, l'entreprise est un adhérent qui a un poids politique.

### 3. Les produits de retraite collective

En complément des pensions versées par les régimes obligatoires de retraite, les entreprises peuvent mettre en place, par le biais de contrats collectifs, des dispositifs d'épargne retraite d'entreprise, également appelés dispositifs de retraite supplémentaire collective.

Dans tous les cas, ces dispositifs permettent de mettre de côté une épargne en prévision de la retraite. Cette épargne peut résulter de versements de l'employeur, du salarié, ou des deux, suivant les choix et les produits de retraite collective.

La mise en place d'un accord d'entreprise est réalisée de manière suivante :



#### 3.1 Les Indemnités de Fin de Carrière (IFC)

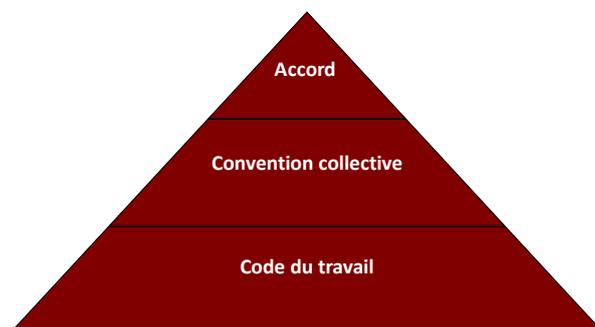
Les indemnités de fin de carrière (IFC) constituent généralement l'élément le plus déterminant du passif social de l'entreprise. En France, une indemnité de départ en retraite est versée à tout salarié partant à la retraite : le montant est en fonction de l'ancienneté et du statut. C'est-à-dire, plus l'ancienneté d'un salarié au sein de son entreprise est élevée, plus il aura acquis de droits, et plus son IFC sera élevée.

De plus, le versement de cette indemnité est obligatoire pour l'ensemble des entreprises et son montant est déterminé par des conventions collectives par branches, des contrats de travail, ou des accords d'entreprise.

En France, il y a un barème minimum des droits IFC de l'assuré prévu par 3 piliers suivants :

- Dispositions de droit commun (Code du travail) : il accorde à chaque français, chaque personne. Quand il départ à la retraite, il va toucher une indemnité ;
- Convention Collective Nationale (CCN) : elle donne des droits supplémentaires ;

- Accord d'entreprise : des droits sont supérieurs encore à la convention collective et amendent ce barème légal.



Les indemnités légales de départ à la retraite dépendant de l'ancienneté du salarié sont reprises dans le tableau ci-dessous :

Ancienneté	Cadres et non cadres
[0 ; 10 ans [	0 mois
[10 ; 15 ans [	0,5 mois
[15 ; 20 ans [	1 mois
[20 ; 30 ans [	1,5 mois
[30 ans ; ∞[	2 mois

Ces montants constituent le minimum légal, en dessous duquel l'entreprise ne peut descendre, peu importe la catégorie socioprofessionnelle. En général, les contrats de travail, les conventions collectives, les accords collectifs ou les conventions spécifiques d'entreprise, prévoient des indemnités supérieures. Le salaire utilisé dans le calcul de l'engagement est généralement la moyenne des trois ou des 12 derniers salaires, mais cela dépend des conventions, accords...

La méthode de calcul présentée ici est prévue par la norme comptable internationale IAS 19 et retenue par le droit comptable français. Cette méthode s'appelle **la méthode des unités de crédit projetées**. Elle considère que chaque période de service donne lieu à une unité supplémentaire de droits à prestations et évalue chacune de ces unités séparément pour obtenir l'obligation finale. Le calcul est effectué pour chaque individu de l'entreprise et l'engagement total de l'entreprise est la somme des engagements individuels.

### 3.2 Le produit l'Article 39

L'évolution des régimes de retraite obligatoires de sécurité sociale et complémentaires obligatoires AGIRC/ARRCO constitue aujourd'hui un sujet de préoccupation grandissant

pour les salariés et les Cadres. En effet, le plafonnement des revenus qui constituent l'assiette des cotisations de retraite de sécurité sociale et de retraite complémentaire AGIRC/ARRCO a pour conséquence de diminuer le niveau des pensions de retraite par rapport au niveau des revenus d'activité.

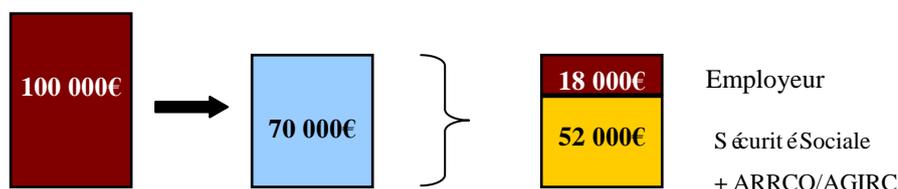
### 3.2.1 Définition

Ces contrats sont appelés contrat à prestations définies car l'obligation de l'employeur porte sur le versement d'un montant prédéterminé de prestation de retraite, et non sur un niveau de cotisation. Ils sont caractérisés par une obligation de résultats de l'employeur s'opposant ainsi aux contrats de retraite à cotisations définies dans lequel ce dernier n'a qu'une simple obligation de moyens. On considère ici les contrats d'assurance de groupe sur la vie, souscrits par un employeur au bénéfice de ses salariés. Ces contrats fonctionnent selon le principe dit de « capitalisation ». Ils définissent explicitement les prestations auxquelles auront droit les futurs retraités. Classiquement, ces régimes définissent une rente de retraite que l'on peut définir comme un revenu périodique payable à partir de l'âge de départ en retraite jusqu'au décès de l'ayant droit. Parmi les régimes à prestations définies, on peut citer :

#### 1) Les régimes différentiels (ou chapeaux) :

L'engagement porte sur la retraite totale des assurés. Le complément apporté par ce régime est la différence entre la rente garantie et la rente à obtenir via les régimes obligatoires. Les retraites obligatoires (sécurité sociale, ARRCO/AGIRC) seront ainsi complétées s'il y a lieu pour atteindre le niveau fixé

Exemple 1 : le régime de retraite 39 prévoit un niveau de retraite fixé à 70 % de la moyenne de ses salaires des 5 dernières années (inclus les régimes obligatoires)



- Moyenne des salaires sur 5 années = 100 000€ (70 % = 70 000€).
- Les régimes obligatoires assurent au salarié une pension de 52 000€, soit 52%.
- L'entreprise va compléter à hauteur de 18 000€ (= 70 000 – 52 000) pour garantir au salarié un niveau de retraite égale à 70 % de la moyenne de ses salaires des 5 dernières années.

## 2) Les régimes additifs

L'engagement porte sur une part du salaire de référence, indépendamment des régimes de retraite obligatoire. Là encore les prestations peuvent être établies de manière forfaitaire ou en fonction de l'ancienneté.

Exemple 2 : le régime prévoit de verser à terme au salarié une retraite égale à 5 % de son dernier salaire d'activité, indépendamment des régimes obligatoires

- a. Dernier salaire d'activité = 100 000€ par an
- b. 5 % du dernier salaire d'activité = 5 000€ de rente annuelle

Exemple 3 : le régime prévoit de verser à terme au salarié une retraite égale à 0,2 % du dernier salaire d'activité, par année d'ancienneté dans l'entreprise, et indépendamment des régimes obligatoires

- a. Ancienneté = 15 ans
- b. Dernier salaire d'activité = 100 000€
- c. Rente =  $(100\,000 \times 0,2\%) \times 15 = 3\,000\text{€}$  de rente annuelle

Pour l'exemple 1, si l'Etat baisse sa pension (par exemple, passer de 52 % à 45 %), les régimes obligatoires assurent une pension de 45 000€ et l'entreprise va compléter à hauteur de 25 000€ pour garantir le même niveau de retraite. Donc, ça coûte cher à l'entreprise. En fait, il y a quelques années qu'il y a beaucoup de contrats dans Retraite différentielle, mais aujourd'hui la plupart de contrats est comme Retraite additive car l'entreprise a peur que comme les rentes d'Etat diminuent, ça va coûter de plus en plus cher.

### 3.2.2 Le calcul du passif d'un assureur

Les formules sont liées aux rentes viagères pour le contrat de retraite de réversion. En France, environs 95 % de l'assureur choisissent ce contrat. Dans la méthode de calcul, on établit les notations suivantes :

- A = montant de l'arrérage net de frais de gestion
- K = capital constitutif de la rente brute de frais de gestion des arrérages de rente
- p = périodicité des arrérages de rente
- h = taux de réversion de la rente
- $g_2$  = taux de frais de gestion des arrérages de rente
- i = taux technique
- $\omega$  = âge ultime de la table de mortalité
- x = âge tarifaire du rentier
- y = âge tarifaire du réversataire

- $l_x$  = nombre de vivants à l'âge  $x$  lu dans la table de mortalité

### Calcul du capital constitutif à partir d'une rente périodique : prestation d'finie

$$K = A \times p \times \left( a_x^p + h \times (a_y^p - a_{x:y}^p) \right) \times (1 + g_2)$$

Avec

$$a_x^p = \sum_{k=1}^{k=\omega-x} \left( \frac{l_{x+k}}{l_x} \times (1+i)^{-k} \right) + \frac{p-1}{2p}$$

$$a_{x:y}^p = \sum_{k=1}^{k=\omega-\max(x,y)} \left( \frac{l_{x+k}}{l_x} \times \frac{l_{y+k}}{l_y} \times (1+i)^{-k} \right) + \frac{p-1}{2p}$$

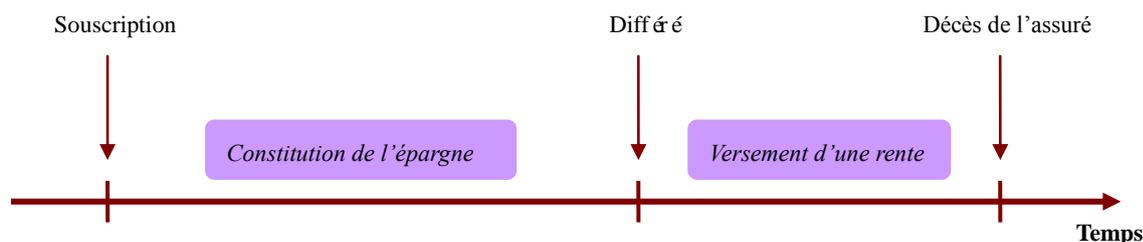
Le taux technique maximum autorisé au 01/03/2013 est fixé à 1,25 % (60 % de TME : taux moyen des emprunts d'Etat qui est le taux de rendement sur le marché secondaire des emprunts d'Etat à taux fixe supérieurs à 7 ans). Le coefficient de transformation du capital en rente (ou de la rente en capital) est appelé  $a_x$ . S'il y a une réversion (60 % ou 100 %), ça devient  $a_{x:y}$  où  $x$  = tête d'assuré et  $y$  = tête de conjoint.

Cette méthode de calcul ne vaut que pour les estimations nécessaires au pilotage des dispositifs de retraite. Le capital constitutif d'finitif ainsi que les provisions mathématiques sont calculés par les outils de gestion de la compagnie.

## 3.3 Le produit l'Article 83

### 3.3.1 D'finition

Le contrat de la rente viagère différé est divisé en deux parties : la première est celle de constitution de la rente moyennant le paiement d'une prime unique ou de primes périodiques; la seconde est la période de service de la rente.



C'est le régime de retraite par excellence : l'assuré paye des primes pendant sa carrière professionnelle, au moment où il dispose de revenus suffisants, puis touche des arrérages dès qu'il se retrouve à la retraite.

En cas de contre-assurance et si l'assuré vient à décéder pendant la période de constitution de la rente, les primes sont perdues et aucune prestation n'est servie à quiconque. La contre-assurance prévoit dans ce cas le remboursement des primes payées au bénéficiaire désigné

Ces contrats sont appelés contrats à cotisations définies car l'obligation de l'employeur ne porte que sur le versement d'un montant prédéterminé de cotisations d'assurances et non sur une prestation de retraite. Ces régimes sont basés sur une optique d'épargne. On considère ici les contrats d'assurance de groupe sur la vie à adhésion obligatoire, souscrits par un employeur au bénéfice de ses salariés. Ces contrats fonctionnent selon le principe dit de « capitalisation » et visent à garantir aux bénéficiaires des droits de retraite supplémentaires grâce au versement de cotisations prédéterminées. Les assureurs constituent un capital représentatif des droits de chaque salarié appelé « capital constitutif de la rente ». A compter du départ en retraite du salarié ce capital va servir à payer les montants réguliers que sont les arrérages de rente. En pratique, cela signifie que pendant le service de rente, le capital diminue du montant des arrérages versés et que dans le même temps, des produits financiers sont dégagés par le placement du capital restant.

Calcul d'une rente périodique versée à terme échu à partir d'un capital acquis : **cotisation définie**

$$A = K \times \frac{1}{p \times (a_x^p + h \times (a_y^p - a_{x:y}^p))} \times \frac{1}{(1 + g_2)}$$

Avec les paramètres définis identiquement que ceux de produit l'Article 39 (cf. 3.2.2 « Le calcul du passif d'un assureur »).

### 3.3.2 Les garanties en phase de constitution

Lors de la souscription, si l'assureur ne peut proposer un tarif attractif à l'entreprise pour cause de non rentabilité il peut proposer des garanties complémentaires (garanties de prévoyance) pour augmenter la rentabilité de l'opération.

En effet, le principal risque des garanties de retraite pures est l'allongement de l'espérance de vie des assurés. L'intégration de garanties complémentaires de prévoyance inverse l'impact de cet allongement. En conséquence, ces garanties complémentaires permettent d'augmenter la valeur du produit durant le cycle de commercialisation.

Lors de la souscription du contrat de retraite, l'entreprise peut opter pour les garanties complémentaires suivantes :

- Capital décès
- Exonération des cotisations
- Rente immédiate en cas de décès
- Rente conjointe
- Rente enfant

Les garanties « Rente immédiate en cas de décès » et « Capital décès » ne peuvent pas être souscrites simultanément.

### 1) **Garantie « Rente immédiate en cas de décès »**

En cas de décès de l'assuré survenant pendant la période de constitution de la retraite complémentaire et au plus tard avant le mois précédant le paiement du premier terme de retraite, l'assureur garantit pendant dix ans le versement à son conjoint ou aux bénéficiaires désignés d'une rente temporaire.

Cette rente est calculée de la manière suivante : les cotisations qui auraient dû être versées jusqu'à l'âge de départ à la retraite prévu aux conditions particulières, sont inscrites fictivement sur le compte de l'assuré. Ces versements fictifs sont réputés être égaux aux cotisations retraite de l'exercice civil précédant le décès de l'assuré. Le montant alors inscrit au compte de l'assuré est transformé en rente viagère temporaire, calculée au tarif d'inventaire en vigueur au jour du décès de l'assuré, sur la base d'un âge de départ à la retraite fixé aux conditions particulières. La rente immédiate versée au bénéficiaire est égale à par exemple 60 % de ce montant. En cas de décès du bénéficiaire désigné, la rente ne sera plus versée.

En cas de résiliation ou du fait du non paiement des cotisations ou de départ de l'assuré de l'Entreprise Souscriptrice, la garantie standard définie aux conditions générales valant note d'information à l'article « Décès de l'assuré » se substitue à la présente garantie.

La cotisation de cette garantie complémentaire est de par exemple 5,00 % de la cotisation Retraite.

Les rentes sont payées trimestriellement à terme échu. Le premier des versements est effectué à la fin du trimestre qui suit le décès de l'assuré. Le dernier versement intervient à la fin du trimestre qui suit le décès du bénéficiaire et au plus tard au 40<sup>ème</sup> versement. Au début de

chaque année civile, le bénéficiaire devra adresser à l'assureur, tout document valant certificat de vie, pour le règlement de ses versements.

Les rentes sont revalorisées dans les mêmes conditions que la retraite principale, et intégrées dans le compte de résultats du fonds des rentes qui est adossé au fonds Euro de l'assureur.

## **2) Garantie « Capital Décès »**

En cas de décès de l'assuré survenant pendant la période de constitution de la retraite complémentaire et au plus tard avant le terme de l'adhésion, l'assureur verse aux bénéficiaires désignés, un capital décès égal à par exemple 150 % du cumul des cotisations retraite effectivement payées et inscrites sur le compte de l'assuré et 100 % des sommes éventuellement transférées sur son compte, sans pouvoir être inférieur au montant atteint par le compte de l'assuré au moment du décès. La date de valeur retenue pour l'évaluation du compte est le mercredi suivant la réception au Siège social de l'assureur de l'acte de décès.

En cas de résiliation, d'arrêt des versements, ou de départ de l'assuré de l'Entreprise Souscriptrice, la garantie cesse. Dans ce cas, l'assuré bénéficiera de la garantie définie au paragraphe « Décès de l'assuré ».

La cotisation de cette garantie complémentaire est par exemple 0,50 % de la cotisation Retraite.

## **3) Garantie « Exonération des cotisations »**

L'entreprise peut opter pour la garantie « Exonération du paiement des cotisations ». Cette garantie s'applique en cas d'Incapacité Totale de Travail (Incapacité Temporaire Totale ou Invalidité Permanente Totale) d'un assuré résultant d'un accident ou d'une maladie, de façon telle qu'il soit dans l'impossibilité complète, continue et effective de se livrer à toute activité professionnelle.

Dans ce cas, à compter du 91<sup>ème</sup> jour d'arrêt de travail consécutif de l'assuré l'assureur prend en charge les cotisations retraite de l'assuré sur la base de la moyenne des quatre dernières trimestrialités payées précédant l'arrêt de travail.

Pendant la période exonérée, la garantie « Rente Immédiate en cas de Décès » ou « Capital Décès » est maintenue gratuitement. Les cotisations échues avant l'entrée en vigueur de la garantie « Exonération » demeurent exigibles. L'exonération du paiement des cotisations ainsi que les prestations qui en découlent, cessent au jour de la reprise d'activité et, en tout état de cause, à la fin du trimestre suivant le 62<sup>ème</sup> anniversaire de l'assuré.

La cotisation de cette garantie complémentaire est par exemple 2 % de la cotisation Retraite.

#### 4) Les risques exclus

Les risques sont exclus dans les cadres de ces trois garanties :

- le suicide qu'il soit conscient ou non, pendant la première année qui suit la prise d'effet de l'assurance ou, éventuellement sa remise en vigueur,
- en cas de guerre, la garantie n'aura d'effet que dans les conditions qui seront déterminées par la législation à intervenir sur les assurances sur la vie en temps de guerre,
- les accidents et les maladies résultant du fait intentionnel de l'Assuré,
- les risques d'aviation : les risques de navigation aérienne sont garantis s'ils résultent de vols effectués par l'Assuré en qualité de simple passager sur ligne commerciale, charters et avion-taxis. Dans ces deux cas, la garantie ne joue que si pilote et appareil sont munis respectivement de brevets et certificats nécessaires,
- les accidents résultant : de l'ivresse de l'Assuré ou de l'usage par lui de stupéfiants non prescrits médicalement, de la manipulation par l'Assuré d'armes dont la détention est interdite, de la participation volontaire de l'Assuré à des émeutes, grèves, mouvements populaires, sauf légitime défense, à des rixes, de guerres civiles ou étrangères, des compétitions, sauf celles auxquelles l'Assuré participe en tant qu'amateur et qui ne comportent pas l'utilisation d'un engin à moteur et qui ne sont pas définies dans les exclusions ci-après,
- les matches, les raids, paris ou acrobaties, vols sur prototypes, vols militaires et descentes en parachute que n'exigerait pas la situation critique de l'appareil, ainsi que les vols de formation de parachutistes et les sports suivants : parachutisme ascensionnel, parapente, aile volante ou deltaplane, ULM ainsi que toute pratique dangereuse d'un sport tel que le saut à l'élastique.

### 3.3.3 Les garanties en phase de restitution

La phase de restitution constitue la période entre la liquidation de la retraite et la fin du paiement de la prestation (décès du rentier ou co-rentier le cas échéant). Pendant cette période, l'assureur doit verser une rente viagère qui est calculée en fonction de plusieurs garanties.

Ces garanties sont soit :

- Obligatoires : intégrés dans le coefficient de conversion de capital en rente pour l'ensemble des assurés ;
- Optionnelles : aux choix de l'assuré au moment du départ à la retraite en fonction de sa situation personnelle.

Généralement, nous avons quatre garanties en phase de restitution :

- Rente viagère réversible
- Rente avec annuités garanties
- Rente par paliers
- Rente à annuité croissante

### 1) Rente viagère réversible

La rente viagère réversible en assurance permet, en cas de décès, de préserver le niveau de revenus de son conjoint ou de toute autre personne de son choix, par la continuation du versement de la rente viagère du défunt. Si l'assuré décède le premier, le bénéficiaire de la réversion perçoit une rente dont le montant est déterminé par le taux de réversion. Ce taux de réversion varie de 0 % à 100 % uniquement pour le (la) conjoint(e) mari(é)e.

#### Exemple :

- La rente d'un assuré Monsieur X est de 100€
- Monsieur X décède à 80 ans
- Sa conjointe Madame Y

#### ➤ Cas 1 : Rente non réversible

L'assureur verse 100€ à Monsieur X de la date de liquidation de la retraite jusqu'au décès. Les prestations cessent à la date de décès de Monsieur X. C'est un engagement en cas de décès vie entière, nous utilisons la formule  $a_x$  pour calculer le capital constitutif :

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Les commutations en cas de décès :

- $D_x = l_x \times v^x$  où  $v = \frac{1}{1+i}$  avec  $i$  : le taux technique
- $N_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}$

#### ➤ Cas 2 : Rente réversible au taux de réversion de 60 %

L'assureur verse 100€ de la date de liquidation de la retraite de Monsieur X jusqu'à son décès une rente de 100€. A compter de la date du décès, son conjoint Madame Y perçoit 60 % de la rente de Monsieur X, soit  $100€ \times 60 \% = 60€$  jusqu'à son décès. Les prestations cessent à la date de décès de Madame Y. La rente de réversion de Monsieur X sur Madame Y égale au paiement au décès de X si Y est toujours en vie, noté  $a_{x/y}$  :

$$a_{x/y} = a_y - a_{x:y}$$

Où : les termes  $a_y$  et  $a_{x:y}$  sont définis dans la section 3.2.2.

➤ **Cas 3 : Rente réversible au taux de réversion de 100 %**

Idem Cas 2, mais Madame Y perçoit 100 % de la rente, soit 100€. Donc, ça coûte plus cher.

➤ **Cas 4 : Décès de Madame Y avant le décès de Monsieur X**

Idem Cas 1, l'assureur verse 100€ à Monsieur X de la date de liquidation de la retraite jusqu'au décès. Les prestations cessent à la date de décès de Monsieur X.

En conséquence, plus le taux de réversion est élevé et plus la différence d'âge entre l'assuré et le conjoint plus jeune est importante, plus le coût de la réversion augmente. Sur un contrat de retraite à cotisations définies, le coût des options est à la charge de l'assuré.

## 2) Rente avec annuités garanties

L'assuré qui n'a pas de conjoint vivant et qui souhaite en cas de décès que sa rente soit versée à un bénéficiaire (par exemple, enfant, concubin(e) ou autre) peut choisir cette garantie.

Pour cette option, l'assureur doit garantir au rentier le versement de la rente pendant une période donnée où il soit vivant ou non. La période maximale est autorisée suivante :

$$Période = \text{MAX} (0 ; \text{Espérance de vie} - 5 \text{ ans})$$

Le rentier peut choisir dans cet intervalle, une période par exemple de 20 ans d'annuités garanties. L'assureur s'engage à verser le montant de la rente pendant les 20 ans minimum soit au rentier, soit au(x) bénéficiaire(s) désigné(s) en cas de décès.

Exemple : Le rentier prend son départ à la retraite à 60 ans avec une rente de retraite de 100€ et il a signé un contrat d'annuités garanties de 20 ans.

### **Cas 1**



Le rentier quitte l'entreprise à 62 ans, l'assureur doit verser 100€ jusqu'à 80 ans. À 80 ans, si le rentier est encore en vie, l'assureur continue de verser la rente jusqu'à son décès. Les paiements cessent à la date de décès car la période de 20 ans est terminée.

**Cas 2**

Si le rentier décède à 70 ans pendant la période des annuités garanties, l'assureur paye 100€ au rentier jusqu'à son décès, puis 100€ au bénéficiaire désigné pendant la durée résiduelle. Au bout de la période de 20 ans, l'assureur arrête le versement de la rente car la période minimale est de 20 ans.

Conclusion :

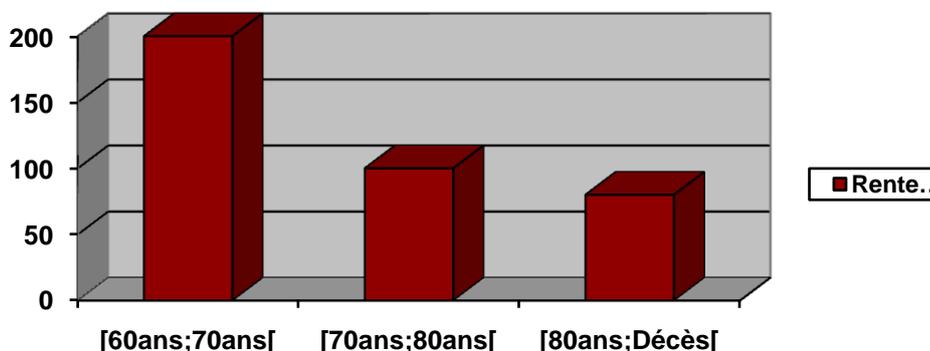
- Si le rentier décède avant 20 ans, l'assureur verse la rente au bénéficiaire pendant la durée restante.
- Si le rentier n'est pas décédé avant 20 ans, l'assureur continue à lui verser la rente jusqu'à son décès.

**3) Rente par paliers**

Un rentier peut moduler sa retraite en fonction de sa situation personnelle. La rente par paliers permet de minorer ou de majorer le montant de la rente au début ou à la fin de période. En général, l'assureur propose 2 ou 3 paliers et calcule le montant des rentes.

Si la rente annuelle est de 100€, le rentier peut demander à moduler le paiement soit (montants donnés à titres indicatifs):

- 200€ les 10 premières années ;
- 100€ les 10 années suivantes ;
- 80€ jusqu'à son décès.



#### 4) Rente à annuit é croissante

Lors de la liquidation, l'assuré demande à l'assureur la revalorisation annuelle de sa complément de retraite en fonction d'un pourcentage par exemple de 2 %.

Chaque année, l'assureur s'engage à revaloriser la rente de ce pourcentage. Le coût de cette revalorisation est à la charge de l'assuré et vient impacter le montant de la rente servie, donc il y a une diminution de la rente.

### 3.4 Récapitulation de l'Article 83 et l'Article 39

	Article 83	Article 39
<b>Type de contrat</b>	Retraite supplémentaire sous forme de rente viagère correspondant aux cotisations et intérêts accumulés.	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Régime additif : retraite supplémentaire en pourcentage fixe du dernier salaire sans lien avec les régimes obligatoires.</li> <li>▪ Régime chapeau : retraite supplémentaire en pourcentage du salaire sous déduction des régimes obligatoires de retraite</li> </ul>
<b>Caractéristiques</b>		
<b>Mode de souscription</b>	Décision unilatérale de l'employeur, convention ou accord collectif d'entreprise.	Décision unilatérale de l'employeur, convention ou accord collectif d'entreprise (peu fréquent).
<b>Adhésion</b>	Obligatoire pour une même catégorie de salariés.	Obligatoire pour une même catégorie de salariés.
<b>Cotisations</b>	Quote-part patronale et quote-part salariale (facultative).	A la charge totale de l'entreprise
<b>Prestations</b>		
<b>Prestations de base</b>	Versement d'une rente viagère à l'âge de la retraite fixé par le contrat : pas d'option en capital. Possibilité d'anticipation ou de prorogation de la rente.	Versement d'une rente viagère : <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Dans un régime additif, la rente est égale à une part du salaire (de 10 à 15 % le plus souvent pour une carrière pleine)</li> <li>▪ Dans un régime chapeau, la rente est égale à la différence entre une part du dernier salaire et le montant des retraites obligatoires du salarié</li> </ul>
<b>Portabilité des droits</b>	Oui. En cas de départ de l'entreprise, les droits et les intérêts accumulés restent acquis. L'ancien salarié bénéficie d'une rente à l'âge prévu dans le contrat.	Non. En cas de départ de l'entreprise avant l'âge de la retraite (ou souvent de la préretraite), le salarié perd tous ses droits à la retraite supplémentaire.

## 4. Support d'investissement

On distingue en France deux types de contrat :

- Les contrats en euros ou mono-supports : ils sont uniquement investis en fonds euro.
- Les contrats multi-supports : ils comportent à la fois un fonds en euros et des unités de compte (noté : UC) investies en parts de SICAV ou FCP, eux-mêmes principalement investis en actions ou en obligations.

Les SICAV (Société d'Investissement à Capital Variable) font partie, avec les FCP, de la famille des OPCVM. Une SICAV est une société qui a pour objectif de mettre en commun les risques et les bénéfices d'un investissement en valeurs mobilières (actions, obligations, etc.), titres de créances négociables, repos et autres instruments financiers autorisés, soit par la réglementation, soit par les statuts de la SICAV. D'un point de vue juridique, les SICAV ont une personnalité morale.

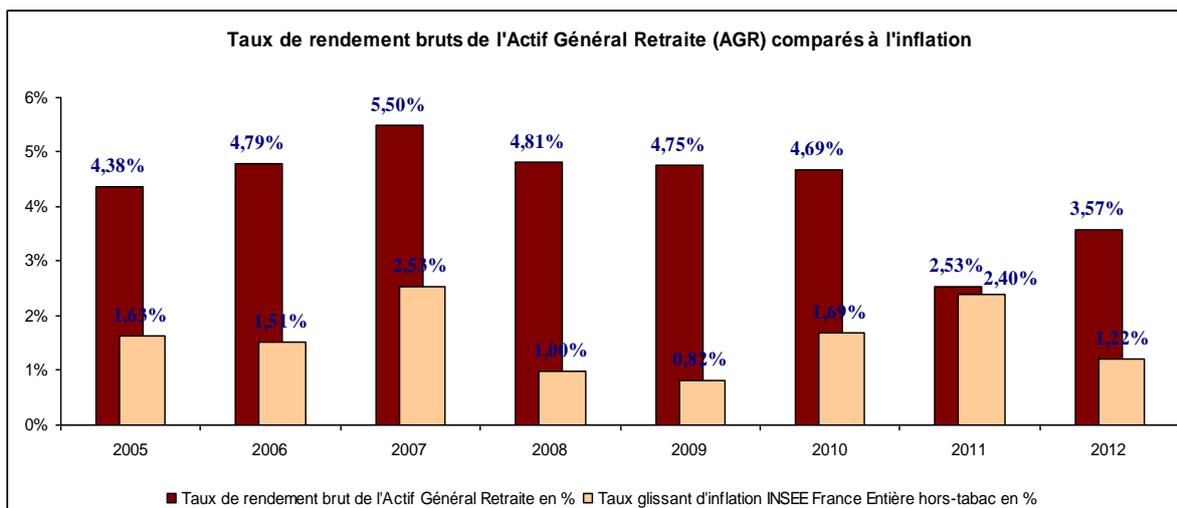
Les FCP (Fonds Communs de Placement) se distinguent de la SICAV par son statut juridique. Un FCP est une copropriété de valeurs mobilières qui émet des parts. Il n'a pas de personnalité morale. Il est créé à l'initiative d'une société de gestion et d'une banque dépositaire. Chaque porteur de part dispose d'un droit de copropriété sur les actifs du fond, droit proportionnel au nombre de parts possédés.

Un OPCVM (Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobilières) est une entité qui gère un portefeuille dont les fonds investis sont placés en valeurs mobilières.

### 4.1 Le fonds en euros

Les sommes versées sur un contrat en euros, tout comme celles placées sur le fonds en euros d'un contrat multi-support, sont garanties par l'assureur : elles ne peuvent pas baisser et sont revalorisées chaque année d'un rendement.

L'actif général retraite est un fonds en euros dédié à la retraite collective. Il offre une double garantie : la garantie du capital investi et la garantie d'un taux de rendement minimal annuel. Tout intérêt est acquis définitivement. Ce fonds en euros a généré ces 8 dernières années, un taux de rendement positif nettement supérieur à l'inflation chaque année.



## 4.2 Les unités de compte

Les Unités de Compte (UC) sont juridiquement des Fonds Communs de Placement (FCP) ou des SIVAV (Société d'Investissement à Capital Variable). Les deux types sont regroupés dans l'OPCVM (Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobilières).

Lorsqu'un épargnant veut investir sur les marchés financiers, il peut le faire de deux façons :

- acheter directement des actifs tels que des actions ou des obligations
- investir dans des sociétés dont l'objectif est de détenir ces actifs pour le compte de leurs investisseurs : les OPCVM

Il est également possible de souscrire ces OPCVM à travers un contrat d'assurance-vie. Dans ce cas, ils prennent alors le nom d'Unités de Compte. Classiquement, les contrats d'assurance-vie ne permettent pas d'investir directement sur des actions ou des obligations.

Les unités de compte disponibles sur les contrats multi-support peuvent être des actifs financiers de tout type, le plus souvent des fonds en actions ou obligataires, mais aussi des actifs immobiliers. C'est l'assureur qui détermine les unités de compte proposées pour chaque contrat. Leur nombre est très variable selon les contrats, de une à plusieurs centaines. Les sommes investies sur les unités de compte ne sont pas garanties et présentent donc un risque pour la souscription.

Investir en unités de compte permet de placer l'épargne sur des supports financiers plus dynamiques que le fonds euros. En contrepartie d'un risque de perte, plus ou moins élevé selon la nature des unités de compte, on espère ainsi bénéficier d'un rendement plus important. Les unités de compte permettent donc d'investir notamment sur les marchés d'actions en prenant un risque mesuré et pour des montants très faibles. Grâce aux unités de compte, on peut ainsi diversifier efficacement l'épargne et diminuer le risque de perte. Ce risque est en effet moindre en investissant dans une unité de compte qui possède des actions

dans une cinquantaine d'entreprises plutôt que dans une seule entreprise par exemple. Dans l'unité de compte, les hausses des unes compensent les baisses des autres.

En Solvabilité I, les unités de compte ont un coût d'immobilisation de marge de solvabilité (CMS) de 1 %. Ce coût dépend de la différence entre le taux de rendement perçu sur les actifs immobilisés et le taux d'actualisation (taux exigé par l'actionnaire) ainsi que de la durée d'immobilisation de la marge de solvabilité. Il prend en compte le risque opérationnel, par exemple, un retard d'investissement. Mais il n'y a pas de risque financier pour l'assureur. Donc, l'assureur est incité à vendre plus d'UC.

Lorsqu'un assuré prend l'option d'investissement en Unités de Compte, il peut choisir son profil de gestion en fonction de :

- la zone géographique : l'assuré peut choisir des unités de compte en fonction de zone géographique, c'est-à-dire que les différents marchés financiers (par exemple, sur le fonds Europe ou sur le fonds Américain) ;
- le niveau de risque (exemple : profil équilibré, risqué, i.e. les cotisations nettes de frais sont investies dans les différents fonds selon certaines répartitions) ;
- la date de retraite : tel que le profil d'horizon, il y a une réallocation d'actif vers le fonds Euro au fur et à mesure que l'on se rapproche de la date de retraite. Plus proche la date de retraite, le fonds est plus sécurisé.

### **4.3 Différences entre les unités de compte et le fonds en euros**

L'assurance-vie en euros ou en unités de compte, laquelle vous voulez choisir ? Grâce aux contrats multi-supports, l'assuré peut désormais mixer indifféremment ces deux types de placement pour créer le produit qui correspond le mieux à la stratégie patrimoniale du moment. S'il y a une modification sur la composition au fil des ans, l'assuré veut gagner en sécurité ou en rentabilité ?

Les supports en euros sont en sécurité mais ses rendements sont limités. A l'échéance d'un contrat, l'assuré peut récupérer la totalité des sommes versées sur ce type de fonds au sein de son assurance-vie. Autrement dit, le capital placé au fil des ans est garanti, quels que soient les supports dans lesquels il est investi (en général, des obligations). En plus, l'assureur s'engage à rembourser à l'assuré, l'assuré perçoit également des intérêts. Ceux-ci sont capitalisés chaque année sur la base d'un taux minimum et d'une participation aux bénéfices réalisés par la compagnie d'assurance. Un fonds en euros permet à l'assuré d'avoir son argent placé de manière sûre à un taux supérieur à l'inflation. Les gains annuels sont versés sous forme d'euros et donc taxés chaque année.

En contrepartie de la sécurité offerte, les fonds en euros sont moins bien rémunérés, corrigés du risque, que leurs homologues en unités de compte.

Les supports en unités de compte sont risqués, mais plus rémunérateurs sur le long terme. Le capital est investi sur les marchés boursiers avec des parts d'OPCVM (SICAV, FCP, etc.) et/ou sur les marchés immobiliers avec des parts de SCPI (société civile de placement immobilier). En conséquence, son montant varie en fonction de l'évolution de ces derniers. Aucun rendement n'est donc garanti et l'assuré n'a aucune certitude de récupérer son argent. Exemple : en cas de chute des marchés au terme du contrat, le capital récupéré peut être inférieur à celui placé. Comme vous ne détenez que des parts, vous n'êtes pas taxés tous les ans, mais seulement sur les gains réalisés au moment de la vente de vos parts du fonds. La seule obligation pour les assureurs est de restituer à l'échéance de l'assurance-vie le nombre de parts détenues dans le portefeuille, peu importe que la valeur ait baissé ou pas.

Malgré les risques encourus, les supports en unités de compte peuvent offrir des perspectives de gains supérieures à celles des fonds en euros. Ils proposent également une palette de placements plus importante, permettant ainsi une diversification des supports d'investissement et une dilution du risque sur le long terme.

## 5. La rentabilité d'une affaire nouvelle

Lors de la souscription, la tarification proposée doit être conforme à la NBM (New Business Margin) minimale acceptée par l'assureur pour envisager la réalisation d'une nouvelle affaire.

Les règles de NBM peuvent varier selon les différentes entreprises d'assurance, par exemple :

- $NBM > a \% (> 0)$  : l'opération est rentable ; mais attention la NBM ne peut pas être trop importante pour éviter que le tarif soit trop élevé ;
- $b \% < NBM < a \%$  : le dossier sera examiné par différente instance de l'assureur pour l'acceptation du risque ;
- $NBM < b \% (> 0)$  : l'assureur refuse cette affaire, car l'opération n'est pas rentable avec ces paramètres.

Ici, vous trouverez un exemple de paramètres nécessaires pour calculer la valeur NBM :

Année de la simulation	2013
Actualisation à long terme (au-delà de 10 ans)	x%
Taux de Participation aux bénéficiaires brut long terme (au-delà de 10 ans)	x%
Taux de rendement moyen brut des actifs en UC (long terme)	x%
Taux de réversion	x%
Périodicité de la rente	Annuelle
Rétro-commission financière (UC)	x%
Taux de rémunération des capitaux propres hors I.S	x%

Taux de marge de solvabilité en € (S1)	4,00%
Taux de marge de solvabilité en UC (S1)	1,00%
Taux I.S. (Impôt sur les sociétés)	34,43%
Taux de chute des cotisations futures	Loi de chute
Coût d'acquisition	x%
Coût de la garantie de table	x%
Coût unitaire par contrat	x €
Clé des coûts en €	x
Clé des coûts en UC	x
Clé des Rentes	x
Taxe	x%

Le détail des calculs sera précisé dans la troisième partie intitulée : « Les leviers de la valeur d'un portefeuille retraite ».

## **PARTIE II : LES MODÈLES D'ACTIFS**

Le calcul de la NBM (New Business Margin) consiste à projeter le résultat net de l'assureur sur les décennies à venir afin d'extraire le résultat net actualisé. La NBM correspondra, en simplifiant, au ratio résultat net sur prime annuel des nouveaux contrats. Le résultat de l'exercice de l'assureur composé de la marge technique est égal à la somme des primes, les prestations, les intérêts y compris la revalorisation brute de la participation aux bénéfices et la variation de provisions mathématiques nettes. Il faut ensuite soustraire les frais généraux et les frais d'acquisition, les commissions sur primes, les commissions de première année et les commissions sur encours pour obtenir la marge technique après les frais et les commissions. A cela, il faut rajouter la marge financière qui est la différence entre le revenu financier et la participation aux bénéfices. L'addition de la marge technique et de la marge financière forme la marge avant l'imposition et la rémunération des fonds propres.

Le premier chapitre de cette partie sera un résumé des générateurs de scénarios économiques. Le chapitre suivant est consacré à la modélisation d'actifs. Pour finir, il y aura des illustrations numériques et des études de sensibilité au scénario central des NBM et aux courbes de rendements moyens au sens de scénario stochastique.

## **CHAPITRE 1. Le Générateur de Scénarios Économiques (GSE)**

### **1. Présentation générale de GSE**

La projection sur le long terme des valeurs de marché des actifs financiers et des variables macro-économiques, souvent appelé « génération de scénarios économiques », constitue une phase cruciale dans la gestion actif-passif d'une compagnie d'assurance ou d'un fonds de retraite. Elle est un élément central de l'évaluation des provisions pour les garanties financières sur des contrats d'épargne dans le cadre de Solvabilité 2.

Un générateur de scénarios économiques (GSE) s'avère ainsi un outil important d'aide à la décision dans le domaine de la gestion des risques en permettant d'obtenir des projections dans le futur des valeurs des éléments présents dans les deux compartiments du bilan de la société: les actifs (actions, obligations, immobilier,...) et le passif (provisions techniques, dettes financières,...). L'obtention de ces valeurs passe par la projection d'autres variables macro-économiques et financières telles que les taux d'intérêt, l'inflation des prix, l'inflation des salaires et le taux de chômage. A titre d'exemple, les prix futurs des obligations sont souvent déduits à partir de la projection des taux d'intérêt, de même les prestations futures de la société peuvent être indexées sur l'inflation des prix et/ou l'inflation des salaires.

De manière générale, les GSE permettent de prendre en compte l'horizon long d'investissement des sociétés d'assurance et des fonds de retraite ainsi que l'influence des évolutions futures des variables macro-économiques et financières sur le choix de leurs paramètres techniques, tel que le taux de rendement garanti. Ceci est souvent motivé par la

volonté de garantir un surplus permanent (l'écart entre la valeur des actifs financiers à une date donnée et la valeur des engagements actualisés à un taux d'intérêt de référence).

La construction et la mise en œuvre d'un GSE passent par les quatre étapes suivantes :

- L'identification des sources de risque prises en compte et des variables financières à modéliser (taux d'intérêt, inflation, rendement des actions, etc.) qu'on appellera dans la suite les variables du GSE.
- Le choix du modèle pour la dynamique de chacune de ces variables.
- La sélection d'une structure de dépendance entre les sources de risque de façon à obtenir des projections cohérentes.
- L'estimation et le calibrage des paramètres des modèles retenus doivent être effectués.

## 2. Présentation théorique des GSE

Les problèmes de modélisation sont en premier lieu liés au choix de la représentation de la structure par terme des taux d'intérêt (STTI). Il y a deux grandes classes de modèles de taux pour l'évaluation d'actifs financiers peuvent être présentés : les modèles d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) et les modèles d'équilibre général.

L'évaluation dans le cadre des modèles d'AOA est de nature purement financière. Elle repose entièrement sur l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. L'utilisation de cette hypothèse fondamentale a permis de mettre en évidence deux approches d'évaluation par arbitrage :

- La première approche considère le prix des instruments financiers comme fonction de variables d'état. Ces variables d'état – généralement le taux court pour les modèles univariés (cf. Vasicek [1997]), ou le couple (taux court, taux long) pour les modèles bivariés sont supposés de dynamique exogène. Dans de tels modèles, l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage exprime que la prime de risque du marché est indépendante de la maturité du titre considéré
- La deuxième approche d'évaluation par arbitrage est celle proposée par Ho et Lee [1986] et Heath, Jarrow et Merton [1992]. Le point clef de cette approche est la prise en compte de toute l'information contenue dans la structure de taux initiale en considérant comme donnée exogène la dynamique simultanée de taux ayant différentes maturités appelé aussi dynamique des taux terme contre terme. La dynamique de prix des zéro-coupons caractérise le modèle de courbe de taux.

L'évaluation dans le cadre d'un modèle d'équilibre général ne nécessite pas d'hypothèse sur les dynamiques de prix ou de taux. Ces dynamiques sont obtenues de manière endogène. Cette approche est celle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR) [1985]. En effet, les modèles d'équilibre typiques se basent sur les anticipations des mouvements futurs des taux d'intérêt

de court terme et non pas sur la courbe de taux observé à la date initiale. En utilisant un processus des taux courts, on peut déduire le rendement d'une obligation de long terme en déterminant la trajectoire espérée des taux courts jusqu'à la maturité de cette obligation.

Un autre problème théorique relative aux différentes variables modélisées, en particulier les taux d'intérêt, concerne le choix du nombre et de la nature des facteurs à utiliser pour la modélisation. La nature des facteurs peut être de sources différentes : elle peut être liée à l'horizon du taux (taux court, taux long) ou à la structure de la courbe des taux.

Concernant les actions, différentes problématiques liées à l'appréhension de la dynamique de leurs rendements montrent l'insuffisance de certains modèles adoptés, jusqu'à une période récente, par les sociétés d'assurance. L'examen des données historiques relatives aux rendements des actions permet de constater que l'hypothèse d'une distribution normale ne permet pas de prévoir des valeurs extrêmes de rendement tel que réalisé dans le passé. A ce niveau, certains chercheurs proposent l'adaptation d'un modèle de changement de régime dans lequel les rendements des actions peuvent être simulés sous l'un des deux régimes suivants : un premier régime avec une hypothèse de volatilité relativement faible et une moyenne relativement élevée des rendements des actions et un deuxième régime avec une hypothèse de volatilité relativement élevée et une moyenne relativement faible de ces rendements.

Concernant les autres classes d'actifs, tels que l'immobilier et les produits dérivés, malgré les différents cadres d'hypothèses proposés pour leur projection, elles se heurtent aux problèmes d'un historique peu profond, d'une liquidité insuffisante et de données confidentielles. Dans le cas de l'allocation stratégique d'actifs d'un fonds de retraite où la priorité est souvent donnée aux actions, aux obligations et au monétaire.

## **CHAPITRE 2. La modélisation de l'actif**

Un scénario économique correspond à une projection sur un horizon d'intérêt de grandeurs économiques et financières : taux d'intérêt, prix des actions, etc. Une réflexion sur la projection des actifs est indispensable pour le pilotage technique d'un organisme assureur. Si la problématique n'est pas nouvelle, la projection de flux de l'actif est un exercice indispensable dans le cadre des modèles ALM en assurance-vie.

La mise en œuvre progressive d'une gestion d'actifs, d'abord des modèles MCEV, puis des techniques de calcul de provisions dans le cadre de l'IFRS norme assurances, et enfin de Solvabilité 2, nécessite de recourir à des modèles stochastiques prenant en compte la volatilité des performances des actifs au bilan de l'organisme assureur.

Un modèle d'actifs dans un contexte d'assurance se doit d'intégrer, d'une part, des fluctuations de court terme sur la valeur des actifs et d'autre part, d'être cohérent à long terme

avec les équilibres macroéconomiques reliant l'inflation, c'est-à-dire que l'évolution de l'indice des prix, les taux d'intérêt et le taux de croissance de l'économie.

On considère classiquement que le modèle d'actifs intègre les supports d'investissement suivants : les obligations Zéro-coupon, les actions, l'immobilier, les placements monétaires. Il existe plusieurs types de modèles d'actifs par classe :

- **Modèles d'actifs des taux d'intérêt** (qui servent pour la projection des rendements obligataires Zéro-coupon) : Vasicek, Cox-Ingersoll-Ross (CIR), Heath-Jarrow-Morton (HJM), Dothan, Ho et Lee, Hull & White, CIR-étendus, Black-Derman-Toy;
- **Modèles d'actifs des actions** : Black et Scholes, Merton;
- **Modèles d'actifs de l'immobilier** : Black et Scholes;
- **Modèles d'actifs des placements monétaires** (qui servent pour la projection de l'inflation) : Kaufmann, Wilkie, Ahlgrim.

## 1. La modélisation des taux d'intérêt

L'objectif principal d'une structure de taux d'intérêt est de reproduire l'évolution des titres du marché obligataire. Mais elle offre l'opportunité d'évaluer le prix d'une obligation sans risque de défaut, des produits dérivés ainsi que les obligations avec risque de défaut.

Les modèles d'évaluation de la structure temporelle des taux d'intérêt peuvent être classés selon l'approche utilisée :

- Les modèles d'équilibre partiel reposant sur un raisonnement d'arbitrage : qui est moins restrictive, par exemple, Modèle de Vasicek ;
- Les modèles d'équilibre général : qui posent des hypothèses restrictives et basés sur une description globale de l'économie, par exemple, Modèle de Cox-Ingersoll-Ross ;
- Les modèles de déformation qui partent de la structure des taux d'intérêt observée et lui font subir des chocs. Le modèle de Ho et Lee ainsi que sa généralisation proposé par Heath-Jarrow-Morton sont sans aucun doute les plus connus dans cette catégorie.

Nous avons un marché financier sous les conditions générales suivantes :

- Liquide : c'est-à-dire que les valeurs sur le marché peuvent être achetées ou vendues aux quantités sans restriction et à tous moments (tous les produits sont traitables) ;
- Profond : il implique que les prix du marché ne sont pas influencés par les achats ou les ventes discutés ici ;
- Équilibré : il n'y a pas de possibilité d'arbitrage ;
- Sans fiction (frais de transaction) : il n'y a pas de différences entre bid et ask prices.

A une date donnée  $t$ , on fait l'hypothèse que le taux instantané  $r$  suit un processus de diffusion caractérisé par l'équation suivante :

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dW_t$$

Avec

- $dr$  : la variation du taux  $r$  au cours de l'instant  $dt$
- $\mu(r, t)$  : la moyenne des changements instantanés du taux par unité de temps (ou le coefficient de dérive)
- $\sigma(r, t)$  : l'écart-type des changements instantanés du taux par unité de temps (ou le coefficient de diffusion, ou encore la volatilité)
- $dW_t$  : un processus standard de Gauss-Wiener vérifiant  $E(dW_t) = 0$  et  $E(dW_t^2) = dt$

Cette formule est la structure de base qui permet de retrouver les principales dynamiques continues de taux :

Modèles	Dynamiques
Vasicek	$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$
Cox-Ingersoll-Ross	$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$

## 1.1 Notations

Dans le modèle du taux à temps continu, nous notons  $ZC(t, T)$  le prix d'un zéro-coupon à la date  $t$  avec l'échéance  $T$ . Et  $ZC(T-, T) = \lim_{t \rightarrow T} ZC(t, T) = 1$ , le paiement final d'un zéro-coupon lorsque la maturité est proche. On obtiens alors le taux de rendement continu par :  $R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln ZC(t, T)$  en passant à la limite on pose  $r(t) = r_t = \lim_{t \rightarrow T} R(t, T)$  qui est le taux sans risque instantané (spot rate).

En posant  $f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln ZC(t, T)$ , on définit le taux à terme (taux forward) instantané  $f$  qui représente le taux d'intérêt sans risque pour un prêt contracté au temps  $t$  débutant à  $T$  pour une période infinitésimal. Avec ces notations on a :

$$ZC(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, s)ds\right) \text{ et } r_t = f(t, t)$$

Dans la littérature, il existe plusieurs modèles de taux. Le choix du modèle dépend des objectifs poursuivis. Le modèle de taux idéal est un modèle :

- réaliste en ce sens qu'il permet de prendre en compte les propriétés empiriques de la courbe des taux qui sont :
  - les taux d'intérêt ne sont pas négatifs.

- les taux d'intérêt sont affectés par des effets de retour à la moyenne.
  - les taux n'évoluent pas de façon parfaitement corrélée.
  - les taux à court terme sont plus volatiles que les taux à long terme.
  - Facteurs : niveau, pente et courbure, sont à l'origine de plus de 95 % des mouvements de la courbe des taux.
- bien construit en ce sens que les inputs du modèle sont observables sur le marché ou facilement estimables, et en outre fréquemment réajustables
  - suffisamment simple pour permettre des calculs rapides
  - intuitif en ce sens que les manipulateurs du modèle (traders, contrôleurs de risque...) n'aient pas la sensation d'avoir une boîte noire entre les mains
  - un modèle qui n'oublie pas un facteur de risque
  - satisfaisant l'absence d'opportunité d'arbitrage

Jusqu'à présent, il n'existe pas un modèle qui remplit toutes ces conditions.

Sur les marchés de taux d'intérêt, il n'existe pas de modèle de référence. Il convient donc de choisir le modèle le mieux adapté à chaque objectif. Le modèle de Vasicek et le modèle de Cox-Ingersoll-Ross retiendront notre attention.

## 1.2 Le modèle de Vasicek

Le modèle de Vasicek est l'un des premiers modèles stochastiques de taux d'intérêt. Cette modélisation du taux instantané à court terme utilise le processus autorégressif, dit d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, pour expliquer l'effet de retour à la moyenne empirique observé sur les courbes de taux. Dans ce modèle, le taux d'intérêt a une possibilité non-nulle d'être négatif au cours du temps.

Il s'écrit :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

Où :

- $r_t$  : le taux d'intérêt instantané
- $a (>0)$  : la force de repousser, c'est-à-dire que la vitesse de retour du taux instantané vers  $b$
- $b (>0)$  : le taux moyen à long terme autour de laquelle évolue le taux court instantané
- $\sigma (>0)$  : la volatilité du processus ou terme de variance
- $W_t$  : qui correspond à un processus de Wiener standard

Dans ce modèle, le prix de l'obligation d'un zéro-coupon est donné par :

$$ZC(t, T) = e^{-b\theta} \exp \left[ - (r(t) - b) \frac{1 - e^{-a\theta}}{a} + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma^2}{a^2} \theta - \frac{\sigma^2}{a^3} (1 - e^{-a\theta}) - \frac{\sigma^2}{2a^3} (1 - e^{-a\theta})^2 \right) \right]$$

Avec  $\theta = T - t$ . Pour plus de détails sur le calcul cf. Annexe 3.3.

Ce modèle permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constaté sur les taux d'intérêt, correspondant aux observations empiriques. En effet, des valeurs élevées des taux ( $r_t$ ) ont tendance à être suivies plus fréquemment par des baisses que par des hausses. L'effet inverse est également constaté pour des niveaux de taux inhabituellement bas. Mais il présente néanmoins des inconvénients :

- Les différents paramètres du processus de diffusion sont constants
- Il n'est pas possible d'obtenir une courbe de taux en forme de cuvette
- Les valeurs négatives du taux d'intérêt ne sont pas censurées

Pour éviter à la négativité des taux, il faut faire appel à une modification proposant une barrière réfléchissante à zéro. C'est l'objet du processus de Cox-Ingersoll-Ross (CIR).

### 1.3 Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

Ce modèle Cox-Ingersoll-Ross possède toujours cette propriété de retour à la moyenne des taux, mais il introduit un processus en racine carrée qui interdit à un taux initialement positif de prendre des valeurs négatives. Il est plus souvent employé par les professionnels que le modèle de Vasicek et il repose sur le principe d'équilibre du marché entre l'offre et la demande.

On se place sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  muni d'une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ . On suppose que sous une probabilité risque-neutre  $Q$  le taux court instantané  $r$  est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

Où :

- $r_t$  : le taux d'intérêt instantané
- $a (>0)$  : la force de repousser, c'est-à-dire la vitesse de retour du taux instantané vers  $b$
- $b (>0)$  : le taux moyen à long terme autour de laquelle évolue le taux court instantané
- $\sigma (>0)$  : la volatilité ou terme de variance
- $W_t$  : un mouvement brownien sous la probabilité  $P$

Avec  $a, b, \sigma$  constantes positives vérifiant :

$$\sigma^2 < 2ab$$

Cette condition permet de s'assurer de la stricte positivité du processus  $r(t)^2$ .

L'expression du prix du zéro-coupon est donnée comme suit :

$$ZC(t, T) = A(t, T) \exp(-B(t, T)r_t)$$

Avec pour tout  $t < T$ ,

$$A(t, T) = \left( \frac{2we^{\frac{a+w}{2}(T-t)}}{(w+a)(e^{w(T-t)} - 1) + 2w} \right)^{\frac{2am}{\sigma^3}}$$

$$B(t, T) = \frac{2(e^{w(T-t)} - 1)}{(w+a)(e^{w(T-t)} - 1) + 2w}$$

$$w = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$$

Pour plus de détails sur le calcul cf. Annexe 3.4.

La relation  $R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln ZC(t, T)$  conduit finalement à la courbe des taux dans le modèle de CIR, est alors :

$$R(t, T) = \frac{B(t, T)}{T-t} r_t - \frac{\ln A(t, T)}{T-t}$$

Ces deux modèles précédents présentent l'inconvénient de stabiliser la queue de la structure des taux. Le taux à long terme est réduit à une constante indépendante de la forme de la structure. Or, d'un point de vue purement économique, il n'est pas toujours approprié d'expliquer le marché des titres obligataires par une seule variable explicative, le taux sans risque instantané. Ces processus mono-factoriels, ne dépendant que d'une variable d'état, supposent une parfaite corrélation entre les taux  $r(t, T)$ , non satisfaite dans la pratique. Toutes ces limites ont poussé certains théoriciens à construire des modèles prenant en considération plusieurs facteurs.

## 1.4 La calibration du modèle de Vasicek

On rappelle que le modèle de Vasicek est pour modéliser le taux d'intérêt instantané  $r$  est :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

Malheureusement, cette équation est exprimée dans l'univers historique ne suffit pas à définir le prix des zéro-coupons, et doit être complétée par la forme de la prime de risque. Celle-ci est choisie constante dans le modèle de Vasicek, ce qui permet de conserver la même forme de la dynamique dans l'univers corrigé du risque. L'équation s'écrit dans ici :

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s$$

Où :  $r_0$  correspond au taux d'intérêt initial donné.

Les propriétés de l'intégrale d'une fonction déterministe par rapport à un mouvement brownien conduisent à la discrétisation exacte :

$$r_{t+\delta} = r_t e^{-a\delta} + b(1 - e^{-a\delta}) + \sigma \times \varepsilon \times \sqrt{\frac{1 - e^{-2a\delta}}{2a}}$$

Où :  $\varepsilon$  est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et  $\delta$  est le pas de discrétisation retenu.

$$r_{t+1} = r_t e^{-a} + b(1 - e^{-a}) + \sigma \times \varepsilon \times \sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}}$$

On reprend ici le cas simple de la modélisation du taux à court terme par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, comme dans le modèle de Vasicek ; la discrétisation exacte conduit à un processus auto-régressif d'ordre 1, AR(1).

L'estimation des paramètres du modèle s'effectue classiquement en régressant la série des taux courts sur la série décalée d'une période, que l'on écrit sous la forme usuelle :

$$Y = \alpha + \beta X + \sigma_1 \varepsilon$$

Avec

$$a = -\ln\beta, \quad b = \frac{\alpha}{1-\beta} \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 \left( \frac{2\ln\beta}{\beta^2-1} \right).$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) coïncide avec l'estimateur des moindres carrés ; on obtient ainsi les estimateurs suivants des paramètres du modèle d'origine :

$$\hat{a}_{exact} = -\ln\hat{\beta}, \quad \hat{b}_{exact} = \frac{\hat{\alpha}}{1-\hat{\beta}} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_{exact}^2 = \hat{\sigma}_1^2 \left( \frac{2\ln\hat{\beta}}{\hat{\beta}^2-1} \right).$$

En utilisant cette méthodologie, nous calibrerons le modèle de Vasicek à partir de courbe des taux de zéro-coupon qui sont projetés à compter de 2014.

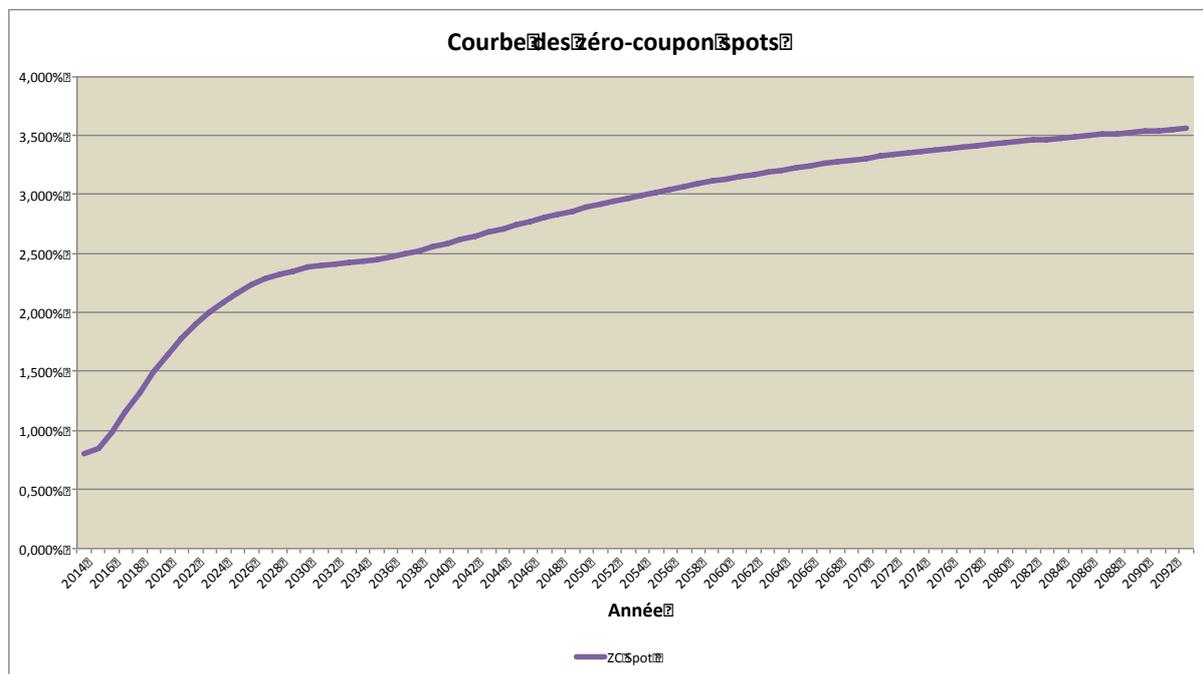


Figure : La courbe des zéro-coupon spots projetés de 2014 à 2093

Et nous obtenons les paramètres estimés suivants :

- $\hat{a} = 0,0502409$
- $\hat{b} = 0,0350237$
- $\hat{\theta} = \hat{a} \times \hat{b} = 0,0017596$
- $\hat{\sigma} = 0,0002266$

## 2. La modélisation des actions

Aujourd'hui le modèle de référence pour la modélisation du cours d'une action reste le modèle de Black et Scholes. Il a l'avantage d'être un modèle simple, facile à calibrer et à estimer en considérant que la trajectoire des rendements des prix des actifs financiers décrit un mouvement brownien. Mais l'utilisation de ce modèle implique des hypothèses assez restrictives, contredites par les observations empiriques et qui sont surtout de plus en plus critiquées.

En effet, la réalité montre que bien les queues de distribution des rendements empiriques sont plus épaisses que celles d'une loi-normale. Cet écart est notamment lié aux éléments suivants non pris en compte par ce modèle :

- Le cours d'une action n'est pas forcément continu : les cours des actions peuvent présenter des discontinuités
- La volatilité n'est pas réellement constante

Plusieurs autres modèles ont été développés pour mieux rendre compte de la réalité du marché, par exemple, le modèle de Merton qui permet d'intégrer des éventuelles discontinuités des cours et donne une queue de distribution plus lourde que le modèle de Black et Scholes.

## 2.1 Le modèle de Black et Scholes

Le modèle de Black et Scholes est le modèle de référence pour la modélisation de l'évolution du cours des actions. Ce modèle repose sur la résolution d'une équation différentielle stochastique (EDS), en supposant que le cours d'une action suit un mouvement brownien géométrique. Cette équation s'écrit pour tout instant  $t > 0$  :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t)$$

Où :

- $S(t)$  : le prix de l'action à la date  $t$
- $\mu$  : le rendement instantané de l'action
- $\sigma$  : l'écart-type du rendement instantané de l'action
- $W_t$  : un processus de mouvement brownien sous la probabilité  $P$

La solution de cette équation stochastique est de la forme :

$$S_t = S_0 \times \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

Cette solution montre que le processus des prix est log-normal. Par ailleurs, les rendements logarithmiques  $R(t)$  sont indépendants et identiquement distribués suivant une loi normale :

$$R(t) = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) \sim N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right)$$

Le modèle de Black et Scholes a l'inconvénient de ne pas représenter une queue de distribution assez lourde par rapport à la réalité et de ne pas tenir compte de la possibilité de sauts d'un cours boursier.

## 2.2 Le modèle de Merton

Le modèle de Merton introduit un saut via un processus de Poisson, dans la solution du modèle de Black et Scholes :

$$S(t) = S_0 \times \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) + \sum_{k=1}^{N(t)} U(k) \right]$$

Où :

- $N$  : un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$
- $U$  : une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi normale  $\mathcal{N}(\theta, \Omega)$
- Les processus  $W$ ,  $N$  et  $U$  sont mutuellement indépendants, par convention, on aura :

$$\sum_{k=1}^{N(t)} U(k) = 0 \text{ si } N(t) = 0$$

Dans ce modèle, le nombre de sauts suit un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda$ , et les discontinuités sont ici modélisées par des lois normales centrées de variance  $\Omega^2$ . C'est-à-dire que les sauts sont représentés symétriques et de moyenne nulle. Le cours de l'action peut donc avoir aussi bien une soudaine hausse qu'une soudaine baisse avec même probabilité et même intensité

## 2.3 La calibration du modèle de Black et Scholes

Pour la modélisation des actions, nous retenons le modèle de Black et Scholes dans la suite du mémoire. Nous faisons les hypothèses suivantes :

- Les actions de la compagnie d'assurance évoluent suivant l'indice CAC 40 ;
- La compagnie peut acheter et vendre sans frais de transactions autant d'actions qu'elle souhaite.
- Pas d'opportunité d'arbitrage

Nous avons vu que les rendements logarithmiques  $R(t)$  sont indépendants et identiquement distribués suivant une loi normale :

$$R(t) = \ln \left( \frac{S_{t+1}}{S_t} \right) \sim N \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2 \right)$$

En utilisant la méthode du maximum de vraisemblance, on a :

- $\hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} = \bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R(t)$     moyenne empirique
- $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R(t) - \bar{R})^2$     variance empirique

Cette formule de la variance empirique est un estimateur biaisé de la variance, on prendra pour nos estimations la formule de la variance non biaisé qui est donné ci-dessous :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R(t) - \bar{R})^2$$

*Tableau : Historique des cours du CAC40*

Année	Cours du CAC40 au 1er janvier	Cours du CAC40 au 31er décembre	Rendement logarithmique
1988	1000.00	1573.94	45.36%
1989	1573.94	2001.08	24.01%
1990	2001.08	1517.93	-27.63%
1991	1517.93	1765.66	15.12%
1992	1765.66	1857.78	5.09%
1993	1857.78	2268.22	19.96%
1994	2268.22	1881.15	-18.71%
1995	1881.15	1871.97	-0.49%
1996	1871.97	2315.73	21.27%
1997	2315.73	2998.91	25.85%
1998	2998.91	3942.66	27.36%
1999	3942.66	5958.32	41.29%
2000	5958.32	5926.42	-0.54%
2001	5926.42	4624.58	-24.80%
2002	4624.58	3063.91	-41.17%
2003	3063.91	3557.90	14.95%
2004	3557.90	3821.16	7.14%
2005	3821.16	4715.23	21.02%
2006	4715.23	5541.76	16.15%
2007	5541.76	5614.08	1.30%
2008	5614.08	3217.97	-55.65%
2009	3217.97	3936.33	20.15%
2010	3936.33	3804.78	-3.40%
2011	3804.78	3159.81	-18.57%
2012	3159.81	3641.07	14.18%

*Remarque : Le prix au 1<sup>er</sup> janvier N représente le prix au premier jour ouvré de l'année N et le prix au 31 décembre N représente le prix au dernier jour ouvré de l'année N. A fin d'avoir un pas régulier et annuel pour notre intervalle [0,T], nous avons considéré les prix au 31 décembre N et 1<sup>er</sup> janvier N+1 égaux.*

En appliquant ces formules aux données du tableau ci-dessus, on a les estimateurs suivants pour la moyenne et l'écart-type :

- $\hat{\mu} = 8.22 \%$
- $\hat{\sigma} = 24.71 \%$

### 3. La modélisation de l'immobilier

#### 3.1 Les deux types de modélisation

Après les actions et les obligations, l'immobilier constitue une catégorie d'investissement privilégiée des compagnies d'assurances. Deux types de modélisation peuvent être retenues pour ce type de placement.

- Une modélisation identique à celle des actions : Black et Scholes
- Une modélisation qui retient la dynamique suivante :

$$P_i(t) = (1 + \lambda) \times P_i(t - 1) + \sigma \varepsilon_t$$

Avec les notations suivantes :

- $P_i(t)$  : le prix de l'actif immobilier considéré à la date  $t$
- $\lambda$  : le taux de croissance du marché immobilier
- $\sigma$  : la volatilité du marché immobilier
- $\varepsilon_t$  : un bruit blanc gaussien

#### 3.2 La calibration du modèle de Black et Scholes

Le rendement de l'immobilier à la date  $t$  est égale à :

$$(Rdt)_t = \ln \frac{IPL_t}{IPL_{t-1}} \sim N \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2 \right)$$

Où :  $IPL_t$  représente l'indice des prix des logements, disponible en lecture directe dans les données de Friggit.

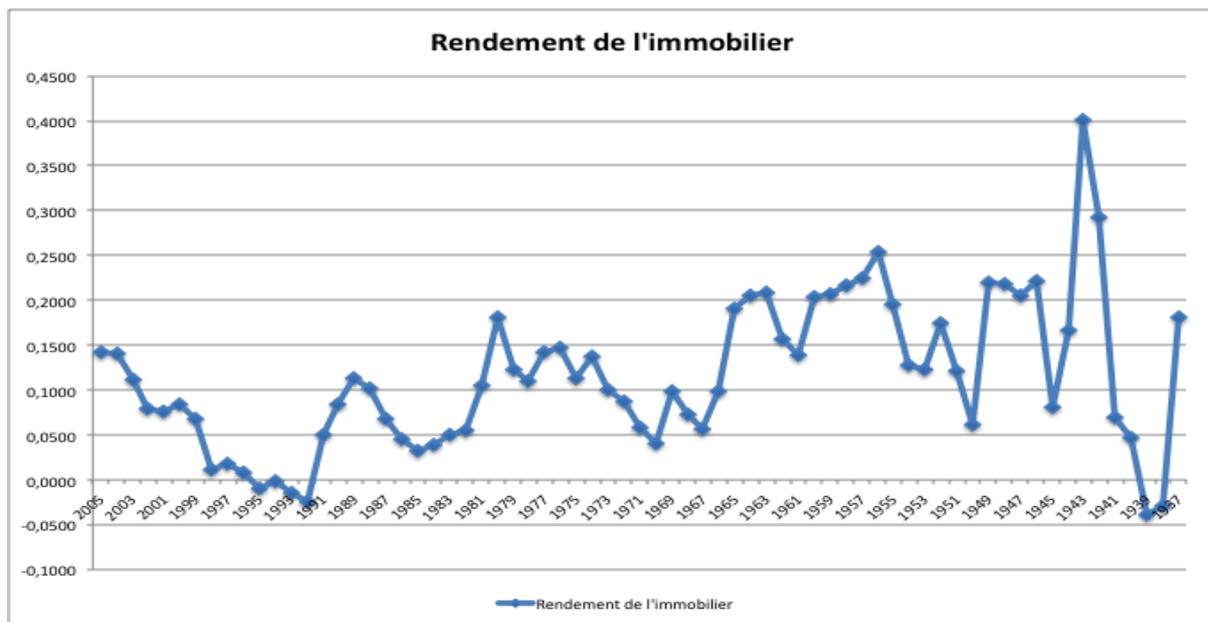


Figure : L'évolution des rendements de l'immobilier de 1937 à 2005

En appliquant la formule identique à celle des actions aux données de Friggit, on a les estimateurs suivants pour la moyenne et l'écart-type :

- $\hat{\mu} = 11.71 \%$
- $\hat{\sigma} = 8.30 \%$

#### 4. La modélisation de l'inflation

Pour un même sinistre survenant à des dates différentes, les montants versés en guise d'indemnisation sont sensiblement différents. De manière générale, les montants des règlements augmentent avec le temps. Ceux-ci peuvent dépendre de divers facteurs : des décisions politiques, de la jurisprudence, de l'évolution de la médecine, etc. Mais un facteur déterminant dans l'évolution des coûts est indéniablement l'inflation.

Il intervient dans les deux parties du bilan :

- A l'actif : l'observation des données fait apparaître un lien relativement fort entre l'évolution du taux d'inflation et celle du taux d'intérêt. Cette corrélation peut s'expliquer par le fait que le taux d'inflation d'une année considérée sert de base de renégociation des salaires de l'année suivante.
- Au passif : le règlement des sinistres peut s'étaler sur une période plus ou moins longue selon la branche considéré. Les montants indemnisés étant fonction de l'inflation, cette dernière va jouer sur le niveau de la provision pour sinistre à payer.

Il y a deux approches principales qui permettent de modéliser l'inflation :

- L'approche de Kaufmann
- L'approche de Wilkie

L'approche de Kaufmann propose d'exprimer le taux d'inflation en fonction du taux d'intérêt court terme de manière linéaire. En revanche, l'approche de Wilkie suppose que l'incertitude est contenue dans l'inflation, les taux d'intérêts étant exprimé à partir de l'inflation.

##### 4.1 L'approche de Kaufmann

De nombreux modèles ont été proposés dans la littérature pour rendre compte de l'inflation. Les acteurs choisissent de simuler la valeur du taux d'inflation ( $i_t$ ) à partir de celle du taux court terme ( $r_t$ ) par une relation suivante :

$$i_t = \alpha + \beta \times r_t + \varepsilon_t$$

Où :

- $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\sigma$  sont des paramètres qui peuvent être estimés à partir de données historiques
- et  $\varepsilon_t$  correspond à un bruit blanc de variance  $\sigma^2$

En effet d'un point de vue macroéconomique, par son action directe sur les taux d'intérêt à court terme, la banque centrale crée un lien entre les taux d'intérêt et les taux d'inflation. Intuitivement, si la banque centrale procède à une injection massive de monnaie, il devient alors plus facile de se procurer de l'argent, les taux à court terme baissent et le risque d'inflation augmente car l'argent devient un bien moins cher relativement aux autres. La banque centrale influence les taux courts pour empêcher l'inflation.

## 4.2 L'approche de Wilkie

Dans l'approche de Wilkie, le taux d'inflation joue un rôle majeur, dans la mesure où la valeur de nombreux paramètres économiques en découle. Ce modèle est principalement un modèle empirique qui opte pour un modèle autorégressif. L'évolution de ce processus est régie par l'équation suivante :

$$i_t - i_m = \alpha \times [i_{t-1} - i_m] + \sigma \times \varepsilon_t$$

Avec :

- $i_t$  : le taux d'augmentation de l'indice des prix à la consommation à la date  $t$
- $i_m$  : le taux d'inflation à long terme
- $\alpha$  : le coefficient de retour à la moyenne
- $\sigma$  : l'écart-type du bruit
- $\varepsilon$  : la variable aléatoire distribuée selon une loi normale centrée réduite

## **PARTIE III : LES LEVIERS DE LA VALEUR D'UN PORTEFEUILLE RETRAITE**

## CHAPITRE 1. Calcul de la New Business Margin (NBM)

La formule de calcul de NBM est :

$$NBM_t = \frac{\sum_{k=0}^t (ResultatNet_k \times FacteurActualisation_k)}{APE}$$

Où :

- $t$  : l'échéance d'un contrat retraite
- $APE$  (Annualized Premium Equivalent) : la cotisation de la 1<sup>ère</sup> année l'horizon de calcul
- $FacteurActualisation = 1/(1 + TauxZC_k)^k$ , c'est-à-dire que le résultat est actualisé au taux sans risque

### 1. Annualized Premium Equivalent (APE)

Annualized Premium Equivalent (APE), c'est la prime annualisée des nouveaux contrats. Les cotisations sont assises sur les salaires bruts perçus par les salariés de l'entreprise. Le montant des cotisations dues par l'entreprise est égal au produit de chaque tranche de salaire brut versé par le taux contractuel.

Ce salaire est divisé en trois tranches :

- Tranche A : Partie de la rémunération limitée au Plafond Annuel de la Sécurité Sociale (PASS).
- Tranche B : Partie de la rémunération comprise entre une fois et quatre fois le Plafond de la Sécurité Sociale
- Tranche C : Partie de la rémunération comprise entre quatre fois et huit fois le Plafond de la Sécurité Sociale

La formule de la cotisation annuelle est la suivante :

- ❖ Si nous sommes exactement en année de calcul, alors la cotisation de cette année est :

$$Cotisation = (Cotisation TA + Cotisation TB + Cotisation TC) \times Effectif des salariés$$

Où :

- Cotisation TA = Max [0; TA × Min (PASS; S)]
- Cotisation TB = Max [0; TB × Min (3 × PASS; S - PASS)]
- Cotisation TC = Max [0; TC × Min (4 × PASS; S - 4 × PASS)]
- TA/TB/TC : les taux de cotisations par les trois tranches
- ❖ Si l'année en vigueur est après l'année de départ à la retraite, alors nous sommes dans la phase de restitution. C'est-à-dire que la personne est déjà en retraite et il n'y a pas de cotisation à payer pour le moment.

- ❖ Si l'année en vigueur est avant l'année de départ à la retraite, alors nous sommes dans la phase de constitution et la cotisation est égale à :

$$Cotisation\ annuelle_t = (1 - \text{taux de réduction}_t) \times Cotisation\ annuelle_{t-1}$$

Où :

- Taux de réduction  $t$  : le pourcentage des salariés qui quittent l'entreprise en année  $t$  en vigueur (cf. Annexe 2)
- Cotisation annuelle $_{t-1}$  : la cotisation de l'année précédente

## 2. Le résultat net

Le résultat net de l'assureur de l'exercice  $t$  est égal :

- ❖ Si la somme de tous les produits est supérieure à la somme de toutes les charges, alors l'assureur a un bénéfice sur lequel est prélevé un impôt sur les sociétés (IS) avec un taux d'IS de 34,43%.

$$Résultat\ Net_t = (\sum Produits_t - \sum Charges_t) \times (1 - \text{Taux d'IS})$$

- ❖ Sinon, l'assureur perd l'argent et il n'y a pas d'imposition.

$$Résultat\ Net_t = (\sum Produits_t - \sum Charges_t)$$

### Produits et charges analytiques

<u>Charges</u>	<u>Produits</u>
Commission sur cotisation de l'apporteur	Chargements sur cotisations
Taxes & Impôts	Chargements sur encours de l'épargne en fonds euro
Marge de solvabilité en Solvabilité 1	Chargements sur encours de l'épargne en fonds UC
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Coût de la marge de solvabilité (y compris IS)</li> <li>• Coût d'acquisition de l'assureur</li> </ul>	Rétro-commission financière en UC
Frais de gestion en phase de constitution	Frais de gestion des arrérages
Frais de gestion en phase de restitution	Chargements sur encours des PM des arrérages
	Rendement de marge de solvabilité
	Marge financière
<b>Total des charges</b>	<b>Total des produits</b>

*Compte de résultat d'un portefeuille d'assurance vie*

<u>Charges</u>	<u>Produits</u>
Prestations PM Clôture	Primes acquises  PM Ouverture Intérêts techniques incorporés aux PM PB incorporé aux PM
<b>Sous-total 1 : marge technique avant frais et commissions</b>	
Frais d'acquisition Frais d'administration Commissions d'acquisition Commissions sur encours Autres produits / charges techniques	
<b>Sous-total 2 : marge technique après frais et commissions (résultat technique)</b>	
Participation aux résultats	Produits nets des placements
<b>Sous-total 3 : marge financière</b>	
Prestations cédés PM cédé Frais cédés Commissions cédés Participation aux résultats cédés	Primes cédés PM ouverture cédé  Produits nets des placements cédés
<b>Sous-total 4 : résultat brut d'affaire directe ou d'acceptation (résultat technique + marge financière)</b>	
<b>Sous-total 5 : résultat de cession (si des éléments du compte de résultat sont cédés en réassurance)</b>	
	Autres produits / charges exceptionnelles Autres produits / charges non techniques Rémunération des fonds propres
<b>Sous-total 6 : résultat opérationnel courant</b>	
	Impôts
<b>Sous-total 7 : résultat net après impôt</b>	

De toute façon pour le calcul de la NBM, c'est le tableau ci-dessus qui est projeté auquel on va faire des contrôles.

Par exemple, Marge technique avant frais = Prime – prestation + PM ouverture – PM clôture + Intérêt technique + PB incorporé ; on a aussi (vision analytique) Marge technique = chargement sur prime + chargement sur prestation + chargement sur PM ou encours.

## 2.1 Total des produits de l'exercice t

Le total des produits de l'exercice t g é n é r é l é s par l'affaire nouvelle est la somme des é l é m e n t s suivants :

- Chargement sur cotisations
- Chargement sur encours fonds d'Euro (Euro)
- Chargement sur encours Unit é de Compte (UC)
- Chargement sur arr é g e s
- Chargement sur encours arr é g e s
- Produits financiers non distribu é s
- R é t r o - c o m m i s s i o n
- Rendement de la marge de solvabilit é

### *Formules des produits de l'exercice t*

Produits <sub>t</sub>		D é t a i l s d e s p r o d u i t s <sub>t</sub>
<b>Chargement sur cotisations</b>	=	Cotisation annuelle × TauxChargementCotisation
<b>Chargement sur encours Euro</b>	=	PM_Euro × TauxChargementEncoursEuro
<b>Chargement sur encours UC</b>	=	PM_UC × TauxChargementEncoursUC
<b>Chargement sur arr é g e s</b>	=	Arr é g e V e r s é e × TauxChargementArr é g e s
<b>Chargement sur encours arr é g e s</b>	=	PM_RenteEuro × TauxChargementEncoursRente
<b>Produits financiers non distribu é s</b>	=	PM_Euro × TauxRendementFinancierFondsConstitution × (1-TauxDistributionProduitFinancierFondsConstitution) + PM_RenteEuro × TauxRendementFinancierFondsRestitution × (1-TauxDistributionProduitFinancierFondsRestitution)
<b>R é t r o - c o m m i s s i o n</b>	=	PM_UC × TauxRetro-commissionUC
<b>Rendement de la marge de solvabilit é</b>	=	PM_Euro × TauxBesoinFondsPropreFonds_Euro × TauxRendementFinancierFondsPropre + PM_UC × TauxBesoinFondsPropre_UC × TauxRendementFinancierFondsPropre + PM_RenteEuro × TauxBesoinFondsPropreFonds_EncoursRente × TauxRendementFinancierFondsPropre

## 2.2 Total des charges de l'exercice t

Le total des charges de l'exercice t générées par l'affaire nouvelle égale à la somme des éléments suivants :

- Commissions sur cotisations
- Commissions exceptionnelles sur cotisations
- Commissions sur encours
- Commissions exceptionnelles sur encours
- Frais d'acquisition
- Frais généraux
- Coût d'immobilisation marge solvabilité

### *Formules des charges de l'exercice t*

Charges <sub>t</sub>	=	Détails des charges <sub>t</sub>
<b>Commissions sur primes</b>	=	PrimeBrute × TauxCommissionPrime
<b>Commissions exceptionnelles sur primes</b>	=	PrimeBrute × TauxCommissionExceptionnellePrime
<b>Commissions sur encours</b>	=	PM_Euro × TauxCommissionPM_Euro + PM_RenteEuro × TauxCommissionPM_RenteEuro
<b>Commissions exceptionnelles sur encours</b>	=	PM_UC × TauxCommissionExceptionnellePM_UC
<b>Frais d'acquisition</b>	=	PrimeBrute × TauxFraisAcquisitionPrime
<b>Frais généraux</b>	=	CoûtUnitairePM_Euro × NbreContratPM_Euro + CoûtUnitairePM_UC × NbreContratPM_UC + CoûtUnitairePM_RenteEuro × NbreContratPM_RenteEuro
<b>Coût d'immobilisation marge solvabilité</b>	=	RendementMargeSolvabilité / (1 – Taux d'IS)

Enfin, nous pouvons obtenir le résultat net de l'exercice t. Donc, pour les 50 exercices de projection, la NBM est de :

$$NBM = \frac{\sum_{t=1}^{50} (ResultatNet_t \times FacteurActualisation_t)}{APE}$$



## CHAPITRE 2. Les hypothèses financières et techniques

Lors de la tarification d'une affaire nouvelle, l'assureur doit déterminer la rentabilité de l'opération. La rentabilité est calculée en fonction de la NBM (New business Margin). Avant de faire ce calcul précis, il est obligatoire de définir certaines d'hypothèses pour construire un modèle économique.

Les hypothèses influencent les engagements de l'assureur vis-à-vis de ses assurés. Il existe différentes techniques pour le choix des hypothèses, celles-ci entraînent des montants d'engagements différents bien que le calcul soit le même. En réalité on peut distinguer deux grands contextes : l'un est le marché financier mondial, l'autre est la situation propre d'une entreprise qui concurrence les autres compétiteurs. Pour cela, l'assureur a pour objectif de présenter des propositions à la fois rentables et compétitives.

### 1. Hypothèses financières au sens de scénario déterministe

Dans cette partie, il permet de projeter l'évolution des actifs et des passifs période par période en fonction de scénarios déterministes décrivant l'évolution des marchés financiers.

Le terme de scénario déterministe s'applique aux scénarios économiques définis arbitrairement par l'analyse actif passif (ou par les autorités de tutelle) par opposition aux scénarios stochastiques générés aléatoirement.

Le scénario de référence, généralement qualifié de scénario central, correspond à une situation «moyenne » et stable des marchés financiers. Son utilité principale est de constituer une référence pour mesurer la variation des résultats. Il est plus simple d'utiliser un scénario de parfaite continuité (taux et inflation inchangés, croissance moyenne de la bourse), c'est-à-dire que les marchés financiers conservent leur position ou leur tendance sans forte variation, ou de retour à des moyennes long terme.

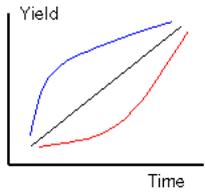
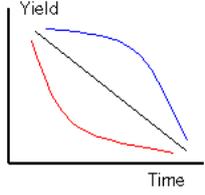
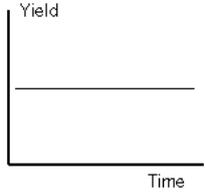
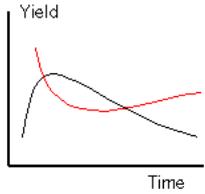
Sous la condition de scénario central, les hypothèses déterministes sont calculées : d'une part, le calcul de la valeur NBM par les équipes de Souscription Retraite; d'autre part, le calcul de provisions spécifiques par les Etudes d'Inventaires. Toutes ces hypothèses sont construites pour l'année 2013.

#### 1.1 Projection de courbe des rendements

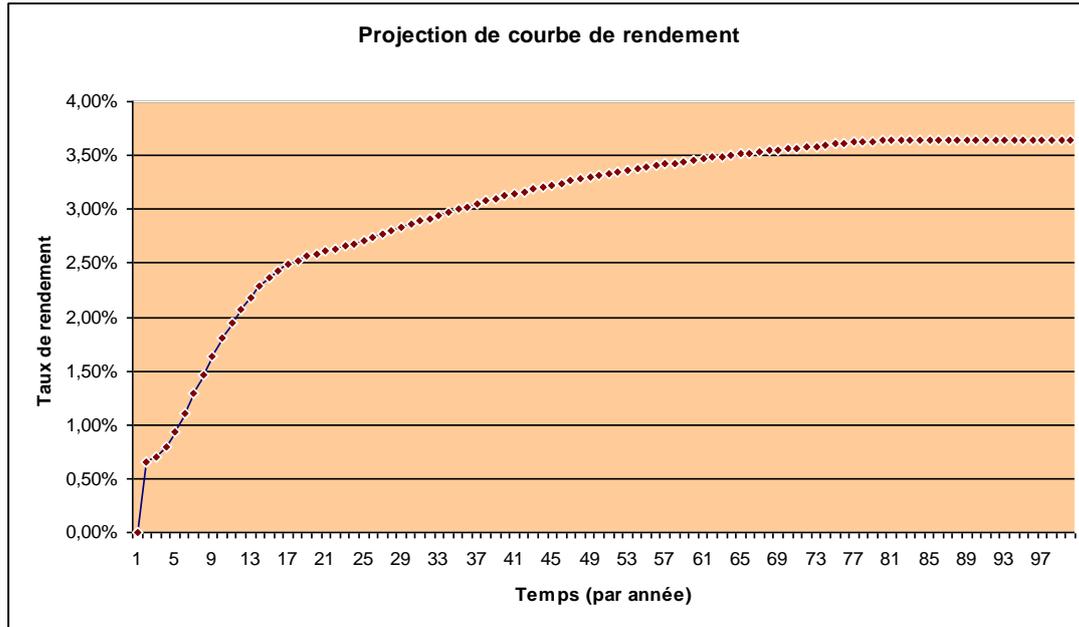
La structure des taux ou courbe des rendements est une représentation graphique de la relation entre le rendement et les dates de maturité pour un même type d'instrument. Elle donne aussi la relation à un moment donné entre la longueur de l'investissement et le rendement. Cette relation change dans le temps. La courbe des rendements est utilisée pour

comparer des titres, pour comparer des taux à une référence et pour mettre en évidence des aberrations du marché

La courbe des taux peut avoir une variété de formes. Les plus rencontrées sont :

Courbes des rendements	Description
	<p><b>Courbe ascendante</b></p> <p>C'est la forme traditionnelle rencontrée dans les pays développés. Cette courbe montre que le rendement augmente avec la longueur de l'investissement.</p>
	<p><b>Courbe descendante</b></p> <p>Cette courbe montre des taux à court terme plus élevés que les taux à long terme. On rencontre souvent cette courbe quand le marché anticipe une baisse des taux.</p>
Courbes des rendements	Description
	<p><b>Courbe plate</b></p> <p>Cette courbe montre des taux à court terme identiques aux taux à long terme.</p>
	<p><b>Courbe en cloche</b></p> <p>On rencontre souvent cette courbe quand le marché anticipe dans un premier temps une baisse (hausse) des taux et ensuite une hausse (baisse) des taux.</p>

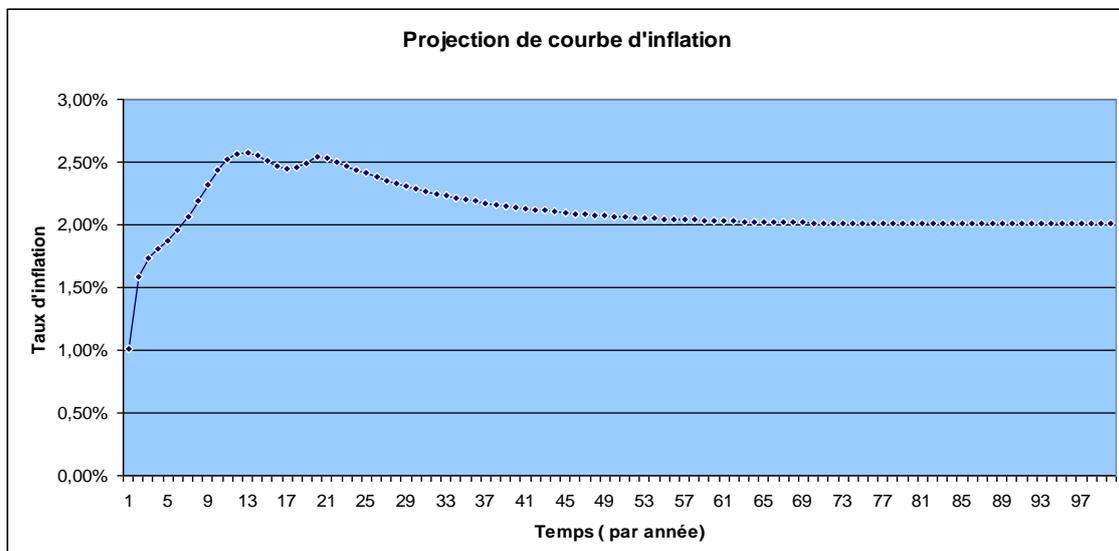
Dans l'étude ici, concentrée sur le scénario central (scénario de référence), nous faisons la projection sur la courbe de rendement.



Ce graphique représente la courbe ascendante des rendements anticipés pour les années futures. Il commence par un taux de rendement nul (0,00 %) en 2013, qui monte année par année jusqu'à se stabiliser à horizon 60 ans.

## 1.2 Projection de courbe d'inflation

L'inflation correspond à l'augmentation généralisée et durable des prix. L'institut national de la statistique et des études économiques (INSEE) fait paraître chaque mois un indice des prix à la consommation en observant les variations de prix mensuelles sur un même produit de consommation. Le taux d'inflation est alors établi en fonction de l'évolution de l'indice des prix à la consommation. Chaque début d'année, il est fait une moyenne des taux d'inflation mensuels afin d'obtenir un taux représentatif de l'ensemble de l'année passée.



Nous constatons un impact d'inflation important à court terme. En année 2013 (le début de cette projection), la valeur de l'inflation est de **1,02 %**. Elle va augmenter fortement pendant les années suivantes, puis se stabiliser sur le long terme.

## 2. Hypothèses financières dans le cas de scénarios stochastiques

Dans la partie précédente, nous avons présenté les quatre différents modèles d'actifs : modèle d'actifs des taux d'intérêt, modèle d'actifs des obligations, modèle d'actifs des actions et modèle d'actifs des placements monétaires. Pour appliquer la NBM sur les scénarios stochastiques, d'abord, nous choisissons les trois classes principales d'actifs : les obligations de zéro-coupon, les actions et l'immobilier.

Pour rappeler les modèles et les paramètres estimés, on réécrit :

- ❖ Les taux des obligations de zéro-coupon à partir du modèle Vasicek:

$$r_{t+1} = r_t e^{-a} + b(1 - e^{-a}) + \sigma \times \varepsilon \times \sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}}$$

Avec les paramètres estimés suivants selon la méthode présentée à la partie précédente :

- $\hat{a} = 0,0502409$  : le vitesse de retour du taux instantané vers  $b$
- $\hat{b} = 0,0350237$  : le taux moyen à long terme
- $\hat{\sigma} = 0,0002266$  : la volatilité du processus

- ❖ Les prix des actions selon le modèle de Black et Scholes:

$$S_t = S_0 \times \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

Avec les estimateurs suivants pour la moyenne et l'écart-type :

- $\hat{\mu} = 8.22 \%$  : le rendement instantané de l'action
- $\hat{\sigma} = 24.71 \%$  : la volatilité du rendement instantané de l'action

- ❖ Les indices des prix de logement à partir du modèle de Black et Scholes:

$$IPL_t = IPL_0 \times \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

Avec les estimateurs suivants pour la moyenne et l'écart-type :

- $\hat{\mu} = 11.71 \%$  : le rendement instantané du logement
- $\hat{\sigma} = 8.30 \%$  : la volatilité du rendement instantané du logement

Ensuite, nous utilisons les paramètres estimés obtenus indiqués au-dessus pour avoir les taux des zéro-coupons ( $r_t$ ), les prix des actions ( $S_t$ ) et les indices des prix de logement ( $IPL_t$ ) (cf. Annexe 4). Et plus, il faut obtenir les rendements moyens sur l'ensemble de ces trois classes pour les utiliser dans le calcul de NBM, c'est-à-dire que le «TauxRendementAnnée» présenté dans les formules des PM (cf. 2.3 «Formules d'évolution de la PM»), mais cela nécessite une règle d'allocation stratégique. Pour calculer les rendements moyens, cette allocation stratégique est définie suivante :

- 80 % de rendement des obligations
- 15 % de rendement des actions
- 5 % de rendement de l'immobilier

C'est-à-dire que le taux de rendement de l'année  $t$  pour un scénario  $i$  est de :

$$TauxRendementAnnée_t = \text{Max} \left( 0; 80\% \times r_t + 15\% \times \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} + 5\% \times \frac{IPL_t - IPL_{t-1}}{IPL_{t-1}} \right)$$

Nous utilisons toutes les formules indiquées au chapitre 1 «Calcul de la NBM» pour obtenir la NBM stochastique  $i$  sauf que nous devons mettre la série des «TauxRendementAnnée» en aléatoire. Afin de converger les NBMs stochastiques, nous construisons 2000 simulations.

Enfin, nous calculons la NBM moyen (noté :  $\overline{NBM}$  et appelé «NBM stochastique») qui est égal à la moyenne des 2000 NBMs stochastiques et leur écart-type, i.e.,

$$\overline{NBM} = \frac{\sum_{i=1}^{2000} NBM_i}{2000}$$

Où :  $NBM_i$  est une NBM d'un scénario stochastique  $i$  avec  $i = 1, 2, \dots, 2000$

Dans le scénario stochastique, les paramètres qui deviennent être aléatoires sont : les taux de rendement des obligations, les taux de rendement des actions et les taux de rendement de l'immobilier. Alors, c'est la série de «TauxRendementAnnée» devient être stochastique.

Par contre, les paramètres suivants restés déterministes, soit dans le scénario déterministe, soit dans le scénario stochastique :

- Les paramètres contractuel de produits : taux de chargement contractuel (taux de chargement sur primes, taux de sur encours, taux de distribution financier) ;
- Les paramètres de frais : taux de commission, taux de frais d'acquisition, coût unitaire de gestion, taux de marge de solvabilité, taux d'impôt sur les sociétés ;
- La dynamique du portefeuille : loi de chute des primes, espérance de vie (table de mortalité fixe) ;
- Taux d'inflation, facteur d'actualisation du résultat.

### 3. Hypothèses de frais généraux et frais d'acquisition

Le calcul de l'engagement de l'assureur est constitué de 2 phases :

- Phase de constitution ou phase d'épargne : c'est une période d'activité où l'employeur paye les cotisations. Sur le produit d'Article 83, la constitution progressive d'une épargne est sur un compte individualisé pour chaque salarié et ses droits acquis sont définitifs, même en cas de changement d'entreprise en cours de carrière.
- Phase de restitution ou phase de rente : c'est une période après le départ à la retraite et les sociétés d'assurance vont payer les rentes aux assurés. Dans le produit à cotisations définies, l'épargne constituée est versée sous forme de rente viagère aux assurés (ou au bénéficiaire de la réversion le cas échéant).

Donc, les hypothèses nécessaires au calcul des engagements de l'Article 83 doivent inclure les deux phases en même temps afin de calculer la NBM.

L'exemple d'hypothèses :

- Pas de transfert entrant (Actif salariés)
- Frais d'acquisition en pourcentage de la prime de 1<sup>ère</sup> année (Exemple : 19 %)
- Coût unitaire de gestion par assuré en constitution fonds Euro (Exemple : 20 €)
- Coût unitaire de gestion par assuré en constitution fonds UC (Exemple : 20 €)
- Coût unitaire de gestion par assuré en restitution fonds Euro (Exemple : 20 €)

#### Frais de gestion

Typologie du produit	Clés des coûts	Coût unitaire
Rentes (Phase de restitution)	0,6	20 €
Fonds en Euro (Phase de constitution)	1	20 €
Fonds en Unités de compte (Phase de constitution)	2	20 €

Les taux d'inflation explicites sont utilisés pour valoriser chaque année les coûts unitaires de gestion par assuré. Le coût unitaire de l'année  $n$  est :

$$CoutUnitaire_n = CoutUnitaire_{n-1} \times TauxInflation_n$$

## 4. Les autres hypothèses

- ❖ Taux d'actualisation des résultats de l'exercice à long terme (au-delà de 10 ans) = hypothèse de taux sans risque + hypothèse de prime de risque (Exemple : 5 % = 2 % + 3 %)
- ❖ Taux d'immobilisation pour marge de solvabilité en Solvabilité I (Exemple : 4 % en Euro et 1 % en UC)
- ❖ L'impôt sur les sociétés (IS) est prélevé sur les bénéfices réalisés par les entreprises de capitaux exploitées en France et représente une part importante de la fiscalité française. Il est soumis à un régime de déclarations et de paiements à dates fixes.

Le taux normal de l'IS est de 33,33 %. Il s'applique aux sociétés qui réalisent plus de 7,63 millions d'€ de chiffre d'affaires annuel hors taxe, mais il peut être augmenté de majorations. Ici, nous faisons une hypothèse qui définit le taux d'imposition sur les sociétés (I.S.) étant de **34,43 %** en 2013.

- ❖ En résumé

Taux d'actualisation de résultat de l'exercice à long terme	5 %
Taux de marge de solvabilité en fonds € (Solvabilité 1)	4 %
Taux de marge de solvabilité en UC (Solvabilité 1)	1 %
Taux IS	34,43 %

- ❖ Tables de mortalité utilisées :
  - TH00-02 et TF00-02 pour la phase de constitution
  - TGH05-TGF05 pour la phase de restitution

## CHAPITRE 3. Etudes de cas

Dans cette partie, le calcul de la NBM sera étudié pour un nouveau contrat. Il y aura une présentation de la démographie de ce contrat, la proposition tarifaire et les hypothèses de projection du résultat net.

### 1. La démographie

Les paramètres suivants sont définis par l'assuré dans la demande de tarification, un exemple sera présenté avec des données démographiques (cf. Annexe 1) :

<i>Données démographiques fournies</i>	
Année de calcul	2013
Effectif global	46 Salariés
PASS en année de calcul	37 032 €
Salaire moyen	32 873 €
Age au départ	62 ans
Age moyen	39 ans
Tranche A	5.00%
Tranche B	5.00%
Tranche C	5.00%

### 2. Proposition tarifaire et paramètres NBM

<b>PRODUITS</b>	
<b>&gt;Phase de constitution</b>	
Chargements sur Cotisations	3,50%
Chargements sur encours (Épargne €)	0,60%
Chargements sur encours (Épargne U.C)	0,60%
Encours : Part €	100,00%
<b>&gt;Phase de restitution</b>	
Frais de gestion des rentes (appliqués au Capital Constitutif)	2,00%
Chargements sur encours (PM des rentes)	0,60%
<b>CHARGES</b>	
<b>&gt;Commissions d'Apporteur</b>	
Commission sur Cotisations	3,00%

Lors de souscription d'un contrat, l'assureur perçoit 3,50 % (taux de frais sur cotisations) des cotisations encaissées annuelles aux assurés et reverse 3,00 % (taux de commission sur cotisations) à un apporteur (un courtier) à titre de commission.

Les chargements sur encours dans la phase de constitution ou restitution sont les frais de gestion de l'assureur pour gérer une opération.

Selon le profil liberté de gestion, l'assuré peut, selon la répartition de son choix, sélectionner un ou plusieurs supports. Dans ce cas-là, la part d'encours en fonds euro est déterminée par l'assuré. Elle signifie que l'assuré veut mettre combien de pourcentage d'un investissement en fonds euro, et le reste en unités de compte. A cause de risque d'unités de compte, l'assuré veut mettre plus en fonds euro.

Paramètres nécessaires pour calculer la NBM

Année de la simulation	2013
Actualisation à long terme (au-delà de 10 ans)	5 %
Taux de Participation aux bénéficiaires brut long terme (au-delà de 10 ans)	4,04 %
Taux de rendement moyen brut des actifs en UC (long terme)	4,05 %
Taux de réversion	60 %
Périodicité de la rente	Annuelle
Rétro-commission financière (UC)	0,91 %
Taux de rémunération des capitaux propres hors I.S	4,04 %
Taux de marge de solvabilité en fonds € (Solvabilité 1)	4,00 %
Taux de marge de solvabilité en UC (Solvabilité 1)	1,00 %
Taux I.S	34,43 %
Taux de chute des cotisations futures	Loi de chute
Coût de la garantie de table	0,15 %
Taxe	0,16 %
Part du taux de Participation aux bénéficiaires brut distribué	95,00%

La rétro-commission financière (UC) : lors de versement des primes par l'employeur, l'assureur encaisse les primes, et ventile celles-ci sur le compte de l'assuré et transfère les primes au gestionnaire d'actif (Asset Management). Ensuite, les primes sont investies par ce dernier sur les marchés financiers qui vont prélever les frais pour l'assureur. Enfin, les marchés financiers vont garder une partie des frais pour leur activité de gestion financière et donner le reste à l'assureur.

La part du taux de Participation aux bénéficiaires brut distribué varie entre 85 % et 100 %.

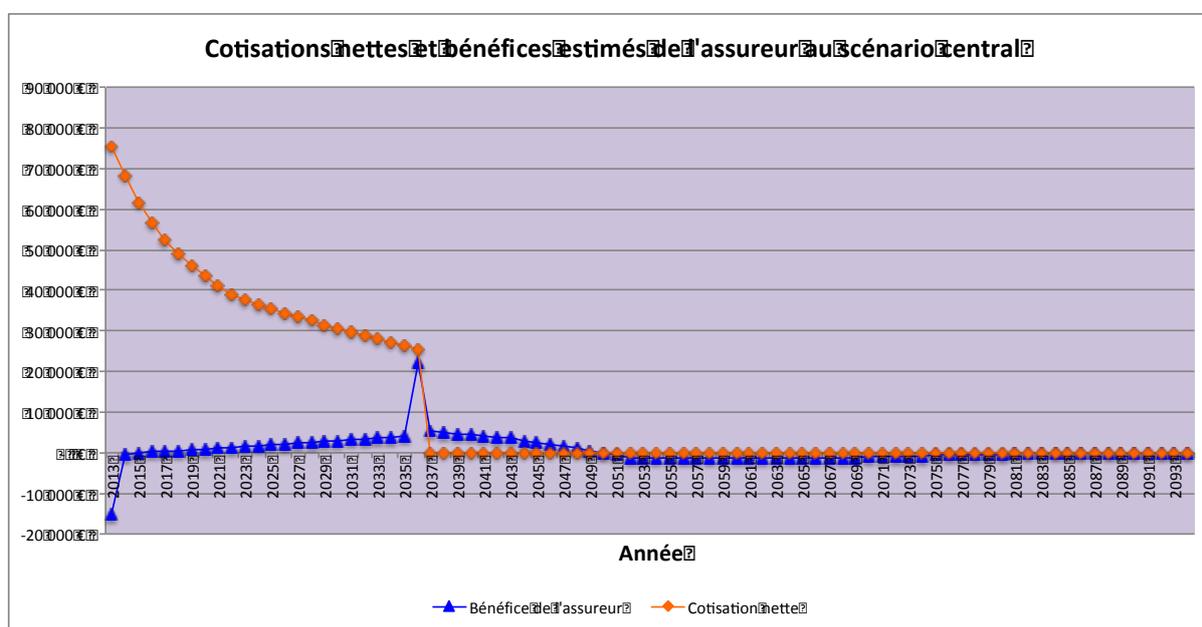
### 3. Projection r é s u l t a t e n s c é n a r i o d é t e r m i n i s t e

#### 3.1 La situation initiale

Selon tous les paramètres et les hypothèses présentés avant, nous calculons la NBM en utilisant toutes les formules fournies dans la partie «Calcul de la NBM ». Alors, nous obtenons la NBM de base au scénario déterministe, appelé «NBM déterministe » et noté  $NBM_0$ , dans l'horizon de 90 ans étant :

$$NBM_0 = 49,53\%$$

Le résultat net ayant cette NBM possède une tendance croissante à long terme :



Dans cette population, l'âge moyen est de 39 ans en 2013. Nous pouvons calculer l'année de naissance moyenne qui est égale à 1974 pour l'ensemble des assurés. Donc, l'année de départ à la retraite est de 2036.

Dans ce graphique, les cotisations annuelles baissent au fil du temps. A cause du départ à la retraite, le nombre de cotisants diminue, c'est-à-dire que de moins en moins des assurés cotisent, alors le montant des cotisations annuelles va baisser. En 2036 (année de départ), aucun assuré cotise et la cotisation est de 0.

Avec ces taux, nous faisons une projection du résultat net dans les années futures. Les montants du résultat net de cet assureur sont positifs, donc ce nouveau contrat sera rentable pour l'assureur.

## 3.2 Les impacts des leviers

Lors de changement d'un paramètre (coût, taux de participation aux bénéficiaires, frais, etc.), quel impact cela aura sur la rentabilité d'un portefeuille de l'assureur ?

Dans les ressources de l'assureur, il existe certaines limites pour les frais sous les contraintes commerciales :

- taux de frais sur cotisations :  $\leq 4,50 \%$
- taux de frais sur arr êge :  $\leq 3,00 \%$
- taux de frais sur encours :  $\leq 1,00 \%$

### 3.2.1 Impact d'évolution tarifaire

#### 1) Une augmentation du taux de frais sur cotisations

Lors d'une augmentation de 0,10 % du taux de frais sur cotisations sachant que la commission sur cotisations à l'apporteur ne bouge pas, i.e. le taux de frais sur cotisations varie de 3,50 % à 3,60 %, il y a un impact positif sur la NBM. Car plus l'assuré cotise et les chargements sont suffisamment élevés, i.e. l'assureur gagne plus, donc, plus il y aura de NBM.

Dans la même population avec cette variation du taux de frais sur cotisation, nous avons :

$$NBM_1 = 50,21 \%$$

Et le taux d'évolution de la NBM est de :

$$\Delta NBM_1 = \frac{NBM_1}{NBM_0} - 1 = \frac{50,21\%}{49,53\%} - 1 = 1,37\%$$

Donc, le taux de frais sur cotisations et la NBM ont une relation légèrement positive.

#### 2) Une augmentation du taux de frais sur arr êges

Par exemple, Le taux de frais sur arr êges est de 2,10 % au lieu de 2,00 %, cette variation entraîne une augmentation de la NBM, car l'assureur va percevoir plus de frais de gestion des rentes à la date de départ. Donc, la  $NBM_2$  est de :

$$NBM_2 = 50,10 \%$$

Et le taux d'évolution de la NBM est de :

$$\Delta NBM_2 = \frac{NBM_2}{NBM_0} - 1 = \frac{50,10\%}{49,53\%} - 1 = 1,15\%$$

Selon les deux études de cas en scénario déterministe, l'évolution de la NBM en phase de constitution ( $\Delta NBM_1$ ) est plus grande que celle en phase de restitution ( $\Delta NBM_2$ ). Donc, la phase de constitution est plus importante pour l'assureur.

### 3) Une augmentation du taux de frais sur encours

Lors d'une hausse du taux de frais sur encours de 0,60 % à 0,70 %, c'est-à-dire que l'assureur augmente ses frais de gestion et gagne plus d'argent. Donc, la NBM va varier dans le même sens.

$$NBM_3 = 61,30 \%$$

La variation de la NBM est de :

$$\Delta NBM_3 = \frac{NBM_3}{NBM_0} - 1 = \frac{61,30\%}{49,53\%} - 1 = 23,76\%$$

Quand le taux de frais sur encours augmente de 0.1 %, la NBM a une forte augmentation.

### 4) Taux de distribution de participation aux bénéfices

Si le taux de distribution varie de 95 % à 93 %, alors l'assureur va distribuer moins de bénéfices lors que son résultat net est rentable. La  $NBM_4$  est de :

$$NBM_4 = 56,87 \%$$

La variation de la NBM est de :

$$\Delta NBM_4 = \frac{NBM_4}{NBM_0} - 1 = \frac{56,87\%}{49,53\%} - 1 = 14,82\%$$

Quand le taux de distribution devient plus favorable à l'assureur de 2 %, la NBM a une forte augmentation.

## 3.2.2 Impact de frais

### 5) Coût unitaire par contrat

C'est un coût de gestion pour l'assureur qui ne peut pas bouger fortement tout le temps, donc il peut être un levier à long terme pour la NBM.

Par exemple, nous diminuons le coût unitaire par contrat de 20 € à 18 €, la  $NBM_5$  est de :

$$NBM_5 = 52,88 \%$$

Le taux d'évolution de la NBM est de :

$$\Delta NBM_5 = \frac{NBM_5}{NBM_0} - 1 = \frac{52,88\%}{49,53\%} - 1 = 6,76\%$$

Lors d'une diminution de coût de gestion par rapport à l'assureur, c'est-à-dire que les charges de l'assureur baissent et le résultat net va augmenter, donc la NBM de l'assureur va augmenter.

## 6) Frais d'acquisition

Le frais d'acquisition de la prime n'est payé qu'une fois à l'assureur dans la 1<sup>ère</sup> année (l'année de souscription). Si nous baissions le taux de frais d'acquisition de 1 % par rapport à la situation initiale (19 %), soit 18 %, alors la  $NBM_6$  va être :

$$NBM_6 = 50,53 \%$$

Le taux d'évolution de la NBM est de :

$$\Delta NBM_6 = \frac{NBM_6}{NBM_0} - 1 = \frac{50,53\%}{49,53\%} - 1 = 2,02\%$$

Lors d'une diminution de taux de frais d'acquisition de la prime, l'assureur va payer moins de frais pour acheter ce contrat, donc la NBM va augmenter aussi.

En synthèse, les scénarios pertinents sont :

	Proposition la meilleure pour l'assuré	Proposition tarifaire	Sensibilité proposition tarifaire	Proposition la meilleure pour l'assureur
Taux de frais sur cotisations	0,00 %	3,50 %	3,60 %	4,50 %
Taux des arrérages	0,00 %	2,00 %	2,10 %	3,00 %
Taux de frais sur encours	0,00 %	0,60 %	0,70 %	1,00 %
Taux de participation aux bénéficiaires distribués	100,00 %	95,00 %	93,00 %	90,00 %

### 3.2.3 Impact de population

#### 7) Une population plus jeune

Nous construisons une population plus jeune avec l'âge moyen de 35 ans et les autres paramètres sont les mêmes que ceux présentés dans la situation initiale :

<i>Données démographiques fournies</i>	
Année de calcul	2013
Effectif global	46 Salariés
PASS en année de calcul	37 032 €
Salaire moyen	32 873 €
Age au départ	62 ans
Age moyen	35 ans
Tranche A	5.00%
Tranche B	5.00%
Tranche C	5.00%

$$NBM_7 = 65,56\%$$

Le taux d'évolution de la NBM est de :

$$\Delta NBM_7 = \frac{NBM_7}{NBM_0} - 1 = \frac{65,56\%}{49,53\%} - 1 = 32,36\%$$

Quand la population est plus jeune, la durée de la phase de constitution doit être allongée, alors l'assureur va percevoir plus de cotisations et la NBM a une forte augmentation.

#### 8) Une population plus âgée

Nous construisons une population plus âgée avec l'âge moyen de 45 ans et les autres paramètres sont les mêmes que ceux de la situation initiale :

<i>Données démographiques fournies</i>	
Année de calcul	2013
Effectif global	46 Salariés
PASS en année de calcul	37 032 €
Salaire moyen	32 873 €
Age au départ	62 ans
Age moyen	45 ans
Tranche A	5.00%
Tranche B	5.00%
Tranche C	5.00%

$$NBM_8 = 26,05\%$$

Le taux d'évolution de la NBM est de :

$$\Delta NBM_8 = \frac{NBM_8}{NBM_0} - 1 = \frac{26,05\%}{49,53\%} - 1 = -47,41\%$$

Lors que la population est plus âgée, la durée de phase de constitution est plus courte, donc l'assureur va recevoir moins de cotisations pour couvrir les arrérages après la retraite. Alors, la NBM va baisser beaucoup.

### 9) Une population ayant plus de femmes

Dans la situation initiale, nous avons 29 hommes et 17 femmes avec la  $NBM_0 = 49,53\%$ . Quand le nombre des femmes augmente, soit 36 femmes et 10 hommes, les autres paramètres sont identiques à la situation initiale :

<i>Données démographiques fournies</i>	
Année de calcul	2013
Effectif global	46 Salariés
Effectif des hommes	10 Salariés
Effectif des femmes	36 Salariés
PASS en année de calcul	37 032 €
Salaire moyen	32 873 €
Age au départ	62 ans
Age moyen	39 ans
Tranche A	5.00%
Tranche B	5.00%
Tranche C	5.00%

$$NBM_9 = 50,07\%$$

Le taux d'évolution de la NBM est de :

$$\Delta NBM_9 = \frac{NBM_9}{NBM_0} - 1 = \frac{50,07\%}{49,53\%} - 1 = 1,09\%$$

Selon la table de mortalité les femmes vivent plus longtemps que les hommes, donc la phase de restitution peut être allongée. L'assureur paye les arrérages pendant plus longtemps, mais en même temps, il va prélever le frais sur les arrérages. C'est pourquoi la NBM ne varie pas beaucoup.

### 3.3 Synthèse générale de l'impact NBM au scénario déterministe

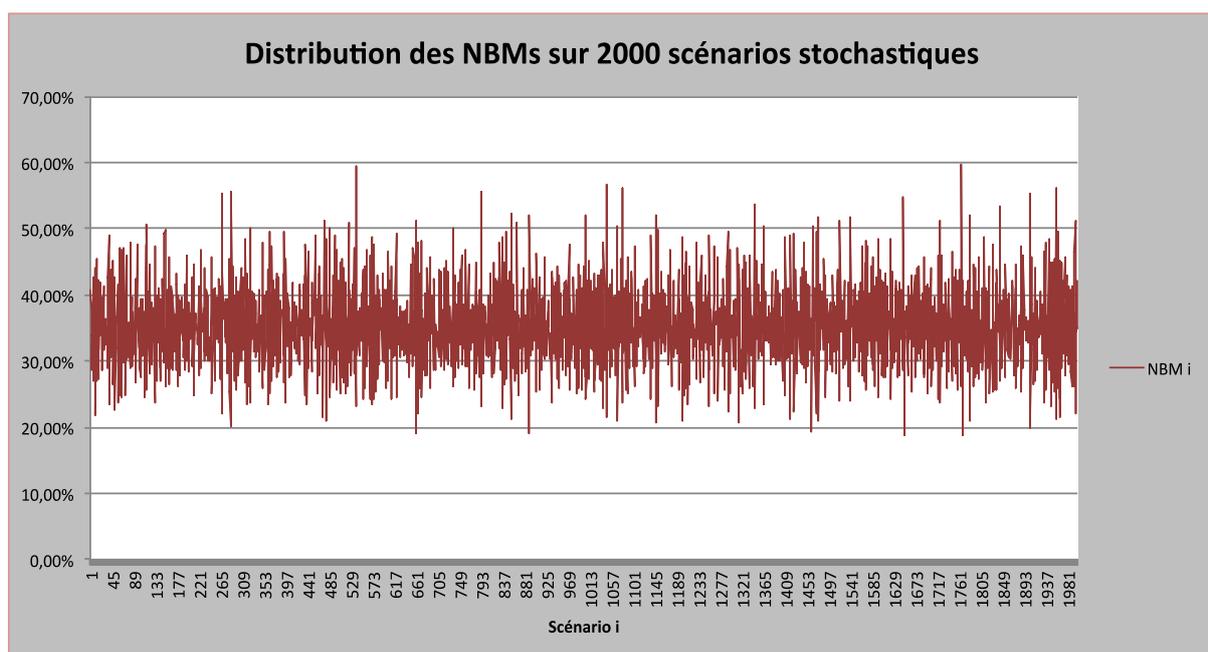
Scénarios déterministes	Impact NBM
Scénario de base	49,53 %
<b>Evolution tarifaire</b>	
Une augmentation de 0,1 % du taux de frais sur cotisations	+ 1,37 %
Une augmentation de 0,1 % du taux de frais sur arrérages	+ 1,15 %
Une augmentation de 0,1 % du taux de frais sur encours	+ 23,76 %
Une diminution de 2 % du taux de distribution	+ 14,82 %
<b>Evolution des frais</b>	
Une diminution de 10 % du coût unitaire par contrat	+ 6,76 %
Une diminution de 1 % du taux de frais d'acquisition	+ 2,02 %
<b>Evolution de la population</b>	
Une population plus jeune	+ 32,36 %
Une population plus âgée	- 47,41 %
Une population avec plus de femmes	+ 1,09 %

## 4. Projection résultat en scénario stochastique

### 4.1 La situation initiale

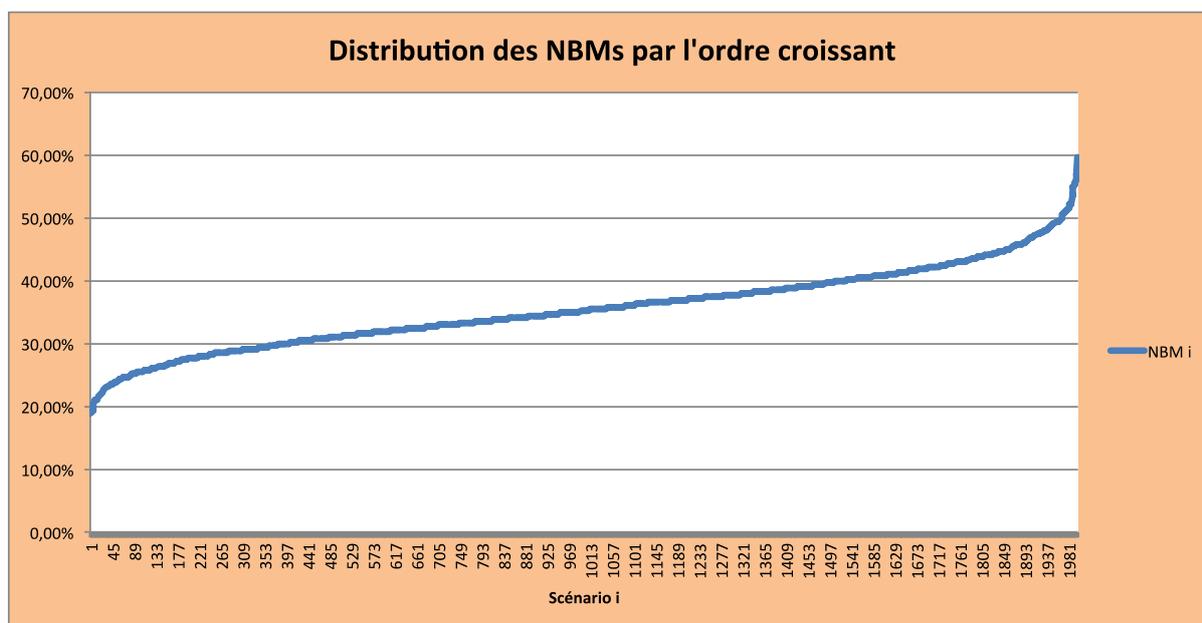
Avec une allocation stratégique de 80% des rendements des obligations, 15% des rendements des actions et 5% des rendements de l'immobilier, nous pouvons obtenir la moyenne et l'écart-type de ces 2000 NBM stochastiques :

$$\overline{NBM}_0 = 35,47 \% \quad \text{et} \quad \sigma_0 = 0,063870$$



Nous faisons la distribution de ces 2000 NBM stochastiques dans la graphique précédente, et bien obtenons que toutes les valeurs de NBM soient autour de la valeur moyenne NBM au cas initial, i.e., 35,47%.

Et plus, nous aussi voulons réorganiser les 2000 NBM par l'ordre croissant, et dessiner la courbe de la distribution représentée suivante :



En statistique descriptive, un quartile est chacune des 3 valeurs qui divisent les données triées en 4 parts égales, de sorte que chaque partie représente  $\frac{1}{4}$  de l'échantillon de population.

Alors, les valeurs de quantiles pour ces 2000 valeurs des NBM sont :

- Le 1<sup>er</sup> quantile sépare les 25% inférieurs des données :  $Q_1 = 31,086 \%$
- Le 2<sup>ème</sup> quantile est la médiane de ces données :  $Q_2 = 35,196 \%$
- Le 3<sup>ème</sup> quantile sépare les 25% supérieurs des données :  $Q_3 = 39,676 \%$
- La valeur minimale de ces données est de : 18,702 %
- La valeur maximale de ces données est de : 59,645 %

Par ailleurs, nous pouvons indiquer la VaR (value at risk) mesurée le risque de marché d'un portefeuille d'instruments financiers. Elle correspond au montant de pertes qui ne devrait être dépassé qu'avec une probabilité donnée sur un horizon temporel donné. Le niveau de confiance est la probabilité que les pertes éventuelles du portefeuille ou de l'actif ne dépassent pas la VaR, en général, il est 99,5 % en Solvabilité 2. Donc, pour le scénario qui se réalise une fois sur les 2000 valeurs de NBM, nous pouvons trouver la VaR à 99,5 % est de 53,783 %. C'est la meilleure valeur des NBM qu'il est possible de constater sur la nouvelle affaire.

Evidemment, nous avons :

$$49,53\% = NBM_0 > \overline{NBM}_0 = 35,47\%$$

À l'opposé de la NBM déterministe définie par une courbe des rendements déterministe au sein d'une entreprise, la NBM stochastique considère les risques financiers sur le marché financier, parce qu'elle utilise les données historiques ou projetées d'un marché financier sur les modèles d'actifs pour calibrer leurs paramètres. Donc, la valeur de la NBM stochastique est inférieure à celle de la NBM déterministe.

Le Comité de Direction Générale (CDG) de la compagnie d'assurance gère le profil de risque de la société et détermine, notamment, le niveau global de risque acceptable pour les actifs investis.

Ainsi, le CDG détermine une allocation stratégique. Cette allocation vise l'optimisation à long terme du profil risque / valeur du bilan de la société (compromis entre respect des contraintes réglementaires et création de valeur pour l'actionnaire). La politique de placement du Comité de Direction Générale fait l'objet d'un rapport transmis à l'autorité de contrôle prudentiel (ACP).

Pour tester la sensibilité de l'allocation stratégique d'actif, nous établissons une nouvelle allocation d'actif suivante :

- Augmenter les rendements des obligations de 80 % à 85 %
- Diminuer les rendements des actions de 15 % à 10 %
- 5 % des rendements de l'immobilier

Nous obtenons une nouvelle moyenne de ces 2000 NBM :

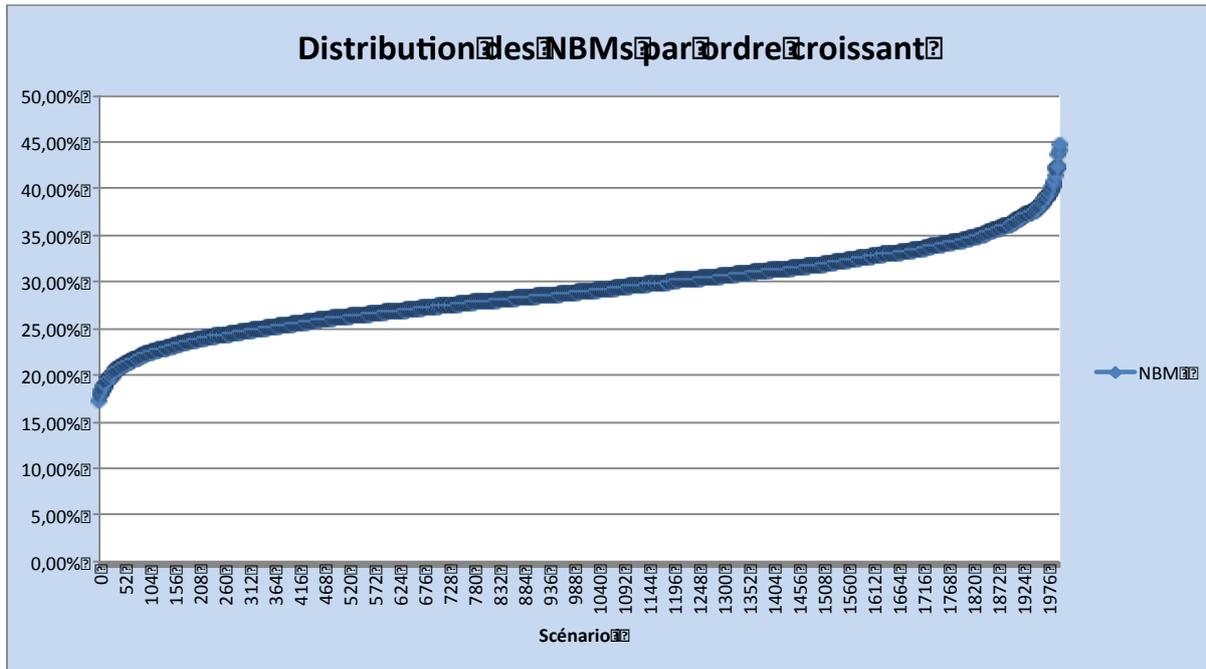
$$\overline{NBM}'_0 = 29,09\% \quad \text{et} \quad \sigma'_0 = 0,042470$$

Et les taux d'évolution de la NBM stochastique sont de :

$$\Delta \overline{NBM}'_0 = \frac{\overline{NBM}'_0}{\overline{NBM}_0} - 1 = \frac{29,09\%}{35,47\%} - 1 = -17,99\%$$

$$\Delta \sigma'_0 = \frac{\sigma'_0}{\sigma_0} - 1 = \frac{0,042470}{0,063870} - 1 = -33,51\%$$

En conséquence, la NBM a une relation négative sur l'allocation des obligations et positive sur une allocation des actions.



Alors, les valeurs importantes sont :

- Le 1<sup>er</sup> quantile:  $Q_1 = 26,219 \%$
- Le 2<sup>ème</sup> quantile est la médiane :  $Q_2 = 28,911 \%$
- Le 3<sup>ème</sup> quantile :  $Q_3 = 31,805 \%$
- La valeur minimale de ces données est de :  $17,355 \%$
- La valeur maximale de ces données est de :  $44,846 \%$
- La VaR avec le niveau de confiance 99,5 % est de :  $40,760 \%$

Dans la partie précédente « la modélisation de l'actif », nous avons déjà obtenu les volatilités estimées pour les obligations, les actions et le prix d'immobilier :

- Modélisation des taux d'intérêt :  $\hat{\sigma} = 0.02266 \%$
- Modélisation des actions :  $\hat{\sigma} = 24.71 \%$
- Modélisation de l'immobilier :  $\hat{\sigma} = 8.30 \%$

Nous observons que pour les obligations et l'immobilier, il y a moins de volatilité par rapport aux actions avec l'allocation stratégique de 80 % des rendements des obligations, 15 % des rendements des actions et 5 % des rendements de l'immobilier. Donc, nous voulons savoir la sensibilité à la volatilité des actions. Ici, nous testons à deux côtés :

- ❖ Sensibilité à la volatilité des actions à moins de 5 % :

$$\overline{NBM}_{-5\%} = 36,67 \% \quad \text{et} \quad \sigma_{-5\%} = 0,061380$$

Et les taux d'évolution de la NBM stochastique sont de :

$$\Delta \overline{NBM}_{-5\%} = \frac{\overline{NBM}_{-5\%}}{\overline{NBM}_0} - 1 = \frac{36,67\%}{35,47\%} - 1 = 3,38\%$$

$$\Delta \sigma_{-5\%} = \frac{\sigma_{-5\%}}{\sigma_0} - 1 = \frac{0,061380}{0,063870} - 1 = -3,90\%$$

Nous observons que si la volatilité des actions est plus petite, c'est-à-dire que les taux des actions de tous les scénarios stochastiques sont plus concentrés à la moyenne et les risques parmi les taux des actions sont réduits, alors ce portefeuille retraite est plus rentable avec la NBM stochastique (36,67%) plus grande.

❖ Sensibilité à la volatilité des actions à plus de 5% :

$$\overline{NBM}_{+5\%} = 34,46\% \quad \text{et} \quad \sigma_{+5\%} = 0,079985$$

Et les taux d'évolution de la NBM stochastique sont de :

$$\Delta \overline{NBM}_{+5\%} = \frac{\overline{NBM}_{+5\%}}{\overline{NBM}_0} - 1 = \frac{34,46\%}{35,47\%} - 1 = -2,85\%$$

$$\Delta \sigma_{+5\%} = \frac{\sigma_{+5\%}}{\sigma_0} - 1 = \frac{0,079985}{0,063870} - 1 = 25,23\%$$

À l'inverse, si la volatilité des actions est plus grande, les risques parmi les taux des actions sont accrus, alors ce portefeuille est moins rentable avec une NBM plus petite.

## 4.2 Les impacts des leviers

Dans la partie suivante, nous analysons les impacts des leviers de la rentabilité d'un portefeuille retraite, i.e., la NBM, basés sur une allocation stratégique de 80% des rendements des obligations, 15% des rendements des actions et 5% des rendements de l'immobilier.

### 4.2.1 Impact d'évolution tarifaire

#### 1) Une augmentation du taux de frais sur cotisations

Lors d'une augmentation de 0,10 % du taux de frais sur cotisations sachant que la commission sur cotisations à l'apporteur ne bouge pas, nous pouvons aussi obtenir la NBM stochastique avec un changement du taux de frais sur cotisations dans la même population:

$$\overline{NBM}_1 = 36,17\% \quad \text{et} \quad \sigma_1 = 0,063784$$

Et les taux d'évolution de la NBM stochastique sont de :

$$\Delta \overline{NBM}_1 = \frac{\overline{NBM}_1}{\overline{NBM}_0} - 1 = \frac{36,17\%}{35,47\%} - 1 = 1,97\%$$

$$\Delta \sigma_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} - 1 = \frac{0,063784}{0,063870} - 1 = -0,13\%$$

Donc, le taux de frais sur cotisations et la NBM ont une relation légèrement positive, soit la NBM déterministe, soit la NBM stochastique.

## 2) Une augmentation du taux de frais sur arrérages

Par exemple, Le taux de frais sur arrérages est de 2,10 % au lieu de 2,00 %, cette variation entraîne une augmentation de la NBM stochastique aussi. Donc,

$$\overline{NBM}_2 = 35,99\% \quad \text{et} \quad \sigma_2 = 0,064129$$

Et les taux d'évolution sont de :

$$\Delta \overline{NBM}_2 = \frac{\overline{NBM}_2}{\overline{NBM}_0} - 1 = \frac{35,99\%}{35,47\%} - 1 = 1,47\%$$

$$\Delta \sigma_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_0} - 1 = \frac{0,064129}{0,063870} - 1 = 0,41\%$$

Selon les deux études de cas dans le scénario déterministe et le scénario stochastique, l'évolution de la NBM en phase de constitution ( $\Delta NBM_1$  et  $\Delta \overline{NBM}_1$ ) est plus grande que celle en phase de restitution ( $\Delta NBM_2$  et  $\Delta \overline{NBM}_2$ ). Donc, la phase de constitution est plus importante pour l'assureur.

## 3) Une augmentation du taux de frais sur encours

Lors d'une hausse du taux de frais sur encours de 0,60 % à 0,70 %. Donc, la NBM stochastique va être :

$$\overline{NBM}_3 = 46,62\% \quad \text{et} \quad \sigma_3 = 0,067164$$

Et les taux d'évolution sont de :

$$\Delta \overline{NBM}_3 = \frac{\overline{NBM}_3}{\overline{NBM}_0} - 1 = \frac{46,62\%}{35,47\%} - 1 = 31,44\%$$

$$\Delta \sigma_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma_0} - 1 = \frac{0,067164}{0,063870} - 1 = 5,16\%$$

Quand le taux de frais sur encours augmente de 0.1 %, la NBM a une forte augmentation.

#### 4) Taux de distribution de participation aux bénéfices

Si le taux de distribution varie de 95 % à 93 %, alors,

$$\overline{NBM}_4 = 40,68\% \quad \text{et} \quad \sigma_4 = 0,072026$$

Et les taux d'évolution sont de :

$$\Delta \overline{NBM}_4 = \frac{\overline{NBM}_4}{\overline{NBM}_0} - 1 = \frac{40,68\%}{35,47\%} - 1 = 14,69\%$$

$$\Delta \sigma_4 = \frac{\sigma_4}{\sigma_0} - 1 = \frac{0,072026}{0,063870} - 1 = 12,77\%$$

Quand le taux de distribution devient plus favorable à l'assureur de 2 %, la NBM a une forte augmentation.

### 4.2.2 Impact de frais

#### 5) Coût unitaire par contrat

Nous diminuons le coût unitaire par contrat de 20 € à 18 €, alors :

$$\overline{NBM}_5 = 38,85\% \quad \text{et} \quad \sigma_5 = 0,063814$$

Et les taux d'évolution sont de :

$$\Delta \overline{NBM}_5 = \frac{\overline{NBM}_5}{\overline{NBM}_0} - 1 = \frac{38,85\%}{35,47\%} - 1 = 9,53\%$$

$$\Delta \sigma_5 = \frac{\sigma_5}{\sigma_0} - 1 = \frac{0,063814}{0,063870} - 1 = -0,09\%$$

#### 6) Frais d'acquisition

Si nous baissions le taux de frais d'acquisition de 1 % par rapport à la situation initiale (19 %), soit 18 %, alors la NBM stochastique va être :

$$\overline{NBM}_6 = 36,47\% \quad \text{et} \quad \sigma_6 = 0,063870$$

Et les taux d'évolution sont de :

$$\Delta \overline{NBM}_6 = \frac{\overline{NBM}_6}{\overline{NBM}_0} - 1 = \frac{36,47\%}{35,47\%} - 1 = 2,82\%$$

$$\Delta \sigma_6 = \frac{\sigma_6}{\sigma_0} - 1 = 0$$

Lors d'une diminution de taux de frais d'acquisition de la prime, l'assureur va payer moins de frais pour acheter ce contrat, donc la NBM va augmenter aussi.

### 4.2.3 Impact de population

#### 7) Une population plus jeune

Nous construisons une population plus jeune avec l'âge moyen de 35 ans et les autres paramètres sont les mêmes que ceux présentés dans la situation initiale :

$$\overline{NBM}_7 = 46,87\% \quad \text{et} \quad \sigma_7 = 0,075666$$

Et les taux d'évolution sont de :

$$\Delta \overline{NBM}_7 = \frac{\overline{NBM}_7}{\overline{NBM}_0} - 1 = \frac{46,87\%}{35,47\%} - 1 = 32,14\%$$

$$\Delta \sigma_7 = \frac{\sigma_7}{\sigma_0} - 1 = \frac{0,075666}{0,063870} - 1 = 18,47\%$$

Quand la population est plus jeune, la durée de la phase de constitution doit être allongée, alors l'assureur va percevoir plus de cotisations et la NBM a une forte augmentation.

#### 8) Une population plus âgée

Nous construisons une population plus âgée avec l'âge moyen de 45 ans et les autres paramètres sont les mêmes que ceux dans la situation initiale :

$$\overline{NBM}_8 = 17,74\% \quad \text{et} \quad \sigma_8 = 0,046860$$

Et les taux d'évolution sont de :

$$\Delta \overline{NBM}_8 = \frac{\overline{NBM}_8}{\overline{NBM}_0} - 1 = \frac{17,74\%}{35,47\%} - 1 = -49,99\%$$

$$\Delta \sigma_8 = \frac{\sigma_8}{\sigma_0} - 1 = \frac{0,046860}{0,063870} - 1 = -26,63\%$$

Lors que la population est plus âgée, la durée de phase de constitution est plus courte, donc l'assureur va recevoir moins de cotisations pour couvrir les arrérages après la retraite. Alors, la NBM va baisser beaucoup.

#### 9) Une population ayant plus de femmes

Dans la situation initiale, nous avons 29 hommes et 17 femmes avec la  $\overline{NBM}_0 = 35,47\%$ . Quand le nombre des femmes augmente et les autres paramètres sont identiques à la situation initiale :

$$\overline{NBM}_9 = 35,90\% \quad \text{et} \quad \sigma_9 = 0,064114$$

Et les taux d'évolution sont de :

$$\Delta \overline{NBM}_9 = \frac{\overline{NBM}_9}{\overline{NBM}_0} - 1 = \frac{35,90\%}{35,47\%} - 1 = 1,21\%$$

$$\Delta \sigma_9 = \frac{\sigma_9}{\sigma_0} - 1 = \frac{0,064114}{0,063870} - 1 = 0,38\%$$

Selon la table de mortalité les femmes vivent plus longtemps que les hommes, donc la phase de restitution peut être allongée. L'assureur paye les arrérages pendant plus longtemps, mais en même temps, il va prélever le frais sur les arrérages. C'est pourquoi la NBM ne varie pas beaucoup.

### 4.3 Synthèse générale de l'impact NBM au scénario stochastique en risque historique

Scénarios stochastiques	Impact NBM	Impact NBM écart-type
Scénario stochastique de base	35,47 %	0,063870
<b>Evolution tarifaire</b>		
Une augmentation de 0,1 % du taux de frais sur cotisations	+ 1,97 %	-0,13%
Une augmentation de 0,1 % du taux de frais sur arrérages	+1,47 %	+0,41%
Une augmentation de 0,1 % du taux de frais sur encours	+ 31,44 %	+ 5,16 %
Une diminution de 2 % du taux de distribution	+14,69%	+ 12,77 %
<b>Evolution des frais</b>		
Une diminution de 10 % du coût unitaire par contrat	+ 9,53 %	-0,09 %
Une diminution de 1 % du taux de frais d'acquisition	+ 2,82 %	Aucun impact
<b>Evolution de la population</b>		
Une population plus jeune	+32,14%	+18,47 %
Une population plus âgée	- 49,99 %	-26,63%
Une population avec plus de femmes	+1,21 %	+0,38 %
<b>Evolution de la volatilité des actions</b>		
Une diminution de 5 % de la volatilité des actions	+ 3,38 %	- 3,90 %
Une augmentation de 5 % de la volatilité des actions	- 2,85 %	+ 25,23 %

Conclusion, les sensibilités de la NBM en stochastique sont semblables à celles constatées sur le scénario déterministe. Par contre, les scénarios stochastiques montrent que la durée d'un portefeuille engendre une forte volatilité dans la NBM. En effet, une population plus jeune ou plus âgée génère une forte variation des provisions mathématiques qui s'accompagne d'un risque plus élevé (variation d'écart-type est égale à 50% de la variation de la NBM). La retraite est un business à long terme où la gestion des risques financiers procure une valeur ajoutée des assureurs.

## 4.4 Synthèse générale de l'impact NBM au scénario stochastique en risque neutre

L'hypothèse en risque neutre : les rendements moyens de tous les actifs sont égaux au taux sans risque, i.e., Rendements moyens des actions = Rendements moyens de l'immobilier = Rendements moyens des obligations et les rendements moyens des obligations servent de référence avec  $\hat{b} = 0,0350237$ . Nous pouvons obtenir un tableau avec toutes les évolutions :

Scénarios stochastiques	NBM stochastique	Impact NBM	Volatilité	Impact NBM écart-type
Scénario stochastique de base	18,71 %	/	0,050173	/
<b>Evolution tarifaire</b>				
Une augmentation de 0,1 % du taux de frais sur cotisations	19,44 %	+ 3,90 %	0,050106	- 0,13 %
Une augmentation de 0,1 % du taux de frais sur arrérages	19,17 %	+ 2,46 %	0,050378	+ 0,41 %
Une augmentation de 0,1 % du taux de frais sur encours	29,04 %	+ 55,21 %	0,052775	+ 5,19 %
Une diminution de 2 % du taux de distribution	21,56 %	+ 15,23 %	0,056683	+ 12,98 %
<b>Evolution des frais</b>				
Une diminution de 10 % du coût unitaire par contrat	22,12 %	+ 18,23 %	0,050118	- 0,11 %
Une diminution de 1 % du taux de frais d'acquisition	19,71 %	+ 5,34 %	0,050173	Aucun impact
<b>Evolution de la population</b>				
Une population plus jeune	25,85 %	+ 38,16 %	0,058770	+ 17,13 %
Une population plus âgée	6,82 %	- 63,55 %	0,036562	- 27,13 %
Une population avec plus de femmes	19,05 %	+ 1,82 %	0,050364	+ 0,38 %
<b>Evolution de l'allocation stratégique</b>				
Changement de l'allocation stratégique (85% obligations + 10% actions + 5% immobilier)	15,36 %	-17,90 %	0,035809	- 28,63 %

Particulièrement, nous pouvons calculer les valeurs significatives sur le scénario stochastique de base en risque neutre sont :

- Le 1<sup>er</sup> quantile:  $Q_1 = 15,179$  %
- Le 2<sup>ème</sup> quantile est la médiane :  $Q_2 = 18,382$  %
- Le 3<sup>ème</sup> quantile :  $Q_3 = 21,573$  %
- La valeur minimale de ces données est de : 6,063 %
- La valeur maximale de ces données est de : 41,875 %
- La VaR avec le niveau de confiance 99,5 % est de : 34,105 %

Selon les deux derniers tableaux, nous pouvons observer que les variations de la NBM et l'écart-type en risque neutre ont un même sens que celles en risque historique. Et plus, les variations d'écart-type de la NBM en risque historique et en risque neutre sont presque les mêmes, parce que c'est la même volatilité de rendement par classe d'actif et il y a un seul changement sur les rendements moyens des actions et du logement.

La NBM en risque neutre est plus faible que celle en risque historique, parce que en risque neutre, nous avons un rendement moyen de 3.5 % environ sur les actions, l'immobilier et les obligations, alors qu'en risque historique nous avons des rendements moyens plus élevés sur les actions (8.22 %) et sur l'immobilier (11.7 %).

## Conclusion

Ce mémoire, rédigé à Generali France, a permis de présenter les produits de retraite et les acteurs de l'offre d'épargne retraite.

Ces trente dernières années ont été marquées par des alternances de cycles de hausses et de baisses des résultats. A fortiori, les périodes de baisse de résultat ont été plus courtes que les périodes de hausse de résultat. Ceci a permis une innovation dans l'offre de produit, sous l'impulsion de l'Etat via des incitations fiscales et un cadre réglementaire adapté à un investissement dans la sophistication des outils de gestion d'actifs et une politique tarifaire agressive. La baisse des rendements financiers des fonds Euro associée à une volatilité des marchés financiers et la contraction du revenu des assurés du fait d'une croissance de long terme plus faible laisse présager d'années à venir moins florissantes.

Dans ce contexte, les assureurs s'engagent dans la connaissance du client et la maîtrise de la politique tarifaire. Pour ce faire, la NBM qui est un indicateur qui prend en compte l'ensemble du cycle de vie du client et l'ensemble des leviers d'actions de l'assureur, devient un indicateur fondamental.

Dans la dernière partie de ce mémoire, nous analysons les sensibilités de la NBM aux paramètres tarifaires, à la structure de coût de gestion et aux profils démographiques du souscripteur. La variation de la NBM n'est pas la même selon que l'élément tarifaire (impact sur la durée et impact sur l'assiette). Les chargements sur primes ont un impact sur la phase de constitution, les chargements sur arrérages ont un impact sur la phase de restitution, les chargements sur encours et le taux de distribution ont aussi un impact sur toutes les phases et l'assiette la plus large. Si l'assureur perçoit plus de frais sur cotisations, plus de frais sur encours dans la phase de constitution, la NBM varie plus vite, c'est-à-dire que le nouveau contrat est plus rentable. Par ailleurs, l'assureur peut diminuer le coût unitaire par contrat et le frais d'acquisition, le résultat net de l'assureur est plus profitable. Si la population est plus jeune et reste plus longtemps en portefeuille, la variation de la NBM est positive, à condition que les coûts soient suffisamment faibles comparativement aux chargements, alors ce profil de contrat est plus rentable.

La valeur de l'entreprise est la somme de la valeur des nouveaux contrats et des contrats déjà en portefeuille. Un nouveau contrat doit avoir une proposition tarifaire rentable (souscription). Lorsqu'un contrat en portefeuille devient non rentable (surveillance), l'assureur procède à des mises à jour des conditions générales du contrat.

## Bibliographie

### Ouvrages

ARTUS P. & LEGROS F. [1999] : *Le choix du système de retraite*. Economica.

CHARPENTIER F. [1996] : *Retraites et fonds de pension*. Economica.

DEVOLDER P. [2005] : *Le financement des régimes de retraite*, Economica.

GAUTRON N. & PLANCHET F. & THEROND P. [2005] : *Méthodes financières et allocation d'actifs en assurance*.

KARL-THEODOR E. [2013] : *Cours « Gestion du risque de taux et de défaut »* en Master 2.

NETZER J.L [2013] : *Cours « Comptabilité des assurances »* en Master 2.

### Rapports

ALLAG L. [2008] : *Modélisation et allocation stratégique d'actifs dans le cadre du référentiel de solvabilité 2*. Mémoire ISFA 2008.

AMIRAT S. [2013] : *Norme IAS 19 – Calcul et impact des engagements sociaux sur les entreprises*. Mémoire ENASS 2013

BLANCHET G. & JEANGIRARD E. : *Calcul des prix des obligations et des options avec le modèle de Vasicek*

FAUTH A. : *Modèles de Taux – Surface de Volatilité et Introduction au Risque de Crédit*

Conseil d'orientation des retraites [2010] :

*Retraites : annuités, points ou comptes notionnels ? – Options et modalités techniques.*

### Articles

Conditions générales d'un contrat de retraite : *France profil retraite multi-supports – Conditions Générales valant note d'information*. AGAP.

Code des assurances : *Article R332-2, Article R332-3 et Article R332-3-1*.

<http://www.legifrance.gouv.fr/>

Generali : *Ambitionmag*, AVRIL-MAI 2013 N°21, magazine interne.

PLANCHET F. [2009] : *Quel modèle d'actifs en assurance?* La Tribune de l'assurance.

Souscription retraite [2012] : *Règles & Procédure de souscription – Souscription retraite & Epargne salariale.*

KAMEGA A. [2013] : *Générateur de scénarios économiques (GSE) en assurance – Partie II Utilisation des modèles*

### **Données**

Cours du CAC40 : [http://www.leparticulier.fr/jcms/c\\_57095/cac-40](http://www.leparticulier.fr/jcms/c_57095/cac-40)

Données de Friggit : obtenues au sein de Generali

## Annexes

### 1. La démographie

Matricule	Année de naissance	Salaire brut annuel 2012	Collège	Situation familiale	Sexe assuré
1	1974	42 006	CADRE	M	H
2	1969	32 116	CADRE	M	H
3	1960	149 820	CADRE	M	H
4	1982	30 000	CADRE	M	F
5	1957	40 200	CADRE	M	H
6	1970	58 200	CADRE	M	H
7	1962	33 000	CADRE	M	F
8	1978	30 300	CADRE	M	F
9	1983	38 400	CADRE	M	H
10	1971	30 000	CADRE	M	F
11	1962	47 544	CADRE	M	H
12	1956	43 842	CADRE	M	F
13	1959	57 343	CADRE	M	F
14	1957	41 626	CADRE	M	F
15	1964	39 000	CADRE	M	H
16	1971	66 000	CADRE	M	H
17	1971	22 800	EMPLOYE	M	F
18	1975	22 800	EMPLOYE	M	H
19	1960	16 800	EMPLOYE	M	F
20	1988	21 600	EMPLOYE	M	F
21	1987	27 600	EMPLOYE	M	H
22	1988	22 200	EMPLOYE	M	F
23	1985	24 000	EMPLOYE	M	H
24	1965	29 400	EMPLOYE	M	H
25	1963	26 724	EMPLOYE	M	H
26	1985	19 491	EMPLOYE	M	F
27	1982	24 612	EMPLOYE	M	H
28	1975	36 000	EMPLOYE	M	H
29	1992	24 000	EMPLOYE	M	F
30	1977	25 452	EMPLOYE	M	H
31	1985	30 000	EMPLOYE	M	H
32	1977	20 400	EMPLOYE	M	H
33	1985	38 220	EMPLOYE	M	F
34	1968	22 200	EMPLOYE	M	F
35	1973	23 400	EMPLOYE	M	H
36	1975	24 000	EMPLOYE	M	H

37	1978	18 000	EMPLOYE	M	F
38	1959	29 400	EMPLOYE	M	H
39	1973	24 000	EMPLOYE	M	H
40	1973	30 402	EMPLOYE	M	H
41	1987	20 400	EMPLOYE	M	H
42	1981	31 200	EMPLOYE	M	H
43	1985	31 200	EMPLOYE	M	H
44	1985	2 040	EMPLOYE	M	H
45	1986	24 000	EMPLOYE	M	F
46	1989	20 400	EMPLOYE	M	H

## 2. Hypothèses financières au sens de scénario déterministe

*Hypothèses financières ( Consolidation de la Valeur)*

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Taux de rendement	1,89%	1,57%	1,82%	1,94%	2,09%	2,25%	2,37%	2,50%	2,62%	2,72%
Inflation	1,02%	1,59%	1,74%	1,81%	1,87%	1,95%	2,06%	2,19%	2,32%	2,44%
Facteur d'actualisation	100%	99,35%	98,61%	97,64%	96,33%	94,64%	92,61%	90,31%	87,81%	85,18%
Taux de rendement brut des actifs en UC	0,66%	0,75%	0,99%	1,36%	1,79%	2,19%	2,55%	2,85%	3,09%	3,26%
Taux de réduction	0,00%	9,93%	9,85%	8,15%	6,86%	7,06%	5,53%	5,48%	5,90%	5,29%

La série de « Taux de rendement » est aléatoire en scénario stochastique, au lieu de fixe en scénario déterministe.

## 3. Connaissances mathématiques

### 3.1 Mouvements browniens

$X(t)$  est un mouvement brownien arithmétique (MBA) si  $X(t) - X(0)$  est gaussien selon la loi  $N(\mu t, \sigma^2 t)$  et si ses accroissements sont indépendants (s'ils sont calculés sur des périodes disjointes).

Un MBA dont les accroissements ont une espérance  $\mu = 0$  et une variance par unité de temps  $\sigma^2 = 1$  s'appelle un mouvement brownien standard (ou processus de Wiener). Il est noté  $W(t)$  et on pose par définition  $W(0) = 0$ .

Le calcul différentiel sur les processus de Wiener obéit aux règles suivantes :

- $(dW)^2 = dt = Var(dW)$
- $dW \cdot dt = 0$

Ces règles s'adaptent au brownien arithmétique non standard  $X$  (de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ ) :

- $(dX)^2 = \sigma^2 dt$
- $dX \cdot dt = 0$

### 3.2 Processus d'Itô et lemme d'Itô

Un processus d'Itô est un processus stochastique pour lequel on a :

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t$$

Autrement formulé, on a :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s$$

Avec  $\mu_t$  et  $\sigma_t$  deux fonctions aléatoires satisfaisant quelques hypothèses techniques d'adaptation au processus  $W_t$  (mouvement brownien).

Considérons une fonction  $f$  dont on écrit les valeurs  $f(t,x)$ . Les différences partielles sont notées  $\frac{\partial f}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ .

On considère l'intervalle  $(t, t+dt)$  au cours duquel  $X$  varie de  $dX = X(t+dt) - X(t)$  et on note enfin la variation de  $f(t,X)$  induite par la double variation infinitésimale  $(dt, dX)$  :

$$df = f(t + dt, X(t + dt)) - f(t, X(t))$$

Le lemme d'Itô indique que dans ces conditions  $f(t,X(t))$  est un processus d'Itô et la différence  $df$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$df(X_t, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2 dt$$

#### Un exemple d'application : le modèle Black et Scholes :

Le mouvement brownien géométrique est souvent utilisé en finance comme le plus simple modèle d'évolution de cours de bourse. Il s'agit de la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Où :

- $S_t$  : le prix de l'action à la date  $t$
- $\mu$  (constant) : le rendement instantané du prix de l'action
- $\sigma$  (constant) : la volatilité du prix de l'action
- $W_t$  : un mouvement brownien

Si  $\sigma = 0$ , alors nous sommes face à une équation différentielle ordinaire dont la solution est :

$$S_t = S_0 \times \exp(\mu t)$$

En posant  $f(S_t, t) = \ln S_t$ , on obtient grâce à la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} d(\ln S_t) &= 0 \times dt + \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{S_t^2} \right) (\sigma S_t)^2 dt, \\ &= \frac{1}{S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - \frac{1}{2} \sigma^2 dt, \\ &= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t. \end{aligned}$$

On peut alors intégrer et il en découle que :

$$S_t = S_0 \times \exp \left( \sigma W_t + \mu t - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right)$$

### 3.3 Le modèle de Vasicek

Préalablement, si une variable aléatoire  $X$  suit une loi gaussienne de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$  sous la probabilité  $P$ , nous adopterons la notation  $X \stackrel{P}{\rightarrow} N(\mu, \sigma^2)$ . Dans le modèle de Vasicek, on suppose que le processus  $r_t$  vérifie :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

Commençons par remarquer que le processus  $X_t = r_t - a$  est solution de :

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma dW_t \quad (*)$$

$(X_t)$  suit ainsi un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. On peut ainsi en déduire que :

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s$$

Ainsi,

$$r_t \sim N \left( r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}), \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}) \right)$$

Pour calculer le prix des zéro-coupons, on se place sous la probabilité  $P$  :

$$\begin{aligned} ZC(t, T) &= E_P \left( e^{-\int_t^T r(s) ds} \middle| F_t \right) \\ &= e^{-b(T-t)} E_P \left( e^{-\int_t^T X_s ds} \middle| F_t \right) \\ &= e^{-b\theta} E_P \left( e^{-\int_0^\theta X_s^{r(t)-b} ds} \right) \end{aligned}$$

Où  $(X_t^x)$  est l'unique solution de l'équation (\*) vérifiant  $X_t^x = x$  avec  $\theta = T - t$ .

On sait que  $(X_t^x)$  est gaussien et à trajectoires continues.  $\int_0^\theta X_s^x ds$  est donc aussi gaussien, puisque l'intégrale est limite de somme de Riemann qui sont gaussiennes. On a donc :

$$E_P \left( e^{-\int_0^\theta X_s^x ds} \right) = \exp \left( -E_P \left( \int_0^\theta X_s^x ds \right) + \frac{1}{2} \text{Var} \left( \int_0^\theta X_s^x ds \right) \right)$$

Le calcul de l'espérance s'écrit :

$$E_P \left( \int_0^\theta X_s^x ds \right) = \int_0^\theta (E_P(X_s^x) ds) = \int_0^\theta x e^{-as} ds = \frac{x}{a} (1 - e^{-a\theta})$$

Pour la variance, le calcul donne :

$$\text{Var} \left( \int_0^\theta X_s^x ds \right) = \frac{\sigma^2}{a^2} \theta - \frac{\sigma^2}{a^3} (1 - e^{-a\theta}) - \frac{\sigma^2}{2a^3} (1 - e^{-a\theta})^2$$

Au final, on obtient donc :

$$ZC(t, T) = e^{-b\theta} \exp \left[ - (r(t) - b) \frac{1 - e^{-a\theta}}{a} + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma^2}{a^2} \theta - \frac{\sigma^2}{a^3} (1 - e^{-a\theta}) - \frac{\sigma^2}{2a^3} (1 - e^{-a\theta})^2 \right) \right]$$

### 3.4 Le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR)

Le taux spot sous probabilité historique dans le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR), est donné par :

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

Sous probabilité risque neutre, en prenant  $\lambda(t) = \lambda\sqrt{r(t)}$  comme prime de risque, soit,

$d\tilde{W}_t = dW(t) + \lambda\sqrt{r(t)}dt$ , nous obtenons :

$$dr(t) = \tilde{a}(\tilde{b} - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}d\tilde{W}(t)$$

Avec  $\tilde{a} = a + \sigma\lambda$  et  $\tilde{b} = \frac{ab}{a + \sigma\lambda}$ . En écrivant l'EDP des taux pour cette diffusion, nous obtenons :

$$\frac{\partial ZC}{\partial t} - \tilde{a}(\tilde{b} - r) \frac{\partial ZC}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 r \frac{\partial^2 ZC}{\partial r^2} - rZC = 0$$

Pour pouvoir résoudre cette EDP, on pose :

$$ZC(t, T, r) = A(T - t) \exp(-B(T - t)r)$$

Ainsi, en notant  $\tau = T - t$  et en remplaçant dans l'EDP précédente,

$$-A'(\tau) + A(\tau)B'(\tau)r - \tilde{a}(\tilde{b} - r)A(\tau)B(\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2rA(\tau)B^2(\tau) - rA(\tau) = 0$$

En égalisant à zéro les coefficients du polynôme en  $r$ , nous obtenons :

- $B'(\tau) + \tilde{a}B(\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2B^2(\tau) - 1 = 0$
- $-A'(\tau) - \tilde{a}\tilde{b}B(\tau) = 0$

On réinjecte la première des deux équations dans l'équation 2 pour déterminer  $A$ . Notons également que nous avons pour condition terminal  $ZC(T, r, T) = 1$ , soit,  $A(0) = 1$  et  $B(0) = 0$ .

En notant  $w = \sqrt{\tilde{a}^2 + 2\sigma^2}$ , la solution générale est :

$$A(\tau) = \left( \frac{2we^{\frac{(\tilde{a}+w)\tau}{2}}}{(w + \tilde{a})(e^{w\tau} - 1) + 2w} \right)^{\frac{2\tilde{a}\tilde{b}}{\sigma^2}}$$

$$B(\tau) = \frac{2(e^{w\tau} - 1)}{(w + \tilde{a})(e^{w\tau} - 1) + 2w}$$

#### 4. Les codes VBA de la simulation des actifs

Function S\_t(s As Double, rho As Double, sigma As Double) As Double

Dim temp As Double

temp = Application.WorksheetFunction.NormInv(Rnd(), 0, 1)

S\_t = s \* Exp(rho - 0.5 \* sigma ^ 2 + 0.5 \* sigma \* temp)

End Function

Sub Table\_Equity(rho As Double, sigma As Double, nb\_scenario As Integer)

'nb\_scenario est impaire

Dim tabl() As Double

ReDim tabl(0 To nb\_scenario, 0 To 50)

Dim i As Integer, j As Integer

For i = 0 To nb\_scenario

    tabl(i, 0) = 1

Next i

For j = 1 To 50

    tabl(0, j) = tabl(0, j - 1) \* Exp(rho)

Next j

For j = 1 To 50

```

For i = 1 To nb_scenario Step 2
    tabl(i, j) = S_t(tabl(i, j - 1), rho, sigma)
    tabl(i + 1, j) = tabl(i, 0) ^ 2 / tabl(i, j) * Exp(2 * (rho - 0.5 * sigma ^ 2) * j)
Next i
Next j

For i = 0 To nb_scenario
    ActiveSheet.Range("A11").Offset(i, 0).Value = i
Next i

ActiveSheet.Range("B11").Resize(nb_scenario + 1, 51).Value = tabl
End Sub

Function r_t(r As Double, theta As Double, a As Double, sigma As Double) As Double
    r_t = r * Exp(-a) + theta / a * (1 - Exp(-a)) + sigma * Exp(-a) *
Application.WorksheetFunction.NormInv(Rnd(), 0, 1)
End Function

Sub Table_r(r0 As Double, theta As Double, a As Double, sigma As Double, nb_scenario As
Integer)
    'nb_scenario est impaire
    Dim tabl() As Double
    ReDim tabl(0 To nb_scenario, 0 To 50)
    Dim i As Integer, j As Integer
    For i = 0 To nb_scenario
        tabl(i, 0) = r0
    Next i

    For j = 1 To 50
        tabl(0, j) = tabl(0, j - 1) * Exp(-a) + theta / a * (1 - Exp(-a))
    Next j

    For j = 1 To 50
        For i = 1 To nb_scenario Step 2
            tabl(i, j) = r_t(tabl(i, j - 1), theta, a, sigma)
            tabl(i + 1, j) = -tabl(i, j) + 2 * r0 * Exp(-a * j) + 2 * theta / a * (1 - Exp(-a * j))
        Next i
    Next j

    For i = 0 To nb_scenario
        ActiveSheet.Range("A11").Offset(i, 0).Value = i
    Next i

ActiveSheet.Range("B11").Resize(nb_scenario + 1, 51).Value = tabl

```

End Sub

Sub Print\_Equity()

    Call Table\_Equity(Range("rho\_equity").Value, Range("sigma\_equity").Value,  
Range("nb\_equity").Value)

End Sub

Sub Print\_Immo()

    Call Table\_Equity(Range("rho\_immo").Value, Range("sigma\_immo").Value,  
Range("nb\_immo").Value)

End Sub

Sub Print\_taux()

    Call Table\_r(Range("theta\_r").Value, Range("a\_r").Value, Range("sigma\_r").Value,  
Range("r\_0").Value, Range("nb\_immo").Value)

End Sub