



HAL
open science

Les problèmes ouverts : quels apports dans les apprentissages de la division au cycle 3

Vincent Dumonteil

► **To cite this version:**

Vincent Dumonteil. Les problèmes ouverts : quels apports dans les apprentissages de la division au cycle 3. Education. 2014. dumas-01132086

HAL Id: dumas-01132086

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01132086>

Submitted on 16 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ D'ORLÉANS ET DE TOURS
ESPE Centre Val de Loire

MÉMOIRE de recherche proposé par :

Vincent DUMONTEIL

Soutenu le : 30 juin 2014

Pour obtenir le diplôme du :

Master « Métiers de l'Éducation, de l'Enseignement, de la Formation et de l'Accompagnement »

Discipline : Mathématiques

LES PROBLÈMES OUVERTS

Quels apports dans les apprentissages de la division au cycle 3 ?

Mémoire dirigé par :

Jean Berky NGUALA

Professeur de Mathématiques, Centre de formation de Fondettes

Jury :

Jean Berky NGUALA

Professeur de Mathématiques, Centre de formation de Fondettes

Vincent BECK

Professeur de Mathématiques, Centre de formation de Fondettes.

Année universitaire 2013-2014

REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur Jean Berky N’Guala pour m’avoir guidé et soutenu tout au long de la conception de ce mémoire.

SOMMAIRE

INTRODUCTION.....	5
I) La représentation et les schémas de problèmes.....	7
1) La représentation des problèmes.....	7
a) Le processus d'interprétation et de sélection.....	8
b) Le processus de structuration.....	8
c) Le processus d'opérationnalisation.....	9
2) Les schémas de problèmes.....	11
a) Les transferts analogiques et la formation de schémas.....	11
b) L'hypothèse d'une mémoire de problèmes.....	12
II) Les spécificités des problèmes pour chercher.....	14
III) L'acquisition de compétences en lien avec la résolution de problèmes ouverts.....	16
IV) La théorie des champs conceptuels en lien avec les structures multiplicatives.....	20
V) La pratique des problèmes ouverts pour un apprentissage spécifique : celui de la division au cycle 3.....	25
VI) La méthodologie.....	27
1) Composition des groupes.....	27
2) Sélection des problèmes.....	28
a) Problème n°1.....	28
b) Problème n°2.....	28
c) Problème n°3.....	28
d) Problème n°4.....	29
e) Problème « évaluation ».....	29
3) Les procédures attendues des élèves.....	31
a) Les procédures en lien avec les raisonnements déductifs.....	31
b) Les procédures pour calculer le poids de trois tables.....	33
c) Les procédures pour calculer le poids d'un fauteuil.....	34

4)	Le déroulement des séances de recherche	35
VII)	L'analyse des résultats après l'expérimentation.....	37
1)	Analyse de la séance n°1	37
a)	Exemple de procédure correcte	37
b)	Exemple de procédure erronée	38
c)	Bilan de la séance n°1.....	39
2)	Analyse de la séance n°2	40
a)	Exemple de schématisation de l'énoncé	41
b)	Exemple de procédure erronée	41
c)	Exemples de procédures correctes	42
d)	Bilan de la séance n°2.....	45
3)	Analyse de la séance n°3	46
a)	Exemple de procédure erronée	48
b)	Exemples de procédures correctes	49
c)	Bilan de la séance n°3.....	51
4)	Analyse de la séance n°4	52
a)	Procédure erronée	54
b)	Procédures correctes	56
c)	Bilan de la séance n°4.....	58
5)	Analyse de la séance évaluation	58
	CONCLUSION.....	60
	BIBLIOGRAPHIE.....	63
1)	Les monographies	63
2)	Les articles	63
	ANNEXES.....	65
1)	Les évaluations nationales en mathématique des 559 élèves de CM2 de la circonscription de Châteauroux en 2010	66
2)	Le plan de séquence sur les problèmes ouverts	67
3)	Les fiches de préparation de séances	70
4)	Les feuilles de recherche.....	83

INTRODUCTION

L'étude et la résolution de problèmes sont des activités fondamentales dans tous les apprentissages liés aux mathématiques. En effet, elles permettent tout autant de mobiliser et d'approfondir des connaissances que de développer des capacités pour organiser et pour gérer des données de façon autonome. C'est pourquoi elles occupent une place importante dans les programmes officiels. Cependant, on constate la difficulté qu'ont souvent les élèves à aborder ce type d'exercices. Il semble donc intéressant pour un étudiant ayant effectué des études de mathématiques et se destinant à devenir professeur des écoles de s'interroger sur les raisons de ces difficultés ainsi que sur les moyens à mettre en œuvre pour aider les élèves à les surmonter.

Au cours de cette étude, nous nous proposons d'étudier en particulier ce que l'on nomme « les problèmes ouverts » ou « problèmes de recherche ».

La recherche sur l'enseignement des mathématiques s'étant développée régulièrement depuis une vingtaine d'années et les programmes n'ayant cessé d'évoluer, l'expression « véritables problèmes de recherche » est apparue pour la première fois dans les programmes de l'école primaire en 1995. Elle a été modifiée en 2002, devenant « problèmes pour chercher » et les objectifs de ces derniers ont été alors précisés : il s'agissait de développer chez les élèves des capacités à chercher en mettant en place des problèmes pour lesquels ils ne disposaient pas de solutions déjà éprouvées. Cependant, ce type d'exercices ne figure plus dans les programmes officiels de 2008, car il semble que la mise en place et l'utilisation des « problèmes pour chercher » ainsi que leur impact sur les élèves ont été très différents selon les enseignants.

La résolution de problèmes ouverts n'en reste pas moins un outil utilisable dans de nombreux domaines mathématiques et nous nous demanderons si ce type d'exercices ne permettrait pas justement d'éviter aux élèves de se trouver dans la situation d'échec trop souvent constatée lorsqu'on leur demande de résoudre un problème quelle qu'en soit la forme. Cependant ne conviendrait-il pas de n'utiliser ce type d'exercices qu'après en avoir défini précisément les objectifs ? Et la régularité de sa pratique ne serait-elle pas alors des plus bénéfiques ?

Dans cette étude, nous essayerons ainsi d'évaluer l'impact que peut avoir la pratique régulière de la résolution de problèmes ouverts en relation avec un apprentissage précisément défini : celui de la division au cycle des approfondissements.

Néanmoins, dans un premier temps, nous allons évoquer, dans une partie théorique, certaines notions indispensables à la réalisation de cette étude. Tout d'abord, nous rappellerons les travaux de Jean Julo qui a étudié, d'un point de vue cognitiviste, la construction de représentations et de schémas de problèmes ainsi que l'utilisation d'une mémoire spécifique que nous mettrons à profit pour les résoudre. Puis, nous définirons précisément ce que sont les problèmes dits « ouverts » et en quoi ils se différencient des problèmes classiques. Nous tenterons alors d'évaluer les avantages mais aussi les inconvénients qu'ils peuvent présenter dans les apprentissages des mathématiques à l'école primaire. Puis, afin de mieux définir un cadre d'étude pour ces apprentissages, nous rappellerons les travaux de Gérard Vergnaud sur les champs conceptuels, notamment en lien avec les structures multiplicatives. Enfin, nous analyserons les résultats des évaluations nationales des acquis scolaires obtenus dans les classes de CM2 de l'Indre-et-Loire en mathématiques, ce qui devrait nous permettre de définir en quoi la résolution régulière de problèmes ouverts pourrait être bénéfique aux élèves dans leur apprentissage de la division.

I) LA REPRÉSENTATION ET LES SCHÉMAS DE PROBLÈMES

Les programmes officiels de l'école primaire insistent sur l'importance de la résolution de problèmes en mathématiques. En effet, cette activité est placée « au centre des activités mathématiques et permet de donner leur signification à toutes les connaissances qui y sont travaillées » (MEN, 2002). Par conséquent, de nombreux didacticiens ainsi que des chercheurs en psychologie cognitive se sont intéressés aux différents enjeux de cette activité du point de vue des apprentissages.

1) La représentation des problèmes

Les travaux de Jean Julo ont notamment mis en évidence l'importance de la représentation et des schémas de problèmes dans leur résolution. D'après lui, comprendre une situation équivaut à en construire une représentation mentale adéquate, c'est-à-dire à effectuer une combinaison de processus permettant de traiter des informations provenant de notre environnement. Lorsqu'on parle de représentations liées à la résolution de problèmes, on parle en fait de représentations ponctuelles et occasionnelles, utilisables dans certaines situations précises : elles sont appelées des représentations « particularisées ». On peut les opposer aux « représentations du monde » qui ont, quant à elles, une dimension plus stable et plus permanente.

De plus, Jean Julo considère que l'on peut diviser les processus psychologiques mis en œuvre dans la résolution de problèmes en deux catégories : d'une part ceux utilisés lors de la phase de représentation et d'autre part ceux qui sont liés à l'action.

En termes de représentations particularisées, les situations de résolution de problèmes présentent des spécificités. En effet, une des particularités des énoncés de problèmes est qu'ils présentent généralement une ou plusieurs questions à résoudre. Par conséquent, construire la représentation d'un problème, c'est d'une part se représenter un objet particulier lié au contexte de l'énoncé et d'autre part se représenter la tâche spécifique demandée, liée à cet objet.

La construction de représentations liées à la résolution de problèmes est un phénomène cognitif complexe dans lequel Jean Julo analyse trois processus qui lui semblent particulièrement importants : le processus d'interprétation et de sélection, le processus de structuration et le processus d'opérationnalisation. Ces trois processus, que nous allons évoquer, ne sont pas linéaires mais au contraire ils interviennent simultanément et interagissent.

a) Le processus d'interprétation et de sélection

Le contenu d'une représentation rassemble certaines données utiles à la tâche envisagée. Mais ces informations ne sont généralement pas accessibles directement à la simple lecture de l'énoncé et doivent préalablement être décodées afin d'intégrer la représentation. Ce qui est donné au départ, c'est un ensemble d'éléments, communément appelé « contexte sémantique » que l'on doit interpréter afin d'accéder aux données pertinentes en vue de la tâche à réaliser. Le contenu d'une représentation est donc le résultat d'un processus d'interprétation, guidé par les connaissances dont nous disposons et conduisant à une sélection de certaines informations utiles. L'énoncé du problème et le contexte sémantique forment donc un contrat de communication entre celui qui pose le problème et celui qui tente de le résoudre.

b) Le processus de structuration

Les représentations apparaissent comme des entités avec une organisation structurée. En effet, leur contenu est un ensemble organisé d'éléments solidaires les uns des autres avec un fonctionnement logique. Par conséquent, il ne suffit pas qu'une nouvelle information apparaisse pour qu'elle modifie cette structure et permette de faire évoluer la représentation initiale. On constate également que lorsqu'on peut se référer à un problème semblable, la structuration de la représentation est extrêmement forte et qu'il est très difficile de la modifier.

Il est donc légitime de s'interroger sur les phénomènes permettant de structurer une représentation, de la transformer ou éventuellement de la remettre en

cause afin d'en construire une nouvelle, plus performante, en vue de la tâche à effectuer. L'interprétation du contexte sémantique ainsi que l'analyse du problème influent sensiblement sur la structuration du contenu d'une représentation. Ainsi, on constate que certaines interprétations construisent une structure tellement forte qu'il devient très difficile de la remettre en cause et qu'elles empêchent alors la résolution du problème. De même, certaines de nos connaissances, auxquelles nous faisons appel pour résoudre un problème, peuvent structurer de manière importante nos représentations si elles correspondent à ce que Jean Julo appelle un « prototype » de problème. La procédure qui est mise en place dans la résolution est alors automatisée et immédiate ce qui implique qu'il soit très difficile de modifier ou de remettre en cause cette représentation. Cependant, ces connaissances spécifiques ne peuvent pas uniquement être assimilées aux prototypes de problèmes. En effet, Jean Julo envisage que tous les problèmes que nous rencontrons sont mémorisés sous une forme spécifique et qu'ils sont intégrés à nos structures cognitives afin d'être « rappelés » en vue de futures résolutions. Il utilise le terme de « schémas de problèmes » pour désigner les formes sous lesquelles cette mémoire de problèmes intervient dans la structuration de représentations.

c) Le processus d'opérationnalisation

La représentation que nous construisons en vue de la résolution d'un problème a pour but de nous permettre la réalisation d'une phase d'action. Le processus d'opérationnalisation est ce qui permet ce passage à l'action, qu'elle soit effective ou mentale. Afin de rentrer dans ce processus, il nous faut faire appel à certaines connaissances, nommées connaissances opératoires, provenant de notre expérience basée sur des résolutions antérieures de problèmes. Cependant, une représentation peut être plus ou moins opérationnelle dans le sens où elle peut être plus ou moins efficace.

Un exemple d'opérationnalisation de la représentation consiste à transformer l'énoncé, à le coder de façon à le rendre plus clair. Cette simple transformation permet souvent de modifier le contenu de notre représentation et de renforcer sa structuration afin d'atteindre une seconde phase d'opérationnalisation consistant en une suite de déductions aboutissant à la résolution du problème. Ce processus

d'opérationnalisation est primordial, car on constate qu'une absence d'action conduit rapidement à une grande frustration et souvent à une incapacité de faire évoluer notre représentation. C'est sûrement ce que ressentent de nombreux élèves dits « en difficulté » qui échouent face à une nouvelle tâche.

Aussitôt que notre représentation nous le permet, nous agissons et le fait d'entrer dans cette phase d'action est vraisemblablement un des moteurs de ses transformations. Opérationnaliser peut tout d'abord avoir comme conséquence le renforcement de la structure de la représentation avec parfois des effets négatifs si celle-ci n'est pas adéquate à la résolution du problème. Cependant, cela peut également conduire à renforcer son contenu, son organisation, et sa pertinence en vue de la tâche à atteindre. Une autre répercussion positive du processus d'opérationnalisation est de permettre l'intégration de nouveaux éléments dans la représentation. Ces fonctions bénéfiques correspondent au rôle connu du tâtonnement dans la résolution de problème.

La nature du processus permettant à des connaissances opératoires de s'intégrer dans la structure d'une représentation et impliquant ainsi le passage à l'action n'est pas actuellement bien connu. Cependant, Jean Julo évoque trois cas pouvant se présenter. Tout d'abord, celui dans lequel les connaissances opératoires sont immédiatement mobilisables et qui correspond vraisemblablement à la mobilisation d'un prototype de problème. Le second cas est celui des problèmes dits de transformation d'états dans lesquels certaines connaissances opératoires, décrites comme des règles, peuvent orienter l'action dans un sens ou dans un autre permettant l'élaboration de stratégies pertinentes. Le dernier cas s'applique particulièrement aux problèmes liés aux mathématiques. Les connaissances opératoires ne sont plus alors considérées comme des règles d'actions mais comme résultantes de l'acquisition de certains outils de modélisation.

Enfin, il paraît intéressant de citer ici un phénomène particulier : le phénomène d'incubation. Il s'agit, après avoir réfléchi longtemps à un problème sans en trouver la solution, de ne plus y penser et de voir la solution apparaître soudainement de façon évidente. Il est probable que plusieurs phénomènes sous-jacents soient actifs comme un « relâchement » de la structuration de notre représentation permettant alors une modification plus facile de son contenu ainsi que l'intégration de nouveaux éléments.

2) Les schémas de problèmes

Si l'on se base sur les théories psychologiques actuelles, il apparaît que certaines connaissances spécifiques jouent un rôle déterminant dans la construction de représentations adéquates à la résolution de problèmes. Jean Julo en mentionne deux qui lui semblent particulièrement importantes : d'une part celles liées aux outils de modélisation pouvant s'acquérir indépendamment de nos expériences personnelles et concernant des objets culturels, et d'autre part celles liées directement aux situations auxquelles nous avons été personnellement confrontées et grâce auxquelles nous avons pu construire des représentations. Ces dernières sont communément appelées « schémas de problèmes » et pourraient selon Jean Julo avoir un rôle primordial lors de la structuration des représentations liées à la résolution de problèmes. En effet, ces schémas pourraient être transférables à différents problèmes présentant des similitudes et être stockés dans une mémoire spécifique.

a) Les transferts analogiques et la formation de schémas

Dans le domaine de la psychologie de l'apprentissage, le terme de transfert désigne l'effet produit par la réalisation d'une tâche précise sur la réalisation d'une tâche ultérieure. Si, lors de la résolution successive de problèmes, l'existence de tels phénomènes de transfert est reconnue, les processus cognitifs qui en sont à l'origine sont, quant à eux, encore mal appréhendés. Par exemple, il est souvent difficile d'un point de vue expérimental, de déterminer si ces processus interviennent lors de la procédure et de l'action, lors de la mobilisation d'une représentation voire même lors des deux à la fois.

Une expérience décrite par Jean Julo a permis de montrer qu'il existait un lien fort entre le fait d'être capable d'explicitier une analogie sous forme mathématique entre deux problèmes et le fait de réutiliser une même procédure lors de la résolution de ces derniers, faisant apparaître ainsi des phénomènes de transfert évidents. En effet, lors de cette expérience, 88% des sujets qui ont été capables d'explicitier l'analogie entre les deux problèmes proposés ont tenté de mettre en œuvre la procédure présentée dans le premier problème pour résoudre le second. Néanmoins,

seuls 67% des sujets ayant explicité cette analogie ont réussi à résoudre le second problème. On constate donc que l'élaboration par certains sujets d'un schéma abstrait de solution ne leur a pas permis automatiquement de rendre opérationnelle leur représentation et par conséquent de résoudre le second problème. Jean Julo émet donc l'hypothèse qu'à partir d'une procédure permettant de résoudre un problème, nous sommes capables de créer un schéma réutilisable pour résoudre un problème analogue, mais que ce schéma doit être suffisamment abstrait, basé sur une notion mathématique par exemple, pour que nous soyons capables de l'adapter à un nouveau problème sans que les différences entre les deux problèmes puissent être des obstacles à ces transferts. De plus, il semble important que la procédure initiale soit élaborée par le sujet lui-même lors d'une activité de recherche, et non pas simplement donné par une tierce personne, afin de renforcer les possibilités de transferts.

Cependant, Jean Julo reconnaît que ces résultats ne sont pas suffisants pour expliciter la nature exacte des connaissances désignées sous le terme de schéma de problèmes ni pourquoi certains sujets sont capables de se les représenter de façon performante alors que d'autres non. Ils permettent toutefois d'émettre l'hypothèse selon laquelle les schémas de problèmes ne se formeraient pas suivant la même logique que les connaissances liées à l'action.

b) L'hypothèse d'une mémoire de problèmes

Plusieurs travaux ont permis de mettre en relation les schémas de problèmes avec la structure de certains problèmes. Il est également apparu que certains types de problèmes présentaient des difficultés de résolution principalement dues à leurs structures relationnelles particulières. Des recherches ont alors été effectuées afin de classer ces problèmes et de tenter d'observer en quoi les schémas correspondant à chacune de ces classes pouvaient influencer sur la réussite de la résolution des problèmes avec évidemment des perspectives d'application de telles relations dans l'enseignement. Un des objectifs de ces recherches étant de fournir aux élèves des moyens d'identifier ces différentes classes ainsi que des modes de représentation adaptés à chacune. Cependant, il est probable que ces schémas correspondant à de telles classes de problèmes ne soient pas les seuls à intervenir dans la construction

de nos représentations et qu'ils ne constituent qu'une petite partie de notre mémoire de problèmes.

Une autre hypothèse relierait la maîtrise d'un domaine spécifique avec la qualité des schémas dont nous disposons. Ainsi, lorsqu'on leur demande de classer des problèmes, les spécialistes d'un domaine prennent généralement en compte la « structure profonde » des problèmes alors que des novices considèrent davantage les indices de surface comme ceux liés au contexte sémantique.

Enfin, il est possible d'envisager que, d'un point de vue cognitiviste, ces schémas de problèmes ne soient pas véritablement des objets en tant que tels. Lors de résolutions de problèmes, nous pourrions mémoriser des éléments très variés et très parcellisés que nous ne réassemblerions en schéma qu'en fonction de notre interprétation des données présentes lors d'une nouvelle recherche. Un tel phénomène reviendrait en réalité à assimiler la mobilisation d'un schéma au processus de structuration lui-même.

Les travaux de Jean Julo, qui ont mis en évidence l'importance des représentations et des schémas de problèmes, présentent un intérêt d'autant plus grand que l'apprentissage de la résolution de problèmes est un enjeu essentiel de l'enseignement des mathématiques.

II) LES SPÉCIFICITÉS DES PROBLÈMES POUR CHERCHER

Comme pour la plupart des autres matières, les exercices d'entraînement et de mémorisation sont pratiqués dans l'enseignement des mathématiques. Cependant, ce dernier ne peut être réduit à ces seuls exercices puisque l'un de ses principaux objectifs réside dans l'apprentissage de la résolution de problèmes, c'est-à-dire la capacité à trouver une ou plusieurs réponses à une question ou à une injonction posée à partir de données connues.

Parmi les problèmes abordés généralement en mathématiques, il convient de distinguer les problèmes ouverts qui sont spécifiques. Quelles sont leurs caractéristiques ?

Cinq catégories de problèmes, outre ceux qu'on appelle « pour chercher », sont distinguées par Roland Charnay, dans ses études sur la didactique des mathématiques : tout d'abord les problèmes visant la construction de nouvelles connaissances chez les élèves et longtemps nommés les « situations problèmes ». Puis les « problèmes de réinvestissement », permettant la réutilisation de connaissances acquises ou en cours d'acquisition ainsi que les problèmes parfois appelés « de transfert » ayant pour but d'étendre le champ d'application de certaines notions préalablement étudiées. Il distingue également les problèmes dits « de synthèse » ou « d'intégration » dont la résolution demande l'utilisation conjointe de plusieurs catégories de connaissances et enfin les « problèmes d'évaluation » permettant de vérifier le niveau de maîtrise de certaines connaissances. On constate, au travers de cette catégorisation, que tous les types de problèmes qu'elle concerne sont avant tout centrés sur l'apprentissage et la maîtrise de notions mathématiques : les élèves doivent être en mesure de résoudre ces problèmes en utilisant un raisonnement « expert » basé sur des connaissances qu'ils ont déjà acquises ou dont ils sont en cours d'acquisition.

Les problèmes ouverts, terme introduit par une équipe de l'IREM de Lyon, sont en revanche principalement destinés à développer chez les élèves un comportement de recherche et des compétences d'ordre méthodologique. Le but n'est alors nullement de résoudre le problème avec une solution experte, puisqu'en

général les élèves n'en ont pas encore les compétences. Au contraire, ils doivent mettre en œuvre des solutions personnelles, émettre des hypothèses, les tester, faire des essais successifs et enfin élaborer une solution originale dont ils évalueront la validité et qu'ils seront capables d'expliquer.

Selon l'équipe de l'IREM de Lyon, l'énoncé d'un problème ouvert est court, il n'induit ni la méthode, ni la solution et ne doit être en aucun cas l'application de résultats présentés récemment en cours. Cependant, il est nécessaire que le domaine conceptuel du problème soit suffisamment familier aux élèves pour qu'ils puissent aisément s'approprier la situation. Celle-ci peut être très variée et être issue de la vie de classe ou de la vie courante, s'appuyer sur des jeux ou des objets mathématiques, ou encore provenir d'autres domaines de compétences enseignés à l'école. Il est également possible de les présenter sous différentes formes : celle d'une expérience concrète, d'un support écrit ou d'une présentation orale, car il ne faut pas oublier que l'écrit peut représenter un obstacle à la compréhension de la situation chez certains élèves. Or les élèves doivent être en mesure de s'approprier aisément la situation énoncée et de se représenter facilement la tâche qu'ils ont à accomplir car l'exercice ne doit pas résider dans la compréhension de la situation, mais dans les moyens à mettre en œuvre pour résoudre le problème posé.

Dans les Documents *d'Accompagnement des Programmes* de 2002 liés à l'enseignement des mathématiques, il est conseillé de proposer ce type d'exercices à de petits groupes d'élèves après un temps de réflexion personnelle de chacun. En effet, les échanges à l'intérieur du groupe sont un élément essentiel de ce travail puisqu'ils doivent permettre une émulsion permanente d'idées, les unes entraînant les autres. Après cette phase de recherche, la mise en commun, en classe entière, des solutions trouvées par les différents groupes semble intéressante. En effet, chaque groupe peut alors enrichir sa réflexion grâce aux idées avancées par les autres. Puis un second temps de recherche est souvent nécessaire afin d'affiner les solutions. Enfin, pour conclure la séance, il est indispensable d'effectuer une synthèse qui valorisera les qualités observées ainsi que les procédures intéressantes en vue d'une prochaine séance de problèmes « ouverts ».

III) L'ACQUISITION DE COMPÉTENCES EN LIEN AVEC LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES OUVERTS

Il semble que l'activité de résolution de problèmes ouverts soit encore peu répandue à l'école primaire. Ceci peut s'expliquer par le caractère inhabituel de cette pratique qui n'implique pas l'utilisation de connaissances récemment étudiées par les élèves ainsi que par l'absence d'énoncés de « problèmes pour chercher » dans les manuels scolaires.

Contrairement aux programmes officiels de 2002, ceux de 2008 ne mentionnent plus les « problèmes pour chercher ». Ce type d'exercices, abordé différemment selon les enseignants, semble avoir été inégalement profitable aux élèves. De plus, le rapport de l'Inspection de juin 2006 constate que, lors des situations de résolution de problèmes ouverts, différentes difficultés apparaissent telles que la mise en place d'une gestion constructive des erreurs des élèves, la valorisation de procédures efficaces par rapport à des procédures plus lourdes ou encore la façon de conclure une séance en faisant émerger de nouvelles compétences mathématiques chez les élèves.

Certains didacticiens, dont Alain Mercier, considèrent même que les problèmes pour chercher sont inutiles : « Il n'y a, en le cherchant, rien à trouver que le système d'enseignement ait identifié. »¹

Pourtant, il semblerait que la résolution de problèmes ouverts participe à l'acquisition de compétences externes aux mathématiques chez les élèves. D'une part, elle permet de modifier les positions respectives généralement établies entre les enseignants et les apprenants. En effet, l'élève, qui ne se considère souvent que comme un exécutant des tâches qu'on lui confie, se retrouve ici en position de chercheur, doit prendre des initiatives et faire preuve d'autonomie. La posture de l'enseignant est également différente dans ce contexte : il ne joue plus uniquement le rôle du détenteur des savoirs, mais accompagne l'élève dans sa recherche de la

¹ MERCIER Alain, 2008, Une question curriculaire de l'enseignement élémentaire des mathématiques : la « résolution de problèmes », In MEN-DGESCO *Actes du séminaire national sur les mathématiques à l'école primaire*, p. 107.

solution. D'autre part, ces situations permettent de créer des travaux collectifs et d'initier ainsi le développement de compétences transversales au sein d'une classe : il y a une collaboration et des échanges entre les élèves en vue d'un but commun.

Un deuxième argument en faveur des problèmes ouverts est de permettre aux élèves d'appréhender des processus de recherche dans lesquels ils effectuent eux-mêmes une partie des activités spécifiques des mathématiciens. En effet, lors de telles situations, les élèves sont amenés à tâtonner, à chercher, parfois à recommencer pour mieux avancer afin de résoudre un problème. Ainsi, ils prennent conscience que pour trouver, il faut chercher. Grâce à de telles démarches, certains élèves prennent conscience de leurs capacités et dépassent l'interdit qui leur impose de ne pas essayer autre chose que ce qu'ils croient attendu par l'enseignant. La résolution de problèmes ouverts permet également d'acquérir des compétences d'ordre méthodologique rarement travaillées par ailleurs : être en mesure d'organiser sa démarche, d'en mesurer l'efficacité et de la justifier en argumentant.

La résolution de problèmes pour chercher représente également un enjeu personnel pour les élèves : elle n'a pas pour seul objectif la recherche, elle se termine également par la satisfaction personnelle de trouver la solution soi-même et favorise l'estime de soi.

Cependant, comme le rappelle Catherine Houdement, légitimer la résolution de problèmes ouverts en classe nécessite que cette activité participe à l'acquisition et à l'utilisation de compétences internes aux mathématiques. Dans un de ses articles paru dans la revue *Grand N*, elle se propose d'étudier quatre apprentissages développés par les « problèmes pour chercher » : le réinvestissement de savoirs en jeu, l'apprentissage de raisonnements, de validation et enfin de modélisation.

Tout d'abord, Catherine Houdement précise que le choix des problèmes pour chercher proposés aux élèves doit s'effectuer en fonction des connaissances mathématiques de ces derniers à un moment donné. En effet, ces problèmes doivent faire appel dans leur résolution à un répertoire de savoirs disponibles pour les élèves afin qu'ils les réinvestissent.

De plus, la résolution de problèmes ouverts semble être une activité particulièrement favorable à l'apprentissage de différents modes de raisonnement tels ceux de type expérimental, ceux liés à l'utilisation directe des

écritures mathématiques, ou encore ceux de type déductif. Cependant, selon les exercices proposés, les raisonnements mis en œuvre peuvent être plus ou moins complexes. Catherine Houdement propose donc une hiérarchisation des raisonnements déductifs afin de préciser les objectifs visés lors de la résolution de différents « problèmes pour chercher ». Les raisonnements les moins complexes, qu'elle nomme D1, feraient appel à une déduction simple liée par exemple à la résolution sans difficulté particulière d'un sous problème. Puis elle qualifie de raisonnement déductif de type D2 la résolution de problèmes mettant également en œuvre une déduction simple, mais qu'il faut savoir isoler et construire par juxtaposition d'informations textuelles initialement séparées dans l'énoncé. Enfin, les raisonnements de type D3 seraient ceux dans lesquels il faut à la fois repérer des informations séparées dans un texte initial et être en mesure de les combiner afin d'accéder à une forme de résolution simplifiée. Ainsi, proposer des problèmes ouverts pouvant faire appel à des raisonnements de type D1, D2 ou D3 dans leur résolution semble légitime pour l'enseignement des mathématiques, puisqu'ils permettent de développer simultanément les capacités à planifier, à reformuler les textes proposés et à repérer les déductions à utiliser.

Bien que développer la capacité des élèves à utiliser des raisonnements déductifs pour résoudre des problèmes soit un des objectifs de l'enseignement des mathématiques, il ne faut pas pour autant perdre de vue l'intérêt que présente l'utilisation des raisonnements expérimentaux. En effet, du fait de leur universalité dans les sciences ainsi que de leur grande adaptabilité aux différentes situations, il semble intéressant de les conserver, d'autant plus qu'ils sont souvent imbriqués dans d'autres types de raisonnement.

Les problèmes pour chercher sont aussi l'occasion d'engager les élèves dans des processus de validation de leur démarche et de leurs résultats, de façon autonome. Il peut s'agir d'un contrôle par vérification de la conformité aux informations données, d'un contrôle du nombre de réponses ou de l'impossibilité de réponse, mais également d'un contrôle par consultation de documents de référence.

Enfin, les problèmes ouverts semblent fortement favoriser, chez les élèves, la construction et l'utilisation de modèles. Une simple représentation peut être qualifiée de modèle si elle possède une valeur générative et si les élèves ont donc l'occasion de la rencontrer plusieurs fois. Ainsi, une écriture arithmétique ou un dessin épuré à

caractère génératif sont des modèles au même titre qu'un réseau de connaissances mathématiques tel le modèle additif ou celui de la proportionnalité. La pratique régulière de résolution de problèmes ouverts relevant de schémas voisins est donc l'occasion de confronter les élèves à des raisonnements potentiellement liés à des « démarches modélisantes ». Mais elle peut également amener les élèves à questionner la pertinence de certains modèles, voire à les remettre en question.

Jean Julo émet également l'hypothèse selon laquelle la mémorisation des problèmes résolus favoriserait la résolution de futurs problèmes. D'un point de vue cognitiviste, il considère qu'il existe trois types de structures en mémoire qu'il nomme schémas de problèmes dont deux seraient particulièrement enrichis par la résolution de problèmes ouverts : d'une part ceux qu'il appelle les schémas de type « cas », formés des traces sémantiques en mémoire de certains problèmes et d'autre part les schémas de type « abstrait », fondés sur des analogies structurelles (au sens de Vergnaud 1990).

La résolution de problèmes ouverts permet donc aux élèves de développer de nombreuses compétences et leur apporte par conséquent une véritable aide dans leurs apprentissages mathématiques. Afin de mieux comprendre comment ces derniers se construisent, Gérard Vergnaud a étudié les éléments indispensables à l'acquisition de concepts mathématiques et en a défini un cadre d'étude dans sa théorie des champs conceptuels.

IV) LA THÉORIE DES CHAMPS CONCEPTUELS EN LIEN AVEC LES STRUCTURES MULTIPLICATIVES

La théorie des champs conceptuels, élaborée par Gérard Vergnaud, a pour but de donner un cadre à l'étude des apprentissages, notamment en mathématiques et en sciences. Afin de comprendre comment, lors d'un apprentissage, la « fonction adaptive de la connaissance » évolue, il faut l'étudier lors d'une action du sujet. En effet, un concept n'acquiert du sens pour un enfant qu'au travers des situations et des problèmes qu'il cherche à résoudre.

Il est donc nécessaire d'analyser la forme que peut prendre cette fonction adaptive lors de différentes actions. Étant donné que les processus cognitifs et les réponses diffèrent selon les situations auxquelles le sujet est confronté, il est intéressant de distinguer deux classes de situations : d'une part, celles pour lesquelles le sujet dispose des compétences nécessaires au traitement immédiat de la situation, et d'autre part, celles pour lesquelles il n'en dispose pas et pour lesquelles il doit donc passer par des temps de réflexion et d'exploration. Dans le premier cas, il est possible d'observer, pour une même classe de situations, des conduites organisées par un schème unique – un schème étant ici défini comme « l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données »². En revanche, dans le second cas, le sujet doit faire appel à plusieurs schèmes, les tester, les organiser ou les combiner, voire les abandonner.

Il existe de nombreux schèmes en mathématiques et chacun correspond à une classe de situations dont les caractéristiques sont précisément définies. Cependant, en cas de reconnaissance d'analogie ou de parenté de ces schèmes face à de nouvelles situations, ceux-ci peuvent être étendus à une nouvelle classe et on parle alors de généralisation, de transfert ou de décontextualisation. Inversement, ils peuvent initialement être appliqués, de façon inadéquate, à une classe trop large et le sujet doit alors effectuer un processus de restriction ou d'accommodation afin de les rendre opératoires.

² VERGNAUD Gérard, 1996, La théorie des champs conceptuels, *Didactique des mathématiques*, p. 199.

C'est dans ces schèmes que se trouvent les éléments cognitifs, nommés « invariants opératoires » ou « connaissances-en-acte » par Gérard Vergnaud, permettant à une action du sujet de devenir opératoire. Ces invariants opératoires, composés de concepts-en-acte et de théorèmes-en-acte, sont de trois types logiques :

- les invariants de type « proposition » susceptibles d'être vrais ou faux
- les invariants de type « fonction propositionnelle » indispensables à l'élaboration des propositions
- les invariants de type « argument » représentant des objets matériels, des individus, des relations ou même des propositions.

En plus des situations et des invariants opératoires, Gérard Vergnaud considère qu'il est nécessaire, pour bien appréhender un concept mathématique, de prêter également attention aux signifiants employés, qui peuvent être des mots, des symboles, des signes ou des énoncés.

Ainsi, un concept est toujours un triplet de trois ensembles : $C = (S, I, S)$. S étant « l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept », I « l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes » et S « l'ensemble des formes langagières permettant de représenter symboliquement le concept »³.

Nous centrerons ici notre étude sur les champs conceptuels en lien avec les structures multiplicatives puisque c'est dans ce cadre que se place l'apprentissage de la division que nous souhaitons étudier. Ce champ regroupe l'ensemble des situations ou des tâches faisant appel aux multiplications, aux divisions ou à la combinaison de ces deux opérations ainsi qu'à l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations. Sont donc concernées entre autres : les situations de proportionnalité, de fonctions n-linéaires, de rapport scalaire, de quotient et de produit de dimensions, de fractions, de multiples et de diviseurs... Et, parmi les théorèmes, il semble pertinent d'évoquer les propriétés d'isomorphisme de la fonction linéaire :

$$f(nx) = nf(x) \text{ et } f(n_1x_1 + n_2x_2) = n_1f(x_1) + n_2f(x_2)$$

³ VERGNAUD Gérard, 1996, La théorie des champs conceptuels, *Didactique des mathématiques*, p. 212.

ainsi que les propriétés concernant le coefficient constant entre deux variables linéairement liées :

$$f(x) = ax \Rightarrow x = (1/a)f(x).$$

Si l'on considère deux grandeurs M_1 et M_2 (par exemple le nombre d'objet et les prix correspondants) mises en relation par une telle fonction linéaire, il est possible de représenter cette relation sous la forme d'un tableau :

M1	M2
X	f(x)
Y	f(y)

Dans une telle configuration, il existe quatre structures de problème envisageables :

- celle liée à la multiplication : on recherche f(y) alors que $x=1$, f(1) et y sont donnés.
- celle liée à la division partition : on recherche f(1) alors que $x=1$, y et f(y) sont donnés.
- celle liée à la division quotient : on recherche y alors que $x=1$, f(1) et f(y) sont donnés
- celle liée à la quatrième proportionnelle : soit on recherche f(y) alors que x, f(x) et y sont donnés avec $x \neq 1$, soit on recherche y alors que x, f(x) et f(y) sont donnés avec $x \neq 1$.

Nous ne développerons dans cette étude que les situations liées à la division partition et à la division quotient, puisque c'est principalement l'apprentissage de ces deux notions qui nous intéresse.

Ainsi, pour la division partition, dans laquelle on recherche la valeur d'une part, on peut envisager l'exemple suivant : on partage 266 billes équitablement entre 14 enfants. Combien de billes obtiendra chaque enfant ?

Nombre d'enfants	Nombre de billes
14	266
1	?

Pour résoudre ce type de problème, il faut faire appel à une propriété de la fonction linéaire :

$$f(n) = f(1 \cdot n) = n f(1) \Rightarrow f(1) = f(n)/n$$

Et donc, dans cet exemple, $f(1) = 266/14 = 19$.

Pour la division quotient, dans laquelle on recherche le nombre de parts, il faut envisager un exemple du type suivant : on range 480 livres dans des cartons contenant chacun 30 livres. Combien remplit-on de cartons ?

Nombre de cartons	Nombre de livres
1	30
?	480

Dans cette situation, il existe deux raisonnements possibles :

– l'un est basé sur un coefficient k de proportionnalité entre deux variables et la propriété mathématique utilisée est la suivante :

$$f(n) = kn \Rightarrow n = f(n)/k$$

– l'autre est basé sur une relation scalaire et la propriété mathématique est alors la suivante :

$$f(n) = n f(1) \Rightarrow n = f(n)/f(1)$$

Et donc dans cet exemple, $n = 480/30 = 16$.

Les notions faisant appel à ces deux types de divisions peuvent présenter pour les élèves des difficultés très inégales, en fonction des valeurs numériques qui entrent en jeu ou du domaine d'expérience dans lequel elles doivent être effectuées. Cependant, il est intéressant de remarquer que les élèves de cycle 3, bien qu'ils ne

soient pas en mesure de théoriser de la sorte les raisonnements qu'ils mettent en œuvre dans ce type d'exercices, utilisent de façon naturelle et instinctive les concepts-en-acte décrits par Gérard Vergnaud.

Enfin, pour donner pleinement du sens aux concepts mathématiques, il faut prendre en compte la notion de signifiant et de signifié. En effet, ce sont les schèmes, évoqués à la fois par une situation ou un signifiant, qui donnent le sens de cette situation ou de ce signifiant pour un individu. Il est donc nécessaire de souligner le rôle de la fonction langagière et symbolique qui peut à la fois servir à désigner et à identifier des invariants, à aider au raisonnement et à l'inférence, mais également à planifier et à contrôler l'action.

V) LA PRATIQUE DES PROBLÈMES OUVERTS POUR UN APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUE : CELUI DE LA DIVISION AU CYCLE 3

L'étude présentée dans ce mémoire a pour objectif de définir l'aide que peut apporter la résolution de problèmes ouverts à des élèves de cycle 3 dans leur apprentissage de la division. Pour ce faire, il est nécessaire de préciser les difficultés qu'ils rencontrent généralement et nous allons donc analyser en ce sens les évaluations nationales effectuées en Indre-et-Loire par les élèves de CM2.

Nous souhaitons, à l'origine de cette étude, nous appuyer sur les évaluations nationales effectuées par l'ensemble des élèves de CM2 de l'Indre et Loire. Nous n'avons cependant pas réussi à y avoir accès. Par conséquent, nous analyserons celles recueillies dans la circonscription de Châteauroux en 2010 et concernant 559 élèves de CM2 (voir le document en annexe).

Ces évaluations semblent confirmer notre hypothèse de départ : l'apprentissage de la division ainsi que son utilisation lors de la résolution de problèmes présentent de réelles difficultés pour de nombreux élèves. En effet, on constate que le taux de réussite pour les items 82 et 83, concernant la capacité à effectuer une division d'un nombre entier ou décimal par un nombre entier, n'est que de 40%. De plus, 56% des élèves éprouvent également des difficultés à résoudre des problèmes relevant des quatre opérations (addition, soustraction, multiplication et division). Enfin, il est inquiétant de constater que seuls 27% des élèves de CM2 sont en mesure de valider les items 63 et 98, reflétant leurs capacités à organiser les données d'un problème en vue de sa résolution.

Les données ainsi recueillies tendent donc à prouver que la résolution de problèmes faisant appel à la division reste une activité difficile avec un pourcentage élevé d'échec, pour de nombreux élèves de cycle 3. Il semble que ces derniers rencontrent au cours de leurs apprentissages des difficultés à s'approprier certaines représentations mentales ainsi qu'à les rendre opérationnelles dans ces situations.

Cependant, comme le rappellent Jean Julo et Gérard Vergnaud, les processus complexes permettant de structurer et d'opérationnaliser ces représentations sont actuellement peu connus et nécessitent encore de nombreuses études. En effet,

bien que ces chercheurs formulent l'hypothèse de l'existence d'une mémoire liée à des schémas des problèmes et mise à profit lors de la résolution de problèmes mathématiques, les connaissances dans ce domaine sont insuffisantes pour expliciter précisément ces processus.

Face à ce constat, des didacticiens se sont interrogés sur l'utilisation, en classe, de problèmes spécifiques appelés problèmes ouverts qui se démarquent des problèmes dits « classiques » par l'importance qu'ils donnent au travail de recherche effectué par les élèves. Organisées de façon précise, des séances de résolution de ce type de problèmes, également appelés « problèmes pour chercher », pourraient favoriser l'apprentissage de nombreuses formes de raisonnement tout en permettant aux élèves de réinvestir leurs connaissances. C'est là la problématique de notre étude. Il est en effet possible que ces exercices contribuent à la structuration et à l'utilisation efficace de certaines représentations mentales liées à la résolution de problèmes.

Dans notre étude, afin d'analyser les apports de la pratique régulière de la résolution de problèmes ouverts en relation avec l'apprentissage de la division en cycle 3, nous nous demanderons si la résolution de « problèmes pour chercher » ne permet pas aux élèves de mieux appréhender globalement les problèmes faisant appel à la division, en favorisant une utilisation pertinente de modes de raisonnement déductif et en automatisant certains processus de validation de la démarche et des résultats.

Nous verrons également si la résolution de « problèmes pour chercher » n'est pas une aide pour certains élèves fortement inhibés en mathématiques et n'osant que très rarement s'investir dans les activités généralement proposées dans cette matière. Se retrouver dans une posture différente, proche de celle du chercheur, n'est-il pas un moyen non seulement de dépasser des blocages liés au fait que ces élèves doutent d'être capables de donner la réponse attendue, mais aussi de susciter chez eux un intérêt pour les mathématiques ?

VI) LA MÉTHODOLOGIE

Afin d'analyser l'apport de la pratique de problèmes ouverts dans l'apprentissage de la division, nous désirions, comme nous l'avons précisé antérieurement, mettre en place régulièrement, durant toute l'année scolaire, différentes séances de problèmes ouverts en lien avec la notion de division. Cependant, en raison de difficultés organisationnelles dues au contexte particulier de cette année, il n'a pas été possible d'atteindre le nombre de séances initialement envisagé. En effet, seules quatre séances de recherche ont été effectuées, suivies d'une séance « d'évaluation » lors de laquelle les élèves devaient résoudre un problème similaire à celui de la première séance, afin que leurs progrès puissent être évalués.

Pour que les séances soient le plus efficaces possible, nous avons exploité, comme nous l'avons prévu, les conseils d'organisation présentés par les équipes de l'IREM de Lyon et les *Documents d'Accompagnement des Programmes* de 2002.

1) Composition des groupes

Pour cette expérimentation qui s'est déroulée entre avril et juin 2014, j'ai travaillé avec la classe de CM1/CM2 dont j'ai la responsabilité tous les lundis et qui est composée de 6 élèves de CM1 et de 21 élèves de CM2.

Les quatre premières séances, lors desquelles j'ai proposé, à chaque fois, un nouveau problème aux élèves, ont duré 50 minutes. En revanche, la dernière, qui consistait en la résolution individuelle d'un problème, n'a duré que 25 minutes. De plus, étant donné que les phases de recherche nécessitaient la constitution de groupes de travail, j'ai constitué six groupes de quatre élèves et un groupe de trois, en répartissant dans chacun d'eux les élèves de CM1 et en prenant en compte les résultats généraux de chaque élève en mathématiques, afin que les groupes aient tous à peu près le même niveau. Cette répartition, attribuant ainsi à tous les groupes des élèves que je pensais être moteurs, devait éviter que certains d'entre eux ne soit dans l'incapacité d'entrer dans les activités de recherche.

2) Sélection des problèmes

Nous nous intéressons, dans cette étude, principalement à des situations en lien avec l'apprentissage de la division : d'une part, la division partition, avec laquelle on recherche la valeur d'une part et d'autre part, la division quotient, avec laquelle on recherche le nombre de parts. Par conséquent, afin de proposer aux élèves des problèmes ouverts en lien avec ces deux notions, nous leur avons proposé quatre situations faisant appel à des raisonnements déductifs qui, selon la hiérarchisation des problèmes effectuée par Catherine Houdement dans la revue Grand N⁴, appartiennent au type D3 : il s'agit de problèmes dans lesquels il faut à la fois repérer des informations séparées dans un texte initial et les combiner afin d'accéder à une forme de résolution simplifiée.

Nous avons sélectionné quatre problèmes avec des énoncés courts et dont les domaines conceptuels nous semblaient suffisamment familiers aux élèves pour qu'ils puissent aisément s'approprier les situations. Cependant, nous avons pris garde à ce que ces énoncés n'induisent ni la méthode, ni la solution.

a) Problème n°1

Paul a pesé ensemble deux fauteuils identiques et trois tables elles aussi identiques. La balance indique 33 kg. Antoine, lui, a pesé cinq tables identiques à celles de Paul. La balance marque 15 kg. Quel est le poids d'un fauteuil ?

b) Problème n°2

Pour équiper une école, une entreprise a expédié 3 chargements de 300 kg. Le premier chargement contient 15 tables et 30 chaises. Le second contient 25 tables. Le troisième contient 10 tables, 20 chaises et 5 armoires. Combien pèse une chaise, une table et une armoire ?

c) Problème n°3

⁴ HOUDEMMENT Catherine, 2009, Une place pour les problèmes pour chercher, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, p. 41.

Une bibliothèque doit déménager les 36000 livres qu'elle possède. Pour cela, on range les livres dans des cartons qui peuvent contenir 30 livres. Puis, on charge ces cartons dans des camions qui peuvent contenir 240 cartons. Combien doit-on utiliser de camions pour transporter l'ensemble des livres ?

d) Problème n°4

Une boutique de chocolats vient de recevoir 1940 chocolats noirs, 1940 chocolats au lait, 948 chocolats blancs et 528 chocolats au café. Cette boutique vend trois sortes de boîtes de chocolats :

- *La « petite boîte » qui contient 8 chocolats noirs et 8 chocolats au lait.*
- *La « boîte intermédiaire » qui contient 12 chocolats noirs, 12 chocolats au lait et 6 chocolats blancs.*
- *La boîte « grand luxe » qui contient 15 chocolats noirs, 15 chocolats au lait, 12 chocolats blancs et 12 chocolats au café.*

Combien de boîtes de chaque sorte cette boutique peut-elle fabriquer pour qu'il ne reste aucun chocolat ?

e) Problème « évaluation »

Un pâtissier vend deux sortes de boîtes de gâteaux toutes préparées : la première, qui contient 12 éclairs au chocolat et 8 meringues, coûte 78 euros. La seconde, qui contient 24 meringues, coûte 72 euros. Combien coûte un éclair au chocolat ?

Les deux premiers problèmes - ainsi que celui d'évaluation qui reprend la structure du problème n°1 - concernent principalement la division partition. Cependant, le premier possède deux inconnues (le poids d'une table et celui d'un fauteuil) alors que le second en possède trois (le poids d'une table, d'une chaise et d'une armoire). De plus, les nombres à manipuler sont plus importants dans le second problème, ce qui rend les opérations à effectuer plus complexes.

Ces deux problèmes possèdent une structure similaire. En effet, pour les résoudre, il faut tout d'abord identifier l'inconnue que l'on peut calculer en premier, en l'occurrence le poids d'un nombre précis de tables dans les deux exercices. Puis, il

faut calculer cette inconnue en faisant appel à l'une des propriétés de la fonction linéaire qui relie le nombre de tables à leur poids. Ainsi, si l'on appelle f la fonction linéaire reliant ces deux grandeurs, on peut représenter cette relation sous la forme du tableau suivant :

Nombre de tables	Poids correspondant en kg
X	$f(x)$
Y	$f(y)$

Une fois ce poids identifié, il faut l'utiliser en fonction de l'énoncé pour pouvoir retrouver une structure similaire et calculer ainsi la seconde inconnue. Enfin, il faut recommencer cette procédure pour calculer la troisième inconnue dans le problème n°2.

Dans ces deux problèmes, l'utilisation de la division partition est favorisée par le fait que l'on demande, à chaque fois, de calculer le poids d'une table, d'une chaise ou d'une armoire. Par exemple, dans le problème n°2, le calcul du poids d'une table relève du tableau suivant :

Nombre de tables	Poids correspondant en kg
25	300
1	?

En ce qui concerne les problèmes n°3 et n°4, nous a vous conservé la même évolution : le problème n°3 possède deux inconnues et le problème n°4 en possède trois. Les nombres utilisés dans les énoncés sont également de plus en plus importants. Cependant, s'il faut toujours commencer, pour résoudre ces problèmes, par identifier la première inconnue calculable, leur structure est différente puisqu'elle tend à favoriser l'utilisation de la division quotient.

Ainsi, le calcul du nombre de cartons dans le problème n°3 relève du tableau suivant :

Nombre de cartons	Nombre de livres
1	30
?	36000

Néanmoins, du point de vue du raisonnement, ces problèmes sont assez similaires aux deux premiers puisqu'il faut toujours réutiliser un résultat obtenu en fonction de l'énoncé pour calculer l'inconnue suivante.

3) Les procédures attendues des élèves

En raison des similitudes existant entre les différents problèmes que nous avons proposés aux élèves, nous ne décrivons que les procédures attendues pour le problème n°1.

a) Les procédures en lien avec les raisonnements déductifs

Tout d'abord, afin de résoudre un problème, il faut passer de la représentation de l'énoncé à l'élaboration d'une procédure de résolution. Les élèves doivent alors mettre en place, de façon consciente ou inconsciente, des stratégies de recherche. Nous nous attendons principalement à retrouver deux stratégies : d'une part, celle appelée par « chaînage avant » et d'autre part, celle appelée par « chaînage arrière ». La première consiste à utiliser, au fur et à mesure de la lecture de l'énoncé, les données présentes pour en déduire de nouvelles informations que l'on peut exploiter ensuite avec de nouvelles données. On tente ainsi d'aller des données vers la question.

Ainsi, dans le problème n°1, en lisant que deux tables et trois fauteuils pèsent 33 kg, on peut transformer ces données en schéma ou en équation :



ou

Si T correspond au poids d'une table et F au poids d'un fauteuil :

$$3T + 2F = 33kg$$

Mais ces données ne sont pas suffisantes pour résoudre le problème. Il faut donc continuer à lire l'énoncé pour découvrir que cinq tables pèsent 15 kg. Donc



ou Si T correspond au poids d'une table :

$$5 T = 15 \text{ kg}$$

De cette information, on pourra déduire par différentes procédures que nous décrirons par la suite que le poids de trois tables est 9 kg, ce qui est la donnée nécessaire à la poursuite de la résolution du problème. Enfin, la lecture de l'énoncé nous amène à prendre connaissance de la question à résoudre : « Quel est le poids d'un fauteuil ? » Il faut alors passer à la deuxième stratégie, celle par « chaînage arrière », qui consiste à identifier, à partir de la question, les éléments qu'il faut connaître pour pouvoir y répondre et à remonter ainsi de suite jusqu'à une ou plusieurs données.

Ainsi, dans le problème n°1, le chaînage arrière consiste à se demander ce qu'il faut connaître pour déterminer le poids d'un fauteuil. En l'occurrence, en fonction de l'énoncé proposé, il faut d'abord connaître le poids de deux fauteuils. Or, pour pouvoir le calculer, il faut connaître le poids de trois tables puisque l'on sait que deux fauteuils et trois tables pèsent 33 kg. Enfin, pour calculer le poids de trois tables, il faut utiliser le fait que cinq tables pèsent 15 kg.

On constate alors que, pour utiliser ces stratégies de façon pertinente, il est souvent nécessaire de les utiliser conjointement.

b) Les procédures pour calculer le poids de trois tables

Les procédures qui utilisent le passage par l'unité

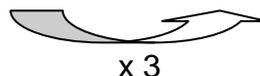
	Nombre de tables	Poids correspondant en kg
/ 5	5	15
	1	3
x 3	3	9

Ces procédures utilisent la propriété multiplicative de la linéarité ($f(xy) = xf(y)$) : elles permettent, après avoir calculé le poids d'une table, de trouver le poids d'un nombre quelconque de tables. Nous avons volontairement choisi des nombres favorisant l'utilisation de ces procédures, dans lesquelles les calculs sont assez simples, afin d'amener le plus possible les élèves à utiliser la division partition.

Le poids d'une table étant cinq fois inférieur à celui de cinq tables, le poids d'une table est égal à 3 kg ($15 / 5 = 3$). Puis, le poids de trois tables étant trois fois supérieur à celui de d'une table, on en déduit que trois tables pèsent 9 kg ($3 \times 3 = 9$).

Les procédures qui utilisent le coefficient de proportionnalité entre les deux grandeurs concernées

Nombre de tables	Poids correspondant en kg
5	15
3	9


x 3

Nous nous situons, dans ce problème, dans une situation de proportionnalité entre le poids des tables et leur nombre. En effet, le poids des tables est trois fois supérieur à leur nombre. Par conséquent, le poids de trois tables est égal à 9 kg ($3 \times$

3 = 9). Cependant, dans cette procédure également, les élèves doivent utiliser une division puisqu'ils doivent calculer le coefficient de proportionnalité à partir des données dont ils disposent en effectuant $15 / 5 = 3$.

Les procédures qui utilisent un rapport scalaire

	Nombre de tables	Poids correspondant en kg
x 0.6	5	15
	3	9

Ces procédures font appel à la propriété multiplicative de la linéarité qui permet de passer directement de 5 à 3 par l'utilisation d'un produit scalaire, ayant ici une valeur de 0.6. En effet, on considère que, trois tables correspondant à 0.6 table, le poids de trois tables correspond à 0.6 fois le poids de cinq tables. Le poids de trois tables est donc égal à 9 kg ($0.6 \times 15 = 9$).

Là encore, les élèves doivent faire appel à la division pour calculer la valeur du produit scalaire ($5/3 = 0.6$).

c) Les procédures pour calculer le poids d'un fauteuil

Une fois le poids de trois tables calculé, les élèves doivent se servir de ce résultat pour identifier le poids de deux fauteuils, en se servant des données présentes dans l'énoncé, comme nous l'avons décrit précédemment. En effet, ils doivent combiner le fait que trois tables et deux fauteuils pèsent 33 kg avec celui que trois tables pèsent 9 kg pour en déduire que deux fauteuils pèsent 24 kg ($33-9 = 24$).

Puis, en réutilisant l'une des procédures décrites précédemment, ils doivent en déduire qu'un fauteuil pèse 12 kg.

	Nombre de fauteuils	Poids correspondant en kg
/ 2	2	24
	1	12

x 2

4) Le déroulement des séances de recherche

Dans le cadre de cette étude, j'ai moi-même organisé les séances de recherche. Pour ce faire, je me suis fortement inspiré des conseils fournis par Catherine Houdement dans la revue Grand N et les séances ont toutes été conçues selon la même organisation. Elles se sont déroulées dans ma classe, pendant une durée de 50 minutes.

Ces activités de recherche n'étant pas habituelles pour les élèves auxquels j'enseigne, je me suis efforcé, à chaque début de séance, d'être le plus clair et le plus précis possible quant à la tâche qu'ils allaient avoir à effectuer. Je leur ai tout d'abord indiqué qu'ils allaient travailler sur la résolution de problèmes et que, bien que leurs feuilles soient relevées à la fin de la séance, ces activités ne seraient pas évaluées.

Puis, je leur ai indiqué les modalités de travail puisqu'elles diffèrent fortement de celles dont ils ont l'habitude : « Je vais vous distribuer à tous une feuille sur laquelle est noté l'énoncé d'un problème. Vous devrez répondre sur cette feuille avec votre stylo et non pas avec votre crayon à papier, car je dois comprendre comment vous vous êtes organisés pour essayer de résoudre ce problème. Vous pouvez inscrire sur cette feuille tout ce qui vous semble utile, mais je vous demande de ne rien effacer, même si vous pensez par la suite que ce n'est plus utile ; dans ce cas, vous pourrez le rayer. Sur votre feuille, vous pouvez dessiner, faire des schémas, des tableaux, des calculs... Tout ce qui peut vous aider à résoudre ce problème. Vous pouvez également me demander du matériel si vous pensez qu'il peut vous être utile. »

Enfin, je leur ai décrit l'organisation globale des séances : « Tout d'abord, je vais vous distribuer les feuilles et nous allons lire ensemble l'énoncé du problème, afin que tout le monde le comprenne bien. Puis, vous commencerez par essayer de le résoudre de façon individuelle. Je vous réunirez ensuite par groupe de quatre, afin que vous puissiez échanger vos idées et élaborer un raisonnement commun. Au milieu de la séance, nous ferons une pause pour que chaque groupe puisse exposer sa stratégie aux autres. Puis, vous retravaillerez en groupe afin d'affiner vos stratégies, de résoudre le problème et de décrire sur une feuille A3 les procédures que vous avez utilisées. Enfin, vous présenterez ces procédures au reste de la classe. »

En ce qui concerne la durée des différentes phases, nous prévoyons 5 minutes pour la présentation de la séance, la transmission des consignes et la distribution des feuilles. Puis, la phase de recherche individuelle durera 5 minutes et sera suivie par la première phase de recherche collective qui, elle, durera 15 minutes. 10 minutes seront ensuite consacrées à la mise en commun de milieu de séance avant que les élèves ne recommencent une phase de recherche collective de 10 minutes également. Enfin, les 10 dernières minutes de la séance serviront à effectuer, en classe entière, la synthèse des différentes procédures utilisées et à mettre en valeur les plus pertinentes.

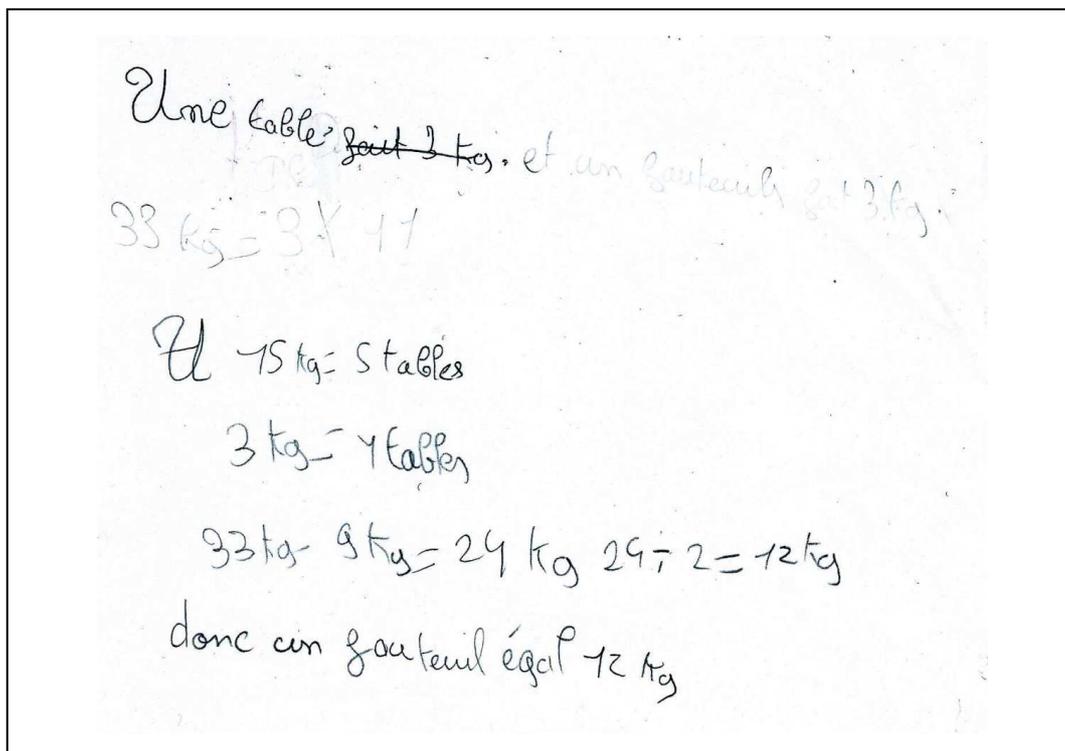
VII) L'ANALYSE DES RÉSULTATS APRÈS L'EXPÉRIMENTATION

Etant donné que cette étude s'est déroulée dans la classe où j'enseigne régulièrement, je savais la majorité des élèves capables d'utiliser de façon adéquate les divisions lors de la résolution de problèmes simples tels que : « Si 100 sucettes coûtent 150 euros, combien coûte 1 sucette ? » Cependant, je savais également que de nombreux élèves rencontraient des difficultés à résoudre des problèmes dès lors que l'énoncé de ces derniers se complexifiait. Par conséquent, nous analyserons d'une part les raisonnements proposés par les élèves et, d'autre part, l'utilisation de la division au sein de ces raisonnements.

1) Analyse de la séance n°1

La première séance a confirmé les difficultés de nombreux élèves à effectuer des raisonnements déductifs en adéquation avec un énoncé, puisqu'un seul groupe a réussi à résoudre le problème qui leur était proposé et ce, en utilisant le passage par l'unité.

a) Exemple de procédure correcte



Ici, l'élève représente tout d'abord la donnée de l'énoncé qu'il souhaite utiliser en premier : $15 \text{ kg} = 5 \text{ tables}$. Puis, mentalement, il effectue une division afin de calculer le poids d'une table (3 kg). Ensuite, même s'il ne l'explique pas par écrit, il calcule le poids de 3 tables (9 kg) et l'utilise pour trouver le poids de 2 fauteuils ($33 \text{ kg} - 9 \text{ kg} = 24 \text{ kg}$). Enfin, il effectue une deuxième division pour identifier le poids d'un fauteuil ($24 / 2 = 12$) et résoudre le problème.

b) Exemple de procédure erronée

Handwritten work showing an incorrect procedure:

$$\begin{array}{l}
 5 \text{ tables} = 15 \text{ kg} \\
 2 \text{ fauteuils} = 18 \text{ kg} \\
 1 \text{ fauteuil} = 9 \text{ kg}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 33 \\
 - 15 \\
 \hline
 18
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 18 & 2 \\
 - 18 & 9 \\
 \hline
 00 &
 \end{array}$$

Cette première séance a également été révélatrice des difficultés qu'éprouve une partie des élèves de cette classe à construire une représentation correcte d'un énoncé complexe et à effectuer un raisonnement déductif. En effet, quatre groupes ont effectué la même procédure erronée.

Bien que cet élève ait, comme dans l'exemple précédent, identifié le poids de 5 tables (15 kg), il n'a pas été en mesure d'utiliser cette donnée correctement. Voici le raisonnement qu'il a présenté à la classe en fin de séance : « Comme deux fauteuils et trois tables pèsent 33 kg, il faut retirer le poids des tables pour trouver

celui des fauteuils. Donc, on fait $33 - 15 = 18$. Et comme 18 kg c'est le poids de deux fauteuils, on le divise par deux pour trouver le poids d'un fauteuil. » Il n'a donc pas pris en compte, lors de son raisonnement, le fait que le poids de 5 tables était différent de celui de 3 tables. Néanmoins, bien qu'il ne dispose pas des « bons » résultats intermédiaires, il a utilisé une procédure correcte pour achever la résolution du problème : après avoir calculé le poids de deux fauteuils, il a divisé ce dernier par deux pour obtenir le poids d'un seul fauteuil.

Si le résultat final n'est pas correct, le travail effectué par les quatre groupes ayant présenté ce raisonnement est intéressant. En effet, ils ont cherché à utiliser les différentes données de l'énoncé, à les organiser et à les réutiliser, ce qui est le fondement d'un raisonnement déductif. De plus, leur utilisation de la division en fin de résolution était correcte. Enfin, lors de la synthèse réalisée en fin de séance, ils ont pris conscience de l'erreur qu'ils avaient effectuée.

c) Bilan de la séance n°1

Tout d'abord, nous avons pu constater des difficultés, pour de nombreux élèves, à travailler comme nous le leur proposons lors de cette première séance. En effet, cette classe a peu l'habitude de travailler en groupe, or, une partie importante du travail de recherche devait s'effectuer à plusieurs, afin que les élèves puissent échanger leurs idées, argumenter leur raisonnement et construire une solution commune. Malheureusement, il semble que dans certains groupes, les élèves n'aient pas réussi à s'organiser de la sorte : n'étant probablement pas suffisamment investis dans les activités de recherche, ils se sont souvent fortement laissés influencer par le premier élève proposant une solution, sans réellement chercher à la remettre en question. De plus, plusieurs élèves m'ont remis une feuille de recherche totalement vierge, considérant que, puisqu'ils travaillaient en groupe, ils n'avaient pas besoin de s'investir personnellement dans cette activité.

Il est également intéressant de remarquer que beaucoup d'élèves n'ont pas respecté la consigne consistant à laisser visibles toutes les « traces » de leur recherche. Cette rupture avec le contrat didactique habituel, dans lequel on leur demande généralement de remettre un travail « propre », laissant uniquement apparaître les réponses correctes, semble les avoir fortement perturbés : malgré mes

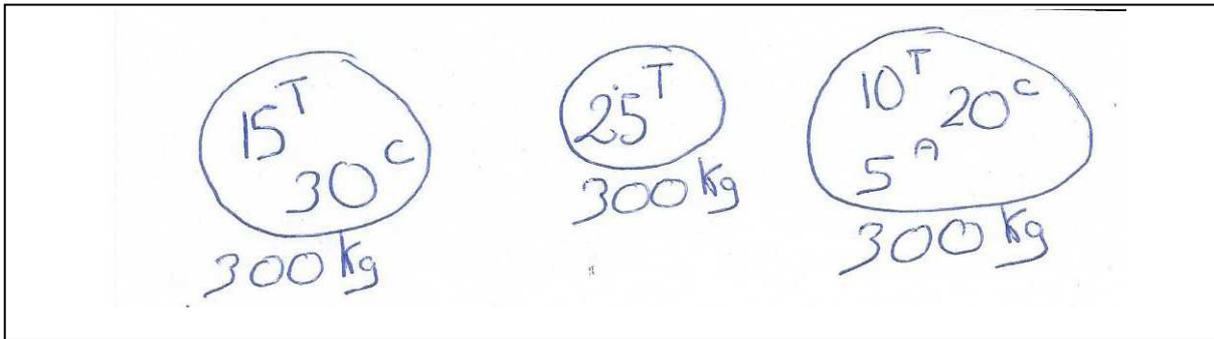
consignes, certains élèves ont effacé une partie de leurs travaux, par peur de laisser des erreurs sur une feuille qu'ils allaient me remettre.

Enfin, j'espérais, à l'issue de cette première séance de recherche, travailler avec les élèves la notion d'auto-validation des résultats en mathématiques. Par exemple, il aurait pu s'agir, pour les élèves pensant avoir résolu le problème, de vérifier leurs résultats en réutilisant les données initiales de l'énoncé. Cependant, par manque de temps, nous n'avons pas pu aborder ce genre de stratégies. En revanche, nous avons travaillé, au cours de la phase de synthèse, sur les représentations schématiques d'un énoncé de problème en mathématiques. En effet, lors de la présentation des travaux des différents groupes devant la classe, les explications des élèves se résumaient souvent, initialement, à la lecture des opérations qu'ils avaient effectuées. Mais cela ne permettait pas à ceux qui n'avaient pas réussi à résoudre le problème de comprendre les raisonnements de leurs camarades. Par conséquent, j'ai demandé de représenter au tableau les données de l'énoncé qui avaient été utilisées, afin d'illustrer les explications. Ainsi, progressivement, nous avons mis en valeur le fait qu'une représentation schématique ou sous forme d'un dessin de l'énoncé pouvait, d'une part, permettre de mieux le comprendre et, d'autre part, faciliter la résolution du problème.

2) Analyse de la séance n°2

La seconde séance s'est déroulée quinze jours après la première et j'ai pu constater, lors de celle-ci, un meilleur investissement de la part de nombreux élèves dans les activités de recherche. En effet, le nombre d'élèves ayant rendu, en fin de séance, une feuille blanche, argumentant que le problème était trop difficile, a fortement diminué. Nous avons en particulier remarqué qu'environ un tiers des élèves a eu recours à un dessin ou à un schéma pour représenter l'énoncé du problème et nous faisons l'hypothèse que cette démarche les a aidés à entrer dans la phase de recherche et d'opérationnalisation.

a) Exemple de schématisation de l'énoncé



En revanche, si cela leur a permis de débiter des tentatives de résolution, nous pouvons constater qu'une telle schématisation n'est pas toujours suffisante pour accéder à une représentation correcte du problème. En effet, plusieurs élèves ayant utilisé ce procédé ont ensuite effectué un raisonnement erroné. Nous avons d'ailleurs retrouvé la même procédure erronée chez des élèves provenant de deux groupes différents.

b) Exemple de procédure erronée

une chaise pèse: $20 + 30 = 50$
 $300 \div 50 = 6$

une chaise pèse 6 kg.

une table pèse: $15 + 10 + 25 = 50$
 $300 \div 50 = 6$

une table pèse 6 kg.

une armoire pèse: $300 \div 5 = 60$.

une armoire pèse 60 kg.

Voici l'explication orale fournie par l'élève ayant effectué ce travail, lorsqu'elle a présenté le raisonnement élaboré par son groupe : « On a vu qu'il y avait des chaises dans deux chargements. Donc on a calculé le nombre total de chaises ($20 + 30 = 50$) et comme les chargements pèsent 300 kg, on a divisé 300 par 50 ($300 / 50 = 6$). Donc une chaise pèse 6 kg. On a fait pareil pour les tables : il y en a aussi 50 ($10 + 15 + 25 = 50$). Donc, $300 / 50 = 6$: une table pèse 6 kg. Enfin, il y a 5 armoires dans le troisième chargement. Donc on a fait $300 / 5 = 60$: une armoire pèse 60 kg. »

Bien que certains élèves de ce groupe aient correctement schématisé l'énoncé, ils n'ont pas été en mesure, par la suite, d'exploiter cette schématisation. Il est possible que la procédure qu'ils ont utilisée, à savoir regrouper les éléments identiques pour en calculer le nombre total avant d'effectuer une division, ait été efficace pour résoudre un problème qu'ils ont cru être similaire à celui qui leur était proposé lors de cette séance. Mais, si cela n'était pas le cas, nous remarquons néanmoins que l'utilisation de la division est cohérente.

c) Exemples de procédures correctes

Au cours de cette séance, trois groupes ont finalement réussi à élaborer un raisonnement leur permettant de résoudre le problème. Cependant, seuls deux d'entre eux sont arrivés aux résultats attendus, puisque ceux du troisième ont été faussés par une erreur de calcul.

En fin de séance, nous avons pu constater que, si les raisonnements des deux groupes ayant résolu le problème étaient similaires, les procédures de calcul étaient différentes. Le premier groupe avait procédé principalement par « tâtonnements », en utilisant des méthodes de calcul « par complément » alors que le second groupe avait utilisé une méthode que l'on peut qualifier d'experte.

Procédure personnelle

un table = 12 Kilos une chaise = 4 Kilos une armoire = 20 K

1^{er} chargement (15T, 30C)

15 t. de 12 Kilos et de 180 Kilos

$$15 \times 12 = 180$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 12 \\ \hline 30 \\ 150 \\ \hline 180 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 \times 4 = 120 \\ + 180 \\ \hline 300 \end{array}$$

2^{ème} chargement (25 tables)

25 t. de 12 k et de 300 Kilos

$$25 \times 12 = 300$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 12 \\ \hline 50 \\ 500 \\ \hline 300 \end{array}$$

3^{ème} chargement (20T, 20C, 5A)

10 t. de 12 K et de 120 K

20 c de 4 K et de 80

5 A de 20 K et de 100 K

$$10 \times 12 = 120$$

$$20 \times 4 = 80$$

$$5 \times 20 = 100$$

$$\begin{array}{r} 120 \\ + 80 \\ + 100 \\ \hline 300 \end{array}$$

Après avoir identifié qu'il fallait calculer en premier le poids d'une table, en utilisant le fait que 25 tables pesaient 300 kg, les élèves de ce groupe ont cherché « le nombre par lequel il fallait multiplier 25 pour faire 300. » Ils ont trouvé 12 ($25 \times 12 = 300$) et en ont déduit qu'une table pesait 12 kg. Ils ont ensuite calculé le poids de trente chaises (120 kg) grâce aux données concernant le premier chargement qui

était composé de quinze tables et de trente chaises. Il est d'ailleurs intéressant de remarquer que, pour identifier ce poids, les élèves ont également utilisé une méthode « par complément » plutôt qu'une méthode faisant appel à la soustraction : « 30 chaises pèsent 120 kg car $120 + 180 = 300$ » (180 étant le poids de quinze tables et qu'ils avaient calculé précédemment). Enfin, ils ont utilisé la même démarche pour calculer le poids d'une armoire.

Procédure experte

1^{er} chargement = 300 kg
 $300 \div 25 = 12 \text{ kg}$

2^{ème} chargements = 300 kg
 $12 \times 15 = 180$
 $300 - 180 = 120$
 $120 \div 30 = 4$

3^{ème} chargements = 300 kg
 $10 \times 12 \text{ kg} = 120$
 $20 \times 4 = 80 \text{ kg}$
 $120 + 80 = 200$
$$\begin{array}{r} 300 \\ - 200 \\ \hline 100 \end{array}$$

 $100 \div 5 = 20$

1 table = 12 kg, 1 chaise 4 kg, armoire 20 kg

Lors de la synthèse effectuée en fin de séance, la présentation de ce groupe a permis de montrer à l'ensemble de la classe un raisonnement clair et efficace, accompagné de calculs précis. En effet, comme le montre la feuille de l'élève que nous avons proposée en exemple, chacune des opérations est effectuée dans un but précis et notamment les divisions, qui permettent à chaque fois de calculer le poids d'un élément de mobilier lorsque l'on connaît le poids de plusieurs éléments identiques.

d) Bilan de la séance n°2

A l'issue de cette séance, nous avons principalement mis en valeur, avec les élèves, deux éléments : d'une part, étant donné que beaucoup d'entre eux avaient tenté de réinvestir le travail effectué, lors de la séance précédente, sur la schématisation des énoncés de problèmes mathématiques, nous avons approfondi notre réflexion. Nous avons, par exemple, constaté qu'il existait de nombreuses façons de représenter un énoncé et qu'il s'agissait d'une démarche personnelle dont la pertinence résidait uniquement dans le fait qu'elle soit claire et précise pour la personne qui l'avait conçue. Cependant, nous avons également remarqué qu'une « bonne » schématisation n'était pas synonyme de résolution et qu'il s'agissait uniquement d'une aide possible à la résolution : en effet, malgré ce procédé, certains élèves n'ont pas réussi à résoudre le problème.

D'autre part, en nous appuyant sur les deux procédures différentes proposées par les groupes ayant résolu le problème, nous avons pu constater qu'il n'existait pas une unique méthode de résolution. Or, en mathématiques, il est courant que les élèves ne cherchent qu'à reproduire des procédures expertes, bien qu'ils ne se les soient pas encore réellement appropriées, en pensant qu'il s'agit là de l'unique réponse attendue. Mais, une telle attitude est généralement un frein à l'apprentissage des mathématiques puisqu'elle bloque l'élaboration de raisonnement personnel et c'est pourquoi il me semblait important, lors de ces séances de recherche, de faire apparaître la plus grande diversité possible dans les méthodes de résolution. Cependant, si les deux procédures présentées fonctionnent et sont pleinement recevables, nous avons insisté sur la plus grande efficacité de celle

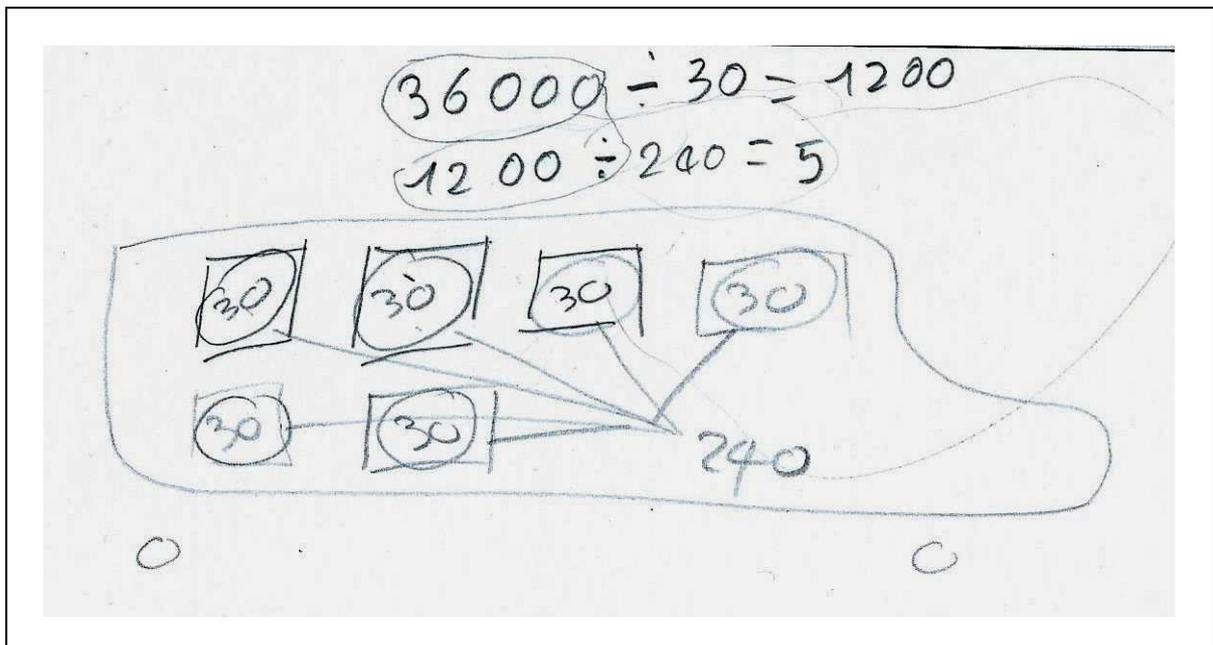
utilisant la division : d'une part, pour résoudre le problème proposé, l'utilisation de la division est plus rapide que celle de la multiplication par complément. D'autre part, afin de pouvoir, par la suite, résoudre des problèmes de plus en plus complexes, il est nécessaire que les élèves prennent conscience de l'intérêt de la division. Ainsi, nous avons fortement souligné la pertinence de l'utilisation de la division partition pour calculer le poids d'un élément lorsque l'on connaît celui de plusieurs éléments identiques.

Enfin, comme lors de la séance précédente, nous n'avons pas eu le temps de travailler la notion d'auto-validation des résultats. Par conséquent, à ce stade de notre expérimentation, nous avons pris la décision de renoncer à travailler cette notion, bien qu'une des hypothèses que nous désirions tester au cours de cette étude, était de savoir si la pratique de problèmes ouverts pouvait permettre, ou non, d'automatiser certains processus de validation autonome des résultats.

3) Analyse de la séance n°3

Certains des constats que nous avons établis lors de la seconde séance se sont confirmés au cours de la troisième séance : les élèves ont de nouveau bien participé à l'activité de recherche et très peu d'entre eux m'ont remis une feuille blanche. Il semble qu'ils aient progressivement pris conscience qu'en cherchant, ils avaient la possibilité de trouver une solution au problème proposé, même s'il ne s'agissait pas forcément de la solution experte. De plus, comme lors de la séance précédente, le problème a été résolu par différentes méthodes que nous avons pu comparer.

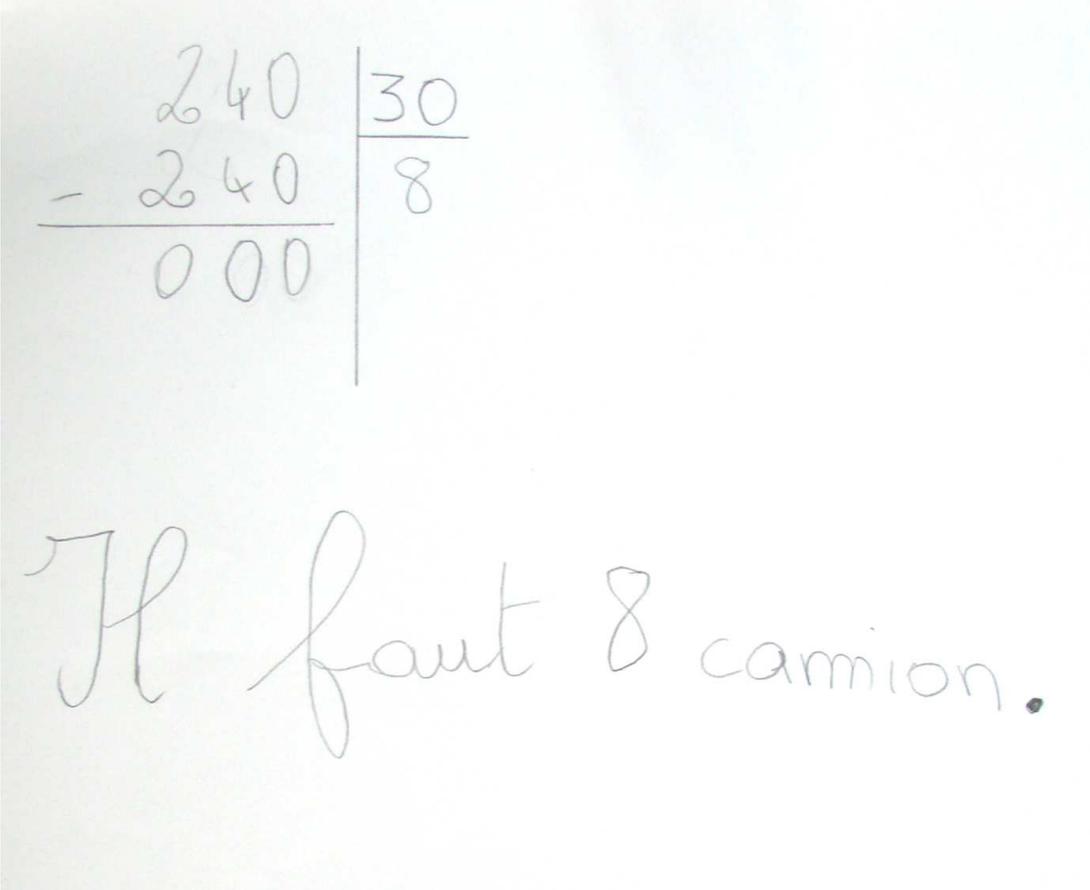
Il faut souligner cependant que le premier élément que nous avons remarqué, lors de l'analyse de cette séance, était l'absence de schéma ou de dessin sur les feuilles des élèves. En effet, un seul d'entre eux a eu recours à une telle représentation de l'énoncé.



Alors que nous avons insisté, lors de la synthèse de la séance précédente, sur l'aide que pouvait apporter une telle pratique dans la résolution de problèmes complexes, nous avons été étonnés de ne voir pratiquement aucun élève y avoir recours, cette fois-ci. Lorsque nous leur avons demandé la raison de cette absence, la majorité des élèves ont répondu ne pas en avoir ressenti le besoin. A ce stade de l'expérimentation, nous avons donc formulé deux hypothèses pouvant expliquer cette absence de schématisation : soit les élèves avaient été capables de se représenter mentalement le problème proposé et n'avaient donc pas eu besoin « d'écrire » cette représentation, soit le nombre de problèmes pour lesquels une schématisation de l'énoncé les avait aidés demeurait encore trop faible pour que cette pratique fasse véritablement sens et qu'ils pensent à l'utiliser de façon autonome.

Au cours de cette troisième séance de recherche, quatre groupes ont réussi à résoudre le problème et deux seulement ont proposé une procédure erronée.

a) Exemple de procédure erronée


$$\begin{array}{r|l} 240 & 30 \\ - 240 & \hline 000 & 8 \end{array}$$

Il faut 8 camion.

Plusieurs élèves ont présenté cette procédure, mais ils ont tous éprouvé des difficultés à expliquer pourquoi ils avaient effectué cette opération. De plus, certains d'entre eux ont exprimé le fait qu'ils n'étaient pas « sûrs d'eux » et qu'ils trouvaient « bizarre » de ne pas utiliser 36000 dans les calculs (36000 étant le nombre total de livres à déménager).

Il semble que ces élèves aient intuitivement perçu le fait qu'ils pouvaient utiliser une division pour résoudre ce genre de problèmes, mais qu'ils aient éprouvé des difficultés à clairement identifier le dividende et le diviseur lors de l'utilisation d'une division quotient. De plus, la présence d'un grand nombre (36000) a visiblement perturbé la phase d'opérationnalisation : n'étant pas habitués à effectuer des calculs avec de tels nombres, les élèves ont préféré effectuer un calcul plus commun ($240 / 30 = 8$), qu'ils savaient pouvoir réussir, bien qu'ils ne soient pas capables de le mettre en relation avec l'énoncé du problème.

b) Exemples de procédures correctes

En observant le travail des groupes ayant réussi à résoudre le problème, nous avons pu comparer, en fin de séance, deux procédures différentes : trois groupes ont utilisé une procédure experte et un quatrième a eu recours à une procédure « plus personnelle ».

Procédure experte

The image shows two handwritten division problems on a piece of paper. The first problem is $36000 \div 30 = 1200$, with the quotient 1200 written to the right of a vertical line. The second problem is $1200 \div 240 = 5$, with the quotient 5 written below a horizontal line. Below the calculations, the text reads: "Il faudrait 5 camion pour transporter les livres."

Les explications fournies par les trois groupes ayant effectué ces calculs sont assez similaires : « Il y a 36000 livres et un carton contient 30 livres. Donc, pour connaître le nombre de cartons dont on a besoin, on divise 36000 par 30 ($36000 / 30 = 1200$). Puis, on sait qu'un camion contient 240 cartons. Donc on divise 1200 par 240 et on trouve qu'il faut 5 camions ($1200 / 240 = 5$). »

Procédure personnelle

Problème

n°1 camion
240
X 30

000
+7200

7200

n°2 camion
240
X 30

000
+7200

7200

n°3 camion
240
X 30

000
+7200

7200

n°4 camion
240
X 30

000
+7200

7200

n°5 camion
240
X 30

000
+7200

7200

7200
+7200

14400

21600
+7200

28800

28800
+7200

36000

Il y a 5 camions

« Comme un camion peut contenir 240 cartons et qu'un carton contient 30 livres, on a fait $240 \times 30 = 7200$ pour connaître le nombre de livres que contient le premier camion. » Puis, les élèves ont reproduit cette procédure en additionnant, à chaque fois, le nombre de livres contenus dans un camion, jusqu'à atteindre les 36000 livres qu'il fallait déménager et ils en ont déduit qu'il fallait 5 camions.

c) Bilan de la séance n°3

En fin de séance, la comparaison que nous avons pu effectuer des deux procédures correctes que nous venons de présenter s'est révélée très bénéfique pour les élèves pour deux raisons principales. Tout d'abord, du point de vue du raisonnement, nous avons pu constater qu'il était possible de résoudre ce problème en utilisant les données fournies par l'énoncé dans deux ordres différents. En effet, les élèves ayant effectué la procédure experte ont principalement utilisé un raisonnement par « chaînage avant », utilisant d'abord le nombre de livres total (36000) et la contenance d'un carton (30 livres), puis, dans un second temps, la contenance d'un camion (240 cartons) et le nombre de cartons qu'ils venaient de calculer (1200). En revanche, le groupe ayant utilisé la seconde procédure, a effectué un raisonnement plus proche du « chaînage arrière », puisque les élèves ont, tout d'abord, utilisé la contenance d'un camion (240 cartons) et celle d'un carton (30 livres) pour en déduire le nombre de livres que pouvait contenir un camion (7200) et finalement le nombre de camions nécessaires au déménagement.

D'autre part, la comparaison de ces deux procédures s'est également révélée intéressante pour les élèves les moins à l'aise avec l'utilisation de la division quotient. En effet, nous avons pu, à partir de la « procédure personnelle », retravailler sur le lien existant entre addition réitérée, multiplication et division quotient. Nous avons constaté que pour trouver le nombre de camions nécessaires, le second groupe avait additionné 5 fois 7200, ce qui correspondait à multiplier 7200 par 5. Nous en avons déduit que « si chaque camion contient 7200 livres, alors 5 camions contiennent (7200 x 5) livres, c'est-à-dire 36000 livres. » Puis, nous nous sommes posé la question suivante : « S'il y a 36000 livres à transporter et que chaque camion contient 7200 livres, combien faut-il de camions ? » Plusieurs élèves, n'ayant pas utilisé la division quotient dans leur résolution, ont alors été capables d'expliquer qu'il fallait diviser 36000 par 7200 pour répondre à cette question. Enfin, en réutilisant la même formulation, nous avons pu détailler à nouveau la procédure experte : « S'il y a 36000 livres à transporter et que chaque carton peut contenir 30 livres, combien faut-il de cartons ? » ($36000 / 30 = 1200$) « S'il y a 1200 cartons à transporter et que chaque camion peut contenir 240 cartons, combien faut-il de camions ? » ($1200 / 240 = 5$)

Je n'avais pas envisagé, en préparant cette séance, d'effectuer un retour aussi systématique sur l'utilisation de la division quotient. Cependant, il s'est imposé par le fait que l'utilisation correcte de la division quotient avait causé plus de difficultés aux élèves que celle de la division partition.

4) Analyse de la séance n°4

La quatrième séance est, à proprement parlé, la dernière séance de recherche de cette étude. Le problème qui a été proposé aux élèves est donc plus complexe que tous ceux qu'ils ont étudiés précédemment : son énoncé est un peu plus long, il comprend de nombreuses informations et beaucoup de nombres dont certains sont importants. De plus, sa résolution s'effectue nécessairement en trois étapes successives puisqu'il faut tout d'abord calculer le nombre de « boîtes grand luxe », puis, en fonction des chocolats restant, calculer le nombre de « boîtes intermédiaires » et enfin calculer le nombre de « petites boîtes ».

Bien que ce problème soit long et complexe pour des élèves de CM2, j'ai pu constater une forte implication des élèves dans leur tentative de résolution : à l'exception d'une seule, les feuilles des élèves sont toutes remplies de dessins, de schémas, d'opérations et de ratures, prouvant qu'ils ont cherché, ont recommencé, se sont corrigés... Les élèves se sont donc véritablement positionnés en tant que chercheurs face à un problème qu'ils désiraient résoudre.

La présence de nombreux schémas ou de tableaux, reprenant les données de l'énoncé, (présents sur environ 80 % des feuilles) tend à favoriser l'hypothèse selon laquelle les élèves ont compris la pertinence de ce genre de représentations et l'utilisent lorsque l'énoncé leur paraît véritablement complexe.

1^{er} exemple de schématisation

petite	moyenne	grande	
8	12	15	chocolat noir (1940)
8	12	15	chocolat au lait (1940)
0	06	12	chocolat blanc (348)
0	0	12	chocolat au café (528)

On peut faire 239 On peut faire 11 On peut

2^{ème} exemple de schématisation

on cherche :

membres petites :

8	8
---	---

membres moyennes :

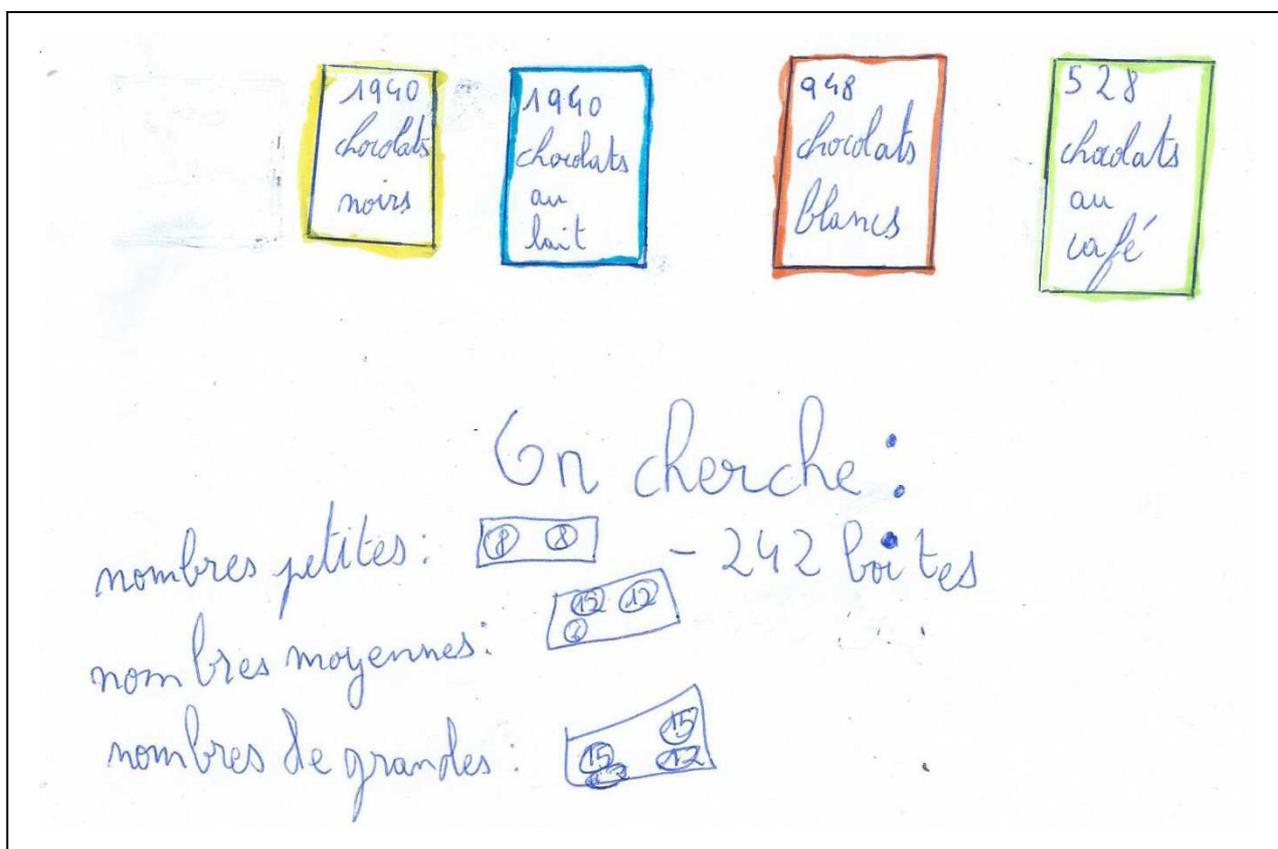
12	12
6	

membres de grande :

15	15
12	12

Cependant, comme nous l'avons vu précédemment, une schématisation correcte de l'énoncé n'aboutit pas nécessairement à une résolution du problème. En effet, malgré la mise en commun effectuée en milieu de séance, un groupe n'a pas réussi à amorcer de raisonnement correct : ils n'ont pas perçu en quoi, le fait qu'il n'y ait des chocolats au café que dans les « boîtes grand luxe » leur permettait d'en calculer le nombre et qu'il fallait nécessairement débiter par ce calcul.

a) Procédure erronée



Les élèves de ce groupe ont remarqué qu'il y avait le même nombre de chocolats noirs et de chocolats au lait (1940) et que chacune des « petites boîtes » en contenait autant (8 de chaque sorte) : « Comme il y a autant de chocolats noirs que de chocolats au lait et qu'on en met 8 de chaque dans les « petites boîtes », on peut calculer le nombre de « petites boîtes » en faisant $1940 / 8 = 242$. Mais, pour les autres boîtes, il n'y a pas le même nombre de chocolats alors on ne peut pas le calculer. »

L'utilisation faite par ces élèves de la division quotient est correcte, mais elle ne répond pas à la question posée dans le problème. En effet, ils ont « sélectionné » une partie de l'énoncé sans réussir à le percevoir dans sa globalité : le raisonnement qu'ils ont proposé correspondrait à un énoncé du type : « Une boutique de chocolats vient de recevoir 1940 chocolats noirs et 1940 chocolats au lait. Une boîte de chocolat contient 8 chocolats noirs et 8 chocolats au lait. Combien de boîtes de chocolats cette boutique peut-elle fabriquer ? »

Mais, à l'exception de ce groupe, tous les autres ont, a minima, résolu la première étape du problème en utilisant de façon adéquate la division quotient et ont trouvé que la boutique de chocolats pouvait fabriquer 44 « boîtes grand luxe » ($528 / 12 = 44$). Cependant, il s'est révélé compliqué, pour la majorité des élèves, de poursuivre la résolution : certains n'ont pas été en mesure d'utiliser le résultat qu'ils venaient de trouver et n'ont pas compris – ou ont oublié au moment de l'opérationnalisation – que, pour fabriquer 44 boîtes « grand luxe », on utilisait des chocolats de chaque sorte et qu'il fallait donc calculer le nombre de chocolats restant, avant de chercher à calculer le nombre des boîtes suivantes. Ainsi, deux groupes ont trouvé que l'on pouvait fabriquer 44 « boîtes grand luxe » ($528 / 12 = 44$), 158 « boîtes intermédiaires » ($948 / 6 = 158$) et 242,5 « petites boîtes » ($1940 / 8 = 242,5$). Ils ont donc utilisé les données brutes de l'énoncé sans les modifier progressivement en fonction de leurs résultats.

3 $528 \div 12 = 44$ boîtes

2 $948 \div 6 = 158$ boîtes

1 $1940 \div 8 = 242,5$ boîtes

35

b) Procédures correctes

Un autre groupe a, quant à lui, bien compris qu'il fallait retirer les chocolats utilisés pour fabriquer 44 « boîtes grand luxe », avant de calculer le nombre de « boîtes intermédiaires ». Mais, le manque de temps ainsi qu'une erreur de calcul les ont empêchés de finaliser la résolution du problème.

	petit	moyenne	grand	
chocolat au lait 1940		1280	660	
chocolat noir 1940		1280	660	
chocolat blanc 948	0	420	528	80 boîtes
choc café 528	0	0	528	44 grandes boîtes

« On peut calculer le nombre de « boîtes grand luxe » grâce aux chocolats au café : $528 / 12 = 44$. Donc, il y a 44 « boîtes grand luxe ». Dans les « boîtes grand luxe », il y a autant de chocolats au café que de chocolats blancs (12 par boîte). Donc, il y a aussi 528 chocolats blancs dans les « boîtes grand luxe ». Par contre, il y a 15 chocolats noirs et 15 chocolats au lait. Donc, on fait $15 \times 44 = 660$ pour trouver le nombre de chocolats noirs et de chocolats au lait qu'on a utilisé. Ensuite, il faut calculer le nombre de chocolats qu'il nous reste et on recommence : $1940 - 660 = 1280$ pour les chocolats noirs et les chocolats au lait et $948 - 528 = 420$ pour les chocolats blancs.

On peut donc calculer le nombre de « boîtes intermédiaires » grâce aux chocolats blancs : $420 / 6 = 80$. Donc il y a 80 « boîtes intermédiaires ». »

Le travail de ce groupe s'est arrêté ici. Cependant, bien qu'il y ait une erreur de calcul ($420 / 6 = 70$ et non pas $420 / 6 = 80$), et que l'exercice ne soit pas fini,

puisque les élèves non pas pu calculer le nombre de « petites boîtes », ils ont parfaitement réussi à élaborer un raisonnement déductif pertinent et ont utilisé, par deux fois, la division quotiention de façon adéquate.

Enfin, un groupe a résolu entièrement le problème et nous a présenté un raisonnement similaire à celui du précédent groupe, mais appliqué aux trois étapes successives.

$1940 - 660 = 1280$
~~$$\begin{array}{r} 1940 \\ \times 2 \\ \hline 3880 \end{array}$$~~

$1940 \textcircled{1}$
 $\times 2$
 $\hline 3880$

$$\begin{array}{r} 948 \\ + 528 \\ \hline 1476 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 528 \overline{) 1280} \\ \underline{48} \\ 80 \\ \underline{48} \\ 320 \\ \underline{320} \\ 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1940 \\ \times 2 \\ \hline 3880 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 948 \\ + 528 \\ \hline 1476 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1940 \\ \times 2 \\ \hline 3880 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 948 \\ + 528 \\ \hline 1476 \end{array}$$

1940
chocolats
noir

1940
chocolats
au lait

948
chocolats
blancs

528
chocolats
au café

Boîte grand luxe = 44 boîtes \leftarrow

$15 \times 44 = 660$ chocolat blanc noir et lait

$12 \times 44 = 528$ chocolat blancs et café

Boîte intermédiaire = 70 boîtes

$420 \div 6 = 70$ chocolat blanc

$70 \times 12 = 840$ chocolat noir lait

Boîte petite = 55 boîtes

$440 \div 8 = 55$

boîte grand luxe \rightarrow = 44 boîtes

c) Bilan de la séance n°4

J'avais conscience, en proposant aux élèves ce problème, qu'il était long et véritablement complexe. Cependant, aucun groupe n'a refusé de chercher à le résoudre, en prétextant, par exemple, qu'il était trop compliqué comme cela avait été le cas lors de la première séance. L'attitude des élèves tend donc à prouver qu'une pratique régulière de résolution de problèmes ouverts permettrait, pour certains élèves doutant de leurs capacités, d'entrer différemment dans les activités mathématiques et de dépasser certains blocages.

De plus, alors que l'énoncé du problème diffère fortement des énoncés classiques en lien avec l'apprentissage de la division, nous avons pu constater, dans la majorité des groupes, une utilisation pertinente de la division quotient.

Enfin, bien qu'un seul groupe ait résolu le problème dans sa globalité, la synthèse réalisée en fin de séance nous a permis d'étudier un raisonnement déductif complexe, dans lequel il fallait régulièrement effectuer des allers-retours entre des résultats intermédiaires et l'énoncé. Ce genre de pratiques, qui demeure malheureusement rare dans les apprentissages classiques, est pourtant essentiel au développement d'une pensée logique et à la perception de ce que sont réellement les mathématiques.

5) Analyse de la séance évaluation

Cette séance, qui s'est déroulée environ deux mois après la première, a été différente des précédentes puisqu'il ne s'agissait pas d'une séance de recherche et, par conséquent, nous l'analyserons quelque peu différemment.

Le problème choisi possédait exactement la même structure que le premier problème ouvert que nous avons proposé aux élèves, mais le domaine conceptuel ainsi que les nombres mis en jeu n'étaient pas identiques. De plus, cette séance ne s'est pas déroulée selon les mêmes modalités : elle a été plus courte (25 minutes), il n'y a eu aucun travail collectif puisque les élèves devaient résoudre ce problème de façon individuelle et aucune mise en commun n'a été effectuée, ni en cours ni en fin de séance. L'objectif était d'évaluer les progrès que les élèves avaient pu faire, à la suite des quatre séances de recherche.

Tout d'abord, nous avons constaté que quatre élèves avaient trouvé le bon résultat : le prix d'un éclair au chocolat est de 4,5 euros. Trois autres ont également effectué un raisonnement correct, mais ils n'ont pas été en mesure d'effectuer la deuxième division dont le résultat était décimal : ils ont effectué une division euclidienne en conservant un reste égal à 6 et ont donc trouvé qu'un éclair au chocolat coûtait 4 euros. Enfin, un dernier élève a effectué une procédure correcte mais, à cause d'une erreur de calcul, a trouvé un prix égal à 3,5 euros. Par conséquent, 8 élèves sur 23, soit environ 35 % des élèves présents, ont effectué une procédure correcte, en utilisant à chaque fois le passage par l'unité. Rappelons que seul un groupe de quatre élèves avait réussi à résoudre le problème de la première séance. De plus, deux élèves ont été en mesure d'effectuer la première étape de la résolution : ils ont calculé le prix d'une meringue en utilisant de façon adéquate une division partition ($72 / 24 = 3$). Cependant, ils n'ont pas réussi à utiliser ce résultat pour résoudre entièrement le problème et calculer le prix d'un éclair au chocolat. Enfin, 13 élèves, soit 56 % des élèves présents, ont effectué des raisonnements incorrects parmi lesquels nous avons retrouvé des procédures que nous avons déjà observées : par exemple, certains élèves n'ont interprété qu'une partie de l'énoncé (12 éclairs au chocolat et 8 meringues coûtent 78 euros) et en ont déduit qu'un éclair coûtait 6 euros ($78 / 12 = 6$).

Nous avons également observé, sur de nombreuses feuilles, et notamment sur celles des élèves n'ayant pas réussi à résoudre le problème, des dessins ou des schémas tentant de représenter l'énoncé. Cela tend à prouver que, même s'ils ne savaient pas directement résoudre le problème, ils ont cherché à se le représenter différemment afin d'essayer de trouver une solution.

CONCLUSION

Les résultats aux évaluations nationales en mathématiques que nous avons observées tendent à prouver que la résolution de problèmes faisant appel à la division est une activité difficile, avec un pourcentage élevé d'échec, pour de nombreux élèves de cycle 3. Face à ce constat, nous nous sommes interrogés sur l'utilisation, en classe, de problèmes spécifiques appelés « problèmes ouverts » : ce type de problèmes, également appelés « problèmes pour chercher », ne pourrait-il pas favoriser, d'une part, l'apprentissage de nombreuses notions mathématiques, en particulier celui de la division, et d'autre part, l'apprentissage de diverses formes de raisonnement ?

Afin d'essayer de répondre à cette question, nous avons proposé à une classe de 27 élèves de CM1/CM2 quatre séances fondées sur des problèmes ouverts, en lien avec la division partition et la division quotient.

Tout d'abord, nous avons constaté, au fur et à mesure des séances, un investissement de plus en plus important de la part des élèves dans les activités de recherche. Progressivement, ils ont pris conscience qu'il existait souvent différentes procédures pour résoudre un problème mathématique et qu'en cherchant, notamment en groupe, ils étaient en mesure d'en trouver au moins une. De plus, ces activités de recherche ont permis aux élèves de se familiariser avec différentes techniques de schématisation des énoncés. Or, d'après les travaux de Jean Julo, cette simple transformation de l'énoncé permet, d'une part, de rendre le problème plus clair et, d'autre part, de renforcer sa structuration en vue de sa résolution. Par conséquent, il semble que la pratique régulière de problèmes ouverts ait aidé les élèves à envisager différemment les activités mathématiques : d'une part, la schématisation des énoncés leur a permis de débiter des tentatives de résolution et d'éviter ainsi de ressentir la frustration que peut engendrer l'absence d'action face à un problème. D'autre part, lors de ces activités de recherche, ils ne cherchaient généralement plus à donner uniquement la réponse qu'ils croyaient attendue, mais bien à présenter une résolution personnelle du problème.

De plus, tous les problèmes que nous avons proposés aux élèves faisaient appel, dans leur résolution, à des raisonnements déductifs : il était nécessaire de repérer des informations séparées dans un texte initial, de les combiner et d'effectuer des allers-retours entre des résultats intermédiaires et l'énoncé. Nous désirions en

effet tester, lors de cette étude, si la pratique régulière de problèmes ouverts favorisait une utilisation pertinente de ces modes de raisonnement. Ces séances de recherche ont bien permis à tous les élèves de se confronter à ce type de pratiques, mais notre expérimentation n'a pas permis de répondre de façon catégorique à la question que nous nous étions posée : en effet, s'il est vrai que de plus en plus de groupes ont réussi progressivement à mettre en place des raisonnements efficaces ou, a minima, des raisonnements partiels, nous avons également constaté la persistance de raisonnements erronés. Ces quatre séances de recherche ne semblent donc pas avoir été suffisantes pour permettre à tous les élèves de faire évoluer certaines de leurs représentations et de créer, pour eux-mêmes, des « schémas de problèmes » adéquats (Jean Julo).

Tout au long de cette étude, nous nous sommes également interrogés sur la possibilité de faire progresser les élèves, grâce aux problèmes ouverts, dans l'utilisation de la division, lors de la résolution de problèmes. C'est pourquoi les deux premiers problèmes étaient en lien avec la division partition et les deux suivants avec la division quotient. L'une des principales difficultés rencontrées par les élèves était donc qu'ils devaient, sur le plan cognitif, être en mesure d'élaborer un raisonnement complexe, tout en y associant les opérations correspondantes, et notamment la division. Bien que cette tâche soit délicate, nous avons régulièrement constaté une utilisation pertinente de la division, même si elle n'aboutissait pas toujours à la résolution du problème. De plus, la nécessité de recourir à cette opération lors de la résolution de problèmes ouverts, qui diffèrent fortement des exercices d'application habituels, semble avoir renforcé, chez de nombreux élèves, la compréhension du concept de division. Cependant, il est également apparu que certains élèves n'avaient pas progressé. Par conséquent, de même que pour l'hypothèse précédente, le nombre restreint de séances de recherche (quatre), ainsi que le public sur lequel s'est appuyée notre expérimentation (une seule classe), ne nous permettent pas d'affirmer que la résolution de problèmes ouverts favorise nécessairement l'apprentissage de la division.

Enfin, nous avons émis l'hypothèse selon laquelle la résolution de problèmes pour chercher permettrait d'automatiser, chez les élèves, certains processus d'auto-validation de leurs résultats. Malheureusement, par manque de temps lors des

séances de recherche, nous n'avons pas pu aborder cette notion et cette question demeure donc ouverte.

Cependant, bien que l'expérimentation que nous avons mise en place cette année se solde par un bilan mitigé, elle ne remet nullement en cause l'intérêt des problèmes ouverts. Elle nous permet au contraire d'affirmer que des séances de recherche, à condition qu'elles soient organisées de façon régulière, tout au long de l'année scolaire, et que les élèves aient l'habitude d'en réaliser -ce qui n'était pas le cas de la classe dans laquelle s'est déroulée cette étude- sont réellement efficaces pour des élèves de cycle 3.

1) Les monographies

ARSAC Gilbert, MANTE Michel, 2007, *Les pratiques du problème ouvert*, SCEREN-CRDP, Académie de Lyon.

ARSAC Gilbert, GERMAIN Gilles, MANTE Michel, 1991, *Problème ouvert et situation-problème*, Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques, Académie de Lyon.

BRUN Jean dir, 1996, *Didactique des mathématiques*, Lausanne, Delachaux et Niestlé.

DE LA HAYE Fanny, LIEURY Alain, 2009, *Psychologie cognitive de l'éducation*, Paris, Dunod.

JULO Jean, 1995, *Représentation de problèmes et réussite en mathématiques*, Rennes, Presses Universitaires de Rennes.

2) Les articles

CHARNAY Roland, 1993, Problème ouvert, problème pour chercher, *Grand N* n°51, pp. 77 à 83.

HOUEMENT Catherine, 2003, La résolution de problèmes en question, *Grand N* n°71, pp. 7 à 23.

HOUEMENT Catherine, 2009, Une place pour les problèmes pour chercher, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 14, pp. 31 à 60.

HOUEMENT Catherine, 1999, Le choix des problèmes pour la « résolution de problèmes », *Grand N* n°63, pp. 59 à 76.

JULO Jean, 2002, Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ?, *Grand N* n°69, pp. 31 à 52.

MEN, 2005, Les problèmes pour chercher, *Documents d'accompagnement Mathématiques*, SCEREN-CNDP.

MEN, 2005, Résolution de problèmes et apprentissage, Des solutions personnelles vers les solutions expertes, *Documents d'accompagnement Mathématiques*, SCEREN-CNDP.

MONNIER Nathalie, 2003, Les schémas dans les activités de résolution de problèmes, *Grand N* n°71, pp. 25 à 47.

NGUALA Jean Berky, 2005, La multiprésentation, un dispositif d'aide à la résolution de problèmes, *Grand N* n°76, pp. 45 à 63.

PELTIER-LECULLEE Isabelle, SAYAC Nathalie, 2004, Questionner l'énoncé pour résoudre le problème, *Grand N* n°74, pp. 53 à 65.

ANNEXES

1) Les évaluations nationales en mathématique des 559 élèves de CM2 de la circonscription de Châteauroux en 2010

Synthèse Groupe		Mathématiques : CM2 janvier 2010 Châteauroux 559 élèves				
CM2		Synthèse Mathématiques				
		Réponses attendues	Items	Réussite Compétences	Réussite Domaines	
M A T H E M A T I Q U E S	Nombres 8 items	Écrire et nommer les nombres entiers, décimaux et les fractions.	70%	64	59%	53%
			48%	65		
		Passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement.	42%	66	37%	
			55%	67		
			15%	68		
		Ordonner, comparer, encadrer des nombres. Les placer sur une droite graduée.	61%	71	63%	
		46%	72			
		83%	73			
	Calculs 12 items	Connaître les résultats des tables de multiplication. Les utiliser pour retrouver les facteurs d'un produit.	78%	74	78%	55%
			77%	75		
		Calculer mentalement le résultat d'une opération ou d'une suite d'opérations, ou le terme manquant d'une opération.	53%	69	52%	
			50%	70		
			65%	78		
		Poser et effectuer une addition, une soustraction ou une multiplication sur des nombres entiers ou décimaux.	52%	79	59%	
		61%	80			
		59%	81			
Poser et effectuer une division d'un nombre entier ou décimal par un nombre entier.	48%	82	40%			
	32%	83				
Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations.	65%	76	44%			
	34%	77				
Géométrie 7 items	Reconnaître, et vérifier en utilisant les instruments, qu'une figure est un carré, un rectangle, un losange, un triangle particulier, un parallélogramme.	41%	88	52%	61%	
		64%	89			
	Reconnaître, et vérifier à l'aide des instruments que des droites sont parallèles ou que des droites sont perpendiculaires.	69%	87	69%		
	Tracer une figure à partir d'un programme de construction, d'un modèle ou d'un schéma codé, en utilisant les instruments.	74%	90	63%		
		72%	91			
62%		92				
	43%	93				
Grandeurs et mesures 7 items	Connaître les unités de temps et leurs relations, et calculer des durées. Lire l'heure sur un cadran à aiguilles.	66%	84	57%	38%	
		47%	85			
	Estimer ou mesurer une longueur, calculer un périmètre, une aire, un volume. Connaître les différentes unités et leurs relations.	20%	94	16%		
		12%	95			
	Résoudre des problèmes concrets faisant intervenir des grandeurs et une ou plusieurs des quatre opérations.	64%	86	39%		
		35%	96			
18%		97				
Organisation et gestion de données 6 items	Lire ou produire des tableaux et les analyser.	39%	62	54%	38%	
		68%	61			
	Savoir organiser les données d'un problème en vue de sa résolution.	10%	63	27%		
		24%	98			
	Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité.	34%	99	32%		
	31%	100				

2) Le plan de séquence sur les problèmes ouverts

NOMBRES et CALCUL
SÉQUENCE D'APPRENTISSAGE : LES PROBLÈMES OUVERTS

Compétence à acquérir : Résoudre un problème faisant appel à un raisonnement déductif en lien avec la division.

PHASES D'APPRENTISSAGE		MISE EN PROJET		TEMPS D'APPRENTISSAGE	
SÉANCES	SÉANCE 1	SÉANCE 2	SÉANCE 3		
OBJECTIFS	<ul style="list-style-type: none"> • ENFANT Donner un sens à l'apprentissage. • ENSEIGNANT Se donner un objectif de compétence. <p><u>S'entraîner à :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Comprendre un énoncé de problème. - Résoudre un problème avec deux inconnues. - Comprendre l'utilisation de la division partition. - Effectuer un raisonnement déductif. 	<p>Construire une partie de l'objectif compétence</p> <p><u>S'entraîner à :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Comprendre un énoncé de problème. - Résoudre un problème avec trois inconnues. - Comprendre l'utilisation de la division partition. - Effectuer un raisonnement déductif. 	<p>Construire une partie de l'objectif compétence</p> <p><u>S'entraîner à :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Comprendre un énoncé de problème. - Résoudre un problème avec deux inconnues. - Comprendre l'utilisation de la division quotient. - Effectuer un raisonnement déductif. 		
ACTIVITÉS	<p><u>Situation problème :</u> Problème n°1</p> <p>Individuel :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Appropriation du problème. <p>Collectif :</p> <ul style="list-style-type: none"> - 1^{ère} phase de recherche en groupe. - Mise en commun - 2^{ème} phase de recherche en groupe - Synthèse. 	<p><u>Situation problème :</u> Problème n°2</p> <p>Individuel :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Appropriation du problème. <p>Collectif :</p> <ul style="list-style-type: none"> - 1^{ère} phase de recherche en groupe. - Mise en commun - 2^{ème} phase de recherche en groupe - Synthèse. 	<p><u>Situation problème :</u> Problème n°3</p> <p>Individuel :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Appropriation du problème. <p>Collectif :</p> <ul style="list-style-type: none"> - 1^{ère} phase de recherche en groupe. - Mise en commun - 2^{ème} phase de recherche en groupe - Synthèse. 		

PHASES D'APPRENTISSAGE		TEMPS D'APPRENTISSAGE	ÉVALUATION SOMMATIVE
SÉANCES		SÉANCE 4	SÉANCE 5
OBJECTIFS		<p>Construire une partie de l'objectif compétence</p> <p><u>S'entraîner à :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Comprendre un énoncé de problème. - Résoudre un problème avec deux inconnues. - Comprendre l'utilisation de la division quotient. <p>Effectuer un raisonnement déductif.</p>	<p>Faire le bilan des compétences acquises et non-acquises.</p>
ACTIVITÉS		<p><u>Situation problème :</u> Problème n°4</p> <p>Individuel :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Appropriation du problème. <p>Collectif :</p> <ul style="list-style-type: none"> - 1^{ère} phase de recherche en groupe. - Mise en commun - 2^{ème} phase de recherche en groupe - Synthèse. 	<p>Évaluation sommative : Problème n°5</p> <p>Individuel</p>

3) Les fiches de préparation de séances

SÉANCE 1/5
LES PROBLÈMES OUVERTS

CM1/CM2

Objectif(s) didactique(s) de la séance :

- Comprendre un énoncé de problème.
- Comprendre un raisonnement déductif avec 2 inconnues.
- Comprendre l'utilisation de la division partition.

Objectif(s) pédagogique(s) de la séance :

- Adopter une attitude de recherche.
- Organiser des données et les utiliser dans un ordre précis.
- Résoudre un problème faisant appel à la division partition.
- Mettre en place des procédures de contrôle autonome des résultats.
- Être capable de débattre, d'argumenter.

Place dans l'unité d'enseignement :

- Séance 1/5 : première séance sur la division partition ; problème à deux inconnues.

Date : ...

Durée : 50 min

Matériel à prévoir :

- 1 feuille d'énoncé du problème n°1 par élève / 1 feuille A3 par groupe / possibilité de matériel supplémentaire si un groupe en éprouve le besoin pour résoudre le problème.

Énoncé du problème :

- Paul a pesé ensemble deux fauteuils identiques et trois tables elles aussi identiques. La balance indique 33 kg. Antoine, lui, a pesé cinq tables identiques à celles de Paul. La balance marque 15 kg. Quel est le poids d'un fauteuil ?

Phases	Durée	Organisation	Objectifs de la phase	Activités de l'élève	Activités du maître	Matériel
Entrée dans l'activité	2'	Classe entière	Présentation de l'activité.	Écouter puis être en mesure de répéter les consignes.	<p><u>Consigne</u> : « Aujourd'hui, nous allons travailler sur la résolution de problème mathématique. Une partie de la séance se déroulera en groupe mais, pour l'instant, vous allez travailler individuellement. Je vais vous distribuer à chacun le même énoncé de problème que vous allez devoir essayer de résoudre aujourd'hui. Vous allez d'abord y réfléchir tout seul, puis, vous vous réunirez par groupe, afin de partager vos idées et d'essayer de résoudre complètement le problème. Je distribuerai également une feuille A3 à chaque groupe sur laquelle vous pourrez, à la fin, inscrire votre démarche. Chaque groupe ne devra donc présenter qu'une seule stratégie commune. Mais, au départ, vous chercherez sur la feuille que je vous distribue. Vous travaillerez avec votre stylo : ce n'est pas grave si vous vous trompez, vous pourrez rayer ce que vous avez écrit mais je souhaite pouvoir voir tout ce que vous écrivez pour chercher, même si vous ne vous en servez pas par la suite. Donc, s'il vous plait, n'effacer rien. Il n'y a pas forcément une seule bonne méthode pour résoudre ce problème, vous êtes donc libres de vous organiser comme vous le souhaitez. »</p> <p><u>Faire répéter la consigne par 2 ou 3 élèves pendant la distribution des énoncés</u></p>	1 feuille de recherche pour chaque élève.
Situation problème	5'	Individuel	Lire l'énoncé et s'appropriier le problème.	Prendre connaissance du problème et amorcer un début de réflexion personnelle.	Vérifier qu'il n'y a pas de problème de compréhension de l'énoncé et aider les élèves à entrer dans l'activité de recherche.	
1 ^{ère} phase de recherche collective	13'	Groupe de 4 élèves	Amorcer l'élaboration d'un raisonnement en vue de la résolution du problème.	Phase de recherche et d'échange. Élaboration de raisonnement, exposition des idées, débats. Les groupes doivent se mettre d'accord sur une stratégie commune.	<p>L'enseignant doit intervenir le moins possible.</p> <p><u>Consigne</u> : « Vous allez maintenant vous réunir par groupe de 4 afin de partager vos idées et vous allez tenter de résoudre ensemble le problème. »</p>	

Construction des connaissances et des capacités	10'	Classe entière	Présentation des amorces de résolution des différents groupes.	Écouter les raisonnements effectués par les autres groupes afin d'enrichir sa propre démarche.	Interroger, organiser les présentations des raisonnements. A cette occasion, l'enseignant introduira la notion de contrôle autonome des résultats obtenus. <u>Consigne</u> : « Nous allons faire une pause dans nos recherches afin que chaque groupe puisse nous expliquer ce qu'il a entrepris pour résoudre ce problème. Vous allez donc choisir un représentant qui va exposer aux autres groupes votre travail, vos résultats actuels pour que tout le monde puisse s'en inspirer si elles vous paraissent intéressantes. »	
2 ^{ème} phase de recherche collective	10'	Groupe de 4 élèves	Résoudre le problème.	Affiner sa solution ou la modifier en fonction de la mise en commun et chercher à aboutir à une résolution complète du problème. Les groupes en avance doivent essayer de vérifier eux-mêmes leurs résultats.	Distribuer 1 feuille A3 par groupe. <u>Consigne</u> : « Vous allez à nouveau retravailler en groupe afin d'essayer de résoudre complètement le problème. Il ne vous reste cependant plus que 10 min pour aboutir à un résultat et remplir la feuille A3 présentant votre travail. Si certains groupes pensent avoir trouvé la solution, je voudrais que vous essayer de trouver comment vous pourriez vérifier de façon certaine qu'ils sont justes. »	1 feuille A3 pour chaque groupe
Construction des connaissances et des capacités	10'	Classe entière	Présentation des différentes méthodes de résolution du problème et synthèse.	Chaque groupe présente son travail, le raisonnement qu'il a mis en place et ses résultats à l'aide la feuille A3	Mettre en valeur les procédures les plus pertinentes et valoriser les qualités qui ont permis de les développer. L'enseignant peut également mettre en valeur des procédures originales s'il y en a. Mettre en valeur les procédures de contrôle des résultats s'il y en a eu ou bien les introduira si aucun groupe n'a été en mesure d'en mettre en place. <u>Consigne</u> : « Chaque groupe va de nouveau désigner un représentant pour qu'il vienne présenter le travail et les résultats de son groupe. Nous allons, tous ensemble essayer de débattre pour voir s'il existe des stratégies qui vous paraissent plus adaptées que d'autres à la résolution de ce problème. » <u>Ramasser les cahiers d'essai et les feuilles A3 afin de pouvoir les photocopier.</u>	

SÉANCE 2/5
LES PROBLÈMES OUVERTS

CM1/CM2

Objectif(s) didactique(s) de la séance :

- Comprendre un énoncé de problème.
- Comprendre un raisonnement déductif avec 3 inconnues.
- Comprendre l'utilisation de la division partition.

Objectif(s) pédagogique(s) de la séance :

- Adopter une attitude de recherche.
- Organiser des données et les utiliser dans un ordre précis.
- Résoudre un problème faisant appel à la division partition.
- Mettre en place des procédures de contrôle autonome des résultats.
- Être capable de débattre, d'argumenter.

Place dans l'unité d'enseignement :

- Séance 2/5 : deuxième séance sur la division partition ; problème à trois inconnues.

Date : ...

Durée : 50 min

Matériel à prévoir :

- 1 feuille d'énoncé du problème n°2 par élève / 1 feuille A3 par groupe / possibilité de matériel supplémentaire si un groupe en éprouve le besoin pour résoudre le problème.

Énoncé du problème :

- Pour équiper une école, une entreprise a expédié 3 chargements de 300kg. Le premier chargement contient 15 tables et 30 chaises. Le second contient 25 tables. Le troisième contient 10 tables, 20 chaises et 5 armoires. Combien pèse une chaise, une table et une armoire ?

Phases	Durée	Organisation	Objectifs de la phase	Activités de l'élève	Activités du maître	Matériel
Entrée dans l'activité	2'	Classe entière	Présentation de l'activité.	Écouter puis être en mesure de répéter les consignes.	<p><u>Consigne</u> : « Aujourd'hui, nous allons travailler sur la résolution de problème mathématique. Une partie de la séance se déroulera en groupe mais, pour l'instant, vous allez travailler individuellement. Je vais vous distribuer à chacun le même énoncé de problème que vous allez devoir essayer de résoudre aujourd'hui. Vous allez d'abord y réfléchir tout seul, puis, vous vous réunirez par groupe, afin de partager vos idées et d'essayer de résoudre complètement le problème. Je distribuerai également une feuille A3 à chaque groupe sur laquelle vous pourrez, à la fin, inscrire votre démarche. Chaque groupe ne devra donc présenter qu'une seule stratégie commune. Mais, au départ, vous chercherez sur la feuille que je vous distribue. Vous travaillerez avec votre stylo : ce n'est pas grave si vous vous trompez, vous pourrez rayer ce que vous avez écrit mais je souhaite pouvoir voir tout ce que vous écrivez pour chercher, même si vous ne vous en servez pas par la suite. Donc, s'il vous plait, n'effacer rien. Il n'y a pas forcément une seule bonne méthode pour résoudre ce problème, vous êtes donc libres de vous organiser comme vous le souhaitez. »</p> <p><u>Faire répéter la consigne par 2 ou 3 élèves pendant la distribution des énoncés</u></p>	1 feuille de recherche pour chaque élève.
Situation problème	5'	Individuel	Lire l'énoncé et s'appropriier le problème.	Prendre connaissance du problème et amorcer un début de réflexion personnelle.	Vérifier qu'il n'y a pas de problème de compréhension de l'énoncé et aider les élèves à entrer dans l'activité de recherche.	
1 ^{ère} phase de recherche collective	13'	Groupe de 4 élèves	Amorcer l'élaboration d'un raisonnement en vue de la résolution du problème.	Phase de recherche et d'échange. Élaboration de raisonnement, exposition des idées, débats. Les groupes doivent se mettre d'accord sur une stratégie commune.	<p>L'enseignant doit intervenir le moins possible.</p> <p><u>Consigne</u> : « Vous allez maintenant vous réunir par groupe de 4 afin de partager vos idées et vous allez tenter de résoudre ensemble le problème. »</p>	

Construction des connaissances et des capacités	10'	Classe entière	Présentation des amorces de résolution des différents groupes.	Écouter les raisonnements effectués par les autres groupes afin d'enrichir sa propre démarche.	Interroger, organiser les présentations des raisonnements. A cette occasion, l'enseignant introduira la notion de contrôle autonome des résultats obtenus. <u>Consigne</u> : « Nous allons faire une pause dans nos recherches afin que chaque groupe puisse nous expliquer ce qu'il a entrepris pour résoudre ce problème. Vous allez donc choisir un représentant qui va exposer aux autres groupes votre travail, vos résultats actuels pour que tout le monde puisse s'en inspirer si elles vous paraissent intéressantes. »	
2 ^{ème} phase de recherche collective	10'	Groupe de 4 élèves	Résoudre le problème.	Affiner sa solution ou la modifier en fonction de la mise en commun et chercher à aboutir à une résolution complète du problème. Les groupes en avance doivent essayer de vérifier eux-mêmes leurs résultats.	Distribuer 1 feuille A3 par groupe. <u>Consigne</u> : « Vous allez à nouveau retravailler en groupe afin d'essayer de résoudre complètement le problème. Il ne vous reste cependant plus que 10 min pour aboutir à un résultat et remplir la feuille A3 présentant votre travail. Si certains groupes pensent avoir trouvé la solution, je voudrais que vous essayer de trouver comment vous pourriez vérifier de façon certaine qu'ils sont justes. »	1 feuille A3 pour chaque groupe
Construction des connaissances et des capacités	10'	Classe entière	Présentation des différentes méthodes de résolution du problème et synthèse.	Chaque groupe présente son travail, le raisonnement qu'il a mis en place et ses résultats à l'aide la feuille A3	Mettre en valeur les procédures les plus pertinentes et valoriser les qualités qui ont permis de les développer. L'enseignant peut également mettre en valeur des procédures originales s'il y en a. Mettre en valeur les procédures de contrôle des résultats s'il y en a eu ou bien les introduira si aucun groupe n'a été en mesure d'en mettre en place. <u>Consigne</u> : « Chaque groupe va de nouveau désigner un représentant pour qu'il vienne présenter le travail et les résultats de son groupe. Nous allons, tous ensemble essayer de débattre pour voir s'il existe des stratégies qui vous paraissent plus adaptées que d'autres à la résolution de ce problème. » <u>Ramasser les cahiers d'essai et les feuilles A3 afin de pouvoir les photocopier.</u>	

SÉANCE 3/5
LES PROBLÈMES OUVERTS

CM1/CM2

Objectif(s) didactique(s) de la séance :

- Comprendre un énoncé de problème.
- Comprendre un raisonnement déductif avec 2 inconnues.
- Comprendre l'utilisation de la division quotient.

Objectif(s) pédagogique(s) de la séance :

- Adopter une attitude de recherche.
- Organiser des données et les utiliser dans un ordre précis.
- Résoudre un problème faisant appel à la division quotient.
- Mettre en place des procédures de contrôle autonome des résultats.
- Être capable de débattre, d'argumenter.

Place dans l'unité d'enseignement :

- Séance 3/5 : première séance sur la division quotient ; problème à deux inconnues.

Date : ...

Durée : 50 min

Matériel à prévoir :

- 1 feuille d'énoncé du problème n°3 par élève / 1 feuille A3 par groupe / possibilité de matériel supplémentaire si un groupe en éprouve le besoin pour résoudre le problème.

Énoncé du problème :

- Une bibliothèque doit déménager les 36000 livres qu'elle possède. Pour cela, on range les livres dans des cartons qui peuvent contenir 30 livres. Puis, on charge ces cartons dans des camions qui peuvent contenir 240 cartons. Combien doit-on utiliser de camions pour transporter l'ensemble des livres ?

Phases	Durée	Organisation	Objectifs de la phase	Activités de l'élève	Activités du maître	Matériel
Entrée dans l'activité	2'	Classe entière	Présentation de l'activité.	Écouter puis être en mesure de répéter les consignes.	<p><u>Consigne</u> : « Aujourd'hui, nous allons travailler sur la résolution de problème mathématique. Une partie de la séance se déroulera en groupe mais, pour l'instant, vous allez travailler individuellement. Je vais vous distribuer à chacun le même énoncé de problème que vous allez devoir essayer de résoudre aujourd'hui. Vous allez d'abord y réfléchir tout seul, puis, vous vous réunirez par groupe, afin de partager vos idées et d'essayer de résoudre complètement le problème. Je distribuerai également une feuille A3 à chaque groupe sur laquelle vous pourrez, à la fin, inscrire votre démarche. Chaque groupe ne devra donc présenter qu'une seule stratégie commune. Mais, au départ, vous chercherez sur la feuille que je vous distribue. Vous travaillerez avec votre stylo : ce n'est pas grave si vous vous trompez, vous pourrez rayer ce que vous avez écrit mais je souhaite pouvoir voir tout ce que vous écrivez pour chercher, même si vous ne vous en servez pas par la suite. Donc, s'il vous plait, n'effacer rien. Il n'y a pas forcément une seule bonne méthode pour résoudre ce problème, vous êtes donc libres de vous organiser comme vous le souhaitez. »</p> <p><u>Faire répéter la consigne par 2 ou 3 élèves pendant la distribution des énoncés</u></p>	1 feuille de recherche pour chaque élève.
Situation problème	5'	Individuel	Lire l'énoncé et s'appropriier le problème.	Prendre connaissance du problème et amorcer un début de réflexion personnelle.	Vérifier qu'il n'y a pas de problème de compréhension de l'énoncé et aider les élèves à entrer dans l'activité de recherche.	
1 ^{ère} phase de recherche collective	13'	Groupe de 4 élèves	Amorcer l'élaboration d'un raisonnement en vue de la résolution du problème.	Phase de recherche et d'échange. Élaboration de raisonnement, exposition des idées, débats. Les groupes doivent se mettre d'accord sur une stratégie commune.	<p>L'enseignant doit intervenir le moins possible.</p> <p><u>Consigne</u> : « Vous allez maintenant vous réunir par groupe de 4 afin de partager vos idées et vous allez tenter de résoudre ensemble le problème. »</p>	

Construction des connaissances et des capacités	10'	Classe entière	Présentation des amorces de résolution des différents groupes.	Écouter les raisonnements effectués par les autres groupes afin d'enrichir sa propre démarche.	Interroger, organiser les présentations des raisonnements. A cette occasion, l'enseignant introduira la notion de contrôle autonome des résultats obtenus. <u>Consigne</u> : « Nous allons faire une pause dans nos recherches afin que chaque groupe puisse nous expliquer ce qu'il a entrepris pour résoudre ce problème. Vous allez donc choisir un représentant qui va exposer aux autres groupes votre travail, vos résultats actuels pour que tout le monde puisse s'en inspirer si elles vous paraissent intéressantes. »	
2 ^{ème} phase de recherche collective	10'	Groupe de 4 élèves	Résoudre le problème.	Affiner sa solution ou la modifier en fonction de la mise en commun et chercher à aboutir à une résolution complète du problème. Les groupes en avance doivent essayer de vérifier eux-mêmes leurs résultats.	Distribuer 1 feuille A3 par groupe. <u>Consigne</u> : « Vous allez à nouveau retravailler en groupe afin d'essayer de résoudre complètement le problème. Il ne vous reste cependant plus que 10 min pour aboutir à un résultat et remplir la feuille A3 présentant votre travail. Si certains groupes pensent avoir trouvé la solution, je voudrais que vous essayer de trouver comment vous pourriez vérifier de façon certaine qu'ils sont justes. »	1 feuille A3 pour chaque groupe
Construction des connaissances et des capacités	10'	Classe entière	Présentation des différentes méthodes de résolution du problème et synthèse.	Chaque groupe présente son travail, le raisonnement qu'il a mis en place et ses résultats à l'aide la feuille A3	Mettre en valeur les procédures les plus pertinentes et valoriser les qualités qui ont permis de les développer. L'enseignant peut également mettre en valeur des procédures originales s'il y en a. Mettre en valeur les procédures de contrôle des résultats s'il y en a eu ou bien les introduira si aucun groupe n'a été en mesure d'en mettre en place. <u>Consigne</u> : « Chaque groupe va de nouveau désigner un représentant pour qu'il vienne présenter le travail et les résultats de son groupe. Nous allons, tous ensemble essayer de débattre pour voir s'il existe des stratégies qui vous paraissent plus adaptées que d'autres à la résolution de ce problème. » <u>Ramasser les cahiers d'essai et les feuilles A3 afin de pouvoir les photocopier.</u>	

SÉANCE 4/5
LES PROBLÈMES OUVERTS

CM1/CM2

Objectif(s) didactique(s) de la séance :

- Comprendre un énoncé de problème.
- Comprendre un raisonnement déductif avec 3 inconnues.
- Comprendre l'utilisation de la division quotient.

Objectif(s) pédagogique(s) de la séance :

- Adopter une attitude de recherche.
- Organiser des données et les utiliser dans un ordre précis.
- Résoudre un problème faisant appel à la division quotient.
- Mettre en place des procédures de contrôle autonome des résultats.
- Être capable de débattre, d'argumenter.

Place dans l'unité d'enseignement :

- Séance 4/5 : deuxième séance sur la division quotient ; problème à trois inconnues.

Date : ...

Durée : 50 min

Matériel à prévoir :

- 1 feuille d'énoncé du problème n°4 par élève / 1 feuille A3 par groupe / possibilité de matériel supplémentaire si un groupe en éprouve le besoin pour résoudre le problème.

Énoncé du problème :

- Une boutique de chocolats vient de recevoir 1940 chocolats noirs, 1940 chocolats au lait, 948 chocolats blancs et 528 chocolats au café. Cette boutique vend trois sortes de boîtes de chocolats :
 - La « petite boîte » qui contient 8 chocolats noirs et 8 chocolats au lait.
 - La « boîte intermédiaire » qui contient 12 chocolats noirs, 12 chocolats au lait et 6 chocolats blancs.
 - La boîte « grand luxe » qui contient 15 chocolats noirs, 15 chocolats au lait, 12 chocolats blancs et 12 chocolats au café.Combien de boîtes de chaque sorte cette boutique peut-elle fabriquer pour qu'il ne reste aucun chocolat ?

Phases	Durée	Organisation	Objectifs de la phase	Activités de l'élève	Activités du maître	Matériel
Entrée dans l'activité	2'	Classe entière	Présentation de l'activité.	Écouter puis être en mesure de répéter les consignes.	<p><u>Consigne</u> : « Aujourd'hui, nous allons travailler sur la résolution de problème mathématique. Une partie de la séance se déroulera en groupe mais, pour l'instant, vous allez travailler individuellement. Je vais vous distribuer à chacun le même énoncé de problème que vous allez devoir essayer de résoudre aujourd'hui. Vous allez d'abord y réfléchir tout seul, puis, vous vous réunirez par groupe, afin de partager vos idées et d'essayer de résoudre complètement le problème. Je distribuerai également une feuille A3 à chaque groupe sur laquelle vous pourrez, à la fin, inscrire votre démarche. Chaque groupe ne devra donc présenter qu'une seule stratégie commune. Mais, au départ, vous chercherez sur la feuille que je vous distribue. Vous travaillerez avec votre stylo : ce n'est pas grave si vous vous trompez, vous pourrez rayer ce que vous avez écrit mais je souhaite pouvoir voir tout ce que vous écrivez pour chercher, même si vous ne vous en servez pas par la suite. Donc, s'il vous plait, n'effacer rien. Il n'y a pas forcément une seule bonne méthode pour résoudre ce problème, vous êtes donc libres de vous organiser comme vous le souhaitez. »</p> <p><u>Faire répéter la consigne par 2 ou 3 élèves pendant la distribution des énoncés</u></p>	1 feuille de recherche pour chaque élève.
Situation problème	5'	Individuel	Lire l'énoncé et s'appropriier le problème.	Prendre connaissance du problème et amorcer un début de réflexion personnelle.	Vérifier qu'il n'y a pas de problème de compréhension de l'énoncé et aider les élèves à entrer dans l'activité de recherche.	
1 ^{ère} phase de recherche collective	13'	Groupe de 4 élèves	Amorcer l'élaboration d'un raisonnement en vue de la résolution du problème.	Phase de recherche et d'échange. Élaboration de raisonnement, exposition des idées, débats. Les groupes doivent se mettre d'accord sur une stratégie commune.	<p>L'enseignant doit intervenir le moins possible.</p> <p><u>Consigne</u> : « Vous allez maintenant vous réunir par groupe de 4 afin de partager vos idées et vous allez tenter de résoudre ensemble le problème. »</p>	

Construction des connaissances et des capacités	10'	Classe entière	Présentation des amorces de résolution des différents groupes.	Écouter les raisonnements effectués par les autres groupes afin d'enrichir sa propre démarche.	Interroger, organiser les présentations des raisonnements. A cette occasion, l'enseignant introduira la notion de contrôle autonome des résultats obtenus. <u>Consigne</u> : « Nous allons faire une pause dans nos recherches afin que chaque groupe puisse nous expliquer ce qu'il a entrepris pour résoudre ce problème. Vous allez donc choisir un représentant qui va exposer aux autres groupes votre travail, vos résultats actuels pour que tout le monde puisse s'en inspirer si elles vous paraissent intéressantes. »	
2 ^{ème} phase de recherche collective	10'	Groupe de 4 élèves	Résoudre le problème.	Affiner sa solution ou la modifier en fonction de la mise en commun et chercher à aboutir à une résolution complète du problème. Les groupes en avance doivent essayer de vérifier eux-mêmes leurs résultats.	Distribuer 1 feuille A3 par groupe. <u>Consigne</u> : « Vous allez à nouveau retravailler en groupe afin d'essayer de résoudre complètement le problème. Il ne vous reste cependant plus que 10 min pour aboutir à un résultat et remplir la feuille A3 présentant votre travail. Si certains groupes pensent avoir trouvé la solution, je voudrais que vous essayer de trouver comment vous pourriez vérifier de façon certaine qu'ils sont justes. »	1 feuille A3 pour chaque groupe
Construction des connaissances et des capacités	10'	Classe entière	Présentation des différentes méthodes de résolution du problème et synthèse.	Chaque groupe présente son travail, le raisonnement qu'il a mis en place et ses résultats à l'aide la feuille A3	Mettre en valeur les procédures les plus pertinentes et valoriser les qualités qui ont permis de les développer. L'enseignant peut également mettre en valeur des procédures originales s'il y en a. Mettre en valeur les procédures de contrôle des résultats s'il y en a eu ou bien les introduira si aucun groupe n'a été en mesure d'en mettre en place. <u>Consigne</u> : « Chaque groupe va de nouveau désigner un représentant pour qu'il vienne présenter le travail et les résultats de son groupe. Nous allons, tous ensemble essayer de débattre pour voir s'il existe des stratégies qui vous paraissent plus adaptées que d'autres à la résolution de ce problème. » <u>Ramasser les cahiers d'essai et les feuilles A3 afin de pouvoir les photocopier.</u>	

4) Les feuilles de recherche

Feuille de recherche n°1

(Tu peux écrire tout ce qui te semble utile pour résoudre ce problème sur cette feuille)

Paul a pesé ensemble deux fauteuils identiques et trois tables elles aussi identiques. La balance indique 33 kg. Antoine, lui, a pesé cinq tables identiques à celles de Paul. La balance marque 15 kg. Quel est le poids d'un fauteuil ?

Feuille de recherche n°2

(Tu peux écrire tout ce qui te semble utile pour résoudre ce problème sur cette feuille)

Pour équiper une école, une entreprise a expédié 3 chargements de 300kg. Le premier chargement contient 15 tables et 30 chaises. Le second contient 25 tables. Le troisième contient 10 tables, 20 chaises et 5 armoires. Combien pèse une chaise, une table et une armoire ?

Feuille de recherche n°3

(Tu peux écrire tout ce qui te semble utile pour résoudre ce problème sur cette feuille)

Une bibliothèque doit déménager les 36000 livres qu'elle possède. Pour cela, on range les livres dans des cartons qui peuvent contenir 30 livres. Puis, on charge ces cartons dans des camions qui peuvent contenir 240 cartons. Combien doit-on utiliser de camions pour transporter l'ensemble des livres ?

Feuille de recherche n°4

(Tu peux écrire tout ce qui te semble utile pour résoudre ce problème sur cette feuille)

Une boutique de chocolats vient de recevoir 1940 chocolats noirs, 1940 chocolats au lait, 948 chocolats blancs et 528 chocolats au café. Cette boutique vend trois sortes de boîtes de chocolats :

- La « petite boîte » qui contient 8 chocolats noirs et 8 chocolats au lait.
- La « boîte intermédiaire » qui contient 12 chocolats noirs, 12 chocolats au lait et 6 chocolats blancs.
- La boîte « grand luxe » qui contient 15 chocolats noirs, 15 chocolats au lait, 12 chocolats blancs et 12 chocolats au café.

Combien de boîtes de chaque sorte cette boutique peut-elle fabriquer pour qu'il ne reste aucun chocolat ?

Problème déductif

Un pâtissier vend deux sortes de boîtes de gâteaux toutes préparées : la première, qui contient 12 éclairs au chocolat et 8 meringues, coûte 78 euros. La seconde, qui contient 24 meringues, coûte 72 euros. Combien coûte un éclair au chocolat ?

LES PROBLÈMES OUVERTS

Quels apports dans l'apprentissage de la division au cycle 3 ?

Résumé :

Certains élèves présentent de nombreuses difficultés à mettre en place, lors de la résolution de problèmes en mathématiques, des raisonnements déductifs et notamment ceux en lien avec la division. La pratique régulière de problèmes ouverts, dans laquelle l'élève se positionne en tant que chercheur, ne pourrait-elle pas susciter chez ce dernier un intérêt nouveau pour les mathématiques et favoriser l'apprentissage de cette notion ?

Ce mémoire présente l'intérêt que peut représenter la résolution de problèmes ouverts en lien avec l'apprentissage d'une notion mathématique particulière : la division. A travers la mise en place de quatre séances de recherche auprès d'une classe de CM1/CM2, nous avons tenté de répondre aux hypothèses suivantes : 1) La pratique de problèmes ouverts favorise l'apprentissage de la division. 2) La pratique de problèmes ouverts favorise l'utilisation de mode de raisonnements déductifs. 3) La pratique de problèmes ouverts permet d'entrer différemment dans les activités mathématiques et de dépasser certains blocages. 4) La pratique de problèmes ouverts permet d'automatiser des processus d'auto-validation des résultats.

Mots clés : enseignement, chercher, problèmes ouverts, division

OPEN PROBLEMS

What Contributions in the Learning of the Division?

Summary:

Some pupils experience many difficulties in executing deductive reasoning, during mathematic problems solving, and particularly in those with division. Could the regular practice of open problems, in which the pupil acts as a researcher, renew interest in mathematics and assist the learning of this notion?

This paper presents the contributions that can represent open problems solving in connection with the learning of a particular mathematical notion: division. Through the setting up of four research lessons among fifth grade pupils, we tried to answer the following four hypotheses: 1) The practice of open problems assists the learning of division. 2) The practice of open problems assists use of deductive reasoning. 3) The practice of open problems allows some pupils to enter mathematical activities in a different ways and to overcome some obstacles. 4) The practice of open problems allows to automate some self-validation of the results processes.

Keywords: teaching, to look for, open problems, division