



**HAL**  
open science

## **Modélisation et simulations d'un moteur piézoélectrique à onde progressive**

Yaarub Noori Shaker

► **To cite this version:**

Yaarub Noori Shaker. Modélisation et simulations d'un moteur piézoélectrique à onde progressive. Energie électrique. 2015. <dumas-01291628>

**HAL Id: dumas-01291628**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01291628v1>**

Submitted on 21 Mar 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Conservatoire National des Arts et Métiers  
Paris ou Centre Régional Associé de Haute Normandie

Mémoire

Présenté en vue d'obtenir le

DIPLOME D'INGENIEUR C.N.A.M

En

MECANIQUE

Mécanique Parcours structures-process

Par

Yaarub NOORI SHAKER

Modélisation et simulations d'un moteur  
piézoélectrique à onde progressive

Soutenance le 21 mai 2015

**JURY**

Président : M. Georges VENIZELOS, Responsable de la chaire de mécanique du CNAM de Paris

Membres : M. Roger OHAYON, Professeur émérite du CNAM de Paris

M. Abdelkhalak EL.HAMI, Responsable de la chaire de mécanique du CNAM de Haute Normandie

M. Mohamed EID, Docteur, ingénieur au CEA Paris

M. Philippe POUUNET, Docteur, ingénieur à VALEO Gergy-Pontoise



## REMERCIEMENTS

*Je tiens à remercier mon encadrant Monsieur A.EL HAMI, Professeur et Responsable de la chaire de mécanique du CNAM de Haute Normandie, de m'avoir proposé ce sujet de mémoire et de m'avoir dirigé avec son savoir et son expérience tout au long de cette étude.*

*Mes remerciements vont également à Monsieur B.RADI, Professeur de l'Université Hassan Premier de Settat (Maroc) pour ses précieux conseils et son aide au cours de cette étude.*

*Je remercie Monsieur A.Makhloufi, chercheur à l'INSA de Rouen pour son aide durant cette étude.*

*Je tiens aussi à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé de près comme de loin à la réalisation de mon étude.*

## Sommaire

CHAPITRE 1. PRESENTATION DES MOTEURS PIEZOELECTRIQUES .....	5
1.1. INTRODUCTION .....	5
1.2. HISTORIQUE DE LA PIEZOELECTRICITE.....	6
1.3. CARACTERISTIQUES .....	7
1.3.1. Avantages .....	7
1.3.2. Inconvénients .....	7
1.4. MOTEUR PIEZO-ELECTRIQUE ROTATIF A ONDE PROGRESSIVE .....	8
1.4.1. Hypothèses du modèle de conversion d'énergie à l'interface stator/rotor.....	8
1.4.2. Organe d'entraînement.....	9
1.4.3. Organe entraîné .....	10
1.5. ACTIONNEURS PIEZOELECTRIQUES A ONDE PROGRESSIVE .....	11
1.5.1. Principe du moteur piézoélectrique à onde progressive annulaire .....	11
1.5.2. Principe du moteur piézoélectrique linéaire.....	13
1.5.3. Principe du moteur à rotation de mode .....	15
CHAPITRE 2. ANALYSE MODALE .....	17
2.1. INTRODUCTION .....	17
2.2. VIBRATION.....	17
2.2.1. Méthodes de mesure .....	18
2.2.2. Système discret linéaire .....	18
2.2.3. Equations de la plaque circulaire .....	20
2.3. CONDITION D'EXCITATION D'UNE ONDE PROGRESSIVE SUR UNE PLAQUE CIRCULAIRE .....	22
2.4. METHODES D'ANALYSE MODALE.....	24
2.4.1. Systèmes à un degré de liberté.....	26
2.4.2. Systèmes à N degrés de liberté .....	27
CHAPITRE 3. MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS.....	28
3.1. PRESENTATION.....	28
3.2. PRINCIPE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.....	28
3.3. FORMULATION GENERALE.....	30
3.3.1. Expression de la matrice élémentaire de raideur k .....	30
3.3.2. Expressions de la matrice élémentaire de masse m .....	31
3.4. ASSEMBLAGE .....	32

3.5. CONSIDERATIONS PRATIQUES .....	33
3.5.1. Utilisation du préprocesseur .....	33
3.5.2. Phase de calcul .....	34
3.5.3. Utilisation du post-processeur .....	34
3.6. MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS DU STATOR SOUS ANSYS .....	34
3.6.1. Modélisation d'une dent de stator en 3D .....	34
3.6.2. Modélisation du Stator en 3D .....	37
CHAPTITRE 4. MODELISATION DU CONTACT MECANIQUE ENTRE STATOR ET ROTOR .....	40
4.1. INTRODUCTION .....	40
4.2. CONVERSION ELECTROMECHANIQUE.....	41
4.3. CONDITION DU CONTACT ET GLISSEMENT .....	45
4.3.1. Contacts lubrifiés et contacts dits secs .....	45
4.4. MODELISATION DU CONTACT.....	48
4.5. MODELISATION DE LA DYNAMIQUE DU ROTOR.....	53
4.5.1. Calcul des forces modales .....	54
4.6. SIMULATION NUMERIQUE DU CONTACT SOUS ANSYS.....	55
CHAPTITRE 5. PHENOMENE DE LA PIEZOELECTRICITE .....	61
5.1. INTRODUCTION .....	62
5.2. CERAMIQUE PIEZOELECTRIQUE.....	62
5.3. RELATIONS PIEZOELECTRIQUES.....	65
5.3.1-Couplage électromécanique dans les céramiques PZT.....	69
5.3.2. Coefficient de pertes mécaniques <b>Qm</b> .....	70
5.4. MODES DE VIBRATIONS.....	70
5.4.1. Modes de couplage électromécanique dans les céramiques PZT .....	70
5.4.2. Modes typiques de couplage électromécanique dans les céramiques PZT.....	73
5.5. DOMAINES D'APPLICATIONS DES CERAMIQUES PIEZOELECTRIQUES .....	75
5.6. MODELISATION DU CERAMIQUE PIEZOELECTRIQUE DU MOTEUR SHINSEI SOUS ANSYS ....	77
CONCLUSION GENERALE .....	81
SYMBOLES .....	83
BIBLIOGRAPHIE.....	85
ANNEXES.....	87

# CHAPITRE 1. PRESENTATION DES MOTEURS PIEZOELECTRIQUES

---

## 1.1. INTRODUCTION

Le moteur est un appareil qui transforme une énergie en énergie mécanique. Il peut fonctionner avec de l'électricité, de la vapeur de l'eau, du gaz, etc.

Dans le cas des transports et plus précisément l'automobile, l'énergie mécanique est produite par des moteurs à combustion interne (essence et diesel) pour lesquels les processus de combustion, bien que constamment optimisés, restent incomplets. Les motoristes se sont alors orientés vers un principe de mélange entre le carburant et l'air. Les moteurs à base de ce principe sont complexes et onéreuses et leur coût d'exploitation ou de leur maintenance exige une automatisation maximale.

Le moteur piézoélectrique à onde progressive possède d'excellentes caractéristiques. Le fort couple de maintien sans alimentation, le couple élevé à basse vitesse (favorisant l'entraînement direct), l'absence de champs magnétiques parasites, ainsi que son fonctionnement silencieux et sa petite taille font de ce moteur un actionneur idéal.

Parmi les nombreux dispositifs actuellement étudiés [1], les moteurs à onde progressive représentent certainement la voie la plus prometteuse pour garantir prochainement la fabrication de masse de moteurs rotatifs « fort couple-basse vitesse » sans réducteur mécanique auxiliaire de vitesse.

La diversité des phénomènes physiques mis en jeu a conduit, dans des recherches précédentes, au développement de nombreux modèles, reposants notamment sur l'identification de schémas électromagnétiques équivalents ou sur l'exploitation de modèles théoriques basés sur des approches numériques de type éléments finis.

Ces méthodes de modélisation demeurent peu pratiques pour l'exploitation du modèle dans la conception d'algorithmes optimaux de commande. Dans cette optique, on propose dans ce mémoire une modélisation efficace du moteur piézoélectrique à onde progressive avec des hypothèses simplificatrices pertinentes garantant de résultats utilisables et de temps de calcul raisonnables.

## **1.2. HISTORIQUE DE LA PIEZOELECTRICITE**

L'effet piézoélectrique direct fut signalé pour la première fois par Hauy en 1817. Certains auteurs prétendent qu'il était déjà connu auparavant et parlent également de chimistes hollandais qui auraient écrit un ouvrage à son sujet en 1703 ; quoiqu'il en soit, ce n'est qu'en 1880 que Pierre Curie et son frère Paul Jacques Curie entreprirent l'étude systématique de l'effet piézoélectrique dans les cristaux. C'est pourquoi, on les considère généralement comme les inventeurs de la piézoélectricité.

En 1880, Pierre et Paul Jacques Curie publièrent la première démonstration expérimentale montrant qu'il existait un lien entre le phénomène de piézoélectricité et la structure cristalline de certains matériaux. Durant la Seconde Guerre mondiale, les Américains, les Japonais et les Russes découvrirent que certaines céramiques avaient des constantes diélectriques plus de 100 fois supérieures aux cristaux naturels. Contrairement aux Américains, les Japonais créèrent une association entre entreprises et universités pour promouvoir la recherche en matière de piézoélectricité. Cette politique se montra rapidement payante : développement de nouvelles connaissances, de nouvelles applications et procédés, et même, une nouvelle famille de matériaux piézoélectriques aux performances comparables aux PZT mais dépourvus de tout brevet. Grâce à ces nouvelles piézocéramiques, les entreprises japonaises développèrent de nombreux filtres dont l'utilisation fut très répandue dans les télévisions et les radios.

Le succès commercial du Japon a encouragé les autres pays à accentuer leur recherche sur les composants piézoélectriques. A partir de 1980, le nombre de brevets déposés chaque année et le nombre de parutions (articles scientifiques, ouvrages, etc.) en la matière ont fortement augmenté. L'objectif actuel est de concevoir des petits actionneurs utiles et bon marché qui nécessitent de faibles puissances et consomment peu d'énergie, tout en étant fiables même dans des environnements hostiles. La recherche en vue d'un perfectionnement de produits piézoélectriques progresse. Et la perspective d'un important développement économique et technologique autour de la piézoélectricité semble certaine.

## 1.3. CARACTERISTIQUES

### 1.3.1. Avantages

Par rapport à un moteur classique de même taille (DC, quelques watts) :

- La puissance massique est potentiellement plus élevée.
- La vitesse de sortie est faible et le couple élevé, plus besoin de réducteur (plus petit et plus léger).
- Le niveau de bruit est très faible voire nul (vibrations ultrasonores).
- La réactivité est de l'ordre de la milliseconde (au lieu de quelques centaines de ms).
- A l'arrêt, le moteur est naturellement bloqué sans consommer d'énergie grâce à la pression du rotor sur le stator.
- Il n'y a aucun risque de perturbation électromagnétique.
- Le moteur est de fabrication simple.
- Sa conception est très flexible, il peut s'intégrer au cœur même du mécanisme.

### 1.3.2. Inconvénients

- La faible durée de vie (2000h) due à l'usure de l'interface de friction.
- Le coût élevé (développement, fabrication des céramiques, nouvelle technologie).
- L'alimentation électrique complexe (contrôle et concordance des deux voies).
- Le rendement énergétique faible (10-25%) dû aux pertes dans la céramique piézo et lors de l'entraînement par friction.
- Le besoin d'une source électrique à haute fréquence.

## 1.4. MOTEUR PIEZO-ELECTRIQUE ROTATIF A ONDE PROGRESSIVE

### 1.4.1. Hypothèses du modèle de conversion d'énergie à l'interface stator/rotor

La modélisation des moteurs piézo-électriques à onde progressive (voir figure 1.1) intéresse aujourd'hui de nombreux laboratoires et industries. La diversité des phénomènes physiques mis en jeu a conduit au développement de nombreux modèles, reposant notamment sur l'identification et l'exploitation de schémas électromécaniques équivalents [2,3]. Ces modèles phénoménologiques permettent d'accéder à l'ensemble des caractéristiques électromécaniques des vibromoteurs. Ils nécessitent toutefois l'acquisition expérimentale de paramètres fondamentaux (facteur de force) sur des prototypes de laboratoire réalisés au préalable.

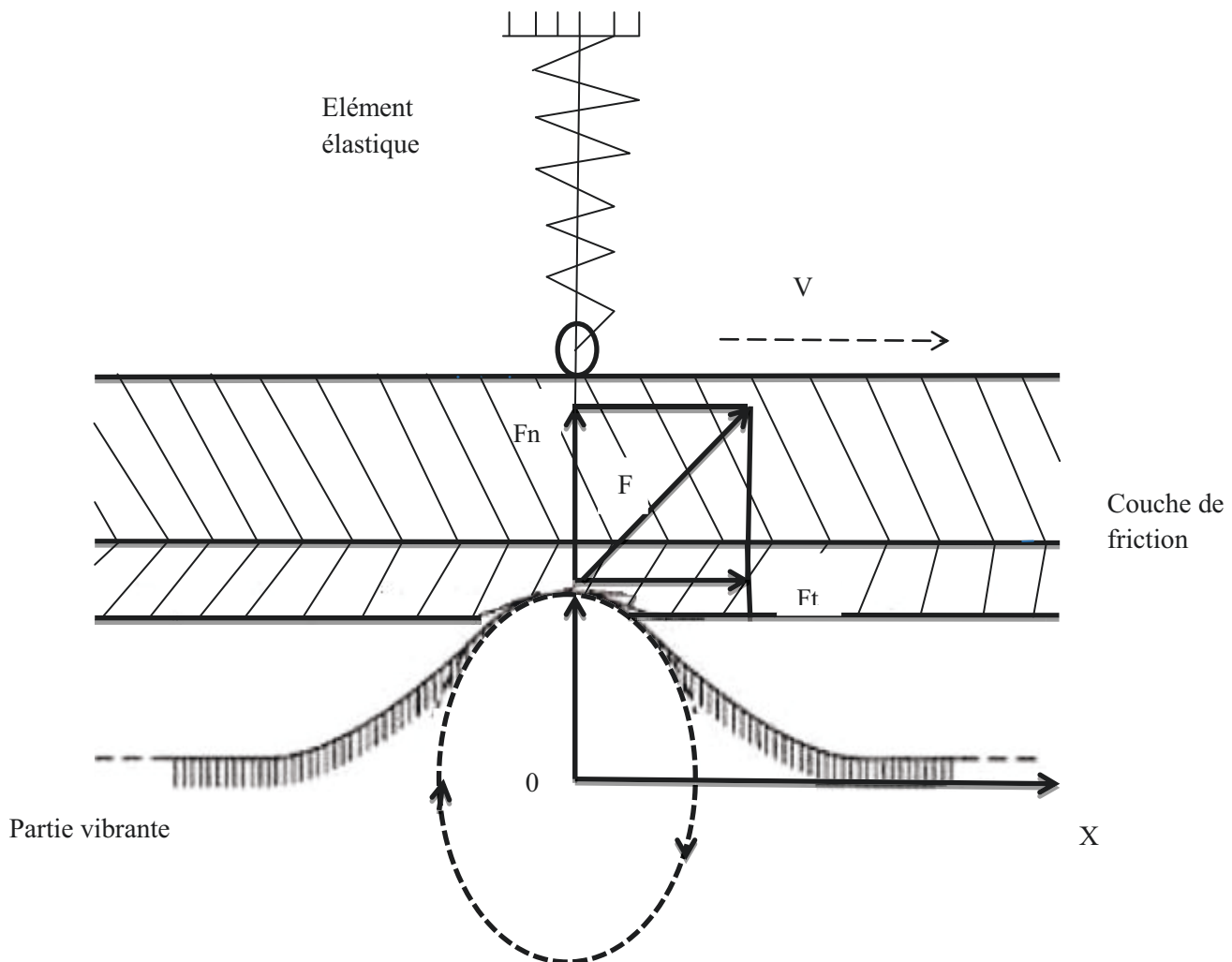


Figure - 1.1 Déformation mécanique due à la tension électrique appliquée sur la partie vibrante[5]

Ils s'avèrent peu prédictifs dès qu'une modification sensible des paramètres nominaux est introduite. Les modèles théoriques basés sur des approches numériques de type éléments finis constituent par conséquent une alternative intéressante [4].

Les modèles purement analytiques (explicites ou implicites) sont alors un prolongement naturel des développements numériques initialement entrepris et sont encore cependant pratiquement inexistant dans la littérature actuelle consacrée aux vibromoteurs, en raison sans doute des mécanismes fortement non linéaires, impliqués dans la conversion d'énergie mécanique aux interfaces stator-rotor.

### 1.4.2. Organe d'entraînement

Un anneau de céramique piézoélectrique est collé sur le stator (voir figure 1.2) de façon à induire dans ce dernier des oscillations à la fréquence de résonance. L'anneau est divisé en deux systèmes d'excitation (phases du moteur).



Figure -1.2 Le stator du moteur SHINSEI USR60 [8].

Chaque système est alimenté idéalement par une tension sinusoïdale dans le domaine ultrasonique, générant ainsi deux ondes stationnaires dans le stator. Un déphasage spatial égal à un quart de la longueur d'onde est alors introduit entre les deux systèmes d'excitation de façon à

générer une onde progressive par la superposition des deux ondes stationnaires. Cela est réalisé par l'imposition d'amplitudes et déphasages temporels adéquats. Les points à la surface du stator décrivent une trajectoire elliptique qui permet de combiner des déplacements verticaux et horizontaux. Il faut également relever que l'organe d'entraînement doit être fixé sur un support (socle de fixation). Ceci implique l'introduction, dans la géométrie de l'anneau statorique, d'un voile de découplage, afin d'éviter certaines perturbations dues à la fixation du stator sur le support. Ceci pourra avoir des répercussions sur la forme et l'amplitude de l'onde statorique générée.

### 1.4.3. Organe entraîné

La partie mobile, ou l'organe entraîné, est constituée du rotor (voir figure 1.3) et d'une couche de friction qui est collée sur la partie inférieure du rotor. Ce dernier est pressé au moyen d'une force de précontrainte, symbolisée avec la force  $F_{ext}$  contre le stator.



Figure - 1.3- Rotor du moteur SHINSEI USR60 [8].

Grâce à la pression générée dans la zone de contact entre le stator et le rotor, une force de frottement existe permettant ainsi au mouvement horizontal des points à la surface du stator (due au mouvement elliptique) de transmettre une force de traction au rotor. La force de précontrainte

permet aussi de fixer le couple de maintien sans alimentation du moteur selon la loi du frottement.

## 1.5. ACTIONNEURS PIEZOELECTRIQUES A ONDE PROGRESSIVE

Dans cette famille des actionneurs piézoélectriques à onde progressive, on peut distinguer trois principaux types de moteurs :

- les moteurs annulaires
- les moteurs piézoélectriques linéaires
- les moteurs à rotation de mode

### 1.5.1. Principe du moteur piézoélectrique à onde progressive annulaire

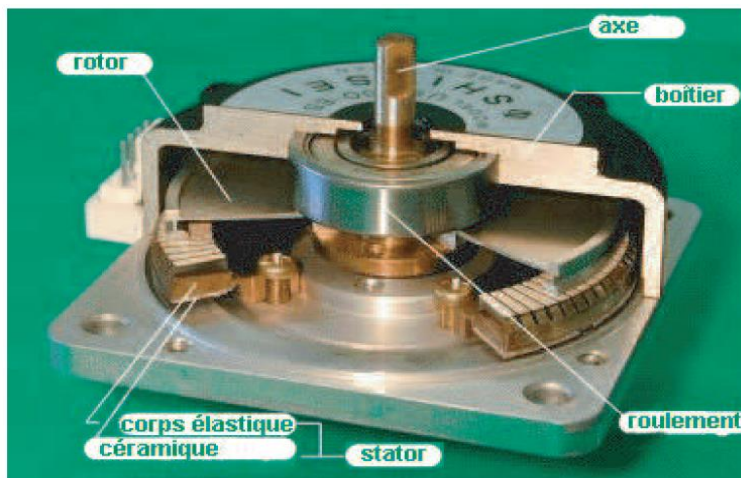


Figure -1.4 – Vue éclatée du moteur SHINSEIUSR60 [9]

L'architecture type d'un moteur à onde progressive est représentée sur la figure 1.5 dans le cas d'une configuration annulaire. Le stator est excité en vibrations de volume forcées par l'intermédiaire d'un transducteur piézo-électrique collé à sa partie inférieure. La sectorisation du transducteur détermine le rang du mode de flexion entretenu sur le stator. Le rang du mode est par ailleurs choisi en fonction des paramètres dimensionnels du moteur, pour garantir l'absence de bruits audibles de fonctionnement (moteurs dits à ultrasons). Le rotor est en contact avec la partie supérieure du stator par l'intermédiaire d'un matériau interface. Il est entraîné par frottement en exploitant les déplacements et rotations des sections droites du stator [6].

Le transfert de puissance mécanique à l'arbre moteur nécessite une double transduction d'énergie :

- La première est réalisée à l'interface transducteur-stator par l'intermédiaire d'un joint de colle. Elle exploite l'effet piézo-électrique inverse pour transformer l'énergie électrique provenant de l'alimentation, en énergie mécanique de vibration du stator.
- La seconde s'opère sur l'interface stator-rotor par l'intermédiaire du matériau de friction.

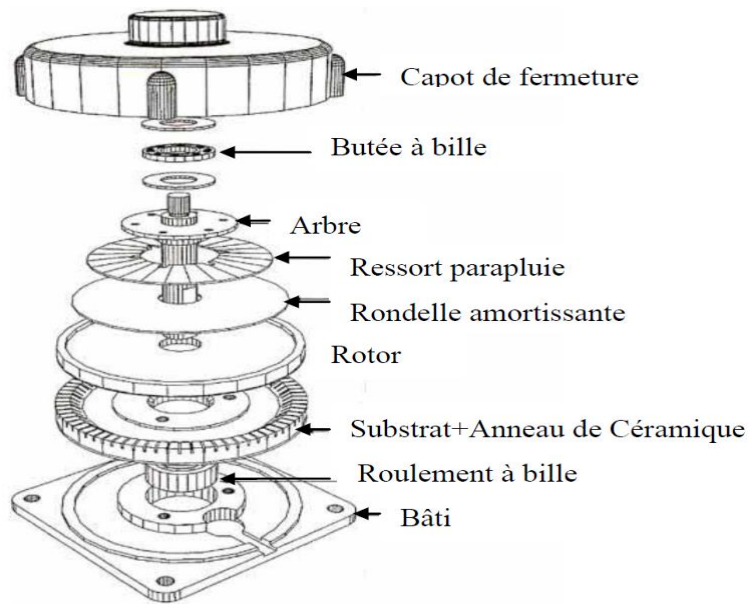


Figure -1.5-Vue éclatée du moteur SHINSEI USR60 [10].

Les propriétés mécaniques et tribologiques de ce matériau doivent satisfaire la conversion efficace des vibrations de volume du stator en déplacement de corps rigide du rotor. Elles déterminent pour une large part les performances du moteur [11].

L'onde progressive générée sur le stator résulte de la superposition de deux vibrations forcées stationnaires, à une même pulsation  $\omega$  voisine d'une pulsation de résonance mécanique associée au mode propre de flexion hors plan de rang  $(k,n)$  et de multiplicité du stator. Les deux formes propres associées à la fréquence propre de pulsation présentent par définition un déphasage circonférentiel de  $\lambda/4$  [12], où  $\lambda$  désigne la longueur d'onde de la vibration mécanique. L'une des formes propres est excitée par une électrode alimentée par la tension électrique  $U_1(t) = \sin(\omega t)$ .

L'autre forme propre est excitée par la deuxième électrode alimentée par le signal  $U_2(t) = \sin(\omega t + \pi/2)$  et désigne respectivement les amplitudes crêtes des signaux  $U_1(t)$  et  $U_2(t)$  fonction de la variable temps (t). Les polarisations initiales des céramiques permettent de satisfaire la forme propre choisie.

La quadrature de phase dans l'espace des deux formes propres (déphasage de  $\lambda/4$ ) implique la symétrie mécanique circulaire du stator [13,1]. Elle suppose également l'asymétrie du dispositif de raccordement stator-bâti et du chargement extérieur imposé par l'intermédiaire de la précontrainte axiale exercée sur le rotor. C'est la raison pour laquelle les moteurs à l'onde progressive sont par définition des moteurs rotatifs.

### 1.5.2. Principe du moteur piézoélectrique linéaire

Le stator est une longue barre métallique soudée sous forme de rail de guidage en boucle, représenté à la figure (1.6). Le rotor est constitué d'un chariot libre en mouvement et qui est pressé en permanence par une force verticale uniforme contre les rails. Le fait de renfermer les extrémités du rail de manière à créer la condition d'un milieu continu nécessaire à la propagation de l'onde, limite la partie active du moteur utilisable pour réaliser des déplacements linéaires. Le prototype proposé présente un inconvénient majeur : l'encombrement du système de manière non négligeable, bien qu'inutile.

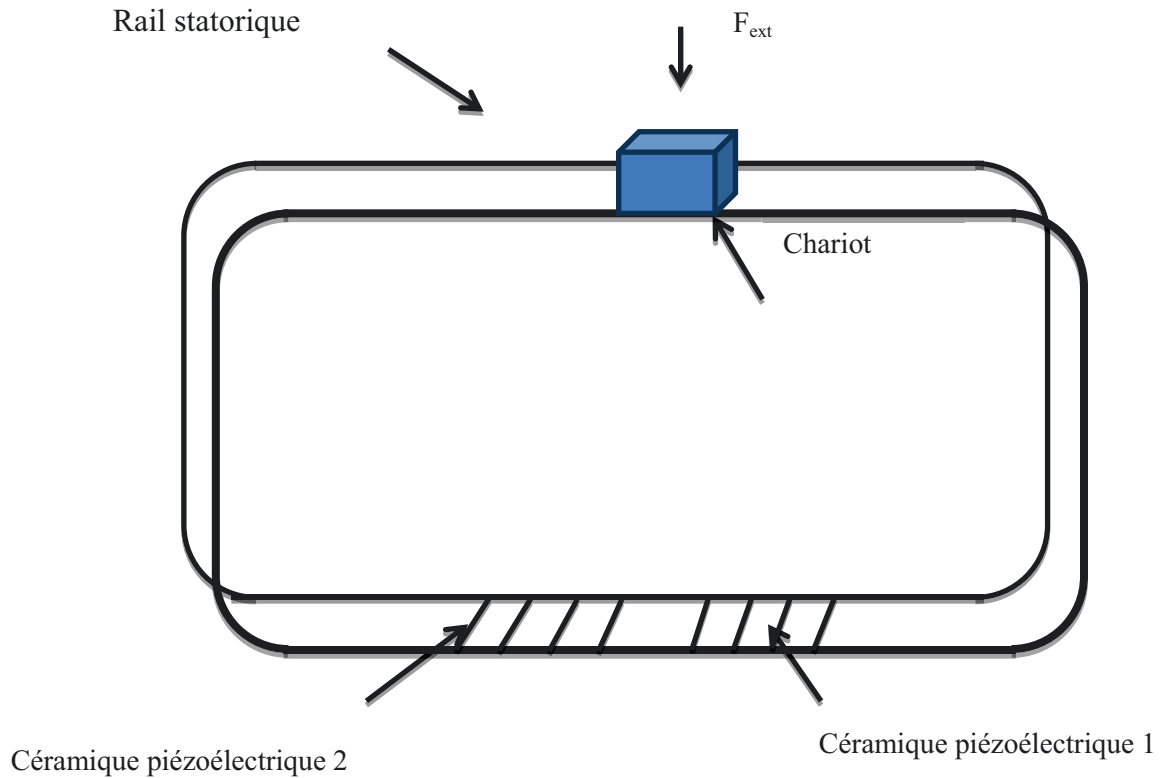


Figure – 1.6 Prototype d'un moteur piézoélectrique linéaire [32].

En partant de ces considérations, on peut, dans le cas du deuxième prototype représenté à la figure (1.7) parler effectivement d'un moteur linéaire. Deux oscillateurs sont installés aux extrémités du rail pour créer une onde progressive. Si l'oscillateur  $T_1$  est choisi pour générer l'onde stationnaire, alors l'oscillateur  $T_2$  est ajusté pour travailler en amortisseur ; afin de synchroniser le système c-à-d obtenir un mouvement orienté à onde progressive et même d'éviter au mécanisme les ondulations destructives. Avec cette configuration, l'onde se propage de  $T_1$  vers  $T_2$  et le chariot dans la direction opposée. Le déplacement du chariot peut être inversé en changeant le rôle des deux oscillateurs. Le chariot peut atteindre dans cette configuration une vitesse d'environ 1 m/s.

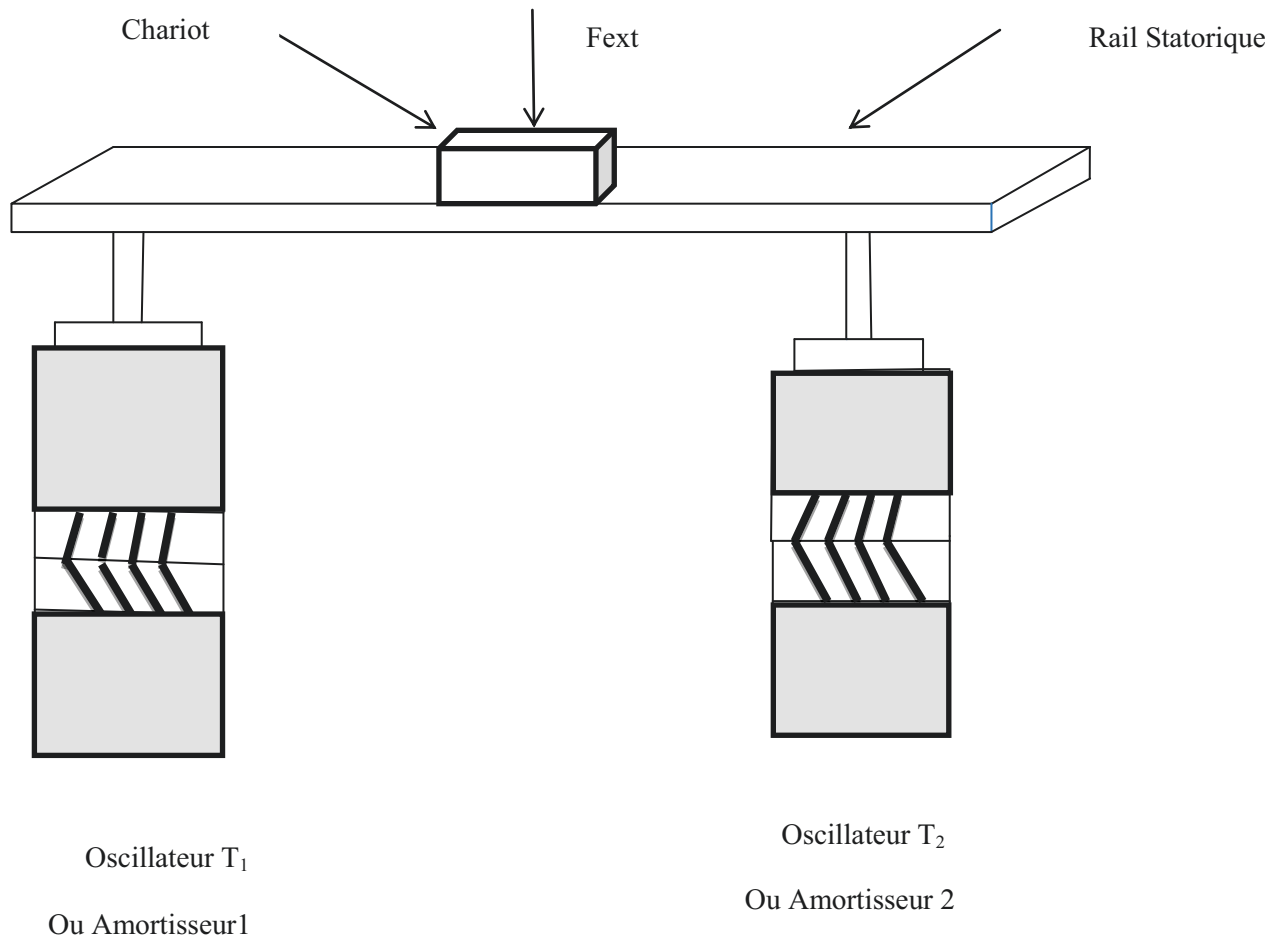


Figure – 1.7 Prototype d'un moteur piézoélectrique linéaire utilisant des oscillateurs de Langevin [30].

### 1.5.3. Principe du moteur à rotation de mode

Un moteur à rotation de mode (voir figure 1.8) utilise deux modes de déformation orthogonaux. Il est constitué d'une poutre cylindrique associant des céramiques piézoélectriques encadrées par des contre masses..

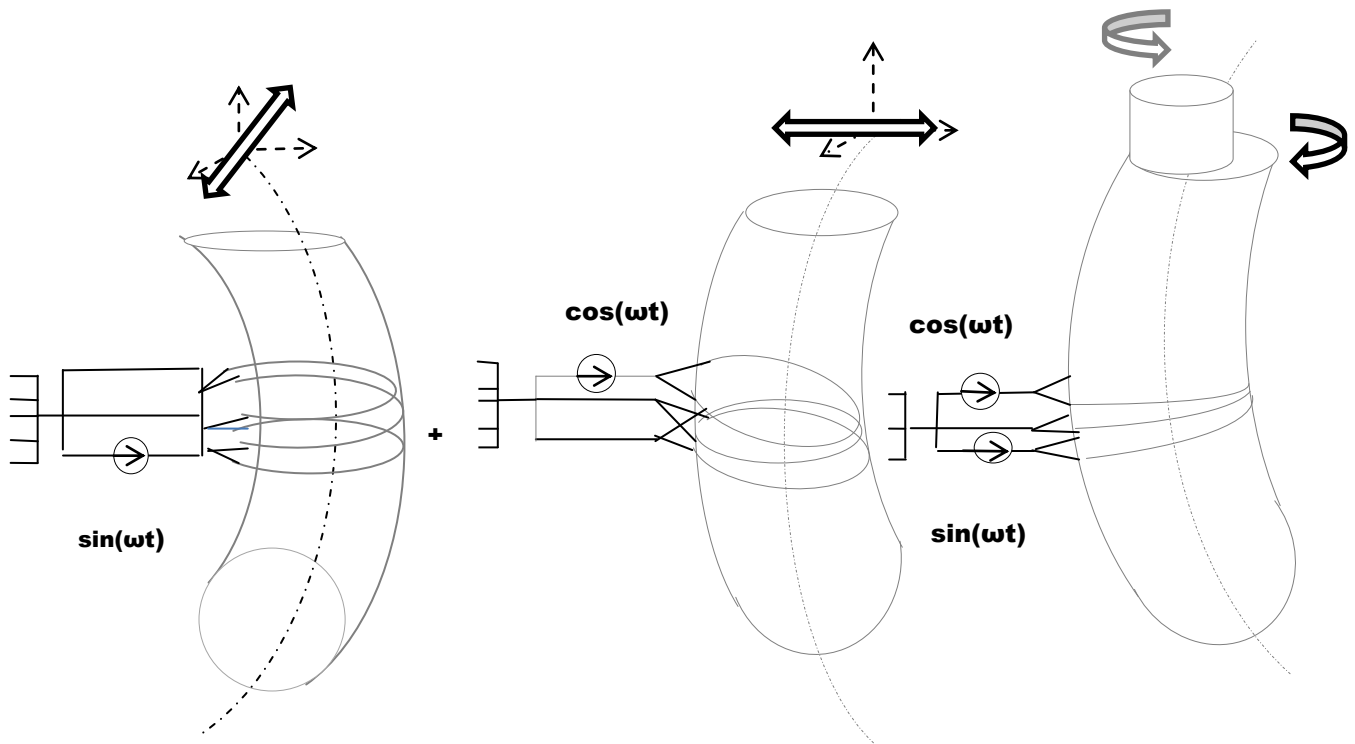


Figure – 1.8 Principe de fonctionnement d'un moteur à rotation de mode

La combinaison de ces modes provoque une rotation de la structure généralement de révolution autour de son axe de symétrie. L'ensemble est précontraint par une ou plusieurs vis. La partie mobile est maintenue contre le stator par une pression extérieure assurée par une raideur rapportée entre le rotor et le bâti.

Contrairement aux structures annulaires, le contact entre rotor et stator se fait sur une seule zone. La génération des deux modes de flexion nécessite une subdivision des céramiques utilisées en deux secteurs de  $180^\circ$  avec des polarisations opposées sur chaque moitié.

## **CHAPITRE 2. ANALYSE MODALE**

---

### **2.1. INTRODUCTION**

Etant donné leur objectif constant de construire le plus léger possible, les pionniers de l'aviation ont été les premiers concepteurs de structures à devoir maîtriser les problèmes de vibration et de dynamique des structures. Dès les années 1920, les ingénieurs de la construction aéronautique sont amenés à reconnaître l'importance de la mécanique des vibrations pour la prédiction du comportement aéroélectrique des avions. La théorie des vibrations occupe donc depuis lors une place appréciable dans leur formation. Pendant quarante ans, ils se satisferont toutefois de méthodes d'analyse que les moyens de calcul à leur disposition permettent. Les modèles structuraux utilisés sont soit analytique, soit le résultat d'une description de la structure en termes d'un petit nombre de degrés de liberté des techniques de transfert ou de Rayleigh-Ritz.

Les méthodes de l'analyse dynamique, qu'elles soient numériques ou expérimentales, sont aujourd'hui devenues également importantes dans d'autres disciplines de l'ingénieur telles que le génie civil, la fabrication mécanique, le génie nucléaire ou la construction automobile. Elles restent directement applicables aux problèmes rencontrés dans tous ces domaines.

Les dimensions et la géométrie complexe des stators étudiés (présences d'encoches-dispositif de raccordement au bâti) nécessitent une discrétisation fine de la structure. Le maillage éléments finis doit en effet permettre le calcul précis des fréquences propres ultrasonores et des modes propres d'ordre élevé correspondants. La prédiction précise du comportement modal devient difficile avec les codes standards d'éléments finis lorsque le nombre de degrés de liberté de structure est important.

### **2.2. VIBRATION**

La vibration est un mouvement périodique ressenti par un corps souvent accompagné d'un bruit. De tels phénomènes ont lieu, le plus souvent dans un moyen de locomotion, dans une usine, mais aussi dans nos logements et nos bureaux. Les innombrables machines qui nous entourent en

sont la cause la plus fréquente mais aussi les éléments naturels comme le vent, la houle, l'écoulement de l'eau, les séismes, etc.

La vibration peut être produite à partir de quatre formes temporelles de l'énergie [15] :

- Soit, le cas le plus fréquent, une source d'énergie **périodique**, machine tournante, balourds et moteurs à explosion, pales d'hélice, aubes de compresseur, etc.
- Soit une énergie de forme **transitoire**, impulsion ou échelon le battant sur la cloche ou la lame de couteau fléchie que l'on lâche brusquement, le coup de canon, l'explosion, le tremblement de terre.
- Soit une énergie **aléatoire**, contenant une infinité de fréquences et d'amplitudes : le bruit d'une chute d'eau, la turbulence atmosphérique qu'on ressent à travers la réponse de l'avion.
- Soit enfin une énergie **continue**, un vent constant, un courant d'eau uniforme, une énergie mécanique débarrassée de composantes alternatives.

### 2.2.1. Méthodes de mesure

Nous avons trois méthodes de mesures physiques, selon le type de signal fourni par la source d'excitation :

- Une première méthode, dite **harmonique**, où le signal d'excitation est une fonction sinusoïdale du temps.
- Une deuxième méthode, dite **aléatoire** utilisant un signal d'excitation aléatoire tel qu'un bruit blanc.
- Une troisième méthode, dite **impulsionnelle**, où le signal d'excitation peut théoriquement être représenté sous forme d'impulsion de Dirac, mais qui sera le plus souvent une percussion telle qu'un coup de marteau ou une explosion.

### 2.2.2. Système discret linéaire

Il est constitué d'éléments permettant d'écrire les équations de son mouvement sous forme d'équations différentielles du second ordre à coefficients constants. Le nombre de variables de

positions indépendants,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  qu'il est nécessaire de choisir pour représenter le système à un instant donné correspond au nombre de degrés de liberté [16].

### **2.2.2.1. Système linéaire dissipatif à un degré de liberté**

Les équations peuvent répondre aux formes suivantes, en l'absence de tout signal extérieur au système :

- a) Système mécanique en translation

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

b : le coefficient d'amortissement  
 m : la masse  
 k : la rigidité du ressort

- b) Système mécanique en rotation

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \lambda \frac{d\alpha}{dt} + C \alpha = 0$$

I : moment d'inertie du disque par rapport à l'axe de rotation  
 $\lambda$  : coefficient de frottement  
 C : constante de torsion  
 $\alpha$  : déplacement angulaire

- c) Système électrique

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = 0$$

L : inductance  
 R : résistance  
 c : capacité  
 q : quantité d'électricité

### **2.2.2.2. Système linéaire dissipatif à n degrés de liberté**

Il est possible d'utiliser des équations du même type, écrites sous forme matricielle :

$$[M] \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} \right] + [\Lambda] \left[ \frac{dx}{dt} \right] + [K] [x] = [0]$$

M : la masse

$\Lambda$  : le coefficient d'amortissement

K : la rigidité du ressort

### 2.2.3. Equations de la plaque circulaire

Pour établir l'équation d'une plaque circulaire en vibration, on part de l'équation correspondante en coordonnées polaires [17] :  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$

La matrice jacobine de la transformation s'écrit :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

Et admet l'inverse

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{bmatrix}$$

D'où la transformation sur les dérivés premières

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Et l'expression de l'opérateur de Laplace en coordonnées polaires s'écrit sous la forme :

$$\Delta^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)$$

Il en résulte l'équation du mouvement de la plaque circulaire de caractéristiques uniformes exprimée en coordonnées polaire

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \omega - \frac{\omega^2 m}{D} \omega = 0$$

$$D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)}$$

E : le module de Young

H : l'épaisseur de la plaque

$\nu$  : le coefficient de Poisson

### 2.3. CONDITION D'EXCITATION D'UNE ONDE PROGRESSIVE SUR UNE PLAQUE CIRCULAIRE

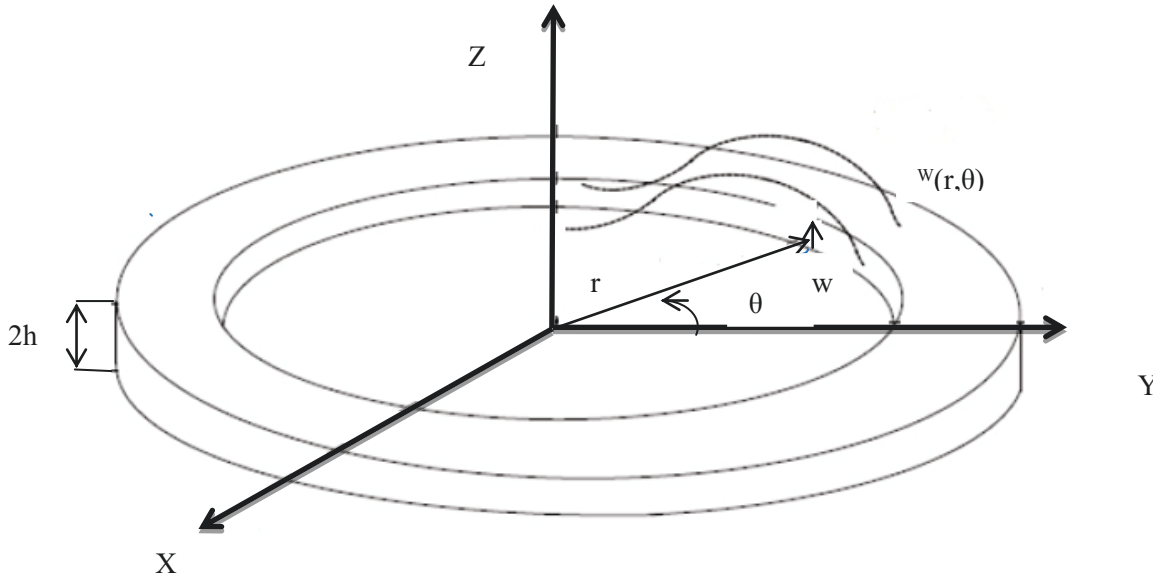


Figure -2.1-Déformation de l'anneau du stator décrit en coordonnées polaires [11].

La théorie classique des plaques circulaires en vibration libre transversale montre que le déplacement  $W(r, \theta, t)$  à l'instant (t) d'un point Q de coordonnées polaires (r, theta), voir figure (2.1) appartenant au plan moyen, satisfait l'équation aux dérivées partielles des vibrations hors plan [13,6] :

$$\frac{EH^3}{12(1 - \nu_s^2)} \nabla^4 W(r, \theta, t) + \rho_s H \frac{\partial W(r, \theta, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

avec :

$W$  : le déplacement à l'instant t d'un point Q de coordonnées polaires (r, theta)

E : le module de Young.

$\nu$  : le coefficient de Poisson.

$\rho$  : la masse volumique de matériau de l'anneau statorique.

H : l'épaisseur de la plaque où  $H = 2h$

$\Delta$  : l'opérateur Laplace exprimé en coordonnées polaires et  $\nabla^4 = \nabla^2 \cdot \nabla^2$

$$\nabla^4 = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2$$

Si les conditions aux limites imposées par le dispositif de raccordement du stator au bâti ainsi que par les chargements extérieurs imposés à l'interface stator-rotor, conservent la symétrie mécanique circulaire initiale de la plaque, il existe des solutions de la forme :

$$W(r, \theta, t) = \xi_{kn}(r) \cos(k\theta) \sin(\omega_{kn} t) \quad (2.2)$$

$k$  et  $n$  désignent les nombres de diamètres nodaux et de cercles de nœuds les directions circonférentielle radiale de plaque statorique.

La fonction de Bessel  $\xi_{kn}(r)$  et la pulsation propre  $\omega_{kn}$ , sont déterminées à partir de la résolution du problème aux valeurs propres.

Lorsque le nombre  $k$  de diamètres nodaux est différent de zéro, les fréquences propres  $\omega_{kn}$  sont de multiplicité deux. Il existe dans ce cas, pour chaque fréquence de résonance, deux fonctions propres linéairement indépendantes [11] :

$$W_1(r, \theta, t) = \xi_{kn}(r) \cos(k\theta) \quad (2.3)$$

$$W_2(r, \theta, t) = \xi_{kn}(r) \cos\left(k\theta + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.4)$$

Il est ainsi possible de superposer à une même fréquence propre deux vibrations libres d'équation [11] :

$$W_1(r, \theta, t) = A_{kn}^1 \xi_{kn}(r) \cos(k\theta) \cos(\omega_{kn} t) \quad (2.5)$$

$$W_2(r, \theta, t) = -A_{kn}^2 \xi_{kn}(r) \sin(k\theta) \cos(\omega_{kn} t + \varnothing) \quad (2.6)$$

où  $A_{kn}^1, A_{kn}^2$  et  $\emptyset$  sont des constantes d'intégration qui dépendent des conditions initiales.

La superposition des deux vibrations est aussi solution du problème de vibration libre et peut s'écrire sous la forme [8].

$$W(r, \theta, t) = \frac{1}{2} \xi_{kn}(r) + \left[ \begin{array}{l} (A_{kn}^1 - A_{kn}^2 \cos(\emptyset)) \sin(\omega_{kn}t + k\theta) + A_{kn}^1 + \\ A_{kn}^2 \cos(\emptyset) \sin(\omega_{kn}t - k\theta) + \\ 2A_{kn}^2 \sin k\theta \sin \omega_{kn}t \sin(\emptyset) \end{array} \right] \quad (2.7)$$

Si les deux vibrations libres ont même amplitude et sont en quadrature de phase dans le temps :

$$\emptyset = 0 \quad A_{kn}^1 = A_{kn}^2 = A_{kn}$$

Dans ce cas, la combinaison des deux modes propres génère une onde progressive d'équation :

$$W(r, \theta, t) = A_{kn} \xi_{kn}(r) \sin(\omega_{kn}t - k\theta) \quad (2.8)$$

dont la vitesse de phase :  $\omega_{kn}/k = \omega_{kn}\lambda/2\pi$  est positive dans la direction circonférentielle  $\theta$ .

On notera que cette vitesse de l'ordre de quelques  $10^3 \text{ ms}^{-1}$  dans le cas des plaques métalliques vibrantes à des fréquences ultrasonores, n'est pas la grandeur physique exploitée pour réaliser l'entraînement du rotor.

## 2.4. METHODES D'ANALYSE MODALE

Les méthodes d'analyse modale sont des méthodes d'investigation relativement récentes, qui ont été mises en œuvre pour établir et améliorer la connaissance du modèle dynamique des structures réelles. En effet, les paramètres significatifs permettant de représenter le comportement dynamique d'une structure linéaire quelque soit sa complexité sont « concentrés » dans un nombre de paramètres modaux réduits : fréquences propres, amortissements et formes propres associées. Le comportement dynamique de la structure sous des conditions d'excitation particulières en l'absence de toute modélisation ne requiert que la seule connaissance de ces paramètres. C'est la raison pour laquelle les méthodes d'analyse modale sont devenues grâce aux

progrès de l'informatique et de l'instrumentation, des méthodes privilégiées d'investigation dans le domaine de la dynamique des structures.

Les premiers investigateurs de cette technique ont été les avionneurs qui étaient confrontés au problème crucial de « flottement » des avions. Ce phénomène dû au couplage aéroélastique entre l'air et la structure de l'avion provoque à certaines vitesses un phénomène de vibrations auto excitées pouvant causer la destruction de l'appareil. Il peut être prévu si l'on connaît les caractéristiques dynamiques de la structure à savoir : vecteurs propres, fréquences propres et amortissements généralisés, masses généralisées (masses modales).

La recherche constante de l'amélioration de la qualité dans tous les domaines où intervient la mécanique a conduit les concepteurs à utiliser l'analyse modale expérimentale comme un outil privilégié pour accéder à une meilleure connaissance du comportement dynamique des structures. C'est pourquoi ces techniques ont largement dépassé le cadre de l'aéronautique pour s'intéresser aux structures dans le domaine du transport (véhicules automobiles, ferroviaires, bateaux, etc.), aux ouvrages de génie civil (ponts, tours aéroréfrigérants, massifs de groupe, etc.) et plus généralement à tous les matériels susceptibles d'être soumis à une ambiance vibratoire sévère. Toute une méthodologie s'est ainsi développée en aval de l'analyse modale concernant par exemple la sous structuration dynamique ou le recalage des modèles de calcul par éléments finis par rapport à la structure réelle.

Du point de vue théorique, les méthodes d'analyse modale sont basées sur une représentation du comportement dynamique des structures par des systèmes discrets, l'hypothèse la plus couramment adoptée pour représenter les dissipations étant celle d'un amortissement visqueux. Il est par conséquent fondamental de bien maîtriser les notions se rattachant à la dynamique des systèmes discrets, en particulier celles concernant les modes propres complexes des systèmes dissipatifs et leurs liens avec ceux du système conservatif associé.

Les méthodes d'analyse modale se divisent en deux grandes familles : les méthodes opérant dans le domaine temporel et celles opérant dans le domaine fréquentiel.

### 2.4.1. Systèmes à un degré de liberté

Les notions de base concernant les systèmes dynamiques peuvent être illustrées sur le cas simple du système masse-ressort à amortissement visqueux. On définira par système conservatif, le système non amorti, par système dissipatif, celui comportant de l'amortissement.

En supposant que l'amortissement se traduit par une force proportionnelle à la vitesse, on obtient l'équation différentielle du mouvement de la masse [18] :

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t)$$

Soit  $\omega_0$  la pulsation propre du système conservatif, on a :  $\omega_0^2 = k/m$  ;  $b = 2a m \omega_0$  avec

a coefficient d'amortissement réduit.

L'équation s'écrit :

$$\ddot{x} + 2a\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = f(t)/m$$

Pour une excitation harmonique de la forme  $f(t) = f_0 e^{j\omega t}$  donnant une solution en régime forcé  $x(t) = x_0 e^{j\omega t}$ , on obtient :

$$(-\omega^2 + 2ja\omega\omega_0 + \omega_0^2)x_0 = f_0/m$$

Soit en posant  $u = \frac{\omega}{\omega_0}$  :

$$(1 - u^2 + 2jau)x_0 = \frac{f_0}{m\omega_0^2} = \frac{f_0}{K} = x_s$$

où  $x_s$  désigne le déplacement statique dû à la force d'amplitude  $f_0$

La réponse forcée harmonique du système s'écrit :

$$x_0 = \frac{x_s}{1 - u^2 + 2jau} = \frac{1 - u^2 - 2jau}{(1 - u^2)^2 + 4a^2u^2} x_s$$

L'amplitude du mouvement est définie par :

$$A = \|x_0\| = \frac{x_s}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4a^2u^2}}$$

L'amplitude maximale caractérisant la résonance est obtenue.

Pour  $u = \sqrt{1-2a^2}$ , soit encore  $\omega_R = \omega_0\sqrt{1-2a^2}$ , l'amplitude correspondante est alors  $A_R = \frac{x_s}{2a\sqrt{1-a^2}}$ .

### 2.4.2. Systèmes à N degrés de liberté

Le comportement des structures mécaniques auto-adjointes et conservatives peut être représenté par l'équation matricielle suivante :

$$M\ddot{y}(t) + Ky(t) = f(t)$$

$M$  : représente la matrice masse, réelle, symétrique, définie positive

$K$  : la matrice de raideur, réelle, symétrique, définie non négative.

Ces deux matrices sont de dimension (N , N).

$f(t)$  : représente le vecteur des forces excitatrices.

En régime harmonique,  $f(t) = f \cdot e^{st}$ , où  $s = j\omega$ ,  $\omega$  étant la pulsation de la force excitatrice,  $j^2 = -1$

## CHAPITRE 3. MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS

---

### 3.1. PRESENTATION

La méthode la plus courante pour aller plus en avant dans le domaine du calcul tant en statique qu'en dynamique est la méthode des éléments finis qui permet le calcul de structures (présence ou non de discontinuités) isotropes ou non (matériaux composites) travaillant dans les domaines élastiques, plastiques ou élastoplastiques, pouvant subir de grandes déformations et permet aussi de faire intervenir des interactions fluide-structure, de prendre en considération des effets thermiques, etc.

Cette méthode a permis au calcul dynamique des structures de faire des pas de géant lors de la dernière décennie, tout en étant encore en pleine expansion théorique, technique et commerciale. L'objectif de ce paragraphe est de sensibiliser le lecteur à ce nouvel outil de plus en plus associé à la CAO (Conception Assistée par Ordinateur) et de lui montrer que, malgré une littérature de niveau élevé, pouvant de prime abord paraître rebutante à un débutant, il peut résoudre des problèmes, d'une complexité sans commune mesure avec ceux résolus par les méthodes analytiques, tout en ne disposant que de moyens informatiques.

Avec ce nouvel outil, il n'est pas nécessaire de posséder des connaissances élevées ni en mathématiques ni en informatique. Les interventions délicates se situent au niveau de l'introduction des données, de la modélisation (préprocesseurs) et de l'exploitation des résultats (post-processeurs), la phase de calcul proprement dite étant incluse dans ce que l'on appelle *la boîte noire* en général non accessible.

Ce paragraphe aborde donc cette méthode sous l'aspect le plus simple de la dynamique des structures, c'est-à-dire limité au domaine élastique, aux matériaux isotropes, aux faibles déformations et en l'absence de tout amortissement.

### 3.2. PRINCIPE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

La méthode des éléments finis est avant tout une méthode de résolution numérique d'équations bien adaptée à la dynamique des structures. Ces dernières sont décomposées en

éléments raccordés les uns aux autres, afin de décrire au mieux la structure réelle, par des nœuds pour les barres et les poutres, des lignes pour les surfaces planes et des surfaces pour les volumes.

Les éléments les plus courants sont décrits dans [19], cette liste n'étant pas limitative. Cependant, on choisit des éléments simples compatibles avec la structure. Suivant la géométrie de celle-ci, ces éléments apparaissent :

- unidirectionnels (barres ou poutres)
- birectionnels (membranes, plaques ou coques courbes)
- tridimensionnels (éléments de volume, coques épaisses)
- axisymétriques : tores, coques coniques ou à méridienne courbe

Les ouvrages cités en référence présentent quasiment tous des bibliothèques de ces éléments avec leurs caractéristiques géométriques et leurs propriétés analytiques. Parmi les méthodes de calcul, il en existe principalement deux :

- l'analyse modale
- l'intégration temporelle directe

La première est la plus utilisée, la structure étant considérée comme un oscillateur multiple. Les opérations effectuées passent par l'extraction des modes propres du mouvement libre. Finalement, la réponse temporelle de la structure s'exprime par la combinaison des modes propres des vibrations libres non amorties.

L'intégration directe évite le calcul des modes propres et traite les équations du mouvement à partir de relations de récurrence permettant d'avancer pas à pas dans le temps à partir d'interpolation diverse.

Cette dernière méthode a la préférence lorsque la structure présente un caractère non linéaire ou lorsque l'excitation est susceptible d'engendrer une réponse faisant intervenir un ensemble très large de fréquences et de modes propres. La difficulté est, par contre, liée à la nature des résultats obtenus. En effet, chaque grandeur (déplacement, contrainte...) est une fonction du temps et l'obtention de maximales nécessite le calcul d'une enveloppe ou l'examen d'un graphe de sa variation temporelle [16].

### 3.3. FORMULATION GENERALE

L'équation différentielle du mouvement étendue à tous les degrés de liberté d'un système linéaire conservatif peut s'écrire sous forme matricielle [19] :

$$M\{\ddot{q}\} + K\{q\} = \{Q\}$$

avec :

M : matrice masses

K : matrice raideurs

Ces deux matrices ne dépendent que du matériau et de la forme de la structure, M et K sont des matrices symétriques.

$\{Q\}$  : vecteur dont les composantes sont les forces généralisées, il peut contenir les composantes de forces et de mouvements agissant aux différents nœuds,

$\{q\}$  : vecteur dont les composantes sont les déplacements généralisés, il s'agit de déplacements linéaires ou angulaires autour d'une configuration d'équilibre statique ; ils sont fonction du temps et caractérisent les mouvements nodaux.

Cette notation matricielle est une écriture compacte de relations devant être traitées simultanément. Ce type d'écriture se prête très bien au calcul numérique et il existe de nombreuses méthodes de résolution.

Si  $i$  est le nombre de degrés de liberté par nœud et  $j$  le nombre de nœuds, le nombre total de degrés de liberté est le produit  $ij$ . Il faut commencer par calculer M et K.

#### 3.3.1. Expression de la matrice élémentaire de raideur k

k est donné par l'expression générale [19] :

$$k = \iiint_V B^t C B dV$$

avec

B : matrice reliant les allongements  $\{\varepsilon\}$  aux déplacements nodaux [19]

$$\{\varepsilon\} = B\{q\}$$

C : matrice reliant les contraintes aux déformations [19] : elle est caractéristique des propriétés du matériau et de son état de contrainte :

$$\{\sigma\} = C\{\varepsilon\} = C B\{q\}$$

$B^t$  : matrice de B transposée

V : volume de l'élément considéré.

### 3.3.2. Expressions de la matrice élémentaire de masse m

#### ***3.3.2.1. Matrice de masse concentrée (Lumped Mass Matrix)***

Initialement, dans la méthode des éléments finis, la masse de chaque élément est concentrée de manière arbitraire aux nœuds, ce qui a l'avantage de conduire à une matrice diagonale même s'il n'existe aucune masse concentrée réellement. La technique des masses concentrées consiste donc à discréditer les masses, soit au niveau de l'élément, soit au niveau global de la structure. Dans ce cas, la résolution du problème aux valeurs propres est plus aisée qu'avec une matrice de masse pleine.

#### ***3.3.2.2. Matrice de masse cohérente ou de masse répartie (consistent mass matrix)***

Cette matrice m s'écrit [19] :

$$m = \iiint_V \rho N^t N dV$$

avec  $\rho$  masse volumique du matériau constituant l'élément.

Le calcul de m s'effectue par intégration numérique et ne fait intervenir que  $\rho$ , la géométrie de l'élément et les matrices d'interpolation  $N$  telles que [19] :

$$\{d\} = N\{q\}$$

Cette relation relie les déplacements  $\{d\}$  d'un point intérieur d'un élément au vecteur colonne des déplacements nodaux  $\{q\}$  par l'intermédiaire d'une matrice d'interpolation  $N$ . Une fonction d'interpolation ou fonction de forme, correspondant à une composante de déplacement donnée, représente le déplacement à l'intérieur de l'élément, dans l'hypothèse où un seul nœud a un déplacement imposé égal à l'unité, les autres nœuds ayant des déplacements nuls. On impose ainsi, successivement, ces conditions à chaque degré de liberté du nœud. Il est habituel de choisir des fonctions d'interpolation simples pourvu que les conditions aux limites soient respectées. On choisit, généralement, les mêmes fonctions d'interpolation pour les déformées statiques et dynamiques, bien que, dans ce dernier cas, cela manque de rigueur.

Ces matrices de masses cohérentes sont symétriques mais pas diagonales. Pour les diagonaliser, il existe des méthodes d'intégration numérique. Le choix du type de matrice de masse (concentrée ou cohérente) dépend rarement de l'utilisateur du programme, qui doit se contenter de savoir, pour la précision du calcul, si l'énergie cinétique de rotation est prise en compte.

### **3.4. ASSEMBLAGE**

Chaque élément est repéré dans son référentiel local ou naturel. Par exemple, pour une poutre, l'origine sera une extrémité, l'axe  $x$  celui de la poutre,  $y$  et  $z$  les axes centraux principaux d'inertie d'une section droite. Il faut ensuite procéder, élément par élément, à un changement de repère, pour les positionner par rapport à un repère global valable pour l'ensemble de la structure.

Dans le système d'axes global, les contributions respectives de chaque élément, aux différents nœuds, s'ajoutent algébriquement.

L'assemblage consiste alors à sommer matriciellement, nœud par nœud, les termes de raideur et de masse, jusqu'à ce que l'on ait constitué les matrices globales  $K$  et  $M$ . Ces matrices ont pour dimension le produit du nombre de nœuds de la structure par le nombre de degrés de liberté par nœud.

En première approximation, le temps de calcul est proportionnel au carré de la demi-largeur de bande des matrices multiplié par le nombre d'inconnues nodales. On définit la demi-largeur de bande comme le nombre de termes qui sépare la première diagonale de la matrice de l'élément non nul le plus éloigné. C'est un paramètre dépendant de la dimension des matrices  $K$  ou  $M$ , c'est-à-dire de la numérotation des nœuds faite par le meilleur ou de la connectivité des barres ou

poutres. C'est pour cette raison que les progiciels effectuent une renumérotation automatique des nœuds pour minimiser la largeur de bande, donc diminuer le temps de calcul.

Des méthodes de stockage particulières permettent de reconfigurer ces matrices triangulaires (en raison de la symétrie), pour les mettre en mémoire en occupant le minimum de place (dans la pratique, il est fréquent de considérer des structures possédant plusieurs dizaines de milliers de degrés de liberté).

### **3.5. CONSIDERATIONS PRATIQUES**

Dans ce paragraphe, on s'est volontairement limité à la résolution de problèmes simples, dans le prolongement de ceux évoqués dans les paragraphes précédents ; aussi les descriptions de matériels ne concerneront que les plus modestes, disponibles sur le marché, mais également les plus nombreux, à savoir les micro-ordinateurs. Les autres matériels (stations de travail, mini-ordinateurs, ordinateurs) ont des prix d'achat et de maintenance d'un ordre de grandeur bien supérieur.

#### **3.5.1. Utilisation du préprocesseur**

L'idéal est de pouvoir utiliser une liaison (récupération de fichiers) avec le modèle décrit par CAO, mais ce n'est pas souvent possible. De toute manière, le module graphique intégré au préprocesseur doit permettre d'introduire et de visualiser les entités suivantes :

- les nœuds avec ou sans numérotation ;
- le maillage, à partir d'éléments choisis à l'intérieur d'une bibliothèque intégrée au progiciel ; le maillage se fait généralement de manière automatique
- les charges ponctuelles, surfaciques et volumiques ;
- le repère global, car la structure, bien souvent observable en perspective, est amenée à subir des rotations dans l'espace ;
- les matériaux, dont les caractéristiques sont également choisies à l'intérieur d'une bibliothèque.

Le préprocesseur doit permettre une vérification rapide du modèle, une renumérotation des éléments pour optimiser la largeur de bande des matrices afin de minimiser les temps de calcul et les espaces disques. Ce gain est loin d'être négligeable.

### 3.5.2. Phase de calcul

Il s'agit d'abord d'assembler les matrices élémentaires  $k$  et  $m$  pour former les matrices globales  $K$  et  $M$ , le vecteur global des forces  $\{Q\}$  si nécessaire, après avoir extrait les informations de chaque élément. Ensuite, l'outil informatique résout le système matriciel d'équations et procède au stockage des résultats.

En général le progiciel travaille, pour la phase de calcul, en aveugle vis-à-vis de l'intervenant.

### 3.5.3. Utilisation du post-processeur

Il doit posséder le maximum de possibilités graphiques pour visualiser :

- la déformée statique superposée ou non à la structure au repos ; elle existe dans tous les cas, les forces de gravité étant toujours présentes ;
- les modes de vibrations avec possibilité d'animation ; les représentations des déformées modales sont un instrument fondamental pour la compréhension des résultats obtenus ;
- les contraintes et directions principales sous forme de vecteurs ;
- les lignes ou zones d'isovaleurs, colorées de préférence : déplacements, contraintes, critères de Von Mises et de Tresca ; etc.

## **3.6. MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS DU STATOR SOUS ANSYS**

### 3.6.1. Modélisation d'une dent de stator en 3D

#### ▪ *Géométrie de la dent du stator*

Voir figure 3-3 et tableau 3.1

#### ▪ *Caractéristiques mécaniques de la dent*

Le module de Young = 27000[Mpa]

Le coefficient de Poisson = 0.3

La densité = 2700 [Kg/m<sup>3</sup>]

### ▪ *Caractéristiques d'élément type*

SOLID187 est un élément en 3D, 10-nœud d'ordre supérieur. Il a un comportement de déplacement quadratique et bien adapté à la modélisation par maillage irrégulier. L'élément est défini par 10 nœuds ayant trois degrés de liberté à chaque nœud : traductions dans les nœuds x,y,et z.

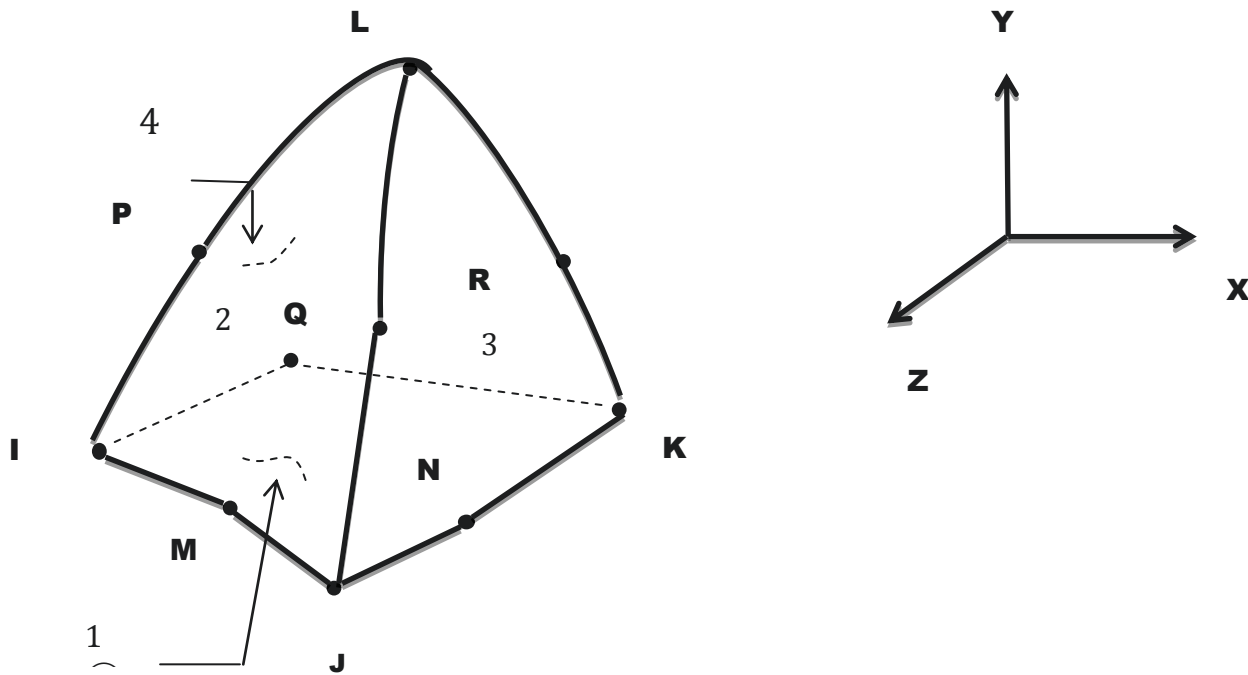


Figure - 3.1 géométrie de solid187

Il a également la capacité de formulation mixte pour la simulation des déformations des matériaux élastoplastiques, et matériaux hyperélastiques. La géométrie, les emplacements des nœuds, et le système de coordonnées de cet élément est présenté dans le figure (3.1.)

### ▪ **Command Listing**

```
/PREP7  
*SET,H1,0.6  
*SET,H2,1.2  
*SET,H3,1  
*SET,H4,4.2  
*SET,H5,3.2  
*SET,H6,1.3  
*SET,H7,0.4
```

```

*SET,R1,16.5
*SET,R2,22.5
*SET,R3,25
*SET,R4,29
  *SET,R5,30
K,1,R1,0,0,
K,2,R2,0,0,
K,3,R5,0,0
K,5,R5,H4-H3-H1,0,
K,6,R4,H4-H1,0,
K,7,R3,H4-H1,0,
K,8,R2,H1,0,
K,9,R1,H1,0,
K,9,R1,H1,0,
LSTR, 9, 1
LSTR, 1, 2
LSTR, 2, 3
LSTR, 3, 5
LSTR, 5, 6
LSTR, 6, 7
LSTR, 7, 8
LSTR, 8, 9
FLST,2,8,4
FITEM,2,1
FITEM,2,2
FITEM,2,3
FITEM,2,4
FITEM,2,5
FITEM,2,6
FITEM,2,7
FITEM,2,8
AL,P51X
CSYS,1
K,14,0,0,0,
K,15,R5,0,1.4,
LARC,15,3,14,R5,
VDRAG, 1, , , , , 9
ET,1,SOLID187
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,27000
MPDATA,PRXY,1,,.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,, 2700E -18
!Meshing
ESIZE,0.5,0,
MSHAPE,1,3D
MSHKEY,0
CM,_Y,VOLU
VSEL, , , , 1
CM,_Y1,VOLU
CHKMSH,'VOLU'
CMSEL,S,_Y
VMESH,_Y1
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CMDELE,_Y2
!analys modale
ANTYPE,2
MODOPT,SUBSP,5
EQSLV,FRONT
MXFPAND,5
!Defin Lodes
FLST,2,1,5,ORDE,1
FITEM,2,2
DA,P51X,ALL,
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,179
F,P51X,FY,30
/STATUS,SOLU

```

SOLVE  
FINISH

- **Résultats**

La figure (3.2) est le résultat d'une simulation numérique, présentant la déformation d'une dent du stator du moteur SHINSEI USR60.

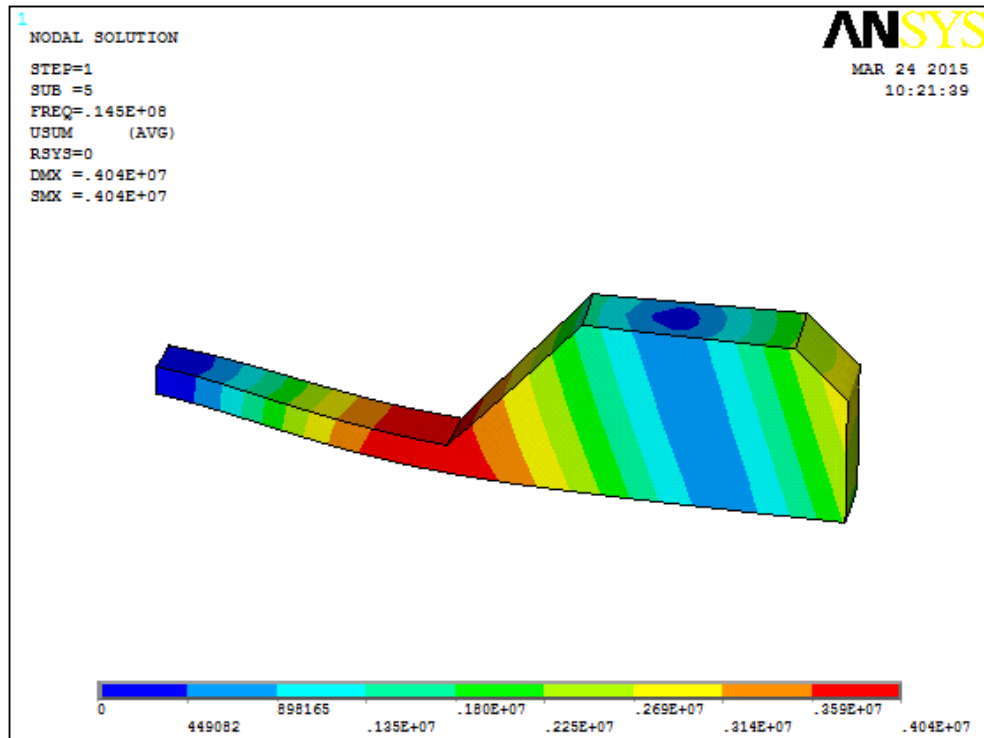


Figure 3-2 La déformation d'une dent de stator de Moteur SHINSEI USR60

### 3.6.2. Modélisation du Stator en 3D

- **Géométrie du stator**

Voir figure (4.3) et tableau (4.1)

- **Command listing**

```
/PREP7  
EP=-5.8  
H0=0.5  
H1=0.6  
H2=1.2  
H3=1  
H4=4.2  
H5=3.2
```

```

H6=1.3
H7=0.4
R1=16.5
R2=22.5
R3=25
R4=29
R5=30
k,6,R5,H4-H3-H1
K,8,R4,H4-H1
K,9,R3,H4-H1
K,7,24.16667,H4-H3-H1
FLST,2,4,3
FITEM,2,7
FITEM,2,6
FITEM,2,8
FITEM,2,9
A,P51X
CSYS,1
k,14,,,0
k,20,R5,4.9,1.37
k,21,R5,4.9,-1.37
LARC,20,6,14,R5,
LARC,21,6,14,R5,
VDRAG,      1, , , , ,      5
VDRAG,      1, , , , ,      6
VPLOT
FLST,2,2,6,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-2
VADD,P51X
CSYS,5
FLST,3,1,6,ORDE,1
FITEM,3,3
VGEN,60,P51X, , , ,360/60, , ,0
H12= 2.59
wpro,,90.000000,
CYL4, , ,R5, ,R1, ,-H12
WPSTYLE,,,,,,0
VADD,ALL
ET,1,SOLID187
MPTEMP,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,27000
MPDATA,PRXY,1,,0.3
MPDATA,dens,1,,2700E-18
smrt,3
VMESH,ALL
FRQSTR=1
MODES=10
/SOLUTION
FLST,2,2,5,ORDE,2
FITEM,2,605
FITEM,2,-606
/GO
DA,P51X,ALL,
ANTYPE,MODAL
MODOPT,LANB,MODES,FRQSTR, , ,ON
MXPAND,,,YES
SOLVE
FINISH
! SHIFT POINT FOR EIGENVALUE EX
! NUMBER OF MODES TO EXTRACT
! MODAL ANALYSIS
! BLOCK LANCZOS SOLVER
! EXPAND MODE

```

▪ *Résultat*

La figure (3.3) le résultat d'une simulation numérique, présentant la déformation du stator du moteur SHINSEI USR60.

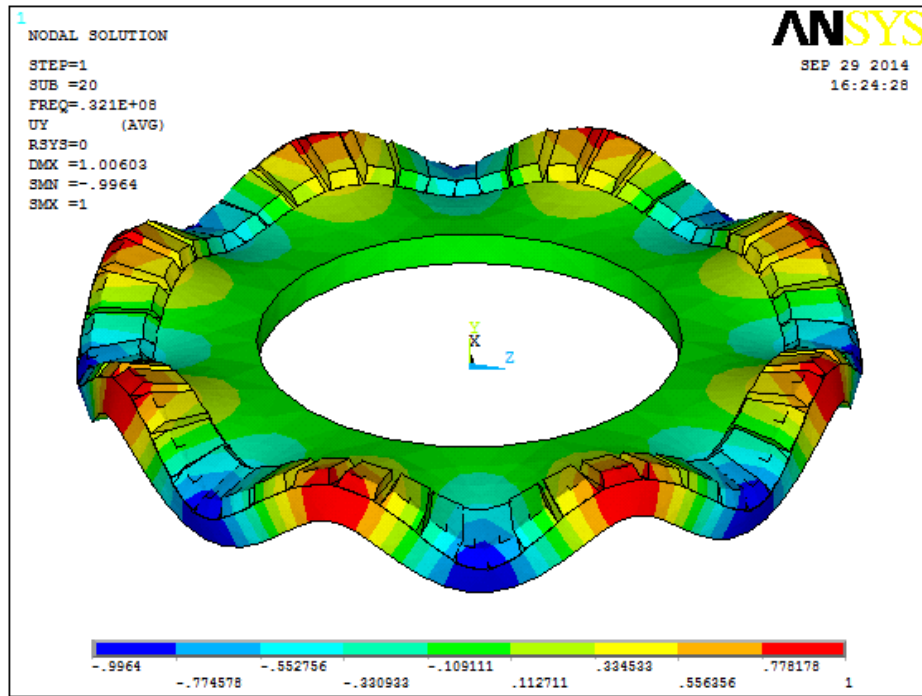


Figure - 3.3 Déformation du stator du moteur SHINSEI USR60

## CHAPTITRE 4. MODELISATION DU CONTACT MECANIQUE ENTRE STATOR ET ROTOR

---

### 4.1. INTRODUCTION

Comme illustré dans les chapitres précédents, grâce à leurs caractéristiques intrinsèques, les moteurs piézoélectriques se sont révélés supérieurs aux moteurs électromagnétiques dans beaucoup d'applications. Ainsi, on trouve plusieurs domaines d'application [20,21,22], tels que le spatial, l'aviation, le médical, l'automobile, etc. où l'on fait déjà recours à ce type d'actionneur. Malheureusement, la recherche d'un modèle analytique efficace s'avère très difficile et complexe. Cela est dû au principe de fonctionnement basé sur des vibrations à haute fréquence et aux phénomènes tribologiques agissant dans la zone de contact entre stator et rotor.

Il en résulte des caractéristiques de fonctionnement fortement non-linéaires, qui en plus varient avec le temps à cause de la dérive de certains paramètres par rapport à l'augmentation de la température de fonctionnement du moteur. La notion de fonction de transfert, très utile lors du dimensionnement des régulateurs, n'est donc pas applicable d'une façon générale à notre système, car il est non-linéaire et variant avec le temps. La diversité des phénomènes physiques mis en jeu a conduit au développement de nombreux modèles, reposants notamment sur l'identification et l'exploitation de schémas électriques équivalents [23,24,25].

Ces modèles permettent d'accéder à l'ensemble des caractéristiques électromécaniques du moteur. Ce type d'approche présente le désavantage de travailler avec des grandeurs images (tension et courant représentent respectivement l'image d'une force et d'une vitesse) ; de plus, la modélisation de la zone de contact entre le stator et le rotor, responsable de la génération du couple et caractérisée par un comportement fortement non-linéaire, est réalisée par l'introduction de composants non-linéaires (diodes, etc.) dans le schéma électrique équivalent. La paramétrisation de ses éléments demande donc beaucoup d'expériences et demeure peu pratique pour l'exploitation du modèle dans la conception d'algorithmes de commande optimaux. Les modèles théoriques basés sur des approches numériques de type éléments finis constituent aussi une alternative intéressante.

Le but de ce chapitre est donc de présenter un modèle numérique qui permettra de simuler le contact entre le stator et le rotor au sein du moteur.

## 4.2. CONVERSION ELECTROMECHANIQUE

La description du mécanisme de contact entre le stator et le rotor, qui fera l'objet de la section suivante, s'avère plus aisée avec l'introduction des coordonnées curvilignes  $x' = r_{moy}, \theta$ ,  $r_{moy}$  est le rayon moyen de l'anneau statorique. L'équation (2.8) devient :

$$W(x', t) = A_{kn} \cos(kx' - \omega_{kn}t) \quad (4.1)$$

avec  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  le nombre d'onde et  $\lambda$  la longueur d'onde.

Le déplacement d'un point quelconque Q à la surface du stator décrit une trajectoire elliptique, par rapport au référentiel déterminé par les vecteurs unités  $e_z^{\rightarrow}; e_{x'}^{\rightarrow}$  figure (4.2), selon l'équation (4.2) [16].

$$\vec{W}_Q(x', t) = W(x', t) \cdot e_z^{\rightarrow} - H \frac{\partial W(x', t)}{\partial x'} \cdot \vec{e}_{x'} \quad (4.2)$$

La vitesse tangentielle du point Q est obtenue en dérivant, par rapport au temps, la composante dans la direction  $e_{x'}^{\rightarrow}$  du vecteur déplacement  $\vec{W}_Q(x', t)$ . On a :

$$v_t(x', t) = -H \frac{d\left(\frac{\partial W(x', t)}{\partial x'}\right)}{dt} \quad (4.3)$$

avec H l'épaisseur de l'anneau du stator.

La vitesse tangentielle des points à la surface du stator entraîne le rotor grâce aux forces de friction agissant dans la zone du contact entre le stator et le rotor. Le signe moins dans le membre de droite de l'équation (4.3) signifie que la vitesse tangentielle des points à la surface du stator est de sens opposé à la direction de propagation de l'onde progressive. Ainsi, le rotor sera entraîné dans la direction opposée à celle de l'onde.

On a donc montré que la superposition de deux ondes stationnaires, d'équations (2.5) et (2.6), permet de créer dans l'anneau statorique l'onde progressive nécessaire à l'entraînement du rotor. En effet, comme on l'a vu au chapitre 1, l'anneau de céramique piézoélectrique collé au stator est subdivisé en deux secteurs (phases du moteur) qui servent justement à l'excitation de ces deux modes de vibration.

Il s'agit maintenant de modéliser la dynamique de déformation de leurs amplitudes (déterminant dans la description du phénomène de contact entre stator et rotor) en fonction de la tension appliquée aux bornes des céramiques piézoélectriques. Pour ce faire une approche possible est la méthode du bilan énergétique [26].

On applique alors le principe de Hamilton modifié pour les systèmes électromécaniques [28].

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \delta \mathbb{W} dt = 0$$

avec  $L$  le Lagrangien du système et  $\delta \mathbb{W}$  la variation de travail infinitésimal donnée par les forces extérieures. Le Lagrangien est donné par :

$$L = E_k - E_p + E_E$$

avec  $E_k$  l'énergie cinétique,  $E_p$  l'énergie potentielle et  $E_E$  l'énergie électrique associée aux céramiques piézoélectriques. L'expression analytique de ces trois composantes est complexe et laborieuse [26]. On a donc choisi de se baser sur un schéma équivalent mécanique du stator [27] représenté par la figure (4.1). Sur ce schéma on peut voir que chaque mode de vibration (onde stationnaire) est modélisé avec un système de deuxième ordre composé d'un ressort de rigidité  $c_s$  et d'un amortissement  $d_s$  modélisant respectivement l'élasticité équivalente du stator et les pertes dans la structure. Le système est excité avec une force proportionnelle à la tension d'alimentation du moteur ( $F_{1,2} = A_{em} \cdot U_{CP1,2}$ , avec  $A_{em}$  le facteur de force des céramiques piézoélectriques associé à une phase).  $m_s$  étant la masse du stator,  $W_1(t)$  et  $W_2(t)$  représentent l'amplitude de déformation des deux ondes stationnaires. Comme les deux ondes stationnaires sont en

quadrature de phase dans l'espace, l'amplitude de crête de l'onde progressive résultante est donnée par l'équation (4.4)

$$\hat{W}(t) = \sqrt{W_1^2(t) + W_2^2(t)} \quad (4.4)$$

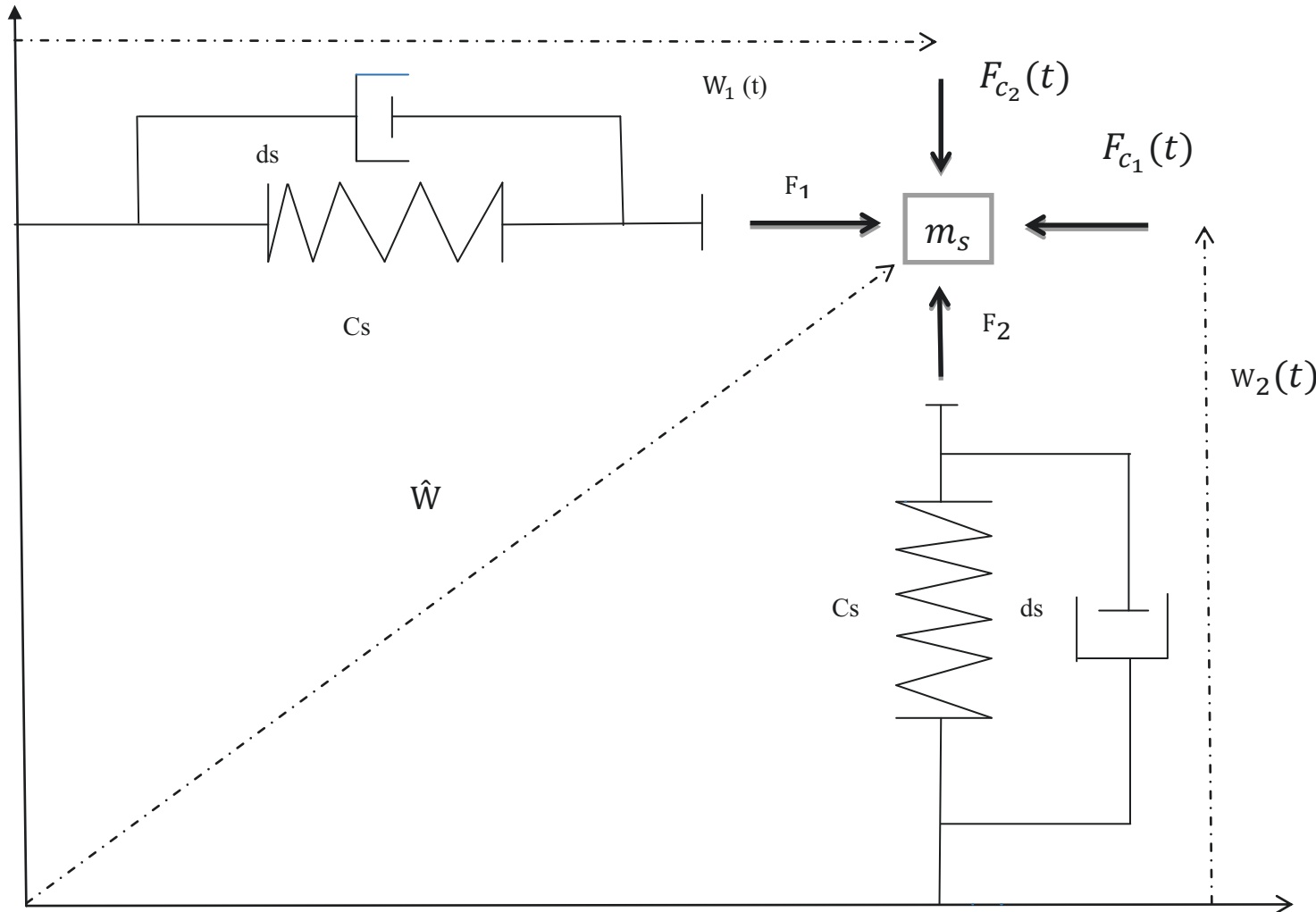


Figure - 4.1 – Schéma équivalent mécanique du système formé par les piézocéramiques et le stator

La dynamique du système mécanique de la figure (4.1) est décrite par les équations (4.5) et (4.6)

$$m_s \ddot{w}_1(t) = A_{em} U_{cp1} - d_s \dot{w}_1(t) - c_s w_1(t) - F_{c1}(t) \quad (4.5)$$

$$m_s \ddot{w}_2(t) = A_{em} U_{cp2} - d_s \dot{w}_2(t) - c_s w_2(t) - F_{c2}(t) \quad (4.6)$$

avec  $F_{C1}$  et  $F_{C2}$  les forces modales de réaction dues au chargement axial (force de précontrainte) entre le stator et le rotor. Leur expression analytique sera développée dans la section suivante, lors de l'étude du mécanisme de contact.

La réaction du sous-système mécanique (déformation du stator) sur le sous-système électrique (circuit d'alimentation) est modélisée en sachant que, à cause de l'effet piézoélectrique direct une déformation engendre un champ électrique dans les céramiques, et donc une accumulation de charge. En introduisant le facteur de réaction  $A_{me}$ , on peut expliciter ce phénomène à l'aide des équations (47.) et (47.) :

$$q_{mec1}(t) = A_{me} W_1(t) \quad (4.7)$$

$$q_{mec2}(t) = A_{me} W_2(t) \quad (4.8)$$

Le facteur de réaction  $A_{me}$  entre le sous-système mécanique et le sous-système électrique peut être exprimé en fonction du facteur de force  $A_{me}$ , de la rigidité équivalente du stator  $c_s$  et de la capacité  $C_p$  du secteur de céramiques associées à une phase. En effet, en régime statique les déformations  $w_{1,2}$  des deux ondes stationnaires sont liées aux forces  $F_{1,2}$  par l'intermédiaire de la rigidité  $c_s$  du stator, selon la relation bien connue  $F_{1,2} = c_s w_{1,2}$ . D'autre part, on connaît aussi que  $U_{cp1,2} = \frac{q_{mec1,2}}{C_p}$ . En remplaçant ces deux dernières relations, donnant les forces  $F_{1,2}$  et les tensions  $U_{cp1,2}$  en fonction respectivement des déformations  $w_{1,2}$  et des charges électriques  $q_{mec1,2}$ , dans l'équation  $F_{1,2} = A_{mec} U_{CP1}$ , on peut exprimer le facteur de réaction  $A_{me}$  avec l'équation (4.9).

$$A_{me} = \frac{C_s C_p}{A_{em}} \quad (4.9)$$

Il est donc maintenant possible de simuler la dynamique de déformation des deux ondes stationnaires coexistantes dans la plaque circulaire formant le stator. La prochaine étape est

consacrée à l'étude d'un modèle permettant de décrire le phénomène de contact entre stator et rotor responsable de la formation du couple moteur.

### **4.3. CONDITION DU CONTACT ET GLISSEMENT**

La tribologie (concerne l'étude des surfaces en contact et en mouvement relatif, elle regroupe ainsi la lubrification, le frottement et l'usure des éléments de machine) est présente dans la plupart des activités humaines et son domaine, depuis ces cinquante dernières années, s'est largement développé.

On peut citer, entre autres, la marche humaine avec l'adhérence au sol, le comportement des articulations et le développement des prothèses, la tenue d'objets à la main, la tenue sur route des roues de voitures qui se trouvent paralysées les jours de verglas ou de neige, le ski sur piste, le patinage artistique, la production de sons musicaux par frottement d'un archet contre les cordes tendues d'un violon, les têtes de lecture des disques magnétiques des ordinateurs, le vernis anti rayures des verres de lunettes, la mise en forme des matériaux. Cette énumération n'est bien évidemment pas exhaustive.

#### **4.3.1. Contacts lubrifiés et contacts dits secs**

Classiquement mais de façon un peu arbitraire, la tribologie a été subdivisée en deux grands domaines : les contacts lubrifiés par des fluides et les contacts dits secs pour lesquels le lubrifiant est soit un lubrifiant solide soit un revêtement ou un traitement de surface parfois même des débris d'usure.

##### ***4.3.1.1. Contacts lubrifiés***

Généralement les contacts lubrifiés par des fluides sont subdivisés en contacts surfaciques pour lesquels la pression dans le film est relativement faible et les contacts hertziens dans lesquels la pression est suffisamment élevée pour déformer élastiquement les surfaces.

Les paliers et les butées hydrostatiques et hydrodynamiques et les garnitures mécaniques appelées aussi joints d'étanchéité à face radiale relèvent typiquement des contacts surfaciques. Dans ces contacts, la pression dans le film fluide est relativement faible, mais la charge (force normale) supportée par le contact peut être très élevée.

Les contacts hertziens concernent les roulements à billes et à rouleaux, les engrenages, les systèmes came-poussoir, etc. Dans ce type de contact, la charge n'est pas nécessairement très élevée, mais compte tenu des faibles dimensions de la surface de contact, la pression dans le film peut atteindre et même dépasser 3 giga pascals (30 000 bar). Ainsi les surfaces de contact sont largement déformées et le comportement du lubrifiant (huile ou graisse) n'est plus newtonien.

La distinction entre contacts surfaciques et contacts hertziens n'est que formelle. Ainsi les déformations élastiques dans les paliers de bielles de moteurs thermiques doivent impérativement être prises en compte pour prévoir le comportement de ces paliers. De même l'étanchéité des joints à lèvres en élastomère dépend de la déformation élastique des surfaces qui est du même ordre de grandeur que l'épaisseur du film.

#### ***4.3.1.2. Contacts en frottement sec***

Le frottement sec entre deux matériaux a accompagné l'évolution de la civilisation humaine. En effet à l'ère paléolithique, les hommes ont maîtrisé le feu en frottant un morceau de bois dur à l'intérieur d'un morceau de bois tendre ou en frappant, avec une pierre dure, une pierre en marcassite ou en pyrite afin de provoquer l'émission d'étincelles. Bien évidemment pendant toute la période dite « âge de la pierre polie », l'homme a réalisé de nombreux outils en utilisant le frottement et l'usure. Dans l'industrie, le frottement et l'usure sont à prendre en compte depuis le stade de la fabrication des produits, jusqu'au stade de la mise hors service des mécanismes par usure, en passant par le couple de serrage des vis, le fretting des articulations assemblées par rivetage ou par vissage, le freinage, le contact de la roue sur le rail, le captage du courant électrique dans les moteurs électriques ou dans la caténaire.

Le cas des outils d'usinage : perçage, taraudage, tournage, fraisage, etc. est un intermédiaire entre la lubrification par film complet et le frottement sec. Il s'agit de contacts le plus souvent lubrifiés par des huiles ou des émulsions contenant des additifs afin de faciliter l'évacuation de copeaux et de réduire l'usure ; cependant le contact métal/métal est très souvent présent dans ce

type de mécanismes. L'étude du frottement et de l'usure des matériaux solides en contact glissant sec est un domaine d'étude et de recherche interdisciplinaire très complexe concernant de nombreux domaines et en particulier la mécanique, la physique du solide et la science des matériaux, etc. Par ailleurs, les paramètres du contact tels que la surface apparente de contact, la surface réelle de contact, la température de contact la rugosité du contact sont liées par des relations mathématiques complexes aux paramètres dynamiques imposés au contact tels que la charge normale appliquée au contact et la vitesse relative de glissement et aux propriétés mécaniques, physico-chimiques et thermiques des matériaux. Les conditions aux limites du contact nécessaires à la résolution des équations différentielles du champ des températures et du champ des contraintes de contact font que chaque géométrie de contact constitue en soi un système tribologique à part qui ne peut être séparé de son environnement. Ainsi le choix d'un couple tribologique dépend non seulement des conditions fonctionnelles de charges et de vitesses mais aussi de son environnement et de ses conditions d'utilisation. Les études tribologiques ont pour objet la compréhension des phénomènes irréversibles générés dans les contacts dynamiques afin d'augmenter la durée de vie des mécanismes, des outils et des dispositifs tribologiques par une conception et un choix convenable des matériaux ou par des traitements ou revêtements de surface adaptés.

Malgré les efforts considérables déployés en recherches tribologique et technologique, les phénomènes de frottement et d'usure qui existent dans les contacts demeurent une préoccupation de premier plan. L'évolution des surfaces en contact dynamique est irréversible et l'usure induite, même parfois micrométrique, peut mettre hors service le mécanisme.

Le dimensionnement des contacts tribologiques doit nécessairement prendre en compte les paramètres suivants :

- La charge dynamique du contact concernant la charge normale  $N$  appliquée au contact multipliée par la vitesse relative de glissement  $V$  qui détermine l'énergie mécanique dégradée par le frottement ;
- l'état de surface initial et en fonctionnement ;
- la température maximale de fonctionnement ;
- l'environnement du contact et le choix du couple de matériaux adéquat ;
- le degré de sécurité de fonctionnement

Des analyses microscopiques par des sondes de hautes résolutions microscope électronique à balayage (MEB), microscope à force atomique ou à effet tunnel, rayons X, émission infrarouge... des surfaces dégradées permettent de comprendre l'influence des éléments d'alliage à l'interface du couple tribologique de matériaux formant le contact et de proposer ainsi des couples d'une grande durabilité.

Par ailleurs, plusieurs contacts glissants industriels à sec dans les moteurs électriques, les alternateurs ou générateurs, les réseaux électrifiés des chemins de fer, le freinage, l'usinage ou des liaisons mécaniques peuvent baigner dans un champ magnétique et/ou électrique avec ou sans passage du courant électrique à travers le contact. Ces champs électriques et électromagnétiques peuvent modifier les caractéristiques physico-chimiques des surfaces et ainsi affecter leur comportement tribologique. Il est donc important d'identifier le caractère électrique : conducteur, semi-conducteur, diélectrique ou isolant et le caractère magnétique, ferromagnétique, paramagnétique ou diamagnétique des surfaces du contact.

#### 4.4. MODELISATION DU CONTACT

L'étude des phénomènes liés au contact mécanique entre stator et rotor est abordée en faisant les hypothèses suivantes :

- Modes parfaitement sinusoïdaux avec même amplitude.
- La géométrie du contact est admise symétrique [29] par rapport à la crête de l'onde progressive figure (4.2).
- Déphasage temporel et spatial entre les modes égal à  $\pi/2$ .

Ainsi, l'onde progressive résultante obéit à l'équation (4.1). La vitesse tangentielle des points à la surface du stator est ensuite obtenue en appliquant la relation (4.3), on a :

$$v_t(x', t) = \tilde{v}_t(t) \cos(kx' - \omega_{kn}t) \quad (4.10)$$

$$\text{Avec : } \tilde{v}_t(t) = -\hat{W}(t)Hk\omega_{kn}$$

Etant donné que le contact mécanique entre le stator et le rotor a lieu sur chaque crête de l'onde progressive, il est évident qu'il sera avantageux d'étudier ce phénomène par rapport à un

référentiel lié à ce point en mouvement. On va donc passer du référentiel fixe lié au stator ( $x'$ ) au référentiel tournant à la même vitesse que l'onde ( $x$ ) figure (4.2). Le passage entre ces deux référentiels s'effectue grâce à l'équation (4.11).

$$x = x' - \frac{\omega_{kn}}{k} t \quad (4.11)$$

En remplaçant (4.11) dans (4.1) et (4.3) on obtient respectivement l'amplitude de déformation de l'onde et la vitesse tangentielle des points à la surface du stator, exprimées dans le référentiel tournant à la vitesse de l'onde progressive. On obtient :

$$W(x, t) = \hat{W}(t) \cos kx \quad (4.12)$$

$$v_t(t) = \tilde{v}_t(t) \cos kx \quad (4.13)$$

La figure (4.2) montre le schéma du mécanisme de contact entre le stator et le rotor pour une crête de l'onde progressive. Le rotor est modélisé avec un substrat élastique (épaisseur élastique) de rigidité équivalente  $K_e$ .

$x_0$  est la demi-largeur de la zone de contact,  $x_l$  et  $x_r$  sont les points à la surface du stator où la vitesse tangentielle  $v_t$  est la même que celle du rotor  $V_r$ . Ces points particuliers nous permettent, selon le schéma de la figure (4.2) de localiser les zones de traction et celles de freinage.

Le déplacement du rotor  $w_r$  par rapport à la base du stator et la connaissance de l'amplitude de déformation de l'onde nous permettent de déterminer la largeur de la zone de contact avec l'équation (4.14).

$$x_0(t) = \frac{1}{k} \arccos \frac{W_r(t) - \hat{W}(t)}{\hat{W}(t)} \quad (4.14)$$

Par analogie on peut calculer les points  $x_l$  et  $x_r$  en égalant l'équation (4.13), donnant la vitesse tangentielle, à la vitesse  $V_r$  du rotor ; on obtient :

$$x_{l,r}(t) = \frac{1}{k} \arccos \frac{V_r(t)}{\tilde{v}_t(t)} \quad (4.15)$$

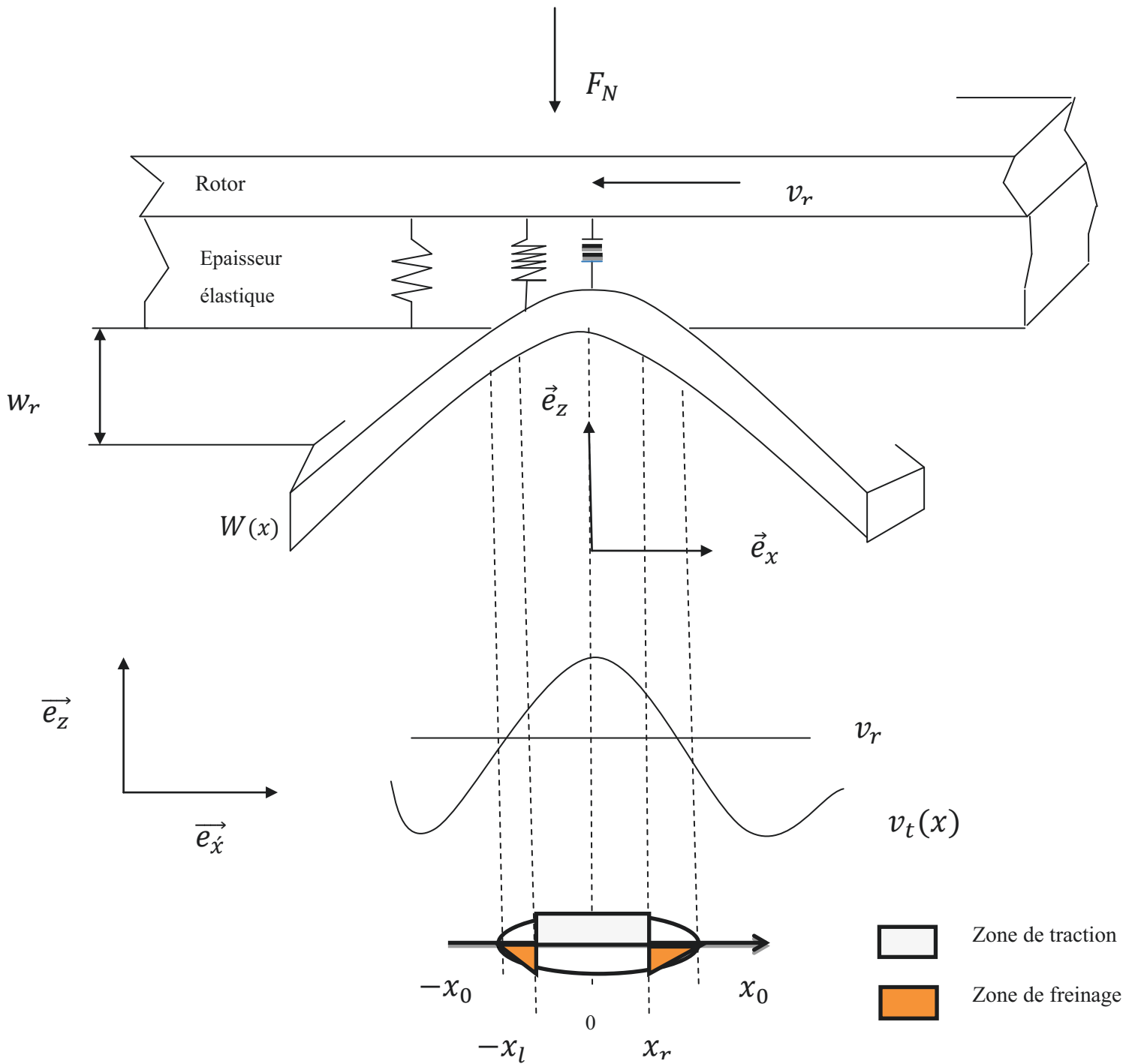


Figure – 4.2 Schéma du contact mécanique stator/rotor[26]

Le long de la zone de contact ( $-x_0 \leq x \leq x_0$ ), la contraction de l'épaisseur élastique  $\Delta W$  est donnée par l'équation (4.16).

$$\Delta W(x, t) = \hat{W}(t)(\cos kx - \cos kx_0(t)) \quad (4.16)$$

La force verticale par unité de longueur  $F_v(x, t)$  agissant dans la zone de contact est aisément déduite en connaissant la rigidité équivalente  $K_e$  de l'épaisseur élastique. On trouve :

$$F_v(x, t) = k_e \hat{W}(t)(\cos kx - \cos kx_0(t)) \quad (4.17)$$

En appliquant la loi du frottement à l'équation (4.17) on obtient la force de traction par unité de longueur  $\tau(x, t)$ . La fonction signe ( $sgn$ ), appliquée au champ des vitesses de glissement  $v_t(x, t) - V_r(t)$ , nous permet de déterminer les zones de traction et celles de freinage selon le schéma de contact stator/rotor représenté à la figure (4.2) Avec  $\mu_d$  le coefficient de frottement dynamique entre stator et rotor, on obtient :

$$\tau(x, t) = sgn(v_t(x, t) - V_r(t))\mu_d F_v(x, t) \quad (4.18)$$

Des études tribologiques ont montré que le coefficient de frottement dépend de la vitesse de glissement entre les deux surfaces en contact. Néanmoins, sans perte de généralité, nous pouvons supposer ce coefficient comme étant constant. La force de traction  $F_t$  associée à une crête de l'onde progressive est obtenue à l'aide de (4.19) en intégrant l'équation (4.18) le long de la zone de contact.

$$F_t(t) = \int_{-x_0}^{x_0} \tau(x, t) dx \quad (4.19)$$

A partir de l'équation (4.19), il est maintenant facile de déduire le couple du moteur  $M$  en connaissant le nombre de crêtes d'onde  $n$  dans l'anneau statorique et le rayon moyen  $R_{moy}$  de ce dernier. On a :

$$M(t) = nR_{MOY}F_t(t) \quad (4.20)$$

Le calcul explicite de l'intégrale (4.19) se fait en analysant tous les cas de contact possibles définis par les points  $x_0, x_l, x_r$ . On peut ainsi localiser les zones de freinage et de traction en fonction de leur position. On distingue alors les cas de contact suivants :

**Cas 1 :**  $|x_l| \leq x_0$  **et**  $|x_r| \leq x_0$

On obtient deux zones de freinage intercalées par une de traction.

$$F_t(t) = \frac{2\hat{W}(t)\mu_d K_e}{k} (\phi_r(x_r) + \phi_r(x_l) - \phi_r(x_0)) \quad (4.21)$$

**Cas 2 :**  $|x_l| > x_0$  **et**  $|x_r| \leq x_0$

On a une zone de freinage et une zone de traction.

$$F_t(t) = \frac{2\hat{W}(t)\mu_d K_e}{k} \phi_r(x_r) \quad (4.22)$$

**Cas 3 :**  $|x_l| \leq x_0$  **et**  $|x_r| > x_0$

Même cas, mais opposé par rapport à (4.22)

$$F_t(t) = \frac{2\hat{W}(t)\mu_d K_e}{k} \phi_r(x_l) \quad (4.23)$$

**Cas 4 :**  $|x_l| > x_0$  **et**  $|x_r| > x_0$

Ici on a de la traction sur toute la zone de contact.

$$F_t(t) = \frac{2\hat{W}(t)\mu_d K_e}{k} \phi_r(x_0) \quad (4.24)$$

**Cas 5 :**  $|V_r| > |\tilde{v}_t|$ ,  $x_l$  **et**  $x_r$  n'existent pas

Dans ce cas il y a seulement un effet de freinage.

$$F_t(t) = - \frac{2\hat{W}(t)\mu_d K_e}{k} \phi_r(x_0) \quad (4.25)$$

Avec :

$$\phi_r(x) = k \int (\cos kx - \cos kx_0) dx = \sin kx - kx \cos kx_0$$

## 4.5. MODELISATION DE LA DYNAMIQUE DU ROTOR

On considère deux degrés de liberté pour le rotor, rotation ( $\omega_r$ ) et translation dans la direction de l'axe du moteur ( $W_r$ ). En appliquant les lois de la dynamique de Newton, on aboutit aux équations (4.26) et (4.27), qui décrivent le comportement du rotor par rapport à ses propres degrés de liberté.

$$J \dot{\omega}_r = M - M_c \quad (4.26)$$

$$m_r \ddot{W}_r = F_z - F_N - d_z \dot{W}_r \quad (4.27)$$

Avec :

- $m_r$  Masse du rotor
- $J$  Inertie du rotor
- $\omega_r$  Vitesse angulaire du rotor
- $M_c$  Couple de charge
- $M$  Couple Moteur
- $F_N$  Force de précontrainte
- $F_z$  Force de réaction axiale due à la contraction de l'épaisseur élastique
- $d_z$  Coefficient d'amortissement dans la direction axiale

La force de réaction dans la direction axiale  $F_z$ , due à la contraction de l'épaisseur élastique, se calcule en intégrant l'équation (4.17), donnant la force axiale par unité de longueur  $F_v(x, t)$  tout au long de la zone de contact ; nous obtenons :

$$F_z(t) = n \int_{-x_0}^{x_0} F_v(x, t) dx \quad (4.28)$$

#### 4.5.1. Calcul des forces modales

La contraction de l'épaisseur élastique due à la force de précontrainte provoque par la troisième loi de Newton d'action et réaction une force qui aura tendance à réduire l'amplitude de l'onde progressive du stator. L'effet de cette force est pris en compte en rajoutant les forces de réaction modales  $F_{c1}$  et  $F_{c2}$  dans les équations (4.5) et (4.6) décrivant la dynamique de déformation des deux ondes stationnaires.

Comme l'onde progressive résulte de la superposition de deux modes de vibrations en quadrature de phase spatiale  $F_{c1}$  et  $F_{c2}$  sont calculées en utilisant le vecteur  $\phi_x^T = (\sin kx' \cos kx')$  qui nous permet de décomposer l'effet de la force globale sur les deux modes de vibrations séparément, selon l'équation (4.29).

$$\begin{pmatrix} F_{c1} \\ F_{c2} \end{pmatrix} = \phi_x \cdot n \int_{-x_0}^{x_0} F_V(x, t) dx \quad (4.29)$$

En résolvant l'intégrale (4.29) on obtient pour  $F_{c1}$  et  $F_{c2}$  :

$$F_{c1}(t) = \frac{nK_e W_1(t)}{k} \left( kx_0 - \frac{1}{2} \sin 2kx_0 \right) \quad (4.30)$$

$$F_{c2}(t) = \frac{nK_e W_2(t)}{k} \left( kx_0 - \frac{1}{2} \sin 2kx_0 \right) \quad (4.31)$$

#### 4.6. SIMULATION NUMERIQUE DU CONTACT SOUS ANSYS

- **Géométrie de stator et rotor**

Voir figure (4.3) et tableau (4.1)

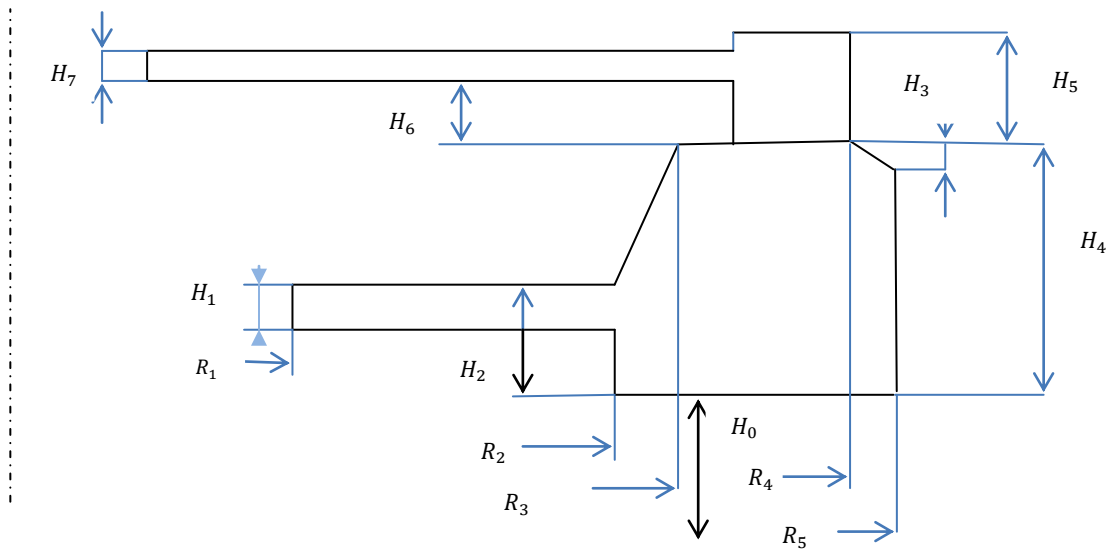


Figure - 4.3 éléments finis du stator et rotor du moteur SHINSEI USR60

Paramètre	H0	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	R1	R2	R3	R4	R5
(mm)	0.5	0.6	1.2	1	4.2	3.2	1.3	0.4	16.5	22.5	25	29	30

Tableau -4.1 caractéristique géométrique du stator et rotor du moteur SHINSEI USR60

- **Caractéristiques mécaniques du stator**

Le module de Young = 27000 [Mpa]

Le coefficient de poisson = 0.3

Le coefficient de densité = 2700 [Kg/m<sup>3</sup>]

- **Caractéristiques mécaniques du rotor**

Le module de Young = 123000[Mpa]

Le coefficient de Poisson = 0.3

Le coefficient de densité = 8250[kg /m<sup>3</sup>]

- **Caractéristiques d'élément type**

PLANE182 utilise pour 2D de structure solide et il a 4 nœuds ayant deux degré de liberté au niveau de chaque nœud : traduction dans les x nodaux et directions y et l'élément peut être utilisé comme un élément de plan (plan de contrainte, déformation plane ou déformation plane généralisé) ou un élément de révolution. L'élément a plasticité, hyper élasticité, le contrainte raidissement, grande déviation, et de grandes capacités de contrainte. Il a également mélangé capacité de formulation pour la simulation des déformations des matériaux élastoplastiques presque incompressibles. La géométrie et les nœuds de tournage de cet élément sont présentés sur la figure (4.4).

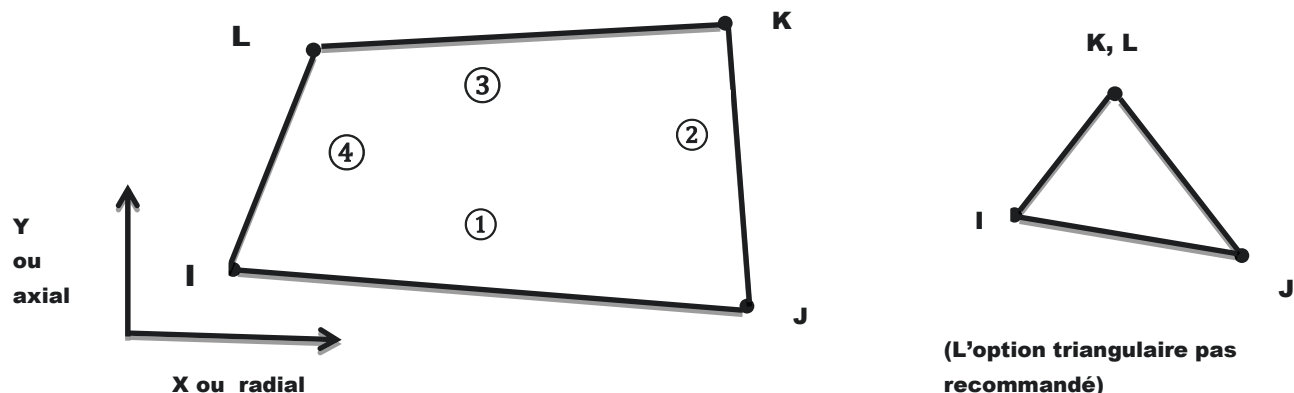


Figure – 4.4 Géométrie de PLANE182

Les données d'entrée de l'élément comprennent quatre nœuds, une épaisseur (de l'option de contraintes planes uniquement), et les propriétés des matériaux orthotropes.

- CONTA175 peut être utilisé pour représenter le contact et le glissement entre les deux surfaces (ou entre un nœud et une surface, ou entre une ligne et une surface) en 2D ou 3D. L'élément est applicable à 2D ou 3D champ analyse structurelle de contact et couplé. Cet élément est situé sur les surfaces du solide, faisceau, et des éléments de coque 3D des éléments solides et coquille avec des nœuds de la section centrale sont pris en charge pour lier et aucun contact de séparation.

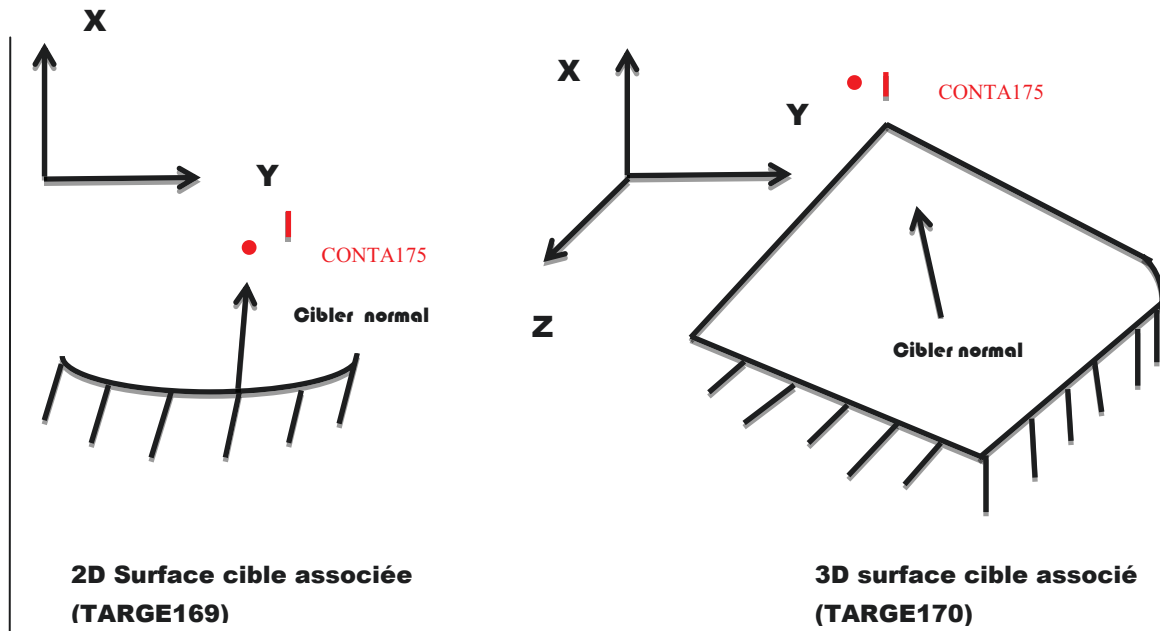


Figure -4.5 Géométrie du CONTA175

Pour les autres types de contact, d'ordre inférieur des éléments solides et coquillages sont recommandés. Contact se produit lorsque la surface de l'élément pénètre l'un des éléments du segment cible sur une surface cible spécifiée. Cet élément permet également la séparation des contacts liés à simuler l'interface délaminage.

La géométrie est représentée sur la figure (4.5). CONTA175 représente le contact 2D ou 3D, selon que les segments 2D associés (TARGE169) ou 3D (TARGE170) sont utilisés. CONTA175 supporte le frottement de Coulomb isotrope ou orthotrope

### ▪ Command Listing

```

/PREP7
EP=-5.8
HO=0.5
H1=0.6
H2=1.2
H3=1
H4=4.2
H5=3.2
H6=1.3
H7=0.4
R1=16.5
R2=22.5
R3=25
R4=29
R5=30
K,1,R1,0
K,2,R1,H1
K,3,R2,0
K,4,R2,H1
K,5,R2,-H1
K,6,R5,-H1
K,7,R5,H4-H3-H1
K,8,R4,H4-H1
K,9,R3,H4-H1
K,10,14,H4-H1+H6,,
K,11,14,H7+H4-H1+H6,,
K,12,R4-2*1.333,H4-H1+H6,,
K,13,R4-2*1.333,H4-H1,,
K,14,R4,H4-H1,,
K,15,R4,H4-H1+H5,,
K,16,R4-2*1.333,H4-H1+H5,,
K,17,R4-2*1.333,H4-H1+H6+H7,,
L,2,1
L,1,3
L,3,5
L,5,6
L,6,7
L,2,4
L,4,9
L,9,8
L,8,7
L,11,10
L,10,12
L,12,13
L,8,15
L,15,16
L,16,17
L,17,11
  FLST,2,9,4
  FITEM,2,1
  FITEM,2,2
  FITEM,2,3
  FITEM,2,4
  FITEM,2,5
  FITEM,2,9
  FITEM,2,8
  FITEM,2,7

```

```

FITEM,2,6
AL,P51X
FLST,2,8,3
FITEM,2,11
FITEM,2,10
FITEM,2,12
FITEM,2,13
FITEM,2,8
FITEM,2,15
FITEM,2,16
FITEM,2,17
A,P51X
ET,1,PLANE182
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,27000      ! Le module de Young
MPDATA,PRXY,1,,0.3      ! Le coefficient de Poisson
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,, 27000E -18      ! Le coefficient de densité
ESIZE,0.2,0,
FLST,5,2,5,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-2
CM,_Y,AREA
ASEL, , , ,P51X
CM,_Y1,AREA
CHKMSH,'AREA'
CMSEL,S,_Y
  ACLEAR,_Y1
AMESH,_Y1
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CMDELE,_Y2
!Definde element contact
ET,2,CONTA175
  KEYOPT,2,1,0
  KEYOPT,2,2,0
  KEYOPT,2,3,0
  KEYOPT,2,4,0
  KEYOPT,2,5,0
  KEYOPT,2,6,0
  KEYOPT,2,7,2
  KEYOPT,2,8,0
  KEYOPT,2,9,0
  KEYOPT,2,10,0
  KEYOPT,2,11,0
  KEYOPT,2,12,0
  KEYOPT,2,15,0
  KEYOPT,2,16,0
!Definde Real constans
R,1,,,200000, ,
RMORE,10,,,,,
RMORE,,,,,
!Dedinde nodes creating contacte
NSEL,R,LOC,Y,H4-H1
NSEL,R,LOC,X,R3,R4
CM,SOURCE,NODE
!Definde target
NSEL,ALL
NSEL,A,LOC,X,
ASEL,S, , , 1
NSEL,R,LOC,Y,H4-H1
NSEL,R,LOC,X,R3,R4
CM,TARGET,NODE
NSEL,ALL
NSEL,A,LOC,X,
!Generate contacte
  TYPE, 2
MAT, 1
REAL, 1

```

```

ESYS,          0
SECNUM,
TSHAP,LINE
FLST,5,35,1,ORDE,6
FITEM,5,92
FITEM,5,100
FITEM,5,-119
FITEM,5,915
FITEM,5,922
FITEM,5,-934
CM,_Y,NODE
NSEL,, , ,P51X
CM,_Y1,NODE
CMSEL,S,_Y
CMSEL,,_Y1
ESURF
CMSEL,,_Y
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
  EPLOT
FINISH
/SOL
ANTYPE,0
NSUBST,100,1000,20
OUTRES,ERASE
OUTRES,ALL,1
AUTOTS,1
LNSRCH,1
NEQIT,100
TIME,1
! Apply Constraints
FLST,2,2,4,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,10
DL,P51X, ,ALL,
!Apply Loads
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,64
F,P51X,FY,30
SOLVE
FINISH

```

## ▪ Résultat

Le figure (4.5) est le résultat d'une simulation numérique, présentant la déformation de contact stator et rotor du Moteur SHINSEI USR60.

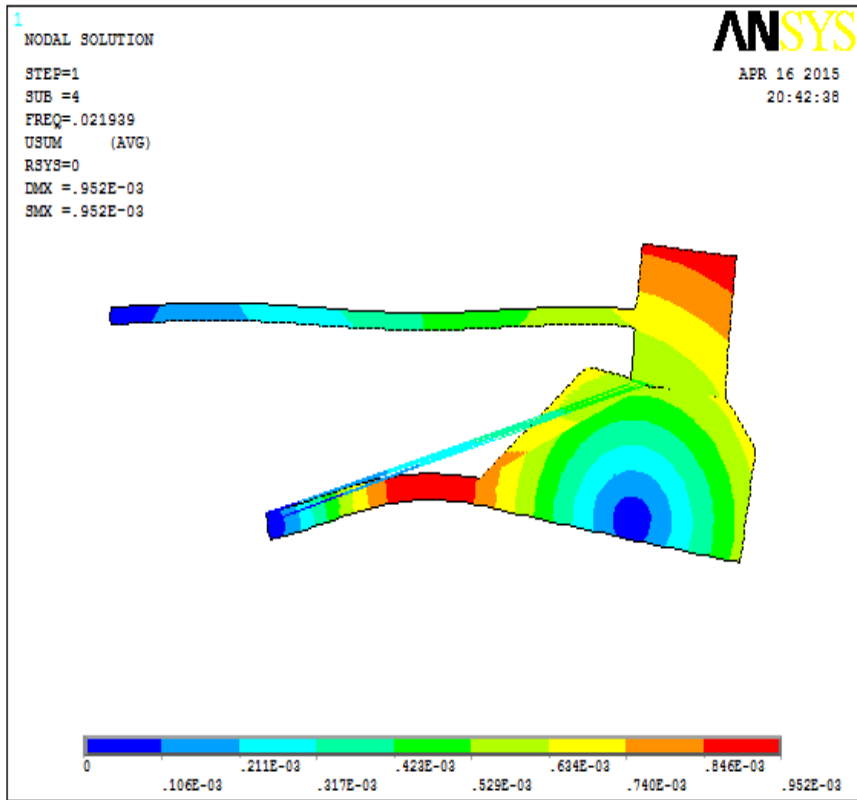


Figure - 4.5.solution numérique de contacte stator rotor

## **CHAPITRE 5. PHENOMENE DE LA PIEZOELECTRICITE**

---

### **5.1. INTRODUCTION**

Les matériaux électro actifs représentent actuellement un axe de recherche attractif pour plusieurs laboratoires de génie électrique dans le monde [28]. Ces matériaux permettent, suite à leurs caractéristiques intrinsèques et lorsqu'ils sont judicieusement exploités, d'arriver à produire des structures pouvant développer une puissance massique très encourageante pour les applications en génie électrique [29]. La céramique piézo-électrique est un matériau électro actif, qui subit une déformation sous l'effet d'une tension électrique. Elle peut être, également, le siège d'une tension électrique lorsqu'elle est soumise à des contraintes mécaniques. En effet, le fonctionnement de cette céramique est réversible. De récentes recherches ont montré que ce dernier peut être exploité pour réaliser des actionneurs [30]. Un actionneur peut être obtenu à partir d'un ensemble de piézo-électriques, disposés d'une façon particulière et judicieusement alimentés. Le mouvement issue de la déformation peut être manipulé pour obtenir le déplacement souhaité: rotatif, oscillatoire ou linéaire. Leur principe de fonctionnement repose sur la conversion par friction d'une vibration mécanique ultrasonore du stator, en un mouvement continu du rotor. La déformation de la structure élastique (substrat) est provoquée par les céramiques piézoélectriques. Ces dernières ont la propriété de subir une déformation lorsqu'elles sont sous l'action d'un champ électrique (effet piézoélectrique inverse).

Grâce à sa discrétion sonore, un encombrement réduit et des performances : fort couple à basse vitesse, le moteur piézoélectrique représente un intérêt certain pour l'industrie. Ainsi, il trouve sa place dans un univers relativement conquis par les moteurs électromagnétiques classiques. En outre, l'absence de bruits audibles de fonctionnement rend l'application des moteurs piézoélectriques très attractive.

### **5.2. CERAMIQUE PIEZOELECTRIQUE**

Les céramiques constituent la partie la plus importante des transducteurs piézoélectriques. Elles peuvent convertir des grandeurs mécaniques, comme la pression ou l'accélération, en quantité électrique ou, à l'inverse convertir des signaux électriques en mouvements ou oscillations mécanique. Les céramiques piézoélectriques sont utilisées dans une vaste gamme

d'applications et recouvrent une large bande fréquentielle. Dans les capteurs, elles permettent la conversion des forces, des pressions et des accélérations en signaux électriques. Tandis que dans les actionneurs, elles permettent la transformation de tensions électriques en déformation mécaniques. Si des lamelles de quartz sont encore utilisées pour la fabrication de résonateurs en électronique, les matériaux utilisés pour les actionneurs sont le titanate de barium et des alliages de plomb, les oxydes de titane et de zirconium (couramment appelés céramiques piézoélectrique PZT).

Le procédé de fabrication de la céramique piézoélectrique est schématisé sur la figure (5.1) :

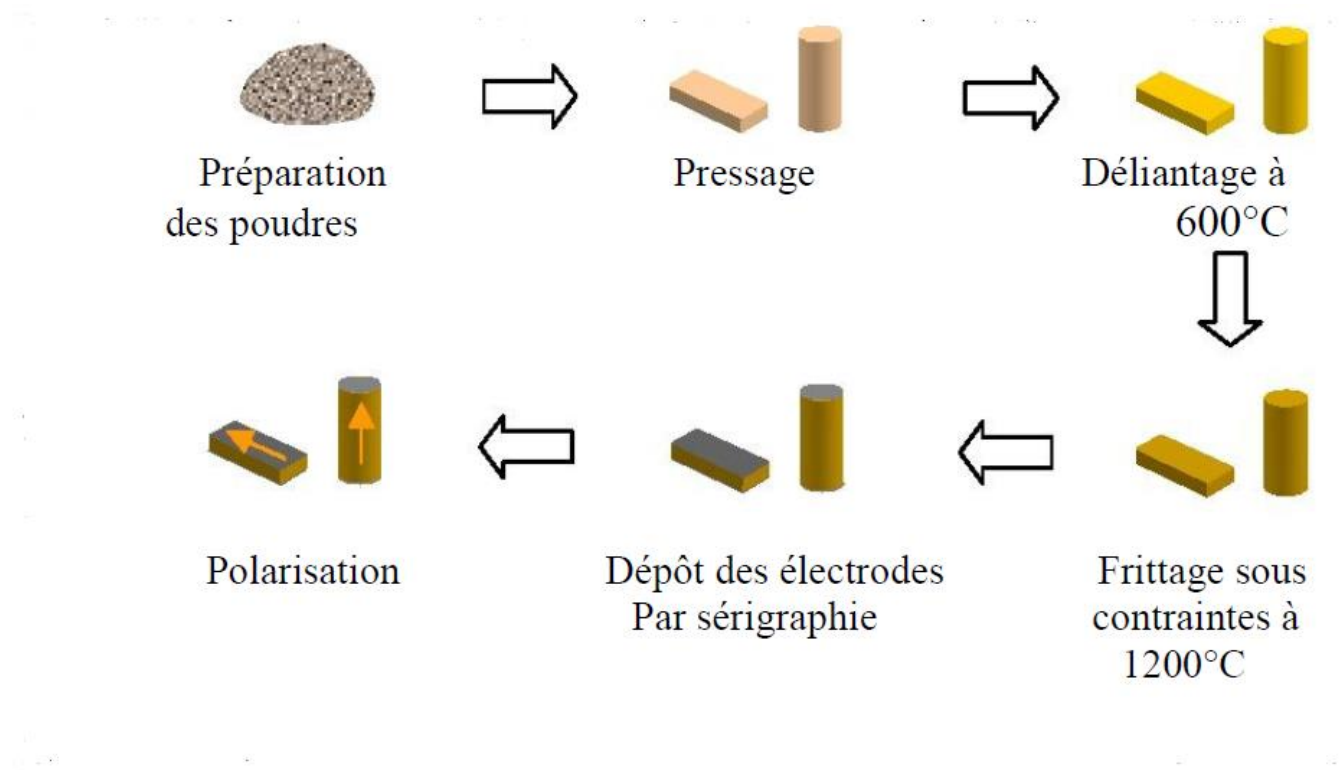


Figure 5.1 – Fabrication des céramiques piézoélectriques [31].

Le granulé de la céramique piézoélectrique est composé d'un très grand nombre de minuscules domaines cristallins qui sont orientés aléatoirement. Le procédé commence par :

- **La préparation** :Préparation d'une poudre PZT à partir d'oxydes de titane de zirconium et de plomb Pb (Zr-Ti) O<sub>3</sub> chauffés à 900°C.
- **Le pressage** :Le contenu obtenu est pressé dans une matrice selon la forme désiré en barres minces, ou sous forme de pastilles circulaires.
- **Le délaitage** : C'est l'opération qui consiste à éliminer les polymères de moulage à une température approximative de 600°C.
- **Le frittage** :On passe au frittage à 1200°C sous contrainte axiale afin de souder les grains entre eux et d'en réduire la porosité de la structure en céramique ainsi obtenue.
- **La métallisation** : On fixe par sérigraphie, une couche mince en métal conducteur sur la céramique comme futurs électrodes de la pièce obtenue.
- **La polarisation** : C'est l'étape finale du procédé : par application d'un champ électrique continu suffisamment intense de l'ordre de plusieurs kV/mm à l'élément céramique gardé à une température dans l'intervalle de Curie [150 à 450°C] pour aligner tous les dipôles.

La céramique est ensuite refroidie, toujours en présence du champ électrique. Finalement, lorsque le champ électrique est supprimé, les dipôles conservent leur position dans chaque domaine cristallin, c'est la polarisation rémanente  $P_0$

Cette séquence de polarisation est schématisée dans la figure (5.2) :

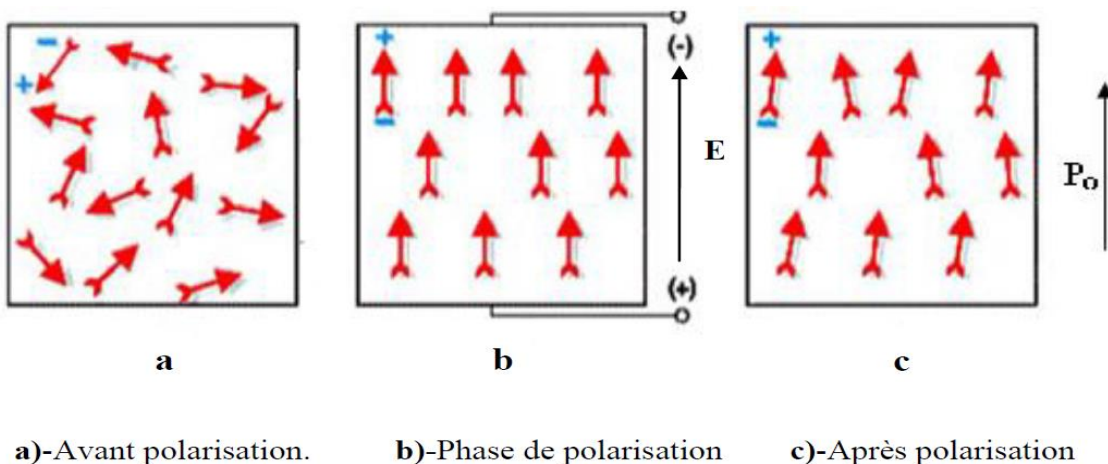


Figure - 5.2 Dipôles électriques dans une céramique piézoélectrique

### 5.3. RELATIONS PIEZOELECTRIQUES

La caractérisation systématique des propriétés électromécaniques des milieux piézoélectriques est fondée sur une représentation tensorielle du couplage entre les systèmes électrique et mécanique.

Les grandeurs locales macroscopiques, généralement choisies comme variables mécaniques et électriques dans les milieux continus, sont, respectivement, les tenseurs de déformation et de contraintes, de composantes **S** et **T**, et les vecteurs du déplacement électrique **D** et du champ électrique **E** tableau (5.1).

<b>D</b>	$[C/m^2]$	Déplacement électrique
<b>E</b>	$[V/m]$	Champ électrique
<b>S</b>	$[m /m]$	Déformation mécanique relative
<b>T</b>	$[N/m^2]$	Contrainte

Tableau 5.1 – Variables mécaniques et électriques [30].

Dans un solide élastique soumis à une contrainte **T**, la déformation **S** vaut :

$$S = sT \quad (5.1)$$

Où *s* est la souplesse (inverse du module de Young), exprimée en  $[m^2/N]$ . D'autre part, dans un diélectrique soumis à un champ électrique, on a l'équation (5.2) :

$$D = \varepsilon E \quad (5.2)$$

Où  $\epsilon$  est la constante diélectrique du milieu en [Cm/V]. Dans un milieu piézoélectrique les effets mécaniques et électriques s'influencent mutuellement. Cette situation est résumée grâce aux équations (5.3) et (5.4). Il s'agit respectivement de l'effet piézoélectrique direct et inverse.

$$\frac{\partial D}{\partial T} \neq 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} \neq 0 \quad (5.4)$$

avec une bonne approximation, cette interaction peut être décrite par des relations linéaires entre les quatre variables  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{T}$ , dont deux seulement sont indépendantes.

Le choix des variables indépendantes, l'une mécanique et l'autre électrique, est arbitraire. Ainsi, en choisissant par exemple les variables intensives ( $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{E}$ ) comme couple de variables indépendantes, les propriétés piézoélectriques de la matière se traduisent, à température constante, par les équations (5.5) et (5.6).

$$S = S^E T + d^t E \quad (5.5)$$

$$D = dT + \epsilon^T E \quad (5.6)$$

avec :

$S^E$ : La souplesse à champ électrique constant (matrice 6\*6) [ $m^2/N$ ] ;

$\epsilon^T$ : La permittivité à contrainte constante (matrice 3\*3) en [F/m] ;

$d$  : La constante de charge (matrice 3\*6) en [C/N] ;

L'exposant  $\mathbf{t}$  dans l'équation (5.5) indique qu'il s'agit de la matrice transposée de  $\mathbf{d}$ .

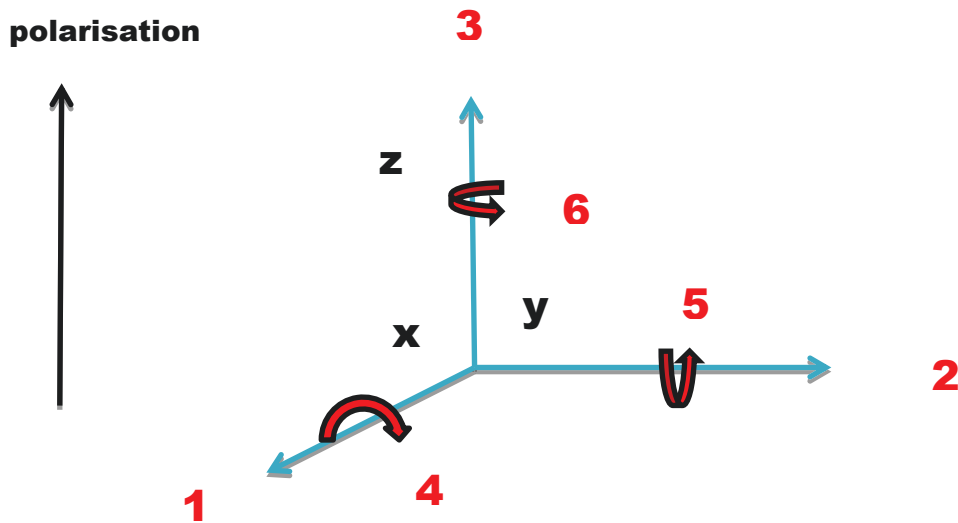


Figure 5.3 –Repère associé aux vecteurs contrainte et\_déformation [32].

Les relations (5.5) et (5.6) se réfèrent à une identification des directions qui est donnée à la figure (5.5). Selon ce système d'axes, la direction de polarisation dans le sens positif est définie selon l'axe 3 (axe z dans un système orthogonal).

On va définir les différentes matrices présentées dans les équations (5.5) et (5.6).

### Matrice de souplesse $S^E$

La contrainte et la déformation agissent sur les axes définis à la figure (5.3). La souplesse  $s$  est définie pour chacun des cas, c'est à dire pour les trois translations (allongements) et les trois rotations (cisaillements). Comme les PZT sont symétriques par rapport à l'axe de polarisation, la matrice  $S^E$  prend une forme simplifiée [30].

Par exemple,  $S_{13}^E$  est la souplesse à champ électrique constant pour une contrainte dans la direction 1, avec une composante de déformation dans la direction 3 selon l'axe Z.

La matrice de souplesse  $S^E$  s'écrit [33]:

$$S^E = \begin{pmatrix} S_{11}^E & S_{11}^E & S_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ S_{11}^E & S_{11}^E & S_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ S_{13}^E & S_{13}^E & S_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}^E \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

## Matrice de permittivité $\epsilon^T$

Le champ et le déplacement électrique sont définis uniquement dans les trois directions principales (pas de rotations). De plus, il n'y a pas d'interaction entre différents axes et  $\epsilon^T$  est donc une matrice diagonale. Ainsi, à contrainte constante,  $\epsilon_{33}^T$  est la permittivité pour un déplacement et un champ dans la direction de polarisation.

La matrice de permittivité  $\epsilon^T$  s'écrit [33] :

$$\epsilon^T = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}^T & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{13}^T \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

## Matrice des constantes de charge $d$

Le premier indice correspond à la direction de la grandeur électrique (champ ou déplacement) et le deuxième à la direction de la grandeur mécanique (contrainte ou déformation).

Comme exemple,  $d_{31}$  est le rapport entre la déformation dans la direction 1 et le champ électrique dans la direction 3 (le rapport entre le déplacement diélectrique dans la direction 1 et la contrainte dans la direction 3). On peut écrire :

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Ainsi, pour ce qui concerne les céramiques PZT, principalement utilisées dans les actionneurs que nous étudierons, les différentes matrices de souplesse  $\mathbf{s}^E$  de permittivité  $\epsilon^T$  et des constantes de charge  $\mathbf{d}$  prennent les formes données par les relations successives (5.7), (5.8) et (4.9) lorsque la polarisation est dirigée selon l'axe 3 [34].

### 5.3.1-Couplage électromécanique dans les céramiques PZT.

Il permet de décrire la conversion relative de l'énergie électrique en mécanique. Il est défini comme étant le facteur  $k_{em}$  qui caractérise la qualité de conversion électromécanique dans la céramique piézoélectrique [29] en d'autres termes l'aptitude du matériau à transformer l'énergie électrique en énergie mécanique.  $k_{em}$  est défini comme suit :

$$K_{em} = \sqrt{\frac{W_{EM}^2}{W_E \cdot W_M}} \quad (5.10)$$

- $W_E$ : C'est la densité d'énergie électrique.
- $W_M$ : La densité d'énergie mécanique.
- $W_{EM}$ : La densité d'énergie électromécanique.

A l'aide de ce paramètre on peut évaluer le rendement du matériau piézoélectrique utilisé. C'est l'un des paramètres spécifiques pour choisir un matériau piézoélectrique.

### 5.3.2. Coefficient de pertes mécaniques $Q_m$

C'est le rapport de l'énergie électrique qui est convertie en énergie mécanique par rapport à celle qui est dissipée en chaleur [30].

$Q_m$  permet donc de quantifier les pertes mécaniques et il est proportionnel au rapport entre la fréquence de résonance et la largeur de bande. Les matériaux piézoélectriques avec un coefficient de pertes mécaniques  $Q_m$  aux valeurs élevées sont caractérisés par des pics de résonance étroits, tandis que ceux avec des facteurs  $Q_m$  bas ont des largeurs de bande plus grandes [30].

## **5.4. MODES DE VIBRATIONS**

Chaque céramique piézoélectrique possède une fréquence élastique de vibration spécifique, en fonction du matériau et de sa forme. Lorsqu'une tension alternative est appliquée à une céramique piézoélectrique avec une fréquence égale à sa propre fréquence de vibration élastique, la céramique résonne.

Ce phénomène est exploité dans plusieurs dispositifs piézoélectriques, car à la résonance le coefficient d'accouplement électromécanique  $k_{em}$  est maximum. Les céramiques piézoélectriques peuvent exhiber plusieurs modes de vibrations (modes résonants), qui dépendent de leur forme, de la direction de polarisation et de la direction du champ électrique.

### 5.4.1. Modes de couplage électromécanique dans les céramiques PZT

Les modes fondamentaux utilisés dans les actionneurs les plus courants sont principalement [35]

:

- **Mode longitudinal (33)** : se traduit par une variation de longueur suivant l'axe 3 lorsqu'un champ électrique est appliqué suivant le même axe (3) au moyen des électrodes placées sur les faces perpendiculaires à cet axe figure (5.4.a) [33].

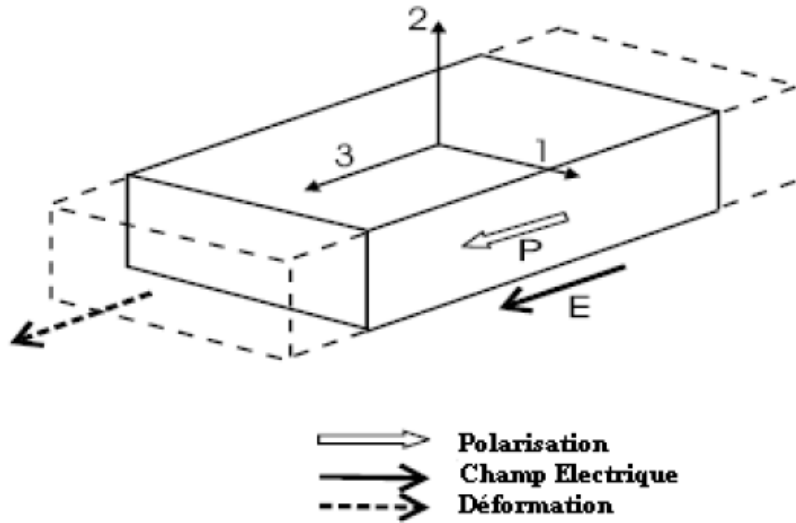


Figure 5.4.a-Mode de couplage : longitudinal (33) [35].

- **Mode transversal (31)** : se traduit par la variation de longueur suivant l'axe 1 lorsqu'un champ électrique est appliqué suivant l'axe 3 figure (5.4.b) [33].

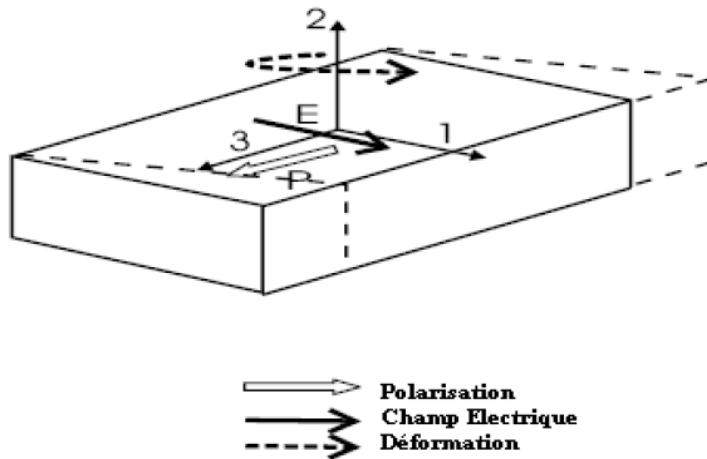


Figure 5.4.b-Mode de couplage : transversal (31) [35].

- **Mode de cisaillement (15)** : conduit à une déformation de l'élément en céramique PZT autour de l'axe 2 lorsqu'un champ électrique est appliqué suivant l'axe 1 figure (5.4.c) [33].

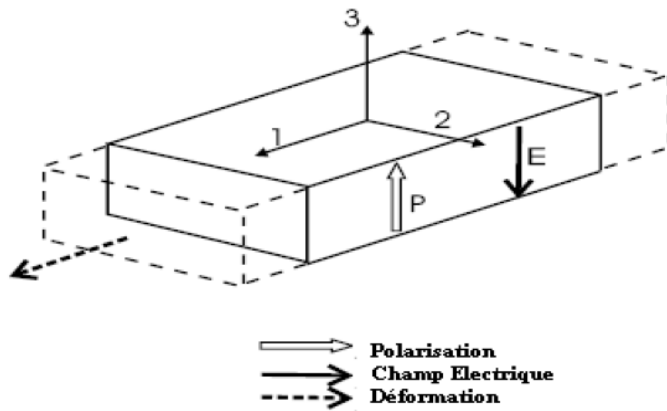


Figure - 5.4.c-Mode de couplage : de cisaillement (15) [35].

- **Mode de couplage : longitudinal (33)**

Le facteur de couplage électromécanique correspondant pour ce mode est calculé suivant la relation :

$$K_{em} = K_{33} = \sqrt{\frac{d_{33}^2}{\epsilon_{33}^T S_{33}^E}}$$

- **Mode de couplage : transversal (31).**

Le facteur de couplage électromécanique correspondant pour ce mode est calculé suivant la relation :

$$K_{em} = K_{31} = \sqrt{\frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33}^T S_{11}^E}}$$

- **Mode de couplage : de cisaillement (15).**

Le facteur de couplage électromécanique correspondant pour ce mode est calculé suivant la relation :

$$K_{em} = K_{15} = \sqrt{\frac{d_{15}^2}{\epsilon_{11}^T S_{44}^E}}$$

#### 5.4.2. Modes typiques de couplage électromécanique dans les céramiques PZT.

Le tableau (5.2) montre les modes de vibration typiques relatifs à la géométrie des matériaux piézoélectriques sous forme de : barreaux; disques et cylindres et qui sont les formes les plus utilisées dans la conception et la construction des transducteurs électromécaniques.

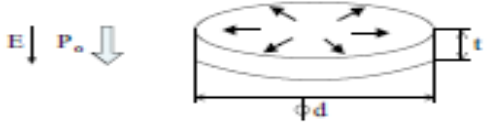
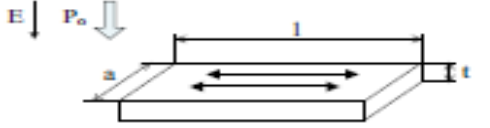
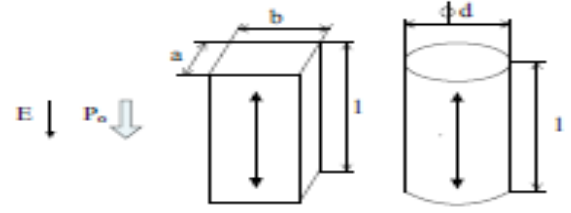
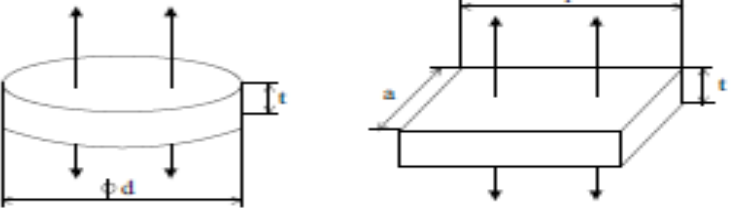
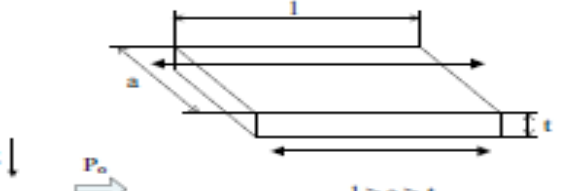
Mode de Vibration	Mode de Vibration associé à la forme
Radial	 <p style="text-align: right;"><math>d &gt; 15t</math></p> <p><math>P_o</math> : Direction de polarisation  <math>E</math> : Direction du champ électrique</p>
Transverse	 <p style="text-align: right;"><math>l &gt; 4a</math> <math>a &gt; 3t</math></p>
Longitudinal	 <p style="text-align: center;"><math>l &gt; 2.5a, 2.5b, 2.5d</math></p>
Epaisseur	 <p style="text-align: right;"><math>10t &lt; a, l, d</math></p>
Cisaillement	 <p style="text-align: right;"><math>l &gt; a &gt; t</math></p>

Tableau - 5.2 – Modes de vibration typiques associés à la forme de la céramique piézoélectrique [30]

## 5.5. DOMAINES D'APPLICATIONS DES CERAMIQUES PIEZOELECTRIQUES

Le tableau (5.3) illustre quelques domaines des applications les plus courantes :

Consommateur	Commercial	Médical
Briquets. Instruments musicaux. Buzzer. Interrupteur PZT. L'allume-gaz.	Soudeuse ultrasonique. Perceuse ultrasonique. Indicateur de niveau. Détecteur de défaut. Décapants ultrasonique. Capteurs sismiques. Microphones. Géophones. Systèmes d'alarmes. Tête d'impression des imprimantes à jet d'encre.	Thérapie ultrasonique. Capteurs ultrasoniques. Pompes d'insuline. Détection du battement cardiaque du fœtus. Acquisition d'image ultrasonique. Débitmètres. Soins dentaires. Pulvérisation des calculs rénaux. Bistouri piézoélectrique.
Automobile	Ordinateur	Militaire
Capteurs d'objets. Capteurs pour Airbag. Contrôle de vibrations. Injecteurs.	Micro-actionneur pour disque dur. Transformateur pour Notebook.	Capteur de profondeur (sonar). Les amorces. Les déclencheurs de lance-roquettes. Gyroscopie.

Tableau – 5.3 Domaines d'application des céramiques piézoélectriques [33] [36],[30]

Un premier exemple venant de la vie quotidienne est représenté par le briquet, où l'utilisateur exerce une pression, à travers un mécanisme particulier, sur une céramique piézoélectrique générant ainsi un champ électrique assez fort pour provoquer une étincelle. Dans l'industrie automobile on retrouve beaucoup d'actionneurs basés sur le phénomène piézoélectrique ; On pense par exemple aux capteurs permettant de détecter la présence d'objets durant l'opération de parking, à l'injecteur piézoélectrique, ce dernier équipé d'un actionneur PZT ce qui lui permet de produire une pulvérisation plus rapide et plus précise du carburant dans la chambre de combustion du moteur Diesel, donc un abaissement de rejets de gaz et une économie dans la consommation du carburant jusqu'à 30%. L'injecteur piézoélectrique va permettre aux constructeurs automobiles de répondre aux exigences sévères des normes Européennes et Américaines concernant la limitation de rejet des gaz polluants.

Dans les applications sous-marines les "sonar" varient des petits émetteurs pour bateaux aux systèmes professionnels utilisés dans les grandes traversées transatlantiques pour détecter la profondeur de l'eau. Dans les moteurs aéronautiques, les capteurs à ultrasons installés dans les turbines de puissance pour le contrôle dynamique ; Ces capteurs sont capables de détecter d'éventuelles charges mécaniques asymétriques dans le rotor, permettant ainsi d'implémenter des mesures correctives. Dans les systèmes à ultrasons, les dispositifs piézoélectriques peuvent générer des ondes ultrasoniques très puissantes utilisées pour nettoyer, percer, souder et aussi pour stimuler des processus chimiques. De plus, ils fonctionnent aussi comme émetteurs et récepteurs d'ondes ultrasoniques dans des appareils de diagnostics médicaux et de contrôle non destructif des matériaux. Pendant un contrôle non destructif, une céramique piézoélectrique est excitée de générer un signal acoustique à une fréquence ultrasonique, qui est ensuite transmis à travers l'échantillon à analyser, si l'onde transmise rencontre un défaut structurel, une partie du signal est réfléchi et rejoint le récepteur avant le signal original permettant ainsi de détecter le défaut.

L'effet piézoélectrique inverse est utilisé dans le positionnement de précision : un champ électrique est alors appliqué à la céramique pour produire le déplacement désiré. Les céramiques piézoélectriques sont également utilisées dans l'alignement des fibres optiques, l'alignement des machines-outils, l'amortissement actif des vibrations dans des structures mécaniques, l'amélioration de l'image par correction de l'inclinaison de miroirs, les soupapes hydrauliques et pneumatiques et dans des dispositifs médicaux tels les couteaux chirurgicaux à ultrasons. Selon le

principe de fonctionnement utilisé, nous pouvons distinguer deux types de dispositifs piézoélectriques : Capteurs et Actionneurs. Les capteurs utilisent l'effet piézoélectrique direct, les actionneurs l'effet inverse.

## 5.6. MODELISATION DU CERAMIQUE PIEZOELECTRIQUE DU MOTEUR SHINSEI SOUS ANSYS

### ▪ Caractéristiques mécaniques de stator

Le module de Young ( $E$ ) =  $2 \cdot 10^9$  [N /m<sup>2</sup>]

Le coefficient de poisson ( $\nu_{12}$ ) = 0.3

Le module de cisaillement ( $G_{12}$ ) =  $0.775 \cdot 10^9$  [N /m<sup>2</sup>]

Le coefficient de contrainte piézoélectrique

( $d_{31}$ ) =  $2.2 \cdot 10^{-11}$  [C/N]; ( $d_{32}$ ) =  $0.3 \cdot 10^{-11}$  [C/N], ( $d_{33}$ ) =  $-3 \cdot 10^{-11}$  [C/N]

### ▪ Géométrie de piézoélectrique

Circule R2, R5 voir tableau (4.1) et figure (5.5)

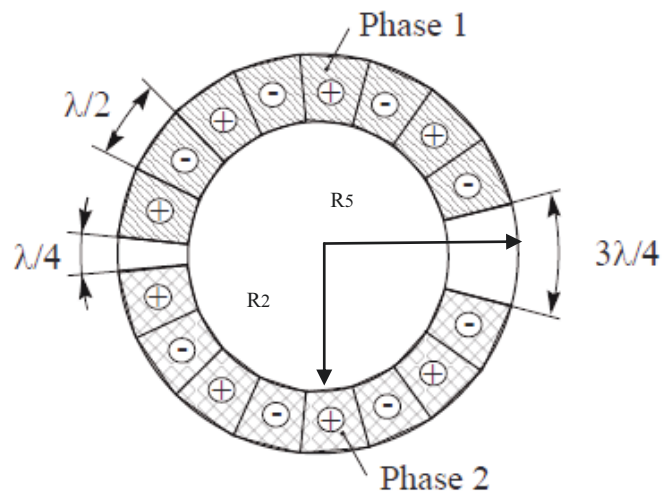


Figure 5.5 Sectorisation d'un anneau piézoélectrique utilisé dans un moteur à onde progressive

## ▪ Caractéristique de l'élément type

PLANNE223 a huit nœuds avec jusqu'à quatre degrés de liberté par nœud. Les capacités structurelles comprennent l'élasticité, la plasticité, la viscoélasticité, les grandes déformations, la grande déviation, la contrainte raidissement effets, et les effets de précontrainte. Les capacités thermoélectriques comprennent Seebeck, Peltier et Thomson effets. En plus de l'expansion thermique, les capacités structurelles thermiques comprennent l'effet piézoélectrique dans les analyses dynamiques. La géométrie, les emplacements de nœuds, et le système de coordonnées pour cet élément sont montrées dans la figure (5.6)

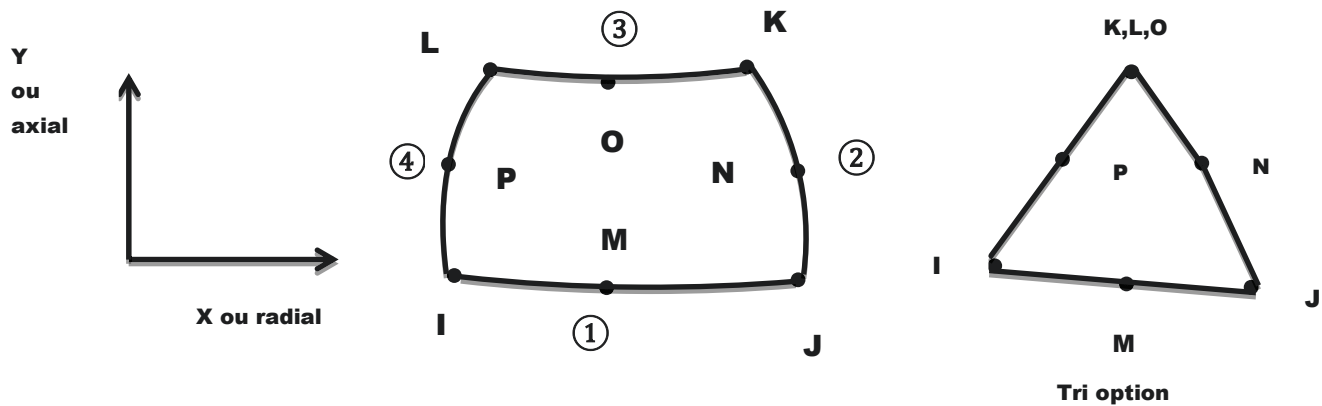


Figure 5.6 Géométrie de PLANE223

## ▪ Command Listing

```

/batch,list
/title,static Analysis of a piezoelectric Motor Shinise
/PREP7
! Geometry
EP=-0.5e-3
H0=0.5e-3
H1=0.6e-3
H2=1.2e-3
H3=1e-3
H4=4.2e-3
H5=3.2e-3
H6=1.3e-3
H7=2.1e-3
R1=16.5e-3
R2=22.5e-3
R3=25e-3
R4=29e-3
R5=30e-3

```

```

! Loading
V=100                      ! Electrode voltage, Volt
Uy=10.e-3                  ! Tip displacement, m
!Material properties for PVDF
E1=2.0e9                   ! Young's modulus, N/m^2
NU12=0.29                  ! Poisson's ratio
G12=0.775e9               ! Shear modulus, N/m^2
d31=2.2e-11               ! Piezoelectric strain coefficients, C/N
d32=0.3e-11
d33=-3.0e-11
ept33= 12                  ! Relative permittivity at constant stress
! Finite element model of the piezoelectric
local, 11,1,,,,           ! Coord. system for lower layer: polar angle 0,180
local,12,1,,,,,180       ! Coord. system for upper layer: polar angle 180,360
CSYS,1
PCIRC,R5,R2,0,180,
PCIRC,R5,R2,180,360,
!Glue layers
FLST,2,2,5,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-2
AGLUE,P51X
!2-D piézoélectrique element, plane stress
et,1,PLANE223,1001,,0    ! coupled-field 8-node quadrilateral
!Elastic coefficient Matrix [c]
tb,ANEL,1,,1             ! Elastic compliance matrix
tbda,1,1/E1,-NU12/E1,-NU12/E1
tbda,7,1/E1,-NU12/E1
tbda,12,1/E1
tbda,16,1/G12
!Piezoelectric strain Matrix
tb,PIEZ,1,,1            ! Piezoelectric strain matrix
tbda,2,d31
tbda,5,d33
tbda,8,d32
!Matrix Permittivity
tb,DPER,1,,1            ! Permittivity at constant stress
tbdata,1,ept33,ept33
tblist,all              ! List input and converted material matri
!Meshing
FLST,5,4,4,ORDE,4
FITEM,5,1
FITEM,5,3
FITEM,5,9
FITEM,5,-10
CM,_Y,LINE
LSEL,, , , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
LESIZE,_Y1, , , ,27, , , , ,1
FLST,5,2,4,ORDE,2
FITEM,5,2
FITEM,5,4
CM,_Y,LINE
LSEL,, , , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
LESIZE,_Y1, , , ,9, , , , ,1
MSHAPE,0,2D
MSHKEY,0
FLST,5,2,5,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,3
CM,_Y,AREA
ASEL,, , , ,P51X
CM,_Y1,AREA
CHKMSH,'AREA'
CMSEL,S,_Y
AMESH,_Y1
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1

```

```

CMDELE, _Y2
*get, ntip, node, 0, num, min
Allsel
csys, 1
nset, s, loc, y, 10, 180*26/27
d, all, volt, 100
*get, ntop(i), node, 0, num, min
allsel
csys, 1
nset, s, loc, y, 180*9/9, 340
d, all, volt, 0
FINISH
/SOL

```

## ▪ Résultat

La figure(5.7) suivante présente le résultat d'une simulation numérique, présentant la déformation d'une céramique PZT sectorisée et polarisée en inverse soumise à un champ électrique. La génération d'une onde progressive nécessitant une quadrature spatiale et temporelle. Cela requiert de disposer les anneaux céramiques par paires, tête bêche orthogonalement (déphasage spatiale) pour exciter chacune un mode de flexion.

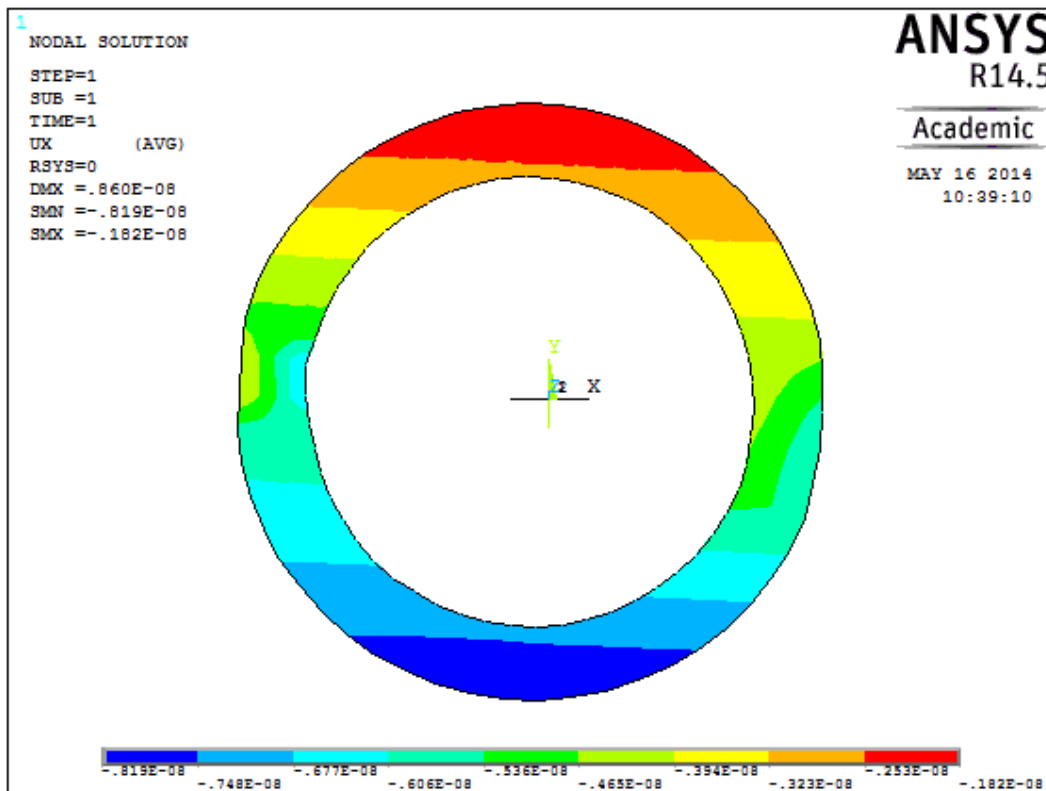


Figure 5.7 Déformation d'une céramique PZT soumise à un champ électrique

## CONCLUSION GENERALE

---

Le travail présenté dans ce mémoire est l'analyse de fonctionnement d'un actionneur piézoélectrique à onde progressive.

Le début de notre travail est un résumé sur les principes physiques liés aux fonctionnements des actionnaires de moteur piézoélectrique.

Afin de pouvoir entamer le reste des thèmes, nous avons regardé le parcours des inventions les plus populaires pendant la décennie passée liées à l'hypothèse du modèle de conversion d'énergie de moteur piézoélectrique et avons retenu le plus populaire qui est le moteur piézoélectrique à onde progressive SHINSEI USR60.

A travers l'étude théorique présentée au deuxième chapitre, nous avons essayé de traiter les différents phénomènes de la dynamique du stator et modéliser le stator en 3D sur le logiciel de calcul par éléments finis Ansys.

A cause du principe de fonctionnement, basé sur de vibrations à haute fréquence et aux phénomènes tribologiques agissant au niveau de l'interface de contact entre le stator et le rotor, la recherche d'un modèle analytique efficace s'avère être une tâche très complexe à réaliser. Les modèles couramment utilisés se basent sur l'exploitation d'un schéma électrique équivalent. Ce type d'approche présente le désavantage de travailler avec des grandeurs images (tension et courant électrique sont respectivement l'image d'une force et d'une vitesse); de plus, la modélisation du contact entre le stator et le rotor est réalisée en introduisant des composants non-linéaires (diodes, etc.) dans le schéma électrique équivalent. La para métrisation de ces éléments demande donc beaucoup d'expérience et demeure peu pratique pour l'exploitation du modèle dans la conception d'algorithmes de commande optimaux. Les modèles théoriques basés sur des approches numériques de type éléments finis constituent aussi une alternative intéressante. Dans ce chapitre nous avons aussi modélisé la zone du contact entre stator et rotor en 2D sur le code Ansys et nous avons présenté les résultats numériques trouvés.

La dernière partie de notre travail consistait à connaître les principes physiques entrant en jeu dans les phénomènes piézo-électriques. L'exploitation des équations constitutives du matériau permet, sur un exemple simple, d'appréhender les faibles déplacements mais les efforts importants obtenus avec un barreau de matériau piézo-électrique. Puis, nous faisons un inventaire des structures de conversion connues, mettant en œuvre ces faibles déplacements. Celles-ci sont

classées selon leur mode de conversion mécano-mécanique. Ce classement montre que le choix de la conversion est déterminant pour les caractéristiques en régime permanent (fort couple-basse vitesse, ou l'inverse). Nous avons modélisé la céramique piézoélectrique de Moteur SHINSEI USR60 en 2D sur Ansys et avons obtenu les déformations de cette céramique.

En perspective, Ces actionneurs piézo-céramiques envahissent de plus en plus les domaines de la technologie de pointe. Ainsi, une concurrence rude et prometteuse pour ce type d'actionneurs est entamée avec les autres catégories similaires des micromoteurs et cela depuis un bon moment.

## SYMBOLES

$U_{1,2}$	Tension de phase de moteur	[V]
$\lambda$	Longueur d'onde	[m]
$k$	Nombre d'ondes	[rad/m]
$n$	Nombre de crête d'ondes contenues dans l'anneau statorique	[-]
$\omega$	Pulsation propre électrique	[rad/s]
$\emptyset$	Déphasage entre les tensions d'alimentation électrique	[rad]
$\theta$	Position angulaire d'un point du stator	[rad]
$\xi_{1,2}$	Amplitude modale dans la direction radiale	[m]
$\mathcal{W}$	Amplitude de l'onde progressive dans le stator	[m]
$\rho$	Masse volumique	[Kg/m <sup>3</sup> ]
$\nu$	Coefficient de Poisson	[-]
$E_s$	Module de Young de la structure déformable du stator	[N/m <sup>2</sup> ]
$h$	Moitié de l'épaisseur de la plaque du stator	[m]
$\mathcal{W}_{1,2}$	Amplitude de déformation des deux ondes stationnaires	[m]
$A_{kn}$	Amplitude de crête de la résultante des ondes progressives	[m]
$R_{moy}$	Rayon moyen de l'anneau formant le stator	[m]
$v_t$	Vitesse tangentielle des points à la surface du stator	[m/s]
$L$	Lagrangien	[J]
$E_K$	Energie cinétique	[J]
$E_p$	Energie potentielle	[J]
$E_e$	Energie électrique	[J]
$\mathbb{W}$	Travail	[J]
$F_{1,2}$	Forces générées par effet piézoélectrique dans chaque phase	[N]
$A_{em}$	Facteur de force associé aux céramiques de chaque phase	[N / V]
$A_{me}$	Facteur de réaction entre le système mécanique et celui électrique	[C/m]
$\mathcal{W}_r$	Position relative entre le stator et le rotor	[m]
$V_r$	Vitesse périphérique du rotor	[m/s]
$x_0$	Demi-largeur de la zone de contact entre le stator et le rotor	[m]

$C_s$	Rigidité équivalente du stator	[N/m]
$F_{c1,2}$	Forces de réaction modale dues au chargement axiale	[N]
$q_{mec}$	Charge électrique accumulée due à la déformation du stator	[C]
$C_p$	Capacité équivalente des céramiques piézoélectriques associées à chaque phase	[F]
$\Delta \mathcal{W}$	Contraction du rotor le long de la zone de contact	[m]
$k_e$	Rigidité équivalent du rotor	[N/m <sup>2</sup> ]
$F_v$	Force axiale par unité de longueur agissant dans la zone de contact	[N/m]
$\mu_d$	Coefficient de frottement dynamique	[-]
$F_t$	Force de traction associée à une crête de l'onde progressive	[N]
$\tau$	Force de traction par unité de longueur agissant dans la zone de contact	[N/m]
$M$	Couple généré par le moteur	[Nm]
$x_{r,l}$	Localisent les points du stator où la vitesse tangentielle est égale à celle du rotor	[m]
$m_s$	Masse du stator	[Kg]
$m_r$	Masse du rotor	[Kg]
$J$	Inertie du rotor	[Kg m <sup>2</sup> ]
$F_{ext}$	Force de précontrainte	[N]
$F_z$	Force de réaction axiale totale due à la contraction de l'épaisseur élastique	[N]
$\omega_r$	Vitesse angulaire du rotor	[rad/s]
$M_c$	Couple de charge	[Nm]
$D$	Déplacement électrique	[C/m <sup>2</sup> ]
$E$	Champ électrique	[V/m]
$S$	Déformation mécanique relative	[m/m]
$T$	Contrainte mécanique	[N/m <sup>2</sup> ]
$s$	Souplesse	[m <sup>2</sup> /N]
$\epsilon$	Constante diélectrique	[Cm/V]
$s^E$	Matrice de souplesse d'un milieu piézoélectrique	[m <sup>2</sup> /N]
$\epsilon^T$	Matrice de permittivité d'un milieu piézoélectrique	[F/m]
$d$	Matrice des constantes de charge	[C/N]
$\mathcal{W}_E$	Densité d'énergie électrique	[J]
$\mathcal{W}_M$	Densité d'énergie mécanique	[J]

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] **LEISSA A.W.**, Vibration of plates. National Aeronautics and Space Administration, Washington ,1996.
- [2] **LE LETTY R.**, Conception de moteurs piézoactifs à l'aide de la modélisation. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 1994.
- [3] **SASHIDAT T., KENJO T.**, An Introduction to Ultrasonic Motors. Oxford Science Publications, Clarendon Press, Monographs in Electrical and Electronic Engineering 28, Oxford, 1993.
- [4] **Maeno T., Tsukimoto T. and Miyake A.**, Finite-element analysis of the rotor /stator contact in a ring-type ultrasonic motor, IEEE Trans. Ultra son. Ferroelect. Frequency Control 29, pp. 668-674, 1992.
- [6] **EL HAMI A., LALLEMENT G., MINOTTI P., COGAN S.**, Methods that combine finite Group Theory with Component Mode Synthesis in the Analysis of Repetitive Structures, Computer and Structures.1996
- [7] **MINOTTI P.**, Conception et modélisation de mécanismes application dans le domaine des moteurs piézo-électriques, Rapport HDR, Université de Franche comté 1994.
- [8] **Giraud F.**, Modélisation causale et commande d'un actionneur piézo-électrique à onde progressive. Thèse de Doctorat, Université de Lille I, Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance, 2002.
- [9] **USM Ultrasonic Motors General Catalogue**, USR60 SHINSEI.
- [10] **Nogarède B.**, "Moteurs piézoélectriques ", Techniques de l'ingénieur D3765.
- [11] **ROUCHON J.F., KAPSA P, MINOTTI P., BUCHAILLOT L., DUFFAIT R.**, Problèmes de surfaces dans les moteurs à ultrasons, Matériaux et Technique.1996
- [12] **HAGEDORN.P, WALLASCHEK.J**, Travelling Wave Ultrasonic Motor, I. Working Principle and Mathematical Modeling of the Stator, Journal of Sound and Vibration, Volume 155,Numero 1, pp. 31-46, 1992
- [13] **GERADIN. M, RIXEN D**, Théorie des vibrations-applications à la dynamique des structures Masson, Paris, 1993, pp.231

- [14] **Manceau J., Bastien F. and Duffait R.**, Ultrasonique micromoteur stator évaluation, IEEE .Ultrasoniques Symposium (Cannes, France, 1994)
- [15] **BATICLE J.**, Vibrations Application aux structures, Techniques de L'ingénieur,r3140a,1979
- [16] **PLUSQUELLEC J.**, Vibration, Technique de L'ingénieur, a410, 1991.
- [17] **Gérardin M., Rixen D.**,Théorie des vibrations ,Recherche en mécanique
- [18] **PIRANDA J.**, Analyse modale expérimentale. Technique de L'ingénieur, r6180, 2001.
- [19] **POURROY F.**, Apport des élément finis à la conception mécanique. Technique de L'ingénieur AG2530.
- [20] **Audren J., Hodar F., Merlet E.** : Moteurs piézoélectriques pour l'aéronautique, SAGEM SA
- [21] **Claeyssen F., le Letty R., Barillot F., Lhermet N.** : Amplified piézoélectrique actuateurs for air and space applications, Cedrat Technologies SA.
- [22] **Choi B.H., Choi H.R.** : SKK Hand master - hand exoskeleton driven by ultrasonic motors, Proceedings of the 2000 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems.
- [23] **Sashida T., Kenjo T.** : An introduction to ultrasonic motors, Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [24] **Hirata H., Ueha S.** : Characteristics estimation of a travelling wave type ultrasonic motor, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Frequency Control, 1993.
- [25] **Le Letty R.** : Conception de moteurs piézo-Actifs à l'aide de la modélisation, Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées, Lyon, 1994
- [26] **El Ghouti N.** : Hybrid modeling of a travelling wave piezoelectric motor, PhD Thesis, Department of Control Engineering, Aalborg University, Danemark, 2000.
- [27] **Giraud F.** : Modélisation causale et commande d'un actionneur piézo-électrique à onde progressive, Thèse de Doctorat, Université de Lille I, Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance, 2002.

- [28] **Péclat C.**, “Conception et réalisation d’un micromoteur piézoélectrique», Thèse de Doctorat No. 1434, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1995.
- [29] **SZLABOWICZ W.**, “Contribution au dimensionnement et à la réalisation d'actionneur piézoélectrique à rotation de mode fort couple pour applications aéronautiques”, ENSEEIHT, phd thesis 2006.
- [30] **BULLO M.**, “Modélisation et commande du moteur piézoélectrique à onde progressive”, EPFL, Thèse no 3348 (2005).
- [31] **Rizet N.**, “contrôle actif des vibrations utilisant des matériaux piézo-électriques”, INSA, Lyon, 1999
- [32] **FERNANDEZ LOPEZ J.**, “modeling and optimization of ultrasonic linear motors”, EPFL, THÈSE NO 3665 (2006).
- [33] **Nogarède B.**, “Moteurs piézoélectriques ”, Techniques de l’ingénieur D3765
- [34] **Nogarède B.** : “ Moteurs piézoélectriques ” Techniques de l’ingénieur, traité Génie électrique.
- [35] **El Ghouti N.**, “Hybrid modeling of a travelling wave piezoelectric motor”, PhD Thesis, Department Of Control Engineering, Aalborg University, Denmark, 2000.
- [36] **Venkatesan N.**, “An Evaluation of the Traveling Wave Ultrasonic Motor for Force Feedback Applications”, University of Kentucky, 2009.

## Annexe

# Vibration en flexion des plaques mince

### VIBRATION EN FLEXION DES PLAQUES MINCE

Cette section a pour objectif d'introduire le concept de plaque mince en flexion dans le cadre des hypothèses de *Kirchhoff* et d'étudier leur comportement en vibrations libres (figure 1.1).

#### 1. Hypothèses cinématiques

Les hypothèses cinématiques adoptées généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation à effort tranchant (figure 1.1).

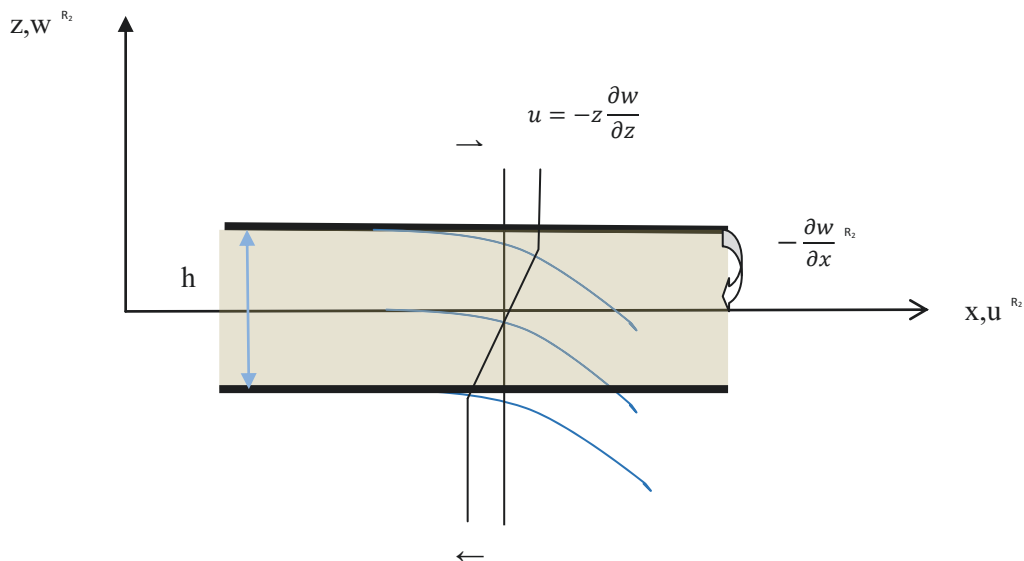


Figure 1.1 Cinématique de la déformation de la plaque

- ✓ La plaque est mince d'épaisseur  $h$  et possède un plan moyen. Les faces extérieures de la plaque sont les plans  $z = \pm \frac{1}{2}h$ .
- ✓ Seul le déplacement transversal  $w$  est considéré.
- ✓ La contrainte  $\sigma_z$  dans la direction transversale est nulle. Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures et, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout  $z$ .
- ✓ Les sections droites, initialement normales au plan moyen, restent planes et normales à celui-ci, ce qui implique que la déformation en cisaillement transverse est négligée.
- ✓ Les déplacements  $u$  et  $v$  dans le plan  $Oxy$  résultent de deux effets :
  - ✚ un champ de déplacement initial et uniforme selon l'épaisseur résultant d'un chargement de la plaque dans son plan.
  - ✚ le champ de déplacement dû à la rotation de la section droite.

Elles conduisent aux hypothèses sur les déplacements :

$$\begin{aligned}
 u &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\
 v &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\
 w &= w(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Où les déplacements  $u_0(x, y)$  et  $v_0(x, y)$  résultent d'une extension préalable de la plaque par un chargement de précontrainte dans son plan et sont considérés comme *donnés*.

## 2. Expression des déformations

Compte tenu des hypothèses (1.1) et à condition de prendre en compte les termes de grandes rotation dans l'expression des déformations de Green (*cas grands déplacements*) :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
\Upsilon_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \left( \frac{\partial \mu_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial w^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\
\Upsilon_{xz} &= 0 \\
\Upsilon_{yz} &= 0
\end{aligned} \tag{2}$$

On définit la matrice uni-colonne des déformations :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \Upsilon_{xy} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Que l'on décompose sous la forme :

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}$$

Où  $\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}$  représentent respectivement les termes de degré 0, 1, et 2

$$\varepsilon^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \varepsilon^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad \varepsilon^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

On notera que seule partie  $\varepsilon^{(1)}$  de la déformation varie selon l'épaisseur et ce, de façon linéaire.

### 3. Relations contraintes-déformations

On calcule les contraintes dans le matériau *linéaire et isotrope* à partir de la loi de Hooke :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}\end{aligned}\tag{4}$$

Avec la définition du module d'élasticité en cisaillement

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}\tag{5}$$

On y fait l'hypothèse d'annulation de la contrainte selon l'épaisseur

$$\sigma_z = 0\tag{6}$$

Ce qui conduit à la relation contraintes-déformations

$$\sigma = H\varepsilon\tag{7}$$

Avec la définition de la matrice uni-colonne des contraintes

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}\tag{8}$$

Et l'expression de la matrice des coefficients élastiques

$$H = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

#### 4. Définition des courbures

On définit la matrice des courbures

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Où les deux premiers termes représentent les courbures principales de la plaque dans les directions x et y, et le troisième correspond à la courbure croisée engendrée par la torsion de la plaque. Les déformations de la plaque liées aux termes linéaires de flexion et les contraintes associées sont liées par :

$$\varepsilon^{(1)} = zX \quad \text{et} \quad \sigma^{(1)} = H\varepsilon^{(1)} \quad (11)$$

#### 5. Relations moments-courbures

Les moments de flexion par unité de longueur dans la plaque sont calculés par intégration des contraintes sur l'épaisseur :

$$M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 H X dz \quad (12)$$

Et on obtient les expressions :

$$\begin{aligned}
M_x &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\
M_y &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\
M_{xy} &= -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{13}$$

Avec la définition de la rigidité flexionnelle de la plaque :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{14}$$

On peut les écrire sous forme matricielle :

$$M = H^* X \tag{15}$$

Avec la matrice des coefficients élastiques intégrée sur l'épaisseur

$$H^* = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{16}$$

## 6. Lois de changement de repère pour les moments

Soit une plaque de contour  $\Gamma$  quelconque et  $(l, m, 0)$  les cosinus directeurs de la normal extérieur  $\vec{n}$  en un point du contour. Les moments sur le contour  $\Gamma$  de la plaque sont  $M_n, M_s$ , et  $M_{ns}$  représentant respectivement :

$M_n$  : le moment de flexion dans le plan  $Onz$ , défini tangentiellement au bord

$M_s$  : le moment de flexion dans la direction perpendiculaire

$M_{ns}$  : le moment de torsion autour de la normal au contour

L'équilibre de l'élément de volume du bord de la plaque implique les relations de transformation pour les moments :

$$\begin{aligned}
 M_x &= l^2 M_n - 2lmM_{ns} + m^2 M_s \\
 M_y &= l^2 M_s + 2lmM_{ns} + m^2 M_n \\
 M_{xy} &= lm(M_n - M_s) + M_{ns}(l^2 - m^2)
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

## 7. Calcul de l'énergie de déformation

L'énergie de déformation de la plaque est calculée par intégration sur le volume de la densité d'énergie de déformation :

$$V_{int} = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T H \varepsilon dV
 \tag{18}$$

et on la décompose selon ses différents termes d'ordre croissant en  $w$

$$V_{int} = V_{int}^{(0)} + V_{int}^{(1)} + V_{int}^{(2)} + O(w^3)
 \tag{19}$$

Avec :

- L'énergie de déformation résultant de l'extension initiale de la plaque

$$V_{int}^{(0)} = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^{(0)T} H \varepsilon^{(0)} dV
 \tag{20}$$

Les déplacements initiaux  $(u_0, v_0)$  étant imposés, on peut écrire :

$$V_{int}^{(0)} = \text{constante}$$

Cette composante ne contribue donc pas à l'établissement de l'équation du mouvement

- L'énergie de déformation d'ordre 1

$$V_{int}^{(1)} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz \int_S X^T H \varepsilon^{(0)} ds = 0 \quad (21)$$

➤ L'énergie de déformation quadratique

$$V_{int}^{(2)} = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^{(1)T} H \varepsilon^{(1)} dV + \int_V \varepsilon^{(2)T} H \varepsilon^{(0)} dV \quad (22)$$

Où le premier terme est l'énergie de déformation en flexion d'origine linéaire et le second représente l'effet de l'extension initial. Il s'exprime en termes du champ des contraintes initiales de membrane dans la plaque :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = N_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} H \varepsilon^{(0)} dz \quad (23)$$

Selon le signe de celles-ci, il donne lieu à un raidissement ou à un assouplissement de la plaque à la flexion.

## 8. Expression du principe de Hamilton

Le principe de Hamilton a pour expression :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad (24)$$

L'énergie cinétique  $T$  y est calculée par intégration de l'énergie cinétique de l'élément de volume

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \quad (25)$$

On peut ensuite réaliser l'intégration sur l'épaisseur et définir :

- La masse par unité de surface

$$m = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz \quad (27)$$

- Le moment d'inertie massique par unité de surface, exprimé en terme de rayon de giration  $r$  de la section droite.

$$mr^2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^2 dz \quad (28)$$

Ce qui donne lieu à l'expression :

$$T = \frac{1}{2} \int_S m \left\{ \dot{w}^2 + r^2 \left[ \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dS \quad (29)$$

On utilisera donc dans la suite pour la plaque mince l'expression approchée

$$T \cong \frac{1}{2} \int_S m \dot{w}^2 dS \quad (30)$$

En ce concerne l'énergie potentielle, elle se compose de deux parties :

$$V = V_{int} + V_{ext} \quad (31)$$

L'énergie de déformation  $V_{int}$  et l'énergie potentielle des charges extérieures  $V_{ext}$

Dans un premier temps, pour ce qui concerne l'énergie de déformation, on examinera le cas où la plaque n'est soumise à aucune déformation préalable ( $N_0 = 0$ )

$$V_{int} = \frac{1}{2} \int_S D \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dS \quad (32)$$

avec

$$V_{ext} = - \int_S w p ds \quad (33)$$

Pour simplifier l'exposé, nous supposons qu'aucun moment réparti ni qu'aucune sollicitation de bord ne sont appliqués à la plaque

## 9. Obtention des équations de la plaque par variation de principe de Hamilton.

On procède tout d'abord à la variation du terme d'énergie de déformation

$$\delta V_{int} = \int_S D \left\{ \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right\} ds \quad (34)$$

Le premier terme de contour  $I_1$  :

$$I_1 = \int_{\Gamma} \left\{ -M_n \delta \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) + \frac{\partial M_{ns}}{\partial n} \delta w \right\} d\Gamma - [M_{ns} \delta w] \Gamma \quad (35)$$

Le deuxième terme de contour  $I_2$  :

$$I_2 = \int_{\Gamma} \left\{ l \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + m \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \right\} \delta w d\Gamma \quad (36)$$

On note aussi que les coordonnées (n,s) forment un système curviligne et que les cosinus directeurs de la normal varient donc avec le rayon de courbure du bord R selon les relations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial n} &= 0 & \frac{\partial l}{\partial s} &= -\frac{m}{R} \\ \frac{\partial M}{\partial n} &= 0 & \frac{\partial m}{\partial s} &= \frac{l}{m} \end{aligned} \quad (37)$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$I_2 = \int_{\Gamma} \left\{ Q_n + \frac{1}{R} (M_n - M_s) \right\} \delta w \, d\Gamma \quad (38)$$

Il en résulte l'expression finale pour la variation de l'énergie de déformation :

$$\begin{aligned} \delta V_{int} &= \\ \int_{\Gamma} \left[ -M_n \delta \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) + K_n \delta w \right] d\Gamma - [M_{ns} \delta w]_{\Gamma} - \int_S \left[ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right] \delta w \, dS \end{aligned} \quad (39)$$

Avec

$$K_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + \frac{1}{R} (M_n - M_s) \quad (40)$$

$K_n$  : l'effort tranchant de Kirchhoff

$Q_n$  : l'effort tranchant proprement

$\frac{\partial M_{ns}}{\partial s}$  : la charge distribuée engendrée par le moment de torsion

On en déduit les équations d'équilibre de la plaque :

➤ En tout point de la surface

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - m\ddot{w} + p = 0 \quad \text{sur } S \quad (41)$$

➤ En tout point de la partie requière de contour, selon que celui-ci est libre ou fixé

a. La condition sur l'effort tranchant ou sur le déplacement vertical

$$K_n = 0 \quad \text{ou} \quad w = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (42)$$

b. La condition sur le moment normal ou sur la pente normale

$$M_n = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (43)$$

➤ En tout point anguleux de contour, en termes de la force de coin de Kirchhoff générée par la discontinuité du moment de torsion ou en termes du déplacement vertical

$$Z_n = M_{ns}^+ - M_{ns}^- = 0 \quad \text{ou} \quad w = 0 \quad (44)$$

L'équation d'équilibre vertical en termes des moments :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + p - m\ddot{w} = 0 \quad (45)$$

L'équation aux dérivées partielles vérifiée par déplacement vertical :

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + m\ddot{w} - p = 0 \quad (46)$$

Soit encore, en termes de l'opérateur laplacien :

$$\Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (47)$$

L'expression plus compacte

$$D\Delta\Delta w + m\ddot{w} - p = 0 \quad (48)$$

## 10. Prise en compte de l'extension initiale dans le plan de la plaque

Dans le cas où l'extension initiale résultant d'une précontrainte membranaire de la plaque est prise en compte, l'énergie de déformation  $V_{int}^{(2)}$  peut être décomposée en sa partie linéaire et sa partie d'origine géométrique :

$$V_{int}^{(2)} = V_{int}^l + V_g \quad (49)$$

Avec

$$V_{int}^l = \frac{1}{2} \int_S X^T H^* X dS$$

$$V_g = \frac{1}{2} \int_S \left\{ N_{x0} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_{y0} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy0} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} dS \quad (50)$$

Avec les précontraintes membranaires sur le contour :

$$N_{n0} = l^2 N_{x0} + 2lmN_{xy0} + m^2 N_{y0}$$

$$N_{ns0} = lm(N_{y0} - N_{x0}) + (l^2 - m^2)N_{xy0} \quad (51)$$

Il en résulte :

- En surface, l'équation d'équilibre modifiée

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( Q_x + N_{x0} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy0} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( Q_y + N_{y0} \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - m\ddot{w} + p = 0 \quad (52)$$

- En tout point de la partie régulière du contour, la condition sur l'effort tranchant ou sur le déplacement vertical

$$K_n + N_{n0} \frac{\partial w}{\partial n} + N_{ns0} \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad \text{ou} \quad w = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (53)$$

Dans le cas où la plaque possède des caractéristiques uniformes, l'équation d'équilibre en surface peut s'exprimer en termes du déplacement par l'équation :

$$D\Delta\Delta w - \left[ N_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{y0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy0} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + m\ddot{w} - p = 0 \quad (54)$$

## 11. Vibrations libres de la plaque rectangulaire

L'hypothèse de vibrations libre (mouvement harmonique, charge extérieure  $p$  nulle) pour la plaque non précontrainte de caractéristiques uniformes conduit à l'équation aux fréquences propres :

$$\Delta\Delta w - \frac{\omega^2 m}{D} w = 0 \quad (55)$$

Pour établir la forme de sa solution générale, posons :

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 m}{D} \quad (56)$$

L'équation (55) peut être mise sous la forme

$$(\Delta + \beta^2)(\Delta - \beta^2)w = 0 \quad (57)$$

Et on définit les deux fonctions  $w_1$  et  $w_2$  telles que :

$$(\Delta - \beta^2)w_1 = 0 \quad \text{et} \quad (\Delta + \beta^2)w_2 = 0 \quad (58)$$

Il est alors aisé de vérifier que la solution générale de (57) peut s'écrire :

$$w = w_1 + w_2 \quad (59)$$

En effet, par substitution de (59) dans (57) on a :

$$(\Delta + \beta^2)(\Delta - \beta^2)(w_1 + w_2) = -2\beta^2(\Delta + \beta^2)w^2 = 0 \quad (60)$$

Pour la partie  $\omega_1$ , la solution générale est de la forme exponentielle :

$$w_1 = e^{\varphi x} e^{\gamma y} \quad \text{avec} \quad \varphi^2 + \gamma^2 = \beta^2 \quad (61)$$

Auquel cas la solution générale de la partie  $\omega_2$  prend la forme complexe associée :

$$w_2 = e^{i\varphi x} e^{i\gamma y} \quad \text{avec} \quad \varphi^2 + \gamma^2 = \beta^2$$

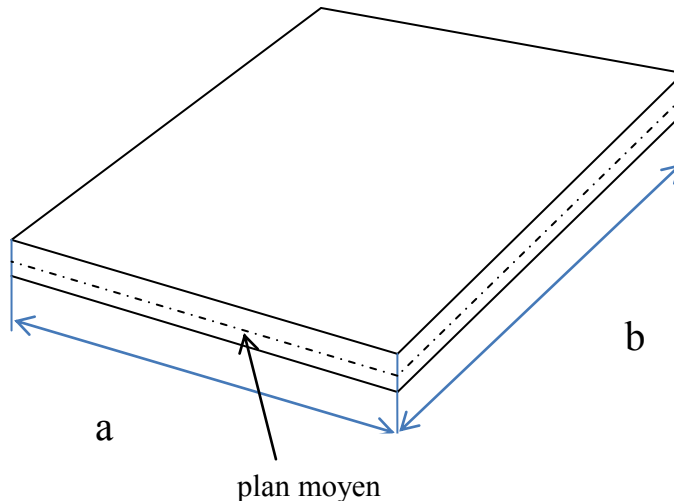
En tenant compte des signes possibles pour les constantes  $\varphi$  et  $\gamma$ , la solution complète peut être réécrite en termes de fonctions hyperboliques et trigonométriques :

$$\begin{aligned} w(x, y) = & A_1 \sin \varphi x \sin \gamma y + A_2 \cos \varphi x \sin \gamma y \\ & + A_3 \sin \varphi x \cos \gamma y + A_4 \cos \varphi x \cos \gamma y \\ & + A_5 \operatorname{sh} \varphi x \operatorname{sh} \gamma y + A_6 \operatorname{ch} \varphi x \operatorname{sh} \gamma y \\ & + A_7 \operatorname{sh} \varphi x \operatorname{ch} \gamma y + A_8 \operatorname{ch} \varphi x \operatorname{ch} \gamma y \end{aligned} \quad (62)$$

La valeur des constantes  $A_i$  et celle  $\varphi$  et  $\beta$  résultent de l'application des conditions aux limites.

***La plaque simplement appuyée sur son pourtour***

Le seul cas qui possède une solution analytique exacte est celui de la plaque rectangulaire simplement tous bords appuyée (figure 1.1):



**Figure 1.1** Plaque rectangulaire simplement appuyée

Soient  $a$  et  $b$  les dimensions de la plaque selon  $x$  et  $y$ . Les conditions aux limites ont pour expression :

$$\begin{aligned}
 w = 0 \quad \text{et} \quad M_x = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad \text{et} \quad x = a \\
 w = 0 \quad \text{et} \quad M_y = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad \text{et} \quad y = b
 \end{aligned}
 \tag{63}$$

Du fait de la nullité du déplacement sur tout le bord, en retournant à la définition des moments (13) il est aisé de voir que les conditions aux limites (63) peuvent être mises sous la forme équivalente :

$$\begin{aligned}
 w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad \text{et} \quad x = a \\
 w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad \text{et} \quad y = b
 \end{aligned}
 \tag{64}$$

Leur application à la solution générale (62) conduit à la solution

$$w(x, y) = A \sin \varphi x \sin \gamma y$$

Avec les conditions additionnelles :

$$\sin \varphi a = 0 \quad \text{et} \quad \sin \gamma b = 0 \quad (65)$$

D'où les valeurs possibles des constantes :

$$\varphi_r = \frac{r\pi}{a} \quad \text{et} \quad \gamma_n = \frac{n\pi}{b} \quad r, n = 1, 2, \dots \infty \quad (66)$$

Il en résulte les fréquences propres de la plaque simplement appuyée :

$$\omega_{rn} = \beta_{rn}^2 \sqrt{\frac{D}{m}} = \pi^2 \left[ \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (67)$$

Et les modes propres correspondants :

$$w_{rn}(x, y) = \sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (68)$$

## 12. Vibrations de la plaque circulaire

### a. Expression des équations de la plaque circulaire

Pour établir l'équation d'une plaque circulaire en vibration, repartons de l'équation correspondante en coordonnées rectangulaires et transformons-la dans les coordonnées polaires :

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta \quad (69)$$

La matrice jacobienne de la transformation s'écrit :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \quad (70)$$

Et admet l'inverse

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{bmatrix} \quad (71)$$

D'où la transformation sur les dérivés premières :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (72)$$

Et l'expression de l'opérateur laplacien en coordonnées polaires :

$$\Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \quad (73)$$

Il en résulte l'équation du mouvement de la plaque circulaire de caractéristiques uniformes exprimée en coordonnée polaire :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 w - \frac{\omega^2 m}{D} w = 0 \quad (74)$$

Les conditions aux limites correspondantes se déduisent directement des relations (42) et (43) à condition de noter que les coordonnées curvilignes du contour de la plaque deviennent :

$$n = r \quad \text{et} \quad s = R\theta$$

Où R est le rayon extérieur de la plaque. On obtient les conditions

➤ Sur l'effort tranchant ou le déplacement au bord :

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{2}{R} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} (M_r - M_\theta) = 0 \quad \text{ou} \quad w = 0 \quad \text{en} \quad r = R \quad (75)$$

➤ Sur le moment normal ou la pente normale au bord :

$$M_r = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{en} \quad r = R \quad (76)$$

### b.Expression de l'énergie de déformation

La transformation (74) permet également d'exprimer l'énergie de déformation de la plaque (36) en coordonnées polaires :

$$V_{int} = \frac{1}{2} \int_S D \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right)^2 \right] \right\} r dr d\theta \quad (77)$$

### c.Le cas de la plaque encastrée sur son pourtour

Considérons la plaque encastrée sur son pourtour et cherchons une solution analytique exacte. On doit résoudre le problème :

$$(\Delta^2 - \beta^4)w(r, \theta) = 0 \quad (78)$$

Avec

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 m}{D} \quad (79)$$

Et les conditions aux limites sur le rayon extérieur  $r = a$

$$w(a, \theta) = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (80)$$

De la même manière que pour la plaque en coordonnées cartésiennes, on sépare la solution en deux parties :

$$w = w_1 + w_2 \quad (81)$$

Chacune étant solution de :

$$(\Delta^2 + \beta^2)w_1 = 0 \quad \text{et} \quad (\Delta^2 + (i\beta)^2)w_2 = 0 \quad (82)$$

Traitons tout d'abord la partie  $w_1$  en la séparant en une partie radiale et une partie azimutale sous la forme :

$$w_1 = R(r)\Theta(\theta) \quad (83)$$

Ce qui donne lieu à l'équation :

$$\left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r}\right) \Theta + \frac{R \partial^2 \Theta}{r^2 \partial \theta^2} + \beta^2 R \Theta(\theta) \quad (84)$$

On peut la séparer en une équation selon  $\theta$  et une équation selon  $r$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + k^2 \Theta &= 0 \\ \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(\beta^2 - \frac{k^2}{r^2}\right) R &= 0 \end{aligned} \quad (85)$$

La périodicité sur un tour de la partie azimutale de la solution impose que  $k$  soit un entier positif, tandis que la partie radiale répond à une équation de Bessel et s'exprime donc en termes de fonctions de Bessel de première et deuxième espèce :

$$\begin{aligned}\Theta_k(\theta) &= C_{1k} \sin k\theta + C_{2k} \cos k\theta \\ R_k(r) &= C_{3k} J_k(\beta r) + C_{4k} Y_k(\beta r)\end{aligned}\quad (86)$$

D'où la première partie de la solution générale :

$$\begin{aligned}w_1(r, \theta) &= \\ &(A_{1k} J_k(\beta r) + A_{3k} Y_k(\beta r)) \sin k\theta + (A_{2k} J_k(\beta r) + A_{4k} Y_k(\beta r)) \cos k\theta\end{aligned}\quad (87)$$

L'autre partie de la solution fait intervenir les fonctions de **Bessel** modifiées  $I_k(x)$  et  $K_k(x)$  combinaisons linéaires de  $J_k(ix)$  et  $Y_k(ix)$

$$\begin{aligned}w_2(r, \theta) &= \\ &(B_{1k} I_k(\beta r) + B_{3k} K_k(\beta r)) \sin k\theta + (B_{2k} I_k(\beta r) + B_{4k} K_k(\beta r)) \cos k\theta\end{aligned}\quad (88)$$

L'application des conditions aux limites est faite de la façon suivante :

- La solution doit rester finie au centre de la plaque. Du fait que les fonctions  $Y_k(\beta r)$  et  $K_k(\beta r)$  deviennent singulières en  $r=0$ , les termes correspondants doivent être éliminés des deux contributions (87) et (88) à la solution.
- La condition de nullité du déplacement au bord  $\omega(a, \theta) = 0$  fournit les égalités :

$$B_{1k} = - \frac{J_k(\beta a)}{I_k(\beta a)} A_{1k} \quad \text{et} \quad B_{2k} = - \frac{J_k(\beta a)}{I_k(\beta a)} A_{2k}\quad (89)$$

D'où la forme de la solution :

$$w_k(r, \theta) = \left( J_k(\beta r) - \frac{J_k(\beta a)}{I_k(\beta a)} I_k(\beta r) \right) (A_{1k} \sin k\theta + A_{2k} \cos k\theta) \quad (90)$$

➤ La condition sur la pente normale au bord donne la relation :

$$\left[ \frac{d}{dr} J_k(\beta r) - \frac{J_k(\beta a)}{I_k(\beta a)} \frac{d}{dr} I_k(\beta r) \right] = 0 \quad r = a \text{ et } k = 0, 1, \dots \dots \dots \quad (91)$$

Soit l'équation aux valeurs propres :

$$I_k(\beta a) J_{k-1}(\beta a) - J_k(\beta a) I_{k-1}(\beta a) = 0 \quad (92)$$

Qui admet les solutions notées  $\beta_{kn}$ ,  $n=1, 2, \dots$  et dont on déduit :

$$\omega_{kn} = \beta_{kn}^2 \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (93)$$

Un mode propre prend alors la forme :

$$w_{kn}(r, \theta) = A_{kn} (I_k(\beta_{kn} a) J_k(\beta_{kn} r) - J_k(\beta_{kn} a) I_k(\beta_{kn} r)) \begin{cases} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{cases} \quad (94)$$

$k=0, 1, \dots$

$n=1, 2, \dots$

## Résumé

Le principe de fonctionnement piézo-électrique est fondé sur la déformation d'une structure élastique à base de matériaux composites électro-actifs, capable de communiquer par adhérence un mouvement d'entraînement uniforme à une partie mobile. Ce nouveau système subit une déformation sous l'effet d'une tension électrique ou bien l'inverse. A partir de cette réversibilité plusieurs applications, qui relèvent du domaine du génie électrique, sont possibles. La diversité des phénomènes physiques mis en jeu a conduit, dans des recherches précédentes, au développement de nombreux modèles, reposants notamment sur l'identification de schémas électromagnétiques équivalents ou sur l'exploitation de modèles théoriques basés sur des approches numériques de type éléments finis.

On propose dans ce mémoire une modélisation et des simulations d'un moteur piézoélectrique à onde progressive. Enfin, on présente un modèle numérique permettant de modéliser et de simuler le contact entre le stator et le rotor au sein du moteur.

### Mots-clés

Piézoélectrique, fabrication, actionneurs, modélisation, simulation, moteurs, éléments finis.

---

## Summary

The functionality of a piezoelectric sensor is by deformation of an elastic structure. This structure is made of electro-active composite materials, capable of communicating a uniform adhesion driving motion to a movable part, which deforms under the effect of an electric voltage or vice versa. From this reversibility several applications that falls within the field of electrical engineering, are possible. The diversity of this physical phenomena involved has led, in previous research, to the development of many models, including the identification equivalents electromagnetic patterns or operation of theoretical models based on numerical approaches based on finite element analysis. This study proposes the modeling and simulation of piezoelectric motor with progressive waves. Finally, a numerical model is presented to model and simulate the contact between the stator and the rotor within the motor.

### Key Words

Piezoelectric, manufacturing, actuators, modeling, simulation, motors, finite elements.