



HAL
open science

Apport du filtrage de Kalman aux systèmes de positionnement embarqués et à l'auscultation

Guillaume Chauveau

► **To cite this version:**

Guillaume Chauveau. Apport du filtrage de Kalman aux systèmes de positionnement embarqués et à l'auscultation. Sciences de l'ingénieur [physics]. 2014. dumas-01164654

HAL Id: dumas-01164654

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01164654>

Submitted on 17 Jun 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET METIERS
ÉCOLE SUPÉRIEURE DES GÉOMÈTRES ET TOPOGRAPHES

MÉMOIRE

présenté en vue d'obtenir le
DIPLÔME D'INGÉNIEUR CNAM

Spécialité : Géomètre et Topographe

par

Guillaume CHAUVEAU

Apport du filtrage de Kalman aux systèmes de positionnement embarqués et à
l'auscultation

Soutenu le 10 juillet 2014

JURY

Monsieur Jérémie ROBERT

Président de jury

Monsieur Alexandre BROUSTE

Maître de stage

Monsieur José CALI

Maître de stage

Monsieur Frédéric DURAND

Maître de stage

Monsieur Jérôme VERDUN

Maître de stage

Monsieur Laurent MOREL

Professeur référent

Monsieur Gwénaél SAGNE

Remerciements

Lors de ce travail de recherche qui aura duré cinq mois, j'ai pu compter sur l'aide et le soutien de nombreuses personnes. La rédaction de cette courte page est l'occasion pour moi de remercier chaleureusement ceux sans qui mes recherches n'auraient pas été aussi abouties lors de la rédaction de ce rapport.

Tout d'abord, je souhaiterais remercier Clément ROUSSEL pour son aide précieuse lors de l'utilisation du mini-ordinateur.

Ensuite, j'exprime toute ma gratitude à Frédéric DURAND et Stéphane DURAND pour leur soutien technique qui m'ont permis de tirer profit du matériel de recherche disponible à l'ESGT.

De plus, j'ai eu la chance d'avoir le regard extérieur de Laurent MOREL qui a su donner un avis critique sur mon travail, et m'a permis de ne pas perdre de vue les impératifs de temps, imposés par le TFE.

Puis, je voudrais restituer le mérite de nombreuses applications mathématiques à Alexandre BROUSTE qui a été mon commanditaire et m'a assisté lors de l'écriture de scripts sur Matlab©.

Enfin, je souhaiterais remercier tout spécialement José CALI et Jérôme VERDUN qui ont été présents pour répondre à mes interrogations, pour m'encourager et m'orienter pendant toute la durée de mon TFE et ce, même lors de leurs congés.

J'espère que le présent rapport fera honneur à votre soutien à tous !

Table des matières

Remerciements.....	2
Table des matières.....	3
Introduction.....	5
I LE FILTRAGE DE KALMAN ET QUELQUES NOTIONS MATHÉMATIQUES	7
I.1 LE FILTRAGE DE KALMAN	7
I.1.1 Le principe.....	7
I.1.2 Formulation mathématique.....	7
I.2 NOTIONS MATHÉMATIQUES	9
I.2.1 Le bruit blanc gaussien.....	9
I.2.2 Le modèle de Wiener	9
I.2.3 Généralités sur le modèle de Markov	9
II PROTOCOLES EXPERIMENTAUX.....	11
II.1 PROTOCOLE AVEC SYSTEME HYBRIDE GNSS/INS	11
II.1.1 La centrale inertielle	11
II.1.2 Le protocole avec système de positionnement GNSS/INS.....	12
II.1.3 Résultat attendu	13
II.2 PROTOCOLE D'AUSCULTATION	14
II.2.1 Définition de l'auscultation	14
II.2.2 L'article de S. BOGATIN	14
II.2.3 Protocole d'auscultation	15
II.2.4 Résultat attendu	16
III FORMULATION DES MODELES D'EVOLUTION ET D'OBSERVATION	17
III.1 PROTOCOLE AVEC UN SYSTEME GNSS/INS	17
III.1.1 Modèle d'évolution associé à la centrale inertielle.....	17
III.1.2 Modèle d'évolution de l'erreur de position	18
III.1.3 Modèle d'observation de l'erreur de position.....	20
III.2 PROTOCOLE D'AUSCULTATION.....	20
III.2.1 Modèle d'évolution du protocole d'auscultation	21
III.2.2 Modèle d'observation du protocole d'auscultation.....	22
III.3 CONCLUSION	23
IV CALIBRATIONS DES MODELES DE FILTRAGE	24
IV.1 L'OUTIL DE CALIBRATION : L'ESTIMATION PAR MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE	24
IV.2 CALIBRATION DU PROTOCOLE DE NAVIGATION GNSS/INS	25
IV.2.1 Réalisation d'un modèle de filtrage de Kalman pour la calibration	25
IV.2.2 Application du maximum de vraisemblance au modèle de calibration	26
IV.2.3 Programme de recherche du maximum de vraisemblance	26
IV.2.4 Simulation du processus de calibration	27
IV.2.5 Calibration des accéléromètres.....	28
IV.2.6 Application au protocole expérimental.....	29
IV.3 CALIBRATION POUR LE PROTOCOLE D'AUSCULTATION	29
IV.3.1 Application du maximum de vraisemblance	29
IV.3.2 Fonction de recherche du maximum de vraisemblance.....	29
IV.3.3 Validation du programme de calibration en simulation.....	30
V SIMULATIONS DES PROTOCOLES.....	31
V.1 PROTOCOLE AVEC SYSTEME GNSS/INS.....	31
V.1.1 Réalisation de la simulation.....	31
V.1.2 Résultats	32
V.2 PROTOCOLE D'AUSCULTATION	33
V.2.1 Réalisation de la simulation.....	33
V.2.2 Résultats	34
V.2.3 Conclusion.....	36
VI RESULTAT DES PROTOCOLES EXPERIMENTAUX.....	37
VI.1 PROTOCOLE AVEC SYSTEME DE NAVIGATION GNSS/INS	37
VI.1.1 Utilisation des paramètres calibrés	37
VI.1.2 Optimisation des paramètres calibrés	38
VI.1.3 Conclusion.....	39
VI.2 PROTOCOLE D'AUSCULTATION	39

VI.2.1	Présentation des trois tests.....	40
VI.2.2	Résultats des trois tests.....	40
VI.2.2.1	Premier test (paramètre du TCRP).....	40
VI.2.2.2	Deuxième test (précision dégradée).....	41
VI.2.2.3	Troisième test (précision dégradée localement).....	42
VI.2.3	Analyse globale des trois tests.....	43
VI.2.4	Conclusion.....	43
VII	PERSPECTIVES.....	44
VII.1	CALIBRATION DU PROTOCOLE AVEC SYSTEME GNSS/INS.....	44
VII.2	FILTRAGE AVEC D'AUTRES MODELES D'EVOLUTION.....	44
	Conclusion.....	45
	Bibliographie.....	47
	Table des annexes.....	48
	Annexe 1 Théorie sur l'estimateur de Kalman.....	49
	Annexe 2 Méthode de synchronisation et tests de validation.....	55
	Annexe 3 Méthodes de mise en référence des données de l'INS et tests de validation.....	58
	Annexe 4 Programme Matlab© de synchronisation de deux signaux.....	68
	Annexe 5 Simulation des données de position de l'article de S. BOGATIN (par J. VERDUN et A. BROUSTE)...	70
	Annexe 6 Génération de bruits corrélés et leurs impacts sur le filtrage de Kalman.....	72
	Annexe 7 Programme Matlab© de génération de bruits corrélés.....	75
	Annexe 8 Poster de TFE.....	77
	Liste des figures.....	79
	Liste des tableaux.....	81

Introduction

Par définition, le positionnement dynamique est la science de l'estimation des paramètres cinématiques des systèmes physiques mobiles et leur expression dans un repère connu. Ce domaine scientifique débouche sur de nombreuses applications comme : le guidage d'engin agricole par GNSS (Global Navigation Satellite System), la navigation spatiale par l'utilisation de systèmes hybrides GNSS et capteurs inertiels (INS : Inertial Navigation System), la balistique militaire, etc. Parmi cette grande diversité d'applications, on en compte plusieurs liées à l'activité du géomètre telles que l'auscultation, illustrées par la Figure 1, et la cartographie mobile dont deux plateformes d'acquisition sont présentées par les Figure 2 et Figure 3 :



Figure 1 : Travail d'auscultation sur le pont Adolphe Luxembourg (source : btmed.lu)



Figure 2 : Système de scan 3D mobile de la chaussée (source : gizmag.com)



Figure 3 : Acquisition de photographies aériennes par drone (source : aero-drone.fr)

Les plateformes destinées à la cartographie mobile sont généralement équipées de capteurs GNSS et d'INS. On dit qu'il s'agit de capteurs complémentaires car l'INS fournit des mesures de bonne précision mais son estimation sur la position dérive, et le GNSS est moins précis, sujet aux pertes de signal, mais ne dérive pas. La fusion des mesures GNSS et inertielle, est couramment réalisée à l'aide d'un filtrage de Kalman qui considère les incertitudes du système étudié comme des bruits blanc non corrélés.

L'idée originale développée conjointement par le Laboratoire Manceau de Mathématiques (LMM) et l'équipe de Géomatique et Géosciences (L2G) du laboratoire Géomatique et Foncier (GeF), est de reformuler les équations du filtrage de Kalman pour tenir compte des bruits corrélés, comme on peut les observer dans les mesures GNSS, afin d'améliorer l'estimation du positionnement dynamique. L'intérêt de cette nouvelle méthode est double :

- depuis quelques années l'équipe L2G développe une instrumentation hybride GNSS/INS (LiMoG) et une chaîne de traitement pour l'estimation du champ de pesanteur par filtrage de Kalman ; la prise en compte de bruits corrélés peut s'avérer très intéressante pour cette thématique de recherche ;
- ensuite cette nouvelle méthode pourrait être utilisée pour étudier dans quelle mesure le filtre de Kalman peut améliorer la précision de mesures topographiques non redondantes dans le cadre de travaux d'auscultation ; généralement, on compare les coordonnées des points du réseau d'auscultation déterminées par mesures topométriques à différentes dates sans se préoccuper des évolutions subies par le système (bâtiment, ouvrage d'art, barrage, etc) entre ces deux instants. Dans l'hypothèse où nous avons une idée de l'évolution du système, le filtre de Kalman pourrait être utilisé pour estimer l'état du système avec une plus grande précision. De plus, l'étude sur les bruits corrélés pourrait également être appliquée en topométrie, puisque par exemple l'erreur cyclique d'un tachéomètre peut être considérée comme une erreur corrélée sur la mesure de distance.

Avant d'utiliser ce nouveau type de filtrage à bruit corrélé, il convient de tester les apports du filtrage de Kalman classique à la topométrie avec des protocoles expérimentaux qui pourront être réutilisés pour tester le nouveau filtre.

C'est dans ce contexte que ce travail de fin d'études (TFE) cherche à tester l'apport pour le positionnement dynamique d'un traitement des données par « filtrage de Kalman ». L'intérêt de ce traitement pour le positionnement dynamique, est qu'il permet une estimation des paramètres cinématiques (position, vitesse, accélération) par combinaison de mesures effectuées par des capteurs de position, et modèle d'évolution dynamique qui s'appuie sur l'étude du mouvement du mobile. C'est donc au travers d'une expérience de positionnement dynamique avec un système hybride GNSS/INS miniature embarqué et d'un travail d'auscultation, que ce TFE a pour objectif d'évaluer les apports du filtrage de Kalman pour ces deux types de problématique de positionnement dynamique. De plus, selon nos résultats, des voies d'amélioration devront être proposées pour pallier certaines limites des traitements par filtrage de Kalman.

Ce rapport s'organise en six parties. Tout d'abord, nous présenterons les notions mathématiques liées au filtrage de Kalman. Ensuite, nous exposerons les deux protocoles expérimentaux retenus pour répondre aux objectifs de notre projet. Puis, nous présenterons les modèles d'évolution et d'observations développés pour nos deux problèmes de filtrage de Kalman. Nous poursuivrons par la calibration des paramètres associés aux modèles d'évolution et d'observation, puis par la simulation des deux protocoles pour valider nos traitements. Enfin, nous utiliserons ces derniers dans le contexte de nos protocoles expérimentaux, nous terminerons sur les propositions concernant l'amélioration de nos traitements.

I Le filtrage de Kalman et quelques notions mathématiques

Le filtrage de Kalman est l'outil que ce TFE cherche à évaluer dans une expérience avec système de positionnement GNSS/INS et une autre d'auscultation. Dans cette partie, nous introduirons le filtrage de Kalman et certaines notions mathématiques (bruit blanc,...) que nous utiliserons par la suite.

I.1 Le filtrage de Kalman

Nous avons basé cette définition sur des informations recueillies auprès de J. VERDUN, A. BROUSTE et d'un site web (PIETTE, 2011).

I.1.1 Le principe

Le filtrage de Kalman est une méthode d'estimation de paramètres qui évoluent au cours du temps. Pour cela, il réalise une combinaison optimale entre des mesures et des valeurs prédites issues d'un modèle d'évolution donné, a priori. De plus, ce filtre renvoie la précision associée aux estimations.

Le problème de filtrage considéré par ce filtre est nécessairement linéaire, et tous les bruits considérés sont des bruits blancs gaussiens (ce terme sera explicité en partie I.2.1).

I.1.2 Formulation mathématique

Dans le filtrage de Kalman, on cherche à obtenir un estimateur optimal d'un vecteur état noté X_k , par résolution d'un système d'équations caractérisant un modèle d'évolution et un modèle d'observation de l'élément étudié :

$$\begin{cases} X_k = \Theta_k \cdot X_{k-1} + F_k + \Sigma \varepsilon_k & (1) \\ Y_k = H_k \cdot X_k + h_k + \tilde{\Sigma} \tilde{\varepsilon}_k & (2) \end{cases}$$

, pour $k \geq 1$, X_0 donné avec :

- $X_k \in \mathbb{R}^m$, le vecteur d'état au $k^{\text{ième}}$ échantillon (avec X_0 déterministe) ;
- $Y_k \in \mathbb{R}^n$, le vecteur d'observations de l'état lors du $k^{\text{ième}}$ échantillon ;
- $\Theta_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$, la matrice de transition de l'état X_{k-1} à X_k ;
- $H_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$, une matrice déterministe ;
- $F_k \in \mathbb{R}^m$, une matrice déterministe ;
- $h_k \in \mathbb{R}^n$, une matrice déterministe ;
- $\Sigma \Sigma^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$, la matrice de variance covariance du modèle d'évolution ;
- $\tilde{\Sigma} \tilde{\Sigma}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la matrice de variance covariance des observations ;
- ε_k , un vecteur aléatoire gaussien, centré, réduit ;
- $\tilde{\varepsilon}_k$, un vecteur aléatoire gaussien, centré, réduit ;
- $(\varepsilon_k) \perp (\tilde{\varepsilon}_k)$, les deux suites sont indépendantes $\forall k \geq 1$.

On notera que la formule (1) représente le modèle d'évolution et $\Sigma \varepsilon_k$ le bruit de modèle. De même la formule (2) présente l'équation d'observation et $\tilde{\Sigma} \tilde{\varepsilon}_k$ le bruit de mesure.

L'algorithme du filtre de Kalman est le suivant :

1. on fixe à partir de mesures ou d'a priori, le vecteur d'état initial, ainsi que la matrice de covariance associée, respectivement notés: $\pi_X(0)$ et $\gamma_{XX}(0)$;

2. étape de prédiction de l'état suivant à partir du modèle d'évolution et avant la connaissance des observations :

$$\begin{cases} \widetilde{\pi}_X(k) = \Theta_k \cdot \pi_X(k-1) + F_k \\ \widetilde{\gamma}_{XX}(k) = \Theta_k \cdot \pi_X(k-1) \cdot \Theta_k^T + \Sigma \Sigma^T \end{cases}$$

, pour $k \geq 1$, $\pi_X(0)$ donnés avec :

- $\pi_X(k)$, l'estimateur de X_k au sens du filtrage de Kalman,
- $\widetilde{\pi}_X(k)$, la prédiction de l'estimateur $\pi_X(k)$,
- $\widetilde{\gamma}_{XX}(k)$, la matrice de variance covariance de $\widetilde{\pi}_X(k)$;

3. étape de correction de la prédiction en tenant compte de la $k^{\text{ième}}$ observation, de sa précision et de la précision sur l'état prédit :

$$\begin{cases} \pi_X(k) = \widetilde{\pi}_X(k) + K_k \cdot (Y_k - (H_k \cdot \widetilde{\pi}_X(k) + h_k)) \\ \gamma_{XX}(k) = (Id - K_k \cdot H_k) \cdot \widetilde{\gamma}_{XX}(k) \end{cases}$$

, pour $k \geq 1$, $\pi_X(0)$ donnés avec :

- $K_k = \widetilde{\gamma}_{XX}(k) \cdot H_k^T \cdot (H_k \cdot \widetilde{\gamma}_{XX}(k) \cdot H_k^T + \tilde{\Sigma} \tilde{\Sigma}^T)$, le gain de Kalman,
- Id , la matrice identité de taille $m \times m$;

4. incrémentation de la valeur de k et retour à l'étape 2 (tant que tous les états ne sont pas tous déterminés).

La démonstration des équations du filtre de Kalman est donnée en annexe 1. De plus, le schéma en Figure 4 donne une représentation synthétique de l'algorithme du filtre de Kalman.

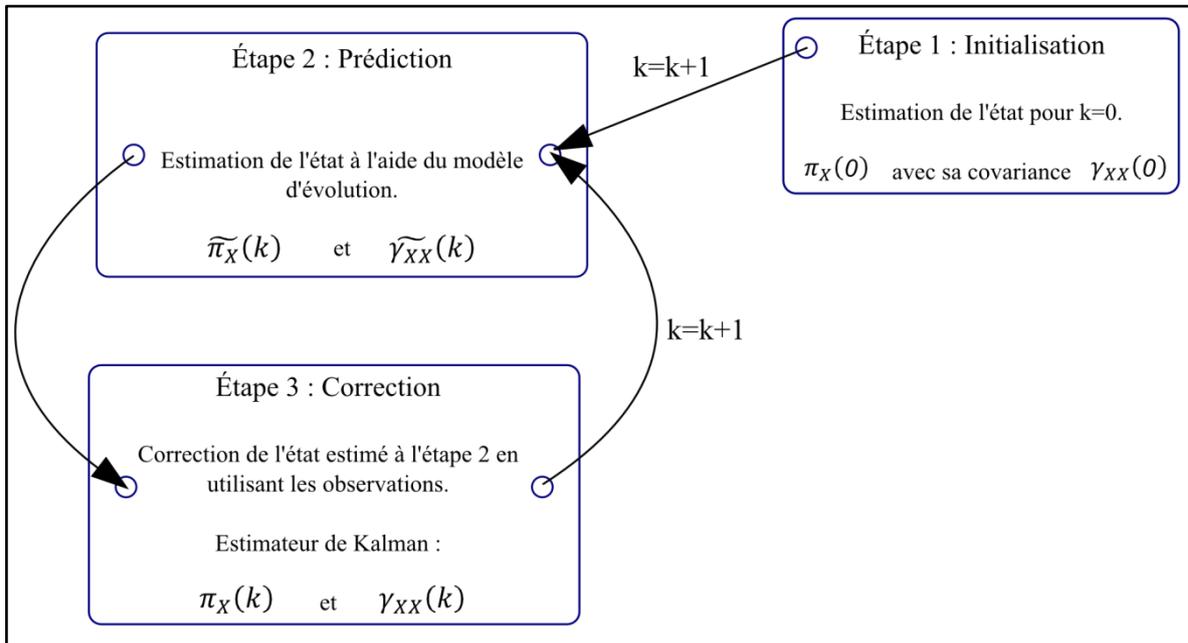


Figure 4 : Schéma de l'algorithme du filtre de Kalman. Le vecteur à estimer est appelé vecteur d'état. Il est noté X et sa valeur évolue au cours du temps. On mesure les valeurs des paramètres de X à différents instants, et on fixe parallèlement un modèle d'évolution qui prédit les variations de ce vecteur d'état. En fixant a priori la valeur de l'estimation de Kalman à l'instant initial et sa précision, respectivement notées $\pi_X(0)$ et $\gamma_{XX}(0)$ (étape 1 du schéma), on prédit la valeur de X à l'instant suivant (étape 2 du schéma). Cette estimation est notée $\widetilde{\pi}_X(1)$ avec $\widetilde{\gamma}_{XX}(1)$ sa matrice de covariance. Puis, on combine de façon optimale $\widetilde{\pi}_X(1)$ avec les mesures correspondantes, pour obtenir l'estimateur de Kalman $\pi_X(1)$ et sa covariance $\gamma_{XX}(1)$ (étape 3 du schéma). On peut parler de combinaison optimale car l'estimation considère la précision de $\widetilde{\pi}_X(1)$, de l'observation (notée Y_1), au travers de $\widetilde{\gamma}_{XX}(1)$ et de la matrice de covariance sur le vecteur d'observations (noté $\tilde{\Sigma} \tilde{\Sigma}^T$). Enfin, on réapplique successivement les étapes de prédiction puis de correction pour chaque instant de mesure.

I.2 Notions mathématiques

Dans cette partie, nous allons présenter quelques notions concernant certains processus stochastiques et le modèle de Markov. Ces connaissances seront utilisées lors de l'expression de nos modèles de filtrage de Kalman.

I.2.1 Le bruit blanc gaussien

Le bruit blanc (que nous noterons ε_t) est un processus aléatoire qui respecte les propriétés suivantes :

- $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$, c'est-à-dire que l'espérance de ce processus est nulle à tout instant ;
- $\mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_\tau) = \begin{cases} 0 & \forall t \neq \tau \\ \sigma^2 & \text{si } t = \tau \end{cases}$, ce processus possède donc une autocovariance nulle (cette condition n'est pas suffisante pour affirmer que ε_t et ε_τ sont indépendants).

Une variable aléatoire X est dite gaussienne si elle suit une loi normale. On notera par la suite $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ pour indiquer que la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 .

Enfin, on dit qu'un processus ε_t est blanc gaussien de variance σ^2 , s'il respecte les propriétés suivantes :

- ε_t est un bruit blanc ;
- ε_t et ε_τ sont indépendants $\forall t \neq \tau$;
- $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, c'est-à-dire que ε_t suit une loi normale de variance σ^2 .

I.2.2 Le modèle de Wiener

Les processus aléatoires décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps. C'est un processus que nous retrouverons dans l'expression des problèmes de filtrage associés à nos deux protocoles expérimentaux.

Selon le document "Continuous Time Finance Lecture 1 Stochastic Integrals" (BJÖRK, 2010), le processus de Wiener (ou mouvement brownien), que nous noterons $\{W_t | t \geq 0\}$, respecte les propriétés suivantes :

- $\{W_t\}$ est à valeur réelle ;
- $\{W_t\}$ est à accroissement indépendant :
c'est-à-dire que pour toute suite finie (t_1, t_2, \dots, t_n) , où $0 < t_1$ et $t_i < t_{i+1}$, les variables aléatoires $W_{t_1}, (W_{t_2} - W_{t_1}), (W_{t_3} - W_{t_2}), \dots, (W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$ sont toutes indépendantes entre elles ;
- $\{W_t\}$ est à accroissement stationnaire, c'est-à-dire que la loi suivie par la variable aléatoire $(W_{t+\Delta} - W_t)$ ne dépend pas de la valeur de t , pour tout t positif ;
- la variable $(W_{t+\Delta} - W_t) \sim \mathcal{N}(0, \Delta)$; de plus $W(0) = 0$, donc $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$;
- enfin, on dit que la variable $dW \sim \mathcal{N}(0, dt)$.

I.2.3 Généralités sur le modèle de Markov

L'intérêt du modèle de Gauss-Markov (ou processus autorégressif) est qu'il permet d'exprimer l'évolution d'un vecteur d'état entaché d'incertitude. C'est une méthode que nous utiliserons pour fixer les modèles d'évolution associés à nos deux protocoles.

Dans un premier temps, indiquons qu'une variable B qui suit un processus autorégressif d'ordre p (noté AR(p) où $p \in \mathbb{N}$), respecte l'égalité suivante :

$$(3) \quad B^{(p)}(t) + a_{p-1}B^{(p-1)}(t) + \dots + a_1\dot{B}(t) + a_0B(t) = \sigma_b \varepsilon(t)$$

, où :

- $\varepsilon(t)$, est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée, réduite ;
- σ_b , est l'écart-type du bruit blanc ;
- $B^{(i)}$, est la dérivée $i^{\text{ème}}$ de B avec $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$;
- $a_{i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket}$, sont des constantes réelles appelées paramètres du modèle d'évolution du processus.

Un processus autorégressif d'ordre p peut toujours se ramener à un processus AR(1). Ainsi, l'équation (3) peut-elle être ramenée à un processus AR(1) selon l'expression matricielle suivante :

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} B(t) \\ \dot{B}(t) \\ \vdots \\ B^{(p-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdot & a_{p-2} & -a_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B(t) \\ \dot{B}(t) \\ \vdots \\ B^{(p-1)}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \sigma_b \varepsilon(t) \end{pmatrix}$$

Ce modèle peut s'écrire sous la forme condensée : $\frac{d}{dt}C(t) = A \cdot C(t) + \Omega(t)$, avec

$$C(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ \dot{B}(t) \\ \vdots \\ B^{(p-1)}(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdot & a_{p-2} & -a_{p-1} \end{pmatrix} \text{ et } \Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \sigma_b \varepsilon(t) \end{pmatrix}.$$

Enfin, la solution $B(t)$ d'un modèle de Markov d'ordre 1 peut s'écrire :

$$(5) \quad B_t = e^{A(t-t_0)}B_{t_0} + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}\Omega(s)ds$$

Dans l'équation (5) on peut noter que :

- $B_t = e^{A(t-t_0)}B_{t_0}$ est la solution du système différentiel en l'absence de bruit (soit $\Omega(s) = 0 \forall s \llbracket t_0, t \rrbracket$) ;
- $\int_{t_0}^t e^{A(t-s)}\Omega(s)ds$ est le terme de bruit de la solution de $B(t)$.

II Protocoles expérimentaux

Dans cette partie, nous allons présenter les deux protocoles retenus pour tester l'apport du filtre de Kalman pour le positionnement dynamique. Ces expériences doivent correspondre respectivement à l'utilisation d'un système de positionnement GNSS/INS embarqué et à une observation tachéométrique sur un élément dynamique. Dans chacune de ces expériences, nous allons chercher à déterminer la position d'un mobile dont la trajectoire de référence est connue. Pour avoir notre trajectoire de référence, nous avons utilisé le banc interférométrique de l'ESGT, car il nous permet de mesurer le déplacement 1D d'un chariot mobile avec une précision de quelques micromètres grâce à un interféromètre XL-80 de Renishaw©. De plus, il s'agit de la même configuration expérimentale que celle de l'article sur lequel se base notre protocole d'auscultation (BOGATIN, et al., 2008).

Commençons par décrire le protocole avec système de positionnement GNSS/INS.

II.1 Protocole avec système hybride GNSS/INS

Le but de ce protocole est de tester l'apport du filtrage de Kalman pour les systèmes de navigation embarqués et hybrides GNSS/INS. Avant de présenter notre protocole, il convient de définir ce qu'est l'INS.

II.1.1 La centrale inertielle

La centrale inertielle (ou INS) est un outil de mesure utilisé en majorité pour la navigation. Elle est composée de capteurs de deux types :

- le gyromètre : élément capable de mesurer la vitesse angulaire autour d'un axe ;
- l'accéléromètre : outil qui mesure la somme des forces qui lui sont appliquées, divisée par sa masse, selon une direction.

L'utilisation conjointe de trois gyromètres et trois accéléromètres selon des axes de mesures orthogonaux, permet d'avoir un positionnement relatif à la position initiale en trois dimensions. En effet, les accéléromètres vont fournir l'accélération subie par le système. Cette information est orientée à l'aide des observations gyroscopiques. L'accélération peut enfin être intégrée deux fois pour donner la position relative de notre système.

En théorie, cet instrument devrait permettre le positionnement d'un mobile dont les coordonnées et l'orientation initiales sont connues, sans avoir besoin de recourir à d'autres observations. Cependant, les erreurs systématiques propres aux accéléromètres et aux gyromètres (biais, bruits) font dériver dans le temps l'estimation de la position. On hybride donc couramment cet instrument avec un capteur GNSS pour corriger cette dérive, usuellement à l'aide d'un filtrage de Kalman.

La Figure 5 illustre les mesures effectuées par la centrale inertielle.

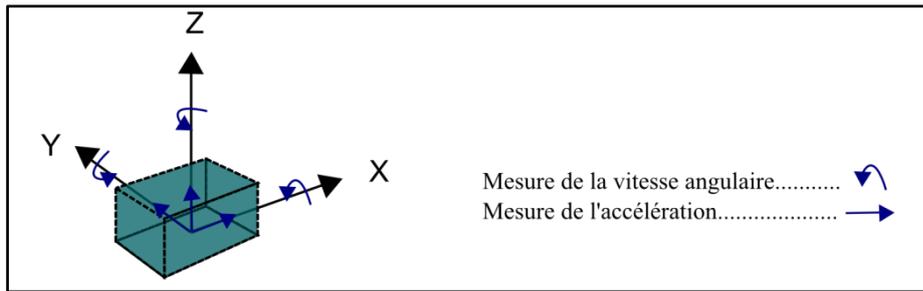


Figure 5 : Repère de la centrale inertielle

Présentons à présent, notre protocole de positionnement GNSS/INS.

II.1.2 Le protocole avec système de positionnement GNSS/INS

Pour simplifier le problème de positionnement, nous avons limité le mouvement étudié à un déplacement à une dimension selon l'axe du banc interférométrique.

Nous utilisons la centrale inertielle miniature (IG-500N de SBGsystems©) pour obtenir les mesures d'accélération subies par notre chariot. Cet instrument est relié à un mini-ordinateur (Raspberry Pi©) qui enregistre les observations à une fréquence définie. Ces éléments sont tous deux embarqués sur le mobile.

Le fait de travailler sur le banc interférométrique (au sous sol) nous prive de l'utilisation du récepteur GNSS implémenté dans l'IG-500N. Pour remédier à ce problème, nous avons décidé de simuler ces observations. En effet, nous connaissons bien le comportement des mesures GNSS, et les précisions du récepteur GNSS de l'IG-500N sont données par le constructeur (SBG systems, 2013). Nous avons donc simulé ces observations en prenant la mesure de position donnée par l'interféromètre et lui avons appliqué un bruit blanc gaussien de mêmes caractéristiques que la mesure GNSS effectuée par l'IG-500N.

Cependant, le fait de travailler avec des instruments de mesure différents, nous oblige d'une part, à synchroniser leurs observations, et d'autre part, à les exprimer dans un même repère. C'est pour ces deux raisons que nous avons développé des programmes de synchronisation INS/interféromètre et de mise en référence des données INS dans le « repère banc » dans lequel sont exprimées les mesures interférométriques. Ces algorithmes ont été testés sur des données simulées et/ou réelles afin de vérifier leur bon fonctionnement avant de les utiliser dans le traitement des données expérimentales de notre protocole. Nous décrivons en annexe 2 et 3, les méthodes et les tests de validation concernant respectivement les programmes de synchronisation et de mise en référence des données inertielles. Le code Matlab© de synchronisation est exposé en annexe 4.

Le schéma de principe du protocole ainsi qu'une image du dispositif sont données en Figure 6 et Figure 7 respectivement.

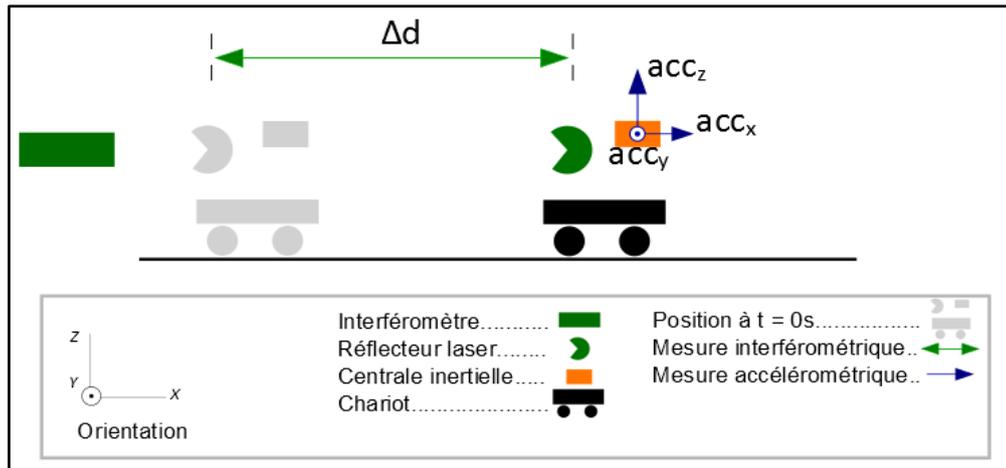


Figure 6 : Schéma du protocole avec système GNSS/INS. Le chariot en mouvement est observé par un interféromètre qui renvoie son déplacement 1D (Δd), et par une centrale inertielle qui donne son accélération en 3D (acc_x, acc_y, acc_z).



Figure 7 : Vue du dispositif mis en place pour le protocole de positionnement avec système GNSS/INS, avec le chariot mobile (à gauche) et l'émetteur-récepteur interférométrique (à droite).

II.1.3 Résultat attendu

Pour terminer la présentation de ce protocole, il est important de comprendre le résultat que nous cherchons à obtenir par combinaison de mesures GNSS et inertielle par un filtrage de Kalman. En effet, nous avons énoncé que l'INS donnait des mesures d'attitude et d'accélération précises, mais que l'estimation de la position par ce seul instrument était sujette à dérive et donc que la précision de cet estimateur se dégrade avec le temps (cf. courbe verte en Figure 8). Nous avons aussi décrit la mesure GNSS comme une observation sur la position qui ne dérive pas mais dont la précision ne nous satisfait pas (cf. courbe rouge pointillée en Figure 8). On cherche donc, en combinant ces deux instruments par filtrage de Kalman, à obtenir un estimateur de la position qui ne soit pas sujet à dérive et qui garantit une meilleure précision que l'observation GNSS (cf. courbe bleue pointillée en Figure 8).

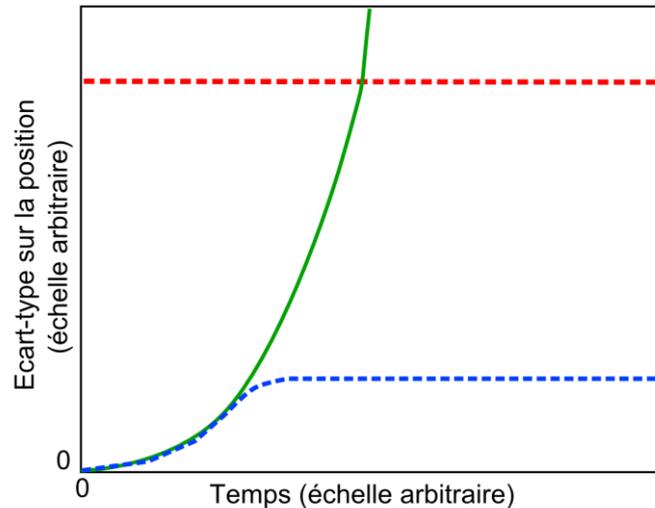


Figure 8 : Écarts-types sur la position 1D en fonction du temps. On retrouve la mesure GNSS (courbe rouge pointillée), l'estimateur de l'INS (courbe verte), et l'estimateur de Kalman (courbe bleu pointillée).

II.2 Protocole d'auscultation

II.2.1 Définition de l'auscultation

Par définition, l'auscultation en topométrie consiste à déterminer la position d'éléments physiques au cours du temps. Cette activité s'intéresse le plus souvent à quantifier les mouvements d'ouvrages d'art soumis à des contraintes environnementales. Pour cela, le couple tachéomètre/prisme reste l'instrument de prédilection de cette activité, compte tenu des précisions qu'il offre sur des positions en 3D.

II.2.2 L'article de S. BOGATIN

Dans l'article « Evaluation of linear Kalman filter processing geodetic kinematic measurements » (BOGATIN, et al., 2008), S. BOGATIN teste l'application du filtrage de Kalman aux données tachéométriques. Le but de son étude est de prouver l'intérêt du filtrage de Kalman pour la détermination de paramètres cinématiques. Elle utilise un banc interférométrique, identique à celui de l'ESGT, sur lequel se déplace un chariot. Le déplacement mesuré par un interféromètre représente la trajectoire de référence. En plus de cet instrument, elle relève les positions du chariot à l'aide d'un tachéomètre. L'article présente ensuite un modèle d'évolution des paramètres cinématiques et fixe successivement deux valeurs différentes de précision pour ce modèle. Les estimations de Kalman obtenues pour chacune des deux valeurs, sont ensuite comparées avec la donnée de référence pour déterminer la valeur de précision qui donne les meilleurs estimateurs sur la position.

Cependant, cet article ne présente pas les apports du filtrage de Kalman par rapport aux données tachéométriques brutes. De plus, les paramètres du modèle d'évolution sont fixés manuellement, et n'ont pas fait l'objet de procédure de calibration.

Notre objectif est de reprendre l'expérience de l'article de S. BOGATIN, qui est une bonne simulation d'un travail d'auscultation, puis de déterminer une calibration pour le modèle d'évolution et enfin de tester l'apport réel sur l'estimation de la position du filtrage de Kalman par rapport aux observations tachéométriques.

II.2.3 Protocole d'auscultation

De la même façon que le protocole mis en place par S. BOGATIN, nous avons utilisé le chariot du banc interférométrique et nous avons observé son déplacement à l'aide d'un couple tachéomètre/prisme. Cependant, la mesure interférométrique n'a pas pu être synchronisée avec l'observation tachéométrique en raison de la fréquence d'échantillonnage instable du tachéomètre. Sachant que la synchronisation est un pré-requis pour comparer nos estimateurs avec les positions de référence associées, nous avons dû adapter le protocole de BOGATIN.

Nous avons donc choisi de considérer la trajectoire tachéométrique, mesurée au tachéomètre, comme la trajectoire de référence. Les observations tachéométriques sont ensuite bruitées pour obtenir une observation simulée. Les bruits utilisés modélisent les erreurs systématiques sur les mesures d'angles et de distance d'un tachéomètre, et s'applique selon les relations suivantes :

$$\begin{aligned}d_k^{bruit} &= d_k + \sigma_d \varepsilon_k^{(d)} \\ Hz_k^{bruit} &= Hz_k + \sigma_{Hz} \varepsilon_k^{(Hz)} \\ V_k^{bruit} &= V_k + \sigma_d \varepsilon_k^{(V)}\end{aligned}$$

, où :

- $\varepsilon_k^{(d)}$, $\varepsilon_k^{(Hz)}$, $\varepsilon_k^{(V)}$ sont des bruits blancs gaussiens de variance égale à 1,
- (Hz_k, d_k, V_k) est la $k^{ième}$ mesure tachéométrique (angle horizontal, distance, angle vertical) c'est-à-dire la mesure de référence,
- $(Hz_k^{bruit}, d_k^{bruit}, V_k^{bruit})$ est la $k^{ième}$ mesure tachéométrique bruitée que nous allons traiter par filtrage de Kalman,
- σ_{Hz} , σ_d , σ_V , sont les écarts-types des bruits ajoutés aux observations tachéométriques dont les valeurs sont fixées d'après les précisions des tachéomètres de l'ESGT.

Nous avons alors une mesure de référence et une observation tachéométrique simulée.

Le tachéomètre utilisé lors de ce protocole est le S8 de Trimble©. Il s'agit du tachéomètre le plus précis disponible à l'ESGT. Ses paramètres de précision sont donnés dans le Tableau 1.

Précision angulaire	$\sigma_{angulaire} = 0.15 \text{ dmgon}$
Précision sur la mesure de distance	$\sigma_d = 0.5 \text{ mm} + 1\text{ppm}$

Tableau 1 : Précision du Trimble© S8.

Un schéma de principe du protocole et une photographie du dispositif utilisé, sont donnés en Figure 9 et Figure 10 respectivement.

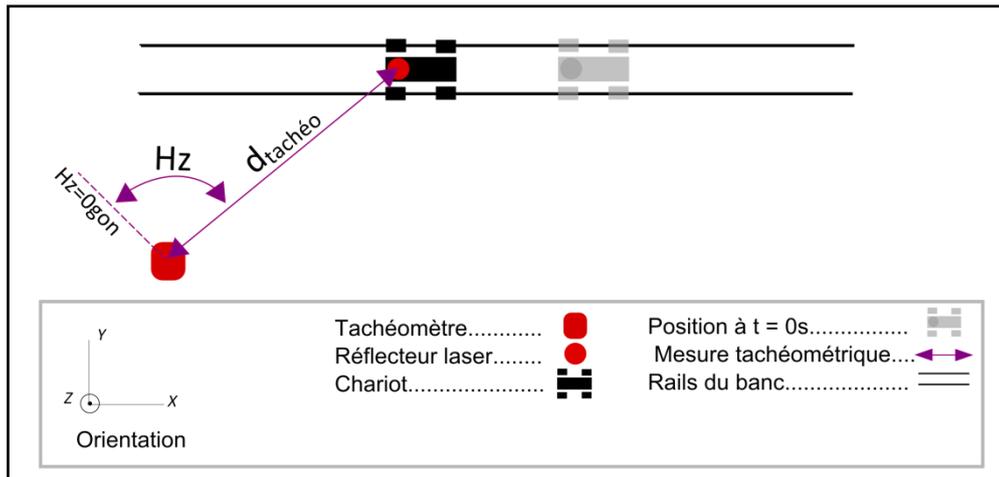


Figure 9 : Schéma de la vue du dessus du protocole d'auscultation. Le mouvement du chariot est relevé par mesures tachéométriques. La position du chariot est donc connue à chaque instant dans le repère local du tachéomètre.



Figure 10 : Photographie du dispositif mis en place pour le protocole d'auscultation, avec le chariot équipé d'un prisme (à gauche) et le tachéomètre S8 de Trimble© (à droite).

II.2.4 Résultat attendu

Dans ce protocole nous cherchons à combiner un modèle d'évolution avec les observations tachéométriques par filtrage de Kalman. Nous espérons ainsi pouvoir obtenir un estimateur de position de meilleure précision que la simple mesure tachéométrique bruitée.

III Formulation des modèles d'évolution et d'observation

Le but de notre étude est d'évaluer l'apport du filtrage de Kalman dans le contexte de notre protocole avec système GNSS/INS et celui d'auscultation. Nous avons vu en partie I.1 que le filtrage de Kalman reposait sur la combinaison de modèles d'évolution et d'observation. Après avoir décrit nos deux protocoles (cf. partie II), nous allons donc présenter les modèles d'évolution et d'observation associés à chacune de nos deux expériences.

III.1 Protocole avec un système GNSS/INS

On cherche donc dans cette partie à définir un modèle d'évolution et d'observation qui va nous permettre une hybridation entre les mesures inertielles (accélérométriques) et les mesures de position (GNSS). Cette combinaison de deux systèmes aux caractéristiques complémentaires devra pallier les insuffisances de chacun d'eux. Dans ce but nous allons chercher à estimer l'erreur de positionnement obtenue si nous utilisons seulement l'accéléromètre, et pour cela fixer tout d'abord un modèle d'évolution associé à la mesure de l'INS.

III.1.1 Modèle d'évolution associé à la centrale inertielle

Nous considérons le mouvement 1D horizontal d'un véhicule équipé d'une centrale inertielle telle qu'à chaque instant t , cette dernière fournit une mesure d'accélération notée u_t . Soient p_t la position 1D du véhicule et \dot{p}_t sa vitesse. Selon l'article "Kalman filtre under stationary noise" (BROUSTE, à paraître), le modèle d'évolution dynamique de la position p_t est donné par :

$$(6) \quad \begin{pmatrix} dp_t \\ d\dot{p}_t \\ db_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_t \\ \dot{p}_t \\ b_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dW_t^1 \\ dW_t^2 \end{pmatrix} \quad t > 0, \begin{pmatrix} p_0 \\ \dot{p}_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

où :

- P_t , est le vecteur d'état du système au temps t , avec $P_t = (p_t \quad \dot{p}_t \quad b_t)^T$,
- p_t , est la position du système au temps t ,
- \dot{p}_t , est la vitesse du système au temps t ,
- b_t , est le biais de la mesure accélérométrique au temps t ,
- u_t , est la mesure de l'accélération par l'accéléromètre au temps t ,
- W_t^1 et W_t^2 , sont deux variables aléatoires suivant des processus de Wiener indépendants.

On notera dans l'équation (6), que le terme $\sigma_1 dW_t^1$ traduit un bruit sur la mesure de l'accélération u_t . De même, $\sigma_2 dW_t^2$ rend compte de la dérive du biais. De plus, les valeurs de σ_1 et σ_2 devront faire l'objet d'une calibration.

De façon plus concise l'équation (6) va s'écrire :

$$(7) \quad dP_t = (F \cdot P_t + U_t) \cdot dt + \Gamma \cdot dW \quad , \quad t > 0, P_0$$

Le modèle d'évolution du biais b_t peut être amélioré en considérant que ce dernier suit un processus autorégressif d'ordre ar . En effet, dans le modèle présenté dans l'équation (6), on considère que le biais est une constante aléatoire. Cependant, il est possible que le biais subisse des variations, chose prise en compte dans le modèle d'évolution suivant :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b(t) \\ \dot{b}(t) \\ \vdots \\ b^{(ar-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdot & a_{ar-2} & -a_{ar-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(t) \\ \dot{b}(t) \\ \vdots \\ b^{(ar-1)}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \sigma_2 \varepsilon(t) \end{pmatrix}$$

Notre modèle devient donc :

$$\begin{pmatrix} dp_t \\ d\dot{p}_t \\ db_t \\ d\dot{b}_t \\ \vdots \\ db_t^{(ar-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a_0 & \cdot & a_{ar-2} & -a_{ar-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_t \\ \dot{p}_t \\ b_t \\ \dot{b}_t \\ \vdots \\ b_t^{(ar-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dt + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dW_t^1 \\ dW_t^2 \end{pmatrix}$$

Maintenant que nous avons fixé un modèle d'évolution associé à la mesure de l'INS, nous allons fixer un modèle d'évolution de la dérive des estimations obtenues avec ce seul instrument. Nous nommerons cette dérive : l'erreur de position.

III.1.2 Modèle d'évolution de l'erreur de position

Dans un premier temps, nous considérons que le biais est une constante aléatoire (cas de l'équation (6)).

Considérons la valeur de l'erreur de détermination de P_t . Cette valeur sera notée $X_t \in \mathbb{R}^3$ et il s'agit de l'état que nous cherchons à estimer grâce au filtrage de Kalman. On fixe donc que X_t respecte l'équation suivante :

$$(8) \quad X_t = P_t - P_t^{INS} = \begin{pmatrix} \hat{p}_t \\ \hat{p}_t \\ \hat{b}_t \end{pmatrix}, \quad \text{avec } P_t \text{ le vecteur de paramètres vrais et } P_t^{INS} \text{ le vecteur des paramètres mesurés par la centrale inertielle.}$$

On déduit des équations (7) et (8), l'expression du modèle d'évolution de X_t :

$$(9) \quad dX_t = F \cdot X_t \cdot dt + \Gamma \cdot dW \quad , t > 0 \text{ et } X_0 \text{ donné.}$$

Le modèle d'évolution donné en équation (9) est un modèle de Markov d'ordre 1. En vertu des propriétés d'un tel système (présentées dans la partie I.2.1), la solution de cette équation s'écrit :

$$(10) \quad X_t = e^{F(t-t_0)} X_0 + \int_{t_0}^t e^{F(t-s)} \Gamma \cdot dW_s \quad , t > 0, X_0 = X_t \text{ pour tout } t = t_0.$$

En pratique, X_t est déterminé aux instants de réalisation des mesures. Soit t_k l'instant de l'acquisition de la $k^{\text{ième}}$ mesure, et X_k la valeur de l'erreur de détermination de P_t au temps t_k . En supposant les mesures effectuées avec le pas d'échantillonnage Δ , il vient $t_k = k\Delta$. L'équation (10) peut alors s'écrire sous la forme discrétisée suivante :

$$X_{k+1} = e^{F\Delta} X_k + \tilde{W}_k \quad , k \geq 1, X_0 \text{ donné.}$$

L'expression précédente peut être condensée avec l'écriture suivante :

$$X_{k+1} = \Theta X_k + \Sigma \varepsilon_k \quad , k \geq 1, X_0 \text{ donné.}$$

où :

- $\Theta = e^{F\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} F\Delta = I_3 + F\Delta + \frac{(F\Delta)^2}{(2)!}$, car F est nilpotent d'ordre 3 (F^3 est donc nulle), donc Θ est de même dimension que F ,

- Σ , est une matrice déterministe, telle que $\tilde{W}_k = \Sigma \varepsilon_k$,
- ε_k , est un vecteur aléatoire gaussien centré réduit correspondant à un bruit blanc.

Si $\Sigma = 0$, l'équation traduit l'évolution déterministe d'un vecteur X_k de \mathbb{R}^3 qui obéit à la relation de récurrence : $X_{k+1} = \Theta X_k$, X_0 donné, $k \in \mathbb{N}$. Si $\Sigma \neq 0$, le terme $\Sigma \varepsilon_k$ perturbe le modèle d'évolution déterministe. Par construction, $\Sigma \varepsilon_k$ est un bruit blanc gaussien.

Cherchons à déterminer la matrice de covariance du bruit $\Sigma \varepsilon_k$. Il vient :

$$\mathbb{E}(\tilde{W}_k \tilde{W}_k^T) = \mathbb{E}(\Sigma \varepsilon_k (\Sigma \varepsilon_k)^T) = \Sigma \mathbb{E}(\varepsilon_k \varepsilon_k^T) \Sigma^T = \Sigma \Sigma^T$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tilde{W}_k \tilde{W}_k^T) &= \int_{l\Delta}^{(l+1)\Delta} \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} e^{F((l+1)\Delta-s')} \Gamma \mathbb{E}(W_{s'} W_{s'}^T) \Gamma^T e^{F^T((k+1)\Delta-s)} \cdot ds' \cdot ds \\ &= \int_{l\Delta}^{(l+1)\Delta} \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} e^{F((l+1)\Delta-s')} \Gamma \mathbb{E} \left(\begin{pmatrix} W_{s'}^1 \\ W_{s'}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{s'}^1 & W_{s'}^2 \end{pmatrix} \right) \Gamma^T e^{F^T((k+1)\Delta-s)} \cdot ds' \cdot ds \\ &= \int_{l\Delta}^{(l+1)\Delta} \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} e^{F((l+1)\Delta-s')} \Gamma \begin{pmatrix} \delta_{s-s'} & 0 \\ 0 & \delta_{s-s'} \end{pmatrix} \Gamma^T e^{F^T((k+1)\Delta-s)} \cdot ds' \cdot ds \\ (11) \quad &= \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} e^{F((k+1)\Delta-s)} \Gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma^T e^{F^T((k+1)\Delta-s)} \cdot ds \end{aligned}$$

Par développement de la formule (11), on montre que la matrice Σ satisfait la relation donnée par :

$$\Sigma \Sigma^T = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \frac{\Delta^3}{3} + \sigma_2^2 \frac{\Delta^5}{20} & \sigma_1^2 \frac{\Delta^2}{2} + \sigma_2^2 \frac{\Delta^4}{8} & \sigma_2^2 \frac{\Delta^3}{6} \\ \sigma_1^2 \frac{\Delta^2}{2} + \sigma_2^2 \frac{\Delta^4}{8} & \sigma_1^2 \Delta + \sigma_2^2 \frac{\Delta^3}{3} & \sigma_2^2 \frac{\Delta^2}{2} \\ \sigma_2^2 \frac{\Delta^3}{6} & \sigma_2^2 \frac{\Delta^2}{2} & \sigma_2^2 \Delta \end{pmatrix}.$$

Sachant que la période d'acquisition de l'accéléromètre est généralement faible, on peut simplifier l'écriture de Θ et $\Sigma \Sigma^T$ en négligeant les termes Δ^i où $i > 1$. On obtient alors :

$$(12) \quad \Theta = I_3 + F\Delta = \begin{pmatrix} 1 & \Delta & 0 \\ 0 & 1 & \Delta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } \Sigma \Sigma^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2^2 \Delta \end{pmatrix}.$$

Les relations (12) indiquent que, d'une part, la matrice Θ est complètement déterminée par la connaissance du pas d'échantillonnage Δ . D'autre part, la matrice Σ s'obtient à partir de la décomposition de Cholesky appliquée à $\Sigma \Sigma^T$ qui dépend de σ_1 et σ_2 .

En considérant à présent le caractère autorégressif du biais, le modèle d'évolution de l'erreur de position s'écrit :

$$\begin{pmatrix} d\hat{p}_t \\ d\dot{\hat{p}}_t \\ d\hat{b}_t \\ d\dot{\hat{b}}_t \\ \vdots \\ d\hat{b}_t^{(ar-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a_0 & \cdot & a_{ar-2} & -a_{ar-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{p}_t \\ \dot{\hat{p}}_t \\ \hat{b}_t \\ \dot{\hat{b}}_t \\ \vdots \\ \hat{b}_t^{(ar-1)} \end{pmatrix} \cdot dt + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \sigma_b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dW_t^1 \\ dW_t^2 \end{pmatrix}$$

Le modèle devient alors très complexe à discrétiser avec la présence des dérivées successives du biais. On peut cependant simplifier le problème en fixant :

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & \Delta & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \Delta & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \alpha_0 & \alpha_1 & \cdot & \cdot & \alpha_{ar-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \Sigma \Sigma^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & \sigma_1^2 \Delta & 0 & & & & \\ 0 & 0 & \sigma_2^2 \Delta & & & & \\ & & & & & & \\ ar-1 0_3 & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & ar-1 0_{ar-1} \end{pmatrix}$$

où ${}_l 0_c$ est la matrice nulle de taille $(l \times c)$.

Ces deux dernières formules font que notre modèle d'évolution respecte bien le caractère autorégressif du biais et s'exprime :

$$(13) \quad \begin{pmatrix} p_{k+1} \\ \dot{p}_{k+1} \\ b_{k+1} \\ \hat{b}_k \\ \vdots \\ b_{k-ar+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \Delta & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \alpha_0 & \alpha_1 & \cdot & \cdot & \alpha_{ar-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{p}_k \\ \dot{\hat{p}}_k \\ b_k \\ b_{k-1} \\ \vdots \\ b_{k-ar+1} \end{pmatrix} \cdot dt + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dW_t^1 \\ dW_t^2 \end{pmatrix}$$

Cependant, cette simplification nous a amené à utiliser des termes $\alpha_{i \in [0, ar-1]}$ qui ne sont pas explicites et doivent être déterminés par calibration.

Nous avons maintenant défini le modèle d'évolution de l'erreur de position, nous allons ensuite présenter le modèle d'observation de cet élément.

III.1.3 Modèle d'observation de l'erreur de position

Dans la partie II.1, nous avons indiqué que nous allons nous servir de mesures GNSS données par la centrale inertielle pour obtenir les observations sur le vecteur d'état. Ces acquisitions notées \tilde{P}_t , renseignent sur la position du mobile en 1D avec une précision notée $\tilde{\sigma}$. Dans le modèle de filtrage évoqué en partie III.1.2 et III.1.3, on a cherché l'erreur de détermination de l'état $X_t = P_t - P_t^{INS}$. Les observations GNSS nous donnent alors une mesure explicite de l'erreur de position selon l'équation suivante : $Y_t = \tilde{P}_t - P_t^{INS}$.

La forme discrétisée de l'équation d'observation s'écrit :

$$Y_k = H \cdot X_k + \tilde{\Sigma} \tilde{\epsilon}_k \quad \text{avec } H = (1 \quad 0 \quad 0), \quad \tilde{\Sigma} = \tilde{\sigma} \text{ et } \tilde{\epsilon}_k \text{ un bruit blanc gaussien.}$$

III.2 Protocole d'auscultation

Dans ce deuxième protocole, nous cherchons à réaliser l'estimation de la position, de la vitesse et de l'accélération d'un objet mobile, à partir de mesures tachéométriques. Pour cela, nous avons utilisé les modèles d'évolution et d'observation décrits dans l'article "Evaluation of linear Kalman filter processing geodetic kinematic measurement " (BOGATIN, et al., 2008).

III.2.1 Modèle d'évolution du protocole d'auscultation

Dans cette étude, on cherche à déterminer le vecteur d'état suivant : $X_t = (x \ \dot{x} \ \ddot{x} \ y \ \dot{y} \ \ddot{y} \ z \ \dot{z} \ \ddot{z})_t^T$, où $(x \ y \ z)_t^T$, $(\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z})_t^T$ et $(\ddot{x} \ \ddot{y} \ \ddot{z})_t^T$ constituent respectivement les vecteurs position, vitesse et accélération du mobile.

Le modèle d'évolution de ce vecteur d'état suit un processus de Markov qui s'exprime par :

$$(14) \quad dX_t = F \cdot X_t \cdot dt + \Gamma \cdot dW \quad , \quad t > 0, X_0 \text{ donné,}$$

soit, explicitement,

$$d \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ z \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ & & & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ z \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_t \cdot dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_x \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_y \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_z \end{pmatrix} \cdot dW_t$$

où W_t , une variable aléatoire qui suit un processus de Wiener.

Ce modèle donne la dérivée de l'accélération selon chacun des axes du repère, comme nulle à un bruit près.

Nous avons considéré que les paramètres σ_x , σ_y et σ_z , peuvent prendre des valeurs différentes, ce qui n'est pas le cas du modèle mis en place par BOGATIN et al.

En suivant le même raisonnement que de la partie III.1.2, ce modèle de Markov d'ordre 1 admet la solution suivante :

$$X_{k+1} = \Theta X_k + \Sigma \varepsilon_k \quad , \quad \text{pour } k \geq 1, X_0 \text{ donné,}$$

avec :

- $\Theta = e^{F\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} F\Delta = I_3 + F\Delta + \frac{(F\Delta)^2}{(2)!}$, car F est nilpotent d'ordre 3 (F^3 est nulle) ;
- Σ , est une matrice déterministe ;
- ε_k , est un vecteur aléatoire gaussien centrée réduit, correspondant à un bruit blanc.

La covariance du bruit affectant le modèle d'évolution s'exprime par :

où D_k est la matrice des dérivées partielles de $Z_k = (x_k \ y_k \ z_k)^T$ selon L_k , qui s'exprime de la manière suivante :

$$D_k = \frac{\partial Z}{\partial L_k} = \begin{pmatrix} \partial x / \partial H z_k & \partial x / \partial d_k & \partial x / \partial V_k \\ \partial y / \partial H z_k & \partial y / \partial d_k & \partial y / \partial V_k \\ \partial z / \partial H z_k & \partial z / \partial d_k & \partial z / \partial V_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d_k \cdot \sin(V_k) \cdot \cos(Hz_k) & \sin(V_k) \cdot \sin(Hz_k) & d_k \cdot \cos(V_k) \cdot \sin(Hz_k) \\ -d_k \cdot \sin(V_k) \cdot \sin(Hz_k) & \sin(V_k) \cdot \cos(Hz_k) & d_k \cdot \cos(V_k) \cdot \cos(Hz_k) \\ 0 & \cos(V_k) & -d_k \cdot \sin(V_k) \end{pmatrix}$$

La matrice de covariance des observations Z_k doit donc être mise à jour à chaque pas de calcul selon la relation ci-dessus.

III.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fixé les modèles d'observation et d'évolution qui seront utilisés dans nos protocoles. Nous avons donc tous les éléments formels pour traiter des données expérimentales. Nous devons maintenant adapter les mesures à nos problèmes de filtrage, et calibrer les paramètres de précision de nos modèles par rapport aux données réelles.

IV Calibrations des modèles de filtrage

Nous avons maintenant mis en place les protocoles expérimentaux liés à l'utilisation d'un système de positionnement GNSS/INS et à un travail d'auscultation, ainsi que les problèmes de filtrage de Kalman associés. Cependant, avant de pouvoir appliquer le filtre de Kalman sur les données issues de nos protocoles expérimentaux, il faut calibrer les modèles, c'est-à-dire déterminer les paramètres de précision des modèles d'évolution et d'observation. Ce chapitre s'intéresse à cette calibration.

Nous organisons ce chapitre en présentant tout d'abord l'outil mathématique qui nous a permis de réaliser nos calibrations, puis nous exposons la méthode d'estimation des paramètres de précision liés au protocole avec système GNSS/INS, pour conclure sur la calibration liée au protocole d'auscultation.

IV.1 L'outil de calibration : l'estimation par maximum de vraisemblance

Les explications présentées dans cette partie, se basent sur les informations recueillies dans l'ouvrage "Exercices et problèmes de statistique et probabilités" (PHAN, et al., 2012).

L'estimation par maximum de vraisemblance est une méthode qui détermine, à partir d'un échantillon de variables aléatoires, les paramètres de la loi suivie par ces variables. Par exemple, si on considère un ensemble de variables aléatoires qui suivent la loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 , alors l'application du maximum de vraisemblance permet d'estimer μ et σ^2 .

Pour expliquer plus en détail cette méthode, considérons n tirages aléatoires d'une même expérience stochastique ; on obtient alors la suite de variables : $var_1, var_2, \dots, var_n$. Sachant que toutes ces variables sont issues d'une même expérience on peut affirmer qu'elles suivent toute la même loi de probabilité. On note $\mathbb{P}(v_1, \vartheta)$ la probabilité d'obtenir la valeur v_1 pour la variable var_1 sachant le vecteur des paramètres de la loi suivie par var_1 notés $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_l)$. Ensuite, on exprime la vraisemblance (notée L) de notre échantillon qui est égale à la probabilité d'obtenir le tirage v_1, v_2, \dots, v_n sachant ϑ . Cette vraisemblance respecte les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} L(v_1, v_2, \dots, v_n, \vartheta) &= \mathbb{P}(var_1 = v_1, \dots, var_n = v_n | \vartheta) \\ &= \mathbb{P}(var_1 = v_1 \cap var_2 = v_2 \cap \dots \cap var_n = v_n | \vartheta) \end{aligned}$$

De plus, dans l'hypothèse où les variables aléatoires sont indépendantes être elles, la vraisemblance peut s'exprimer selon l'égalité suivante :

$$L(v_1, v_2, \dots, v_n, \vartheta) = \mathbb{P}(var_1 = v_1 | \vartheta) \times \mathbb{P}(var_2 = v_2 | \vartheta) \times \dots \times \mathbb{P}(var_n = v_n | \vartheta)$$

Nous pouvons accéder à la valeur de $\mathbb{P}(var_k = v_k | \vartheta)$ en utilisant la fonction densité f qui caractérise la loi suivie par la variable var_k . On écrit que : $\mathbb{P}(var_k = v_k | \vartheta) = f(var_k = v_k | \vartheta)$.

Enfin, on va chercher pour quelle valeur de ϑ la vraisemblance $L(v_1, v_2, \dots, v_n, \vartheta)$ atteint sa valeur maximum. La valeur de ϑ qui en découle est notre estimation au sens de la méthode du maximum de vraisemblance.

IV.2 Calibration du protocole de navigation GNSS/INS

Dans cette partie, nous nous intéressons à la calibration des modèles de filtrage établis dans les parties III.1.2 et III.1.3.

Le problème de filtrage mis en place pour ce protocole, fait intervenir plusieurs paramètres inconnus :

- dans le modèle d'évolution, il s'agit de : $\sigma_1, \sigma_2, \alpha_0, \dots, \alpha_{ar-1}$;
- dans le modèle d'observation, il s'agit de : $\tilde{\sigma}$.

Nous avons vu dans la partie II.1, que $\tilde{\sigma}$ était fixé d'après les caractéristiques du récepteur GNSS disponible dans l'IG-500N. Ce capteur réalise des mesures sur une seule fréquence et à partir du code C/A ; sa précision sur la position 1D est donc d'environ 1 mètre. Nous sous-estimons cette précision en fixant $\tilde{\sigma}^2 = 3 \text{ m}$, soit une précision 1D d'environ 1,7 mètre. Ce choix est fait pour simuler de mauvaises conditions pour les mesures GNSS. Il reste donc à déterminer les seuls paramètres du modèle d'évolution impliqués dans l'équation (13).

L'une des principales difficultés soulevée par cette détermination est que le biais est un paramètre non observable. Il est donc impossible d'effectuer un traitement direct pour estimer les différents paramètres. Pour remédier à ce problème, nous allons donc recourir à une calibration par maximum de vraisemblance à partir d'un modèle de filtrage de Kalman destiné à la calibration.

IV.2.1 Réalisation d'un modèle de filtrage de Kalman pour la calibration

L'expression du modèle de filtrage de Kalman donnée par l'équation (15), permet d'estimer les caractéristiques du biais à partir des observations accélérométriques. C'est sur ces dernières que se base la calibration des paramètres du modèle d'évolution présenté en équation (13).

$$(15) \quad \begin{cases} X_k = \begin{pmatrix} b_k \\ \vdots \\ b_{k-ar+1} \end{pmatrix} = \Theta(\alpha_0, \dots, \alpha_{ar-1}) \cdot X_{k-1} + \Sigma(\sigma_2)\varepsilon_k \\ Y_k = u_k = HX_k + \tilde{\Sigma}(\sigma_1)\tilde{\varepsilon}_k \end{cases}$$

, pour $k \geq 1$, X_0 donné et avec :

- b_k , la valeur du biais de l'accéléromètre à l'instant de la $k^{\text{ième}}$ mesure ;
- u_k , la valeur de la $k^{\text{ième}}$ mesure ;
- $\Theta(\alpha_0, \dots, \alpha_{ar-1})$, la matrice de passage de l'état $k-1$ à l'état k ; cette matrice respecte l'équation suivante :

$$\Theta(\alpha_0, \dots, \alpha_{ar-1}) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_0 & \alpha_1 & \cdot & \cdot & \alpha_{ar-1} \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- H , la matrice respectant la forme suivante : $H = (-1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot)$,
- $\Sigma(\sigma_2)\Sigma^T(\sigma_2) = \sigma_2^2\Delta$, la matrice de variance covariance du modèle de calibration,
- $\tilde{\Sigma}(\sigma_1)\tilde{\Sigma}^T(\sigma_1) = \frac{\sigma_1^2}{\Delta}$, la matrice de variance covariance de la mesure,
- $\tilde{\varepsilon}_k$ et ε_k , deux variables aléatoires gaussiennes, centrées, réduites indépendantes.

Ce modèle est valable à condition que l'accélération vraie de l'instrument dans la direction considérée soit nulle.

IV.2.2 Application du maximum de vraisemblance au modèle de calibration

Dans partie IV.1, nous avons expliqué que la vraisemblance d'un échantillon de mesures dépend de la loi suivie par les variables aléatoires qui le composent. Par définition, nous savons que les vecteurs d'état et le vecteur d'observation sur ce dernier, sont considérés dans le filtre de Kalman comme des vecteurs aléatoires gaussiens. Or la fonction de densité d'un vecteur gaussien V de taille n est la suivante :

$$f_V(V, \vartheta^{(V)}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(\mathbb{V}(V))}} e^{-\frac{1}{2} \cdot (V - \mathbb{E}(V))^T \cdot \mathbb{V}(V)^{-1} \cdot (V - \mathbb{E}(V))}$$

avec $\vartheta^{(V)} = (\mathbb{E}(V), \mathbb{V}(V))$, et où $\mathbb{E}(V)$, $\mathbb{V}(V)$ sont respectivement l'espérance et la matrice de variances-covariances de V .

Nous savons que les vecteurs Y_1, \dots, Y_k sont indépendants entres eux, et qu'il nous est possible de les observer directement. On fixe donc la fonction de vraisemblance suivante :

$$\begin{aligned} L(Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \vartheta^{(Y)}) &= \prod_{i=1}^k f_Y(Y_i, \vartheta^{(Y)}) \\ (16) \quad &= \prod_{i=1}^k \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sqrt{\det(\mathbb{V}(Y_k))}} e^{-\frac{1}{2} \cdot (Y_k - \mathbb{E}(Y_k))^T \cdot \mathbb{V}(Y_k)^{-1} \cdot (Y_k - \mathbb{E}(Y_k))} \end{aligned}$$

Enfin, considérons les valeurs des paramètres $\mathbb{E}(Y_k)$ et $\mathbb{V}(Y_k)$ au sens du problème de filtrage présenté dans la partie IV.2.1. Voici leurs expressions respectives :

$$(17) \quad \mathbb{E}(Y_k) = H \cdot \mathbb{E}(X_k) = H \cdot \theta \cdot \pi_X(k-1)$$

$$\begin{aligned} (18) \quad \mathbb{V}(Y_k) &= \mathbb{E} \left((Y_k - \mathbb{E}(Y_k)) \cdot (Y_k - \mathbb{E}(Y_k))^T \right) \text{ et} \\ &= H \cdot \theta \cdot \gamma_{XX}(k-1) \cdot \theta^T \cdot H^T + H \cdot \Sigma(\sigma_2) \Sigma^T(\sigma_2) \cdot H^T + \tilde{\Sigma}(\sigma_1) \tilde{\Sigma}^T(\sigma_1) \end{aligned}$$

où $\pi_X(k-1)$ est l'estimateur du filtre de Kalman de l'état X_k , et $\gamma_{XX}(k-1)$ la covariance de cet estimateur.

Il faut maintenant chercher les paramètres $\mathbb{E}(Y_k)$ et $\mathbb{V}(Y_k)$ qui maximisent $L(Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \vartheta^{(Y)})$.

IV.2.3 Programme de recherche du maximum de vraisemblance

La recherche d'une valeur maximum sous Matlab© est réalisée en cherchant le minimum de l'expression opposée.

Nous avons donc réalisé une fonction de calibration qui considère en entrée les paramètres $\sigma_1, \sigma_2, \alpha_0, \dots, \alpha_{ar-1}$, charge un échantillon (Y_1, Y_2, \dots, Y_k) avec les paramètres associés et retourne la valeur : $-\log(L(Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \vartheta^{(Y)}))$. Nous cherchons les paramètres $\vartheta^{(Y)}$ qui minimisent la

valeur en sortie de cette fonction, et par conséquent qui maximisent la vraisemblance $L(Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \vartheta^{(Y)})$.

IV.2.4 Simulation du processus de calibration

Nous avons procédé à la simulation de mesures accélérométriques selon le modèle présenté en partie III.1.1, dans le cas où l'instrument reste immobile. Trois types de jeux de données accélérométriques sont simulés : le premier respecte l'hypothèse selon laquelle le biais ne suit pas de processus autorégressif, les suivants considèrent à l'inverse que cette composante suit respectivement un processus AR(1) et un processus AR(4). Le choix de ces trois types est fait de façon à considérer différents niveaux de complexité de modélisation du biais.

Nous avons ensuite cherché à retrouver les paramètres de notre modèle d'évolution par maximum de vraisemblance.

Nous avons effectué deux tests pour évaluer notre protocole de calibration. Le premier consiste à indiquer à la fonction de calibration les bons paramètres afin que la recherche du maximum de vraisemblance s'effectue directement dans la bonne région de l'espace des paramètres. Dans un second temps, nous avons cherché le maximum de vraisemblance sans a priori.

Le premier test a révélé que lorsqu'une quantité de mesures suffisantes (plus de 4000) est donnée, notre estimateur converge vers les bons paramètres. Cette constatation est validée par le deuxième test dans le cas d'un biais égal à une constante aléatoire ou qui suit un processus AR(1).

Dans ces deux hypothèses, les paramètres estimés sont donnés avec des écarts-types élevés. En effet, le rapport $\frac{\text{écart-type}}{\text{estimation}}$ est environ égal à 20%. Cependant, la valeur de ce rapport diminue si nous augmentons le nombre de simulations afin d'obtenir une meilleure estimation de l'écart-type.

On remarque grâce au deuxième test que notre estimation, dans le cas d'un biais suivant un processus AR(4), est perturbée. En effet, nous analysons l'importance des écarts-types comme la preuve de la présence de maxima locaux dans l'espace image de la fonction de vraisemblance, qui font converger notre estimateur vers des valeurs autres que celles attendues.

Les résultats du deuxième test sont résumés dans les Tableau 2, Tableau 3 et Tableau 4 ci-après.

	$\sigma_1^2/\Delta (m \cdot s^{-5})$	$\sigma_2^2 \cdot \Delta (m \cdot s^{-3})$
Paramètres en entrée	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$
Moyenne de l'estimateur	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$
Écart-type de l'estimateur	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$

Tableau 2 : Résultats de la calibration sur cent simulations (biais égal à une constante aléatoire)

	$\sigma_1^2/\Delta (m \cdot s^{-5})$	$\sigma_2^2 \cdot \Delta (m \cdot s^{-3})$	α_0
Paramètres en entrée	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$
Moyenne de l'estimateur	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$9,2 \cdot 10^{-4}$	$9,7 \cdot 10^{-5}$
Écart-type de l'estimateur	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-5}$

Tableau 3 : Résultats de la calibration sur cent simulations (biais ~ AR(1))

	σ_1^2 / Δ ($m \cdot s^{-5}$)	$\sigma_2^2 \cdot \Delta$ ($m \cdot s^{-3}$)	α_0	α_2	α_3	α_3
Paramètres en entrée	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$-1,0 \cdot 10^{-1}$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$
Moyenne de l'estimateur	$9,95 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$	$-9,2 \cdot 10^{-1}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$3,9 \cdot 10^{-1}$	$1,8 \cdot 10^{-1}$
Écart-type de l'estimateur	$1,29 \cdot 10^{-3}$	$3,1 \cdot 10^{-1}$	$5,7 \cdot 10^{-1}$	$2,5 \cdot 10^{-1}$	$3,6 \cdot 10^{-1}$	$2,2 \cdot 10^{-1}$

Tableau 4 : Résultats de la calibration sur cent simulations (biais ~ AR(4))

Ce test sur des données simulées indique que notre estimation des paramètres est correcte seulement dans le cas où le biais est une constante aléatoire ou suit un processus AR(1). Par conséquent, lors de notre expérience, nous ne considérerons que ces deux hypothèses pour modéliser l'observation accélérométrique.

IV.2.5 Calibration des accéléromètres

Nous avons testé notre calibration sur les différents accéléromètres, avec des périodes d'acquisition différentes, dans le but de vérifier que notre estimateur converge dans le cas de données expérimentales et de déterminer les caractéristiques de l'IG-500N.

Au vu des résultats présentés dans le Tableau 5, on remarque que le paramètre autorégressif, l'écart-type du bruit de mesure et celui sur le biais (respectivement α_0 , σ_1^2 / Δ et $\sigma_2^2 \cdot \Delta$) sont significativement proches pour les deux fréquences d'échantillonnage. Ces paramètres ne dépendent donc pas de la période d'échantillonnage.

Ensuite, on remarque que chaque accéléromètre possède des caractéristiques qui lui sont propres.

Enfin, on constate que notre méthode de calibration converge bien avec les données réelles.

Durée et période d'acquisition	Composante	σ_1^2 / Δ ($m \cdot s^{-5}$)	$\sigma_2^2 \times \Delta$ ($m \cdot s^{-3}$)	α_0	Type de biais
20min à 50Hz (soit environ 60.000 mesures)	Acc1	7,89E-03	3,61E-04		C.A.
		7,89E-03	3,61E-04	-5,35E-07	AR(1)
	Acc2	8,10E-03	8,38E-04		C.A.
		8,10E-03	8,38E-04	-7,23E-06	AR(1)
	Acc3	8,06E-03	3,98E-04		C.A.
		8,06E-03	3,98E-04	2,80E-08	AR(1)
10min à 94,5Hz (soit environ 60.000 mesures)	Acc1	7,85E-03	4,52E-04		C.A.
		7,85E-03	4,52E-04	-4,96E-07	AR(1)
	Acc2	8,04E-03	8,58E-04		C.A.
		8,04E-03	8,58E-04	-7,10E-06	AR(1)
	Acc3	7,60E-03	4,56E-04		C.A.
		7,60E-03	4,56E-04	2,90E-08	AR(1)

Tableau 5 : Calibration des paramètres du modèle d'évolution. C.A. est l'abréviation pour : « constante aléatoire ».

IV.2.6 Application au protocole expérimental

Posons à nouveau le contexte du protocole : nous avons trois observations accélérométriques données dans le repère de l'INS ; nous avons ensuite estimé la matrice de rotation qui nous permet d'exprimer ces accélérations dans le repère banc (cf. annexe 3). Sachant que nous estimons une position selon l'axe des abscisses du repère banc (c'est-à-dire l'axe des rails du banc interférométrique), seule la première composante de nos observations orientées nous intéresse. Finalement, nous devons calibrer non pas chacun des accéléromètres mais une composition des mesures de ces derniers.

Pour mener à bien notre calibration pour chaque expérimentation du protocole, il faut :

- calculer la matrice de rotation pour la mise en référence des données inertielles dans le repère banc ;
- puis appliquer cette transformation à un jeu de mesures préalablement acquis avec l'INS à l'immobile ;
- enfin utiliser la méthode de calibration sur la première composante du jeu de mesures orientées.

On ne peut malheureusement pas définir de calibration valable pour toutes les expérimentations car l'orientation de l'INS varie pour chacune d'elles, et par conséquent la rotation de mise en référence change aussi.

IV.3 Calibration pour le protocole d'auscultation

Dans ce protocole, le problème de filtrage mis en place (cf. partie III.2), fait intervenir les paramètres suivants :

- dans le modèle d'évolution, il s'agit de : $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$,
- dans le modèle d'observation, il s'agit de : $\sigma_{Hz}, \sigma_d, \sigma_V$.

Nous avons expliqué dans la partie II.2.3 que les paramètres relatifs au modèle d'observation étaient fixés selon les caractéristiques du constructeur. Par conséquent, seuls restent à calibrer : $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$.

Dans ce but, nous avons utilisé à nouveau la méthode du maximum de vraisemblance.

IV.3.1 Application du maximum de vraisemblance

Nous pouvons, sans avoir à créer un modèle de calibration, faire une étude de maximum de vraisemblance sur les composantes Y_k de notre problème de filtrage présenté en partie III.2.1 et III.2.2. Ensuite, on pose la vraisemblance sur les observations (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) comme respectant les équations (16), (17) et (18) présentées dans la partie IV.2.2.

IV.3.2 Fonction de recherche du maximum de vraisemblance

Nous avons choisi pour des raisons de rapidité de traitement et pour éviter des maxima locaux, de programmer une fonction qui ne calibre qu'un paramètre à la fois. En effet, nous pouvons traiter indépendamment les trois composantes X, Y et Z. Dans cette démarche, nous avons réalisé une fonction qui considère en entrée un paramètre σ^2 , charge un échantillon (Y_1, Y_2, \dots, Y_k) pour ne considérer que la composante à calibrer (X, Y ou Z) notée w , et retourne la valeur : $-\log\left(L(Y_1^w, Y_2^w, \dots, Y_k^w, \vartheta^{(Y^w)})\right)$.

Il ne reste plus qu'à réaliser une recherche de la valeur de σ^2 , pour laquelle la valeur en sortie de notre fonction est minimale.

IV.3.3 Validation du programme de calibration en simulation

Enfin, pour valider et constater l'efficacité de notre programme de calibration, nous avons simulé 1000 expériences de 200 échantillons chacune et nous avons utilisé notre programme de calibration sur la composante X (nous reviendrons sur la méthode de simulation de ce protocole en partie V.2.1).

On peut observer dans le Tableau 6 que l'écart entre la moyenne de l'estimateur et la valeur en entrée est significativement faible, cela indique que notre estimateur est sans biais. Néanmoins le rapport $\frac{\text{Écart-type de l'estimateur}}{\text{Moyenne de l'estimateur}}$ est environ égal à 10 %, par conséquent la dispersion reste conséquente. Pour le moment, nous ne pouvons pas dire si cette dispersion va avoir un fort impact lors de l'utilisation du modèle de filtrage.

Paramètres en entrée	$\sigma_x^2 = 1 \cdot 10^{-8}$
Moyenne de l'estimateur	$9,99 \cdot 10^{-9}$
Écart-type de l'estimateur	$1,10 \cdot 10^{-9}$

Tableau 6 : Résultat de la calibration sur 1000 simulations.

V Simulations des protocoles

Dans cette partie, nous allons présenter les résultats de nos protocoles simulés. De ce fait, il s'agit pour nous de valider définitivement les filtrages de Kalman programmés dans le cas où nos modélisations seraient parfaitement adaptées aux mouvements étudiés et aux mesures.

V.1 Protocole avec système GNSS/INS

V.1.1 Réalisation de la simulation

Pour cette simulation, nous avons considéré un mobile qui se déplace à vitesse constante en partant de l'origine du repère 1D. Ce mouvement sans accélération nous permet d'utiliser notre méthode de calibration des paramètres du modèle. Nous avons aussi choisi de fixer le vecteur d'état à l'origine $\pi_X(0)$ et sa matrice de variance covariance $\gamma_{XX}(0)$ tels que : $\pi_X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\gamma_{XX}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Pour réaliser une simulation de l'observation de l'erreur de position par l'INS (cf. partie III.1.3), c'est-à-dire $Y_k = p_k^{GPS} - p_k^{INS}$, nous avons besoin de créer des mesures GNSS et des mesures accélérométriques.

Tout d'abord, les observations GNSS sont simulées par ajout d'un bruit blanc gaussien de variance $\tilde{\sigma}^2 = 3 \text{ m}^2$ sur les positions vraies préalablement générées.

Ensuite, on utilise les formules suivantes (dédites de l'équation (13)) pour générer les observations accélérométriques :

$$\begin{cases} u_k = \ddot{p}_k - b_k - \frac{\sigma_1}{\sqrt{\Delta}} \varepsilon_k^1 \\ \begin{pmatrix} b_k \\ \vdots \\ b_{k-ar+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_0 & \alpha_1 & \cdot & \cdot & \alpha_{ar-1} \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{k-1} \\ \vdots \\ b_{k-ar} \end{pmatrix} + \sigma_2 \cdot \sqrt{\Delta} \cdot \varepsilon_k^2 \end{cases}$$

avec :

- \ddot{p}_k , l'accélération vraie du mobile,
- ε_k^1 et ε_k^2 , deux variables aléatoires gaussiennes, indépendantes, centrées et réduites,
- $\Delta = 0.25 \text{ s}$,
- $\alpha_0, \dots, \alpha_{ar-1}$, les paramètres autorégressifs du biais. Nous n'avons pas testé les ordres supérieurs à quatre.

Puis vient l'estimation de la vitesse et de la position du mobile dans le cas où on ne connaît que les observations inertielles. Cette étape se fait à partir des mesures accélérométriques et s'appuie sur les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{p}_k^{INS} = (u_{k-1} + b_{k-1}) \cdot \Delta + \dot{p}_{k-1}^{INS} \\ p_k^{INS} = \dot{p}_{k-1}^{INS} \cdot \Delta + p_{k-1}^{INS} \end{cases}$$

Enfin, nous pouvons créer le vecteur d'observation de l'erreur de position Y_k selon la relation : $Y_k = p_k^{GPS} - p_k^{INS}$.

V.1.2 Résultats

Nous avons choisi d'utiliser la méthode de Monte-Carlo, afin d'avoir une estimation de l'espérance et de la variance sur les différentes déterminations de la position. Nous avons ici fixé à 100 le nombre de simulations. Les Figure 11 et Figure 12 illustrent les résultats obtenus dans le cas où le biais de l'accéléromètre ne suit pas de processus autorégressif ; ils sont identiques aux cas où le biais suit un processus AR(1) ou AR(4).

On observe sur la Figure 11 que l'estimateur de position issu des données de l'INS s'écarte rapidement de la valeur vraie. De plus, la Figure 12 montre que ce même estimateur a une variance exponentielle. On dit que cet estimateur dérive.

Ensuite, on observe sur la Figure 12 que les mesures GNSS possèdent une variance autour de 3 m^2 qui est la valeur que nous avons donnée en entrée pour ces observations. Dans le cas où nous augmentons le nombre de simulations, on observe que les mesures GNSS ont toutes une variance de 3 m^2 , ce qui montre que notre traitement arrive correctement à retrouver le bruit de nos mesures GNSS simulées.

Puis, on remarque sur la Figure 11 que la moyenne de l'estimateur de Kalman est pratiquement confondue avec la position réelle. Cela traduit le fait que l'estimateur du filtre de Kalman est sans biais. On voit aussi sur la Figure 12, que la variance empirique de cet estimateur est proche de la variance théorique. Dans le cas où on augmente le nombre de simulation ces deux courbes sont confondues. Le filtrage de Kalman donne donc des précisions théoriques que nous validons.

On constate sur la Figure 12 qu'à chaque instant de la simulation, l'estimateur de Kalman présente la variance la plus faible. En effet, sa valeur maximale est d'environ 0.5 m^2 , alors que la mesure GNSS a une variance de 3 m^2 et l'estimation issue des données de l'INS possède une variance infinie. Le filtrage nous a donc apporté une estimation de meilleure précision.

Enfin, ces résultats sont conformes à ce que nous attendions (cf. Figure 8), ce qui valide définitivement nos programmes de calibration et de filtrage. Nous sommes prêts pour utiliser ce traitement sur des données réelles.

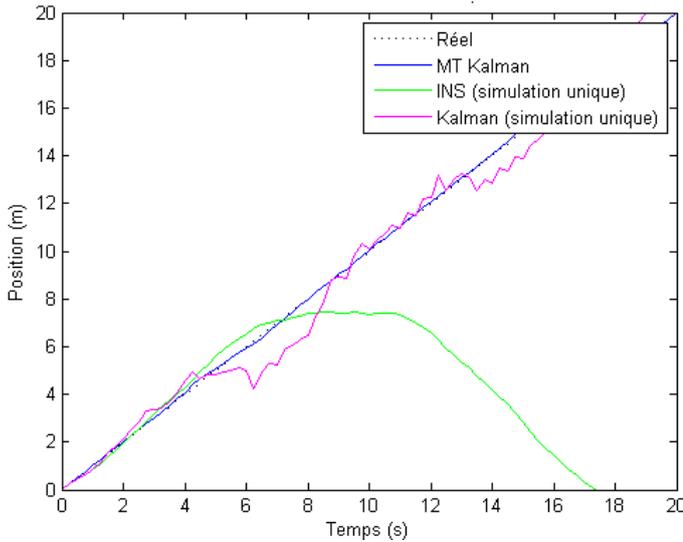


Figure 11 : Positions 1D en fonction du temps. La position réelle (courbe pointillée noire), l'estimateur de Kalman sur la position (en magenta), sa moyenne (en bleu), et l'estimateur de la position à partir des données de l'INS (en vert). La moyenne de l'estimateur de Kalman est obtenue en application de la méthode de Monte-Carlo sur notre protocole (réalisation de 100 simulations).

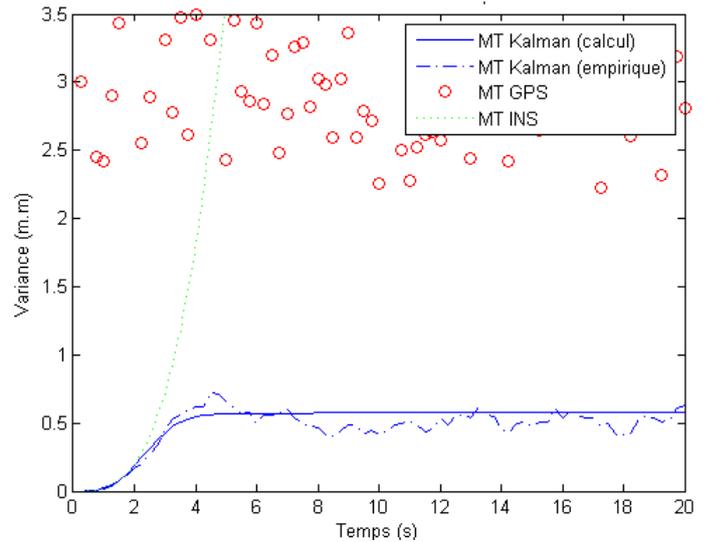


Figure 12 : Variance vraie des estimateurs de la position. On trouve les variances de chaque mesure GNSS (en cercles rouges), celles issues des données de l'INS (en vert), les variances empiriques des estimateurs de Kalman (en courbe bleue discontinue), et la courbe de variance théorique de l'estimateur de Kalman (en courbe bleue continue). Toutes les variances sont obtenues en application de la méthode de Monte-Carlo sur notre protocole (réalisation de 100 simulations).

V.2 Protocole d'auscultation

V.2.1 Réalisation de la simulation

Dans cette simulation, nous avons créé un mouvement qui respecte l'hypothèse du modèle d'évolution présenté en partie III.2.1. Dans ce dernier, on considère que la dérivée de l'accélération du mobile est nulle à un bruit blanc près. Nous avons donc le trio de variables suivant : $\ddot{x}_k = \sigma_x \cdot \sqrt{\Delta} \cdot \varepsilon_k^x$, $\ddot{y}_k = \sigma_y \cdot \sqrt{\Delta} \cdot \varepsilon_k^y$ et $\ddot{z}_k = \sigma_z \cdot \sqrt{\Delta} \cdot \varepsilon_k^z$ (avec $\varepsilon_k^x, \varepsilon_k^y, \varepsilon_k^z$ des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes entre elles, et Δ le pas d'échantillonnage de nos mesures). On fixe $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 10^{-8}$, et $\Delta = 1$, pour ensuite appliquer le protocole de simulation présenté en annexe 5 pour générer chacune des composantes de la position.

Puis, on obtient nos observations tachéométriques vraies par application des formules suivantes :

$$d_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}$$

$$Hz_k = 2 \cdot \tan^{-1} \left(\frac{x_k}{y_k + d_k} \right)$$

$$V_k = \sin^{-1} \left(\frac{z_k}{d_k} \right)$$

, où Hz_k, d_k, V_k sont respectivement la mesure d'angle horizontal, de distance et d'angle vertical obtenus lors de la $k^{\text{ième}}$ observation tachéométrique.

On bruit les mesures à l'aide de trois bruits blancs gaussiens d'écart-type $\sigma_d = 5 \text{ mm}$, $\sigma_{Hz} = 3 \text{ dmgon}$ et $\sigma_V = 3 \text{ dmgon}$, respectivement pour la mesure de distance, d'angle horizontale et d'angle vertical. Les caractéristiques de ces bruits restent réalistes, au vu des précisions des appareils actuels (par exemple le TCRP de Leica présent à l'ESGT possède ces caractéristiques à

l'exception de la précision sur la mesure de distance qui est égale à $\sigma_d^{TCRP} = 0.5mm$). Les jeux de données ainsi générés servent d'observations sur l'état à estimer.

Enfin, on réalise une calibration des paramètres du modèle d'évolution à l'aide de la méthode présentée en partie IV.3.

V.2.2 Résultats

Nous présentons ici uniquement les résultats pour la composante x de la position du mobile, car les deux autres se comportent de façon identique. Nous avons utilisé la méthode de Monte-Carlo avec 100 répétitions afin d'estimer la variance des différents estimateurs de la position. La Figure 13 et la Figure 14 présentent les résultats obtenus.

On observe grâce à la Figure 14, que le filtrage de Kalman a permis d'obtenir une estimation avec une variance de $4 \cdot 10^{-6} m^2$ (soit un écart-type empirique d'environ 2 mm) alors que celle générée avec les données tachéométriques possède une variance double (soit un écart-type de 3 mm).

La différence de précision entre l'estimateur de Kalman et la position tachéométrique bruitée, s'amenuise jusqu'à devenir inexistante, si le rapport $\left(\frac{\text{précision du modèle}}{\text{précision observation}}\right)$ diminue. Dans le cas où le bruit de mesure est négligeable, l'estimateur de Kalman est donc confondu avec les observations. Inversement, plus le bruit de mesure est important par rapport au bruit du modèle d'évolution, plus on constatera l'apport en précision du filtre de Kalman.

On observe sur la Figure 14, que la variance théorique de l'estimateur de Kalman est plus faible que la valeur empirique associée. Sachant que la courbe de variance théorique est fixée à partir des paramètres de bruits de mesures fixés a priori, et des paramètres du modèle d'évolution issus de la calibration, on peut alors affirmer que la calibration a surestimé la précision du modèle d'évolution. Par conséquent, la précision de l'estimateur de Kalman est surévaluée.

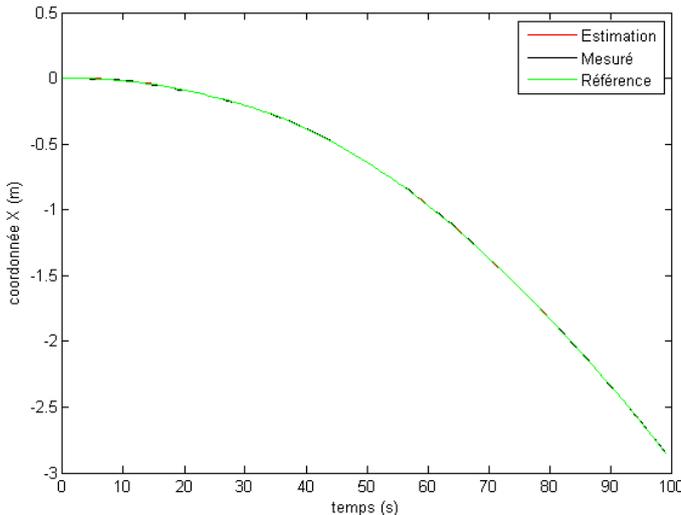


Figure 13 : Coordonnée X du mobile en fonction du temps ($\Delta = 1s$). On observe la trajectoire de référence (courbe verte), l'estimation issue des observations tachéométriques bruitées (courbe noire), et l'estimateur de Kalman (courbe rouge).

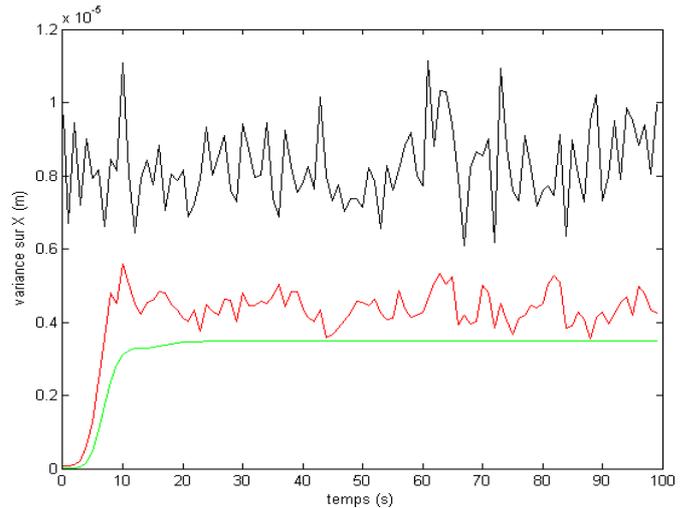


Figure 14 : Variance des estimateurs de X en fonction du temps ($\Delta = 1s$), avec en rouge l'estimateur de Kalman, en vert la variance théorique de celui-ci et en noir l'estimation à partir des données tachéométriques bruitées. Toutes les variances sont obtenues en application de la méthode de Monte-Carlo sur notre protocole (réalisation de 100 simulations).

Nous avons décidé d'appliquer un facteur multiplicateur, noté e , sur la matrice de covariance du modèle, afin de constater l'ordre de grandeur du rapport entre la variance théorique et empirique. Ce choix produit le résultat présenté dans la Figure 15.

On observe que nous avons maintenant une variance théorique qui correspond à la variance empirique. Ce test a été effectué pour différents paramètres σ_x , σ_d , σ_{Hz} et σ_V , et il est ressorti que ce facteur multiplicateur était variable, et qu'il ne semblait pas suivre de loi particulière.

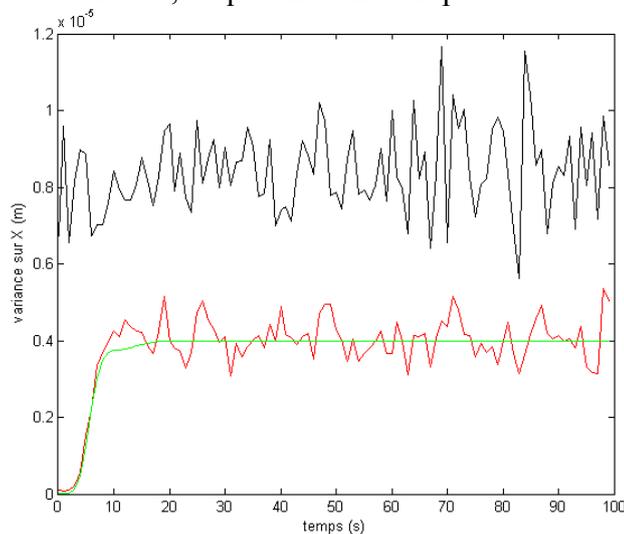


Figure 15 : Variance sur la position en fonction du temps ($e=3$ et $\Delta=1s$), avec en rouge l'estimateur de Kalman, en vert la variance théorique de celui-ci et en noir l'estimation à partir des données tachéométriques bruitées. Toutes les variances sont obtenues en application de la méthode de Monte-Carlo sur notre protocole (réalisation de 100 simulations).

V.2.3 Conclusion

La simulation nous prouve bien que dans le cas où notre modélisation est parfaite, le filtrage de Kalman apporte une estimation au moins aussi précise que le tachéomètre. Son apport est proportionnel au rapport entre la précision du modèle et celle des observations.

Il est malheureux que nous ne puissions pas obtenir la précision de nos estimations au travers de la matrice de covariance théorique du filtre de Kalman. C'est en effet une information primordiale en auscultation. Il est néanmoins possible que notre simulation soit imparfaite, et nous allons pouvoir le constater lors des tests sur notre protocole expérimental.

VI Résultat des protocoles expérimentaux

Dans cette partie, nous allons présenter les résultats de nos protocoles expérimentaux, décrits en partie II, et discuter de l'apport de nos filtres de Kalman pour le positionnement dynamique.

VI.1 Protocole avec système de navigation GNSS/INS

Lors de ce protocole, nous avons fixé notre fréquence d'acquisition pour l'accéléromètre et l'interféromètre à 50 Hz. Nous avons aussi fixé la précision des mesures GNSS tel que $\tilde{\sigma}^2 = 3 \text{ m}^2$.

VI.1.1 Utilisation des paramètres calibrés

Les Figure 16, Figure 17, et le Tableau 7 synthétisent les résultats obtenus dans le cas où le biais ne suit pas un processus autorégressif.

Nous observons sur la Figure 16, que la courbe de la moyenne des estimateurs de Kalman (courbe bleue) est écartée de la courbe associée à la position réelle du mobile (courbe en pointillés noirs). Nos estimateurs de Kalman sont donc biaisés. De plus, la Figure 17 nous montre que la variance empirique des estimateurs est globalement supérieure à 3 m^2 (la précision a priori des observations GNSS utilisées). Notre estimateur de Kalman sur la position du mobile est donc de mauvaise qualité (biaisé et moins précis que l'observation GNSS).

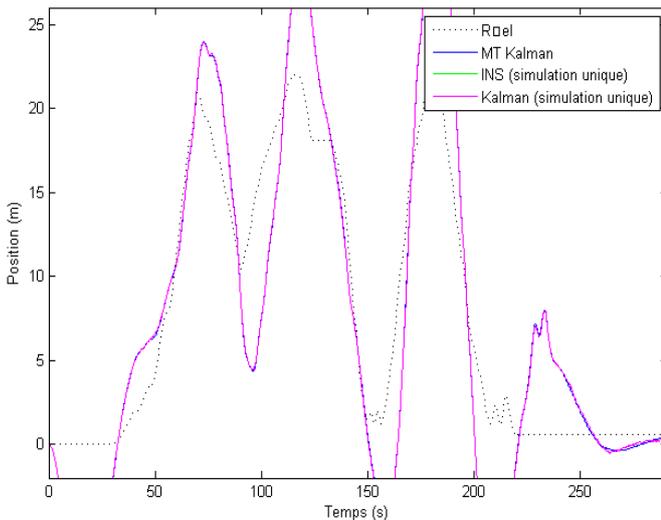


Figure 16 : Positions 1D en fonction du temps. La position réelle (courbe en pointillés noirs), l'estimateur de Kalman sur la position (en magenta), sa moyenne (en bleu), et l'estimateur de la position à partir des données de l'INS (en vert). La moyenne de l'estimateur de Kalman est obtenue en application de la méthode de Monte-Carlo sur notre protocole (simulation de 100 bruits GNSS différents).

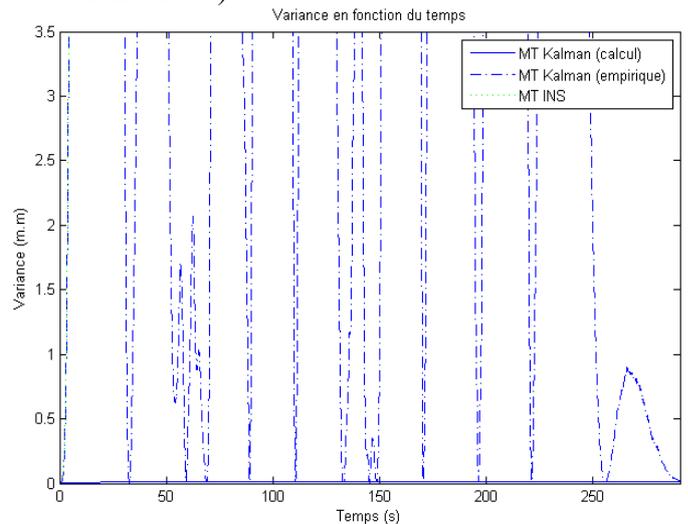


Figure 17 : Variance vraie des estimateurs de la position. On trouve les variances issues des données de l'INS (en vert), les variances empiriques des estimateurs de Kalman (courbe bleue discontinue), et la courbe de variance théorique de l'estimateur de Kalman (courbe bleue continue). La variance empirique de l'estimateur de Kalman est obtenue en application de la méthode de Monte-Carlo sur notre protocole (simulation de 100 bruits GNSS différents).

paramètre	Valeur estimée par calibration
$\sigma_1(\text{m/s}^2)$	$1.12 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_2(\text{m/s}^2)$	$3.21 \cdot 10^{-4}$

Tableau 7 : Calibration des paramètres de modèle.

L'utilisation du modèle avec un biais suivant un processus AR(1), nous a donné les mêmes résultats. Par conséquent, soit notre modélisation ne correspond pas à une situation réelle, soit un

problème de calibration est à déplorer. C'est en faisant cette dernière hypothèse que nous avons décidé de tester si une calibration manuelle offrait une estimation de meilleure qualité.

VI.1.2 Optimisation des paramètres calibrés

Comme constaté précédemment, notre calibration ne nous a pas renvoyé les paramètres adéquats en situation. Sachant cela nous avons décidé d'optimiser les paramètres du modèle d'évolution. Seul le cas où le biais ne suit pas un processus autorégressif est testé car il répond à lui seul à notre problématique.

Lors de ce test, nous avons utilisé différentes valeurs pour les paramètres σ_1 et σ_2 . Notre but a été de rapprocher la variance empirique de l'estimateur de Kalman, de sa valeur théorique. Avec les valeurs notées dans le Tableau 8, nous obtenons les résultats présentés dans la Figure 18 et la Figure 19.

Les courbes représentées dans la Figure 19, sont à présent cohérentes avec celles obtenues par simulation (cf. Figure 12). De plus, la Figure 18 montre que l'estimateur de Kalman est beaucoup plus proche de la position vraie que lors de l'utilisation de la calibration (cf. Figure 16). On constate donc que l'estimation « manuelle » des paramètres de bruit de modèle, permettait d'obtenir un résultat cohérent vis-à-vis de nos simulations.

Cependant, on constate encore des écarts entre la variance empirique et théorique de notre estimateur de Kalman. Ces écarts sont liés aux fortes variations d'accélération subies par le système. La cause de ces pics n'est pas clairement identifiable (légère désynchronisation des mesures, légère imprécision dans la mise en référence des observations de l'INS,...). Cependant, ces pics disparaissent si nous augmentons encore les paramètres de σ_1 et σ_2 , dans ce cas la variance théorique est rehaussée et nous pouvons garantir la précision des résultats à chaque instant. Nous entrons dans ce cas pour $\sigma_1 = 8 \cdot 10^{-1}$ et $\sigma_2 = 8 \cdot 10^{-2}$, la précision empirique de notre estimateur de Kalman sur la position est alors écrêtée à une variance de 0.175 m².

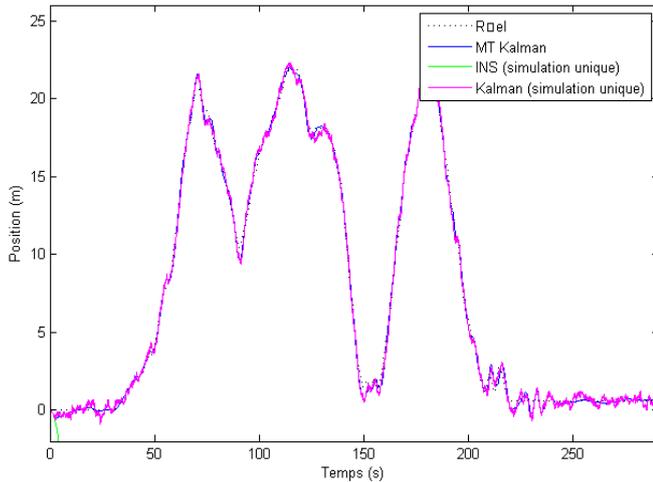


Figure 18 : Positions 1D en fonction du temps. La position réelle (courbe pointillés noirs), l'estimateur de Kalman sur la position (en magenta), sa moyenne (en bleu), et l'estimateur de la position à partir des données de l'INS (en vert). La moyenne de l'estimateur de Kalman est obtenue en application de la méthode de Monte-Carlo sur notre protocole (simulation de 100 bruits GNSS différents).

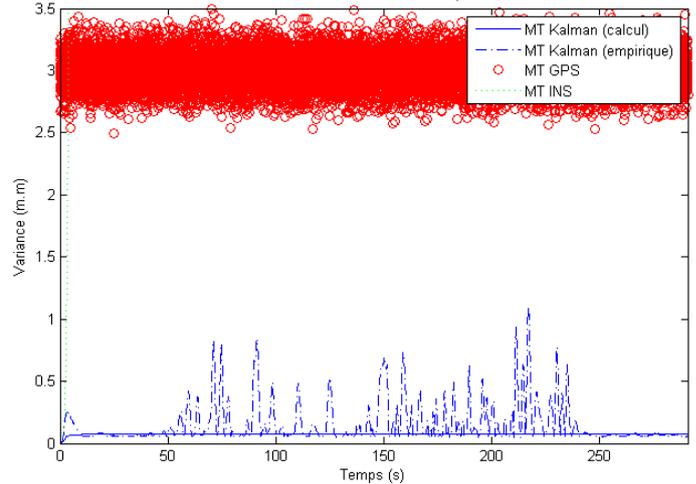


Figure 19 : Variance vraie des estimateurs de la position. On trouve les variances des observations GNSS (cercles rouges), celles issues des données de l'INS (en vert), les variances empiriques des estimateurs de Kalman (courbe bleue discontinue), et la courbe de variance théorique de l'estimateur de Kalman (courbe bleue continue). La variance empirique de l'estimateur de Kalman et celle des mesures GNSS sont obtenues en application de la méthode de Monte-Carlo sur notre protocole (simulation de 100 bruits GNSS différents).

Paramètres	Valeur fixées
σ_1 (m/s ²)	$1 \cdot 10^{-1}$
σ_2 (m/s ²)	$3 \cdot 10^{-2}$

Tableau 8 : Calibration des paramètres de modèle

VI.1.3 Conclusion

Notre protocole de positionnement dynamique par hybridation INS/GNSS, est donc adapté à l'observation d'un mobile en mouvement. Il nous permet d'obtenir à partir de mesures GNSS d'écart-type d'environ 2 m, et de positions issues de mesures inertielles qui dérivent fortement, une estimation de position avec un écart-type garanti de 40 cm.

Cependant, notre modèle de calibration demande à être révisé. Dans ce sens, nous formulons l'hypothèse selon laquelle le modèle de calibration ne tient pas compte de l'équilibre qui doit exister entre la précision du modèle et la précision de nos observations GNSS. En effet, notre calibration nous a renvoyé des paramètres σ_1 et σ_2 tellement faibles que la combinaison optimale donne un estimateur de Kalman qui ne considère que les mesures de l'INS. Or la dérive de l'estimation de la position à l'aide de ce type d'observation est prouvée. Si nous ne rétablissons pas l'équilibre entre les précisions de nos mesures GNSS et celles de nos accéléromètres, la dérive se retrouve donc dans les résultats filtrés.

VI.2 Protocole d'auscultation

Lors de ce protocole nous avons observé par tachéométrie le déplacement du chariot interférométrique, en utilisant une fréquence de 1 Hz ($\Delta = 1s$). L'amplitude du déplacement est de quelques dizaines de centimètres en planimétrie, et de quelques millimètres en altimétrie. De cette façon nous avons des amplitudes de déplacement avec des ordres de grandeurs différents, et nous pourrions tester le comportement de notre filtre pour chacun. De plus, nous avons décidé d'effectuer trois tests qui répondront à des problématiques différentes.

VI.2.1 Présentation des trois tests

Notre premier test consiste à fixer les écarts-types des bruits de mesure tel que : $\sigma_d = 0,5 \text{ mm}$, $\sigma_{Hz} = 3 \text{ dmgon}$ et $\sigma_V = 3 \text{ dmgon}$. Ces valeurs de précision sont celles qui caractérisent le tachéomètre Leica TCRP présent à l'ESGT. Le but de ce test est donc de voir l'apport du modèle de filtrage utilisé pour un travail d'auscultation avec un matériel de bonne qualité.

Le second test consiste à dégrader les paramètres de précision de mesure utilisés lors du premier test en fixant : $\sigma_d = 2 \text{ mm}$, $\sigma_{Hz} = 6 \text{ dmgon}$ et $\sigma_V = 6 \text{ dmgon}$. On cherche ici à voir si l'apport du filtre de Kalman devient plus important à mesure que le tachéomètre devient imprécis.

Enfin, dans un contexte réel d'auscultation, nous avons des appareils de bonne précision. Cependant il est probable que tout au long de l'observation la précision des mesures se dégrade. Ce problème peut survenir si les variations des paramètres atmosphériques (température, pression, humidité) ne sont pas prises en compte. Dans ce cas le géomètre se doit d'utiliser les valeurs de précision les moins bonnes sur toute son étude. Le troisième test consiste donc à utiliser comme paramètres de précision de mesure ceux fixés lors du premier test, puis à dégrader localement ces précisions en utilisant les valeurs fixées lors du deuxième test. Ainsi nous simulons une perte locale de précision, et nous pourrions constater si le modèle de filtrage compense ce phénomène.

VI.2.2 Résultats des trois tests

VI.2.2.1 Premier test (paramètre du TCRP)

La Figure 20, la Figure 21, et le Tableau 9 montrent les résultats obtenus lors du premier test.

Tout d'abord, nous observons sur la Figure 21 que les variances empiriques de nos estimateurs de Kalman (courbes rouges) sont globalement égales ou inférieures à celles associées à la mesure tachéométrique bruitée (courbes noires). Ce résultat est cohérent avec notre simulation, on peut donc affirmer que la calibration nous a fourni des valeurs crédibles pour les paramètres d'évolution.

Concernant les valeurs des paramètres notées dans le Tableau 9, on constate que celle de σ_z est de loin la plus faible. Notre calibration a donc trouvé que le modèle d'évolution était plus adapté au mouvement observé sur la composante verticale. Cette analyse est confirmée par la Figure 21, où on constate que la variance de l'estimateur empirique de Kalman se détache totalement de celle de l'estimation à partir des données tachéométriques. De plus, on constate qu'à l'inverse des deux autres composantes, nous avons gagné en précision. En effet, l'estimateur de Kalman possède globalement un écart-type de $1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, alors que la mesure bruitée nous donne une précision avec un écart-type de $1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$.

Nous constatons sur la Figure 21 qu'à $t = 30\text{s}$, la variance empirique de l'estimateur de Kalman possède un pic pour la composante Z. Ce pic coïncide avec un changement brusque de l'accélération du mobile selon la composante verticale.

Enfin, on remarque que sur les composantes X et Y, la variance de notre estimateur est très proche de celle de nos estimations avec les données tachéométriques bruitées. On en déduit que le modèle mis en place n'est pas assez précis par rapport à nos mesures.

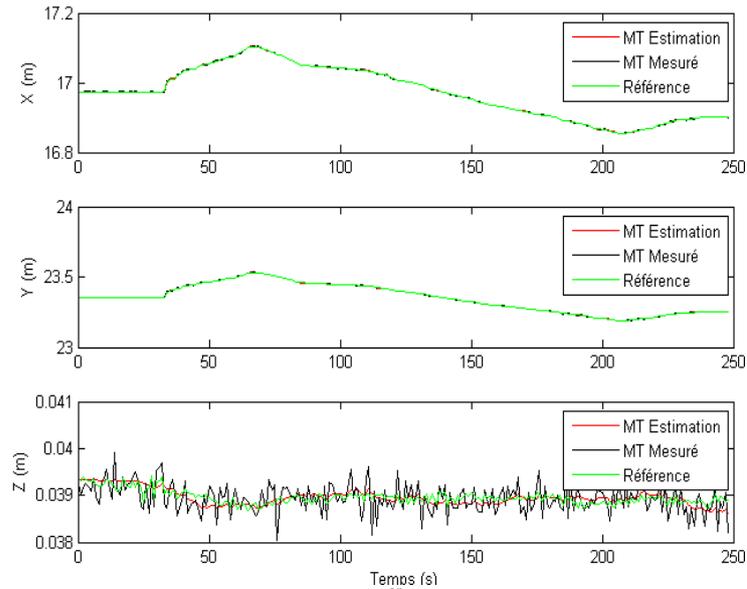


Figure 20 : Position 3D en fonction du temps ($\Delta=1s$) lors du 1^{er} test. Sont présentés les positions réelles du chariot (courbes vertes), les estimateurs de Kalman (en courbe rouge), et les mesures tachéométriques bruitées (courbes noires).

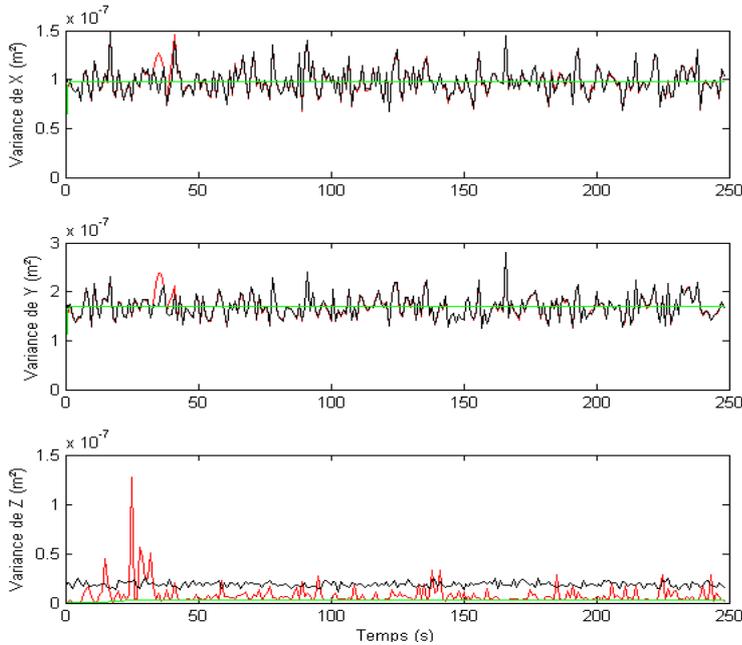


Figure 21 : Variance des estimateurs de la position en 3D en fonction du temps ($\Delta=1s$) lors du 1^{er} test. On retrouve la variance empirique de l'estimateur de Kalman (courbes rouges), sa variance théorique (courbes vertes) et la variance de la mesure tachéométrique bruitée (courbes noires). On obtient ces courbes en application de la méthode de Monte-Carlo en répétant 100 fois le traitement des données tachéométriques dont le terme de bruit est stochastique.

Paramètres	Valeurs moyennes
$\sigma_x(m)$	$7.95 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_y(m)$	$1.06 \cdot 10^{-2}$
$\sigma_z(m)$	$1.26 \cdot 10^{-7}$

Tableau 9 : Valeurs des paramètres du modèle d'évolution obtenus par calibration lors du 1^{er} test.

VI.2.2.2 Deuxième test (précision dégradée)

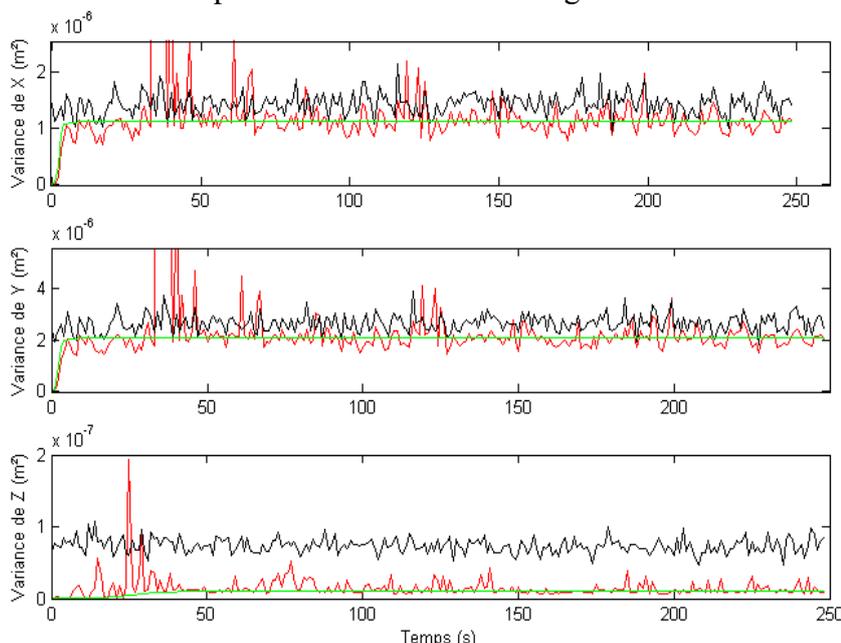
La Figure 22 et le Tableau 10 montrent les informations importantes du second test.

Tout d'abord, on constate que les paramètres du modèle, présentés dans le Tableau 10, ont légèrement diminué par rapport au premier test. Notre modèle d'évolution pèse donc plus fort dans la détermination de l'estimateur.

À l'aide la Figure 22, on observe que les variances des estimateurs de Kalman (courbes rouges), en faisant abstraction des pics, sont en dessous de celles associées à la mesure tachéométrique bruitée (courbes noires). La position obtenue par filtrage de Kalman est donc donnée avec une précision supérieure aux mesures.

On observe aussi sur la Figure 22, que les courbes de variance empirique (courbes rouges) et de variance théorique (courbes vertes) de l'estimateur de Kalman sont proches, et elles se confondent si on augmente le nombre de simulation, ce qui montre que la calibration du modèle d'évolution a été efficace.

Enfin, on peut observer des pics dans les fonctions variances empiriques des estimateurs de Kalman. Ces pics sont associés aux changements brutaux d'accélération du mobile.



Paramètres	Valeurs moyennes
$\sigma_x(m)$	$8.11 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_y(m)$	$1.15 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_z(m)$	$8.51 \cdot 10^{-8}$

Tableau 10 : Valeurs des paramètres du modèle d'évolution obtenus par calibration lors du 2nd test.

Figure 22 : Variance des estimateurs de la position en 3D en fonction du temps ($\Delta=1s$) lors du 2nd test. On retrouve la variance empirique de l'estimateur de Kalman (courbes rouges), sa variance théorique (courbes vertes) et la variance de la mesure tachéométrique bruitée (courbes noires). On obtient ces courbes en application de la méthode de Monte-Carlo en répétant 100 fois le traitement des données tachéométriques dont le terme de bruit est stochastique.

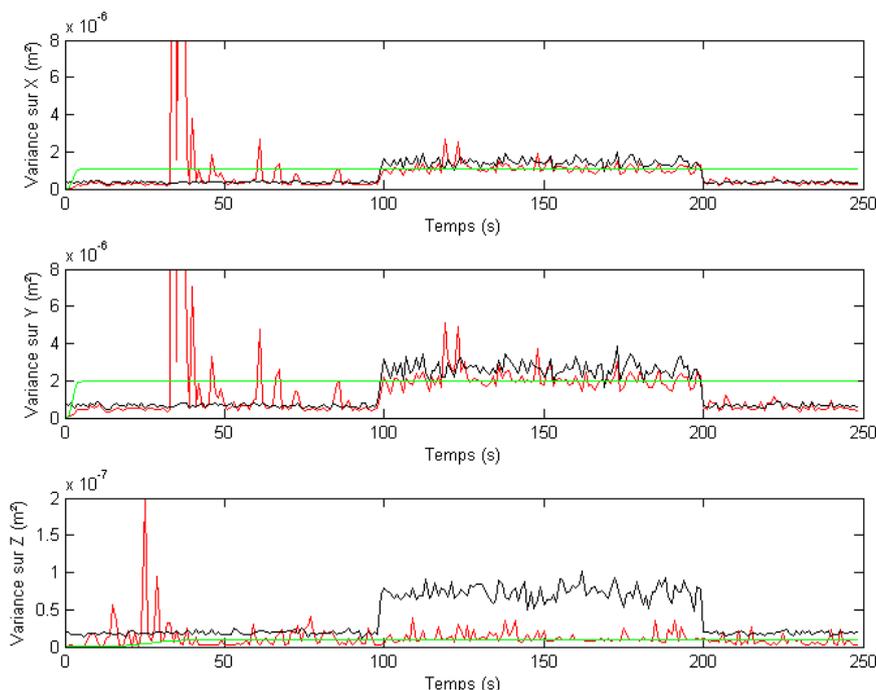
VI.2.2.3 Troisième test (précision dégradée localement)

La Figure 23 et le Tableau 11 synthétisent les résultats obtenus lors du troisième test.

On peut constater à partir du Tableau 11 que les paramètres calibrés ont des valeurs proches de celles trouvées lors du second test. Notre modèle d'évolution est considéré avec plus de poids que lors du premier test, et cela pour les trois composantes de la position.

Concernant la Figure 23, on peut constater en faisant abstraction des pics dus aux variations brutales d'accélération, que l'estimateur de Kalman est donné avec une variance écrêtée. En effet, on voit sur les intervalles [0s,100s] et [200s,250s] que si la variance des mesures (courbes noires) est plus faible que la variance théorique de l'estimateur de Kalman (courbes vertes), la variance empirique de cet estimateur (courbes rouges) est proche de celle de la mesure.

À l'inverse, si nos mesures perdent en précision, notre estimation va conserver une variance qui ne dépasse pas la valeur théorique fixée, comme c'est le cas sur l'intervalle [100s, 200s].



Paramètres	Valeurs moyennes
σ_x (m)	$6.35 \cdot 10^{-4}$
σ_y (m)	$9.07 \cdot 10^{-4}$
σ_z (m)	$9.88 \cdot 10^{-8}$

Tableau 11 : Valeurs des paramètres du modèle d'évolution obtenus par calibration lors du 3^e test.

Figure 23 : Variance des estimateurs de la position en 3D en fonction du temps ($\Delta = 1s$) lors du 3^e test. On retrouve la variance empirique de l'estimateur de Kalman (courbes rouges), sa variance théorique (courbes vertes) et la variance de la mesure tachéométrique bruitée (courbes noires). On obtient ces courbes en application de la méthode de Monte-Carlo en répétant 100 fois le traitement des données tachéométriques dont le terme de bruit est stochastique.

VI.2.3 Analyse globale des trois tests

Nous avons constaté que le modèle d'évolution est beaucoup plus adapté aux mouvements de faibles amplitudes comme celui observé sur la composante Z. Cependant, il considère très mal les variations brusques d'accélération.

On remarque aussi que la calibration détermine en amont la précision de l'estimateur de Kalman, et ainsi nous permet de prévoir si le modèle apporte une meilleure précision par rapport aux observations. Ainsi, plus nos mesures tachéométriques sont imprécises, plus l'utilisation du filtrage est légitimée si on cherche à améliorer la précision de l'estimation de la position.

Enfin, nous avons pu constater que l'utilisation du filtre permettait de conserver les qualités de la mesure et de compenser les pertes de précision sur celle-ci en écrétant la variance de l'estimation.

VI.2.4 Conclusion

Nous avons vu que notre calibration avait renvoyé les bons paramètres de modèle, et que notre filtrage renvoie un estimateur au moins aussi précis que la mesure tachéométrique, voire plus lorsque le mouvement du mobile ne traduit pas de variations brutales d'accélération.

VII Perspectives

Dans cette partie, nous avons cherché à présenter les perspectives dans l'analyse de l'apport du filtrage de Kalman pour les systèmes de positionnement embarqués GNSS/INS et l'auscultation.

VII.1 Calibration du protocole avec système GNSS/INS

Le manque de temps ne nous a pas permis de reprendre notre modèle de calibration présenté en partie IV.2.1. Cependant, il sera nécessaire de le faire pour aboutir à un traitement autonome de nos données et donc sans intervention humaine sur le choix des paramètres de précision du modèle.

Notre hypothèse est que la calibration doit considérer les observations GNSS en plus de celles de l'INS. L'une des pistes pour améliorer l'estimation de nos paramètres de modèle, serait de reprendre le problème de filtrage de la partie III.1.2 et III.1.3 (respectivement modèle d'évolution et d'observation), et lui appliquer la méthode du maximum de vraisemblance. De cette manière nous calibrons la totalité du modèle de filtrage destiné à l'estimation de la position, et non la seule INS.

VII.2 Filtrage avec d'autres modèles d'évolution

Lors de l'expérience d'auscultation, nous avons vu que le modèle d'évolution mis en place était mal adapté aux changements brutaux d'accélération. Il serait intéressant d'utiliser d'autres modèles d'évolution et constater l'apport de chacun sur un même mouvement.

Dans cette voie, nous avons vu que le modèle d'évolution utilisé pour le système de navigation embarqué, évolue avec l'observation accélérométrique. C'est donc un modèle d'évolution qui s'adapte aux évolutions des paramètres cinématiques. Il serait intéressant d'utiliser ce principe sur l'expérience d'auscultation, en utilisant par exemple un système hybride (exemple : GNSS/tachéométrie).

Ensuite nous pourrions, sur le modèle d'évolution et sur les mesures, considérer les bruits comme corrélés. En effet, le filtre de Kalman considère uniquement des bruits blancs gaussiens, or, les mesures présentent fréquemment des corrélations dans leurs erreurs systématiques. On peut citer l'exemple du tachéomètre qui possède une erreur cyclique dans sa mesure de distance, ou encore la mesure GNSS dont une partie de l'erreur dépend de la position des satellites et des couches atmosphériques. Une modélisation qui considère la corrélation qui existe dans les mesures utilise un filtre de Kalman modifié dit « à longue mémoire ».

Enfin, nous avons placé en annexe 6 une méthode pour générer des bruits en présentant leurs impacts sur le traitement par filtrage de Kalman, et en annexe 7 un programme de génération de bruits corrélés.

Conclusion

Rappelons tout d'abord que le but de ce TFE est de déterminer les bénéfices du filtrage de Kalman pour les systèmes de navigation embarqués hybrides GNSS/INS, et pour les travaux d'auscultation réalisés par tachéométrie. Nous avons pour cela créé deux protocoles expérimentaux. Le premier cherche à estimer la trajectoire 1D du chariot interférométrique de l'ESGT, à partir d'observations GNSS simulées et de mesures renvoyées par une centrale inertielle fixée au mobile. Cette expérience a été réalisée pour simuler un travail de positionnement avec un système GNSS/INS. Notre second protocole est fondé sur l'observation du chariot interférométrique par tachéométrie afin d'en déterminer sa trajectoire 3D. Cette deuxième expérience nous a permis de simuler un travail d'auscultation.

Nous avons compris que le filtrage de Kalman est une méthode d'estimation de paramètres qui évoluent au cours du temps. Ce traitement mathématique se base sur la combinaison optimale d'observations et d'un modèle d'évolution appliqué aux paramètres étudiés. Dans ces conditions et avant de pouvoir tester nos protocoles, il nous a fallu mettre en place les problèmes de filtrage associés à nos deux expériences. Lors de cette étape nous avons dû fixer les précisions de nos observations et calibrer les paramètres de nos modèles d'évolution. Concernant cette étape de calibration, nous avons apporté une solution inédite et très prometteuse en utilisant une estimation par maximum de vraisemblance sur les paramètres non observables du modèle d'évolution.

Puis, nous avons programmé différents algorithmes qui nous ont permis d'effectuer la synchronisation, la mise en référence de nos observations, et le traitement par filtrage de Kalman.

Pour chacun des programmes réalisés (calibrations, synchronisation, mise en référence, filtrages de Kalman), nous avons suivi la méthodologie suivante : tout d'abord nous utilisons les algorithmes sur des données simulées, puis étudions les résultats renvoyés afin de valider le programme, et enfin nous l'utilisons sur des données réelles. Grâce à cette méthodologie, nous avons pu analyser nos résultats expérimentaux en connaissance de l'efficacité réelle de nos programmes.

Après analyse des résultats obtenus lors de l'expérience avec le système de positionnement GNSS/INS, nous avons prouvé que l'INS possède une bonne précision de mesure accélérométrique mais son estimation de la position dérive rapidement, que le capteur GNSS possède une précision stable sur la mesure de position mais sa valeur reste élevée dans le cas de capteurs miniatures, et enfin, que le filtrage de Kalman donne les positions avec une précision stable et de bien meilleure qualité que le capteur GNSS. L'usage du filtrage de Kalman dans un contexte de positionnement à l'aide d'un système hybride GNSS/INS, apporte une réelle plus-value en matière de précision par rapport aux simples observations renvoyées par les capteurs.

La contrainte de temps nous a obligé à ne pas reprendre la méthode de calibration des paramètres de notre modèle d'évolution associé au protocole avec système de positionnement GNSS/INS. Cependant, nous avons proposé une piste prometteuse.

Les résultats obtenus lors de notre protocole d'auscultation, ont permis de compléter l'article de BOGATIN (BOGATIN, et al., 2008) en quantifiant l'apport du filtrage de Kalman pour le positionnement lors de travaux d'auscultation, et en calibrant les paramètres du modèle d'évolution utilisé. On sait maintenant que l'utilisation du filtrage de Kalman avec le bon modèle d'évolution ne peut qu'améliorer la précision de nos mesures tachéométriques. De plus, son

utilisation devient très intéressante dans un contexte où les précisions de mesure se dégradent, car il permet de compenser ce phénomène.

Ce travail de fin d'études offre de nombreuses perspectives pour l'avenir. En effet, nous avons effectué un premier pas dans de nombreuses voies de recherche. Premièrement, nous avons testé une méthode de positionnement 1D avec un système hybride GNSS/INS miniature ; on peut envisager à long terme de développer un traitement pour le positionnement 3D. Deuxièmement, nous avons observé que notre modèle d'évolution pour l'auscultation n'était pas adapté aux variations brutales d'accélération. Dans ce sens il serait intéressant de tester d'autres modèles d'évolution pour trouver un filtrage adapté au mouvement observé (hybridation INS/tachéomètre, modèle de mouvement fixé par des observations antérieures,...). Troisièmement, en utilisant le filtrage de Kalman comme estimateur de nos positions, nous avons fait l'hypothèse que les bruits de modèles et de mesures étaient blancs gaussiens, cependant cette hypothèse est réductrice car l'erreur cyclique du tachéomètre sur la mesure de distance ou les erreurs de la mesure GNSS liées aux couches atmosphériques et aux positions des satellites, sont corrélées. Pour prendre en compte la corrélation des bruits, A. BROUSTE propose un nouveau modèle de filtrage qui nécessite moins de puissance de calcul que les filtres homologues (BROUSTE, et al., 2012). En utilisant sa méthode nous pourrions considérer les bruits corrélés qui existent sur nos capteurs et ainsi utiliser des modèles d'observations plus fidèles que ceux développés dans cette étude. Le test de ce nouveau filtre est d'un intérêt majeur pour l'équipe L2G, car si nous le validons, il pourra être utilisé pour le projet de modélisation du champ de pesanteur à l'aide d'instrumentation hybride GNSS/INS (LiMoG).

Finalement, ce projet a été l'occasion d'effectuer un travail de recherche complexe mais prometteur du point de vue des travaux menés par l'équipe L2G, et en parallèle, a aussi permis d'étudier l'intérêt du filtrage de Kalman pour des problématiques plus directement liées au métier de géomètre comme l'auscultation ou la cartographie mobile.

Bibliographie

- BJÖRK, tomas. 2010.** Continuous Time Finance Lecture 1 Stochastic Integrals. *studentweb*. [En ligne] 2010. [Citation : 11 02 2014.] <https://studentweb.hhs.se/CourseWeb/CourseWeb/Public/PhD401/1002/F1.pdf>.
- BOGATIN, Sonja, et al. 2008.** Evaluation of linear Kalman filter processing geodetic kinematic measurements. 2008, Vol. 41, 561–578, p. 18.
- BROUSTE, Alexandre et KLEPTSYNA, Marina. 2012.** Kalman filter under stationary noise. 2012, Vol. 61, 1229-1234, p. 6.
- BROUSTE, Alexandre. à paraître.** *GPS aided MEMS inertial navigation system with colored noises*. Le Mans : s.n., à paraître.
- JEKELI, Christopher. 2001.** *Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications*. Berlin ; New York : de Gruyter, 2001. ISBN 3-11-015903-1.
- PHAN, Thérèse et ROWENCZYK, Jean-Pierre. 2012.** *Exercices et problèmes de statistique et probabilités (2e ed.)*. Paris : Dunod, 2012. ISBN 978-2-10-056298-5.
- PIETTE, Ferdinand. 2011.** Dossier : Le filtre de Kalman. *ferdinandpiette*. [En ligne] 2011. [Citation : 10 03 2014.] <http://www.ferdinandpiette.com/blog/les-dossiers/dossier-le-filtre-de-kalman/>.
- SBG systems. 2013.** IG-500. [En ligne] 2013. [Citation : 05 03 2014.] <http://www.sbg-systems.com/docs/IG-500N-Leaflet.pdf>.

Table des annexes

Annexe 1 Théorie sur l'estimateur de Kalman	49
Annexe 2 Méthode de synchronisation et tests de validation.....	55
Annexe 3 Méthodes de mise en référence des données de l'INS et tests de validation	58
Annexe 4 Programme Matlab© de synchronisation de deux signaux.....	68
Annexe 5 Simulation des données de position de l'article de S. BOGATIN (par J. VERDUN et A. BROUSTE).....	70
Annexe 6 Génération de bruits corrélés et leurs impacts sur le filtrage de Kalman	72
Annexe 7 Programme Matlab© de génération de bruits corrélés	75
Annexe 8 Poster de TFE.....	77

Annexe 1

Théorie sur l'estimateur de Kalman

1. Rappel sur les variables gaussiennes

a. La variable gaussienne centrée-réduite

Une variable aléatoire X suit une loi normale centrée-réduite si f_X sa fonction densité est telle que :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

En découle : $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 1$

On note : $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Remarque :

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(x) \cdot dx$$

b. La variable gaussienne

On a X une variable aléatoire normale d'espérance μ et de variance σ^2 si :

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Dans ce cas, la fonction f_X s'exprime par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

En découle : $\mathbb{E}(X) = \mu$ et $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$

On note : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

c. Le vecteur gaussien

On a X un vecteur aléatoire tel que $X = (X_1 \dots X_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Ce vecteur est dit gaussien si toute combinaison linéaire de ses coordonnées est gaussienne, ce qui revient à noter :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot X_j \sim \mathcal{N} \quad , \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

Remarque :

On notera que si $X = (X_1 \ X_2)^T$ avec $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ et $X_1 \perp X_2$, alors :

$$\alpha_1 \cdot X_1 + \alpha_2 \cdot X_2 \sim \mathcal{N}(\alpha_1 \cdot \mu_1 + \alpha_2 \cdot \mu_2, \quad \alpha_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \cdot \sigma_2^2)$$

d. Densité, et paramètre de la loi suivie

On prend $X = (X_1 \dots X_n)^T$ avec $X_i \perp X_j$ si $i \neq j$, et $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$.

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det V_X}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \cdot V_X^{-1} \cdot (x-\mu)}
\end{aligned}$$

Avec $\mu = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1 \dots X_n)^T$ et V_X la matrice de variance covariance de X .

e. Loi conditionnelle

Propriété 1 :

On prend $Z = (X \ Y)^T$ un vecteur gaussien de \mathbb{R}^{m+n} d'espérance μ et de variance V :

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} V_X & V_{XY} \\ V_{XY}^T & V_Y \end{pmatrix}$$

En supposant V_Y inversible, alors la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est gaussienne de densité :

$$f_{(X|Y=y)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}\sqrt{\det W}} e^{-\frac{1}{2}(x-M)^T \cdot W^{-1} \cdot (x-M)}$$

Avec $M = \mu_X + V_{XY} \cdot V_Y^{-1} \cdot (y - \mu_Y)$ et $W = V_X - V_{XY} \cdot V_Y^{-1} \cdot V_{XY}^T$

Il en découle :

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \mu_X + V_{XY} \cdot V_Y^{-1} \cdot (y - \mu_Y)$$

$$\mathbb{V}(X|Y = y) = V_X - V_{XY} \cdot V_Y^{-1} \cdot V_{XY}^T$$

Preuve :

On suppose V inversible, on peut noter :

$$f_Z(z) = \frac{1}{(2\pi)^{(n+m)/2}\sqrt{\det V}} e^{-\frac{1}{2}(z-\mu)^T \cdot V^{-1} \cdot (z-\mu)}$$

Par définition, la densité de probabilité de X sachant $Y = y$ peut s'exprimer ainsi :

$$f_{(X|Y=y)}(x) = \frac{f_Z(z)}{f_Y(y)}$$

En utilisant les deux dernières égalités on obtient :

$$f_{(X|Y=y)}(x) = \frac{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det V_Y}}{(2\pi)^{(n+m)/2}\sqrt{\det V}} e^{-\frac{1}{2}(z-\mu)^T \cdot V^{-1} \cdot (z-\mu) + \frac{1}{2}(y-\mu_Y)^T \cdot V_Y^{-1} \cdot (y-\mu_Y)}$$

On cherche à déterminer le déterminant de la matrice V . Commençons par noter :

$$W = V_X - V_{XY} \cdot V_Y^{-1} \cdot V_{XY}^T$$

On montre que $U \cdot V \cdot L = A$ avec $U = \begin{pmatrix} Id_m & -V_{XY} \cdot V_Y^{-1} \\ 0 & Id_n \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} Id_m & 0 \\ -V_Y^{-1} \cdot V_{XY}^T & Id_n \end{pmatrix}$ et

$$A = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & V_Y \end{pmatrix}$$

On en déduit l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \det(U.V.L) &= \det(A) \\ \Leftrightarrow \det(V) &= \det(W). \det(V_Y) \end{aligned}$$

On peut donc simplifier l'écriture précédente de $f_{(X|Y=y)}(x)$ par :

$$f_{(X|Y=y)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{\det W}} e^{-\frac{1}{2}(z-\mu)^T.V^{-1}.(z-\mu) + \frac{1}{2}(y-\mu_Y)^T.V_Y^{-1}.(y-\mu_Y)}$$

À partir de l'égalité $U.V.L = A$ (introduite précédemment), on trouve les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} V &= U^{-1}.A.L^{-1} \\ V^{-1} &= L.A^{-1}.U, \text{ où } A^{-1} = \begin{pmatrix} W^{-1} & 0 \\ 0 & V_Y^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(z-\mu)^T.V^{-1}.(z-\mu) = (x-M)^T.W^{-1}.(x-M) + (y-\mu_Y)^T.V_Y^{-1}.(y-\mu_Y)$$

Avec $M = \mu_X + V_{XY}.V_Y^{-1}.(y-\mu_Y)$

Finalement on écrit que $f_{(X|Y=y)}(x)$ équivaut à :

$$f_{(X|Y=y)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{\det W}} e^{-\frac{1}{2}(x-M)^T.W^{-1}.(x-M)}$$

2. Le filtrage de Kalman

Ce filtre pose le système (modèle/observation) suivant :

$$\begin{cases} X_k = \theta_k.X_{k-1} + F_k + \varepsilon_k & (1) \\ Y_k = H_k.X_k + h_k + \eta_k & (2) \end{cases}, \text{ pour } k \geq 1, X_0$$

Avec

- $X_k \in \mathbb{R}^m$, le vecteur d'état au $k^{\text{ième}}$ échantillon (avec X_0 déterministe)
- $Y_k \in \mathbb{R}^n$, le vecteur d'observations de l'état lors du $k^{\text{ième}}$ échantillon
- $\theta_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$, la matrice de transition de l'état X_{k-1} à X_k
- $H_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$
- $F_k \in \mathbb{R}^m$
- $h_k \in \mathbb{R}^n$
- $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$, une suite de vecteurs aléatoires gaussiens indépendants, centrés, et de variance V_k^ε
- $(\eta_k)_{k \geq 1}$, une suite de vecteurs aléatoires gaussiens indépendants, centrés, et de variance V_k^η
- $(\varepsilon_k) \perp (\eta_k)$, les deux suites sont indépendantes $\forall k \geq 1$.

On note que le vecteur $(X_k \ Y_1 \ \dots \ Y_k)^T$ est gaussien.

Le filtrage de Kalman revient à chercher l'estimateur optimal de X_k sachant les observations $(Y_1 \ \dots \ Y_k)^T$, ainsi que la précision de celui-ci. On peut noter de façon mathématique :

- $\mathbb{E}(X_k | Y_1 \ \dots \ Y_k)^T$, l'estimateur de X_k sachant $(Y_1 \ \dots \ Y_k)^T$
- $\mathbb{V}(X_k | Y_1 \ \dots \ Y_k)^T$, la variance de l'estimateur de X_k sachant $(Y_1 \ \dots \ Y_k)^T$

Théorème :

Soit $\widetilde{\pi}_X(k) = \mathbb{E}(X_k | Y_1 \dots Y_{k-1})^T$, $\widetilde{\gamma}_{XX}(k) = \mathbb{V}(X_k | Y_1 \dots Y_{k-1})^T$,
 $\pi_X(k) = \mathbb{E}(X_k | Y_1 \dots Y_k)^T$ et $\gamma_{XX}(k) = \mathbb{V}(X_k | Y_1 \dots Y_k)^T$.

En supposant V_k^η inversible, alors pour tout $k \geq 1$, et avec $\widetilde{\pi}_X(0)$ et $\widetilde{\gamma}_{XX}(0)$ donnés, on a tout d'abord l'estimation à partir du modèle d'évolution :

$$\begin{cases} \widetilde{\pi}_X(k) = \Theta_k \cdot \pi_X(k-1) + F_k \\ \widetilde{\gamma}_{XX}(k) = \Theta_k \cdot \pi_X(k-1) \cdot \Theta_k^T + V_k^\varepsilon \end{cases}$$

Et ensuite l'estimation après correction :

$$\begin{cases} \pi_X(k) = \widetilde{\pi}_X(k) + K_k \cdot (Y_k - (H_k \cdot \widetilde{\pi}_X(k) + h_k)) \\ \gamma_{XX}(k) = (Id - K_k \cdot H_k) \cdot \widetilde{\gamma}_{XX}(k) \end{cases}$$

Avec

- $K_k = \widetilde{\gamma}_{XX}(k) \cdot H_k^T \cdot (H_k \cdot \widetilde{\gamma}_{XX}(k) \cdot H_k^T + V_k^\eta)$
- Id , la matrice identité de taille $m \times m$

Preuve :

1. Phase de prédiction :

La loi suivie par X_k sachant $(Y_1 \dots Y_{k-1})$, est gaussienne car les vecteurs sont indépendants entres eux.

À l'aide de l'équation (1), on trouve que :

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi}_X(k) &= \mathbb{E}(X_k | Y_1 \dots Y_{k-1}) \\ &= \mathbb{E}(\Theta_k \cdot X_{k-1} + F_k + \varepsilon_k | Y_1 \dots Y_{k-1}) \\ &= \Theta_k \cdot \mathbb{E}(X_{k-1} | Y_1 \dots Y_{k-1}) + F_k + \mathbb{E}(\varepsilon_k | Y_1 \dots Y_{k-1}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\widetilde{\pi}_X(k) = \Theta_k \cdot \pi_X(k-1) + F_k + 0}$$

Et

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma}_{XX}(k) &= \mathbb{V}(X_k | Y_1 \dots Y_{k-1})^T \\ &= \mathbb{E} \left[(X_k - \widetilde{\pi}_X(k)) \cdot (X_k - \widetilde{\pi}_X(k))^T \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(\Theta_k \cdot X_{k-1} + F_k + \varepsilon_k - \Theta_k \cdot \pi_X(k-1) - F_k) \cdot (\Theta_k \cdot X_{k-1} + F_k + \varepsilon_k - \Theta_k \cdot \pi_X(k-1) - F_k)^T \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(\Theta_k \cdot (X_{k-1} - \pi_X(k-1)) + \varepsilon_k) \cdot (\Theta_k \cdot (X_{k-1} - \pi_X(k-1)) + \varepsilon_k)^T \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\Theta_k \cdot (X_{k-1} - \pi_X(k-1)) \cdot (X_{k-1} - \pi_X(k-1))^T \cdot \Theta_k^T + \varepsilon_k \cdot (X_{k-1} - \pi_X(k-1))^T \cdot \Theta_k^T \right. \\ &\quad \left. + \Theta_k \cdot (X_{k-1} - \pi_X(k-1)) \cdot \varepsilon_k^T + \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k^T \right] \\ &= \Theta_k \cdot \mathbb{E} \left[(X_{k-1} - \pi_X(k-1)) \cdot (X_{k-1} - \pi_X(k-1))^T \right] \cdot \Theta_k^T + \mathbb{E} \left[\varepsilon_k \cdot (X_{k-1} - \pi_X(k-1))^T \right] \cdot \Theta_k^T \\ &\quad + \Theta_k \cdot \mathbb{E} \left[(X_{k-1} - \pi_X(k-1)) \cdot \varepsilon_k^T \right] + \mathbb{E}[\varepsilon_k \cdot \varepsilon_k^T] \end{aligned}$$

On sait que $(X_{k-1} - \pi_X(k-1)) \perp \varepsilon_k$, donc on peut écrire $\widetilde{\gamma}_{XX}(k)$ selon l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma}_{XX}(k) &= \Theta_k \cdot \mathbb{E} \left[(X_{k-1} - \pi_X(k-1)) \cdot (X_{k-1} - \pi_X(k-1))^T \right] \cdot \Theta_k^T \\ &\quad + \mathbb{E}[\varepsilon_k] \cdot \mathbb{E} \left[(X_{k-1} - \pi_X(k-1))^T \right] \cdot \Theta_k^T + \Theta_k \cdot \mathbb{E}[X_{k-1} - \pi_X(k-1)] \cdot \mathbb{E}[\varepsilon_k^T] + V_k^\varepsilon\end{aligned}$$

Or ε_k est un bruit blanc, on a donc $\mathbb{E}[\varepsilon_k] = 0$. Par conséquent, on obtient :

$$\boxed{\widehat{\gamma}_{XX}(k) = \Theta_k \cdot \gamma_{XX}(k-1) \cdot \Theta_k^T + V_k^\varepsilon}$$

2. Phase de correction :

Soit l'innovation nommé I_k tel que :

$$I_k = Y_k - \mathbb{E}(Y_k | Y_1 \dots Y_{k-1})$$

D'après l'équation (2), I_k peut équivaut à :

$$\begin{aligned}I_k &= H_k \cdot X_k + h_k + \eta_k - \mathbb{E}(H_k \cdot X_k + h_k + \eta_k | Y_1 \dots Y_{k-1}) \\ &= H_k \cdot (X_k - \mathbb{E}(X_k | Y_1 \dots Y_{k-1})) + h_k + \eta_k \\ &= H_k \cdot (X_k - \widehat{\pi}_X(k)) + h_k + \eta_k\end{aligned}$$

I_k est donc un vecteur aléatoire gaussien avec $\mathbb{E}(I_k) = 0$ et $\mathbb{V}(I_k) = H_k \cdot \widehat{\gamma}_{XX}(k) \cdot H_k^T + V_k^\eta$.

Cherchons maintenant l'estimateur de X_k sachant $(Y_1 \dots Y_k)$, ainsi que sa variance. Pour cela on note les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\pi_X(k) &= \mathbb{E}(X_k | Y_1 \dots Y_k) \\ &= \mathbb{E}(X_k - \widehat{\pi}_X(k) + \widehat{\pi}_X(k) | Y_1 \dots Y_k) \\ &= \mathbb{E}(X_k - \widehat{\pi}_X(k) | Y_1 \dots Y_k) + \mathbb{E}(\widehat{\pi}_X(k) | Y_1 \dots Y_k) \\ &= \mathbb{E}(X_k - \widehat{\pi}_X(k) | Y_1 \dots Y_k) + \widehat{\pi}_X(k) \\ &= \mathbb{E}(X_k - \widehat{\pi}_X(k) | Y_1 \dots I_k) + \widehat{\pi}_X(k)\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\gamma_{XX}(k) &= \mathbb{E} \left[(X_k - \pi_X(k)) \cdot (X_k - \pi_X(k))^T \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(X_k - \widehat{\pi}_X(k) + \widehat{\pi}_X(k) - \pi_X(k)) \cdot (X_k - \widehat{\pi}_X(k) + \widehat{\pi}_X(k) - \pi_X(k))^T \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(X_k - \widehat{\pi}_X(k) - \mathbb{E}(X_k - \widehat{\pi}_X(k) | Y_1 \dots Y_k)) \cdot (X_k - \widehat{\pi}_X(k) - \mathbb{E}(X_k - \widehat{\pi}_X(k) | Y_1 \dots Y_k))^T \right] \\ &= \mathbb{V}(X_k - \widehat{\pi}_X(k) | Y_1 \dots Y_k)\end{aligned}$$

$$\gamma_{XX}(k) = \mathbb{V}(X_k - \widehat{\pi}_X(k) | Y_1 \dots I_k)$$

On notera que $(X_k - \widehat{\pi}_X(k)) \perp (Y_1 \dots Y_{k-1})$.

Remarque : $(X_k - \tilde{\pi}_X(k)) \perp (Y_1 \dots Y_{k-1})$ s'explique par le fait que dans l'espace probabiliste $\tilde{\pi}_X(k)$ est une projection de X_k sur le plan $(Y_1 \dots Y_{k-1})$, le vecteur $(X_k - \tilde{\pi}_X(k))$ est donc perpendiculaire au plan $(Y_1 \dots Y_{k-1})$. Une illustration est présentée en figure 1 :

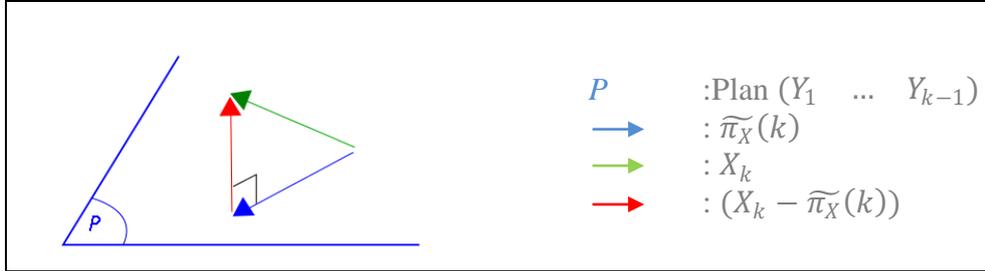


Figure 1 : Illustration de l'indépendance entre $(X_k - \tilde{\pi}_X(k))$ et $(Y_1 \dots Y_{k-1})$.

$$\begin{cases} \pi_X(k) = \mathbb{E}(X_k - \tilde{\pi}_X(k)|I_k) + \tilde{\pi}_X(k) \\ \gamma_{XX}(k) = \mathbb{V}(X_k - \tilde{\pi}_X(k)|I_k) \end{cases}$$

Lors de la phase de correction, on considère donc le vecteur aléatoire :

$$Z_k = \begin{pmatrix} X_k - \tilde{\pi}_X(k) \\ I_k \end{pmatrix} \text{ et de matrice de variance covariance : } \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_{XX}(k) & \tilde{\gamma}_{XX}(k).H_k^T \\ H_T.\tilde{\gamma}_{XX}(k)^T & H_k.\tilde{\gamma}_{XX}(k).H_k^T + V_k^\eta \end{pmatrix}$$

Remarque : la matrice de variance covariance de $(X_k - \tilde{\pi}_X(k) \ I_k)^T$ est la matrice qui s'exprime ainsi :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{V}(X_k - \tilde{\pi}_X(k)) & \mathbb{E}\left(\left(X_k - \tilde{\pi}_X(k)\right).I_k\right) \\ \mathbb{E}\left(\left(X_k - \tilde{\pi}_X(k)\right).I_k\right)^T & \mathbb{V}(I_k) \end{pmatrix}$$

Enfin, en utilisant la propriété 1, on retrouve l'estimateur du filtre de Kalman :

$$\begin{cases} \pi_X(k) = \mathbb{E}(X_k) + \mathbb{E}\left(\left(X_k - \tilde{\pi}_X(k)\right).I_k\right) \cdot \mathbb{V}(I_k)^{-1} \cdot (I_k - \mathbb{E}(I_k)) + \tilde{\pi}_X(k) \\ \gamma_{XX}(k) = \mathbb{V}(X_k) - \mathbb{E}\left(\left(X_k - \tilde{\pi}_X(k)\right).I_k\right) \cdot \mathbb{V}(I_k)^{-1} \cdot \mathbb{E}\left(\left(X_k - \tilde{\pi}_X(k)\right).I_k\right)^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_X(k) = \mathbb{E}(X_k) + \mathbb{E}\left(\left(X_k - \tilde{\pi}_X(k)\right).I_k\right) \cdot \mathbb{V}(I_k)^{-1} \cdot (I_k - \mathbb{E}(I_k)) + \tilde{\pi}_X(k) \\ \gamma_{XX}(k) = \mathbb{V}(X_k) - \mathbb{E}\left(\left(X_k - \tilde{\pi}_X(k)\right).I_k\right) \cdot \mathbb{V}(I_k)^{-1} \cdot \mathbb{E}\left(\left(X_k - \tilde{\pi}_X(k)\right).I_k\right)^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_X(k) = 0 + \tilde{\gamma}_{XX}(k).H_k^T \cdot (H_k.\tilde{\gamma}_{XX}(k).H_k^T + V_k^\eta)^{-1} \cdot (H_k.(X_k - \tilde{\pi}_X(k)) + h_k + \eta_k - 0) + \tilde{\pi}_X(k) \\ \gamma_{XX}(k) = \tilde{\gamma}_{XX}(k) - \tilde{\gamma}_{XX}(k).H_k^T \cdot (H_k.\tilde{\gamma}_{XX}(k).H_k^T + V_k^\eta)^{-1} \cdot H_T.\tilde{\gamma}_{XX}(k)^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_X(k) = K_k.(Y_k - H_k.\tilde{\pi}_X(k) + h_k) + \tilde{\pi}_X(k) \\ \gamma_{XX}(k) = \tilde{\gamma}_{XX}(k) - K_k.H_T.\tilde{\gamma}_{XX}(k)^T \end{cases}$$

Annexe 2

Méthode de synchronisation et tests de validation

L'une des principales difficultés de la fusion des données issues de différents systèmes est leur synchronisation. En effet, ce protocole utilise une centrale inertielle et un interféromètre. Chacun de ces capteurs utilise sa propre horloge pour dater les observations. De plus, certains appareils ne nous donnent pas une datation précise et absolue. Il a donc fallu mettre en place une méthode pour synchroniser les mesures.

Méthode

Étant donné deux signaux échantillonnés : $X = (x_0 \ x_1 \ \dots \ x_M)$, et $Y = (y_0 \ y_1 \ \dots \ y_M)$.

L'algorithme mis en place pour la synchronisation de X et Y utilise la fonction $c(\tau)$ qui correspond à la corrélation entre $X(0)$ et $Y(\tau)$, où $X(0)$ est le signal X sans décalage et $Y(\tau)$ le signal Y avec un décalage τ exprimé en nombre d'échantillons. Cependant, nos deux signaux n'étant pas échantillonnés à la même fréquence, l'application d'un décalage n'a d'intérêt que si nous corrigeons en premier cette différence. Deux choix sont alors possibles : l'interpolation du signal dont la période est la plus grande, ou le sous-échantillonnage à cette même période du signal possédant la plus haute fréquence (c'est-à-dire la plus courte période). La première solution est choisie pour pouvoir exploiter le maximum d'informations. Nous avons choisi d'utiliser l'interpolation de type « linéaire » pour sa simplicité ; de plus, les autres méthodes d'interpolation n'ont pas montré de réelles améliorations dans les résultats.

Enfin, nous appliquons le décalage sur Y afin de conserver la totalité du signal X . De cette manière, ce signal servira de référence à notre synchronisation.

Simulation et validation de l'algorithme de synchronisation

On génère deux signaux sinusoïdaux X et Y échantillonnés à des fréquences différentes respectivement 10 Hz et 100 Hz. La fonction $Y(t)$ est ensuite soumise à un décalage temporel positif, puis négatif. Les courbes qui découlent de ces deux cas, sont respectivement présentées en figure 1 et 2.

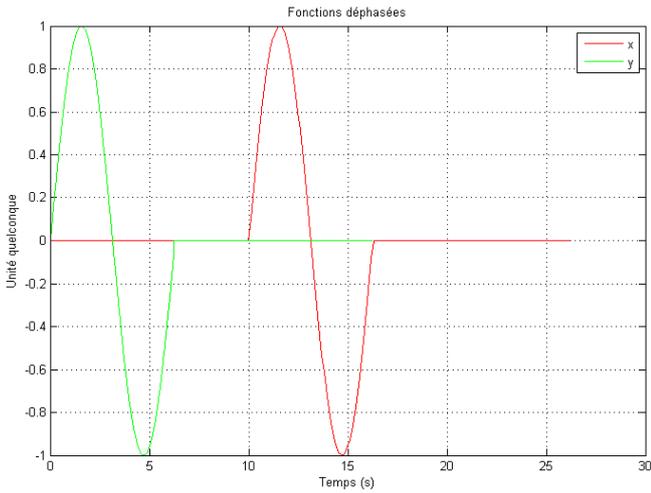


Figure 1 : Signaux X (courbe rouge) et Y (courbe verte) déphasés. X est échantillonné à 10 Hz et Y à 100 Hz. Y a une avance de 10 secondes ($\tau = +10$ s).

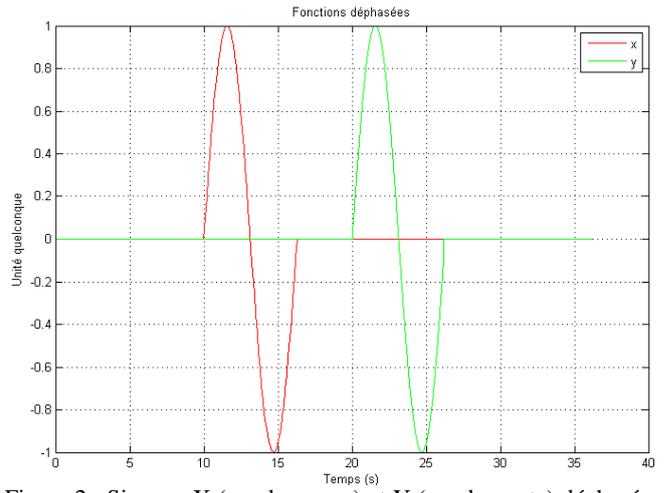


Figure 2 : Signaux X (courbe rouge) et Y (courbe verte) déphasés. X est échantillonné à 10 Hz et Y à 100 Hz. Y a un retard de 10 secondes ($\tau = -10$ s).

Ces deux cas sont ensuite traités par notre programme de synchronisation qui renvoie respectivement les résultats représenté en figure 3 et 4.

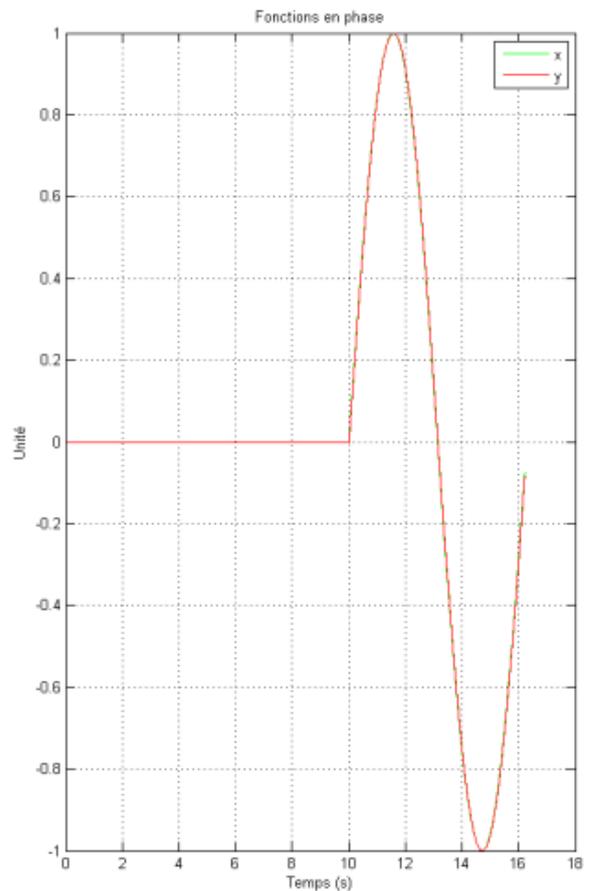
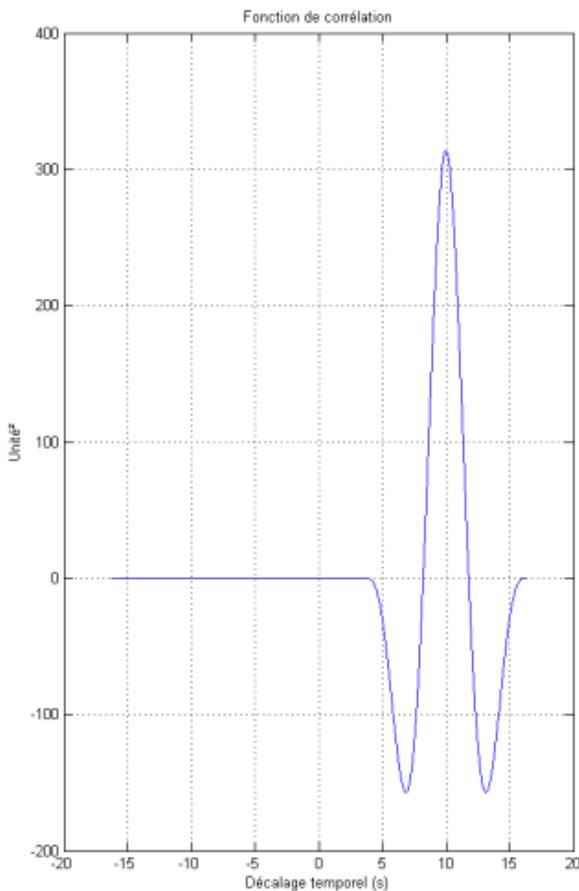


Figure 3 : Synchronisation de X et Y. X est échantillonné à 10 Hz et Y à 100 Hz. Y possédait une avance de 10 secondes ($\tau = +10$ s) avant synchronisation. On trouve à gauche la courbe d'auto-covariance en fonction de τ en seconde, et à droite les deux signaux X et Y synchronisés par notre programme.

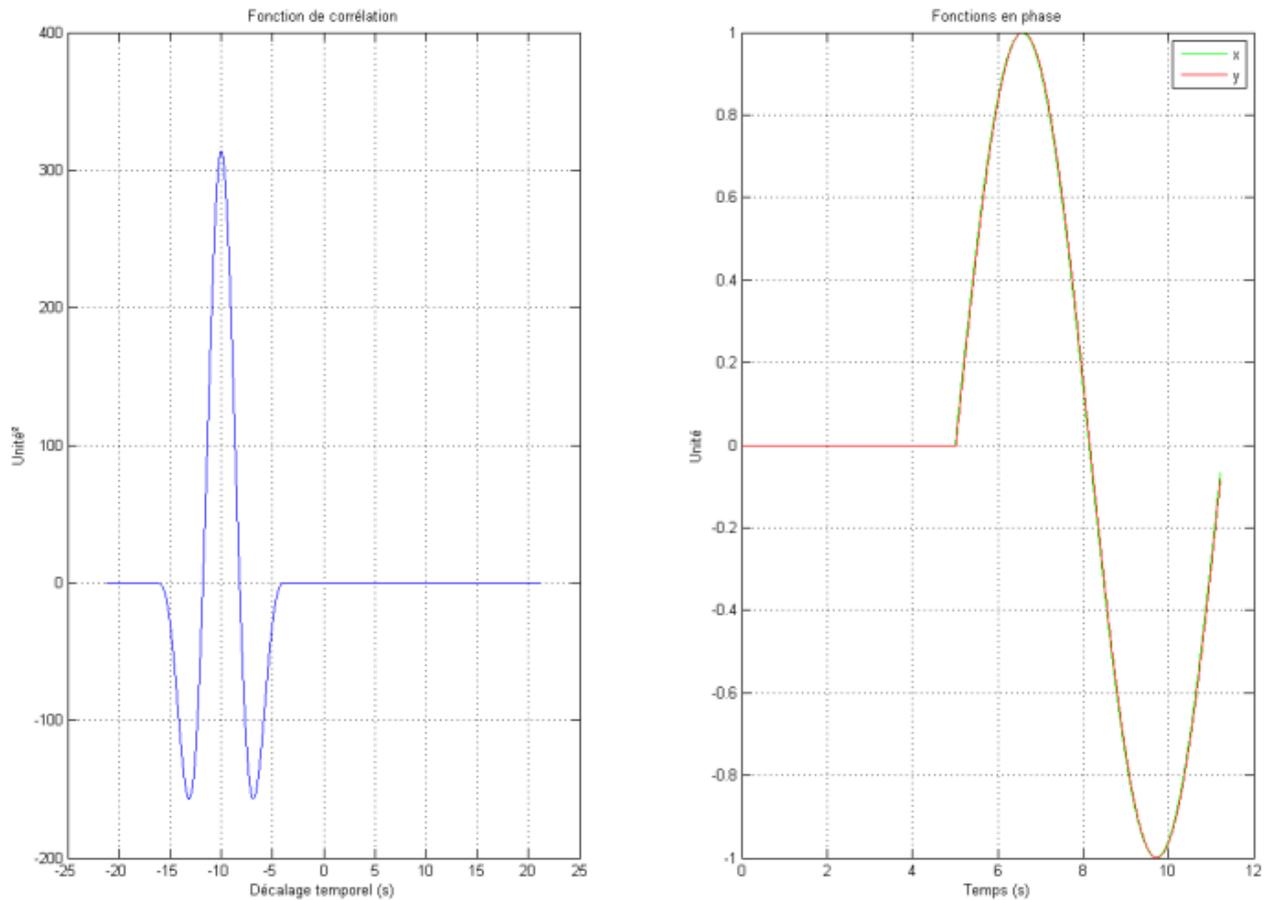


Figure 4 : Synchronisation de X et Y. X est échantillonné à 10 Hz et Y à 100 Hz. Y possédait un retard de 10 secondes ($\tau = -10$ s) avant synchronisation. On trouve à gauche la courbe d'auto-covariance en fonction de τ en seconde, et à droite les deux signaux X et Y synchronisés par notre programme.

On observe sur les figures 3 et 4, que les décalages ont été bien retrouvés et corrigés car les deux courbes se superposent parfaitement. Cependant, la valeur du décalage est précise à une période d'échantillonnage près.

Conclusion sur l'algorithme et son utilisation

Cette méthode de synchronisation nous donne des résultats exploitables pour des signaux très marqués et parfaitement identiques à un décalage près. Cependant, il faudra rester vigilant car lors de nos expériences les signaux ne sont pas parfaitement similaires, et l'amplitude du phénomène observé n'est pas forcément significative. Il faudra donc contrôler pour chaque expérience si la synchronisation a été correctement effectuée en vérifiant que les signaux sont bien confondus aux bruits d'observation près.

De plus, un point très important doit être respecté par les mesures en entrée : elles doivent avoir une fréquence d'acquisition stable. Dans le cas contraire la synchronisation ne pourra être qu'approximative.

Annexe 3

Méthodes de mise en référence des données de l'INS et tests de validation

Dans le protocole avec système de positionnement GNSS/INS, les observations de position issues de la centrale et de l'interféromètre sont exprimées dans des repères différents. Pour pouvoir utiliser l'intégralité de nos observations dans des traitements communs, il faut que les mesures soient exprimées dans un repère unique, ce qui nécessite une mise en référence.

Dans ce protocole, nous sommes partis du principe où nous devons nous orienter dans le repère possédant les caractéristiques illustrées en figure 1. Ce repère sera nommé "repère banc".

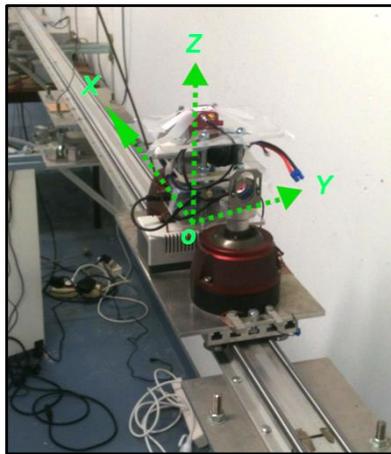


Figure 1 : Illustration du repère banc. L'axe (oX) coïncide avec l'axe de mesure de l'interféromètre, l'axe (oZ) est dirigé selon la verticale, et l'axe (oY) est tel que les trois axes forment un trièdre orthogonal direct. L'origine du repère coïncide avec la position initiale du mobile.

1) Cas général du changement de repère

Soient deux repères A et B, dans lesquels sont exprimées les coordonnées d'un nuage de points. Soient X_i et Y_i les coordonnées du $i^{\text{ème}}$ point exprimées respectivement dans les repères A et B. La relation générale de changement de repère s'écrit alors :

$$(19) \quad Y_i = s \cdot [R] \cdot X_i + T$$

Avec :

- s le vecteur des facteurs d'échelle ;
- $[R]$ la matrice de rotation du repère A vers le repère B ;
- T le vecteur de translation du repère A vers le repère B.

2) Changement de repère appliqué aux mesures accélérométriques du système GNSS/INS

Dans le cas de notre étude, nous considérons un nuage de points dont les coordonnées correspondent aux accélérations mesurées depuis la centrale inertielle. Le but est de trouver la transformation à appliquer pour exprimer ce nuage dans le repère banc.

La transformation à appliquer doit préserver les distances entre chaque paire de points, car les accélérations mesurées sont de même norme dans chacun des repères. On reprend donc la formule (19) en retirant le facteur d'échelle s :

$$(20) \quad Y_i = [R] \cdot X_i + T, \quad X_i, Y_i \in \mathbb{R}^3$$

Ensuite, on sait aussi que l'accélération est une information où seule la direction et la norme sont nécessaires. Le vecteur de translation de l'équation (20) est inutile, d'où l'équation suivante :

$$(21) \quad Y_i = [R] \cdot X_i.$$

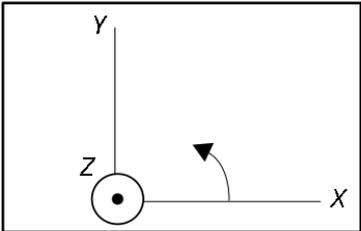
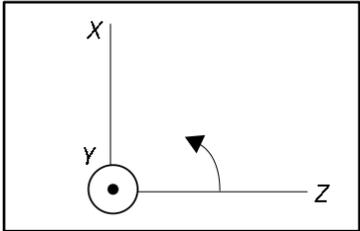
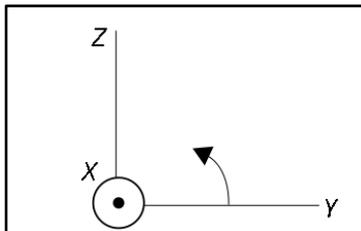
Il existe différentes façons d'exprimer la matrice de rotation $[R]$, l'une d'elle consiste à utiliser les des angles d'Euler.

3) Expression d'une rotation 3D avec les angles d'Euler

Une rotation en trois dimensions peut s'exprimer comme le produit de trois rotations chacune autour d'un des axes canoniques. On exprime alors R comme étant égale à :

$$R = R_3 \cdot R_2 \cdot R_1$$

Avec

$R_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$R_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$	$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$
		
Figure 1 : Rotation autour de (oZ)	Figure 2 : Rotation autour de (oY)	Figure 3: Rotation autour de (oX)

On a donc :

$$(22) \quad R = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix}$$

Selon l'ouvrage "Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications" (JEKELI, 2001), on retrouve les angles d'Euler ψ, θ, ϕ , par application de l'algorithme suivant :

$$\psi = \tan^{-1} \frac{R_{21}}{R_{11}}, \quad \theta = -\sin^{-1} R_{31}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{R_{32}}{R_{33}}.$$

Si θ est proche de $\frac{\pi}{2}$, on calcule ψ, ϕ avec les formules suivantes :

$$\psi = \frac{1}{2} \left[\tan^{-1} \frac{R_{23} + R_{12}}{R_{13} - R_{22}} + \tan^{-1} \frac{R_{23} - R_{12}}{R_{13} + R_{22}} \right], \quad \phi = \frac{1}{2} \left[\tan^{-1} \frac{R_{23} + R_{12}}{R_{13} - R_{22}} - \tan^{-1} \frac{R_{23} - R_{12}}{R_{13} + R_{22}} \right].$$

Maintenant que nous avons déterminé de façon formelle la matrice de rotation à l'aide des angles d'Euler, il faut trouver l'estimateur de chacun de ces trois angles dans le cas de notre protocole.

4) Deux méthodes d'estimation de R

Nous présentons ici deux méthodes basées sur les moindres carrés qui permettent l'estimation de R. La première utilise les observations accélérométriques de l'INS et celles acquises par un autre instrument (dans notre cas : l'interféromètre), à l'inverse de la seconde qui n'utilise que les données retournées par l'INS.

a) Transformation rigide avec données extérieures (appelée méthode SVD)

On prend les $2 \times n$ jeux de coordonnées 3D suivants :

- $X = (X_1, \dots, X_n)$ les mesures accélérométriques obtenues à l'aide de la centrale inertielle ;
- $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ les mesures accélérométriques dans le repère banc, où $Y_k = (\ddot{x} \ \ddot{y} \ \ddot{z})^T_k$ avec \ddot{x} l'accélération du mobile selon l'axe (oX) calculée à partir des observations interférométriques, \ddot{y} l'accélération du mobile selon l'axe (oY) donc théoriquement nulle à tout instant, et \ddot{z} la valeur du champ de pesanteur g qui s'exerce sur le mobile en supposant qu'il n'a pas d'autres causes d'accélération verticale.

À partir de ces jeux de coordonnées, on cherche à trouver un estimateur de la matrice R qui minimise la somme quadratique suivante :

$$\sum^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - [R] \cdot X_i)^T \cdot (Y_i - [R] \cdot X_i).$$

En développant de cette équation, on obtient l'égalité suivante :

$$(23) \quad \sum^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i^T \cdot Y_i + X_i^T \cdot [R]^T \cdot [R] \cdot X_i - Y_i^T \cdot R \cdot X_i - X_i^T \cdot [R]^T \cdot Y_i)$$

Or, on sait qu'une matrice de rotation est orthogonale, donc on déduit :

$$[R]^T \cdot [R] = Id \quad \text{et} \quad X_i^T \cdot [R]^T \cdot Y_i = Y_i^T \cdot R \cdot X_i$$

L'expression (23) peut donc s'écrire :

$$(24) \quad \sum^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i^T \cdot Y_i + X_i^T \cdot [R]^T \cdot [R] \cdot X_i - 2 \cdot Y_i^T \cdot R \cdot X_i)$$

De la formule (24), on déduit naturellement que la solution de R, au sens des moindres carrées, est celle qui maximise la somme : $\sum_{i=1}^n Y_i^T \cdot [R] \cdot X_i$.

De manière calculatoire, on démontre la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^n (Y_i^T \cdot [R] \cdot X_i) = tr \left\{ R^T \cdot \sum_{i=1}^n Y_i \cdot X_i^T \right\} = tr \{ R^T \cdot C \}$$

où C est la matrice de corrélation entre les jeux de coordonnées X et Y.

Par application de la SVD (Singular Value Decomposition) sur la matrice C, il vient :

$$\begin{aligned} tr \{ R^T \cdot C \} &= tr \{ R^T \cdot U \cdot W \cdot V^T \} \\ &= tr \{ V^T \cdot R^T \cdot U \cdot W \} \\ &= tr \{ Q \cdot W \} \end{aligned}$$

où :

- U, V sont les vecteurs singuliers respectivement à gauche et à droite de C ;
- $W = \begin{pmatrix} D & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, est la matrice diagonale comprenant les valeurs singulières de C ;

- D , la matrice diagonale, composée des valeurs singulières non nulles de C ;
- $Q = V^T \cdot R^T \cdot U$.

La matrice Q est le produit de trois matrices orthogonales, elle est donc elle-même orthogonale.

Sachant, que la matrice Q est orthogonale, ses termes diagonaux sont donc compris entre -1 et 1 . De plus, W est une matrice diagonale. On retrouve donc un maximum de $tr\{Q \cdot W\}$ pour $Q = I$, où I est la matrice identité. On peut donc poser l'égalité suivante :

$$I = V^T \cdot R^T \cdot U$$

qui est équivalent à : $\boxed{R = U \cdot V^T}$

Cette dernière relation donne donc l'estimateur de la rotation qui permet de transformer les observations accélérométriques brutes de la centrale dans le repère banc.

A partir de cette matrice de rotation R on peut en déduire les valeurs des angles d'Euler.

Cette méthode nécessite la connaissance de l'accélération du mobile étudié selon l'axe (oX) du repère banc, et par conséquent le recours à un instrument autre que la centrale inertielle.

b) Transformation rigide sans données extérieures (appelée méthode MC)

Dans le cas où l'on considère comme inconnue l'accélération selon (oX) dans le repère banc, on peut déduire des équations (21) la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \cdot Xi \quad , Xi \in \mathbb{R}^3 \text{ et } R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} \text{ où } R_1, R_2 \text{ et } R_3 \text{ sont les vecteurs lignes de } R.$$

Il vient donc :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \cdot Xi$$

On cherche à trouver un estimateur de la matrice R qui minimise la somme quadratique suivante :

$$(25) \quad \sum^2 = \sum_{i=1}^n \left(\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \cdot Xi \right)^T \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \cdot Xi \right)$$

La minimisation de cette forme quadratique selon les paramètres (ψ, θ, ϕ) peut être réalisée à partir des algorithmes d'optimisation telle que la méthode du gradient disponible sous Matlab©.

5) Comparaison des deux méthodes

Pour savoir quelle méthode est la plus efficace, nous avons réalisé des tests à partir de données simulées et sur des données réelles.

a) Simulation

On réalise ici une comparaison entre les deux méthodes (MC et SVD) d'estimation de la matrice de rotation qui permet de passer du repère INS au repère banc. Cette comparaison se fait à partir de données simulées.

i) Protocole

Afin de comparer nos deux méthodes, nous avons créé des données expérimentales et réalisé une mise en référence en suivant les étapes suivantes :

1. génération d'une donnée accélérométrique de référence avec des valeurs variables selon l'axe (oX), nulles selon (oY) et égales à -9.81 selon (oZ) (la valeur de l'accélération de pesanteur) ;
2. création d'une matrice de rotation à partir des angles d'Euler fixés ;
3. application d'une rotation aux vecteurs des mesures de référence afin de modéliser les accélérations vraies dans le repère associé à la centrale inertielle ;
4. construction d'un vecteur bruit corrigé de l'espérance du biais $\mathbb{E}(b) = b_0$ selon le modèle avec un biais ne suivant pas de processus autorégressif (cf. partie III.1.1) ;

$$\text{bruit} = -(b_k - b_0) - \frac{\sigma_1}{\sqrt{\Delta}} \varepsilon_k^1, \text{ avec } b_0 \text{ défini ;}$$

5. addition du vecteur d'observation de référence exprimé dans le repère de la centrale et du vecteur de bruit ;
6. estimation des angles d'Euler ;
7. application de la rotation estimée aux observations dans le repère de la centrale ;
8. comparaison entre les observations de référence et celles calculées (dans le repère banc).

ii) Résultat de la simulation

En fixant $\sigma_1 = 0.1 \text{ m/s}$ et $\sigma_2 = 4.10^{-5} \text{ m/s}$, on détermine la rotation d'un échantillon de 100 mesures accélérométriques. Nous avons choisi d'utiliser la méthode de Monte-Carlo, qui consiste à répéter plusieurs fois notre simulation afin d'avoir des estimations empirique de l'espérance et de la variance des différentes déterminations des accélérations et des paramètres de rotation. Le nombre de simulations a été fixé à 1000. Les résultats sont présentés dans les figures 1 à 4, et dans le tableau 1 (MT(1000) correspond à une valeur obtenue par exploitation de la méthode de Monte-Carlo avec mille expériences).

On peut constater dans le tableau 1, que les moyennes d'erreur de restitution des accélérations et leurs écarts-types, sont beaucoup plus faibles lors de l'utilisation de la méthode SVD. L'estimation de l'accélération dans le repère banc est meilleure lors de l'utilisation de cette méthode. Ces résultats étaient prévisibles compte tenu de la différence de degrés de liberté dans l'estimation par moindres carrés. En effet, la méthode qui utilise la SVD possède un plus grand nombre d'équations d'observation pour réaliser son estimation, ce qui induit un plus grand degré de liberté et une meilleure précision. De plus, l'accélération selon X est bien mieux restituée car seule la méthode par SVD impose une contrainte sur cette composante.

Cependant, on peut remarquer que l'écart-type et la moyenne de l'erreur restent élevés dans la détermination de l'angle Ψ avec la méthode par SVD. Ces résultats s'expliquent par une le fait que deux valeurs de Ψ sont possibles pour obtenir la même matrice de rotation.

Enfin, lorsque le nombre de mesures augmentes, on aperçoit qu'un biais apparaît sur la détermination de l'accélération selon l'axe (oX) avec la méthode MC.

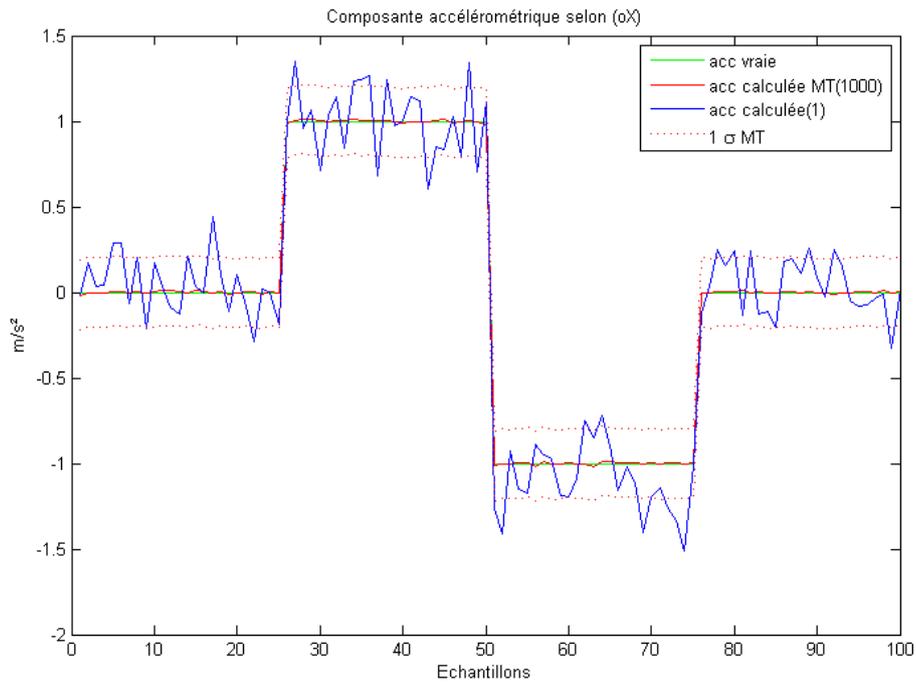


Figure 1 : Composante selon (αX) de l'accélération. Nous avons l'accélération vraie (courbe verte), et celle estimée par méthode SVD sur un tirage (courbe bleue). La moyenne de cet estimateur (courbe rouge continue) ainsi que son intervalle de confiance à 68% (intervalle entre les deux courbes rouges pointillés) sont obtenus à partir de 1000 simulations.

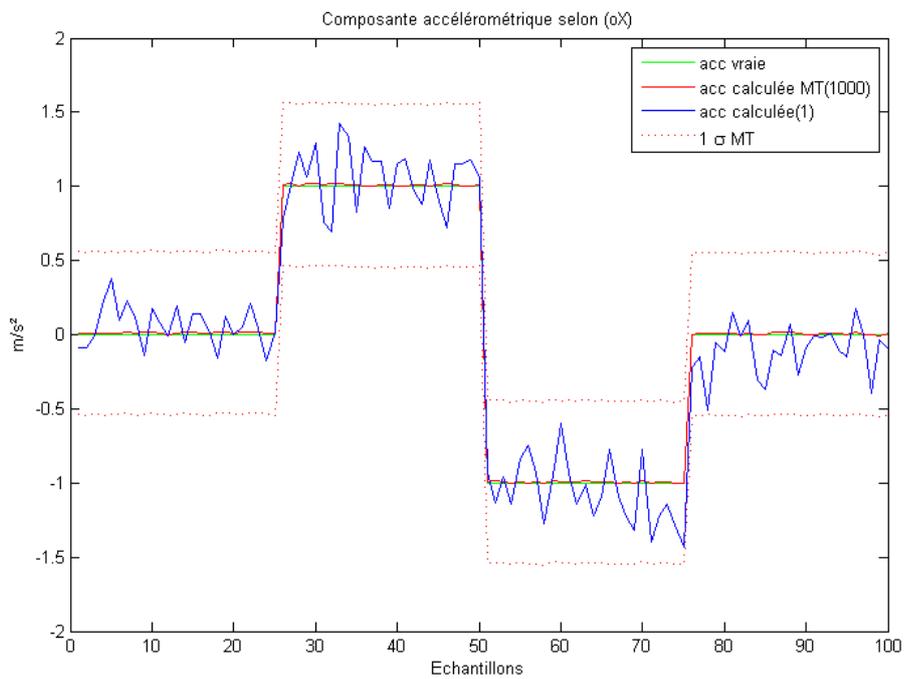


Figure 2 : Composante selon (αX) de l'accélération. Nous avons l'accélération vraie (courbe verte), et celle estimée par méthode MC sur un tirage (courbe bleue). La moyenne de cet estimateur (courbe rouge continue) ainsi que son intervalle de confiance à 68% (intervalle entre les deux courbes rouges pointillés) sont obtenus à partir de 1000 simulations.

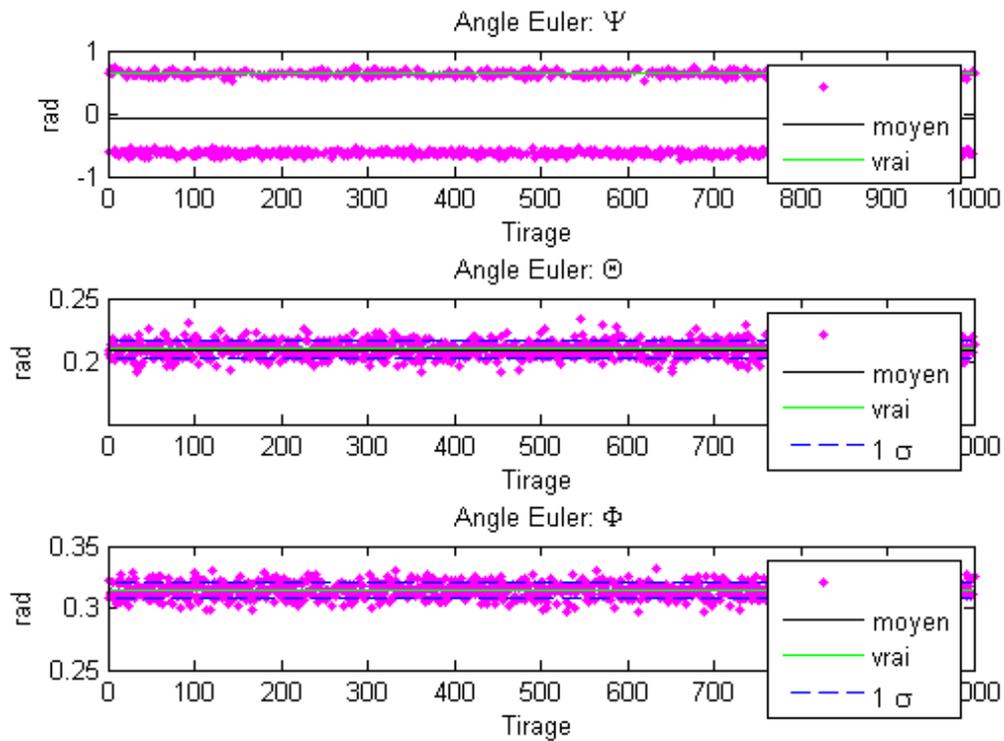


Figure 3 : Angles d'Euler des matrices de rotation (celle permettant de passer du repère de l'INS au repère banc) estimés sur 1000 tirages par la méthode SVD.

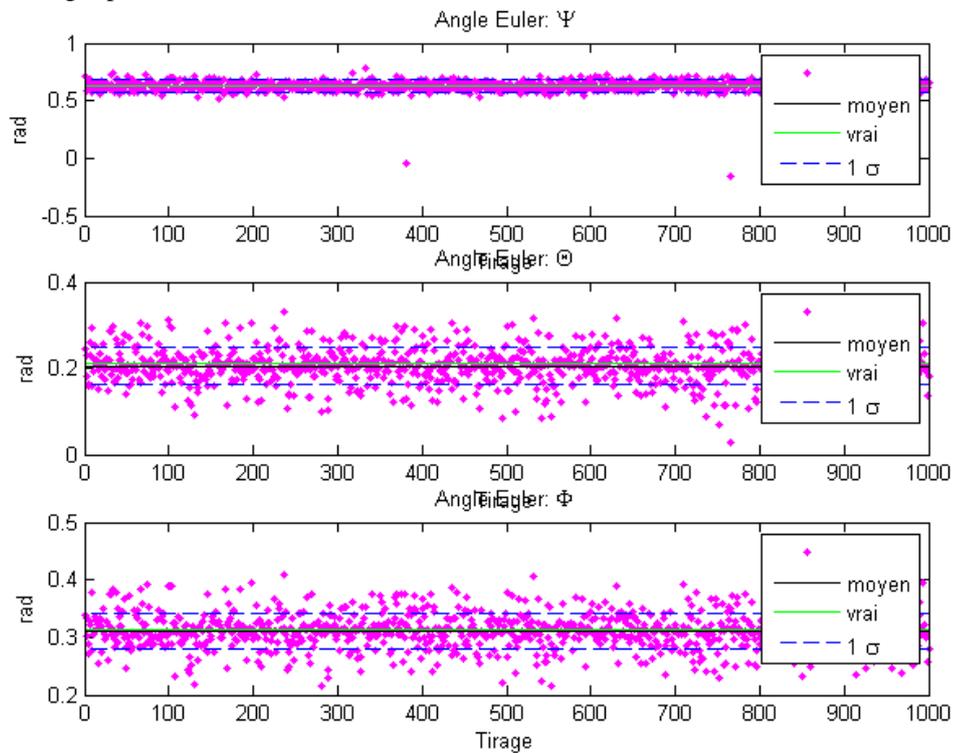


Figure 4 : Angles d'Euler des matrices de rotation (celle permettant de passer du repère de l'INS au repère banc) estimés sur 1000 tirages par la méthode MC.

		Méthode SVD	Méthode MC
Moyenne de l'erreur sur l'accélération ($m.s^{-2}$)	X	1.22×10^{-4}	4.69×10^{-2}
	Y	5.99×10^{-17}	1.54×10^{-5}
	Z	-2.92×10^{-3}	1.12×10^{-2}
Écart-type de l'erreur sur l'accélération ($m.s^{-2}$)	X	2.04×10^{-1}	5.54×10^{-1}
	Y	2.01×10^{-1}	2.03×10^{-1}
	Z	2.12×10^{-1}	2.09×10^{-1}
Moyenne de l'erreur angulaire (rad)	Ψ	-7.33×10^{-1}	-5.14×10^{-4}
	θ	-1.245×10^{-4}	3.97×10^{-3}
	ϕ	-4.15×10^{-4}	2.43×10^{-3}
Écart-type de erreur angulaire (rad)	Ψ	9.60×10^{-1}	4.98×10^{-2}
	θ	6.22×10^{-3}	4.21×10^{-2}
	ϕ	6.38×10^{-3}	3.12×10^{-2}

Tableau 1 : Tableau des moyennes et écarts-types sur les écarts entre les valeurs obtenues par la méthode SVD ou MC, et les valeurs de référence.

b) Comparaison des méthodes MC et SVD sur des données expérimentales

Une fois la simulation effectuée nous avons cherché à déterminer l'orientation de la centrale inertielle dans le contexte de notre protocole final, c'est-à-dire lors de l'observation du déplacement du chariot du banc interférométrique à l'aide de l'interféromètre et de la centrale inertielle IG-500N.

Les caractéristiques des mesures effectuées ont été rassemblées dans le tableau 2.

Instrument	Interféromètre	Centrale inertielle
Type de mesures réalisées	Distances relatives en 1D selon l'axe du banc par rapport à la position initiale du chariot	Accélérations 3D du mobile dans le repère de la centrale inertielle.
Type de datation renvoyée pour chaque mesure	Datation relative en seconde	Date UTC* en heure, minute, seconde (l'horloge de l'appareil a été préalablement réglée)
Fréquence d'échantillonnage	100 Hz	94.5 Hz

Figure 2 : Données en sortie des instruments de mesures

Nos calculs d'orientations nécessitent des données accélérométriques. Or l'interféromètre ne fournit pas directement ce type d'information. Nous allons donc traité ses données pour en extraire des accélérations datées. Pour cela, on utilise les distances données par l'interféromètre dans les formules :

$$v_X(k\Delta) = \frac{D((k+1)\Delta) - D(k\Delta)}{\Delta} \text{ et } acc_X(k\Delta) = \frac{v((k+1)\Delta) - v(k\Delta)}{\Delta}$$

où :

- $D(t)$ le déplacement donné par l'interféromètre lors de la $k^{\text{ième}}$ mesure,
- $acc_X(k\Delta)$ est l'accélération du chariot selon l'axe (oX) du repère banc lors de la $k^{\text{ième}}$ mesure,
- $v_X(k\Delta)$ est la vitesse du chariot selon l'axe (oX) du repère banc lors de la $k^{\text{ième}}$ mesure,
- Δ est la période d'échantillonnage.

Le calcul de l'orientation est réalisé après synchronisation des données interférométriques et des données de l'INS.

Les figures 5 et 6, et le tableau 3 présentent les résultats d'une première expérience où les axes de la centrale sont proches de ceux du repère banc. Les figures 7 et 8, et le tableau 4 présentent les résultats d'une seconde expérience où les axes de la centrale sont volontairement orientés différemment du repère banc.

Comme peut le montrer le tableau 3, nos deux méthodes donnent des estimateurs avec des précisions relativement proches et d'erreur moyenne de même ordre grandeur. Cependant, on constate que la méthode MC ne permet pas de fixer systématiquement le sens de l'axe (oX), comme illustre la figure 8, où l'on voit que les directions de mesure de l'accélération sont inversées pour l'interféromètre et la centrale inertielle. Ce problème résulte de l'absence d'information sur la composante (oX) du repère banc lors de l'utilisation de la méthode MC.

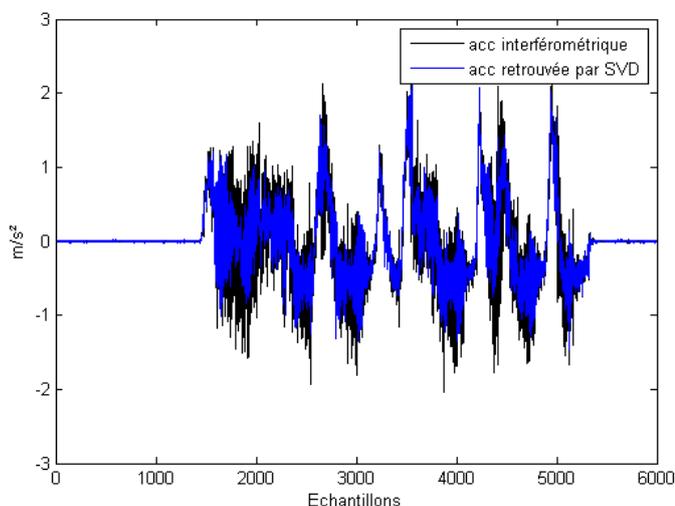


Figure 5 : Accélérations selon l'axe (oX) avec les données INS orientées par SVD (courbe bleue), comparées aux accélérations données par l'interféromètre (courbe noire).

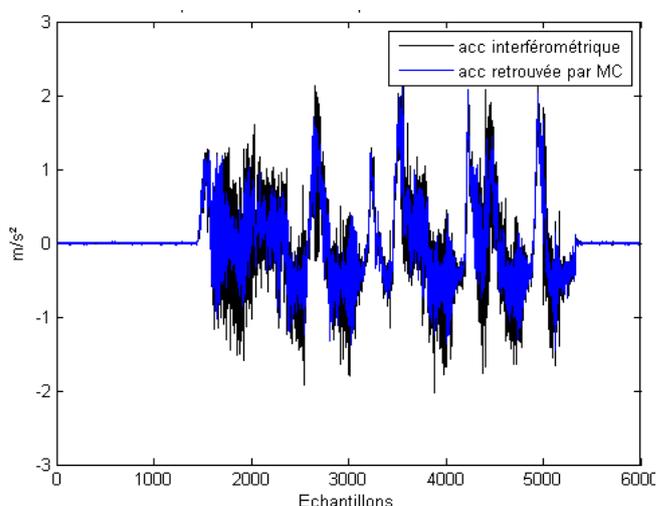


Figure 6 : Accélérations selon l'axe (oX) avec les données INS orientées par MC (courbe bleue), comparées aux accélérations données par l'interféromètre (courbe noire).

		Méthode SVD	Méthode MC
Moyenne de l'erreur d'estimation de l'accélération ($m \cdot s^{-2}$)	Axe X	-2.4×10^{-3}	-2.9×10^{-3}
Écart-type de l'erreur d'estimation de l'accélération ($m \cdot s^{-2}$)	Axe X	3.9×10^{-1}	3.9×10^{-1}

Tableau 3 : Moyenne et écart-type des écarts entre les estimateurs d'accélération par méthode SVD ou MC, et les accélérations issues des observations interférométriques.

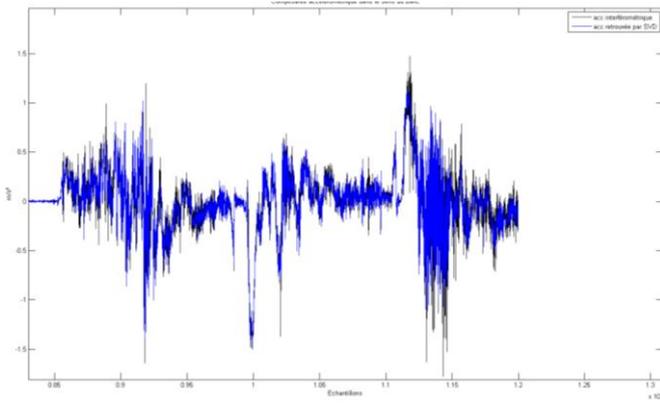


Figure 7 : Accélérations selon l'axe (oX) avec les données INS orientées par SVD (courbe bleue), comparées aux accélérations données par l'interféromètre (courbe noire).

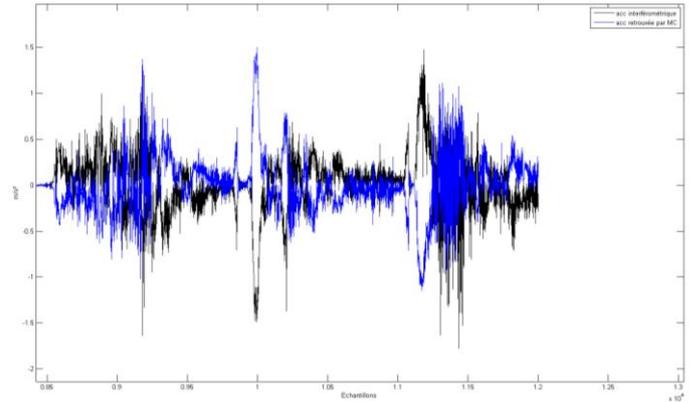


Figure 8 : Accélérations selon l'axe (oX) avec les données INS orientées par MC (courbe bleue), comparées aux accélérations données par l'interféromètre (courbe noire).

		Méthode SVD	Méthode MC
Moyenne de l'erreur d'estimation de l'accélération ($m \cdot s^{-2}$)	Axe X	2.0×10^{-3}	1.6×10^{-3}
Écart-type de l'erreur d'estimation de l'accélération ($m \cdot s^{-2}$)	Axe X	1.3×10^{-1}	3.3×10^{-1}

Tableau 4 : Moyenne et écart-type des écarts entre les estimateurs d'accélération par méthode SVD ou MC, et les accélérations issues des observations interférométriques.

6) Conclusion

La méthode SVD a été retenue pour la mise en référence des données de l'INS dans le repère blanc.

Annexe 4

Programme Matlab© de synchronisation de deux signaux

```

% Fonction qui renvoie deux signaux en phase et avec des périodes
% d'échantillonnage identiques
% =====
% Entrée:
% x et y : signaux déphasés avec x la référence temporelle
% x_dt et y_dt : les périodes d'échantillonnages respectives de x et y
% =====
% Sortie:
% x_phase et y_phase : signaux en phase, de même fréquence et de même
% taille.
% tps_relatif : instant d'acquisition des échantillons de x_phase et
% y_phase.
% décal : valeur du déphasage (en nombre d'échantillon)
% =====

function [x_phase,y_phase,tps_relatif,decal]=...
    correlation_fct_interp(x,x_dt,y,y_dt)

% 1) Interpolation du signal possédant la période d'échantillonnage la plus
grande
x_t=[0,cumsum(x_dt*ones(1,size(x,2)-1))]; % instant d'acquisition de
y_t=[0,cumsum(y_dt*ones(1,size(y,2)-1))]; % des échantillons de x et y

if x_dt>y_dt % Cas où on interpole le signal x
    x_t_interp=[0:y_dt:x_t(end)];
    x2=interp1(x_t,x,x_t_interp,'linear');
    y2=y;
    dt=y_dt;
elseif y_dt>x_dt % Cas où on interpole le signal y
    y_t_interp=[0:x_dt:y_t(end)];
    y2=interp1(y_t,y,y_t_interp,'linear');
    x2=x;
    dt=x_dt;
end;

% 3) On met le même nombre d'échantillons dans chaque vecteur d'observations
Nx2=size(x2,2);
Ny2=size(y2,2);

if Ny2>Nx2
    y2=y2(1:Nx2);
    N=Nx2;
elseif Nx2>Ny2
    x2=x2(1:Ny2);
    N=Ny2;
else
    N=Nx2;
end;

% 4) Calcul du décalage par corrélation
[R,lag]=xcorr(x2,y2);

```

```

i=find(R==max(R));

% 5) Création de vecteur y_phase et x_phase en phase
y_phase=[];
x_phase=[];
if i<N % y=x(t-déphasage)
    decal=-abs(i-size(x2,2)-1);
    y_phase=y2(abs(decal):N);
    x_phase=x2;
else % y=x(t+déphasage)
    decal=i-size(x2,2);
    x_phase=x2;
    y_phase=[zeros(1,decal),y2];
end;

% 6) x_phase et y_phase sont mis à la même taille
if size(y_phase,2)>size(x_phase,2)
    y_phase=y_phase(1:size(x_phase,2));
elseif size(y_phase,2)<size(x_phase,2)
    x_phase=x_phase(1:size(y_phase,2));
end;

% 7) Vecteur des instants d'acquisition (échelle de temps relative)
tps_relatif=[0:size(x_phase,2)-1]*dt;

% Bloc Graphiques
figure(1);
subplot(1,2,1);
plot(lag*dt,R,'b');
title('Fonction de corrélation');
xlabel('Décalage temporel (s)');
ylabel('Unité²');
grid;

subplot(1,2,2);
plot(tps_relatif,x_phase,'g',tps_relatif,y_phase,'r');
legend('x','y');
title('Fonctions en phase');
xlabel('Temps (s)');
ylabel('Unité');
grid;

return;

```

Annexe 5

Simulation des données de position de l'article de S. BOGATIN (par J. VERDUN et A. BROUSTE)

Le modèle d'évolution décrit dans l'article de Sonja Bogatin (Evaluation of linear Kalman filter processing geodetic kinematic measurements) est le suivant :

$$d\ddot{x}_t = \sigma b_t dt, \quad t > 0, \quad \sigma > 0, \quad \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \dot{x}_0 \\ x_0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

où b_t est un bruit blanc gaussien : $b_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\mathbb{E}(b_t b_s) = \delta_{t-s}$ pour tous $t, s > 0$.

Le vecteur $X_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \dot{x}_t \\ \ddot{x}_t \end{bmatrix}$ est donc solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dX_t}{dt} = FX_t + W_t, \quad (2)$$

où $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $W_t = \sigma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_t \end{bmatrix}$.

La solution discrétisée de cette équation avec une période d'échantillonnage Δ constante s'écrit pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$X_{k+1} = e^{F\Delta} X_k + \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} e^{F[(k+1)\Delta-s]} W_s ds \quad (3)$$

avec $X_k = X_{(t=k\Delta)}$, $k \in \mathbb{N}$.

La matrice F est nilpotente d'ordre 3 donc :

$$e^{F\Delta} = I_3 + \Delta F + \frac{\Delta^2}{2} F^2 = \begin{bmatrix} 1 & \Delta & \frac{\Delta^2}{2} \\ 0 & 1 & \Delta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \Theta. \quad (4)$$

En posant pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{W}_k = \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} e^{F[(k+1)\Delta-s]} W_s ds, \quad (5)$$

il vient :

$$\mathbb{E}(\tilde{W}_k) = 0_3 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\tilde{W}_k \tilde{W}_l^*) = \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} \int_{l\Delta}^{(l+1)\Delta} e^{F[(k+1)\Delta-s]} \mathbb{E}(W_s W_{s'}^*) e^{F^*[(l+1)\Delta-s']} ds ds'.$$

Avec $\mathbb{E}(W_s W_{s'}^*) = \sigma^2 \mathbb{E} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{s'} \end{bmatrix} \right) = \sigma^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{E}(b_s b_{s'}) \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{s-s'} \end{bmatrix}$, il vient :

$$\mathbb{E}(\tilde{W}_k \tilde{W}_l^*) = \sigma^2 \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} \int_{l\Delta}^{(l+1)\Delta} e^{Fu_k(s)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{s-s'} \end{bmatrix} e^{F^* u_l(s')} ds ds'$$

où l'on a posé pour $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, $u_k(s) = (k+1)\Delta - s$ et $u_l(s') = (l+1)\Delta - s'$.

Pour que $\mathbb{E}(\tilde{W}_k \tilde{W}_l^*)$ soit non nulle, il faut nécessairement que $k = l$. Alors :

$$\mathbb{E}(\tilde{W}_k \tilde{W}_k^*) = \sigma^2 \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} e^{Fu_k(s)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{F^* u_k(s)} ds.$$

Il vient alors successivement :

$$e^{Fu_k(s)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{F^* u_k(s)} = \begin{bmatrix} 1 & u_k & \frac{u_k^2}{2} \\ 0 & 1 & u_k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_k & 1 & 0 \\ \frac{u_k^2}{2} & u_k & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_k^4}{4} & \frac{u_k^3}{2} & \frac{u_k^2}{2} \\ \frac{u_k^3}{2} & u_k^2 & u_k \\ \frac{u_k^2}{2} & u_k & 1 \end{bmatrix}$$

puis, tous calculs faits :

$$\mathbb{E}(\tilde{W}_k \tilde{W}_k^*) = \sigma^2 \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} \begin{bmatrix} \frac{u_k^4}{4} & \frac{u_k^3}{2} & \frac{u_k^2}{2} \\ \frac{u_k^3}{2} & u_k^2 & u_k \\ \frac{u_k^2}{2} & u_k & 1 \end{bmatrix} ds = \sigma^2 \begin{bmatrix} \frac{\Delta^5}{20} & \frac{\Delta^4}{8} & \frac{\Delta^3}{6} \\ \frac{\Delta^4}{8} & \frac{\Delta^3}{3} & \frac{\Delta^2}{2} \\ \frac{\Delta^3}{6} & \frac{\Delta^2}{2} & \Delta \end{bmatrix}.$$

Pour réaliser la simulation d'une famille $(X_k, k \leq n)$, il suffit donc de générer un bruit blanc gaussien $(\varepsilon_k, k \leq n)$, $\varepsilon_k \sim \mathcal{N}(0_3, I_3)$ puis de générer la famille $(X_k, k \leq n)$ à l'aide de la relation de récurrence :

$$X_{k+1} = \Theta X_k + \tilde{\Gamma} \varepsilon_k, 0 \leq k \leq n-1 \quad (6)$$

en fixant :

- X_0 ,
- $\Theta = \begin{bmatrix} 1 & \Delta & \frac{\Delta^2}{2} \\ 0 & 1 & \Delta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

- $\tilde{\Gamma}$ issue de la décomposition de Cholesky de la matrice $\sigma^2 \begin{bmatrix} \frac{\Delta^5}{20} & \frac{\Delta^4}{8} & \frac{\Delta^3}{6} \\ \frac{\Delta^4}{8} & \frac{\Delta^3}{3} & \frac{\Delta^2}{2} \\ \frac{\Delta^3}{6} & \frac{\Delta^2}{2} & \Delta \end{bmatrix}$.

La famille $(x_k, k \leq n)$ est obtenue en prenant toutes les premières composantes des vecteurs X_k .

Fin du document

Annexe 6

Génération de bruits corrélés et leurs impacts sur le filtrage de Kalman

Il est intéressant de comprendre que les bruits ne sont pas forcément indépendants entre eux. En effet, donnons deux exemples :

- lors de mesures GNSS, on trouve des erreurs dues aux propriétés des couches atmosphériques qui vont varier dans le temps et l'espace de façon progressive ;
- lors de mesures tachéométriques, une partie de l'erreur systématique est dite cyclique. On considère donc que les erreurs de cet instrument sont dépendantes.

Génération de bruit corrélé

On peut facilement créer un vecteur gaussien $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$ avec $(\varepsilon_i \perp \varepsilon_j)$ si $i \neq j$. En effet, Matlab© permet cette opération avec la fonction « randn ». Cependant, créer un bruit corrélé est plus complexe.

Dans cette partie est présenté le protocole mis en place dans l'article " Kalman filtre under stationary noise" (BROUSTE, et al., 2012) et que nous avons utilisé pour simuler trois types de bruit corrélé : le bruit autorégressif d'ordre 1 (AR(1)), le bruit à moyenne glissante (moving average ou MA), et le bruit fractionnaire gaussien (fGn). Chacun possède une fonction de covariance propre et est paramétrable. Voici les fonctions d'auto-covariances associées à ces différents bruits (ξ_n est la $n^{\text{ième}}$ variable aléatoire du bruit corrélé) :

- AR(1) : $\mathbb{E}(\xi_m \xi_n) = \rho(|n - m|) = \alpha^{|n-m|}$
- MA : $\mathbb{E}(\xi_m \xi_n) = \rho(|n - m|) = \mathbb{1}_{\{|n-m|=0\}} + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \mathbb{1}_{\{|n-m|=1\}}$
- fGn : $\mathbb{E}(\xi_m \xi_n) = \rho(|n - m|) = \frac{1}{2} (|n - m + 1|^{2H} - 2|n - m|^{2H} + |n - m - 1|^{2H})$

De cette manière, on peut reconstruire les matrices de covariance des différentes suites aléatoires $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$, qui sont de la forme suivante :

$$(26) \quad \Sigma \Sigma^T = \begin{pmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \rho(2) & \cdot & \cdot & \rho(N) \\ \rho(1) & \rho(0) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho(2) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \rho(1) \\ \rho(N) & \cdot & \cdot & \cdot & \rho(1) & \rho(0) \end{pmatrix}$$

On utilise ensuite la décomposition de Cholesky $\Sigma \Sigma^T$ pour déterminer Σ une matrice triangulaire inférieure. Enfin, on peut créer la suite ξ à partir de la formule suivante :

$$(27) \quad \xi = \Sigma \cdot \varepsilon \quad , \text{ avec } \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N) \text{ où } (\varepsilon_i \perp \varepsilon_j) \text{ si } i \neq j$$

Sur les figures 1 à 4, on peut observer : en bleu la fonction d'auto-covariance empirique des différents bruits à modéliser, et en vert la courbe théorique de ces fonctions. L'axe des abscisses est gradué en nombre de période d'échantillonnage Δ .

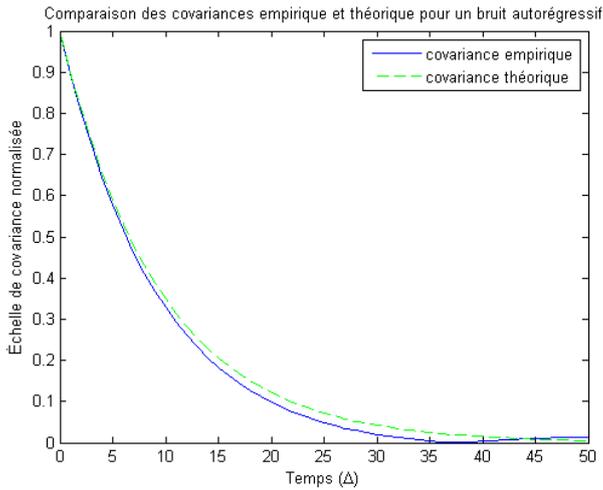


Figure 1 : Auto-covariance d'un bruit AR(1) avec $\alpha=90\%$. En courbe vert on retrouve la courbe théorique, et en courbe bleu la courbe obtenu de façon empirique.

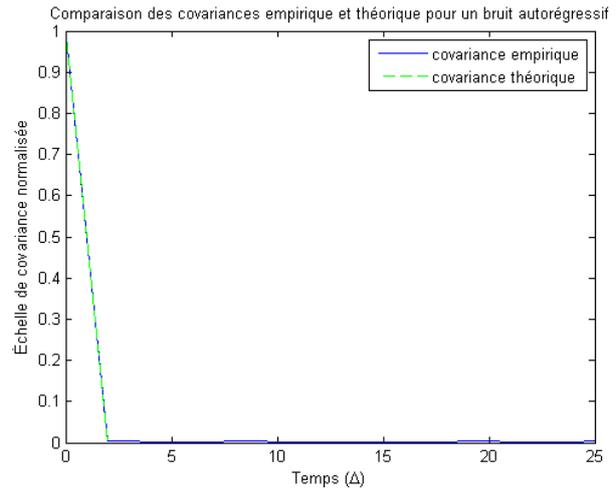


Figure 2 : Auto-covariance d'un bruit MA avec $\alpha=90\%$. En courbe vert on retrouve la courbe théorique, et en courbe bleu la courbe obtenu de façon empirique.

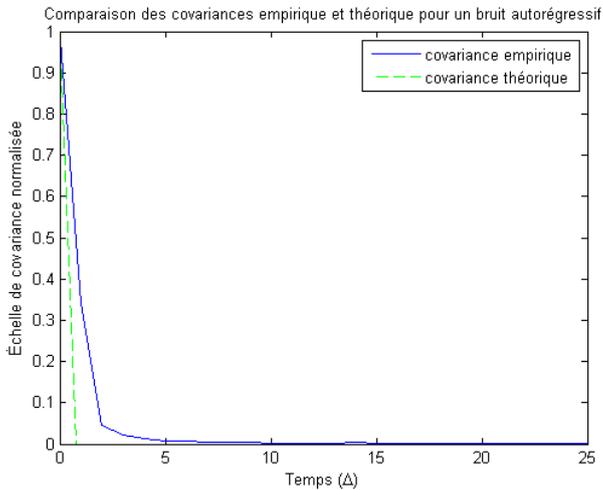


Figure 3 : Auto-covariance d'un bruit fGn avec $H=0.2$. En courbe vert on retrouve la courbe théorique, et en courbe bleu la courbe obtenu de façon empirique.

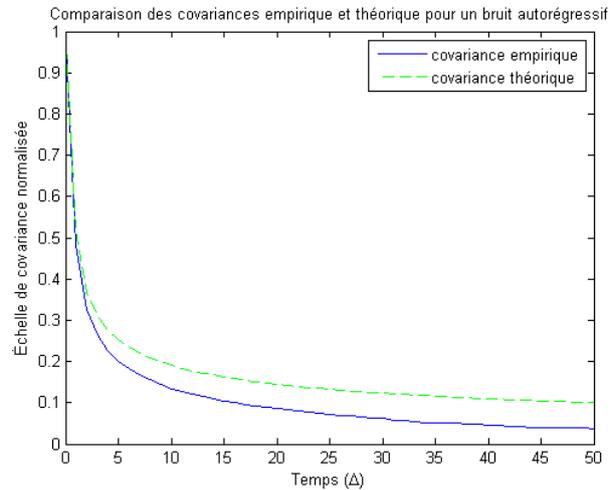


Figure 4 : Auto-covariance d'un bruit fGn avec $H=0.8$. En courbe vert on retrouve la courbe théorique, et en courbe bleu la courbe obtenu de façon empirique.

Effet d'un bruit corrélé sur l'estimation du filtre de Kalman

Le filtre de Kalman ne considère que des bruits blancs indépendants. Nous allons présenter ici l'impact d'un bruit corrélé sur l'estimateur de Kalman. Voici deux graphiques qui répondent à cet objectif, la figure 5 présente un problème où les bruits (de modèle et de mesures) sont blancs indépendants, et la figure 6 un autre où les bruits sont corrélés (AR(1) avec $\alpha=90\%$) :

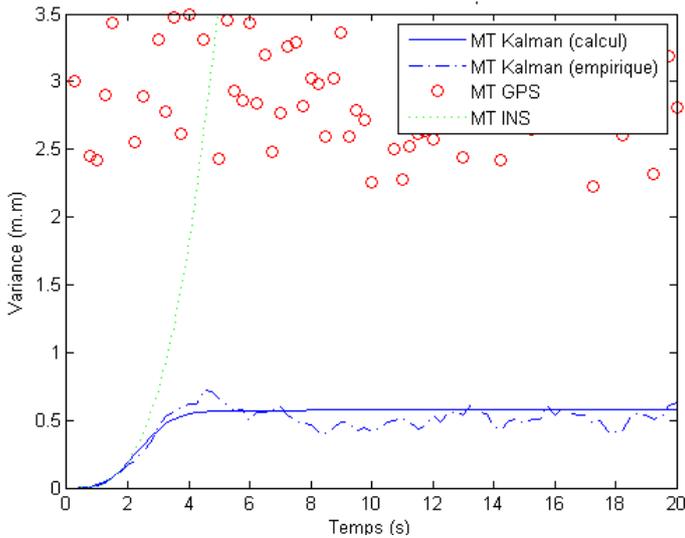


Figure 5 : Variance vraie des estimateurs de la position. On trouve les variances des observations GNSS (cercles rouges), celles issues des données de l'INS (en vert), les variances empiriques des estimateurs de Kalman (en courbe bleu discontinue), et la courbe de variance théorique de l'estimateur de Kalman (en courbe bleu continue). La variance empirique de l'estimateur de Kalman et celle des mesures GNSS sont obtenues en application de la méthode de Monte-Carlo sur notre protocole (simulation de 100 bruits GNSS différents). Tous les bruits utilisés pour cette simulation sont des bruits blancs gaussiens.

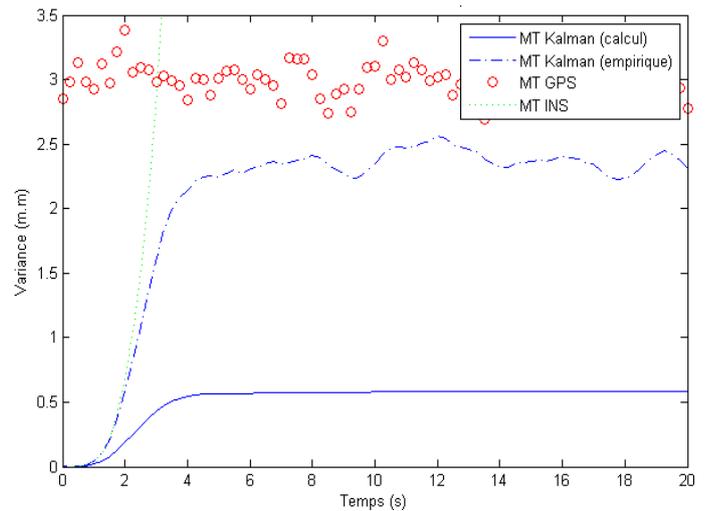


Figure 6 : Variance vraie des estimateurs de la position. On trouve les variances des observations GNSS (cercles rouges), celles issues des données de l'INS (en vert), les variances empiriques des estimateurs de Kalman (en courbe bleu discontinue), et la courbe de variance théorique de l'estimateur de Kalman (en courbe bleu continue). La variance empirique de l'estimateur de Kalman et celle des mesures GNSS sont obtenues en application de la méthode de Monte-Carlo sur notre protocole (simulation de 100 bruits GNSS différents). Tous les bruits utilisés pour cette simulation suivent des processus autorégressif d'ordre 1 avec $\alpha=90\%$.

Ce qu'il faut retenir de ces deux graphiques, c'est que la variance empirique et la variance théorique renvoyée par le filtre de Kalman, deviennent distinctes si nous avons des bruits corrélés. Ce qui prouve que l'estimateur de Kalman devient moins adapté au problème de filtrage avec bruits corrélés.

Diverses solutions sont possibles pour utiliser le principe du filtre de Kalman dans ce genre de situation. Cependant, la majorité de ces traitements demandent énormément de calculs. Lors de ce projet de fin d'étude, A. BROUSTE nous avait proposé de mettre en place un protocole qu'il a présenté dans son article « Kalman filtre under stationary noise » (2012). Cependant, faute de temps, ce dernier n'aura pas pu être testé lors de mon TFE.

Annexe 7

Programme Matlab© de génération de bruits corrélés

```

% =====
% Fonction qui génère des bruits corrélés suivant un processus
% autorégressif d'ordre 1 (AR1) ou de moyenne glissante (MA) ou fractionnaire
% gaussien (fGn), et affiche la corrélation du bruit créé avec la
% corrélation théorique d'un bruit de ce type
%
% Entrées:
% n       : taille du vecteur aléatoire à simuler
% param   : paramètre du processus
% type    : prend la valeur 'AR1', 'MA' ou 'fGn'
%
% Sortie:
% cov_theo : Matrice de covariance théorique
% bruit_corr: vecteur aléatoire dont les éléments sont corrélés
%
% =====
function[cov_theo,bruit_corr]=bruit_corr(n,param,type)

cov_theo=[];
cov_emp=zeros(1,2*n-1);

% Création de la matrice de covariance du bruit
switch type
    case 'AR1'
        for i=1:(2*n-1)
            cov_theo(i)=param^(abs(n-i));
        end;
    case 'MA'
        for i=1:(2*n-1) %Vecteur auto-covariance théorique
            if i==n
                cov_theo(i)=1;
            elseif (i==n-1 | i==n+1)
                cov_theo(i)=param/(1+param^(2));
            else
                cov_theo(i)=0;
            end;
        end;
    case 'fGn'
        for i=1:(2*n-1)
            cov_theo(i)=1/2*(abs(i-n+1)^(2*param)+...
                abs(i-n-1)^(2*param)-2*abs(i-n)^(2*param));
        end;
    otherwise
        'La variable "type" doit être égale à "AR1", "MA" ou "fGn"'
end;

Mu=[];
for i=1:n
    for j=1:n
        if j>i
            Mu(i,j)=0;
        else
            Mu(i,j)=cov_theo(abs(i-j)+n);
        end
    end
end

```

```

        end;
    end;
end;

% Création d'un bruit corrélé
MT=1000; %coefficient Monté Carlo
GAMMA = chol(Mu, 'lower');
for i=1:MT
    bruit_corr=(GAMMA*randn(1,n)')'; %Création d'un bruit blanc
    cov_emp=cov_emp+xcov(bruit_corr); %Vecteur auto-covariance
end;

cov_emp=cov_emp./max(cov_emp); %Normalisation

% =====Bloc graphiques=====
plot([1:(2*n-1)]-ones(1,2*n-1)*n,abs(cov_emp),'b-',...
     [1:(2*n-1)]-ones(1,2*n-1)*n,cov_theo,'g--');
axis([0,50,0,1]);
legend('covariance empirique','covariance théorique');
title('Comparaison des corrélations du bruit généré');
xlabel('Temps (\Delta)');
ylabel('Échelle de covariance normalisée');
return;

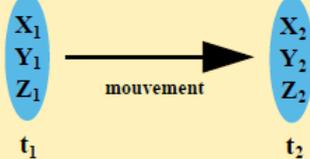
```

Annexe 8
Poster de TFE

Tournez la page, s'il vous plaît.

Positionnement dynamique :

Cette science cherche à déterminer la trajectoire d'un mobile.



Utilité du positionnement dynamique pour le géomètre :

- **Cartographie mobile :** Lors de ce type d'activité, on doit estimer la trajectoire de la plateforme d'acquisition pour déterminer la position de l'élément étudié.
- **Auscultation :** Lors d'un travail d'auscultation, on évalue les mouvements d'ouvrage d'art, ou d'autres éléments qui subissent des déformations.



L'intérêt du filtrage de Kalman pour le positionnement dynamique :

Le positionnement d'un système est dynamique, il ne permet pas une grande redondance de mesure. Le filtrage de Kalman propose une alternative pour compenser ce manque.

En effet, le filtrage de Kalman va permettre de déterminer la trajectoire d'un système dynamique en utilisant les observations réalisées sur le système et, en plus, un modèle d'évolution associé au mouvement. Cette méthode va améliorer la précision de notre estimation de la position.

Lors de cette étude, nous avons donc cherché à évaluer l'apport d'un traitement par filtrage de Kalman pour la cartographie mobile et l'auscultation.

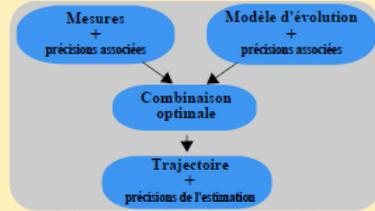


Schéma de principe de l'estimation par filtrage de Kalman

Apport du filtrage de Kalman pour la cartographie mobile

Lors de travaux de cartographie mobile, on utilise couramment un système de navigation embarqué GNSS/INS (Inertial Navigation System ou centrale inertielle). La fusion des mesures inertielles et GNSS se fait par filtrage de Kalman.

Protocole de test

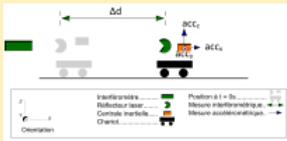
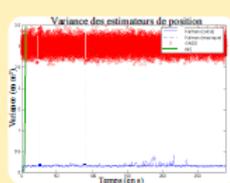


Schéma de principe du protocole avec système de navigation GNSS/INS

Photo du dispositif du protocole avec système de navigation GNSS/INS

Trajectoire étudiée : Mouvement 1D du chariot interférométrique
Instruments de mesure :
 Centrale inertielle ► accélération du chariot
 Interféromètre ► trajectoire de référence qui une fois bruitée simule le GNSS

Résultat :



L'estimateur de position de l'INS a une variance faible sur les premières secondes puis augmente exponentiellement. On dit que cet estimateur dérive.
 La mesure GNSS a une variance de 3 m². Sa valeur est stable donc cet estimateur ne dérive pas.
 L'estimateur Kalman a une variance inférieure à 0,4 m² et sa valeur est stable (pas de dérive).

Apport du filtrage de Kalman pour l'auscultation

Lors de travaux d'auscultation, on utilise couramment un tachéomètre. Le but de notre étude est de voir si la combinaison de mesures tachéométriques avec un modèle d'évolution va améliorer l'estimation de la trajectoire.

Protocole de test

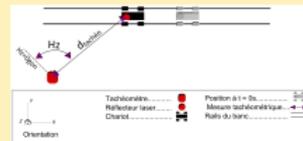
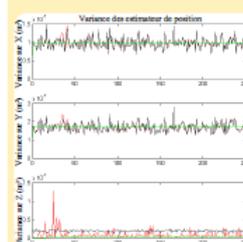


Schéma de principe du dispositif du protocole d'auscultation

Photo du dispositif du protocole d'auscultation

Trajectoire étudiée : Mouvement 3D du chariot interférométrique
Instruments de mesure :
 Tachéomètre ► trajectoire de référence qui une fois bruitée simule la mesure tachéométrique sur laquelle on applique le filtrage de Kalman

Résultat :



Le mouvement que nous avons observé, a une amplitude de 20 cm sur X, Y et de 2 mm en Z.
 On constate que pour les coordonnées X et Y la variance de l'estimateur de Kalman est identique à la variance du tachéomètre.
 Pour l'estimation de Z la variance de l'estimateur de Kalman est plus faible (à l'exception de quelques pics liés à des variations brutales d'accélération). L'apport du filtrage est donc prouvé.

Perspectives

Nous avons constaté que le modèle d'évolution mis en place dans le protocole d'auscultation n'était pas adapté aux variations d'accélération brusques et aux mouvements de grandes amplitudes. Il serait intéressant de tester l'efficacité d'autres modèles d'évolution, voir de proposer une mesure hybride (ex : tachéomètre/INS ou tachéomètre/GNSS).

Le filtrage de Kalman ne considère que des bruits blancs gaussiens par conséquent non-corrélés. Cependant, l'erreur cyclique du tachéomètre ou les erreurs des mesures GNSS, sont corrélées. L'utilisation d'un filtrage de Kalman "à longue mémoire" qui considère la corrélation dans les bruits de mesures, pourrait permettre de mieux modéliser les observations et obtenir des estimateurs plus précis.

Conclusion

Lors de notre protocole avec système GNSS/INS, nous avons pu constater que le filtrage de Kalman estime la position avec une meilleure précision que le capteur GNSS, de plus, l'estimateur de Kalman ne subit pas la dérive de l'INS.

Concernant l'expérience d'auscultation, notre étude a montré que l'utilisation du filtrage de Kalman permet d'obtenir d'aussi bonnes précisions, voir meilleures dans le cas où notre modèle d'évolution est adapté au mouvement observé ou/et dans le cas où les mesures se dégradent au cours du temps.

Enfin, lors de notre étude nous avons mis en place une méthode de calibration inédite pour les paramètres de précision de nos modèles d'évolution. Cette méthode se base sur l'estimation par maximum de vraisemblance.

Remerciements :

A. BROUSTE, J. CALI, F. DURAND, S. DURAND, L. MOREL, C. ROUSSEL et J. VERDUN

Bibliographie :

- BLOM, Innes. 2010. Continuous Time Finance Lecture 5 Stochastic Integrals. studentweb. [En ligne] 2010. [Citation : 11 02 2014]. <https://studentweb.ma.ac/ConseWeb/ConseWeb/Public/IN2401/10251.pdf>
- BOKJA TIN, Soja, et al. 2008. Evaluation of linear Kalman filter processing geodetic kinematic measurements. 2008, Vol. 41, 561-578, p. 18.
- BROUSTE, Alexandre et KLEPESZYNA, Marcin. 2012. Kalman filter under stationary noise. 2012, Vol. 61, 1229-1234, p. 4.
- BROUSTE, Alexandre. 4 pages. GPS aided MEMS inertial navigation systems with colored noise. Le Mans : s.n., 4 pages.
- JIZKEI, Christopher. 2001. Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications. Berlin ; New York : de Gruyter, 2001. ISBN 3-11-015903-1.
- PIANK, Thibaut et BOURDAGES, Jean-Pierre. 2012. Statistiques et problèmes de statistique et probabilités (2e ed.). Paris : Dunod, 2012. ISBN 978-2-10-056298-5.
- PIETTE, Ferdinand. 2011. Dossier : Le filtre de Kalman. fordinandpiette.com [En ligne] 2011. [Citation : 10 03 2014]. <http://www.fordinandpiette.com/blog/le-dossier-dossier-le-filtre-de-kalman/>
- SIMU systems. 2013. 30-600. [En ligne] 2013. [Citation : 01 03 2014]. <http://www.simu-systems.com/ceo/30-6000-Landlet.pdf>

Auteur : Guillaume CHAUVEAU

Travail de fin d'études soutenu le 10 juillet 2014 au Mans

Liste des figures

Figure 1 : Travail d'auscultation sur le pont Adolphe Luxembourg (source : btmed.lu)	5
Figure 2 : Système de scan 3D mobile de la chaussée (source : gizmag.com).....	5
Figure 3 : Acquisition de photographies aériennes par drone (source : aero-drone.fr)	5
Figure 4 : Schéma de l'algorithme du filtre de Kalman. Le vecteur à estimer est appelé vecteur d'état. Il est noté X et sa valeur évolue au cours du temps. On mesure les valeurs des paramètres de X à différents instants, et on fixe parallèlement un modèle d'évolution qui prédit les variations de ce vecteur d'état. En fixant a priori la valeur de l'estimation de Kalman à l'instant initial et sa précision, respectivement notées πX_0 et γXX_0 (étape 1 du schéma), on prédit la valeur de X à l'instant suivant (étape 2 du schéma). Cette estimation est notée πX_1 avec γXX_1 sa matrice de covariance. Puis, on combine de façon optimale πX_1 avec les mesures correspondantes, pour obtenir l'estimateur de Kalman πX_1 et sa covariance γXX_1 (étape 3 du schéma). On peut parler de combinaison optimale car l'estimation considère la précision de πX_1 , de l'observation (notée Y_1), au travers de γXX_1 et de la matrice de covariance sur le vecteur d'observations (noté ΣY). Enfin, on réapplique successivement les étapes de prédiction puis de correction pour chaque instant de mesure.	8
Figure 5 : Repère de la centrale inertielle.....	12
Figure 6 : Schéma du protocole avec système GNSS/INS. Le chariot en mouvement est observé par un interféromètre qui renvoie son déplacement 1D (Δd), et par une centrale inertielle qui donne son accélération en 3D ($accx, accy, accz$).	13
Figure 7 : Vue du dispositif mis en place pour le protocole de positionnement avec système GNSS/INS, avec le chariot mobile (à gauche) et l'émetteur-récepteur interférométrique (à droite).	13
Figure 8 : Écart-types sur la position 1D en fonction du temps. On retrouve la mesure GNSS (courbe rouge pointillée), l'estimateur de l'INS (courbe verte), et l'estimateur de Kalman (courbe bleu pointillée).....	14
Figure 9 : Schéma de la vue du dessus du protocole d'auscultation. Le mouvement du chariot est relevé par mesures tachéométriques. La position du chariot est donc connue à chaque instant dans le repère local du tachéomètre.....	16
Figure 10 : Photographie du dispositif mis en place pour le protocole d'auscultation, avec le chariot équipé d'un prisme (à gauche) et le tachéomètre S8 de Trimble© (à droite).....	16
Figure 11 : Positions 1D en fonction du temps. La position réelle (courbe pointillée noire), l'estimateur de Kalman sur la position (en magenta), sa moyenne (en bleu), et l'estimateur de la position à partir des données de l'INS (en vert). La moyenne de l'estimateur de Kalman est obtenue en application de la méthode de Monte-Carlo sur notre protocole (réalisation de 100 simulations).....	33
Figure 12 : Variance vraie des estimateurs de la position. On trouve les variances de chaque mesure GNSS (en cercles rouges), celles issues des données de l'INS (en vert), les variances empiriques des estimateurs de Kalman (en courbe bleue discontinue), et la courbe de variance théorique de l'estimateur de Kalman (en courbe bleue continue). Toutes les variances sont obtenues en application de la méthode de Monte-Carlo sur notre protocole (réalisation de 100 simulations).	33
Figure 13 : Coordonnée X du mobile en fonction du temps ($\Delta = 1s$). On observe la trajectoire de référence (courbe verte), l'estimation issue des observations tachéométriques bruitées (courbe noire), et l'estimateur de Kalman (courbe rouge).....	35
Figure 14 : Variances des estimateurs de X en fonction du temps ($\Delta = 1s$), avec en rouge l'estimateur de Kalman, en vert la variance théorique de celui-ci et en noir l'estimation à partir des données tachéométriques bruitées. Toutes les variances sont obtenues en application de la méthode de Monte-Carlo sur notre protocole (réalisation de 100 simulations).....	35
Figure 15 : Variance sur la position en fonction du temps ($e=3$ et $\Delta=1s$), avec en rouge l'estimateur de Kalman, en vert la variance théorique de celui-ci et en noir l'estimation à partir des données tachéométriques bruitées. Toutes les variances sont obtenues en application de la méthode de Monte-Carlo sur notre protocole (réalisation de 100 simulations).....	35
Figure 16 : Positions 1D en fonction du temps. La position réelle (courbe en pointillés noirs), l'estimateur de Kalman sur la position (en magenta), sa moyenne (en bleu), et l'estimateur de la position à partir des données de l'INS (en vert). La moyenne de l'estimateur de Kalman est obtenue en application de la méthode de Monte-Carlo sur notre protocole (simulation de 100 bruits GNSS différents).	37

Figure 17 : Variance vraie des estimateurs de la position. On trouve les variances issues des données de l'INS (en vert), les variances empiriques des estimateurs de Kalman (courbe bleue discontinue), et la courbe de variance théorique de l'estimateur de Kalman (courbe bleue continue). La variance empirique de l'estimateur de Kalman est obtenue en application de la méthode de Monte-Carlo sur notre protocole (simulation de 100 bruits GNSS différents). 37

Figure 18 : Positions 1D en fonction du temps. La position réelle (courbe pointillés noirs), l'estimateur de Kalman sur la position (en magenta), sa moyenne (en bleu), et l'estimateur de la position à partir des données de l'INS (en vert). La moyenne de l'estimateur de Kalman est obtenue en application de la méthode de Monte-Carlo sur notre protocole (simulation de 100 bruits GNSS différents). 39

Figure 19 : Variance vraie des estimateurs de la position. On trouve les variances des observations GNSS (cercles rouges), celles issues des données de l'INS (en vert), les variances empiriques des estimateurs de Kalman (courbe bleue discontinue), et la courbe de variance théorique de l'estimateur de Kalman (courbe bleue continue). La variance empirique de l'estimateur de Kalman et celle des mesures GNSS sont obtenues en application de la méthode de Monte-Carlo sur notre protocole (simulation de 100 bruits GNSS différents). 39

Figure 20 : Position 3D en fonction du temps ($\Delta= 1s$) lors du 1^{er} test. Sont présentés les positions réelles du chariot (courbes vertes), les estimateurs de Kalman (en courbe rouge), et les mesures tachéométriques bruitées (courbes noires). 41

Figure 21 : Variance des estimateurs de la position en 3D en fonction du temps ($\Delta= 1s$) lors du 1^{er} test. On retrouve la variance empirique de l'estimateur de Kalman (courbes rouges), sa variance théorique (courbes vertes) et la variance de la mesure tachéométrique bruitée (courbes noires). On obtient ces courbes en application de la méthode de Monte-Carlo en répétant 100 fois le traitement des données tachéométriques dont le terme de bruit est stochastique. 41

Figure 22 : Variance des estimateurs de la position en 3D en fonction du temps ($\Delta= 1s$) lors du 2nd test. On retrouve la variance empirique de l'estimateur de Kalman (courbes rouges), sa variance théorique (courbes vertes) et la variance de la mesure tachéométrique bruitée (courbes noires). On obtient ces courbes en application de la méthode de Monte-Carlo en répétant 100 fois le traitement des données tachéométriques dont le terme de bruit est stochastique. 42

Figure 23 : Variance des estimateurs de la position en 3D en fonction du temps ($\Delta= 1s$) lors du 3^e test. On retrouve la variance empirique de l'estimateur de Kalman (courbes rouges), sa variance théorique (courbes vertes) et la variance de la mesure tachéométrique bruitée (courbes noires). On obtient ces courbes en application de la méthode de Monte-Carlo en répétant 100 fois le traitement des données tachéométriques dont le terme de bruit est stochastique. 43

Liste des tableaux

Tableau 1 : Précision du Trimble© S8.	15
Tableau 2 : Résultats de la calibration sur cent simulations (bais égal à une constante aléatoire).....	27
Tableau 3 : Résultats de la calibration sur cent simulations (biais ~ AR(1))	27
Tableau 4 : Résultats de la calibration sur cent simulations (biais ~ AR(4))	28
Tableau 5 : Calibration des paramètres du modèle d'évolution. C.A. est l'abréviation pour : « constante aléatoire ».	28
Tableau 6 : Résultat de la calibration sur 1000 simulations.	30
Tableau 7 : Calibration des paramètres de modèle.....	37
Tableau 8 : Calibration des paramètres de modèle.....	39
Tableau 9 : Valeurs des paramètres du modèle d'évolution obtenus par calibration lors du 1 ^{er} test.	41
Tableau 10 : Valeurs des paramètres du modèle d'évolution obtenus par calibration lors du 2 nd test.....	42
Tableau 11 : Valeurs des paramètres du modèle d'évolution obtenus par calibration lors du 3 ^e test.	43

Apport du filtrage de Kalman à l'auscultation et au système de positionnement embarqué.

Mémoire d'Ingénieur C.N.A.M., Le Mans 2014

RESUME

L'intérêt du positionnement dynamique pour le géomètre est aujourd'hui indéniable. En effet, les travaux d'auscultation, et de cartographie mobile (lasergrammetrie, photogrammétrie,...), font appel à l'estimation des paramètres cinématiques d'un porteur en mouvement.

Le filtrage de Kalman est un outil qui permet l'estimation de paramètres variables au cours du temps à partir d'un modèle d'évolution et d'observations. Ce traitement est parfaitement adapté au positionnement dynamique.

Ce travail de fin d'études a pour objectif de montrer l'apport de ce filtrage pour le positionnement dynamique au travers d'une expérience avec un système de navigation hybride GNSS / capteur inertiel (système courant dans le domaine de la cartographie mobile), et d'une expérience d'auscultation par tachéométrie.

Mots clés : Kalman, centrale inertielle, auscultation, calibration, bruits corrélés.

SUMMARY

Nowadays, dynamic positioning is of a great value for land surveyor. In fact, monitoring surveys and mobile land surveying system (laser scanner, photogrammetry, etc) used to estimate kinematics parameters of dynamics elements.

The Kalman filter is a data processing algorithm that estimates unknown dynamics parameters with the help of a process model, and measurements. This processing is well-suited for kinematic positioning.

The purpose of this study is to demonstrate the benefits of Kalman filtering algorithm to the kinematic positioning thanks to an experience with a hybrid GNSS-inertial navigation system, and an experience of monitoring survey with electronic tacheometer.

Key words : Kalman, inertial navigation system, monitoring surveys, calibration, correlated noises.