



HAL
open science

L'espace et la géométrie à l'école primaire : comment enseigner la géométrie dans l'espace à l'école primaire ?

Anne Dersoir

► **To cite this version:**

Anne Dersoir. L'espace et la géométrie à l'école primaire : comment enseigner la géométrie dans l'espace à l'école primaire?. Education. 2015. dumas-01271401

HAL Id: dumas-01271401

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01271401>

Submitted on 9 Feb 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



L'espace et la géométrie à l'école primaire

Comment enseigner la géométrie dans
l'espace à l'école primaire ?

Mémoire du Master 2 Métiers de l'Enseignement de
l'Éducation et de la Formation

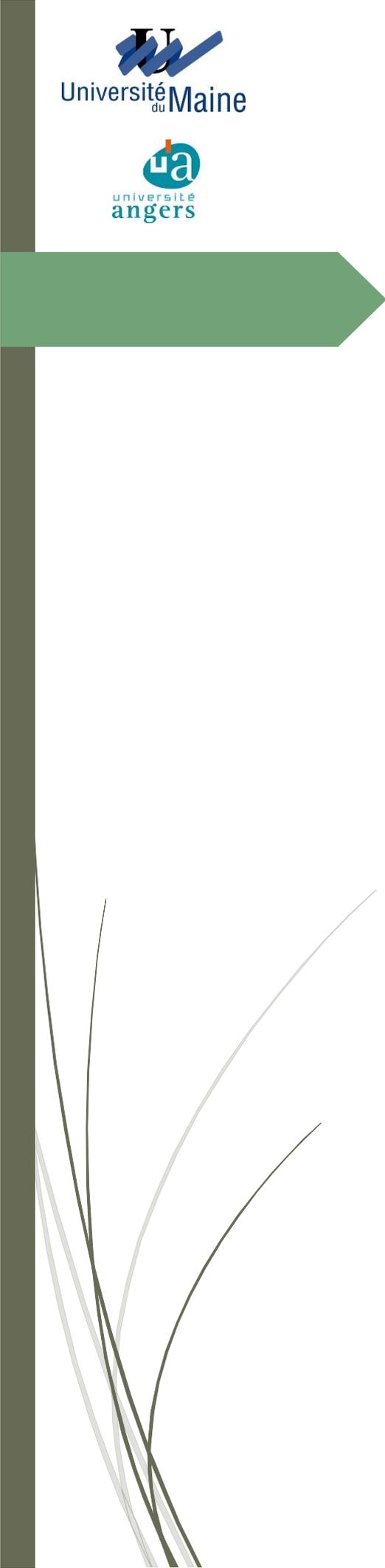
Spécialité Enseignement du Premier Degré

Par **Anne Dersoir**

Sous la direction de **Paul-Henri Delhumeau**

Présenté et soutenu le **29 mai 2015**

2014 – 2015





ENGAGEMENT DE NON PLAGIAT

Je, soussignée, déclare être pleinement consciente que le plagiat de documents ou d'une partie d'un document publiés sur toutes formes de support, y compris l'internet, constitue une violation des droits d'auteur ainsi qu'une fraude caractérisée. En conséquence, je m'engage à citer toutes les sources que j'ai utilisées pour écrire ce rapport ou mémoire.

Signature :

TABLE DES MATIERES

| | |
|---|----|
| Remerciements..... | 4 |
| Introduction..... | 5 |
| A- Cadre théorique : L'enseignement de la géométrie | 7 |
| 1- Définition du thème | 7 |
| 2- L'organisation spatiale | 8 |
| Les représentations spatiales selon Piaget, l'organisation spatiale | 8 |
| Les trois conceptions de l'espace selon Brousseau..... | 10 |
| 3- Les connaissances spatiale et les connaissances géométriques dans les programmes | 11 |
| L'espace..... | 11 |
| La géométrie..... | 11 |
| 4- Connaissances spatiales et connaissances géométriques. Quelles différences ? Quelles relations ?..... | 13 |
| Les différences | 13 |
| Les relations entre les connaissances spatiales et les connaissances géométriques..... | 14 |
| Les connaissances nécessaires à l'enseignement de la géométrie | 14 |
| Conclusion..... | 16 |
| B- Partie pratique : Enseigner la géométrie dans l'espace..... | 17 |
| 1- Les programmes..... | 18 |
| Les programmes de l'école primaire de 1923 à 2008..... | 18 |
| La perspective dans les programmes du collège..... | 22 |
| 2- L'étude des manuels de l'école élémentaire (du CP au CM2) | 24 |
| Etude du manuel Cap' Maths | 24 |
| Etude du manuel Pour comprendre les mathématiques..... | 33 |
| Conclusion..... | 42 |
| 3- L'expérimentation en classe de la situation d'apprentissage « Le solide caché »..... | 44 |
| La description des solides..... | 44 |
| La représentation des solides par le dessin..... | 47 |
| Transcription de l'enregistrement..... | 48 |
| 4- Utilisation de la situation « Le solide caché » pour construire une séquence autour des solides en cycle 3 | |
| 52 | |
| Acte 1 : Décrire un solide et reconnaître un solide à partir d'une description..... | 52 |

| | |
|--------------------------------------|----|
| Acte 2 : représenter un solide | 54 |
| Des activités en plus | 60 |
| Conclusion | 62 |
| Sources | 64 |
| Annexes..... | 66 |

REMERCIEMENTS

Je remercie Mr Paul-Henri Delhumeau de son suivi durant ces deux dernières années afin d'amener ce travail à son terme. Ses conseils, ses aides et ses retours m'ont permis d'avancer malgré les difficultés que j'ai pu rencontrer.

Je remercie les élèves de CM1-CM2 de l'école Les Salamandres d'Ecuillé (49) qui ont fait preuve d'intérêt durant les différentes séances que j'ai pu faire avec eux et en particulier durant la situation « Le solide caché ».

Je remercie Mr Blond, formateur ESPE, et Mme Mondelot, PEMF, pour leurs précieux conseils dans la construction et la réalisation de certaines séances ainsi que dans le choix des ouvrages et outils intéressants en classe.

Enfin, je tiens à remercier ma camarade Constance Derommelaere qui a toujours montré un réel intérêt pour mon travail et qui m'a fait avancer durant toutes mes études universitaires.

INTRODUCTION

Les mathématiques et leur enseignement m'intéressent particulièrement puisqu'ils ont fait l'objet de mes études supérieures et qu'ils sont une part importante de l'enseignement à l'école primaire. J'ai choisi, dans un premier temps, de me focaliser sur l'enseignement de la géométrie puisque mes différents stages m'ont amené à me poser des questions quant à sa didactique et ses différentes caractéristiques. Suite à différentes lectures, j'ai choisi de m'intéresser précisément à l'enseignement de la géométrie dans l'espace puisque ce sujet est parfois controversé comme le montrent R. Berthelot et M.H. Salin dans différents articles. En effet, ils cherchent à rappeler que la géométrie fait appel à deux champs de connaissances : la structuration de l'espace et la géométrie proprement dite. Or, selon eux, les compétences spatiales sont lésées au profit des compétences propres à la géométrie : vocabulaire, définitions, etc.

Cela m'a conduit à me demander comment enseigner la géométrie dans l'espace en prenant en compte les compétences spatiales. Cette problématique m'a paru pertinente puisque l'enseignement des mathématiques et en particulier de la géométrie pose problème à de nombreux enseignants et en particulier aux enseignants débutants. Or, de nombreux enseignants débutants se voient contraints de dispenser cet enseignement du fait de leur service partagé. De plus, la géométrie dans l'espace amène des difficultés supplémentaires de par sa particularité : elle fait appel aux compétences spatiales et aux compétences liées à la géométrie.

L'objectif de mon travail était donc de déterminer les compétences spatiales et de les engager dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace et en particulier dans une séquence autour des solides. Pour parvenir à cet objectif un important travail bibliographique a dû être réalisé et ce mémoire doit beaucoup aux enseignements de René Berthelot et Marie Hélène Salin dans "L'enseignement de la géométrie à l'Ecole primaire" ainsi qu'à l'équipe ERMEL de recherche en didactique des mathématiques (INRP) dans « Apprentissages géométriques et résolution de problèmes ». Toutefois, une telle étude exigeait également d'autres analyses, comme une étude des programmes de l'école primaire et du collège et l'expérimentation d'une situation en classe. L'exploitation de ces sources devait permettre de répondre à une série d'interrogations inhérentes au sujet : quelle est la place des compétences spatiales dans les programmes ? Comment la géométrie dans l'espace est-elle appréhendée dans les supports pédagogiques et en particulier dans les manuels ? Comment construire un module

d'apprentissage autour des solides ? Ce mémoire tend ainsi à démontrer que pour permettre aux élèves d'appréhender la géométrie dans l'espace correctement il faut avoir conscience des différentes compétences mises en œuvre et construire un module d'apprentissage qui les prend en compte. De nombreux ouvrages et enseignants dispensent la géométrie dans l'espace sans prendre en compte une partie de ses compétences : les compétences spatiales. Or ces compétences doivent être travaillées puisqu'elles sont essentielles aux élèves et parce qu'elles peuvent constituer un réel obstacle pour les élèves dans l'apprentissage des solides.

Une première partie tend à définir la géométrie, l'espace, leurs similitudes, leurs différences ainsi que leurs caractéristiques.

Une deuxième partie a pour objectif de construire un module d'apprentissage autour des solides. Ce travail est découpé en différentes étapes. Tout d'abord, un premier item est consacré à l'enseignement de la géométrie dans l'espace dans les programmes, où l'on observe, dans un premier temps, que l'enseignement de la géométrie perd de son importance au fur et à mesure des années et, dans un second temps, que les compétences spatiales et en particulier les compétences liées à la représentation spatiale des éléments disparaît peu à peu des programmes de l'école élémentaire pour arriver dans les programmes de 6ème. Une étude de deux manuels cherche ensuite à montrer que la géométrie dans l'espace peut être traitée de manière très différente en fonction du choix qui est fait : travailler les compétences spatiales en plus des compétences liées à la géométrie ou considérer les compétences spatiales acquises pour tous. Un troisième item permet de mettre en évidence les capacités d'un élève de cycle 3 à décrire et à représenter un solide grâce à la situation « le solide caché ». Cette stratégie permet également de connaître les stratégies mises en place pour les élèves pour reconnaître un solide. C'est finalement grâce à ces différents travaux qu'un scénario pédagogique autour des solides est présenté dans un quatrième et dernier item.

A- CADRE THEORIQUE : L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

1- DEFINITION DU THEME

La géométrie se définit comme la science des figures de l'espace selon Euclide ou comme l'étude des invariants d'un groupe de transformations de l'espace pour Klein. Dans ces deux définitions intervient la notion d'espace.

L'espace est un mot polysémique qui peut désigner un milieu situé au-delà de l'atmosphère terrestre, une distance entre deux lignes d'une portée, etc. Ici, on définira l'espace comme une étendue, une surface, une région. En géométrie, l'espace est défini comme l'ensemble des points dont la position est définie par trois coordonnées.

Dans les programmes, l'espace et la géométrie restent deux champs disciplinaires bien distincts. D'un côté, les compétences relatives à l'espace se retrouvent dans le domaine "Découvrir le monde" durant les deux premiers cycles de l'école primaire. De l'autre côté, les compétences relatives à la géométrie se retrouvent dans le domaine "Mathématiques" durant les deux derniers cycles de l'école primaire.

On pourrait alors imaginer que ces deux champs sont complètement distincts. Or comme l'indique un extrait des instructions du 15 mai 1985 relatives à l'enseignement de la géométrie à l'école : "les activités géométriques doivent concourir au même titre que d'autres, à la construction de l'espace chez l'enfant".

En effet, l'enseignement de la géométrie à l'école renvoie à deux champs de connaissances : les connaissances liées à la construction de l'espace et les connaissances géométriques. Il y a donc un lien entre les connaissances géométriques et les connaissances spatiales. Ce lien se retrouve sous ce qu'on appelle "l'enseignement de la géométrie". Seulement, il paraît difficile de différencier ce qui relève des connaissances spatiales de ce qui relève des connaissances géométriques.

La géométrie est en relation avec l'espace mais pouvons-nous alors assimiler connaissances spatiales et connaissances géométriques ?

2- L'ORGANISATION SPATIALE

LES REPRESENTATIONS SPATIALES SELON PIAGET, L'ORGANISATION SPATIALE

Les capacités qui témoignent d'une organisation spatiale sont, selon Rigal Robert, les suivantes :

- Se situer dans l'espace en déterminant la position que l'on occupe par rapport à des repères ;
- Ordonner correctement les différents éléments d'un tout ;
- Apprécier les rapports existants entre moi, une autre personne et les objets, d'un point de vue topologique, projectif et euclidien ;
- Intégrer simultanément les différentes parties d'un modèle."

Il existe des rapports entre les objets qui sont répertoriés en trois types de rapports spatiaux :

- *Les rapports topologiques.* Ces rapports définissent les relations qualitatives entre les objets (voisinage, entourage, séparation, ordre, continuité). On note alors une grande importance du langage et d'un vocabulaire précis : au milieu, au-dessus, en-dessous, sur, à côté, sous, à l'intérieur, à l'extérieur, etc. Ce sont les premières relations auxquelles l'enfant est sensible.
- *Les rapports projectifs.* L'enfant acquiert la perspective et peut utiliser les points de vue d'autrui.
- *Les rapports métriques ou euclidiens.* L'enfant est capable d'utiliser des systèmes de coordonnées, des systèmes de mesure, des plans, etc.

Si l'on suit les stades décrits par Piaget, l'enfant parcourt 4 stades afin d'accéder à une construction de l'espace :

- *Stade 1 : Début de la représentation topologique*
L'enfant du premier stade a une certaine compréhension des rapports topologiques des objets (l'objet a un trou, l'objet n'a pas de trou) mais il ne manifeste aucune compréhension des rapports projectifs (former une ligne droite) et euclidiens (distance entre les objets).
- *Stade 2 : Pré opérations topologiques, projectives et euclidiennes*
L'enfant fait des progrès dans la considération des rapports topologiques (fabrication d'un collier en alternant les couleurs). De plus, il y a une apparition des premières

notions d'espace projectif et d'espace euclidien (capacité à retrouver deux solides identiques cachés)

- *Stade 3 : Opérations topologiques, projectives et euclidiennes*

Vers 6-7ans, l'enfant prend en considération les rapports topologiques (à partir d'un modèle, construire une figure), les rapports projectifs (différencier la gauche et la droite), les rapports métriques et euclidiens (mesures).

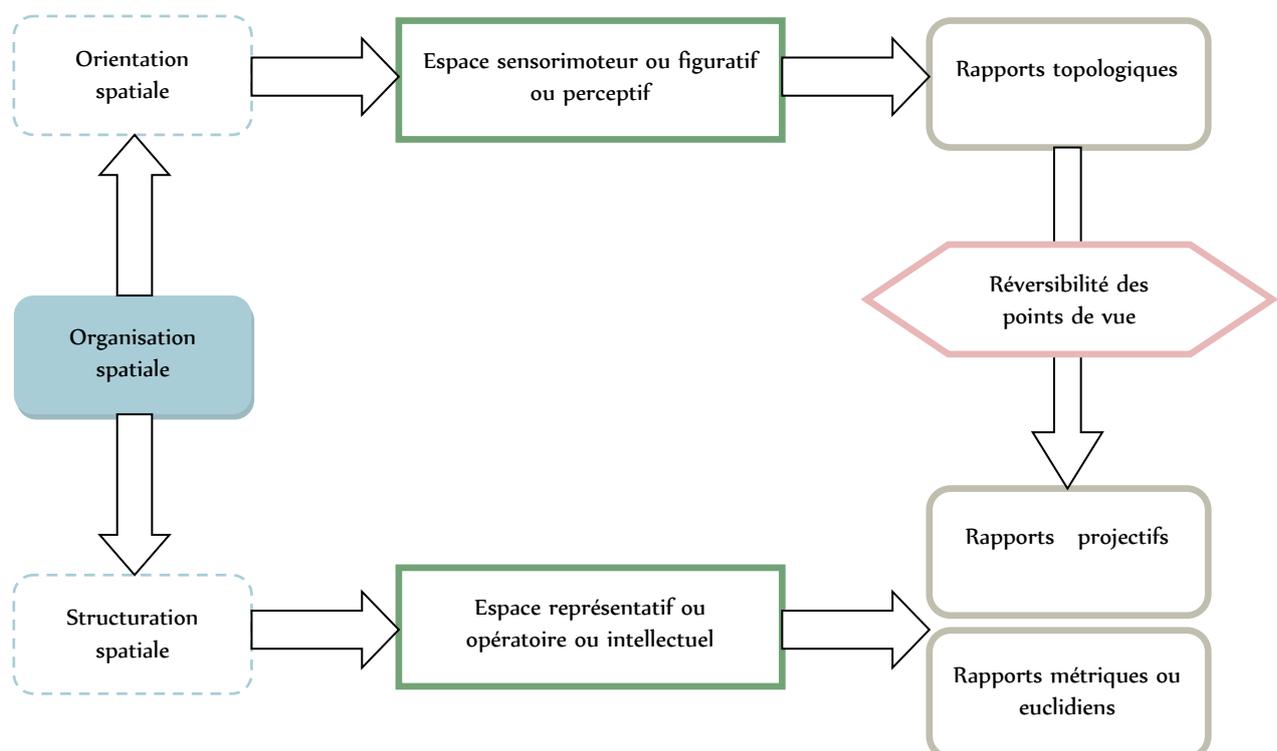
- *Stade 4 : L'espace et la pensée formelle*

L'enfant est capable de résoudre un problème qui utilise la coordination de deux systèmes de référence (tracer un point quelconque d'une roue qui se déplace sur une table).

L'organisation spatiale regroupe deux champs : l'orientation spatiale et la structuration spatiale. L'orientation spatiale est associée à la perception des objets de l'environnement. La structuration spatiale est associée à l'abstraction et au raisonnement grâce à la perception ou la mémoire.

La genèse de l'organisation des relations spatiales est possible grâce à des interactions entre l'individu et son environnement dans deux espaces différents : l'espace sensorimoteur et figuratif (entre 0 et 2 ans) où le corps sert de référence (égocentrisme) ; et les espaces représentatif (après 2 ans) et opératoire (après 7 ans) où le milieu sert de référence (géocentrisme).

Ainsi, Rigal Robert résume la construction de l'organisation spatiale selon le schéma suivant :



LES TROIS CONCEPTIONS DE L'ESPACE SELON BROUSSEAU

Le *macro-espace* est un espace accessible seulement par des visions locales. Une partie des objets seulement est sous le contrôle de la vue et la plupart des objets sont fixes. L'individu est à l'intérieur de cet espace. Pour appréhender cet espace, une représentation ou conceptualisation est indispensable (plan). Les macro-espaces sont le village, le quartier, la ville, etc. de l'enfant.

Le *méso-espace* est un espace accessible grâce à une vision globale. Selon la perspective, les objets sont fixes ou semi-fixes. L'individu est à l'intérieur de cet espace, il peut donc se déplacer pour l'observer selon différents points de vue. Une représentation peut être utile pour appréhender le méso-espace (maquette). Les méso-espaces sont la classe, la chambre, etc. de l'enfant.

Le *micro-espace* est un espace que l'individu peut percevoir de différentes façons : il peut le voir, le toucher, le déplacer. Il a une vision exhaustive. L'individu se trouve à l'extérieur de cet espace. Il n'est pas utile de le représenter puisqu'il peut l'appréhender directement. Par exemple, la table de l'enfant est une micro-espace.

3- LES CONNAISSANCES SPATIALE ET LES CONNAISSANCES GEOMETRIQUES DANS LES PROGRAMMES

L'ESPACE

Au cycle 1, on retrouve la notion d'espace dans le domaine "Découverte du monde" sous l'intitulé "Se repérer dans l'espace". Les compétences liées à cette notion sont diverses :

- Se situer dans l'espace et situer des objets par rapport à soi
- Se repérer dans l'espace d'une page
- Comprendre et utiliser à bon escient le vocabulaire du repérage et des relations dans [...] l'espace

Mais elle renvoie également à d'autres domaines tels que "Agir et s'exprimer avec son corps" où les compétences suivantes doivent être développées :

- Se repérer et se déplacer dans l'espace
- Décrire ou représenter un parcours simple

Au cycle 2, l'espace se retrouve également dans le domaine "Découverte du monde" sous l'intitulé "se repérer dans l'espace" : "Les élèves découvrent et commencent à élaborer des représentations simples de l'espace familier : la classe, l'école, le quartier, le village, la ville [...]. Ils découvrent des formes usuelles de représentation de l'espace (photographies, cartes, mappemondes, planisphères, globe).

On retrouve également cette notion dans le domaine "Mathématiques" sous l'intitulé "géométrie" : "Les élèves enrichissent leurs connaissances en matière d'orientation et de repérage."

LA GEOMETRIE

C'est au cycle 2 qu'apparaît la géométrie. Cependant la géométrie est appréhendée au cycle 1 dans le domaine "Découverte du monde" sous l'intitulé "Découvrir les formes et les grandeurs" : "En manipulant des objets variés, les enfants repèrent d'abord des propriétés simples [...]. Progressivement, ils parviennent à distinguer plusieurs critères, à comparer et à classer selon la forme, la taille, la masse, la contenance."

Au cycle 2, la géométrie apparaît dans le domaine "Mathématiques" : "Ils [les élèves] apprennent à reconnaître et à décrire des figures planes et des solides. Ils utilisent des instruments et des techniques pour reproduire ou tracer des figures planes. Ils utilisent le vocabulaire spécifique."

Au cycle 3, la géométrie est étudiée de manière plus approfondie. Le but étant "de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure." Différents items sont assignés à la géométrie tels que : les relations et propriétés géométriques, l'utilisation d'instruments et de techniques, les figures planes, les solides usuels, les problèmes de reproduction ou de construction.

4- CONNAISSANCES SPATIALES ET CONNAISSANCES GEOMETRIQUES. QUELLES DIFFERENCES ? QUELLES RELATIONS ?

LES DIFFERENCES

LES CONNAISSANCES SPATIALES ET LES CONNAISSANCES GEOMETRIQUES

Chaque enfant a des connaissances spatiales avant même qu'on lui propose un apprentissage de celles-ci. Les connaissances géométriques, quant-à-elles n'existent pas avant qu'elles aient fait l'objet d'un apprentissage.

Berthelot et Salin définissent les connaissances spatiales ainsi : "Par connaissances spatiales nous désignons les connaissances qui permettent à un sujet un contrôle convenable de ses relations à l'espace sensible. Ce contrôle se traduit par la possibilité pour lui de :

- reconnaître, décrire, fabriquer ou transformer des objets ;
- déplacer, trouver, communiquer la position d'objets ;
- reconnaître, décrire, construire ou transformer un espace de vie ou de déplacement."

Ainsi, grâce à la description des programmes actuels, on peut remarquer que les connaissances spatiales ne sont abordées qu'en maternelle et en début de scolarité obligatoire. Or ces connaissances permettent la résolution de problèmes pratiques. De même, on remarque que la géométrie telle qu'elle est étudiée au cycle 3 n'est plus un objet d'apprentissage en tant que tel mais a pour objectif d'appréhender le raisonnement mathématique (ceci depuis les Instructions Officielles de 1970).

Pour résoudre un problème de l'espace, notre société va utiliser ses savoirs scientifiques.

LES PROBLEMES SPATIAUX ET LES PROBLEMES DE GEOMETRIE

Les problèmes spatiaux concernent l'espace sensible (ou macro-espace) et portent sur la réalisation d'actions (se déplacer, dessiner, fabriquer) ou de communications. Ils sont validés par confrontation entre le résultat attendu et le résultat obtenu.

Les problèmes de géométrie, quant-à-eux, cherchent à résoudre un problème qui concerne les propriétés des objets géométriques. L'individu n'est plus confronté à un milieu physique mais à un milieu conceptualisé, représenté.

LES RELATIONS ENTRE LES CONNAISSANCES SPATIALES ET LES CONNAISSANCES GEOMETRIQUES

Connaissances spatiales et connaissances géométriques sont deux champs de connaissances très liés.

Historiquement, on remarque que la géométrie euclidienne servait en large partie à résoudre des problèmes spatiaux et en particulier des problèmes liés aux mesures spatiales.

Aujourd'hui la géométrie est davantage coupée des problèmes spatiaux même si elle reste « la science des situations spatiales » selon Bkouche (1990).

Un constat reste cependant sans appel, la maîtrise des relations qu'entretient un individu avec l'espace est facilitée grâce à ses connaissances géométriques qu'il applique inconsciemment dans la résolution du problème.

LES CONNAISSANCES NECESSAIRES A L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

LES CONNAISSANCES SPATIALES

Les connaissances spatiales nécessaires à toute personne sont les suivantes : le vocabulaire précis qui s'y rapporte (on parle de langage spatial), la prise de conscience des possibles changements de points de vue ainsi que des phénomènes qui s'y rapportent, l'utilisation de moyens de représentations de l'espace, etc.

L'importance de ces connaissances est prise en compte seulement à l'école maternelle. Ces connaissances disparaissent ensuite rapidement des programmes.

Pour conclure son étude sur les programmes scolaires et l'espace, Pêcheux (1990) souligne les faits suivants : « Au-delà de ces acquisitions, cruciales pour notre culture que sont la lecture et l'écriture, il nous semble que les performances spatiales sont davantage considérées comme relevant d'aptitudes individuelles, qui peuvent éventuellement être utiles pour certains métiers, mais dont on peut aisément se passer ». Dans cette citation on souligne également un fait remarquable dans l'évolution des programmes de l'école primaire puisque certaines connaissances spatiales telles que l'arpentage ou la perspective ont disparu des programmes et ne seront enseignées alors que dans des formations professionnalisantes.

De plus, les connaissances spatiales sont des connaissances très transversales qui vont entrer dans différents champs disciplinaires. On retrouvera par exemple en géographie l'élaboration

et l'utilisation de cartes (points cardinaux, échelle, symbolique). De même, l'éducation physique travaillera sur l'organisation spatiale (schémas du terrain au tableau, orientation et itinéraire en course d'orientation par exemple).

LES CONNAISSANCES « SPATIO-GEOMETRIQUES »

Les connaissances « spatio-géométriques » sont selon Berthelot et Salin : « les connaissances issues du savoir géométrique et mises en jeu dans la résolution de certains problèmes de l'espace. »

Ce sont ces connaissances qui sont le plus généralement mises en œuvre à l'école. Elles concernent en particulier les formes des objets et leurs propriétés dans le but de calculer aires et volumes.

QUELS IMPACTS SUR LES COMPETENCES DES ELEVES ?

On remarque donc qu'à l'école d'aujourd'hui, trop de place est accordée aux connaissances « spatio-géométriques » et pas assez aux connaissances spatiales.

Prenons l'exemple d'une étude menée par Berthelot et Salin. Le but de cette étude était d'analyser la capacité d'élève de CM2 à réinvestir des connaissances géométriques acquises dans leur scolarité dans un contexte différent : celui d'un espace plus grand.

Alors que la majorité des élèves sont capables de tracer sur une feuille de papier (donc dans un micro-espace) un rectangle à partir des mesures de ce dernier, la plupart des élèves montrent des difficultés à la construction d'un rectangle de 7 mètres de large et 9 mètres de long. Ces difficultés se manifestent de différentes façons : certains ne construisent pas des angles droits, d'autres ont des doutes sur la construction du rectangle et sur la qualité de celui-ci. Berthelot et Salin font d'ailleurs remarquer qu'à la question « Es-tu sûr que c'est un rectangle ? », certains élèves répondent : « Mais peut-être qu'il y a des figures avec quatre angles droits qui ne sont pas des rectangles ». On remarque dans cette réflexion que cette activité déstabilise tous les repères de l'élève qui commence alors à douter des connaissances géométriques qu'il a acquises.

CONCLUSION

On en conclut que la géométrie et l'espace sont deux champs d'étude distincts qui ont des intérêts pédagogiques non négligeables. On remarque actuellement qu'une place trop faible est laissée à l'étude des connaissances spatiales. Connaissances qui sont pourtant difficiles à acquérir et qui donc nécessitent un apprentissage systématique à l'école. Cette analyse permet également d'expliquer les derniers résultats des français à l'enquête PISA. Effectivement, une baisse des performances des élèves de 15 ans a été ressentie quant à la culture mathématique, c'est-à-dire à la capacité des élèves « à formuler, employer et interpréter des mathématiques dans un éventail de contextes de la vie réelle ».

Cependant, géométrie et espace restent des champs disciplinaires intimement liés. En particulier ces deux champs disciplinaires se rejoignent dans l'apprentissage de la géométrie dans l'espace. Dans cet apprentissage les compétences spatiales entrent en jeu : la connaissance d'un vocabulaire spécifique, l'existence de différents points de vue et l'utilisation de moyens de représentation. Il semble donc intéressant de chercher la place de ces connaissances spatiales et en particulier de l'utilisation de moyens de représentation dans l'espace dans l'apprentissage de la géométrie dans l'espace.

Mes différentes lectures m'ont amené à me pencher sur l'intérêt d'une connaissance spatiale particulière : l'utilisation des moyens de représentation de l'espace dans l'apprentissage de la géométrie dans l'espace (les solides).

Contrairement aux représentations planes de figures planes, la représentation plane d'objets en trois dimensions est très éloignée de l'objet lui-même. En effet, la représentation plane de solides entraîne forcément une perte d'informations. Ainsi est mis en place un codage conventionnel qui permet de représenter n'importe quel objet de l'espace.

Il existe différents types de représentations basées sur la projection, la plus connue étant la perspective cavalière.

La perspective est une connaissance spatiale qui ne fait actuellement pas partie des programmes de l'école primaire et qui, à mon sens, a tout son intérêt dans l'apprentissage des solides (représentations dans les manuels en particulier).

Mes recherches se sont donc tournées en trois phases :

- une étude des anciens programmes de l'école primaire et des programmes actuels du collège,
- une analyse de deux manuels : Pour comprendre les mathématiques et Cap' Maths,
- une expérimentation en classe dans le but de connaître les stratégies entreprises par les élèves pour réaliser les tâches suivantes : décrire et représenter un solide.

Ces recherches m'ont permis, dans un quatrième temps, de réfléchir à une séquence sur les solides qui pourrait être mise en place en cycle 3.

1- LES PROGRAMMES

L'étude des programmes a pour but de m'éclaircir sur l'évolution de la place de la représentation en perspective dans l'apprentissage de la géométrie dans l'espace.

Tout d'abord, je me suis intéressée aux anciens programmes de l'enseignement primaire dans le but de savoir depuis quand la représentation en perspective des solides est retirée des programmes et de quelle manière elle était enseignée.

Ensuite, puisque la perspective n'est plus au sein des programmes de l'école primaire, j'ai cherché à savoir à quel moment et dans quelle mesure elle est enseignée au collège.

LES PROGRAMMES DE L'ÉCOLE PRIMAIRE DE 1923 A 2008

Pour commencer, voici :

- les programmes de 2008 concernant la géométrie dans l'espace :

Les solides usuels : cube, pavé droit, cylindre, prismes droits, pyramide.

- reconnaissance de ces solides et étude de quelques patrons ;
- vocabulaire spécifique relatif à ces solides : sommet, arête, face

- le tableau de progressions proposé en 2012 :

| CE2 | CM1 | CM2 |
|---|---|--|
| Dans l'espace <ul style="list-style-type: none">• Reconnaître, décrire et nommer : un cube, un pavé droit.• Utiliser en situation le vocabulaire (face, arête, sommet). | Dans l'espace <ul style="list-style-type: none">• Reconnaître, décrire et nommer les solides droits : cube, pavé, prisme.• Reconnaître ou compléter un patron de cube ou de pavé. | Dans l'espace <ul style="list-style-type: none">• Reconnaître, décrire et nommer les solides droits : cube, pavé, cylindre, prisme.• Reconnaître ou compléter un patron de solide droit. |

On remarque sans grande surprise qu'aucune connaissance spatiale (perspective, topologie, etc.) ne fait partie des programmes de géométrie. J'ai donc essayé de retrouver ses connaissances dans les anciens programmes de l'école primaire.

C'est dans les programmes de 1923 (identiques aux programmes de 1938 appliqués jusqu'en 1945) que l'on retrouve la capacité à représenter un solide (connaissance spatiale liée à la perspective).

Cours moyen (neuf à onze ans)

Géométrie :

Notions pratiques sur les solides géométriques simples (cube, prisme droit). Notions sommaires sur leur représentation géométrique (croquis coté).

Il est à noter également qu'une bonne partie des élèves de cours moyens suivaient le programme du Cours Supérieur « cours moyens pour élèves forts ». En effet, soit les élèves de CM et de CS faisaient partie de la même classe, soit l'instituteur complétait lui-même le programme.

Cours supérieur (onze à treize ans)

Géométrie :

Opérations les plus simples de l'arpentage.

Notions très élémentaires servant aux exercices de dessin géométrique

Au sein des programmes de 1945, la représentation des solides a disparu.

Cours moyen

Calcul :

Notions pratiques sur le cube, le parallélépipède rectangle, les prismes droits et le cylindre de révolution.

Les notions pratiques indiquées pour le cube, le parallélépipède rectangle, les prismes droits et le cylindre de révolution ne seront données qu'en raison de leur utilisation pour le calcul des surfaces latérales des volumes. Elles pourraient être accompagnées de quelques exercices simples de travail manuel en utilisant soit du carton, soit du fil de fer.

On remarque alors un véritable changement puisqu'ici les solides ne sont plus étudiés pour eux-mêmes mais sont alors des problèmes qui vont être au service de l'apprentissage du calcul.

Les programmes suivants, édités en 1970, se rapprochent alors énormément de ceux que nous connaissons actuellement :

Cours moyen : 1^{ère} et 2^{ème} année

Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques

Pavé (parallélépipède)

Pour un polyèdre (tétraèdre, cube, parallélépipède, prisme, etc.), on pourra s'intéresser à la nature des faces, à leur nombre, au nombre de sommets, à celui des arêtes, à leur disposition relative.

Les résultats de ces recherches seront utilisés par les enfants en travail manuel pour construire de tels objets géométriques, en carton par exemple.

Les programmes de 1980 font réapparaître l'utilité de la représentation des objets géométriques :

Cours moyen

Activités géométriques.

Savoir :

- pour différents objets géométriques (solides, surfaces ou lignes),
 - o les reproduire,
 - o les décrire et les représenter ;
 - o les construire à partir d'une description ou d'une représentation ;
- [...]

A cet effet :

- [...]
- mettre au point ou utiliser des techniques de reproduction,
- [...]

Une description ou une représentation sont valides quand elles permettent de construire

l'objet, la représentation devant en outre respecter les conventions établies.

Nous retrouvons en 1985 et en 1991 les objectifs suivants : « L'élève doit être capable : de reproduire, de décrire et de construire quelques solides usuels et quelques figures planes [...] »

Les programmes de 1995 vont également dans ce sens :

Le cycle des approfondissements

Géométrie

- À partir d'un travail sur des solides et des surfaces divers (reproduction, description, représentation, construction), notions de :
 - o face, sommet, arête ; [...]
- Connaissance de quelques objets géométriques usuels (cube, parallélépipède rectangle, sphère, [...]).
- Représentation plane d'objets de l'espace ; patrons

On remarque alors que jusqu'en 1995, la représentation plane d'objets de l'espace fait partie intégrante des programmes de cycle 3.

C'est à partir des programmes de 2002 que cette compétence va disparaître.

Cycle des approfondissements

Espace et géométrie

5.4 Solides : cube, parallélépipède rectangle

- percevoir un solide, en donner le nom, vérifier certaines propriétés relatives aux faces ou arêtes d'un solide à l'aide des instruments ;
- décrire un solide en vue de l'identifier dans un lot de solides divers ou de le faire reproduire sans équivoque ;
- construire un cube ou un parallélépipède rectangle ;
- reconnaître, construire ou compléter un patron de cube, de parallélépipède rectangle ;
- utiliser à bon escient le vocabulaire suivant : cube, parallélépipède rectangle ;
sommet, arête, face

Pour conclure, on remarque que la représentation des solides a petit à petit disparu des programmes de l'école primaire. Alors qu'il était enseigné en 1923 à la majorité des élèves de cours moyens des « notions sommaires sur leur représentation géométrique » des solides, la représentation géométrique a fini par disparaître des attendus des programmes actuels au profit des activités suivantes : reconnaître, décrire, nommer, compléter (le patron d'un solide).

Il paraît donc opportun de s'intéresser aux programmes de mathématiques actuels du second degré (collège) afin de voir à quel moment la représentation en trois dimensions et en particulier la perspective cavalière est enseignée.

LA PERSPECTIVE DANS LES PROGRAMMES DU COLLEGE

Puisque la représentation en trois dimensions n'est plus présente dans les programmes de l'école primaire de 2008, il est intéressant de savoir à quel moment elle est enseignée ensuite.

Tout d'abord, la perspective cavalière est l'un des objectifs des mathématiques en 6^{ème}. Elle est même l'objectif principal de la géométrie dans l'espace en 6^{ème}.

| | | |
|---|---|---|
| <p>3.3 Parallélépipède rectangle : patrons, représentation en perspective</p> | <ul style="list-style-type: none"> - Fabriquer un parallélépipède rectangle de dimensions données, à partir de la donnée du dessin de l'un de ses patrons. - Reconnaître un parallélépipède rectangle de dimensions données à partir : du dessin d'un de ses patrons, d'un dessin le représentant en perspective cavalière. - Reconnaître dans une représentation en perspective cavalière du parallélépipède rectangle les arêtes de même longueur, les angles droits, les arêtes, les faces parallèles | <p>À l'école élémentaire les élèves ont déjà travaillé sur des solides droits de l'espace (description, construction, patron). Cette étude est poursuivie en 6e en mettant l'accent sur un aspect nouveau : la représentation en perspective cavalière, <i>dont certaines caractéristiques sont précisées aux élèves.</i></p> <p>L'usage d'outils informatiques permet une visualisation de différentes représentations d'un même objet de l'espace.</p> <p>Même si les compétences attendues ne concernent que le parallélépipède rectangle, les travaux portent sur</p> |
|---|---|---|

| | | |
|--|---|---|
| | <p>ou perpendiculaires.</p> <p><i>- Dessiner ou compléter un patron d'un parallélépipède rectangle.</i></p> | <p>différents objets de l'espace et s'appuient sur l'étude de solides amenant à passer de l'objet à ses représentations et inversement.</p> |
|--|---|---|

Après l'étude des programmes des autres disciplines scientifiques du collège, on remarque que la perspective est également utilisée à d'autres moments et en particulier en technologie : « Les perspectives, les croquis à main levée et les schémas ne sont utilisés que dans l'objectif de se faire comprendre et de communiquer. »

Pour conclure, la perspective cavalière n'est plus un attendu de l'école primaire mais est introduite dès le début du second degré en mathématiques.

2- L'ETUDE DES MANUELS DE L'ECOLE ELEMENTAIRE (DU CP AU CM2)

Puisque la perspective cavalière n'est pas attendue à l'école primaire, il est intéressant d'étudier les manuels de mathématiques de l'école élémentaire (du CP au CM2) autour de deux points principaux :

- l'utilisation ou non de la perspective cavalière pour représenter les solides dans les manuels ;
- l'introduction ou non de la perspective cavalière et de ses normes dans les manuels.

En effet, puisque les programmes ne demandent pas aux élèves d'être capables de représenter un solide en perspective ni d'avoir des notions autour de la perspective cavalière, l'utilisation de celle-ci dans les manuels est sujet à controverse. Sans être expliquée, la représentation en trois dimensions est un obstacle supplémentaire pour les élèves.

Pour répondre à ces deux axes j'ai choisi d'étudier deux manuels différents : Cap' Maths et Pour comprendre les mathématiques.

ETUDE DU MANUEL CAP' MATHS

Pour étudier le manuel Cap' Maths, j'ai choisi d'étudier les manuels par niveau du CP au CM2.

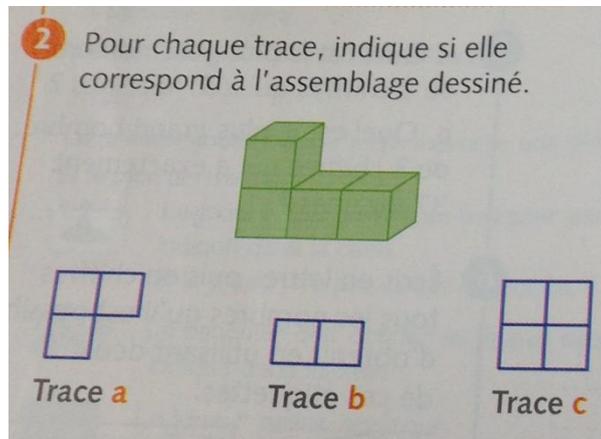
Voici les références des manuels étudiés :

- Cap' Maths CP : Guide de l'enseignant et fichier d'entraînement
- Cap' Maths CE1 : Guide de l'enseignant et fichier d'entraînement
- Cap' Maths CE2 : Guide de l'enseignant et manuel de l'élève (2008)
- Cap' Maths CM1 : Guide de l'enseignant et manuel de l'élève (2010)
- Cap' Maths CM2 : Guide de l'enseignant et manuel de l'élève (2010)

CP :

Les solides ne sont pas du tout représentés dans les situations d'apprentissage du manuel. En effet, dans les différentes situations d'apprentissage, l'enseignant doit utiliser du matériel type « Polydrons » et apporter des modèles de solides. Pour la plupart des séances, il n'y a pas d'activité sur le fichier. La seule activité qui apparaît sur le fichier est « bon de commande »

La première activité que l'on peut trouver dans Cap' Maths CE2 est une activité de recherche des « traces » laissées par un assemblage de cubes. On trouve alors une première représentation en 3D :



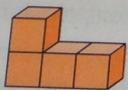
En regardant le guide de l'enseignant, on remarque qu'une première activité permet de s'assurer que les élèves sont capables de décoder ce type de représentation :

Chercher

1 Reconstituer un assemblage de 4 cubes à partir d'une représentation dessinée au tableau

INDIVIDUEL / ORAL

- Former des équipes de 3 élèves et remettre à chacune environ 40 cubes qui peuvent être assemblés par toutes leurs faces (par exemple, cubes vendus par Nathan sous le nom de Multicubes).
- Dessiner au tableau cet assemblage :



Puis poser la question aux élèves :

- ➔ Vous devez chacun assembler 4 cubes pour obtenir l'assemblage que j'ai dessiné.
- Organiser une rapide mise en commun pour vérifier la production de chaque élève et préciser la lecture du dessin :
- ➔ Sur la rangée du bas, on voit 3 cubes alignés. Le cube placé à gauche de cet alignement est surmonté d'un autre cube.
- Terminer l'échange en indiquant qu'il existe d'autres façons d'assembler 4 cubes.

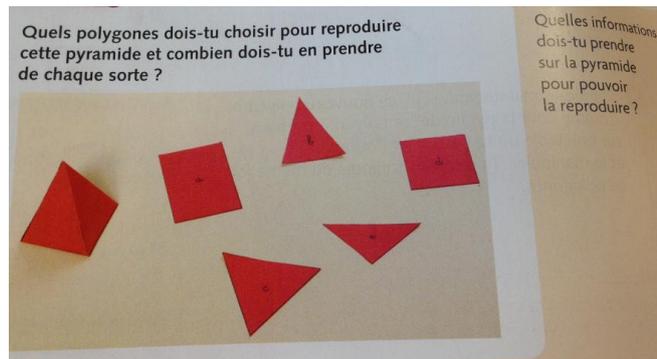
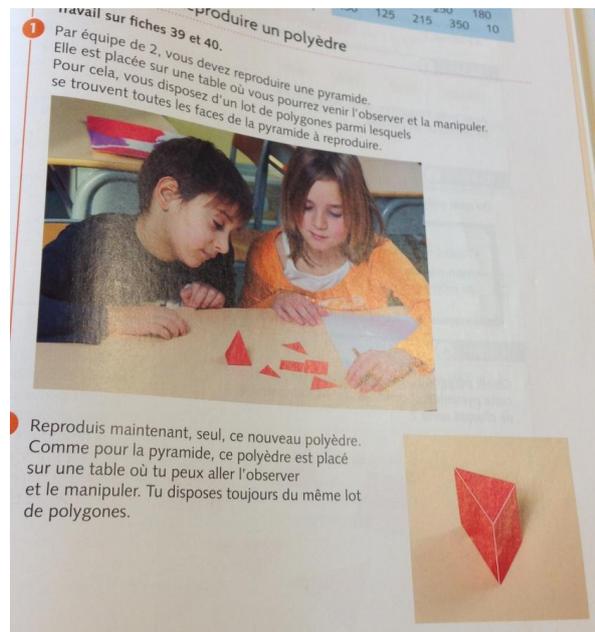
Cette première question a pour but de s'assurer que les élèves savent décoder le dessin d'un assemblage de cubes.

1. D'après A. BESSOT et M. EBERHARD, « Représentation d'empilements de cubes en CE », Grand N n° 28, IREM de Grenoble.

Le deuxième type d'activités proposées cherche à retrouver un solide parmi d'autres. Durant ces activités aucun solide n'est représenté (ni au tableau, ni dans le manuel), on utilise des modèles de solides.

Le troisième type d'activités cherche à reproduire un polyèdre. Les élèves sont munis de toutes les faces permettant de reproduire un polyèdre qui est placé sur une table : ils peuvent le manipuler et l'observer. Ce type d'activité amène les éditeurs à introduire des représentations de solides dans leur manuel. Il s'agit de photographies. On remarque sur l'une d'entre elles que les arêtes sont blanches alors que les faces sont rouges. Ce type de photographies permet une meilleure lisibilité du solide et prépare les élèves à la représentation en perspective cavalière.

On remarque ici que les arêtes du solide ne sont pas blanches et que la lisibilité de celui-ci est plus difficile.



L'activité suivante est une activité d'argumentation où il s'agit de décrire et de reproduire un polyèdre. Les polyèdres ne sont pas représentés.

$(15 \times 1\,000) + (7 \times 100) + 12$

Tu as devant toi un lot de polyèdres.

a. Quel est le polyèdre qui correspond à cette description :
« J'ai 5 faces et 6 sommets. »

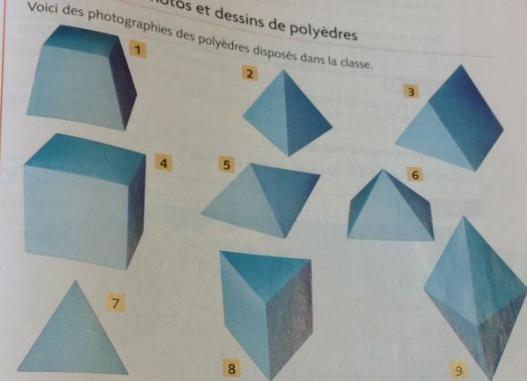
b. Quel est celui qui correspond à cette autre description :
« J'ai 5 sommets et 2 formes de faces différentes. »

Travail sur fiche bilan.
En utilisant tous ces polygones, peux-tu reproduire le polyèdre que l'on t'a donné ?
Si ce n'est pas possible, explique pourquoi.

La dernière activité proposée dans Cap' Maths CE2 cherche à travailler sur les représentations des solides. L'objectif de cette activité est de montrer qu'une photographie ou un dessin ne renseigne que partiellement sur un polyèdre (faces, arêtes, sommets non-visibles ; faces déformées). Les élèves vont également travailler sur la convention des pointillés. Les pointillés cherchent à différencier deux polyèdres sur un dessin. Cependant, il peut toujours être difficile de différencier le parallélépipède rectangle du cube.

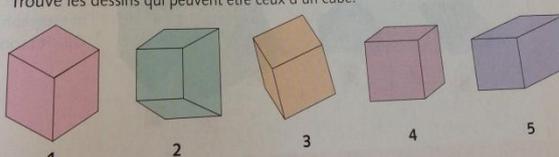
Chercher Photos et dessins de polyèdres

Voici des photographies des polyèdres disposés dans la classe.



- Écris la ou les lettres des polyèdres de la classe qui correspondent à chacune des photographies 1 et 2.
- Même question pour les photographies 3 à 9.

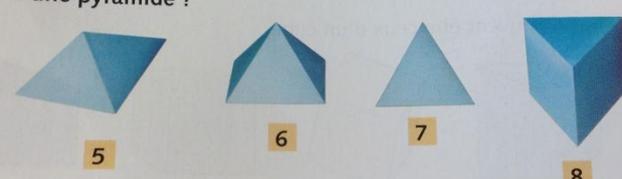
2. Trouve les dessins qui peuvent être ceux d'un cube.



D'autres activités du même type sont proposées ensuite.

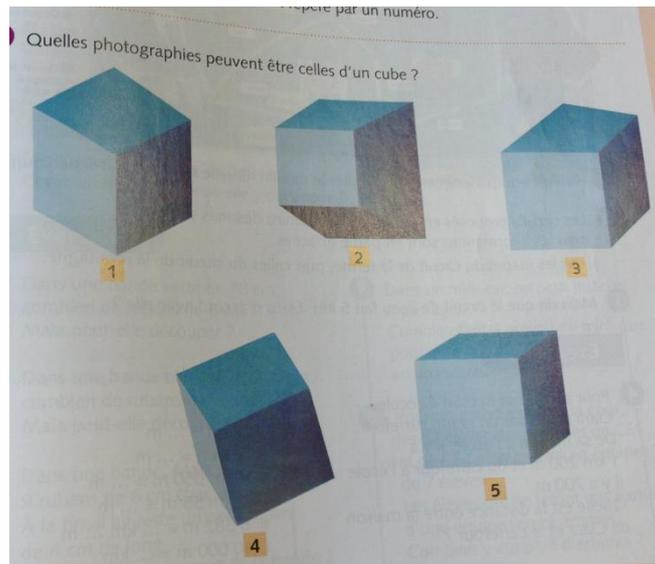
Extrait 4

Quelles photographies peuvent être celles d'une pyramide ?



QUESTION

Des différences existent entre un polyèdre et sa photographie. Quelles sont-elles ?

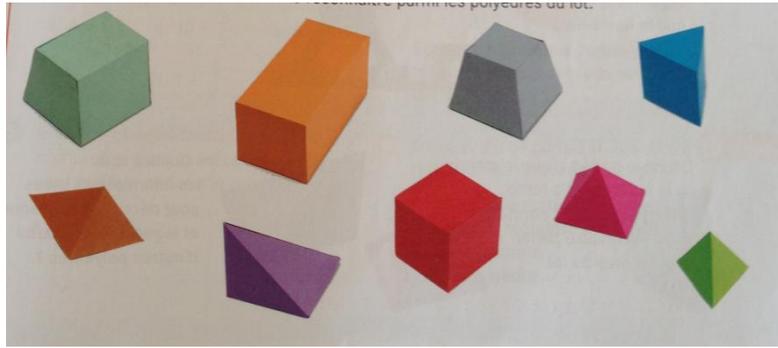


CM1 :

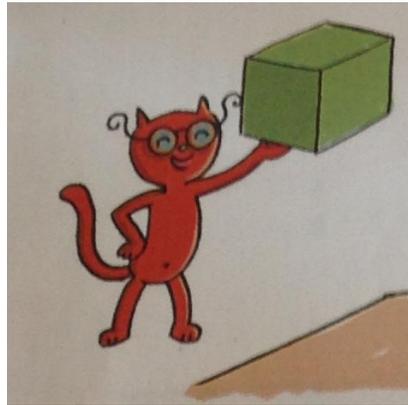
La première activité est le jeu du portrait. On remarque que des dessins en perspective de solides ont été réalisés mais que la convention des pointillés n'est pas utilisée. Cette remarque est également valable pour les activités suivantes.



La deuxième activité a pour objectif de reconnaître un solide à partir d'une description et de décrire un solide.



La troisième activité amène les élèves à travailler sur les patrons des solides.

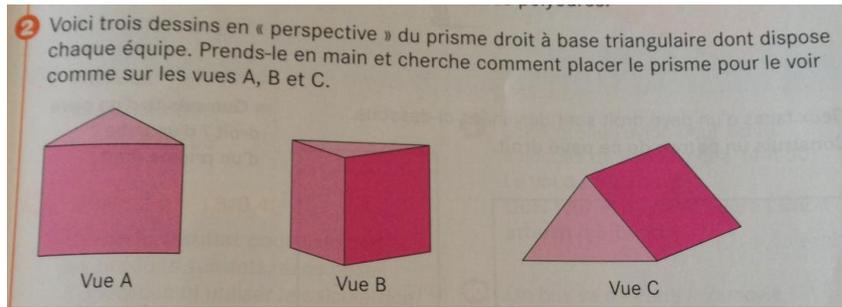


Alors qu'une activité propose de travailler sur la perspective cavalière et ses originalités en CE2, le manuel Cap' Maths CM1 fait le choix de continuer à travailler avec des représentations de type « dessin-photographie » où l'on voit le volume mais où les conventions ne sont pas utilisées. Ce choix est tout à fait justifiable puisque la perspective cavalière n'est pas un impératif des programmes de l'école primaire.

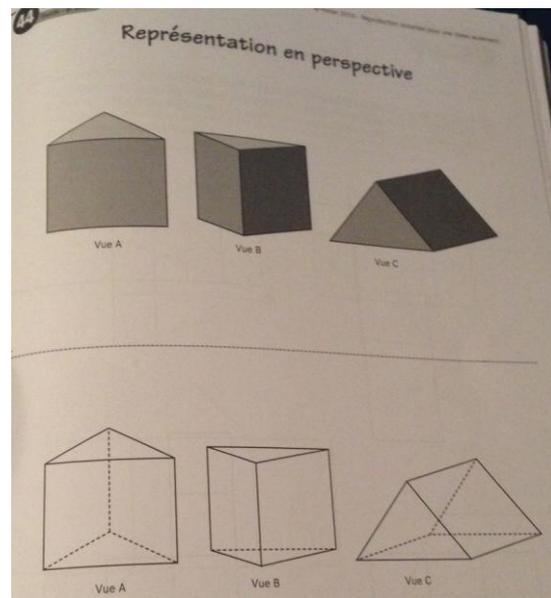
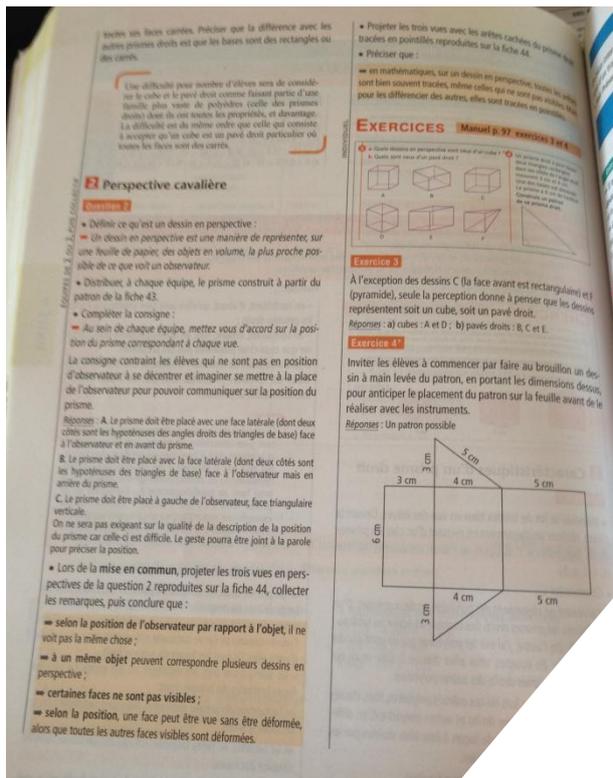
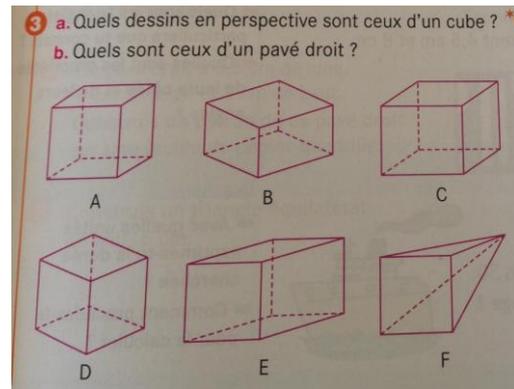
CM2 :

La première activité proposée est le solide caché. Il s'agit de poser des questions en vue de deviner quel solide est caché. Les élèves sont ensuite amenés à travailler sur le patron du pavé droit.

La deuxième activité est orientée sur les prismes droits et les dessins en perspective. Les élèves doivent chercher à agencer correctement un prisme pour qu'il corresponde aux différentes vues proposées par le manuel.



Ensuite, il faut retrouver les dessins en perspective du cube et du pavé droit.



Cette activité proposée en fin de CM2 est très riche. En effet, elle permet de travailler sur deux points très complexes de la géométrie dans l'espace :

- les différents points de vue d'un même solide. Les élèves doivent disposer leur solide de manière à retrouver exactement le même point de vue que celui de la photographie.

- la perspective cavalière. Les élèves doivent faire le lien entre un solide représenté en trois dimensions et un solide représenté grâce à la perspective cavalière. On réinvestit les notions (entrevues en CE2) d'arêtes et de faces invisibles.

La troisième activité est orientée sur les patrons.

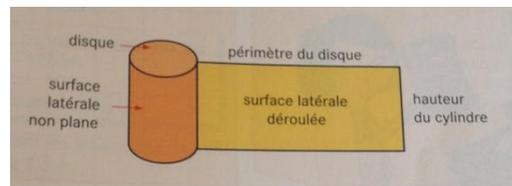
Enfin, la dernière activité est consacrée aux les cylindres.

Lors du travail sur les solides, le manuel fait le choix de travailler avec des photographies et des schémas sans utiliser la perspective cavalière qui pourrait être un obstacle supplémentaire dans l'apprentissage de cette nouvelle notion.

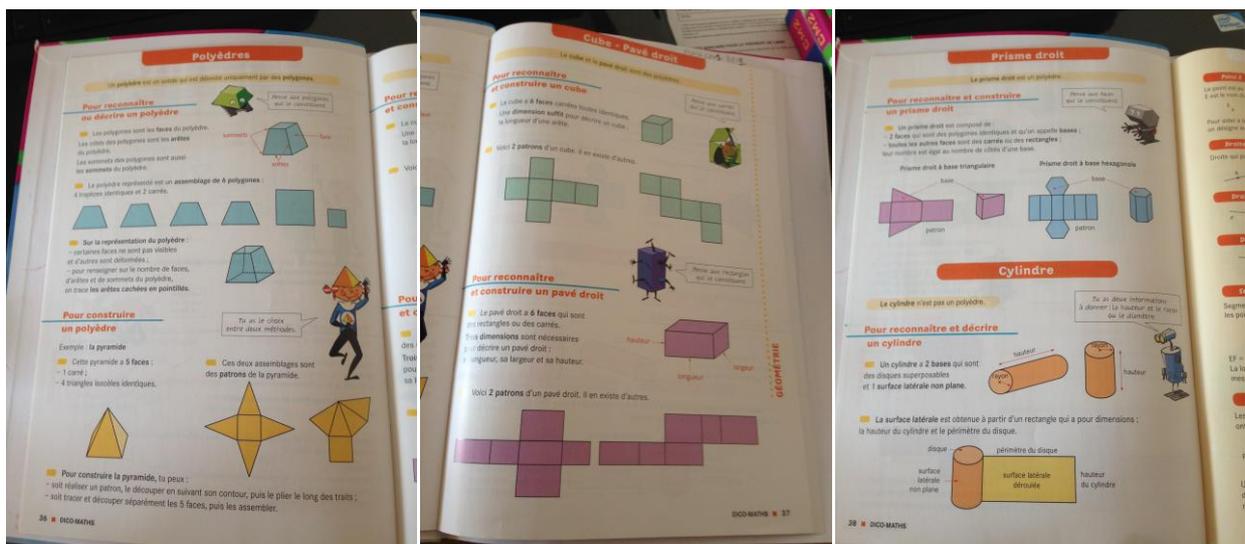
Photographie :



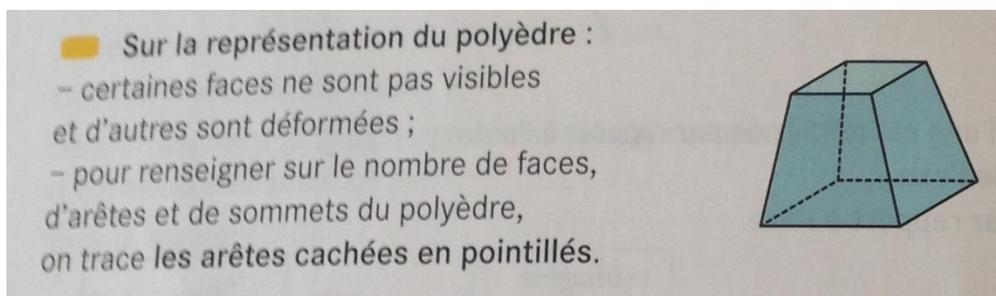
Schéma :



Dico Maths CM :



Il est très intéressant de remarquer que dans « Dico Maths CM », l'outil prévu par le manuel pour rassembler l'ensemble des leçons, les solides sont représentés en volume mais qu'un paragraphe est prévu pour expliquer de manière succincte la perspective cavalière et l'utilisation des pointillés.



Conclusion de l'étude des manuels Cap' Maths

Le manuel Cap' Maths met en place une réelle progression dans la représentation des solides. En CP, les solides ne sont pas du tout représentés dans le manuel. Ils sont ensuite souvent représentés grâce à des photographies en CE1 et en CE2. En CM, les solides sont représentés en trois dimensions, au moyen de la perspective cavalière parfois. Cette progression est intéressante puisqu'elle permet de préparer les élèves à l'apprentissage de la perspective cavalière qui sera fait en 6^{ème}.

De plus, le manuel Cap' Maths fait le choix d'introduire dès la fin du CE2 la perspective cavalière. A aucun moment le manuel ne demande aux élèves de représenter un solide grâce à celle-ci mais elle est tout de même explicitée. Il est par exemple demandé aux élèves de faire le lien entre la photographie d'un solide et sa représentation en perspective cavalière. De même, celle-ci fait l'objet d'un court paragraphe expliquant ces caractéristiques : certaines faces ne sont pas visibles, certaines sont déformées et on utilise les pointillés pour représenter les arêtes cachées.

L'introduction de la perspective cavalière est donc très intéressante dans le manuel Cap' Maths puisqu'elle est progressive et explicitée aux élèves.

ETUDE DU MANUEL POUR COMPRENDRE LES MATHÉMATIQUES

Pour étudier le manuel Pour comprendre les mathématiques, j'ai choisi d'étudier les manuels par niveau du CP au CM2.

Voici les références des manuels étudiés :

- PCLM CP : Guide de l'enseignant et fichier d'entraînement (2008)
- PCLM CE1 : Fichier d'entraînement (2009)
- PCLM CE2 : Manuel de l'élève (2013)
- PCLM CM1 : Manuel de l'élève (2010)
- PCLM CM2 : Manuel de l'élève (2013)

CP :

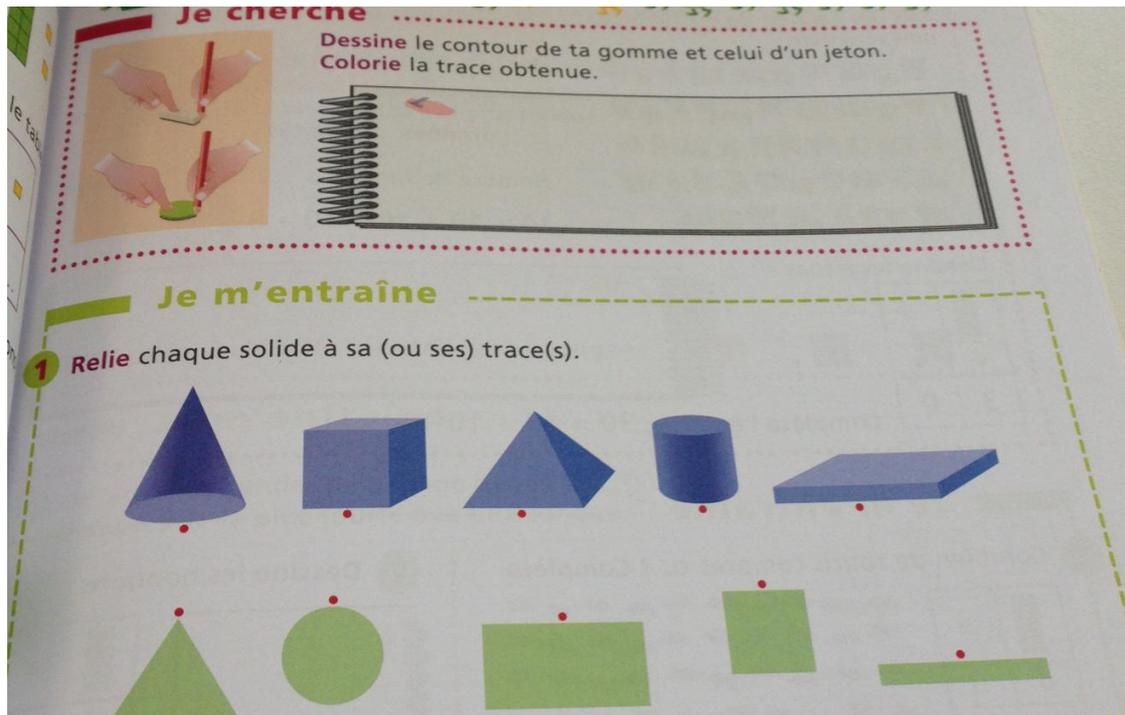
Dès les premières activités du fichier, on remarque des solides représentés en trois dimensions.

Le but de la première activité est simplement d'associer des objets « du quotidien » à des solides usuels représentés en 3 dimensions sans respecter les règles de la perspective cavalière (sans pointillés).



Les activités suivantes ont pour but d'associer à un solide une figure plane (trace). Il y a une limite ici à cette activité puisque chaque solide n'est associé qu'à une seule figure plane. Or, tous les solides ont des faces différentes sauf le cube.

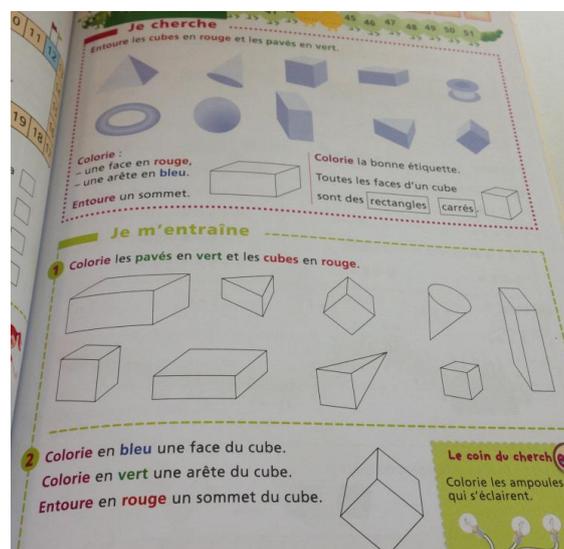
De plus, il est demandé à l'élève de reproduire le contour de sa gomme. Or, en fonction de l'état de celle-ci, on risque de ne pas obtenir un rectangle.



Le but de la troisième page est d'introduire le vocabulaire relatif aux solides : faces, arêtes, sommets, pavé droit, cube.

Deux exercices sur trois ont pour objectif de différencier le pavé droit du cube grâce à une représentation en trois dimensions. Or, il est particulièrement difficile de différencier ces deux solides grâce à une représentation de type perspective puisqu'une des caractéristiques de la perspective est de déformer certaines faces.

De plus, la représentation des solides n'est pas conventionnelle puisqu'elle n'utilise pas les pointillés.

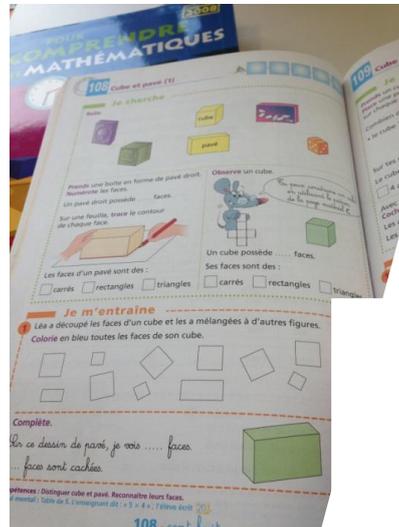


CE1 :

Comme pour le manuel de CP, les solides sont représentés en 3 dimensions sans introduction préalable.

L'objectif de ces différentes activités est de mettre en évidence le nombre de faces et la forme des faces du pavé droit et du cube.

Le dernier exercice soulève une caractéristique de la représentation en trois dimensions : certaines faces peuvent être cachées.

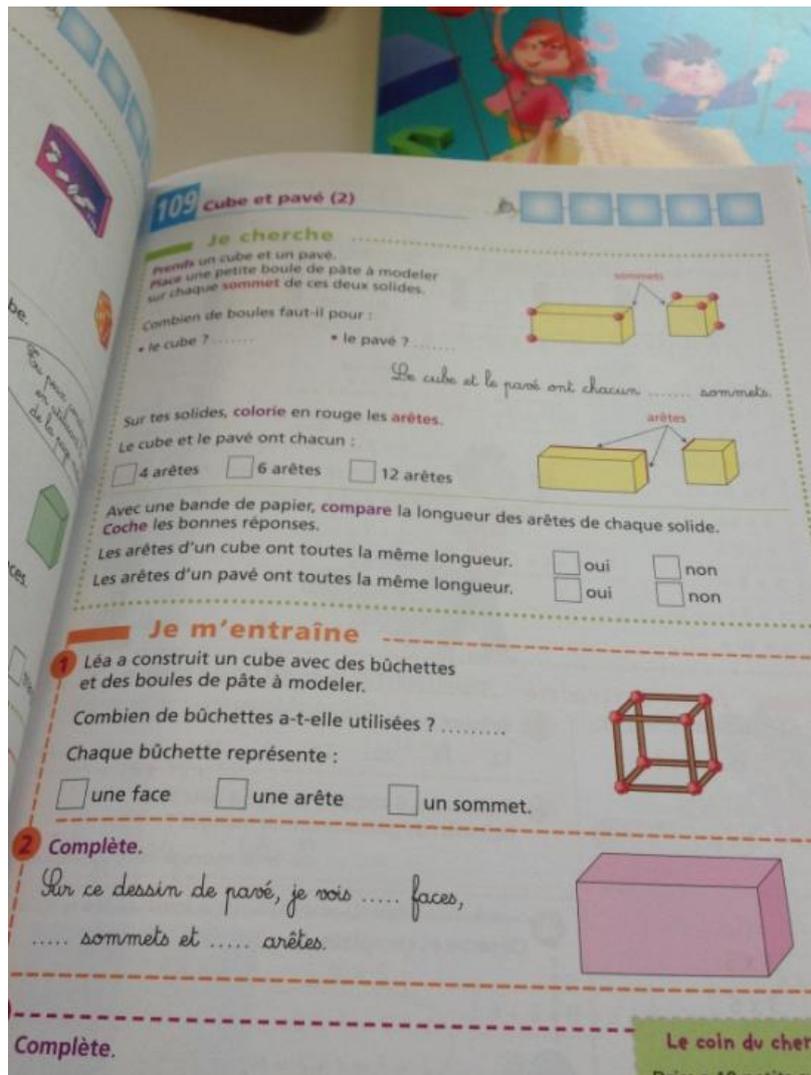


L'objectif des activités présentes sur la deuxième page est de mettre en évidence le nombre de sommets, le nombre d'arêtes et la taille des arêtes du pavé droit et du cube.

Les questions posées aux élèves ne les mettent pas devant une situation problème et évitent certaines difficultés. En effet, puisque sur les représentations du cube et du pavé droit on compte 9 arêtes (les arêtes cachées n'étant pas représentées), il aurait fallu proposer la réponse « 9 arêtes » pour mettre justement en évidence que certaines sont cachées.

Le dernier exercice soulève également une caractéristique de la représentation en trois dimensions : certaines faces, certains sommets et certaines arêtes peuvent être cachés.

Seulement les élèves peuvent répondre correctement à cet exercice sans se rendre réellement compte de ce que cela signifie en termes de représentation des solides.



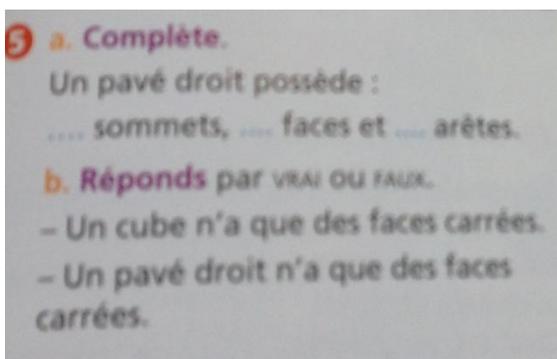
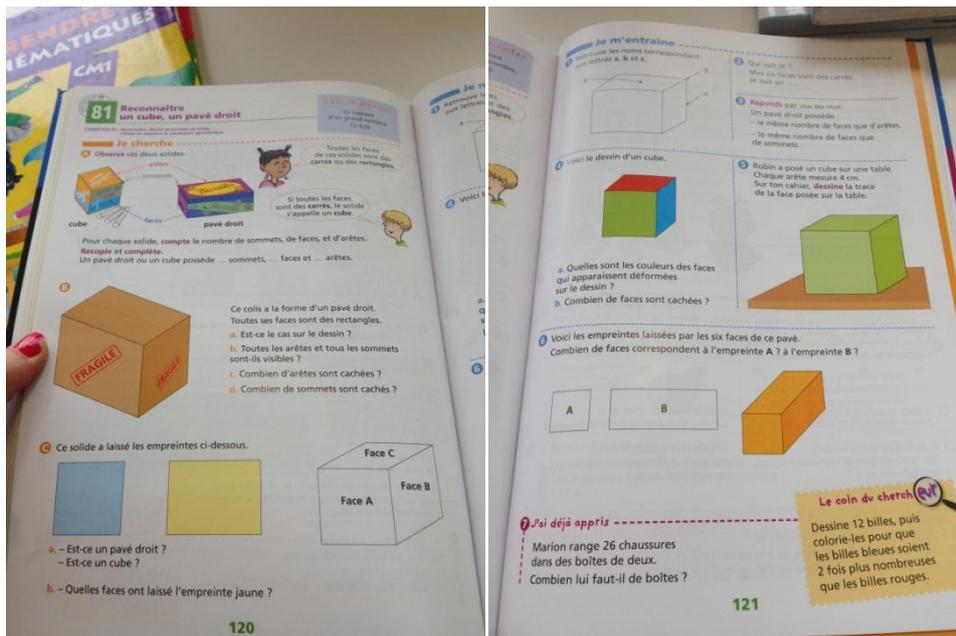
CE2 :

La remarque suivante peut de nouveau être faite : les solides sont représentés en volume.

L'objectif de la double-page est de différencier le cube du pavé droit.

On cherche à réaliser la carte d'identité du cube et la carte d'identité du pavé droit.

Les exercices « Je cherche B » et « Je m'entraîne 4 » mettent en évidence les propriétés de la représentation en trois dimensions (faces, arêtes et sommets cachés – faces « déformées »)



L'activité de bilan n'a pour seul objectif des connaissances.

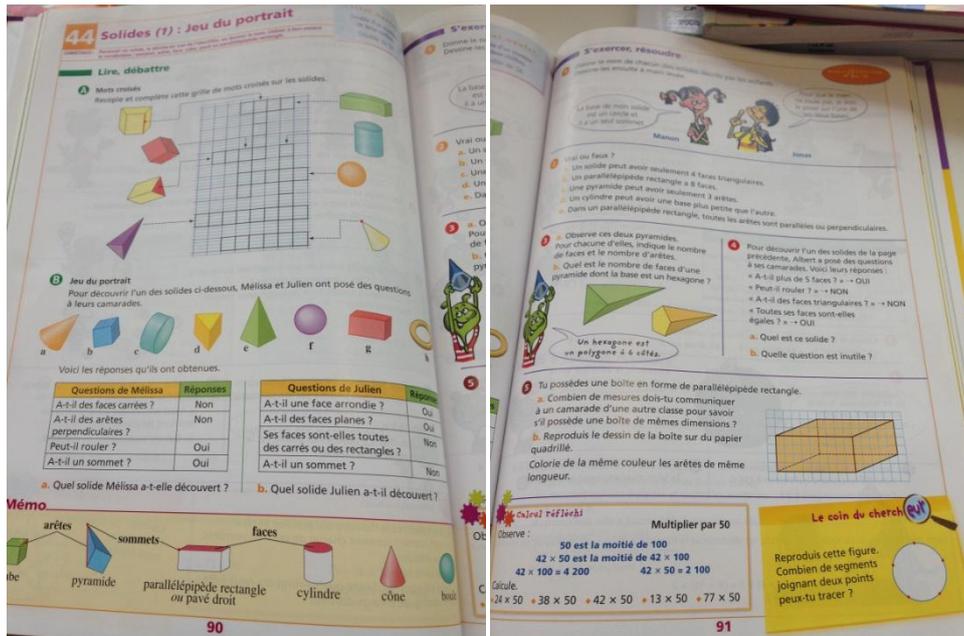
CM1 :

L'objectif principal de la première double-page dédiée aux solides est le vocabulaire (mots fléchés – solides usuels, arêtes, sommets, faces).

Il faut également retrouver un solide grâce à une série de questions/réponses le concernant (retrouver un solide à partir d'une description).

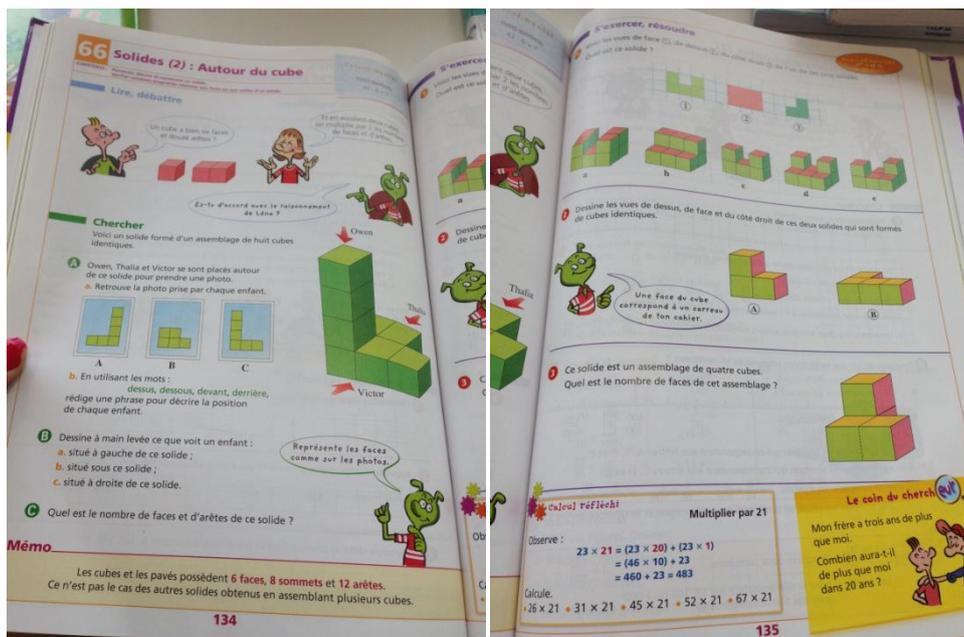
On trouve sur cette double-page une première représentation d'un solide en perspective cavalière (pointillés). Les élèves doivent la reproduire. L'apparition des pointillés n'est pas du tout étayée. De plus, il faut colorier de la même couleur les arêtes qui ont la même longueur.

Or, les longueurs se soient pas conservées lorsque l'on représente une figure grâce à la perspective cavalière et ceci n'est pas du tout mis en évidence.

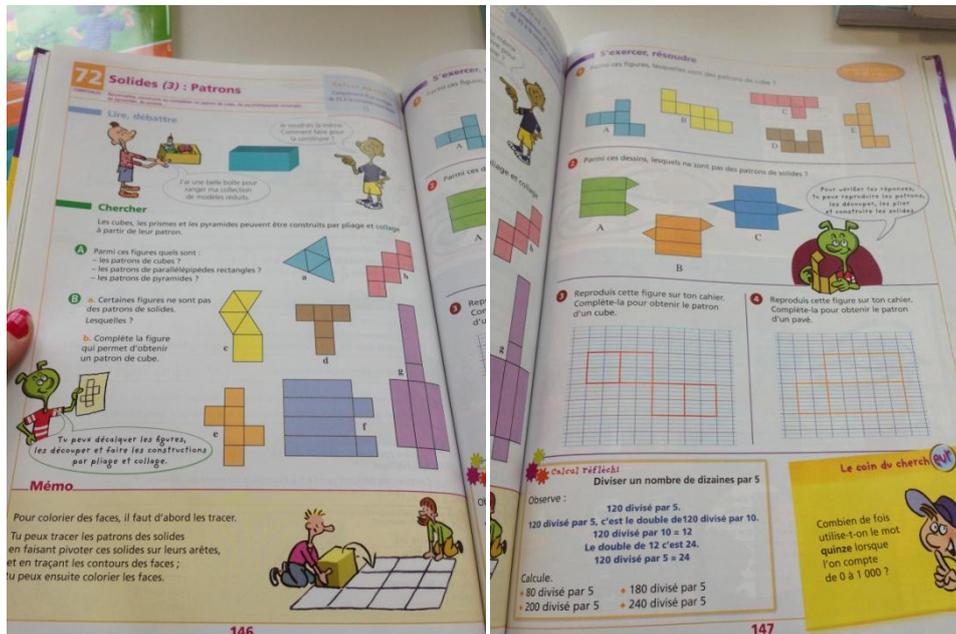


La deuxième double-page travaille sur la possibilité d'assembler plusieurs cubes pour obtenir des solides variés. On travaille sur la trace et sur les différents points de vue que l'on peut avoir d'un même solide.

Pour répondre aux différentes questions, les élèves doivent être capables de bouger, tourner et retourner les différents solides dans leur tête et d'imaginer le point de vue que d'autres peuvent avoir d'un même solide. C'est une activité qui se révèle très difficile surtout si les élèves n'ont pas le matériel adéquat.



La troisième double-page travaille sur les patrons. Il faut retrouver les patrons du cube, du pavé droit et de la pyramide et compléter un patron du cube et du pavé droit.

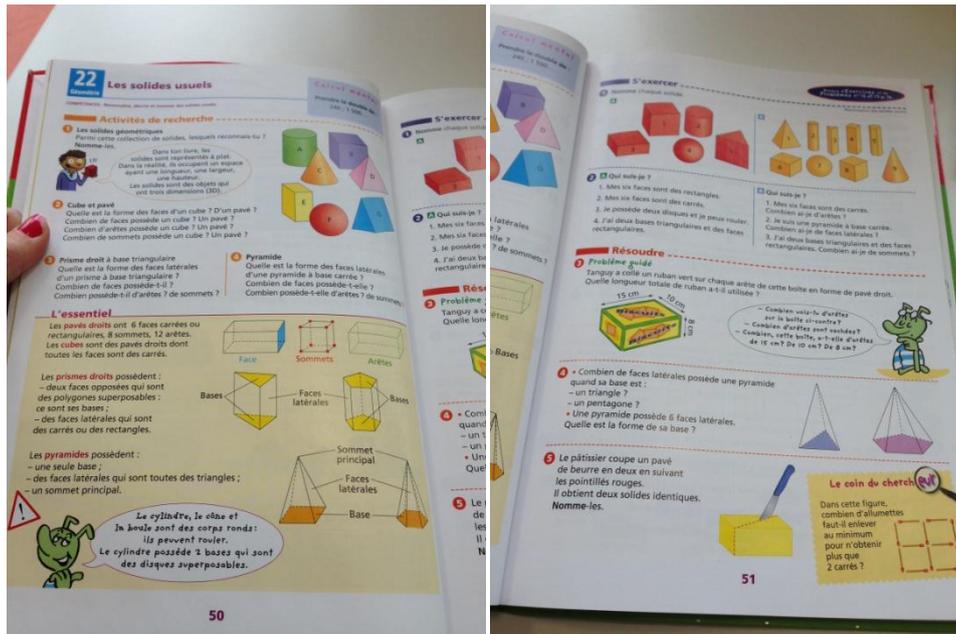


CM2 :

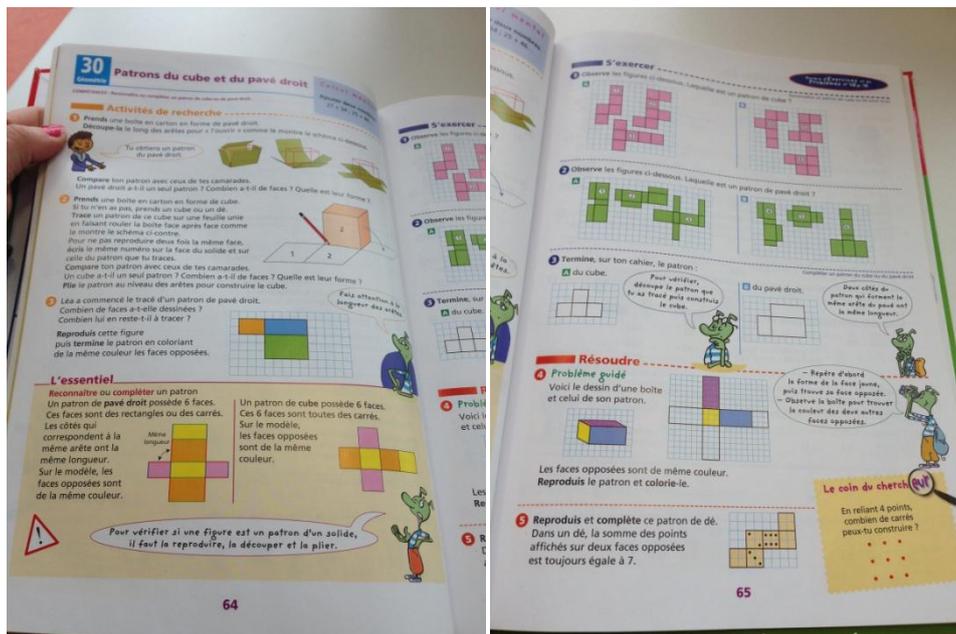
La première double-page est également consacrée à un travail sur le vocabulaire : pavé droit, cube, prisme droit, pyramide, face, sommet, arête, base, face latérale, sommet principal.

Les élèves doivent retrouver un solide grâce à une description. Ils doivent également répondre à un problème de mesure en n'omettant pas les arêtes cachées (qui ne sont pas représentées).

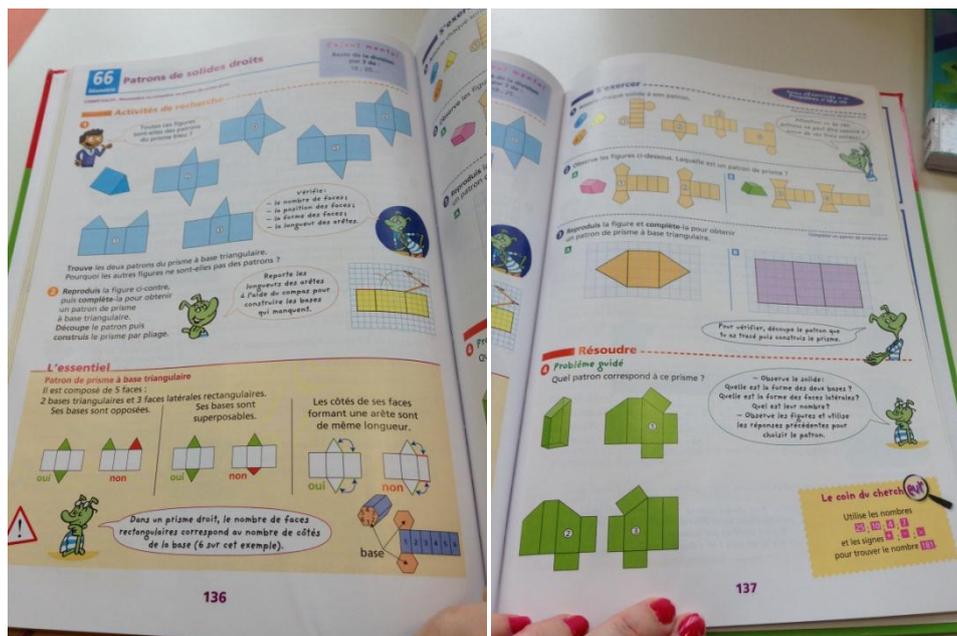
On remarque que la perspective cavalière est utilisée dans la leçon « L'essentiel » sans être expliquée et qu'elle est ensuite réutilisée dans l'exercice « Résoudre 2 »



La deuxième double-page a pour objet les patrons du cube et du pavé droit. Il est mis en évidence qu'il peut y avoir plusieurs patrons pour un même solide. Des méthodes pour réaliser ou compléter le patron d'un solide sont explicitées.



La double-page suivante propose un travail sur les patrons des solides droits. Le travail est identique ou presque au travail sur les patrons du cube et du pavé droit.



Conclusion de l'étude des manuels Pour comprendre les mathématiques

Le manuel Pour comprendre les mathématiques fait le choix de représenter dès le CP les solides au moyen d'une représentation en trois dimensions. Les solides seront ensuite toujours représentés de la même façon jusqu'en CM2. On remarque qu'à partir du CM1 certains solides (en particulier dans les leçons) sont représentés au moyen de la perspective cavalière.

Alors que la représentation en trois dimensions est utilisée du CP au CM2, elle n'est à aucun moment explicitée aux élèves. Seuls quelques exercices cherchent à mettre en évidence que certaines faces peuvent être cachées. Seulement, ces exercices ne constituent en aucun cas des situations-problème puisque le travail est « mâché » grâce à des propositions qui évitent les erreurs. En CM1, il est demandé de reproduire la représentation en perspective cavalière d'un solide mais il n'est pas expliqué aux élèves les caractéristiques de celle-ci.

Pour conclure, le manuel Pour comprendre les mathématiques utilise la représentation en trois dimensions du CP au CM2 et la perspective cavalière à partir du CM1 sans jamais montrer à l'élève les caractéristiques de celles-ci. Pour certains élèves cet implicite peut être un véritable obstacle en particulier pour décrire un solide : oubli des faces, arêtes ou sommets cachés et non prise en compte de la déformation des faces.

CONCLUSION

Pour conclure sur l'étude des manuels Cap' Maths et Pour comprendre les mathématiques, on remarque que les compétences liées à la représentation en trois dimensions et à la perspective

cavalière (en particulier la lecture de ses représentations) n'est pas prise en compte de la même manière selon les manuels. Alors que Cap' Maths met en place une réelle progression tout au long de ses manuels pour permettre aux élèves d'appréhender ces notions, Pour comprendre les mathématiques utilise ses représentations très librement et sans explicitation.

3- L'EXPERIMENTATION EN CLASSE DE LA SITUATION D'APPRENTISSAGE « LE SOLIDE CACHE »

Après avoir étudié les programmes de l'école primaire, du collège et deux manuels, je me suis demandé quelles étaient les connaissances d'élèves de CM sur les solides.

Je voulais savoir dans un premier temps s'ils étaient capables de décrire un solide et comment ils le faisaient. Dans un second temps, il m'intéressait de voir comment ils s'y prenaient pour représenter un solide.

J'ai donc décidé d'expérimenter la situation « le solide caché » dans une classe de CM1-CM2 ordinaire composée de 8 filles et 15 garçons.

L'enseignant propose un lot de solides aux élèves. Un élève « stagiaire » sort de la classe. Pendant ce temps, l'enseignant désigne un solide. Une partie des élèves restant doit écrire la description du solide choisi, l'autre partie de la classe doit réaliser un dessin pour permettre à l'élève « stagiaire » de retrouver le solide. Une fois que l'ensemble des élèves est prêt, l'élève « stagiaire » interroge ses camarades dans le but de deviner le solide choisi par l'enseignant.

Plusieurs variables entrent en compte. Le nombre de solides présents dans le lot doit être réfléchi. Une collection de dix solides semble raisonnable. Les solides du lot doivent également être choisis en connaissance de cause. En choisissant des solides non usuels et donc moins connus des élèves, les élèves ne seront pas tentés de faire des descriptions du type « C'est un cube ». Les solides désignés par l'enseignant doivent être pertinents. Le nombre de parties réalisées en classe doit permettre aux élèves d'entrer dans l'activité sans les lasser. En réalisant quatre parties, les élèves restent concentrés.

Cf. Fiche de préparation « Le solide caché »

LA DESCRIPTION DES SOLIDES

J'ai pu observer, en analysant les productions des élèves, des stratégies différentes.

1- Vocabulaire spécifique de la géométrie dans l'espace

Tout d'abord, certains élèves sont capables de décrire les solides en utilisant le vocabulaire spécifique de la géométrie dans l'espace : arêtes, faces, sommets.

① 2 face ronde
0 sommet
0 arête
tous un coter rond

« 2 face ronde
0 sommet
0 arête
tous un coter rond »

④ Il a 6 côtés et 4 arêtes.

« Il a 6 côtés et 4 arêtes. »

Ces descriptions utilisent le vocabulaire adéquat mais ne sont pas forcément correctes : certains sommets, certaines arêtes et certaines faces n'ont pas été comptabilisés ce qui ne permet pas forcément de retrouver le solide qui a été décrit.

Pour ces élèves il suffit de mettre en évidence qu'il est important de ne rien oublier quand on comptabilise les différentes composantes d'un solide. De plus, il faut leur montrer que ces trois informations ne sont parfois pas suffisantes pour décrire un solide : la nature des faces est une autre information à prendre en compte.

2- Description des faces sans vocabulaire spécifique

D'autres élèves tentent de décrire le solide en décrivant chacune des faces sans vocabulaire spécifique.

② il a une surface plate et une arondi

« Il a une surface plate et une arondi »

Pour ces élèves, il est important de montrer qu'un vocabulaire précis et « universel » permet d'éviter une certaine « subjectivité » et de décrire plus facilement un solide.

3- Description du type « ça ressemble »

Certains autres élèves passent par une description du type « ça ressemble à ». Les élèves assimilent alors le solide à un objet du quotidien qui lui ressemble.

① Il est rond
Il a la forme d'une boîte de conserve

« Il est rond
il a la forme d'une boîte de conserve »

③ C'est la moitié de la lune

« C'est la moitié de la lune »

Il est urgent de montrer à ces élèves que l'on ne peut pas toujours s'en sortir avec ce type de description (limite de ces descriptions) et que c'est trop subjectif. En effet, un élève peut penser qu'un solide ressemble à un diamant par exemple alors qu'un autre élève peut trouver que ça ressemble plutôt à une pyramide égyptienne.

4- Utilisation du vocabulaire spécifique à la géométrie plane

Enfin, d'autres élèves utilisent le vocabulaire de la géométrie plane : figures planes, côtés, etc.

④ Il a 8 cotes rond

« Il a 8 cotes rond »

On remarque d'ailleurs que le mot côté est utilisé à mauvais escient puisqu'il ne cherche pas à désigner une arête comme on pourrait l'imaginer mais une face.

④ Il a deux côtés oposé et ils sont ronds et ^{il} 6 autres côté

« Il a deux côtés oposé et ils sont rond et il 6 autre côté »

① Les côtés son rond

« Les côtés son rond »

② Il a 6 côtés, ils sont tousse plas et les deux côté oposés sont de la même taille.

« Il a 6 côtés, ils sont tousse plas et les deux côté oposé sont de la même taille »

Le travail à effectuer avec ces élèves tourne autour de l'importante d'un vocabulaire très précis.

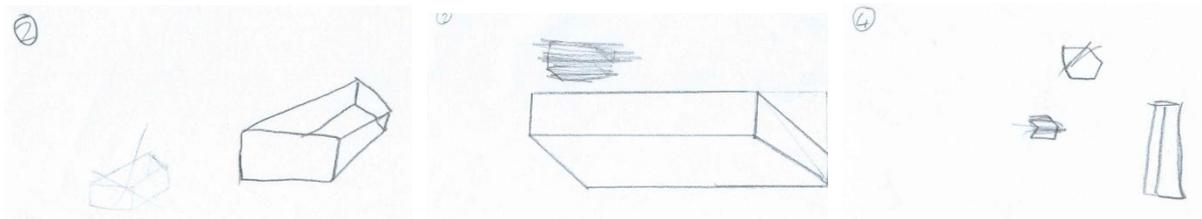
LA REPRESENTATION DES SOLIDES PAR LE DESSIN

Afin de représenter les solides par le dessin, les élèves ont mis en place des stratégies différentes : essais de perspective, représentations des différentes faces du solide.

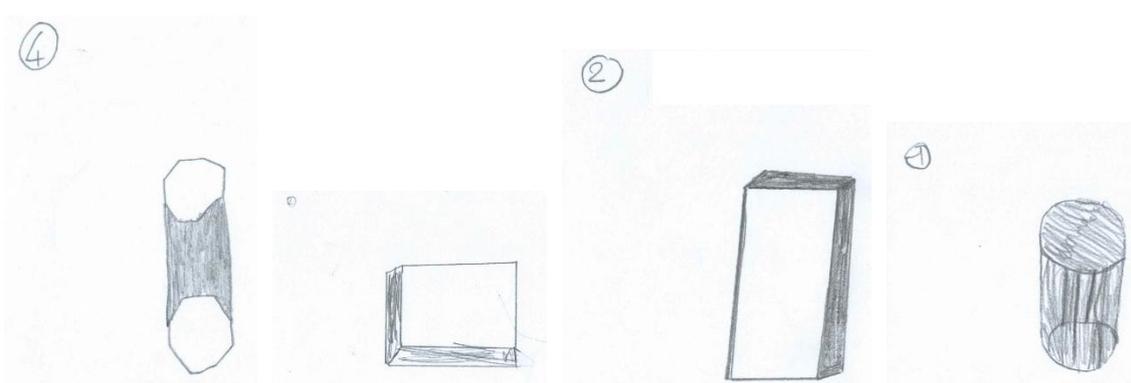
1- Essais de perspective

On remarque très rapidement que la plupart des élèves ont réalisé des « essais de perspective » pour représenter le solide caché.

Certains élèves parviennent à percevoir la projection.



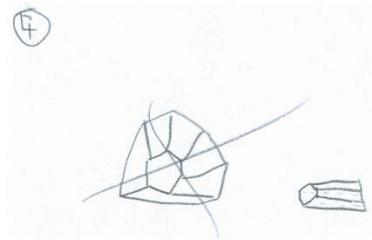
Certains élèves essaient de montrer le volume en grisant certaines faces ou parties du solide.



D'autres se rapprochent davantage de la perspective cavalière en utilisant les pointillés pour les arêtes qui sont cachées.



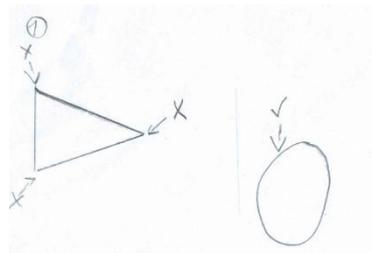
Enfin il est à noter que certains élèves sont capables de percevoir un solide sous différents points de vue.



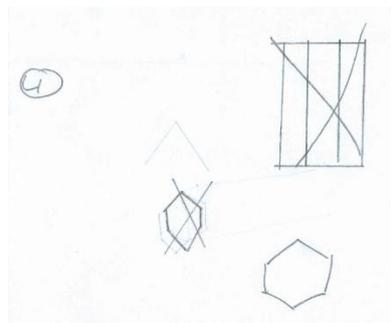
Il faut valoriser le travail de ces élèves mais leur montrer que c'est trop difficile pour le moment et qu'ils apprendront à représenter les solides en utilisant la perspective cavalière quand ils seront au collège. Le but est de les amener vers une autre façon de représenter le solide : représenter les faces du solide pour arriver ensuite au patron du solide.

2- Représentation des différentes faces du solide

Il arrive que certains élèves mettent une autre stratégie en place : celle qui cherche à représenter chacune des faces du solide.



Certaines de ses représentations tendent même vers le patron du solide.



Il faut montrer à ces élèves que leur représentation du solide est adéquate et adaptée à leurs capacités. Il reste à travailler sur cette représentation pour tendre vers le patron du solide.

TRANSCRIPTION DE L'ENREGISTREMENT

Suite à cette séance, il m'a paru intéressant d'étudier l'enregistrement afin de savoir qui de la description ou du dessin est le plus efficace pour parvenir à un résultat juste, et de connaître les stratégies des élèves « stagiaires » pour arriver au résultat.

Introduction – présentation des « objets »

Mise en place matériel

Plier la feuille en 4. Une case correspondant à une manche. Numéroté les cases.

Explication jeu 2'54

« Les dessins on les fait en 3D ? »

L'enseignante n'oblige pas les élèves à utiliser la règle.

L'enseignante n'insiste pas sur le fait qu'il ne faut pas donner le nom de l'objet (réponse) mais qu'il faut décrire l'objet.

1^{ère} manche 5'06

A. sort de la classe – Les CM2 décrivent le solide (texte), les CM1 le représentent (dessin).

Objet choisi : cylindre

Enseignante : « Non, non, non on ne gomme pas ! »

A. choisit : (8'12)

- Une description (P.)
- Un dessin

A. trouve ! (grâce au dessin)

2^{ème} manche 9'40

N. sort de la classe – Les CM2 représentent le solide (dessin), les CM1 le décrivent (texte).

Objet choisi : pavé droit

L'enseignante impose de commencer par choisir une description.

N. choisit : (12'18)

- Une description (A.) N. hésite entre deux solides
- Un dessin (L.)

N. trouve ! (grâce au dessin)

Enseignante : « Est-ce que quelqu'un sait comment ça s'appelle ? »

Le terme « pavé droit » ne ressort pas.

3^{ème} manche

14'30

S. sort de la classe – Les CM2 décrivent le solide (texte), les CM1 le représentent (dessin)

Objet choisi : demi-sphère

Enseignante : « On évite de gommer, ça m'intéresse ce que vous faites, je préfère que vous fassiez une croix plutôt que vous gommiez »

S. choisit : (17'00)

- Une description (M.)
- Un dessin (A.)

S. trouve ! (grâce au dessin)

4^{ème} manche

18'16

L. sort de la classe – Les CM2 représentent le solide (dessin), les CM1 le décrivent (texte).

Objet choisi : pavé droit à base hexagonale

CM2 : « Je suis nul en dessin » « Je suis trop nulle en dessin »

L. choisit : (22'30)

- Une description « il a deux côtés opposés » (T.)
- Un dessin

L. fait un choix mais ne trouve pas le solide choisi.

- Une description (T. R)
- Un dessin (A.)

L. trouve ! (grâce au dessin)

Fin de séance, les ramasseurs viennent chercher les feuilles.

L'enregistrement m'a amené à me demander comment les élèves « stagiaires » ont fait pour trouver le solide que j'avais choisi. Quelle stratégie avait-il mis en place ?

Je remarque alors que les élèves ont trouvé la bonne réponse grâce au dessin et non à la description. Or les dessins sont pour la plupart tracés à main levée et approximatifs. On peut

en déduire que les élèves sont déjà capables de représenter des solides de manière assez « précise » pour que l'on puisse retrouver le solide parmi une collection.

A contrario, les descriptions sont soit erronées, soit imprécises, soit incomplètes, ce qui ne permet pas aux élèves de retrouver le solide parmi une collection.

De plus, pour trouver la réponse le plus rapidement possible, les élèves se tournent vers une représentation « graphique ». Il semble que la représentation, aussi imprécise soit elle, permet aux élèves de s'approcher plus facilement du « solide caché » que les descriptions (en particulier les descriptions utilisant le vocabulaire spécifique de la géométrie). Ceci peut s'expliquer par une difficulté rencontrée par une grande partie des élèves : comprendre et décrypter le « message » d'un camarade. C'est donc un problème lié au rôle de récepteur dans une situation de communication. Deux obstacles apparaissent : il faut que le message de l'émetteur soit suffisamment clair et compréhensible et il faut que le destinataire soit dans la capacité de décrypter le message (connaissance du vocabulaire associé en particulier).

4- UTILISATION DE LA SITUATION « LE SOLIDE CACHE » POUR CONSTRUIRE UNE SEQUENCE AUTOUR DES SOLIDES EN CYCLE 3

La situation « le solide caché » telle qu'elle vous a été présentée n'est pas une situation d'apprentissage, il s'agit avant tout d'une évaluation diagnostique qui va permettre de mettre en place une séquence –s'appuyant sur les connaissances des élèves- autour des solides. Elle peut cependant être utilisée comme une situation d'apprentissage dans d'autres conditions.

Cette séquence va se découper en 2 phases :

- une première phase qui va travailler autour de l'objectif « Décrire » et « Reconnaître »
- une deuxième phase qui cherchera à trouver autour des patrons « Représenter »

ACTE 1 : DECRIRE UN SOLIDE ET RECONNAITRE UN SOLIDE A PARTIR D'UNE DESCRIPTION

L'objectif dans un premier temps est d'amener l'élève à se rendre compte que pour être efficace, la description se doit d'être précise.

En s'appuyant sur l'analyse de la description « Le solide caché » on remarque plusieurs comportements. Le but de cette phase est de montrer aux élèves l'intérêt d'utiliser le vocabulaire spécifique à la géométrie dans l'espace : arêtes, sommets, faces.

Pour parvenir à cet objectif, il faut passer par les trois situations suivantes.

Scène 1 : Le jeu du portrait

L'objectif est d'amener les élèves à utiliser le vocabulaire spécifique de la géométrie dans l'espace pour décrire un solide et non leurs propriétés qualitatives. Ainsi, l'utilisation d'un vocabulaire spécifique prend sens.

L'enseignant présente un lot de solides aux élèves. Les élèves sont par 4 et chaque groupe a un lot de solide à sa disposition. Un « farceur » cache un des solides du lot de l'enseignant dans une boîte. Par groupe, les élèves doivent imaginer des questions qui permettent de retrouver le solide que le « farceur » a caché. Les questions qu'ils imaginent doivent être « fermées » : le « farceur » doit pouvoir y répondre par « oui » ou « non ». Chaque groupe doit donc construire une liste de questions qu'il posera ensuite au « farceur »

Dans un premier temps, le rôle du « farceur » peut être donné à un ou deux élèves. Cette variable permet de recueillir davantage d'interactions d'élèves pour l'enseignant.

L'enseignant, pendant ce temps, note au tableau les questions posées et les réponses formulées par le(s) « farceur(s) ». Après chaque question, l'enseignant demande si tous les groupes ont trouvé le solide. Le « jeu » s'arrête lorsque tous les groupes ont trouvé le solide caché.

Suite à ce jeu, un temps de réflexion et d'argumentation est nécessaire. L'enseignant reprend les questions des élèves une à une et demande, pour chacune d'entre elles, si elles sont utiles et si elles nous ont permis d'avancer dans la recherche. Un début de conclusion peut alors être tiré avec les élèves :

Pour retrouver un solide, il faut savoir :

- *le nombre d'arêtes,*
- *le nombre de sommets,*
- *le nombre de faces,*
- *la forme des faces.*

Suite à cela, le jeu reprend. L'enseignant prend alors le rôle du « farceur » dans le but d'éviter les erreurs de comptage et de rythmer davantage l'activité. Après chaque partie les élèves vérifient l'utilité de chacune des questions posées. Un ensemble de 3 parties semble raisonnable.

A la fin de l'activité, une trace écrite pourra être réalisée :

- les caractéristiques d'une description précise,
- le rappel du vocabulaire spécifique des solides grâce à un schéma par exemple (arêtes, faces, sommets)

Pour que l'activité fonctionne, il faut réfléchir à différentes variables :

- les solides présents dans le lot,
- les solides choisis pour être caché,
- le rôle du « farceur ».

Scène 2 : Correction de leurs propres productions

Une fois que les caractéristiques qui permettent une bonne description ont été mises en évidence, il peut être intéressant de travailler sur leurs productions (« Le solide caché ») afin

qu'ils prennent conscience des raisons pour lesquelles leurs descriptions n'ont pas été efficaces.

Ces raisons peuvent être variées :

- descriptions subjectives du type « ça ressemble »,
- vocabulaire imprécis,
- manque d'informations,
- erreur de comptage.

Pour faire cela, l'enseignant pourra utiliser des productions représentatives qui permettront, après discussion, de rendre les caractéristiques d'une description réussie vraiment nécessaires.

Scène 3 : décrire un solide et reconnaître un solide grâce à une description – entraînement

L'objectif est de mettre les élèves dans une situation de communication. Cette situation permet de réaliser deux tâches : écrire la description d'un solide, retrouver un solide à partir d'une description. Une nouvelle fois le langage spécifique prend sens puisque pour bien se comprendre les élèves se doivent d'utiliser un langage universel.

Les élèves disposent d'un lot de solides. Chaque élève choisit secrètement un des solides et en fait sa description. Une fois la description réalisée, les élèves échangent leurs descriptions et doivent retrouver le solide décrit par l'autre élève. En cas de désaccord, une discussion se met en place entre les deux élèves, puis entre deux binômes, puis avec l'ensemble de la classe si besoin est.

D'autres exercices d'application peuvent être proposés comme par exemple le jeu du « Qui suis-je ? ».

ACTE 2 : REPRESENTER UN SOLIDE

En se rapportant aux programmes de l'école primaire on remarque que l'objectif de cet acte ne peut pas être la représentation du solide grâce à la perspective cavalière. Or, si on reprend les productions des élèves durant la situation « le solide caché », on voit bien que c'est vers ce type de représentation que les élèves tendent. De plus, on remarque que les élèves voient ce type de représentation comme étant très efficace. Il va donc falloir amener les élèves à rencontrer les limites de ce type de représentation pour qu'ils se dirigent vers une autre

représentation du solide : la représentation des différentes faces. Cette représentation des différentes faces permettra de les amener vers la réalisation des patrons des solides.

Scène 1 : Les limites des essais de perspective – Représenter un solide

Pour montrer aux élèves que les essais de perspective ne sont pas suffisants et qu'il y a un moyen plus simple de représenter un solide (en représentant ses différentes faces), il peut être intéressant de proposer un exercice de dessin aux élèves.

Les élèves sont par binôme. L'enseignant propose un solide caché dans une boîte. Les élèves essaient de le représenter. Le but est qu'un autre groupe puisse retrouver dans un lot de solides celui qui a été représenté rien qu'en observant le dessin. Il faut que les élèves réalisent un grand dessin pour la mise en commun.

On échange les dessins des élèves et on présente le lot de solides. Les élèves doivent retrouver celui qui a été représenté parmi le lot.

L'activité est réitérée en changeant les solides. La liste des conditions évolue.

A la suite de cette activité, la liste des conditions peut devenir la trace écrite.

Pour réussir à représenter un solide par un dessin, il faut :

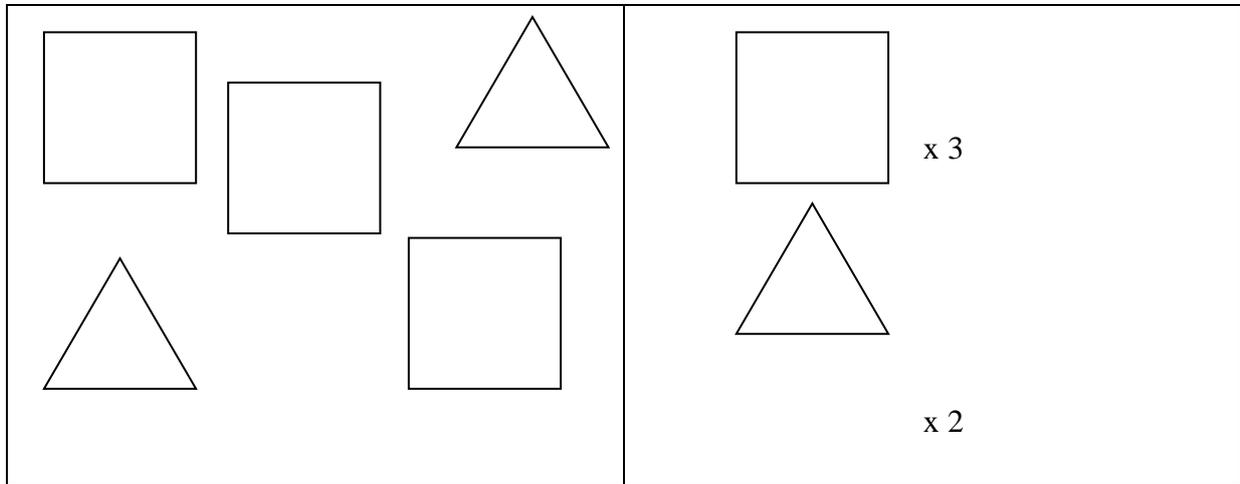
- *bien dessiner les faces pour ne pas les confondre*
- *faire le bon nombre de faces*
- *dessiner toutes les faces (même celles qui ne sont pas visibles)*
- *montrer ce qui s'attache avec quoi (flèches, couleurs)*

La trace écrite peut être complétée avec les dessins des élèves pour montrer l'évolution de ceux-ci.

La situation admet différentes variables à étudier :

- le choix du solide à représenter,
- le choix du lot de solides,
- la présence ou non du lot de solides durant le dessin,
- la présence ou non de l'instrument de mesure.

On pourra passer à la scène suivante une fois que l'ensemble des élèves aura touché aux limites des essais de perspective et qu'ils en sont arrivés à un des types de représentations suivantes :



Scène 2 : Construire un solide

Cette scène complète la scène 1 de l'acte 2 et réinvestit l'acte 1.

La situation a pour objectif de montrer aux élèves qu'un solide est caractérisé par le nombre et la nature de ses faces. De même, ils devront se rendre compte qu'il y a des relations entre les faces : la relation d'incidence en particulier.

Les élèves sont par deux. Ils doivent compléter un bon de commande de faces afin de réaliser le solide que l'enseignant a caché. Un élève de chaque binôme va voir le solide et ramène des informations. Il ne peut aller voir le solide qu'une fois. Pour remplir le bon de commande, les élèves ont un catalogue de faces à leur disposition sur leur table (il ne peut pas être déplacé).

Une fois les bons de commande réalisés, on peut imaginer une confrontation par groupe de 4 et une mise en commun ensuite. Durant la mise en commun les élèves se demandent si la commande permet ou non de réaliser le même solide.

Les élèves peuvent ensuite modifier leurs bons de commande si besoin est et fabriquer le solide.

L'exercice peut ensuite être réitéré dans le but d'aborder les relations d'incidence.

De cette situation la trace écrite suivante peut être réalisée :

Pour construire un solide il faut avoir :

- le bon nombre de faces de chaque forme ;
- choisir les bonnes formes de faces ;
- choisir des faces qui ont un côté de même longueur pour pouvoir les attacher.

Pour que l'activité arrive à son terme, il faut réfléchir aux variables suivantes :

- le choix des solides et le contenu du catalogue de face,
- la manière de prendre les informations,
- la possibilité de prendre des mesures.

Scène 3 : Assembler les faces d'un solide

Les objectifs de cette scène sont de montrer aux élèves que n'importe quel assemblage ne permet pas forcément de construire un solide, de définir le patron et de montrer qu'un solide peut admettre plusieurs patrons.

Les élèves travaillent individuellement. Ils ont devant eux un solide. Ils doivent construire exactement le même solide en traçant un dessin sur la feuille qu'ils ont à leur disposition. Ils ont également à leur disposition un ensemble de gabarits.

Une fois le dessin réalisé une mise en commun est nécessaire avant la fabrication du solide (grâce à du ruban adhésif). La mise en commun cherche à savoir si les dessins réalisés permettent de fabriquer le même solide. On pourra par exemple réaliser un tableau à trois colonnes : ça fonctionne, on ne sait pas, on est sûr que ça ne fonctionne pas. A chaque fois, les élèves doivent argumenter leurs choix.

On réitère ensuite l'activité en amenant les élèves à se rendre compte qu'un dessin d'un seul tenant est plus efficace pour fabriquer ensuite le solide.

L'éventuelle trace écrite de cette situation peut être la suivante.

Pour fabriquer un solide :

- il faut le même nombre de faces que le solide,
- il faut des faces identiques à celles du solide,
- il ne faut pas que les faces se superposent quand on plie.

Les assemblages d'un seul tenant qui permettent de construire un solide sont appelés des patrons.

Les différentes variables de cette situation sont les suivantes :

- le choix du solide à fabriquer,
- la présence des gabarits des faces,
- la distance entre le solide et les élèves (si le solide est placé à distance de l'élève, il doit prendre des notes).

Scène 4 : patron de solide

Les objectifs de cette situation sont d'être capable d'anticiper si un assemblage de figures planes est le patron d'un solide, d'identifier les patrons usuels, d'être capable de reconnaître un solide à partir d'un patron.

Une première phase consiste à reconnaître et construire les patrons d'un solide (le cube par exemple). Les élèves sont par deux. Ils reçoivent plusieurs assemblages de carrés. Ils doivent indiquer pour chacun d'eux s'il s'agit d'un patron de cube ou non. Une mise en commun est ensuite réalisée. En cas de litige, il est possible de découper et d'assembler le solide. Les élèves travaillent ensuite individuellement. Ils doivent trouver des patrons du cube différents de ceux déjà présentés. La mise en commun consiste à réaliser une affiche comportant l'ensemble des patrons du cube.

Des exercices d'entraînement peuvent ensuite être proposés : retrouver le solide qui correspond à un patron donné, compléter des patrons de cube, retrouver les patrons du cube, etc.

Un travail complémentaire peut être réalisé autour des patrons du pavé droit. Un pavé droit est exposé. Les élèves travaillant par deux doivent le reproduire à l'identique (mêmes dimensions). Chaque binôme a droit à deux déplacements. Une mise en commun est effectuée avant la réalisation des pavés droits. L'obstacle majeur lié à cette activité est bien entendu la relation d'incidence entre les longueurs des faces.

Les variables relatives à ce travail sont les suivantes :

- les dimensions du pavé droit,
- la dimension de la feuille pour la prise d'informations,
- le nombre de trajets.

Des exercices d'association des différentes caractéristiques de solides peuvent ensuite être proposés. Il s'agit d'associer descriptions et patrons d'un même solide.

Une dernière scène peut être proposée en fin de cycle afin de confronter les élèves aux difficultés de la représentation en trois dimensions.

Scène 5 – représenter un solide en 3D

Les objectifs d'une telle situation sont d'amener les élèves à se rendre compte que la représentation en 3 dimensions oblige une perte d'information (perte d'information qu'il va falloir compenser) et les aider à organiser l'ensemble du dessin.

Les élèves reçoivent un solide caché dans une boîte par deux. Ils doivent réaliser un dessin qui va permettre à un groupe qui n'a pas vu le solide de fabriquer ce solide grâce à des pailles et des sommets en plastique. Les messages sont ensuite échangés. Chaque binôme construit le solide d'après le message reçu.

Une validation est réalisée entre les groupes émetteurs et les groupes récepteurs. Une comparaison est exercée entre le solide présent dans la boîte et celui fabriqué. Une mise en commun est ensuite faite afin de mettre en évidence les stratégies efficaces.

La situation est réitérée en utilisant des solides de plus en plus difficiles à représenter. En particulier des solides pour lesquels la représentation d'un seul point de vue n'est pas suffisante. Les élèves doivent se demander comment représenter la partie non visible du solide.

Une trace écrite est réalisée en fin de séance :

Pour faire un dessin efficace :

- *un seul point de vue n'est pas suffisant*
- *il faut trouver un moyen de dessiner les faces cachées*
- *il faut déformer certaines faces pour les représenter*

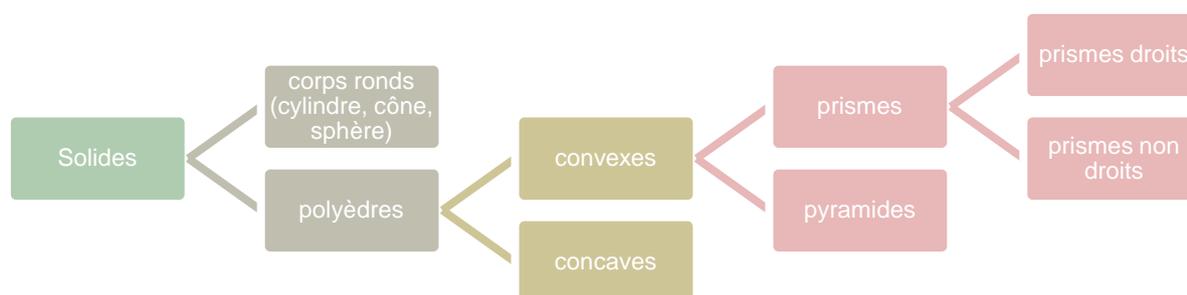
On peut ajouter à cette trace écrite leurs dessins.

Les variables de cette dernière situation sont les suivantes :

- les solides à représenter et fabriquer,
- le matériel à utiliser pour fabriquer le solide. Les pailles et sommets orientent davantage les élèves vers une représentation en 3D que l'assemblage de faces.

Les deux actes présentés précédemment ne présentent pas l'ensemble des activités qu'il est intéressant de réaliser au sein d'une séquence sur les solides.

Pour compléter ces deux actes, un travail de catégorisation et de tri peut être intéressant. A partir d'un lot de solides, les élèves classent les solides selon différents critères. Ils obtiennent alors la classification suivante



Afin de travailler plus spécifiquement les compétences liées à l'espace il peut être intéressant de proposer des situations d'agencement de solides. Une situation-problème pourra être proposée. Les élèves devront par exemple reproduire une photographie à l'identique, repérer la position du photographe, associer une photographie à un emplacement précis. C'est un moyen intéressant de travailler sur les points de vue.

Enfin, un début de travail sur la perspective cavalière pourra être proposé comme il l'est fait dans le manuel Cap' Maths. Les élèves pourraient être amenés à associer la photographie d'un solide à sa représentation en perspective cavalière (dans une même position). Ainsi, les caractéristiques de la perspective cavalière pourraient être explicitées aux élèves.

Un travail plus spécifique est également à réaliser autour des cylindres avec les CM2.

Enfin, il est important d'avoir, tout au long de la séquence, un regard réfléchi sur notre manière de représenter les solides dans nos différentes séances : traces écrites, situations d'apprentissage, évaluation. Il est important d'utiliser au maximum du matériel comme celui proposé dans la mallette pédagogique ERMEL. Pour ce qui est des différents documents fournis aux élèves il semble opportun d'utiliser des photographies de solides (utilisés en

classe). Tant que les caractéristiques de la perspective cavalière ne sont pas explicitées aux élèves, il semble que l'enseignant ne devrait pas utiliser ce mode de représentation. En effet, une utilisation trop implicite de ce type de représentation peut constituer un obstacle supplémentaire pour les élèves.

CONCLUSION

Ce travail m'a amené à me demander quelle était la place des compétences spatiales dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Pour tenter de répondre à cette question, je suis passée par différentes étapes : lectures scientifiques, études des programmes de l'éducation nationale, études de manuels et expérimentation en classe d'une situation pour construire un module d'enseignement.

Tout d'abord, mes différentes lectures m'ont permis de montrer les spécificités de l'enseignement de la géométrie dans l'espace. En particulier, deux types de compétences doivent être mises en œuvre dans cet enseignement : les compétences liées à la géométrie et les compétences liées à la structuration de l'espace.

L'étude des programmes de l'école élémentaire de 1923 à nos jours montre que les compétences spatiales ont pris une place de moins en moins importante au fur et à mesure des années. En particulier, la représentation spatiale des objets en trois dimensions a disparu des programmes de l'école élémentaire et fait à présent l'objet des programmes de mathématiques de 6^{ème}.

Ensuite, l'étude de deux manuels cherchait à montrer comment les compétences spatiales pouvaient être étudiées. En sortent des résultats très différents. Certains manuels font le choix de travailler différentes compétences spatiales : représentation spatiale, changement de point de vue, etc. D'autres, tout au contraire, considèrent les compétences spatiales comme acquises pour tous et les utilisent dans leurs activités sans même les expliciter. Il appartient donc aux enseignants de faire un choix dans l'utilisation de tel ou tel support pédagogique. En particulier, il semble que considérer les compétences spatiales acquises pour tous les élèves est une erreur.

L'expérimentation de la situation « le solide caché » a permis de montrer que la plupart des élèves sont capables de représenter un solide grâce à différentes stratégies mais surtout grâce à des essais de perspective. L'analyse de cette situation a d'ailleurs mis en évidence que ces essais de perspective permettaient en général aux élèves de reconnaître le solide en question. A contrario, la plupart des descriptions réalisées par les élèves sont trop imprécises et ne permettent pas de reconnaître le solide.

C'est en prenant appui sur ces différents travaux que j'ai cherché à construire un module d'apprentissage autour des solides qui travaille à la fois les compétences liées à la géométrie

et exigées dans les programmes et les compétences liées à la structuration de l'espace (représentation plane d'objets de l'espace, travail sur les points de vue différents, etc.)

Tout au long de ce travail, je me suis intéressée en particulier à la compétence spatiale liée à la représentation d'un objet de l'espace. L'étude de la place de cette compétence particulière dans les programmes de l'école élémentaire m'a amené à me questionner sur l'apprentissage du dessin en général à l'école. J'ai en particulier pu remarquer que dans les anciens programmes de réels objectifs de dessin étaient attendus à l'école élémentaire. Les élèves étaient en particulier tenus de réaliser des dessins d'observations « d'objets usuels simples, d'échantillons empruntés aux règnes animal et végétal ». Il me semble que les élèves ont aujourd'hui de grandes difficultés à dessiner, à représenter ce genre d'éléments. Il pourrait être intéressant de réaliser des recherches sur ce thème autour de différents axes : l'évolution des programmes de dessin à l'école élémentaire, la vision qu'on les enseignants du dessin à l'école (temps libre, moment d'apprentissage, utilité dans les apprentissages) et les réelles capacités des élèves (représenter la position d'un camarade, dessiner l'évolution d'une plante, etc.). Au terme de ces différentes recherches, il semblerait intéressant de réfléchir à des moyens d'ancrer le dessin dans la pratique de classe.

SOURCES

- Inhelder, B. & Piaget, J. (1972). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris : P.U.F.
- Inhelder, B., Piaget, J. & Szeminska, A. (1973). *La géométrie spontanée de l'enfant*. Paris : P.U.F.
- Charnay, R. & Douaire, J. (2006). *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes*. Paris : Hatier E.R.M.E.L.
- Brousseau, G. (2000). *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire ; l'étude de l'espace et de la géométrie*; Grèce : Rethymnon
- Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives I.R.E.M. de Strasbourg*, 11, 175-193.
- Leclercq, R., Mathe, A.-C. & Perrin-Glorian, M.-J. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? *Repères*, 90, 5-41.
- Berthelot, R. & Salin, M.-H. (1993-1994). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, 53, 39-56.
- Berthelot, R. & Salin, M.-H. (1999-2000). L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N*, 65, 37-59.
- Poincaré, H. (1895). L'espace et la géométrie. *Revue de métaphysique et de morale*, 631-646
- Berthelot, R. & Salin, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques. Université Bordeaux I, Bordeaux.
- MEN, *Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire*, B.O. 19 juin 2008, Hors-série n°3.
- MEN, *Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire*, B.O. 14 février 2002, Hors-série n°1.
- MEN, *Programmes de l'école primaire*, 1995
- MEN, *Les cycles à l'école primaire*, 1991

MEN, *Compléments aux programmes et instructions du 15 mai 1985 Activités géométriques*, 1986.

MEN, *Horaires Programmes et Instructions pour l'école élémentaire*, 1985

MEN, *Horaires Objectifs et Programmes Cycle Moyen*, 1980

MEN, *Programme et enseignement des Mathématiques à l'école élémentaire*, 1970

MEN, *Programmes de 1945*, 1945.

MEN, *Programmes du 28 mars 1938*, 1938.

MEN, *Instructions officielles du 20 juin 1923*, 1923

MEN, Programmes du collège Programmes de l'enseignement de mathématiques, B.O. 28 août 2008, B.O. spécial n°6.

MEN, Programmes du collège Programmes de l'enseignement de technologie, B.O. 28 août 2008, B.O. spécial n°6.

Fondation Jean Piaget. (2014). *L'œuvre*. En ligne

http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/ModuleFJP001/index_gen_page.php?IDPAGE=87&IDMODULE=46, consulté le 7 mai 2014

Jean-Luc Bregeon. (s.d.) *Structuration de l'espace et géométrie*. En ligne <http://jean-luc.bregeon.pagesperso-orange.fr/Page%201-2.htm>, consulté le 7 mai 2014

- Fiche de préparation « Le solide caché »
- Les productions des élèves durant la situation « Le solide caché »

| Séquence : Les solides Niveau : CM1 CM2 | | Séance : 1 Durée : 30' | | |
|--|---|--|--|-----------------------------|
| <u>Programmes 2008</u> <ul style="list-style-type: none"> Reconnaître, décrire et nommer les solides droits : cube, pavé, prisme (+ cylindre CM2) Reconnaître ou compléter le patron de solide droit (cube et pavé seulement pour les CM1) | | | | |
| <u>Socle commun</u> <ul style="list-style-type: none"> Reconnaître, décrire et nommer les solides usuels | | | | |
| Objectif de la séance : Evaluation diagnostique – Vérifier les acquis des élèves Repérer les connaissances des élèves (vocabulaire) Repérer leur capacité à décrire, à représenter un solide. | | | | |
| <u>Matériel :</u> « Boîte à forme » comprenant une dizaine de solides. Une feuille blanche par élève. Crayons de bois, gomme, instruments de géométrie. | | | | |
| Déroulement | | | | |
| Temps | Phase | Tâche / Consigne | Activité de l'élève Modalité d'apprentissage | Obstacles / remédiations |
| 2' | <i>Introduction – présentation des « objets »</i> | Présenter la « boîte à forme » aux élèves. Montrer aux élèves, qui restent silencieux, les différentes pièces (les différents objets sans dire « solide ») | Collectif – Oral | |
| 1' | <i>Mise en place – Matériel</i> | Plier une feuille blanche en 4, numéroter les différentes cases qui correspondent aux différentes manches du jeu. Les élèves n'ont le droit qu'au crayon de bois, à la gomme et aux instruments de géométrie. | Individuel – Manipulation | Dessin au tableau |
| 2' | <i>Explication du jeu</i> | Pour chaque manche, un élève « chercheur » sort de la classe. L'enseignant désigne un « objet ». Une partie de la classe le décrit (mots / texte), l'autre partie le représente (dessin). L'élève « chercheur » entre, interroge les élèves jusqu'à trouver l' « objet » désigné. A la manche suivante, on échange les rôles entre ceux qui écrivent et ceux qui dessinent. Répondre aux questions des élèves. | Collectif – Oral | |

| | | | | |
|----|---|--|---|---|
| 5' | <p>Manche 1</p>  | <p>L'enseignant désigne un élève qui sort de la classe. L'enseignant choisi un solide (le cylindre).</p> <p>Le groupe 1 (CM1) dessine, le groupe 2 (CM2) écrit pendant 3 minutes.</p> <p>L'élèves chercheur entre, interroge des élèves (en commençant par un texte) jusqu'à trouver le solide désigné.</p> <p>L'enseignant peut demander aux élèves comment se nomme le solide.</p> | <p>Individuel – Ecrit</p> <p>Collectif – Oral</p> | <p>Utiliser le tableau pour noter les informations reçues.</p> <p>Demander aux élèves de répéter.</p> |
| 5' | <p>Manche 2</p>  | <p>Idem que la manche 1.</p> <p>Le groupe 1 et le groupe 2 sont échangés.</p> | <p>Individuel – Ecrit</p> <p>Collectif – Oral</p> | <p>Utiliser le tableau pour noter les informations reçues.</p> <p>Demander aux élèves de répéter.</p> |
| 5' | <p>Manche 3</p>  | <p>Idem que manche 1.</p> | <p>Individuel – Ecrit</p> <p>Collectif – Oral</p> | <p>Utiliser le tableau pour noter les informations reçues.</p> <p>Demander aux élèves de répéter.</p> |
| 5' | <p>Manche 4</p>  | <p>Idem que la manche 1.</p> <p>Le groupe 1 et le groupe 2 sont échangés.</p> | <p>Individuel – Ecrit</p> <p>Collectif – Oral</p> | <p>Utiliser le tableau pour noter les informations reçues.</p> <p>Demander aux élèves de répéter.</p> |
| 5' | <p>Conclusion</p> | <p>Récupérer les productions des élèves.</p> <p>Conclure : Aujourd'hui nous avons cherché à décrire ou représenter un solide dans le but de le</p> | | |

| | | | | |
|--|--|-----------------------------------|--|--|
| | | reconnaître parmi une collection. | | |
| <p><i>Bilan :</i></p> <p>Ne pas autoriser la gomme. Dire aux élèves de barrer pour que l'on puisse voir leurs différents essais.</p> <p>Insister sur le fait que l'on ne peut pas écrire le nom du solide mais le décrire.</p> | | | | |

- **Productions d'élèves**

Voici les productions d'élèves types d'un élève de CM1 et d'un élève de CM2.

CM1 (les 9 premières productions) :

| | |
|---|--|
| <p>1- Représentation (manche 1)</p>  | <p>2- Description (manche 2)</p>  |
| <p>3- Représentation (manche 3)</p>  | <p>4- Description (manche 4)</p>  |

CM2 (les 13 productions suivantes) :

| | |
|---|--|
| <p>1- Description (manche 1)</p>  | <p>2- Représentation (manche 2)</p>  |
| <p>3- Description (manche 3)</p>  | <p>4- Représentation (manche 4)</p>  |

1



2

Elle a 6 faces, 2 ont la même taille, les 4 autres ont aussi la même taille.

Il y a 8 sommets.

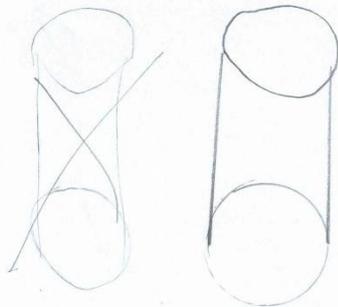
3



4

Elle a 6 faces et 2 côtés de la même taille. il y a 6 côtés de la même taille.

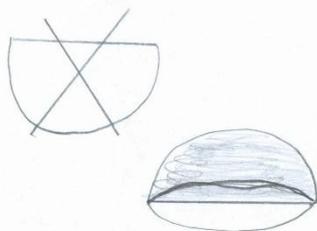
1



2

ces deux sont des cubes ~~en~~ en rectangles.

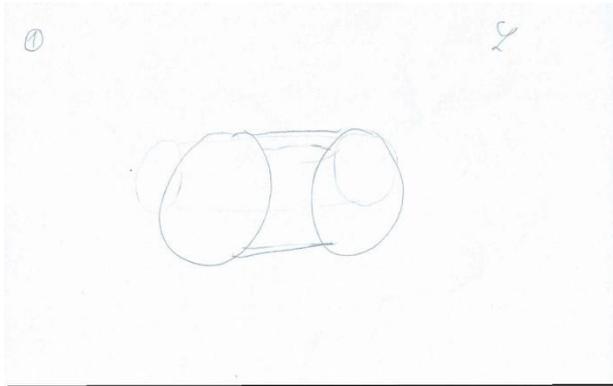
3



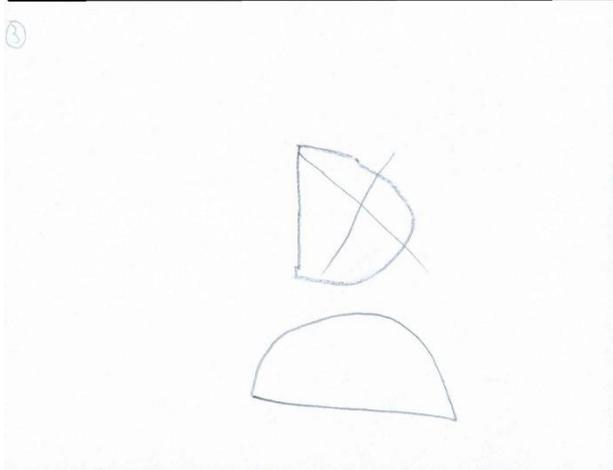
4

il y a 8 côtés

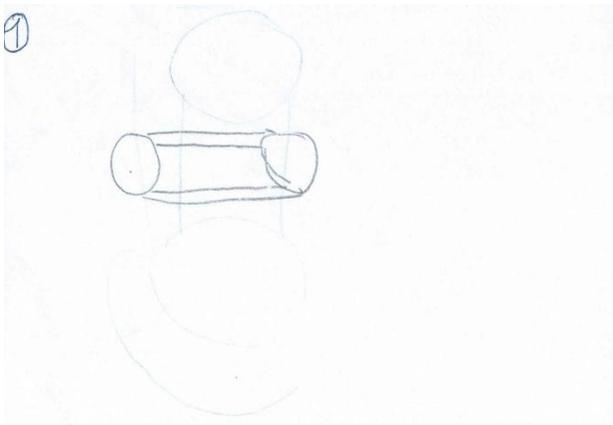
1 en bas 1 en haut et 6 sur les côtés



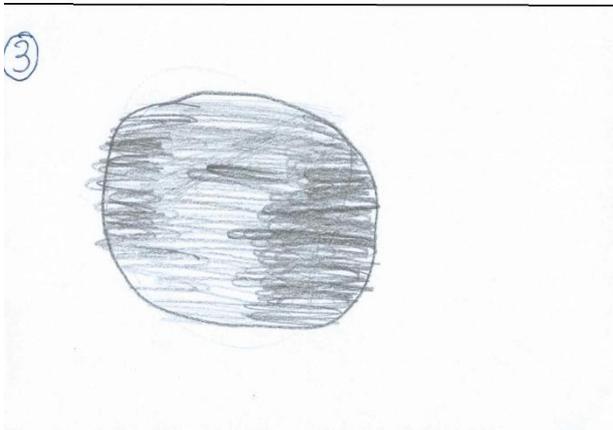
② l'objet a 6 face 8 angle et sa ressemblé à un cube.



④

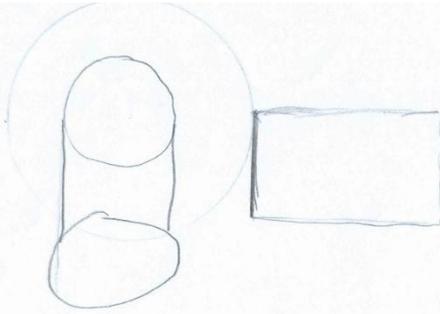


② Je sais un cube
Il ya 16 angle droit
Il ya 6 face.



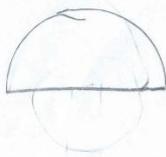
④ Il ya 4 coté
~~et il ya~~

①



⑦

②



④

Il a 8 cotés rond

✓

③



②

il a 6 cotés et 6 faces plates.

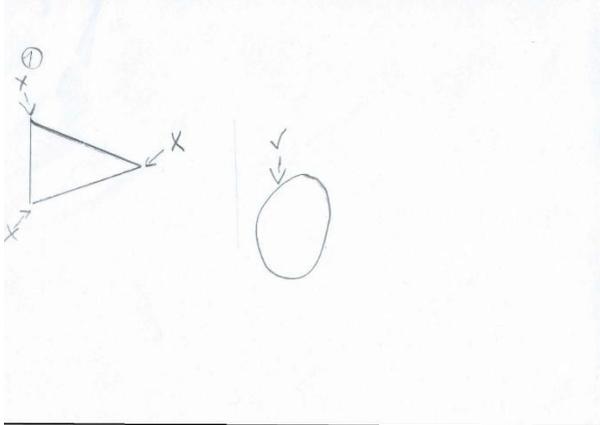
③



④

Il a 9 cotés





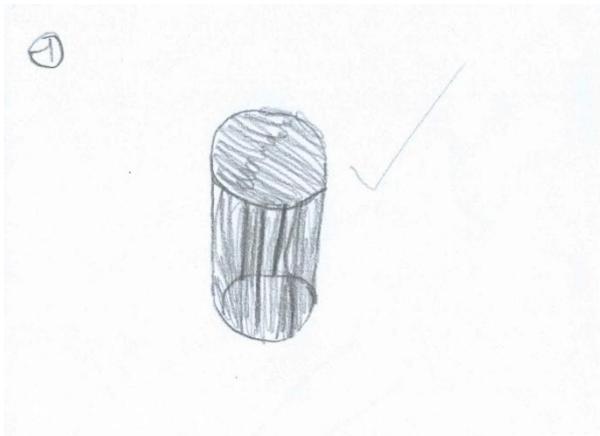
②

Il a 6 côtés, mais ils sont tous se
plans et les deux côté opposés
sont de la même taille.



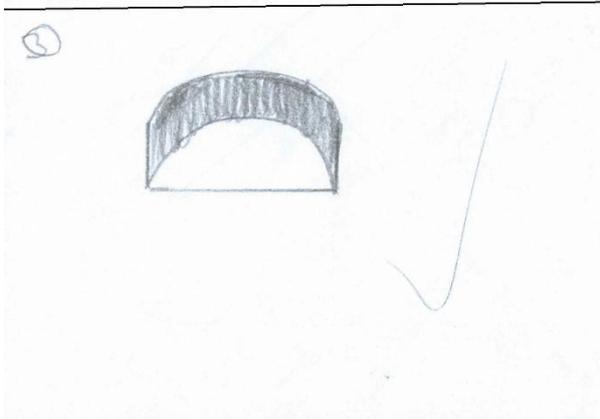
④

Il a deux côtés opposés et ils sont
ronds et ~~il~~ 6 autres côtés



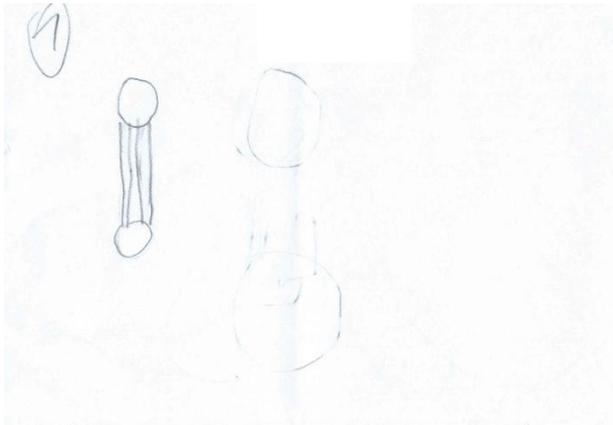
①

C'est un cube avec 6 côtés
et 12 arêtes.

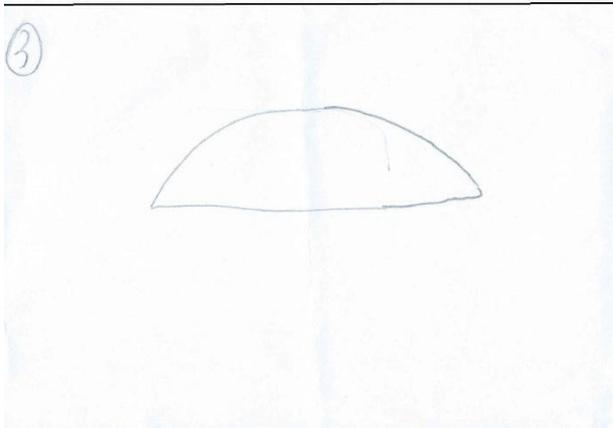


④

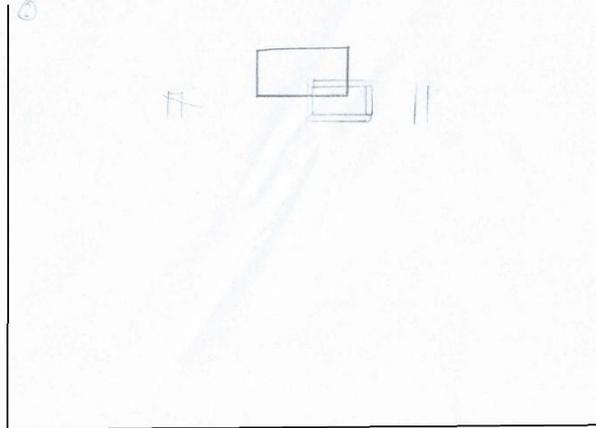
Il a 6 côtés et 12 arêtes.



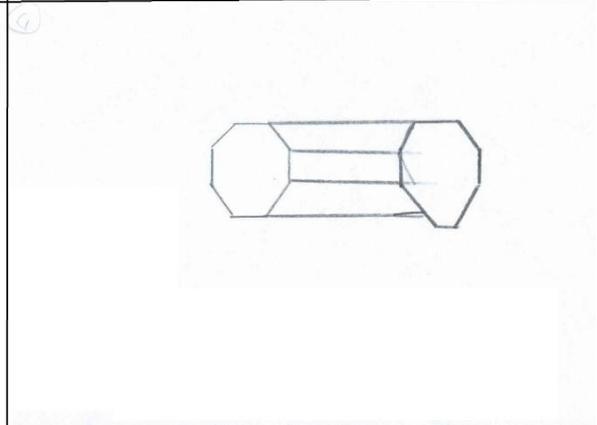
② Ça ressemble à un coque mais
un peu plus et plus fin.



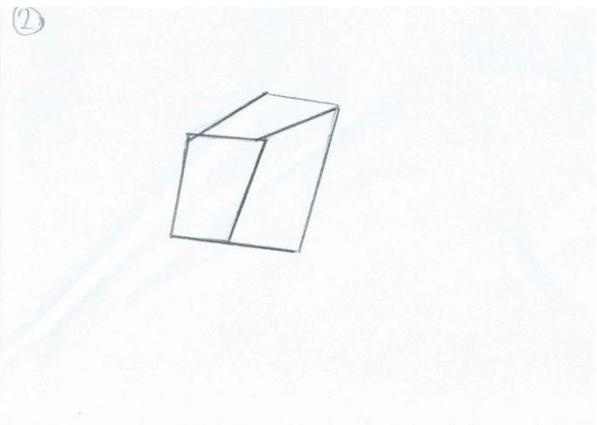
④ Il y a 6 arête et deux faces.



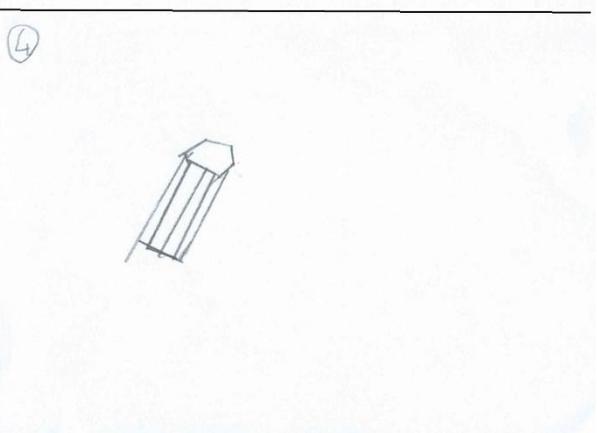
① C'est la moitié d'un rond pas d'arête pas de sommet pas de côté



② Ce n'est pas un polygone. Sur les côtés c'est moité.

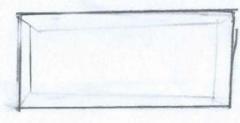


③ C'est presque une boule mais ce n'est pas une boule.



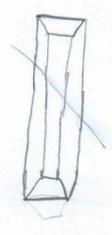
① C'est un longeur en arrondit avec 2 face plate.

②

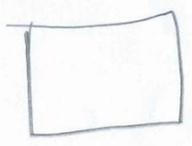


③ C'est la moitié d'une rond.

④

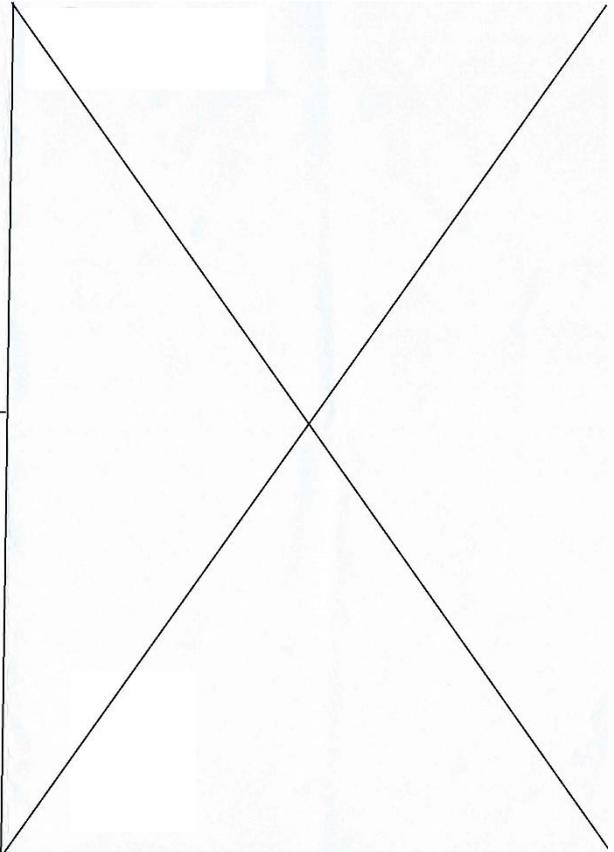


⑤ C'est rond et un sphere



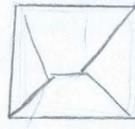
⑥ C'est un rond couper

⑦



① rond de face arrondie sur les bords.

②



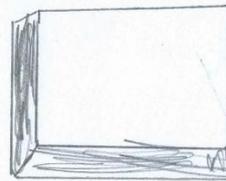
③ la moitié d'un rond.

④



⑤ un cylindre

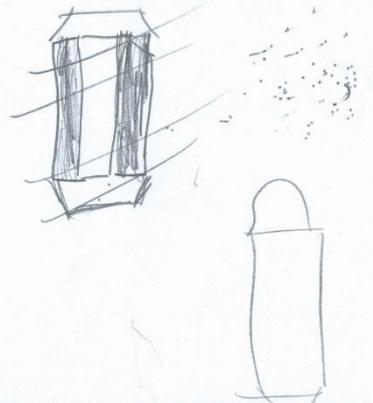
⑥



⑦

face demi sphère

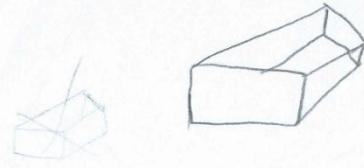
⑧



①

C'est un cylindre
il a 2 surfaces ronds et une rectangle
sur

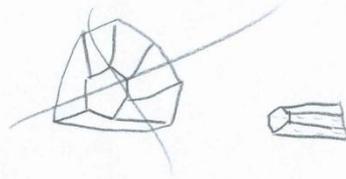
②



③

il a une surface plate est un a
rondi

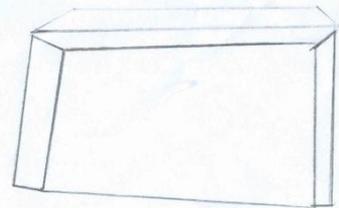
④



①

Il a deux faces, Il est rond, il a zéro arête

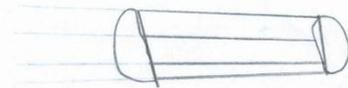
②



③

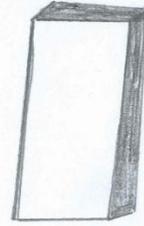
Le dessus est rond le bas est plat il a
une face et pas d'arête

④



① Les cotés non ronds.

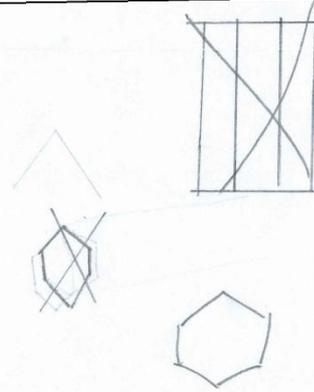
②



③

Un demi-rond

④



①

est une forme qui ressemble à un rond.

②



③

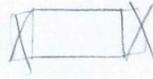
Ces la moitié
d'une boule.
Les moche.

④



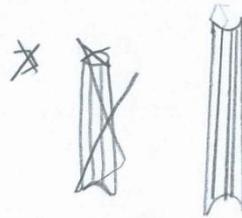
① Il est rond
Il a la forme d'une boîte de conserve

②



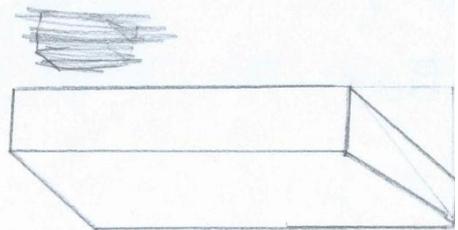
③ C'est la moitié de la lune

④



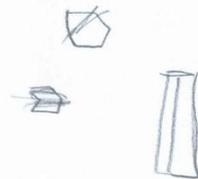
① 2 face ronds
0 sommet
0 arête
tous en color rond

②



③ une face ronds
le reste maintien ronds

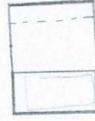
④



①

Se termine par c et se
termine par e. Qui suis-je?

②



③

J'AI TROUVER

④



Comment enseigner la géométrie dans l'espace en prenant en compte les particularités de cet enseignement ? Ce mémoire cherche à répondre à ce problème par le biais d'autres questions : Quelles sont les particularités de l'enseignement de la géométrie et en particulier de la géométrie dans l'espace ? Quelle est la place de cet enseignement dans les programmes actuels et dans les anciens programmes ? Comment les manuels mènent-ils cet enseignement ? Et enfin, comment construire un module d'apprentissage autour des solides pertinent et explicite pour des élèves de cycle 3 ?

La géométrie dans l'espace met en jeu des compétences propres à la géométrie et des compétence spatiales. Ce travail s'est penché en particulier sur une compétence spatiale : la représentation plane des objets de l'espace. En vue d'obtenir quelques réponses, ce travail a été découpé en différentes étapes : une étude des programmes afin d'extraire cette compétence, une étude des manuels afin de savoir quels choix font les manuels pour représenter les solides en particulier et une expérimentation en classe d'une situation d'apprentissage pour connaître les capacités des élèves de cycle 3 à représenter et décrire un solide. En résulte qu'un enseignement explicite et pertinent des solides n'est possible que si l'enseignant prend en compte les deux types de compétences mises en œuvre et qu'il adapte ainsi les différents éléments de son apprentissage : situations d'apprentissage, traces écrites, etc. Les esquisses de réponses trouvées par ce travail ont permis de construire un module d'apprentissage sur les solides en cycle 3.

Mots-clés : mathématiques, géométrie, espace, représentation plane, solides

How to teach solid geometry considering peculiarities of this teaching ? This report tries to solve this problem by means of other questions : what are the peculiarities of the teaching of geometry and in particular solid geometry ? What is the place of this teaching in the current primary school curriculum and in the former curricula ? How do textbooks lead this teaching ? And finally, how to build a relevant and explicite module of learning around solids for pupils of year 4, year 5 and year 6 ?

Solid geometry involves geometry skills and spatial skills. This work dealt with a spatial skill in particular : the planar representation of three dimensional objects. In order to obtain some answers, this work have been devided in several stages : a study of primary school curricula to extract this skill, a study of textbooks to know which choices make textbooks to represent solids in particular and an experiment in a classroom of a learning situation to know the capacities of pupils to represent and to describe solids. As a result, an explicit and relevant teaching of solids is possible only if the teacher takes into account the both types of implemented skills and if he adapts the differents elements of his apprenticeships : learning situations, lessons, etc. The sketches of answers found by this work have helped to build a learning module about solids in year 4, year 5 and year 6.

Keywords : mathematics, geometry, space, planar representation, solid