



HAL
open science

La proportionnalité au CM2

Laëtitia Roblin

► **To cite this version:**

| Laëtitia Roblin. La proportionnalité au CM2. Education. 2015. dumas-01305690

HAL Id: dumas-01305690

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01305690v1>

Submitted on 21 Apr 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright



École supérieure
du professorat
et de l'éducation
Centre Val de Loire
Académie d'Orléans-Tours



UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

ESPE Centre Val de Loire

MEMOIRE de recherche présenté par :

Laëtitia ROBLIN

soutenu le : **8 juin 2015**

pour obtenir le diplôme du :
**Master Métiers de l'Enseignement,
de l'Éducation, de la Formation**

Discipline : Mathématiques

La proportionnalité au CM2

Mémoire dirigé par :

Assia NECHACHE

Enseignante de mathématiques, ESPE CVL, site
d'Orléans

JURY :

Patrick WIERUSZEWSKI Enseignant de mathématiques, ESPE CVL, site de
Blois, Président du jury

Assia NECHACHE Enseignante de mathématiques, ESPE CVL, site
d'Orléans.

Valérie ZANELLI Directrice d'Ecole d'Application, du Val

Table des matières

Table des matières	2
Introduction.....	4
Première Partie : La proportionnalité, cadre théorique	6
I. La proportionnalité du point de vue mathématique	6
A. Définition de la proportionnalité.....	6
B. Les procédures de résolution des problèmes relevant de la proportionnalité	
7	
1. Le coefficient de proportionnalité	8
2. Le passage à l'unité et la quatrième proportionnelle	8
3. La linéarité additive et multiplicative	9
II. La proportionnalité du point de vue didactique	11
A. Les obstacles concernant la reconnaissance des situations de	
proportionnalité	11
1. L'utilisation des tableaux	11
2. La formulation des énoncés	12
3. Les obstacles linguistiques dans les énoncés.....	13
B. Les difficultés rencontrées par les élèves.....	15
C. La théorie des champs conceptuels.....	16
III. La proportionnalité du point de vue des programmes.....	19
A. Les programmes	20
B. Les documents ressources	22
IV. La proportionnalité du point de vue des manuels	23
V. Problématique et hypothèses	26
Deuxième Partie : Méthodologie de la recherche	29
I. La population choisie	29
II. Choix des problèmes donnés	30

III. Choix méthodologiques	37
Troisième partie : Analyse et interprétation des données	39
I. Analyse des résultats	39
A. Analyse du problème n°1	40
B. Analyse du problème n°2	41
C. Analyse du problème n°3	44
D. Analyse du problème n°4	47
E. Analyse du problème n°5	50
II. Interprétation des résultats	53
Conclusion et perspectives	55
Bibliographie	57
Annexes	I
Annexe 1 : Grilles d'analyse des manuels	I
Annexe 2 : Evaluation sommative	V
Annexe 3 : Document donné aux élèves	VIII
Annexe 4 : Productions d'élèves	IX
A. Problème n°1	IX
B. Problème n°2	XII
C. Problème n°3	XV
D. Problème n°4	XVIII
E. Problème n°5	XXII
Annexe 5 : Grille d'analyse des procédures des élèves n°1	XXVI
Annexe 6 : Grille d'analyse des procédures des élèves n°2	XXVIII

Introduction

La proportionnalité est l'une des notions mathématiques fondamentales de l'enseignement obligatoire français. Elle permet de résoudre différents problèmes relevant soit de contextes de la vie quotidienne (prix, monnaie, soldes, recettes...), soit de domaines de la physique (vitesse...). Son apprentissage commence à l'école primaire et se termine dans les classes post-bac. On peut constater que le terme de « proportionnalité » apparaît dans les programmes en 1970. Auparavant, il était question de « problèmes de règle de trois » et de « rapports et proportions ».

Du point de vue des enseignants, il semble que la proportionnalité est une notion difficile à enseigner et source de difficultés pour la plupart des élèves. En effet, le terme de proportionnalité fait référence à une catégorie de problèmes impliquant des grandeurs proportionnelles. On peut donner comme exemple la distance qui se définit comme la vitesse moyenne multipliée par le temps. Ici, la distance et le temps sont deux grandeurs proportionnelles et la vitesse est le coefficient de proportionnalité. La résolution de problèmes, relevant de la proportionnalité où les grandeurs interviennent, nécessite le passage de la grandeur à la mesure, chose qui n'est pas évidente pour les élèves.

Par ailleurs, du fait des difficultés d'enseignement et d'apprentissage de cette notion, on peut recenser de nombreux ouvrages traitant de l'apprentissage de la proportionnalité, que ce soit d'un point de vue didactique (par exemple : Vergnaud, 1990 et Comin, 2002) ou d'un point de vue psychologique (par exemple : Levain, 1994).

Etant professeur des écoles stagiaire au sein d'une classe de CM2, je vais avoir à enseigner cette notion. Par conséquent, afin de développer mes connaissances didactiques sur cette notion, je souhaite conduire ma recherche sur la proportionnalité. Par ailleurs, n'ayant pas rencontré de difficultés lors de ma scolarité concernant l'apprentissage de la proportionnalité, il me semble important de mener une réflexion sur la manière dont je dois l'enseigner mais aussi sur la façon d'aider les élèves en difficultés. Ainsi, j'ai choisi de commencer mes recherches par l'étude de la proportionnalité de manière générale tout en ciblant différents points de vue.

Ces recherches permettront de constituer un cadre théorique pour l'étude qui suivra. De ce fait, dans cette première partie, il s'agira de s'intéresser à la proportionnalité du point de vue des mathématiques, de la didactique, des programmes et de certains manuels. Puis dans la deuxième partie, il s'agira de présenter l'expérimentation menée.

Première Partie : La proportionnalité, cadre théorique

Pour commencer, il semble important de donner une définition du concept de proportionnalité selon les différents points de vue cités précédemment.

I. La proportionnalité du point de vue mathématique

Dans cette partie, on se propose de donner une définition de la proportionnalité, ainsi que des différentes procédures de résolution de problèmes relevant de la proportionnalité existantes.

A. Définition de la proportionnalité

Il existe principalement deux approches théoriques de la proportionnalité sur lesquelles se basent aujourd'hui son enseignement.

La première relève de la théorie des proportions de Philippe et Dautchy (1920). Ils définissent la proportionnalité à l'aide des suites: « deux suites de nombres qui se correspondent un à un sont proportionnelles lorsque les rapports de deux nombres correspondants sont égaux (1) ». Ainsi, dans une situation de proportionnalité, le rapport de ces nombres est appelé le **coefficient de proportionnalité**.

A l'origine, l'enseignement de la proportionnalité était basé sur la théorie des proportions. Ce n'est que dans les années 70, avec le développement des mathématiques modernes que son enseignement a évolué.

La deuxième approche théorique est celle basée sur les fonctions linéaires, car toute situation de proportionnalité peut être modélisée par une fonction linéaire. Une fonction réelle f de la variable réelle x est dite linéaire lorsqu'elle est de la forme $f(x) = ax$ où a est un nombre réel appelé **coefficient de linéarité** de la fonction qui correspond au coefficient de proportionnalité. Sa représentation graphique est

(1) SIMARD, Arnaud. *Reconnaissance de situations de proportionnalité en CM2-sixième*, p. 51.

une droite qui passe par l'origine du repère. Les fonctions linéaires sont caractérisées par deux propriétés : la propriété additive : $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (pour tout x et y réels) et la propriété multiplicative : $f(k \times x) = k \times f(x)$ (pour tout x et k réels). Comme la théorie des proportions, la fonction linéaire n'est pas enseignée en tant que telle à l'école élémentaire, les fonctions n'étant introduites qu'à la fin du collège. Cependant, ces propriétés sont implicitement utilisées dans les procédures de résolution. Cette procédure sera reprise et illustrée à l'aide d'un exemple dans les paragraphes qui suivent.

Ces deux approches sont différentes car la « théorie des proportions » est adaptée au cadre discret c'est-à-dire à un nombre fini de valeurs alors que la linéarité est adaptée au cadre continu c'est-à-dire à un nombre infini de valeur (correspondant à un intervalle de valeur).

B. Les procédures de résolution des problèmes relevant de la proportionnalité

Il existe différentes méthodes de résolution des problèmes relevant de la proportionnalité, elles sont les suivantes :

- le coefficient de proportionnalité ;
- le passage à l'unité ou la règle de trois;
- la quatrième proportionnelle ;
- la linéarité multiplicative ;
- la linéarité additive.

Toutes ces procédures peuvent être utilisées par des élèves de cycle III mais seulement trois sont exigibles. En effet, le coefficient de proportionnalité n'est pas utilisé à l'école primaire (sauf lorsque ce dernier est un nombre entier) car les correspondances entre écriture fractionnaire et quotient ne sont étudiées qu'en 6^{ème} et 5^{ème}. Cette théorie des proportions n'a donc pas de sens pour des élèves de cycle III. Le coefficient de proportionnalité est enseigné en 6^{ème} et le produit en croix en 4^{ème}. Ainsi, à l'école élémentaire seulement trois procédures sont enseignées à proprement parlé.

Au cycle III, les élèves ne disposent pas de procédure dite experte, le but est d'affiner leurs procédures en se basant sur celles qu'ils utilisent. L'objectif à la fin de l'école primaire est de permettre aux élèves d'utiliser la méthode la plus appropriée pour résoudre les problèmes relevant de la proportionnalité.

1. Le coefficient de proportionnalité

Lorsque deux grandeurs sont proportionnelles, le **coefficient de proportionnalité** est le nombre qui multiplié par l'une des deux grandeurs permet d'obtenir la deuxième.

Exemple d'application :

« Si dans une boulangerie 4 sucettes coûtent 2,40 €, combien coûtent 6 sucettes ? »

Nombre de sucettes	4	6	x 0,60
Prix des sucettes	2,40	3,60	

Calculer le coefficient de proportionnalité revient à résoudre l'équation telle que : $4 \times x = 2,40$. Ainsi, on effectue le calcul suivant $2,40 \div 4 = 0,60$. Puis pour trouver le prix de 6 sucettes, il suffit de multiplier 6 par 0,60. Ainsi, 6 sucettes coûtent 3,60 €.

2. Le passage à l'unité et la quatrième proportionnelle

La première méthode exigible pour les élèves de cycle III est celle basée sur la « théorie des proportions » : **le passage à l'unité ou la règle de trois**. Cette procédure est un cas particulier de la **quatrième proportionnelle** développée dans le cadre de nombres sans unité. Elle peut aussi être utilisée par les élèves mais n'est pas exigible. Le produit en croix donne ainsi la valeur d'une quatrième proportionnelle par l'application d'une technique sur les valeurs numériques : « si à a

correspond b , dans le respect des proportions alors c correspond bc/a ($a/b = b/c$ ce qui implique $ad=bc$ puis $d=bc/a$) (2)».

Exemple d'application :

« Si dans une boulangerie 4 sucettes coûtent 2,40 €, combien coûtent 6 sucettes ? »

La procédure de résolution de la quatrième proportionnelle est donc : si à 4 sucettes il correspond 2,40, alors à 6 sucettes il correspond $6 \times 2,40 \div 4$ soit 3,60. Ainsi, 6 sucettes coûtent 3,60€.

La procédure du passage à l'unité est quant à elle développée dans le cadre des nombres avec unité c'est à dire lié à un contexte.

Exemple d'application :

« Si dans une boulangerie 4 sucettes coûtent 2,40 €, combien coûtent 6 sucettes ? »

La procédure de résolution du passage à l'unité est donc :

- Si 4 sucettes coûtent 2,40 € ;
- Alors une sucette coûte 4 fois moins cher cela revient donc à diviser le prix de 4 sucettes par 4 soit: $2,40 \div 4 = 0,60$;
- Et 6 sucettes coûtent 6 fois plus cher cela revient à multiplier le prix d'une sucette par 6 soit : $0,60 \times 6 = 3,60$ €;

3. La linéarité additive et multiplicative

Les deux dernières procédures exigibles relèvent de l'utilisation des propriétés des fonctions linéaires. Ainsi, **la linéarité additive** correspond à $f(x + y) = f(x) + f(y)$, et **la linéarité multiplicative** correspond à : $f(k \times x) = k \times f(x)$.

Exemple d'application:

« Si dans une boulangerie 4 sucettes coûtent 2,40 €, combien coûtent 6 sucettes ? »

(2) SIMARD, Arnaud. *Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique*, p. 53.

Une procédure de résolution d'élève pourrait être :

- De déterminer le prix de 2 sucettes en divisant le prix de 4 sucettes par 2. Ici, l'élève utilise de façon implicite la propriété de linéarité multiplicative :
 $2,40 \div 2 = 1,20$.
- Puis ajouter le prix de 4 sucettes et celui de 2 sucettes afin d'obtenir le prix de 6 sucettes en utilisant de façon implicite la propriété de linéarité additive.

Soit : $f(6) = f(4) + \frac{f(4)}{2} = 2,40 + 1,20 = 3,60$. Ainsi, 6 sucettes coûtent 3,60 €.

L'apprentissage de ces procédures a un sens seulement si les élèves savent reconnaître les situations de proportionnalité. En effet, tous les élèves peuvent être compétents dans l'utilisation de ces techniques de résolution, cependant tous ne savent pas les utiliser à bon escient. Ainsi, en plus de l'apprentissage des procédures, le rôle de l'enseignant est de faire acquérir le sens de la proportionnalité aux élèves. Pour cela, il doit les confronter à des situations de proportionnalité tout comme à des situations de non proportionnalité.

Le rôle de l'enseignant étant de conduire les élèves à utiliser la procédure de résolution la plus adaptée au problème, il est important de s'interroger sur la manière de déterminer quelles méthodes utiliser. Pour cela, il faut s'intéresser aux relations qui lient les valeurs du problème entre elles. Si les valeurs sont de mêmes grandeurs, on parlera de relation interne les liant. Cette relation n'a donc pas d'unité. A l'inverse, on parlera de relation externe lorsque ce sont des valeurs de grandeurs distinctes qui sont liées.

Exemple :

« Si dans une boulangerie 4 sucettes coûtent 2,40 €, combien coûtent 6 sucettes ? »

Ainsi, la relation interne peut être donnée par le rapport entre le nombre de sucettes : $6/4=3/2$. Et la relation externe peut être donnée par le rapport entre le prix des sucettes et le nombre de sucettes: $2,40/4=0,60$, ce coefficient correspond au prix unitaire des sucettes.

Levain (1998) cité par Simard (2012) a montré que si la relation interne est simple, alors les procédures les plus efficaces et les plus naturelles pour les élèves

sont celles qui relèvent de l'utilisation des propriétés de la linéarité additive et multiplicative. Et si la relation externe est simple, alors la procédure la plus efficace et la plus naturelle pour les élèves est celle du retour à l'unité. Or si aucune relation n'est simple, ou si les deux relations sont simples, l'élève devra faire un choix.

Après s'être intéressé à la proportionnalité du point de vue mathématique, nous allons maintenant nous intéresser à la proportionnalité du point de vue didactique.

II. La proportionnalité du point de vue didactique

Au vu des discours de certains enseignants, il semble que la proportionnalité est une notion qui pose problème à la fois pour les enseignants et pour de nombreux élèves. Quels sont alors les obstacles et les difficultés que rencontrent les élèves dans la résolution de problèmes relevant de la proportionnalité ?

A. Les obstacles concernant la reconnaissance des situations de proportionnalité

Face aux problèmes relevant de la proportionnalité les élèves peuvent être confrontés à différents obstacles (3), ce qui rend difficile la résolution du problème.

1. L'utilisation des tableaux

L'introduction de la proportionnalité à l'aide de tableaux ou l'utilisation trop fréquente de tableaux, dans les problèmes de proportionnalité, peut conduire les élèves à penser qu'ils sont significatifs de proportionnalité. Ce qui peut induire certains élèves en difficultés pour reconnaître des situations de proportionnalité. En effet, dès qu'un problème sera représenté sous forme de tableau certains concluront qu'il s'agit d'un problème de proportionnalité. Ce qui n'est pas forcément le cas. De plus, le tableau de proportionnalité n'est pas une technique de résolution de problèmes. Il permet aux élèves d'ordonner les données du texte afin d'identifier les

(3) Il est important de faire ici la distinction entre ce qu'est un obstacle et une difficulté. Un obstacle est propre à la notion enseignée, les élèves vont tous être confrontés aux mêmes obstacles, certains y faisant face plus aisément que d'autres. À l'inverse, une difficulté est propre à l'élève, ils ne vont pas tous être confrontés aux mêmes difficultés lors des apprentissages.

relations entre les nombres et les grandeurs en jeu ; ce qui facilite l'organisation des calculs. Par conséquent, il est nécessaire de ne pas l'utiliser systématiquement pour la résolution des problèmes et de confronter les élèves à des tableaux ne représentant pas des situations de proportionnalité.

Exemple (4) :

« Un cycliste se chronomètre sur différentes distances. Il obtient le tableau suivant :

Distance (en kilomètre)	15	30	60
Durée (en minutes)	45	90	210

La durée est-elle proportionnelle à la distance parcourue ? »

Si les élèves ont été trop rapidement confrontés à la représentation des situations de proportionnalité sous forme de tableau, certains élèves peuvent conclure juste à la vue de ce tableau, et sans vérification numérique, que la durée est proportionnelle à la distance parcourue, alors que dans cette situation ce n'est pas le cas.

2. La formulation des énoncés

D'un point de vue général, la compréhension de l'implicite des énoncés peut aussi être un obstacle pour la résolution des problèmes. En particulier, dans les énoncés d'exercices de proportionnalité, le modèle de proportionnalité est principalement implicite. Les élèves peuvent donc ne pas le reconnaître immédiatement.

Exemple :

« Si dans une boulangerie 4 sucettes coûtent 2,40 €, combien coûtent 6 sucettes ? »

La plupart des problèmes de proportionnalité relève de situations de la vie quotidienne. En effet, dans une boulangerie, les sucettes se vendent à l'unité et coûtent toutes le même prix. (Ce qui n'est pas toujours le cas, la quatrième sucette peut être gratuite). Cet argument permet de justifier le modèle proportionnel mais il

(4) SIMARD, Arnaud. *Reconnaissance de situations de proportionnalité en CM2-sixième*, p. 58.

n'est pas explicité dans l'énoncé. Pour lever l'implicite de cet énoncé, on pourrait le présenter aux élèves comme suit :

« Dans une boulangerie, toutes les sucettes coûtent le même prix. Si 4 sucettes coûtent 2,40 €, combien coûtent 6 sucettes ? »

Pour essayer de lever ces implicites, les auteurs d'énoncés d'exercices ont recours à certains mots clefs qui induisent aux élèves l'idée de proportionnalité. Ainsi des termes comme « identique », « prix au kilo », « vendu à l'unité », « chaque », « chacune », « fois plus », « fois moins » sont régulièrement utilisés.

Un deuxième obstacle peut être cité mais il ne relève pas essentiellement de la résolution des problèmes de proportionnalité. Il relève de manière générale de la résolution des problèmes.

3. Les obstacles linguistiques dans les énoncés

Lors de la résolution de problèmes les élèves peuvent être confrontés à du vocabulaire qu'ils ne maîtrisent pas. Certains d'entre eux peuvent ainsi faire un « blocage » et ne pas parvenir à résoudre ces problèmes.

Exemple (5) :

Les loups chassent en meute. Une meute qui chasse le caribou a marché pendant 2 heures et demie en file indienne à la vitesse d'environ 10 km par heure, puis elle a couru pendant 1 heure et quart à une vitesse de 60 km par heure.

Quelle est la distance approximative parcourue par cette meute durant la chasse ?

Dans cet exemple, certains élèves peuvent être bloqués par l'emploi du mot « meute ». En effet, on peut considérer que dans une classe de CM2 seulement une petite partie des élèves comprendra ce terme. De ce fait, pour les élèves ne le comprenant pas, certains vont avoir l'intuition qu'il s'agit d'un problème de proportionnalité. Ils vont donc pouvoir réorganiser les informations du problème et le résoudre malgré leur non connaissance du mot. Cependant, d'autres peuvent se

(5) JARDY, Jacqueline, JARDY, Jacky et ROUY, Loïc. *Vivre les Maths CM2, Cycle 3*, p. 144.

focaliser sur le terme « meute », et faire ainsi un blocage les empêchant de résoudre ce problème.

De même, l'organisation syntaxique c'est-à-dire l'organisation des phrases mais aussi l'organisation rhétorique, c'est-à-dire les apports successifs d'informations dans les énoncés peuvent être un frein à la résolution des problèmes.

Exemple tiré d'un cours de master 1 :

- ❖ L'énoncé : (extrait d'un exercice du concours de recrutement de professeur des écoles de 2009)

1 Le python réticulé.

Le python réticulé est un serpent magnifique. La femelle pond de 30 à 50 œufs de 8 cm de longueur. À leur naissance, les jeunes pythons mesurent environ 70 cm. Ils grandissent très vite, de 60 cm par an pendant les 6 premières années de leur vie. Ensuite, leur croissance se ralentit.

- Quelle est la taille d'un python réticulé âgé de 5 ans ?
(Souligne dans l'énoncé les valeurs utiles pour le calcul.)

- ❖ La production d'un élève :

Nathan

30
50
8
70
60
6
5

229

Un pythons de 5 ans mesure
229 cm

Nathan

On remarque ici, que Nathan ajoute toutes les données de l'énoncé. Il n'arrive donc pas à les mettre en lien. On peut supposer que cela vient du fait de la présence d'un certain nombre d'informations dans cet énoncé. De plus, un autre obstacle est

présent dans cet exercice, il s'agit de la prise en compte de la taille du python à la naissance, en effet quand il naît, il ne mesure pas 0 cm.

L'utilisation du langage naturel ou courant a donc une place importante dans ce type de situation or cela ne devrait pas être le cas. Il est donc essentiel de prendre en compte ces dimensions dans les problèmes proposés.

Comme nous l'avons dit précédemment les obstacles et les difficultés sont différents, dans la mesure où tous les élèves seront confrontés aux obstacles alors que les difficultés sont propres à un élève. On peut alors se demander quelles difficultés peuvent rencontrer les élèves lors de la résolution de problèmes relevant de la proportionnalité.

B. Les difficultés rencontrées par les élèves

On peut recenser les difficultés principales qui suivent (6) :

- Les difficultés à reconnaître s'il s'agit d'une situation de proportionnalité ou non (dû à l'implicite des énoncés) ;
- Les difficultés à identifier les grandeurs de l'énoncé qu'il faut mettre en relation (cas de Nathan dans l'exemple précédent) ;
- Les difficultés à trier les données de l'énoncé qui sont associées à une grandeur (exemple des données de même grandeur dans le cas des recettes de cuisine) ;
- Les difficultés à identifier les relations de linéarité entre les données de mêmes grandeurs ;
- La surcharge cognitive lorsque l'énoncé possède plusieurs relations de proportionnalité (exemple des recettes de cuisine : les ingrédients sont proportionnellement liés les uns aux autres. Certains élèves peuvent avoir des difficultés à identifier les relations entre les données) ;
- Les difficultés à choisir une procédure de résolution adéquate au problème posé ;

(6) BERGEAUT, Jean-François et BILLY, Christophe. *Mathématiques : Professeur des écoles*. Chap. 29, La proportionnalité à l'école, p. 437- 440.

- Les difficultés liées aux opérations qui sont mises en jeu dans les problèmes : les fautes de calcul, la non connaissance du répertoire, la mauvaise disposition spatiale lorsque les élèves « posent » le calcul, la non compréhension de la notion de retenue en lien avec la maîtrise de la numération décimale, les difficultés avec les décimaux non entiers et la non maîtrise des algorithmes de calcul.

On peut aussi en ajouter une dernière qui ne dépend pas des élèves mais des enseignants. En effet, Eugène Comin (2002) a réalisé une étude qui montre que certaines conceptions des enseignants sur la proportionnalité sont erronées, surtout concernant l'utilisation d'un vocabulaire adapté. Ainsi, on peut supposer que les difficultés que rencontrent les élèves face à la proportionnalité viennent du fait que certains enseignants ne maîtrisent pas eux-mêmes ce concept mathématique.

Après s'être intéressé aux obstacles et aux difficultés que peuvent rencontrer les élèves lors de la résolution de problèmes relevant de la proportionnalité, il est incontournable de s'intéresser à la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990) qui est à ce jour l'une des plus importantes concernant ce concept mathématique.

C. La théorie des champs conceptuels

La proportionnalité est un concept mathématique qui fait partie du champ conceptuel de multiplication-division. Ainsi, il semble pertinent de présenter cette théorie. Gérard Vergnaud (1990), la définit comme étant : « une théorie cognitiviste qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage des compétences complexes, notamment celles qui relèvent des sciences et des techniques (7) ».

Il y distingue deux classes de situations : une première regroupant celles pour lesquelles les élèves disposent de compétences (acquises antérieurement) leur permettant de résoudre aisément le problème et une deuxième regroupant celles

(7) VERGNAUD, Gérard. *La théorie des champs conceptuels*, p.135.

pour lesquelles les élèves ne disposent pas de toutes les compétences, ce qui nécessite pour eux de passer par une phase de réflexion afin d'aboutir à la résolution du problème.

Selon lui, le concept de « schème (8) » est différent entre les deux classes de situations. En effet, en ce qui concerne la première, on va observer pour une même catégorie de situations des automatismes organisés par un schème unique pour résoudre les problèmes. Alors qu'en ce qui concerne la deuxième, on va observer différents schèmes qui vont être associés ou dissociés les uns des autres pour parvenir à résoudre le problème. Dans ce genre de situation, l'élève passe forcément par un processus de découverte.

Ce sont dans les schèmes que nous retrouvons les « connaissances en acte » et les « théorèmes en acte » des élèves. Ils se définissent comme étant l'ensemble des connaissances implicites qui s'appuient sur des invariants opératoires qui permettent de structurer les conduites de résolution des élèves.

On sait que le savoir se forme à partir de problèmes à résoudre (c'est-à-dire des situations à maîtriser). Ainsi, les élèves doivent être confrontés à tous les champs conceptuels de la proportionnalité pour leur permettre de se créer leur propre répertoire de situation. Cela, leur permet donc de pouvoir résoudre des problèmes sans avoir à passer par une phase de découverte, mais également de pouvoir au cours de leur scolarité résoudre des problèmes d'un niveau de difficultés supérieur nécessitant les schèmes des problèmes maîtrisés pour résoudre les « nouveaux ».

Cette théorie envisage l'acquisition des concepts selon trois aspects différents (9):

- **L'analyse et la catégorisation des différentes situations** : les élèves étant confrontés à des situations diverses et variées, vont pouvoir intégrer progressivement de nouveaux savoirs et savoir-faire. Ces connaissances peuvent être explicites mais elles sont le plus souvent implicites. Vergnaud considère ces connaissances implicites comme des théorèmes en acte qui

(8) Les schèmes sont définis comme étant : « l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données », p. 136.

(9) LEVAIN Jean-Pierre, *Faire des maths autrement: développement cognitif et proportionnalité*, p. 47- 49.

peuvent être identifiés dans la majeure partie des cas car ils fondent les stratégies de résolution employées par les élèves.

- **La description et l'analyse des différents schèmes utilisés par les élèves** : l'analyse de cet outil est nécessaire à la compréhension de la procédure de résolution que les élèves ont mise en place (qu'elle soit bonne ou mauvaise). En effet, face à un problème, la procédure qui sera mise en place dépendra des schèmes dont disposent déjà les élèves mais aussi de la familiarité qu'ils auront avec le problème.
- **L'étude des représentations symboliques** : en plus de l'utilisation du langage naturel, les représentations schématiques du type diagramme, tableau ont une place importante dans l'acquisition des concepts mathématiques. En effet, ils permettent aux élèves d'intérioriser les actions et de progressivement objectiver les concepts. En plus de ces fonctions de communication et de représentation, le langage permet d'aider les élèves à penser et à organiser leurs actions par le biais de la verbalisation. Vergnaud distingue également trois aspects : une aide à l'identification et à la désignation des invariants ; une aide au raisonnement et à l'inférence ; une aide à l'anticipation des effets et des buts, et à la planification et au contrôle de l'action.

Vergnaud a également élaboré une typologie des problèmes multiplicatifs qui repose sur leurs aspects structuraux et qui permet de bien différencier la structure d'un problème, les valeurs impliquées et le domaine de référence auquel appartient l'énoncé (10) :

- **La structure de proportion simple** : elle met en jeu quatre quantités qui appartiennent à deux espaces de mesure bien différents, il s'agit donc des problèmes du type : recherche d'une quatrième proportionnelle. Cette structure de proportion renvoie à un grand nombre de situations de la vie quotidienne. Elle définit trois grands types de problèmes (en fonction de ce que représente l'inconnue) : multiplication, division partition (recherche de la valeur de chaque part), division quotition (recherche du nombre de part).

(10) Ibid., p. 43-47.

- **La structure de proportion simple composée** : elle comporte trois espaces de mesure M_1 , M_2 et M_3 dans lesquels une fonction f permet de passer de M_1 à M_2 et une fonction f' permet de passer de M_2 à M_3 . Cela revient donc à appliquer la fonction linéaire composée $f' \circ f$. C'est-à-dire qu'une grandeur varie proportionnellement à une grandeur qui elle-même varie proportionnellement à une troisième grandeur. Cette procédure définit les trois mêmes types de problèmes que dans la structure de proportion simple.
- **La structure de produit de mesure** : elle renvoie à la composition de deux espaces de mesure M_1 et M_2 en un troisième M_3 . Etant donné que trois variables sont impliquées dans cette structure, on peut la représenter à l'aide d'un tableau à double entrée. A l'inverse des deux autres structures vues précédemment seulement deux types de problèmes relèvent de celle-ci : ceux de multiplication et de division quotient.
- **La structure de proportion double** : elle est proche de celle du produit de mesure : un espace de mesure M_3 est proportionnel à deux autres espaces de mesure M_1 et M_2 qui sont indépendants. C'est-à-dire qu'une grandeur varie proportionnellement à deux grandeurs indépendantes entre elles. Le temps est un type de variable régulièrement utilisé dans ce genre de structure de problème. On retrouve également les trois mêmes types de problèmes que dans les structures de proportion simple et de proportion simple composée.

Cette partie a permis d'étudier la proportionnalité d'un point de vue didactique. Mais quelle est la transposition de cette notion dans les programmes ? Que préconisent-ils ?

III. La proportionnalité du point de vue des programmes

On commencera par s'intéresser à la façon dont elle est traitée dans les programmes puis à la façon dont elle est traitée dans les documents ressources.

A. Les programmes

Dans cette partie, il s'agira de s'intéresser à la façon dont la proportionnalité est intégrée dans les programmes de l'école primaire pour avoir une idée du contexte dans lequel se réalisera l'étude. Il ne sera pas tenu compte des programmes lors de l'analyse des réponses des élèves.

La proportionnalité est une notion mathématique centrale dans l'enseignement obligatoire en France. Elle apparaît explicitement dans les programmes de l'école obligatoire en 1970. Elle est inscrite dans le pilier 3 : « Les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique(11) » du socle commun des connaissances et des compétences de la façon suivante: « pour ce qui concerne l'organisation et la gestion de données et les fonctions : la proportionnalité : propriété de linéarité, représentation graphique, tableau de proportionnalité, « produit en croix » ou « règle de 3 », pourcentage, échelle (12) ». Cependant son étude pour elle-même relève essentiellement du collège. De plus, dans les programmes de 2008, cette notion apparaît seulement pour le cycle III, alors qu'elle est enseignée tout au long de l'école primaire, notamment dans le cadre de jeu d'échange : il s'agit de jeux dans lesquels les élèves doivent opérer des échanges du type si deux boules rouges valent une boule bleue, combien je peux avoir de boules bleues avec six boules rouges (cf. exemple plus précis dans le cadre du cycle II). Elle est étudiée de manière implicite jusqu'au cours du CM2.

En effet, au cycle I, il s'agit tout simplement de comparer des objets selon leur grandeur ou de comparer des quantités mais aussi de résoudre des problèmes de quantités.

Au cycle II, la notion de proportionnalité est travaillée lors des problèmes d'échanges et des problèmes de calculs (multiplication et division). Il s'agit de problèmes relevant de la numération.

(11) MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE. *Le socle commun des connaissances et des compétences*, p.11.

(12) Ibid.

Voici un exemple de jeu d'échange : **le jeu du banquier** (13), il s'agit d'une activité dans laquelle les élèves sont amenés à opérer différents échanges à partir de jetons. Une règle d'échange doit être définie au préalable par l'enseignant. Elle doit être du type : n jetons jaunes contre un rouge, n jetons rouges contre un bleu, n jetons bleus contre un vert. Les élèves doivent lancer un dé et remportent autant de jetons jaunes que de points obtenus sur le dé. Ils doivent ensuite opérer différents changements pour obtenir des jetons rouges, puis des jetons bleus...

Au cycle III, il s'agit d'étendre la reconnaissance de problèmes qui relèvent du domaine multiplicatif. Le terme de proportionnalité apparaît dans les programmes de 2008 dans le cadre de l'organisation et la gestion des données. Elle est « abordée à partir de situations faisant intervenir les notions de pourcentage, d'échelle, de conversion, d'agrandissement ou de réduction de figures. Pour cela plusieurs procédures (en particulier celle dite de « la règle de trois ») sont utilisées. (14)». Il est important de noter qu'il n'est enseigné aucune procédure experte, ces problèmes peuvent être traités en s'appuyant sur les raisonnements des élèves. Comme vu précédemment, le but est de les conduire à utiliser la procédure la plus appropriée pour résoudre ces problèmes.

Ainsi la progression dans les programmes du cycle III se fait de manière suivante :

En CE2 : le terme de proportionnalité n'est pas employé dans les programmes de 2008, il s'agit de préparer les élèves à l'utilisation des tableaux pour le CM1 « savoir organiser les données d'un problème en vue de sa résolution (15)». Cependant, l'approche de la proportionnalité se fait aussi par l'étude de problèmes multiplicatifs. Les propriétés de la linéarité sont ainsi utilisées implicitement dans des situations de proportionnalité simple. (On se concentre sur les multiples et les diviseurs).

(13) ACADEMIE DE ROUEN. *Jeu du banquier*.

(14) MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE. *Horaires et programmes d'enseignement de l'école*. p. 39.

(15) Ibid.

En CM1, la notion de proportionnalité apparaît de manière suivante : « utiliser un tableau ou la « règle de trois » dans des situations très simples de proportionnalité (16) ». Ainsi, les élèves sont confrontés à des problèmes qui nécessitent l'utilisation de rapports entiers du type n fois plus, n fois moins, moitié de, quart de, mais aussi à des problèmes dont la résolution implique des conversions. Ainsi, son utilisation au CM1 permet de faciliter sa définition en CM2.

En CM2, la notion de proportionnalité apparaît de manière suivante : « résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité et notamment des problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes ou aux conversions d'unités en utilisant des procédures variées (dont « la règle de trois ») (17) ». Le terme de proportionnalité sera introduit tardivement au cours de l'année, cependant les élèves sont confrontés à des problèmes variés où l'utilisation de la linéarité ne suffit plus. Ils vont donc avoir recours au passage à l'unité cette technique ne doit être explicitée que lorsqu'elle a un sens pour les élèves.

Les documents institutionnels sont très souvent utilisés par les enseignants. Cependant il n'y a pas que les programmes. Les enseignants peuvent aussi consulter des documents ressources rédigés par l'éducation nationale. Ils abordent de manière plus fine les programmes ainsi que les concepts mathématiques s'y rapportant. Ainsi, il semble essentiel de s'intéresser à ces documents ressources.

B. Les documents ressources

Dans les documents d'accompagnements (18), on constate que le terme « les champs conceptuels » est repris pour déterminer les différentes classes de problèmes de proportionnalité auxquels doivent être confrontés les élèves : les pourcentages, les vitesses, les conversions, les échelles. Ces différents champs sont aussi repris dans les programmes mais le terme de champ conceptuel n'est pas explicité. Ainsi, les programmes reprennent certains points de la théorie de Vergnaud en les adaptant pour les enseignants.

(16) Ibid.

(17) Ibid.

(18) Ministère de l'éducation nationale. *Le nombre au cycle 3 apprentissages numériques*.

De plus, les élèves doivent être confrontés à des situations de proportionnalité comme à des situations de non proportionnalité. Cette indication figurait dans les programmes de 2002, mais a disparu des programmes de 2008. Pourtant la confrontation à ces types de situation est nécessaire pour l'apprentissage de la notion. En effet, elle permet aux élèves d'en comprendre le sens. Ils peuvent donc repérer plus facilement quand une situation relève du modèle de proportionnalité.

Ainsi, selon le pilier 3 du socle commun, à la fin du CM2 les élèves doivent être capables de : « résoudre des problèmes relevant des quatre opérations, de la proportionnalité, et faisant intervenir différents objets mathématiques : nombres, mesures, « règles de trois », figures géométriques, schémas (19)».

Les programmes et les documents ressources sont des documents indispensables pour préparer l'enseignement d'une notion mathématique. Cependant, pas seulement, la plupart des enseignants utilisent des manuels scolaires. On peut alors se demander : quelle est la transposition des programmes et des documents ressources dans les manuels.

IV. La proportionnalité du point de vue des manuels

Le manuel semble être une des ressources les plus utilisées par les enseignants. De ce fait, il est intéressant d'étudier quelques ouvrages afin de comprendre la manière dont est abordée la proportionnalité. Devant la multitude de manuels disponibles, nous avons décidé d'en choisir seulement deux. Notre premier choix a été le manuel Cap Maths (20). En effet, ce manuel a été de nombreuses fois cité par les formateurs de l'ESPE. Notre deuxième choix s'est porté sur le manuel Maths qui a été choisi de façon aléatoire (21). Dans cette partie, on cherchera à étudier la manière dont les manuels abordent la proportionnalité.

(19) MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE. *Horaires et programmes d'enseignement de l'école*. p. 28

(20) CHARNAY, Roland, DUSSUC, Marie-Paule et MADIER, Dany. *Cap Maths CM2, Cycle 3*[manuel de L'élève].

(21) HELAYEL, Josiane et FOURNIE, Catherine. *Maths, CM2 Cycle 3* [livre de L'élève], p.100-107.

Pour comparer ces manuels, nous avons choisi trois critères en lien avec les recherches précédentes. Les critères sont les suivants : le **contexte** c'est-à-dire les contextes de problèmes travaillés ; les **procédures attendues** lors de la résolution des problèmes proposés ; les **progressions** dans les types de problèmes selon Vergnaud. Afin d'analyser les manuels nous avons construit une grille d'analyse selon ces trois critères (Annexe 1), en voici un tableau récapitulatif.

	Maths	Cap Maths
Contexte	<p>Période 3 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - proportionnalité <p>Période 4 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - proportionnalité : pourcentage - proportionnalité : vitesses - proportionnalité : conversions <p>Période 5 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - proportionnalité : échelles 	<p>Période 1 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - diverses procédures <p>Période 2 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - passage par l'unité - diverses procédures <p>Période 3 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - diverses procédures <ul style="list-style-type: none"> - comparaison <p>Période 4 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - pourcentage - proportionnalité et non proportionnalité - échelle <p>Période 5 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Echelle - Vitesse
Procédures attendues	<p>Période 3 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - linéarité multiplicative <p>Période 4 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - linéarité multiplicative - linéarité multiplicative - linéarité multiplicative 	<p>Période 1 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - passage par l'unité <p>Période 2 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - passage par l'unité - diverses procédures

	<p>Période 5 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - linéarité multiplicative 	<p>Période 3 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - linéarité multiplicative <p>Période 4 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - diverses procédures - linéarité multiplicative <p>Période 5 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - linéarité multiplicative
<p>Progression dans les types de problèmes selon Vergnaud</p>	<p>Période 3 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - problèmes de proportion simple <p>Période 4 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - problèmes de proportion simple - problèmes de proportion simple - problèmes de proportion simple, problèmes de proportion simple composée, problème de produit de mesure. <p>Période 5 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - problèmes de proportion simple 	<p>Période 1 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - problèmes de proportion simple <p>Période 2 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - problèmes de produit de mesure <p>Période 3 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - problèmes de produit de mesure - problèmes de proportion simple - problèmes de proportion simple composée <p>Période 4 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - problèmes de proportion simple - problèmes de proportion double - problèmes de produit de mesure <p>Période 5 :</p>

		<ul style="list-style-type: none"> - problèmes de proportion simple - problème de proportion composée
--	--	---

Tab 1 : Grille d'analyse des manuels

Ainsi, on remarque que ces manuels sont similaires du point de vue des contextes. En effet, ils proposent tous deux des contextes divers et variés dans les énoncés des problèmes. Ces contextes correspondent aux différents champs de la proportionnalité que l'on retrouve dans les programmes. Cependant leur progression est différente. En effet, le manuel Maths n'aborde la proportionnalité qu'en période 3 alors que le manuel Cap Maths commence dès la période 1. De plus, on peut constater que le manuel Maths n'aborde pas tous les types problèmes définis selon Vergnaud (1990) alors qu'on les retrouve tous dans le manuel Cap Maths. Néanmoins, on peut constater dans les deux manuels que l'évolution dans les problèmes est progressive on commence par des problèmes simples pour aller vers des problèmes plus compliqués.

Par ailleurs, du point de vue des procédures, on constate qu'elles sont abordées de façons différentes. En effet, le manuel Maths commence par introduire la procédure de linéarité multiplicative alors que le manuel Cap Maths commence par introduire le passage à l'unité. De plus, on peut remarquer que leurs attentes ne sont pas les mêmes. En effet, le manuel Maths privilégie l'utilisation de la procédure de linéarité multiplicative alors que le manuel Cap Maths n'en privilégie aucune. Il laisse les élèves utiliser celle de leur choix ; cependant il consacre toute une unité à la procédure du retour à l'unité.

V. Problématique et hypothèses

Tout d'abord, nous avons montré précédemment que la notion de proportionnalité est une des notions primordiales de l'enseignement primaire. Cependant, c'est aussi l'une des plus difficiles à enseigner et qui pose de nombreuses difficultés aux élèves. En effet il n'y a pas une seule procédure de

résolution possible, plusieurs sont à la disposition des élèves. L'un des objectifs de l'enseignement de la proportionnalité à l'école primaire est alors de conduire les élèves à utiliser différentes procédures en fonction du raisonnement induit par le problème rencontré. Par conséquent, les élèves de cycle III doivent maîtriser les procédures impliquant le passage à l'unité et celles utilisant la linéarité additive et multiplicative. Ils peuvent également utiliser le coefficient de proportionnalité et la quatrième proportionnelle (dans le cas des nombres entiers), mais elles ne sont pas exigibles.

Nous avons ensuite pu recenser différents obstacles à l'enseignement de la proportionnalité. Il y a d'une part l'utilisation trop précoce et trop fréquente des tableaux. Cela peut conduire les élèves à penser qu'ils sont significatifs de proportionnalité. D'autre part, il y a la formulation des énoncés : la proportionnalité étant généralement implicite les élèves doivent se familiariser avec des mots inducteurs tels que « fois plus, fois moins » ; et la non connaissance de certains termes dans les énoncés peut « bloquer » les élèves dans la résolution du problème. Par la suite, nous avons établi une liste des difficultés auxquelles peuvent être confrontés les élèves lors de l'apprentissage de la notion de proportionnalité, notamment des difficultés à reconnaître si une situation relève de la proportionnalité ou non.

Nous avons également pu constater que l'une des principales recherches en didactique concernant la proportionnalité est la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990). D'après lui les élèves disposent de différents schèmes. En fonction des compétences acquises précédemment, ils vont résoudre le problème donné en utilisant un schème unique ou en associant ou dissociant plusieurs afin de parvenir à le résoudre. De plus il a défini quatre structures de problèmes de proportionnalité : celle de proportion simple, celle de proportion simple composée, celle de produit de mesure et celle de proportion double.

Ainsi, selon la catégorie de problèmes proposés aux élèves de CM2 quelles procédures vont-ils utiliser pour résoudre ces problèmes de proportionnalité ?

Pour répondre à cette question, nous supposons que les élèves n'utilisent pas la même procédure en fonction de la catégorie de problème à résoudre. Plus particulièrement, nous supposons que les élèves n'utiliseront pas la même procédure si le problème donné sous forme écrite est constitué uniquement d'un texte, uniquement d'un tableau ou des deux. De plus, nous supposons que les procédures utilisées par les élèves seront différentes en fonction des rapports internes ou externes des valeurs mises en jeu dans les problèmes.

Deuxième Partie : Méthodologie de la recherche

Notre étude a pour objectif d'étudier le choix des procédures de résolution de problèmes relevant de la proportionnalité en fonction des catégories de problème de Vergnaud mais aussi selon la forme sous laquelle il a été donné aux élèves.

Pour cela, suite à plusieurs situations méthodologiques sur la proportionnalité, nous avons relevé différentes traces écrites d'élèves.

I. La population choisie

Nous avons effectué le recueil de données à partir de production d'élèves au sein de la classe de CM2 de l'école Louis Aragon à Saint-Jean de la Ruelle, dont je suis responsable à mi-temps cette année. L'école est située en éducation prioritaire et présente une grande mixité culturelle.

Cette classe de CM2 est composée d'élèves avec des niveaux hétérogènes. En effet, on y trouve différents profils d'élève : deux d'entre eux ont été orientés en EGPA pour leur passage en 6^{ème} et un élève présente des signes de dyslexie et a besoin de plus de temps que les autres pour effectuer une tâche, même si celle-ci est simplifiée. Certains sont investis dans tous les apprentissages alors que d'autres ne le sont pas. L'école est pour eux une contrainte. De plus, j'ai pu constater qu'une majeure partie de la classe ne parvenait pas à résoudre des problèmes simples : ils ne savent pas quelle opération utiliser pour résoudre les problèmes donnés.

Ainsi, pour permettre d'obtenir des résultats cohérents à cette recherche, nous avons choisi, de nous intéresser seulement aux réponses de sept élèves. Ils ont été choisis en fonction des résultats obtenus lors de l'évaluation sommative sur les problèmes de proportionnalité (Annexe 2). Elle était composée de deux types d'exercices différents. Pour le premier exercice, les élèves devaient identifier si des situations relevaient de la proportionnalité. Pour le second exercice, les élèves devaient résoudre divers problèmes de proportionnalité. Pour les problèmes 1 à 3 la procédure attendue était celle du retour à l'unité et pour le problème 4 il s'agissait de

la linéarité additive et multiplicative. Il est important de noter que cette évaluation ne fait pas partie du protocole d'expérimentation. Les élèves choisis pour l'expérimentation sont ceux ayant le mieux réussi la résolution des problèmes dans cette évaluation. Ainsi afin d'étudier les procédures de résolution des élèves avant de mener l'expérimentation, nous nous sommes assurés par le biais de cette évaluation sommative que ces élèves étaient capables de résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité. Le groupe est composé de quatre filles et trois garçons âgés de 10 à 11 ans, leurs résultats généraux sont hétérogènes.

II. Choix des problèmes donnés

Vergnaud (1990) distingue quatre types de problèmes relevant de la théorie des champs conceptuels de la multiplication. Cependant pour cette recherche nous avons choisi de garder seulement trois types de problèmes sur les quatre établis par Vergnaud (proportion simple, proportion simple composée et proportionnalité double). On signale que les problèmes de produit de mesure sont inclus dans les problèmes relevant de la proportionnalité simple composée. Par ailleurs, étant donné que les élèves de CM2 sont en cours d'apprentissage de la notion de proportionnalité, il est difficile pour eux de comprendre et donc de résoudre des problèmes de proportionnalité simple composée et de proportionnalité double présentés dans un tableau. Pour ce faire nous avons proposé un seul problème pour ces catégories sous forme d'un texte sans tableau.

Du fait de la contrainte temporelle, pour cette recherche, nous avons choisi d'analyser les productions d'élèves sur l'ensemble des exercices proposés afin de mettre en évidence les différentes procédures utilisées.

Voici les différents problèmes proposés aux élèves.

Pour les problèmes relevant de la proportion simple :

Problème 1 :

J'ai collé 448 timbres dans un album de 14 pages. Il y a le même nombre de timbres sur chaque page. Combien y a-t-il de timbres sur une page ?

Il faut tout d'abord s'intéresser au rapport liant les valeurs du problème. Ainsi, la relation interne peut être donnée par le rapport entre le nombre de page : 1/14. La relation externe peut être donnée par le rapport entre le nombre de timbres et le nombre de pages : $448/14 = 32$, ce coefficient correspond au nombre de timbres par page.

La relation externe étant simple, la procédure la plus efficace et la plus naturelle pour les élèves est celle du retour à l'unité.

Ainsi, la procédure possible est la suivante :

$$448 \div 14 = 32$$

Il y a 32 timbres par page.

Problème 2 :

Complète le tableau suivant en faisant apparaître tes calculs :

Nombre de kilomètres	100	50	150	300
Litres d'essence	6			

Il faut tout d'abord s'intéresser au rapport liant les valeurs du problème. Ainsi, les relations internes peuvent être données par le rapport entre le nombre de kilomètres : $50/100 = 1,5$; $150/100 = 1,5$; $300/100 = 3$. Et la relation externe peut être donnée par le rapport entre le nombre de kilomètres et la quantité d'essence: $6/100 = 0,06$.

Les relations internes étant simples, les procédures les plus efficaces et les plus naturelles pour les élèves sont celles de la linéarité additive et multiplicative.

Ainsi, les procédures possibles sont les suivantes :

- Pour déterminer la quantité d'essence nécessaire pour faire 50 km :

Nombre de kilomètres	100	50	150	300
Litres d'essence	6	3		

$\overbrace{\hspace{2cm}}^{\div 2}$
 $\underbrace{\hspace{2cm}}_{\div 2}$

- Pour déterminer la quantité d'essence nécessaire pour faire 150 km :

$$100 + 50$$

Nombre de kilomètres	100	50	150	300
Litres d'essence	6	3	9	

$$6 + 3$$

Ou

$$50 + 50 + 50$$

Nombre de kilomètres	100	50	150	300
Litres d'essence	6	3	9	

$$3 + 3 + 3$$

Ou

$$50 \times 3$$

Nombre de kilomètres	100	50	150	300
Litres d'essence	6	3	9	

$$3 \times 3$$

- Pour déterminer la quantité d'essence nécessaire pour faire 300 km :

$$100 + 100 + 100$$

Nombre de kilomètres	100	50	150	300
Litres d'essence	6	3	9	18

$$6 + 6 + 6$$

Ou

$$100 \times 3$$

Nombre de kilomètres	100	50	150	300
Litres d'essence	6	3	9	18

$$6 \times 3$$

Ou

$$\underbrace{150 + 150}$$

Nombre de kilomètres	100	50	150	300
Litres d'essence	6	3	9	18

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 $9 + 9$

Ou

$$\underbrace{150 \times 2}$$

Nombre de kilomètres	100	50	150	300
Litres d'essence	6	3	9	18

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 9×2

Problème 3 :

Avec 500 g de farine, Serge fait 30 crêpes. Combien lui faut-il de farine pour faire 15 crêpes ? 45 crêpes ? 60 crêpes ?

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500			

Il faut tout d'abord s'intéresser au rapport liant les valeurs du problème. Ainsi, les relations internes peuvent être données par le rapport entre le nombre de crêpes : $15/30 = 0,5$; $45/30 = 1.5$; $60/30 = 2$. Et la relation externe peut être donnée par le rapport entre le nombre de crêpes et la quantité de farine: $500/30 = 50/3 \approx 16,667$, ce coefficient correspond à la quantité de farine nécessaire pour faire une crêpe.

Les relations internes étant simples, les procédures les plus efficaces et les plus naturelles pour les élèves sont celles de la linéarité additive et multiplicative.

Ainsi, les procédures possibles sont les suivantes :

- Pour déterminer la quantité de farine nécessaire pour faire 15 crêpes :

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500	250		

$\overbrace{\quad\quad}^{\div 2}$
 $\underbrace{\quad\quad}_{\div 2}$

- Pour déterminer la quantité de farine nécessaire pour faire 45 crêpes :

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500	250	750	

$15 + 15 + 15$
 $15 + 15 + 15$

Ou

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500	250	750	

15×3
 250×3

Ou

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500	250	750	

$30 + 15$
 $500 + 250$

- Pour déterminer la quantité de farine nécessaire pour faire 60 crêpes :

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500	250	750	1000

30×2

 500×2

Ou

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500	250	750	1000

15×4

 250×4

Ou

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500	250	750	1000

$15 + 45$

 $250 + 750$

Problèmes relevant de la proportion double :

Problème 4 :

Le prix des remontées mécaniques au ski est de 23 € par jour et par personne.

- Combien paiera une personne pour cinq jours ?
- Combien paieront cinq personnes pour une journée ?

Dans ce problème de proportion double, pour chaque question seulement deux grandeurs sont en jeu. De ce fait, il faut s'intéresser au rapport liant les valeurs du problème. Ainsi, pour la question a), la relation interne peut être donnée par le rapport entre le nombre de jour : $5/1 = 5$.

La relation interne étant simple, la procédure la plus efficace et la plus naturelle pour les élèves est celle de la linéarité additive et multiplicative. En l'occurrence pour ce problème, il faut obligatoirement utiliser la linéarité multiplicative.

Ainsi, la procédure possible est la suivante :

Si le prix des remontées mécaniques est de 23 € par jour et par personne alors il est de $5 \times 23 = 115$ € pour 5 jours pour une personne.

De même, cinq personnes paieront $5 \times 23 = 115$ € pour une journée de ski.

Problèmes relevant de la proportion simple composée :

Problème 5 :

Une pièce de monnaie pèse 7,5 g. La caissière du supermarché a fait 45 rouleaux de 25 pièces de 1 €. Quel est le poids total des 45 rouleaux de pièces ?

Pour ce problème de proportion simple composée, les élèves doivent identifier les différentes relations existantes entre les grandeurs. Celles-ci sont simples mais il faut les identifier.

Ainsi, la première relation interne peut être donnée par le rapport entre le nombre de pièces : $25/1 = 25$.

Et la deuxième relation interne peut être donnée par le rapport entre le nombre de rouleaux : $45/1 = 45$.

Les deux relations internes étant simples la procédure la plus efficace et la plus naturelle pour les élèves est celle de la linéarité additive et multiplicative. En l'occurrence pour ce problème, il faut obligatoirement utiliser la linéarité multiplicative.

Ainsi, les procédures possibles sont les suivantes :

Procédure 1 :

Si dans un rouleau il y a 25 pièces alors un rouleau pèse $7,5 \text{ g} \times 25 = 187,5 \text{ g}$.

Alors 45 rouleaux de pièces pèsent : $187,5 \text{ g} \times 45 = 8437,5 \text{ g}$.

Procédure 2 :

Si dans un rouleau il y a 25 pièces alors dans 45 rouleaux il y a 1125 pièces.

Alors 45 rouleaux de pièces pèsent : $1125 \times 7,5 \text{ g} = 8437,5 \text{ g}$.

III. Choix méthodologiques

Pour mener cette recherche, nous avons choisi d'étudier les réponses de sept élèves à ces problèmes de proportionnalité. Ces élèves ont été choisis en fonction des résultats qu'ils ont obtenus à l'évaluation sommative sur la proportionnalité. Il s'agit des sept élèves ayant le mieux réussi l'évaluation.

Les problèmes qui leur ont été soumis sont cinq problèmes élaborés selon la catégorisation de Vergnaud. Ce panel d'exercices leur a été donné le mercredi après les vacances d'hiver. La séquence sur les problèmes de proportionnalité a été menée lors de la période 3, à partir du 23 janvier 2015 jusqu'à la fin de la période, le 20 février 2015 (date de l'évaluation sommative). Il s'est donc écoulé plus d'une quinzaine de jours entre l'évaluation sommative et l'expérimentation.

Ainsi, lors de cette expérimentation, il a été donné aux sept élèves choisis le panel de problèmes (Annexe 3). Les consignes données étaient de travailler seul, d'utiliser la calculatrice seulement pour le problème n°5 et pour vérifier leurs calculs une fois l'ensemble des problèmes résolus. Nous ne sommes donc pas intervenus pour aider ces élèves lors de la résolution des problèmes. Cependant, nous avons pu constater une ambiguïté de formulation dans le problème n°5. Il y est écrit : « Une pièce de monnaie pèse 7,5 g. La caissière du supermarché a fait 45 rouleaux de 25 pièces de 1 €. Quel est le poids total des 45 rouleaux de pièces ? » Il est ici sous-entendu que la pièce de monnaie pesant 7,5g est une pièce de 1 €. Un élève a posé

la question lors de l'expérimentation, il lui a donc été confirmé qu'il s'agissait bien du poids d'une pièce de 1 €.

Voici un tableau récapitulatif des rapports simples entre les valeurs des problèmes et des procédures attendues. Pour ce faire, en ligne nous y trouvons les cinq problèmes donnés aux élèves. Puis en colonne, nous avons deux colonnes différentes. La première correspond au rapport simple entre les valeurs du problème qui est externe ou interne. Quant à la deuxième, elle répertorie les types de procédures. Ainsi, elles peuvent être : soit de type 1, ce qui correspond à la linéarité additive qui sera notée LA ; soit de type 2, ce qui correspond à la linéarité multiplicative qui sera notée LM ; soit de type 3, ce qui correspond à la linéarité mixte qui sera notée LMX ; soit de type 4, ce qui correspond au retour à l'unité qui sera noté RU.

	Rapport simple entre les valeurs du problème		Types de procédure			
	Externe	Interne	Type 1 LA	Type 2 LM	Type 3 LMX	Type 4 RU
Problème 1	X					X
Problème 2		X			X	
Problème 3		X			X	
Problème 4		X		X		
Problème 5		X		X		

Tab 2 : Tableau des problèmes donnés aux élèves en fonction du rapport simple et du type de procédure

Ce tableau nous a permis de réaliser une catégorisation des procédures. Les procédures les plus efficaces pour résoudre les différents problèmes soumis aux élèves y sont regroupées. Il nous permettra par la suite d'analyser et d'interpréter les différentes données obtenues.

Troisième partie : Analyse et interprétation des données

I. Analyse des résultats

L'objectif de notre recherche est de déterminer si les élèves sont capables d'adapter leur procédure de résolution en fonction du type de problèmes donnés. Nos hypothèses sont alors : les élèves n'utilisent pas la même procédure en fonction de la catégorie de problèmes à résoudre. Plus particulièrement, nous supposons que les élèves n'utiliseront pas la même procédure si le problème donné sous forme écrite est constitué uniquement d'un texte, uniquement d'un tableau ou des deux. De plus, nous supposons que les procédures des élèves seront différentes en fonction des rapports internes ou externes des valeurs mises en jeu dans les problèmes.

L'analyse des résultats portera sur l'analyse des différentes productions réalisées par les élèves (Annexe 4). Il s'agira alors d'identifier les procédures utilisées par les élèves en fonction des problèmes proposés.

Dans cette partie, on tentera donc d'analyser le type de procédures utilisées par les élèves ainsi que le résultat obtenu. Cependant, dans le cadre de cette recherche nous nous intéresserons uniquement au type de procédures utilisées, nous ne tiendrons pas compte des résultats qui ne seront pas corrects.

Pour ce faire, j'ai créé une grille d'analyse où j'ai pu répertorier les procédures utilisées par les élèves pour chaque problème (Annexe 5). Elle est constituée de sept lignes (correspondant aux sept élèves) qui sont subdivisées en cinq lignes (correspondant aux cinq problèmes). En colonne, nous avons le type de procédures utilisées, l'exactitude ou non des résultats ainsi que d'éventuels commentaires. Dans ce tableau, les types de procédures sont répertoriés de façon identique au tableau précédent (Tab 2) : LA correspond à la linéarité additive; LM correspond à la linéarité multiplicative ; LMX correspond à la linéarité mixte; RU correspond au retour à l'unité.

A. Analyse du problème n°1

Pour le problème n°1, il s'agissait d'un problème de proportion simple.

J'ai collé 448 timbres dans un album de 14 pages. Il y a le même nombre de timbres sur chaque page. Combien y a-t-il de timbres sur une page ?

Pour résoudre ce problème, la totalité des élèves a utilisé la procédure RU. Ils ont donc divisé le nombre de timbres collés dans l'album par le nombre de pages, ce qui permet d'obtenir le nombre de timbres collés sur chaque page.

The image shows a student's handwritten work on a piece of paper. At the top, there is a long division problem: $448 \div 14 = 32$. The student has written the division as follows: $448 \overline{) 14}$ with a vertical line. The quotient 32 is written above the line. The student has subtracted 42 from 44 , leaving a remainder of 2 . They then brought down the 8 to make 28 , and subtracted 28 from 28 , leaving a remainder of 0 . Below the division, there is a handwritten note: "Dans l'album de 14 pages il y a 6272 timbres. Dans chaque pages il y a 32 timbres." The note contains a typo: "6272" instead of "448".

Fig. 1 : Exemple de production d'élève

Seul l'élève 4 a commis une erreur de calcul lorsqu'il a posé la division : il a obtenu un reste correct, ce qui n'est pas le cas du quotient. En effet, on suppose que lorsqu'il a posé la division, il a bien effectué mentalement les différents calculs mais il a commis une erreur en reportant les chiffres dans le quotient.

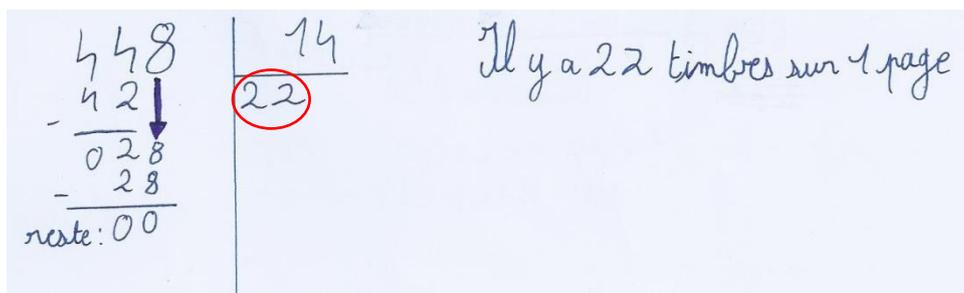


Fig. 2 : Production de l'élève 4

B. Analyse du problème n°2

Pour le problème n°2, il s'agissait d'un problème de proportion simple.

Complète le tableau suivant en faisant apparaître tes calculs :

Nombre de kilomètres	100	50	150	300
Litres d'essence	6			

Pour résoudre ce problème tous les élèves ont utilisé la linéarité additive ou multiplicative mais pas de la même façon.

En effet, les élèves 1, 2, 4, 6 et 7 ont utilisé à la fois les procédures de linéarité additive et multiplicative soit le type de procédure 3 LMX.

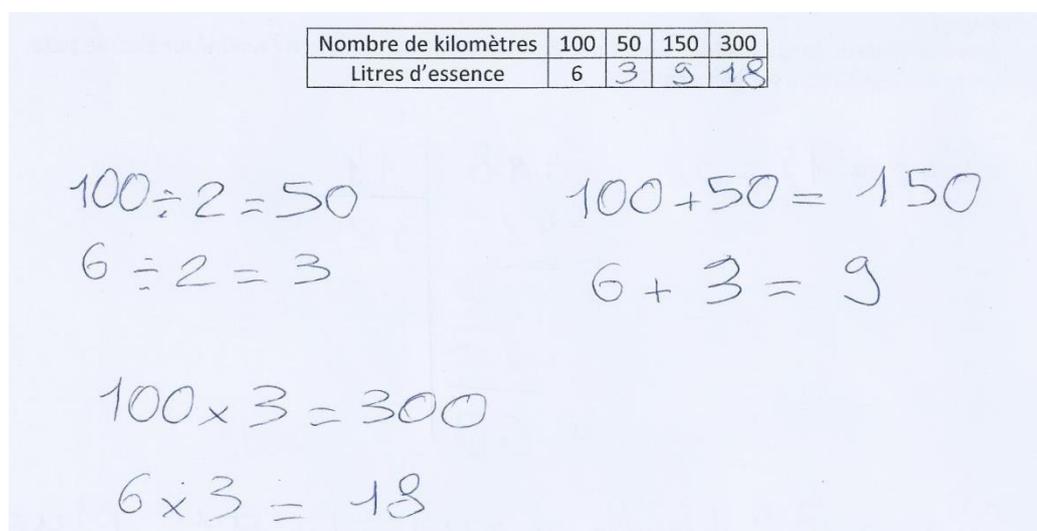


Fig. 3 : Exemple de production d'élève

Cependant, nous avons pu constater que l'élève 4 a commis une erreur de calcul. En effet, il a utilisé la LM pour déterminer la quantité d'essence nécessaire pour parcourir 50 km et il a utilisé la LA pour obtenir la quantité d'essence nécessaire pour effectuer 300 km, ce qui est correct. Cependant, il n'a pas précisé le type de procédure qu'il a utilisé pour déterminer la quantité d'essence nécessaire pour faire 150 km, étape où il a commis une erreur. De ce fait, selon lui pour effectuer ces 150 km nous avons besoin de 5 litres d'essence. Par conséquent, en utilisant LA pour donner la quantité d'essence nécessaire pour effectuer 300 km son erreur de calcul s'est répercutée sur ce résultat.

Nombre de kilomètres	100	50	150	300
Litres d'essence	6	3	5	10

$6 \div 2 = 3$ —————→
 ~~$6 \div 1 =$~~
 $5 + 5 = 10$

Fig. 4 : Production de l'élève 4

L'élève 5 quant à lui utilise essentiellement la LA, nous pouvons cependant constater qu'il a commencé par chercher le nombre de kilomètres que l'on pouvait faire avec 1 litre d'essence. Nous supposons qu'en effectuant la division il s'est rendu compte qu'elle était difficile à résoudre sans calculatrice. Donc il a cherché une autre procédure de résolution. De plus, nous pouvons constater que sa justification n'est pas aussi précise que celle de ses camarades. En effet, cet élève justifie l'ensemble de ses calculs par une phrase alors que ses camarades ont précisé les calculs effectués pour chaque étape de la résolution.

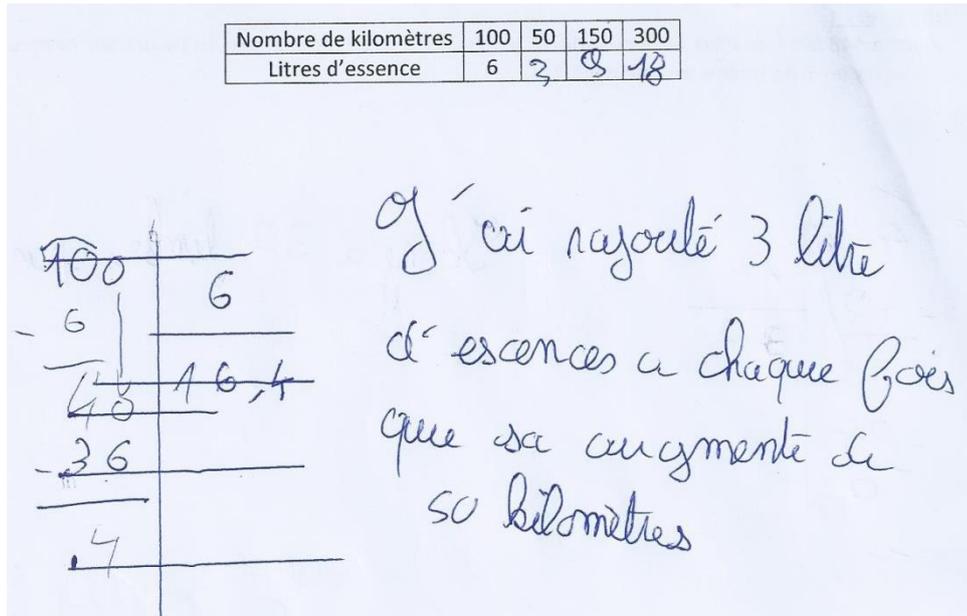


Fig. 5 : Production de l'élève 5

Tout comme l'élève 5, l'élève 3 semble avoir utilisé essentiellement la LA pour résoudre ce problème. Il a précisé ses calculs seulement pour déterminer la quantité d'essence nécessaire pour parcourir 300 km. Néanmoins les résultats pour 50 et 150 km sont corrects. Or le résultat obtenu pour 300 km ne correspond pas à l'opération posée. En effet, il a posé : $150 + 50 + 50 + 50 = 300$. Par conséquent, on suppose qu'il a effectué mentalement l'addition suivante : $9 + 3 + 3 + 3$ afin d'obtenir la quantité d'essence nécessaire pour effectuer 300 km soit 18 litres or il a obtenu 12. On suppose qu'il a seulement effectué mentalement $9 + 3$.

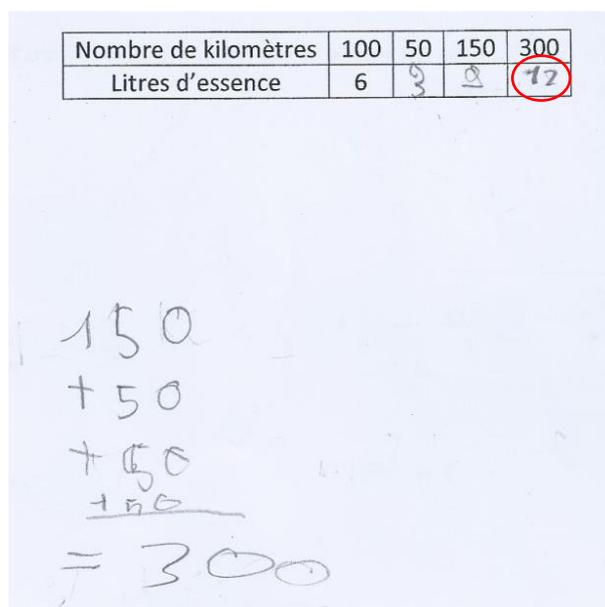


Fig. 6 : Production de l'élève 3

C. Analyse du problème n°3

Pour le problème n°3, il s'agissait d'un problème de proportion simple.

Avec 500 g de farine, Serge fait 30 crêpes. Combien lui faut-il de farine pour faire 15 crêpes ? 45 crêpes ? 60 crêpes ?

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500			

Pour résoudre ce problème, tous les élèves ont utilisé les procédures LA et LM mais de façons différentes.

En effet, les élèves 1, 2, 4, 6 et 7 ont utilisé une procédure du type LMX mais ils n'ont pas effectué les mêmes calculs.

Les élèves 2 et 7 ont, pour obtenir la quantité de farine nécessaire pour faire 15 et 60 crêpes, utilisé la LM. Par ailleurs, pour trouver la quantité de farine nécessaire pour réaliser 45 crêpes, ils ont utilisé la LA.

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500	250	750	1kg

$$30 \div 2 = 15$$
$$500 \div 2 = 250 \text{ g}$$

$$30 + 15 = 45$$
$$500 + 250 = 750 \text{ g}$$

$$30 \times 2 = 60$$
$$500 \times 2 = 1000 \text{ g} / 1 \text{ Kg}$$

Fig. 7 : Exemple de production d'élève

Quant à l'élève 4, il a utilisé la LM pour obtenir la quantité de farine nécessaire pour faire 15 crêpes. Alors que pour trouver la quantité de farine nécessaire pour réaliser 45 et 60 crêpes il a utilisé la LA.

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500	250	750	1000

$500 \div 2 = 250$
 $500 + 250 = 750$
 $750 + 250 = 1000$

Fig. 8 : Production de l'élève 4

Pour ce qui est de l'élève 3, comme précédemment, il n'a pas justifié la totalité de ses résultats. De ce fait, nous supposons qu'il a utilisé la LM pour trouver la quantité de farine nécessaire pour faire 15 et 60 crêpes, ce qui est correct. Nous pouvons constater cela grâce à la division qui n'est pas posée en potence. Nous supposons qu'il a mentalement divisé 500 par 2 mais qu'il a écrit 30. Par ailleurs, nous présumons qu'il a utilisé la LA pour trouver la quantité de farine nécessaire pour réaliser 45 crêpes. Son erreur serait alors : $500 + 250 = 650$ au lieu de 750.

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500	250	650	1000

$$\begin{array}{r} 500 \\ \div 30 \\ \hline 250 \end{array}$$

Fig. 9 : Production de l'élève 3

En ce qui concerne les élèves 1 et 6, ils ont utilisé la LM pour obtenir la quantité de farine nécessaire pour réaliser 15 crêpes, ce qui est correct. Par la suite, ils ont commis une erreur de calcul lorsqu'ils ont déterminé la quantité de farine nécessaire pour réaliser 45 crêpes. En effet, au lieu d'additionner 250 et 500, ils ont additionné 250 et 15 ce qui donne 265 au lieu de 750. On peut supposer qu'ils se sont trompés en lisant le tableau. Cette erreur s'est alors répercutée pour calculer la quantité de farine nécessaire pour faire 60 crêpes. En effet, ils ont alors additionné 500, 250 et 265 ce qui donne 1015 au lieu de 1000.

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500	250	265	1015

$30 \div 2 = 15$

$500 \div 2 = 250$

$250 + 15 = 265$

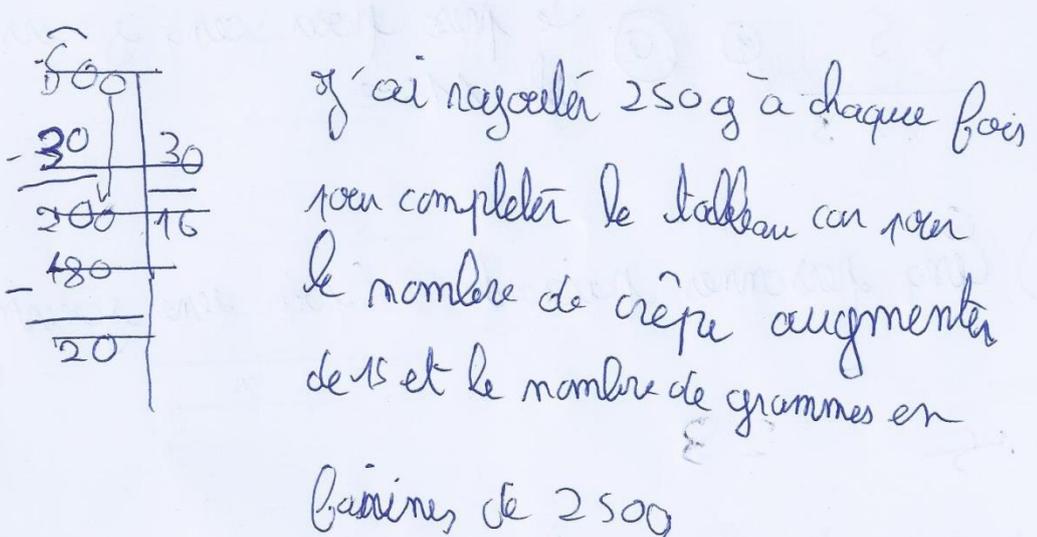
$500 + 250 + 265 = \cancel{615} \ 1015$

Il lui faut 250g de farine pour 15 crêpes, 265g pour 45 crêpes, 1015g pour 60 crêpes.

Fig. 10 : Exemple de production d'élève

Comme précédemment, l'élève 5 a utilisé essentiellement la LA. Comme pour le problème précédent, il a commencé par chercher la quantité de farine nécessaire pour faire une crêpe. Il n'a pas terminé son calcul et a cherché une autre procédure de résolution. La justification apportée est plus courte que celle de ses camarades. Elle se résume une nouvelle fois à une phrase.

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500	250	750	1000



500
- 30

200
- 180

20

J'ai rajouté 250g à chaque fois
pour compléter le tableau car pour
le nombre de crêpe augmenté
de 15 et le nombre de grammes en
baisses de 250g

Fig. 11 : Production de l'élève 5

D. Analyse du problème n°4

Pour le problème n°4, il s'agissait d'un problème de proportion double.

Le prix des remontées mécaniques au ski est de 23 € par jour et par personne.

- a) Combien paiera une personne pour cinq jours ?
- b) Combien paieront cinq personnes pour une journée ?

Pour résoudre ce problème, tous les élèves ont utilisé une procédure du type LM.

Les élèves 1, 2, 4, 5 et 6 ont utilisé la LM pour résoudre le problème. Cependant leur niveau de compréhension est différent. En effet, pour les deux questions, les grandeurs en jeu sont différentes mais l'opération à réaliser est identique. Les élèves 1, 2 et 6 n'ont posé la multiplication qu'une seule fois, alors que les élèves 4 et 5 l'ont posée deux fois.

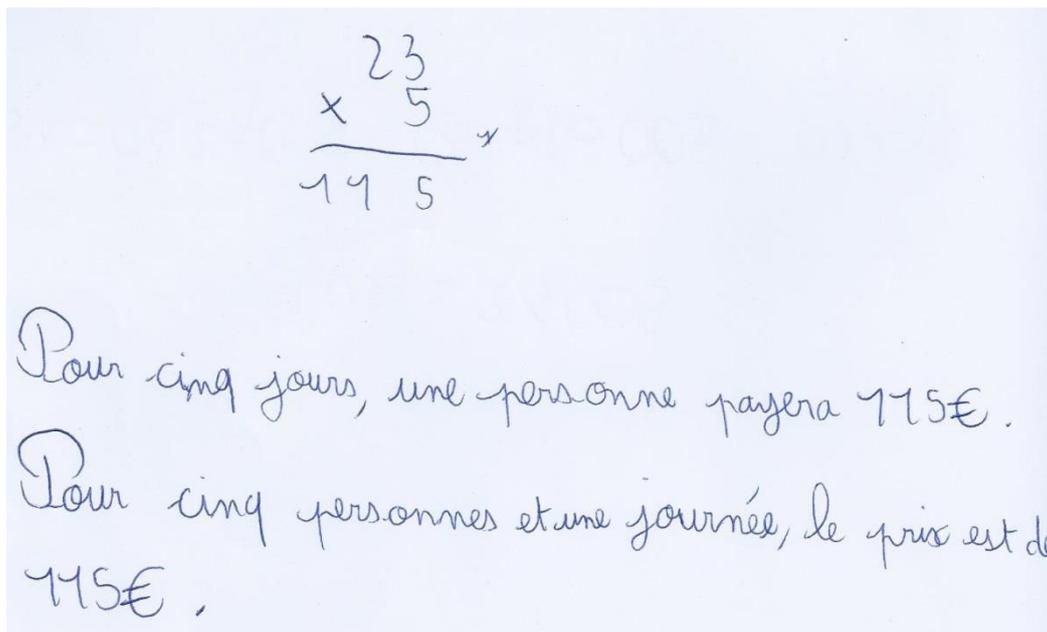


Fig. 12 : Exemple de production d'élève

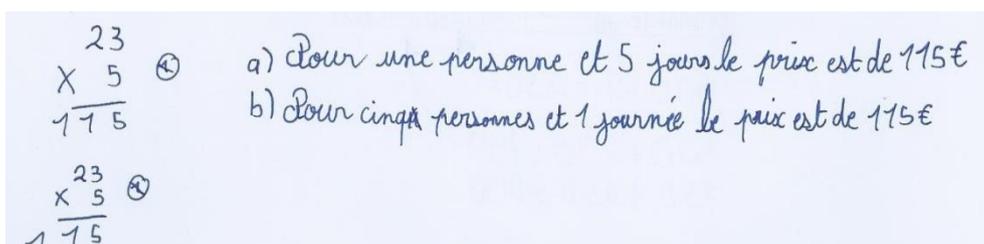


Fig. 13 : Exemple de production d'élève

Pour ce qui est de l'élève 3, il a utilisé une procédure correcte pour la question a). Cependant, on peut supposer qu'il n'a pas bien compris la question b). En effet, pour y répondre, il a multiplié le résultat de la première question par 5. On peut supposer que l'élève a fait cela machinalement : il a pris le résultat de la première question pour ensuite le multiplier avec le seul chiffre présent dans la question b). Il a ainsi calculé le prix que paieront cinq personnes pour cinq jours, ou encore le prix d'une personne pour 25 jours. Or comme l'élève n'a pas formulé de phrase réponse précise pour cette question il est difficile d'identifier ce qu'il a voulu calculer.

$$\begin{array}{r}
 115 \\
 \times 5 \\
 \hline
 575
 \end{array}$$

Fig. 14 : Production de l'élève 3

Enfin, pour ce qui est de l'élève 7, nous supposons qu'il a mal compris ce qui était demandé. En effet, comme ses camarades, il a commencé par utiliser la LM pour résoudre ce problème. Il a résolu correctement la première question puis a modifié sa réponse en rajoutant une étape de calcul. Il semble calculer le prix pour 5 jours avec la LM puis le prix pour une personne avec la LA. Il a fait de même pour la question b, il semble calculer le prix pour 5 personnes avec la LM puis le prix d'une journée avec la LM.

$$\begin{array}{l}
 23 \times 5 = 115 \quad \begin{array}{r} 23 \\ \times 5 \\ \hline 115 \end{array} \quad * \quad 115 + 23 = 138 \\
 \\
 \text{a) Pour 5 jours, 1 personne paye } \cancel{115 \text{ €}} \cdot 138 \text{ €} \\
 \\
 23 \times 5 = 115 \quad \begin{array}{r} 23 \\ \times 5 \\ \hline 115 \end{array} \quad * \quad 115 + 23 = 138 \\
 \\
 \text{b) Pour 1 jour, 5 personnes payent } 138 \text{ €} .
 \end{array}$$

Fig. 15 : Production de l'élève 7

E. Analyse du problème n°5

Pour le problème n°5, il s'agissait d'un problème de proportion simple composée.

Une pièce de monnaie pèse 7,5 g. La caissière du supermarché a fait 45 rouleaux de 25 pièces de 1 €. Quel est le poids total des 45 rouleaux de pièces ?

Pour résoudre ce problème, tous les élèves ont utilisé la LM mais de façon différente.

En effet, les élèves 1, 6 et 7 ont commencé par calculer le poids d'un rouleau de 25 pièces d'un euro en multipliant le poids d'une pièce par 25 pièces. Puis, ils ont multiplié le poids d'un rouleau par 45 afin d'obtenir le poids de 45 rouleaux.

The image shows handwritten mathematical work on a light blue background. On the left, there is a multiplication problem: $25 \times 7,5 = 187,5$. The student has written '25' and 'x 7,5', then '125' (with a circled '5') and '175' (with a circled '5') as intermediate steps, and '187,5' as the final result. On the right, there is another multiplication problem: $187,5 \times 45 = 8437,5$. The student has written '187,5' and 'x 45', then '9375' and '9375' as intermediate steps, and '8437,5' as the final result. Below these calculations, the student has written: 'R. Le poids total de 45 rouleaux est 8437,5.'

Fig. 16 : Exemple de production d'élève

Cependant l'élève 1 a commis une erreur de calcul lors de la seconde étape de la procédure. En effet lors de la multiplication de $187,5 \times 45$ il a obtenu $9237,5$ au lieu de $8437,5$.

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 7,5 \\ \hline 125 \\ 1750 \\ \hline 187,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1875 \\ \times 45 \\ \hline 9375 \\ 83000 \\ \hline 84375 \end{array}$$

Le poids de 45 rouleaux est de 8437,5

Fig. 17 : Production de l'élève 1

L'élève 2 a également utilisé la LM mais en utilisant un raisonnement différent. En effet, il a commencé par calculer le nombre de pièces utilisées pour faire 45 rouleaux soit 25×45 . Puis, il a multiplié le nombre pièces obtenu par le poids d'une pièce soit $1125 \times 7,5$. Il a ainsi obtenu 8437,5.

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 25 \\ \hline 225 \\ + 9000 \\ \hline 1125 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1125 \\ \times 7,5 \\ \hline 5625 \\ + 78750 \\ \hline 8437,5 \end{array}$$

Le poids de 45 rouleaux de 25 pièces est de 8437,5 kg.

Fig. 18 : Production de l'élève 2

Pour ce qui est de l'élève 4, nous supposons qu'il a compris partiellement ce problème. En effet, tout comme les élèves 1, 6 et 7, il a commencé par calculer le poids de 25 pièces présentes dans un rouleau. Puis, il a conclu que 45 rouleaux de

pièces pesaient 187,5 g. Cet élève n'a pas pris en compte la dimension de proportion simple composée. Pour lui, 45 rouleaux de pièces sont composés seulement de 25 pièces.

$$7,5 \times 25 = 187,5 \text{ g} \quad 45 \text{ rouleaux de } 25 \text{ pièces toutes pièces } 187,5 \text{ g}$$

Fig. 19 : Production de l'élève 4

Enfin, pour ce qui est des élèves 3 et 5, on suppose qu'ils n'ont pas compris le problème posé. En effet pour le résoudre ils ont multiplié le nombre de rouleaux par le poids d'une pièce soit : $45 \times 7,5$. De ce fait ils ont considéré que le poids d'un rouleau était de 7,5 g. Ils n'ont pas pris en compte le nombre de pièces qu'il y avait dans un rouleau. Ils obtiennent ainsi 337,5 g comme résultat.

The image shows handwritten work on a light blue background. On the left, there is a multiplication problem: $45 \times 7,5$. The student has written the numbers and a horizontal line, but the result is incorrect. The digits '225' are written below the line, with a circled '2' next to it. Below that, '3150' is written, with a circled '3' next to it. A final line shows '3375'. To the right of this work, the calculation $7,5 \times 45 = 337,5$ is written. At the bottom of the page, a sentence reads: 'le poids de 45 rouleaux est 337,5'.

Fig. 20 : Exemple de production d'élève

II. Interprétation des résultats

Dans cette partie, il s'agira d'interpréter les résultats de notre recherche en s'appuyant sur l'analyse effectuée précédemment afin de vérifier les hypothèses posées et de répondre à la problématique.

Suite à l'analyse des résultats, nous avons pu déterminer trois profils d'élèves. Ces profils ont été établis en fonction des procédures utilisées pour résoudre les problèmes qui ont été donnés. Afin de déterminer ces profils d'élèves, j'ai une nouvelle fois réalisé une grille d'analyse qui reprend en ligne les élèves et en colonne le type de procédures qu'ils ont utilisées selon le problème donné. (Annexe 6)

- **Profil n°1** : l'élève est capable de changer de procédure selon le problème qui lui est donné. Il identifie de façon implicite les rapports internes et externes ce qui lui permet de résoudre de la façon la plus rapide et la plus efficace les problèmes proposés. Ce profil correspond aux élèves 1, 2, 4, 6 et 7.
- **Profil n°2** : pour résoudre des problèmes de proportion simple l'élève commence systématiquement par utiliser la procédure du retour à l'unité. Puis lorsqu'il se rend compte que ce n'est pas la procédure la plus efficace, il cherche à trouver une procédure plus adaptée au problème, ce qu'il parvient à faire. Cependant on constate qu'il utilise essentiellement la LA alors que la LM est possible et plus efficiente. Lorsqu'il rencontre des problèmes de proportion double et de proportion simple composée, l'élève change de procédure et en utilise une de type 2 LM. Ce profil correspond à l'élève 5.
- **Profil n°3** : l'élève adapte sa procédure en fonction des relations internes et externes et selon les types de problèmes donnés. Par ailleurs, lors de la résolution du problème 2, il privilégie une procédure du type 1 : LA alors que la procédure la plus efficace est une procédure de type 3 LMX. Ce profil d'élève correspond à l'élève 3.

De façon générale, les résultats des élèves à ces problèmes, quel que soit leur profil, nous permettent de valider l'ensemble des hypothèses soumises à cette recherche.

En effet, les problèmes 1, 2 et 3 nous ont permis de valider l'hypothèse selon laquelle : pour des problèmes de proportion simple les élèves vont implicitement adapter la procédure qu'ils utilisent en fonction des rapports internes ou externes liant les valeurs du problème entre elles. On peut donc constater que les élèves ont d'une façon générale utilisé les procédures les plus efficaces, malgré quelques erreurs de calcul.

En ce qui concerne les problèmes de proportion double et de proportion simple composée on remarque que la compréhension du problème est plus difficile pour les élèves. Néanmoins, ils utilisent tous une procédure de type 2 LM, cependant elle est pour certains (les élèves 3, 4, 5 et 7) incomplète ou mal utilisée. Ils ne répondent donc pas précisément à la question du problème donné.

L'essentiel dans cette recherche était de montrer que les élèves étaient capables d'adapter leur procédure selon le problème donné et selon les relations internes et externes liant les valeurs du problème. L'exactitude du résultat du calcul n'était donc pas ce qui importait.

Par conséquent, on peut confirmer que pour cet échantillon, les élèves sont tous capables de changer de procédure de résolution en fonction du type de problème qui leur est donné et en fonction de la relation interne et externe liant les valeurs du problème entre elles. Dans la plupart des cas les élèves utilisent la procédure la plus efficace. Ces élèves sont donc capables d'adapter leur procédure en fonction du problème donné.

Conclusion et perspectives

La proportionnalité est l'une des notions mathématiques les plus difficiles à enseigner et à comprendre pour les élèves de cycle III. Or c'est une notion importante à ce niveau de cycle, elle permet de résoudre divers types de problèmes relevant généralement de la vie quotidienne.

Le but de cet enseignement est de conduire les élèves à appréhender de nouveaux raisonnements et à se créer un répertoire de procédures (plus riche) permettant de résoudre toutes sortes de problèmes relevant de la proportionnalité. Dans le cadre des problèmes de proportionnalité, il n'y a pas qu'une seule procédure de résolution possible. Les élèves doivent donc être capables de déterminer celle qui est la plus efficace selon le problème donné.

Mon travail de recherche est né suite à la volonté d'approfondir mes connaissances sur cette notion afin de comprendre comment l'enseigner au mieux aux élèves. Par ailleurs, le but de cette recherche était d'étudier la manière dont les élèves utilisent les procédures de résolutions dans les problèmes relevant de la proportionnalité. Mais également d'étudier l'aptitude des élèves à adapter une procédure selon le type de problème qui leur est donné mais aussi en fonction de la relation interne et externe liant les valeurs du problème entre elles.

Ainsi, la problématique était la suivante : selon la catégorie de problèmes proposés aux élèves de CM2 quelles procédures vont-ils utiliser pour résoudre ces problèmes de proportionnalité?

Pour répondre à cette problématique, nous avons établi un panel de cinq problèmes relevant de la catégorisation de Vergnaud. Puis, il a été demandé à sept élèves, choisis selon leur aptitude à résoudre des problèmes de proportionnalité, de les résoudre. Les traces écrites relevées ont ainsi permis d'établir diverses observations et de répondre à la problématique posée.

D'une manière générale, les observations réalisées tendent à valider les hypothèses formulées au départ, c'est-à-dire que les élèves sont capables d'adapter

leur procédure de résolution en fonction du problème donné et également en fonction de la façon dont il leur est proposé. Par ailleurs ils sont également capables de déterminer la procédure qui est la plus efficace en utilisant de façon implicite les rapports simples liant les valeurs du problème.

Néanmoins, nous devons relativiser ces résultats puisque l'échantillon que nous avons étudié n'était constitué seulement que de sept élèves. Afin de pouvoir généraliser cette recherche, il faudrait un nombre bien plus important d'élèves et une temporalité plus adaptée. De plus, l'analyse de la production écrite des élèves ne suffit pas pour comprendre leur raisonnement. C'est pourquoi il aurait été intéressant d'effectuer des entretiens d'explicitation (Vermersch, 1990) afin d'obtenir davantage d'éléments de compréhension concernant les raisonnements des élèves.

Par ailleurs, étendre cette recherche à un échantillon d'élèves plus important et sur une période plus longue pourrait permettre de comprendre le parcours cognitif d'un élève dans la résolution d'un problème relevant de proportionnalité. En outre, il permettrait de savoir quels types de situations choisir afin d'amener les élèves à varier et à s'approprier une multitude de procédures.

Bibliographie

ACADÉMIE DE ROUEN. *Jeu du banquier* [En ligne]. Disponible sur : http://ecoles.ac-rouen.fr/montivi/siteressources/file/Num_C2/banquier/banquiers.pdf (consulté le 11.02.2014)

BERGEAUT, Jean-François, BILLY, Christophe. *Mathématiques professeur des écoles*. Paris : Dunod, 2013. 470 p. (Je prépare ; vol. 1).

CHARNAY, Roland, DUSSUC, Marie-Paule, MADIER, Dany. *Cap maths CM2 : cycle 3 [Manuel de l'élève]*. Paris : Hatier, 2010. 191 p. (Cap maths; vol. 1).

CHARNAY, Roland, DUSSUC, Marie-Paule, MADIER, Dany. *Cap maths CM2 : cycle 3 [Guide de l'enseignant]*. Paris : Hatier, 2010. 369 p. (Cap maths; vol. 1).

COMIN, Eugène. L'enseignement de la proportionnalité de l'école au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2002, Vol. 22, n°2.3, p. 135-182.

HELAYEL, Josiane, FOURNIE, Catherine. *Maths : CM2 cycle 3 [Livre de l'élève] : calcul mental, nombres, calcul, grandeurs et mesures, organisation et gestion de données, géométrie*. Paris : Bordas/SEJER, 2010. 176 p. (Au rythme des maths ; vol. 1).

HELAYEL, Josiane, FOURNIE, Catherine. *Maths : CM2 cycle 3 [Livre du maître]*. Paris : Bordas/SEJER, 2010. 176 p. (Au rythme des maths ; vol. 1).

HOUEMENT, Catherine. La résolution de problèmes en question. *Grand N*, 2003, n°71, p. 7-23.

JARDY, Jacqueline, JARDY, Jacky, ROUY, Loïc. *Vivre les maths : CM2, cycle 3*. Paris : Nathan, 2007. 175 p. (Vivre les maths ; vol.1).

LEVAIN, Jean-Pierre. *Faire des maths autrement: développement cognitif et*

proportionnalité. Paris : Édition l'Harmattan, 1997. 239 p. (Espaces théoriques ; vol 1.).

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE. *Le socle commun des connaissances et des compétences* [En ligne]. 11 juillet 2006. Disponible sur : <http://cache.media.education.gouv.fr/file/51/3/3513.pdf> (consulté le 02.01.2014)

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE. *Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire*. [En ligne]. Le BO. Bulletin officiel du ministère de l'éducation nationale et du ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, hors-série n°3, du 19 juin 2008. Disponible sur : <ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2008/hs3/hs3.pdf> (consulté le 02.01.2014)

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE. *Le nombre au cycle 3 apprentissages numériques*. Futuroscope : SCÉRÉN-CNDP, 131 p. (Ressources pour faire la classe).

SIMARD, Arnaud. Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique. *Petit X*, 2012, n°89, p. 51-62.

SIMARD, Arnaud. Proportionnalité en CM2 et sixième. *Petit X*, 2012, n°90, p. 35-52.

SIMARD, Arnaud. Reconnaissance de situations de proportionnalité en CM2-sixième. *Grand N*, 2012, n°90, p. 49-69.

VERGNAUD, Gérard. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1990, vol. 10, n°2.3, p. 135-169.

Annexes

Annexe 1 : Grilles d'analyse des manuels

	Maths	Cap Maths
Contexte	<p>Pour le chapitre « proportionnalité » : Les contextes proposés relèvent de la vie quotidienne. <i>(période 3)</i></p> <p>Pour le chapitre « proportionnalité : pourcentage » : Les contextes proposés relèvent des pourcentages. <i>(période 4)</i></p> <p>Pour le chapitre « proportionnalité : vitesses » : Les contextes proposés relèvent des vitesses. <i>(période 4)</i></p> <p>Pour le chapitre « proportionnalité : conversions » : Les contextes proposés relèvent des conversions. <i>(période 4)</i></p> <p>Pour le chapitre « proportionnalité : échelles » :</p>	<p>Unité 3 : proportionnalité : diverses procédures. Les problèmes proposés relèvent de la vie quotidienne (nombre de carreaux pour carrelé une pièce et découper un ruban en morceaux de même longueur). <i>(période 1)</i></p> <p>Unité 4 : proportionnalité : passage par l'unité (22) : Le problème proposé relève de la vie quotidienne (tablette de chocolat). <i>(période 2)</i></p> <p>Unité 7 : proportionnalité (23) : Les problèmes proposés relèvent de la vie quotidienne (conversion euros contre des francs suisses) <i>(période 3)</i></p> <p>Unité 8 :</p>

(22) CHARNAY, Roland, DUSSUC, Marie-Paule et MADIER, Dany. *Cap Maths CM2, Cycle 3[manuel de L'élève]*, p. 43.

(23) Ibid., p. 75.

	<p>Les contextes proposés relèvent des échelles. (période 5)</p>	<p>proportionnalité : comparaison relative (24) : Les problèmes proposés relèvent de la vie quotidienne (mélange) (période 3) Unité 10 : pourcentages (25) : Les contextes proposés relèvent des pourcentages (période 4) Unité 11 : échelles (26) Les contextes proposés relèvent des échelles. (période 4) Unité 13 : Proportionnalité : agrandissement /réduction (27) : Les contextes proposés relèvent des échelles. (période 5) Unité 14 : vitesse (28) : Les contextes proposés relèvent des vitesses. (période 5)</p>
--	---	--

(24) Ibid., p. 81.

(25) Ibid., p. 103-105.

(26) Ibid., p. 118-119.

(27) Ibid., p. 135-136.

(28) Ibid., p. 147-148.

	Maths	Cap Maths
Procédures attendues	<p>Pour le chapitre « proportionnalité » : Les procédures attendues sont celles de la linéarité multiplicative.</p> <p>Pour le chapitre « proportionnalité : pourcentage » : Les procédures attendues sont celles de la linéarité multiplicative.</p> <p>Pour le chapitre « proportionnalité : vitesses » : Les procédures attendues sont celles de la linéarité multiplicative.</p> <p>Pour le chapitre « proportionnalité : conversions » : Les procédures attendues sont celles de la linéarité multiplicative.</p> <p>Pour le chapitre : « proportionnalité : échelles » : Les procédures attendues sont celles de la linéarité multiplicative.</p>	<p>Unité 3 : La procédure attendue est celle du passage par l'unité.</p> <p>Unité 4 : La procédure attendue est celle du passage par l'unité.</p> <p>Unité 7 : Il n'y a pas de procédures précises attendues, un des objectifs des exercices est de permettre aux élèves de choisir une procédure adaptée aux problèmes.</p> <p>Unité 8 : La procédure attendue est celle de la linéarité multiplicative.</p> <p>Unité 10 : Il n'y a pas de procédures précises attendues.</p> <p>Unité 11 : Les procédures attendues sont celles de la linéarité multiplicative.</p> <p>Unité 13 : Les procédures attendues sont celles de la linéarité multiplicative.</p> <p>Unité 14 :</p>

		Les procédures attendues sont celles de la linéarité multiplicative.
--	--	--

	Maths	Cap maths
Progression dans les types de problèmes selon Vergnaud	Ce manuel propose d'étudier progressivement les différents champs de la proportionnalité en allant du plus général au plus précis : problèmes de proportionnalité simple de la vie quotidienne, ensuite problèmes relevant des pourcentages, puis des conversions et des vitesses et enfin problèmes relevant des échelles	Ce manuel propose une progression similaire allant du plus simple au plus compliqué. En effet, il commence par proposer des problèmes de proportionnalité simple issus de la vie quotidienne puis il propose des problèmes relevant des pourcentages, puis des échelles et des vitesses.

Annexe 2 : Evaluation sommative

Prénom : _____

Date : _____

EVALUATION DE MATHEMATIQUES	
La proportionnalité	
<u>Compétence évaluée :</u>	<u>Note :</u>
Identifier et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité :	
<u>Commentaires :</u>	Signature :

Exercice 1 : Indique si les situations sont proportionnelles ou non. Justifie ta réponse. /8

a) Maxime achète 2 kg de pomme terre à 4€. S'il en achète 5 kg il paie 10€.

b) Une place de cinéma coûte 4,50€. 20 places de cinéma coûtent 80€.

c) Marine met 6 minutes pour faire un tour de stade. Elle met 25 minutes pour faire 3 tours.

d) Guillaume est payé 9 € de l'heure. Pour 15 heures de travail, il est payé 135 €.

Exercice 2 : Résous les problèmes suivants. / 16

Problème 1 : /2

La masse totale de dix encyclopédies est de 30 kg. Les encyclopédies sont identiques. Combien pèsent 48 encyclopédies ?

Problème 2 : /2

17 clés USB coûtent 221 €. Quel est le prix de 19 clés du même type ?

Problème 3 : /2

Si trois livres coûtent 12 €, quel est le prix de 7 livres ?

Problème 5 : /10

Les parents de Jeanne vont en vacances dans un gîte. Ils décident de louer un VTT pour leur fille. Ils comparent les prix des deux magasins suivants :

Magasin SPORT ET LOISIRS
Location de VTT :
5 € par jour et par vélo,
assurance comprise

Magasin de cycles CALVO
Location de VTT :
4 € par jour et par vélo,
10 € pour l'assurance
quel que soit le nombre de jours de location.

- a) Dans quel magasin paiera-t-on le moins cher pour 7 jours de location ? (sur 5 points)

N'oublie pas de prendre en compte l'assurance dans tes calculs.

- b) Dans quel magasin paiera-t-on le moins cher pour 14 jours de location ? (sur 5 points)

N'oublie pas de prendre en compte l'assurance dans tes calculs.

Annexe 3 : Document donné aux élèves

Proportionnalité

Problème 1 :

J'ai collé 448 timbres dans un album de 14 pages. Il y a le même nombre de timbres sur chaque page. Combien y a-t-il de timbres sur une page ?

Problème 2 :

Complète le tableau suivant en faisant apparaître tes calculs :

Nombre de kilomètres	100	50	150	300
Litres d'essence	6			

Problème 3 :

Avec 500 g de farine, Serge fait 30 crêpes. Combien lui faut-il de farine pour faire 15 crêpes ? 45 crêpes ? 60 crêpes ?

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500			

Problème 4 :

Le prix des remontées mécaniques au ski est de 23 € par jour et par personne.

- c) Combien paiera une personne pour cinq jours ?
- d) Combien paieront cinq personnes pour une journée ?

Problème 5 :

Une pièce de monnaie pèse 7,5 g. La caissière du supermarché a fait 45 rouleaux de 25 pièces de 1 €. Quel est le poids total des 45 rouleaux de pièces ?

Annexe 4 : Productions d'élèves

A. Problème n°1

Problème 1 :
J'ai collé 448 timbres dans un album de 14 pages. Il y a le même nombre de timbre sur chaque page.
Combien y a-t-il de timbre sur une page ?

The student has written a long division problem: $448 \div 14 = 32$. The work shows the division steps: $448 - 420 = 28$, then $28 - 28 = 0$. The quotient is 32. Below the division, the student has written: "Dans l'album de 14 pages il y a 6272 timbres" and "Dans chaque pages il y a 32 timbres".

Fig. 21 : Production de le l'élève 1

Problème 1 :
J'ai collé 448 timbres dans un album de 14 pages. Il y a le même nombre de timbre sur chaque page.
Combien y a-t-il de timbre sur une page ?

The student has written a long division problem: $448 \div 14 = 32$. The work shows the division steps: $448 - 420 = 28$, then $28 - 28 = 0$. The quotient is 32. Below the division, the student has written: "Il y a 32 timbres par pages".

Fig. 22 : Production de l'élève 2

Problème 1 :

J'ai collé 448 timbres dans un album de 14 pages. Il y a le même nombre de timbre sur chaque page.
Combien y a-t-il de timbre sur une page ?

$$\begin{array}{r} 448 \\ - 42 \\ \hline 028 \\ - 28 \\ \hline 00 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \hline 32 \end{array}$$

Il y a 32 timbre dedans

Fig. 23 : Production de l'élève 3

Problème 1 :

J'ai collé 448 timbres dans un album de 14 pages. Il y a le même nombre de timbre sur chaque page.
Combien y a-t-il de timbre sur une page ?

$$\begin{array}{r} 448 \\ - 42 \\ \hline 028 \\ - 28 \\ \hline \text{reste: } 00 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \hline 22 \end{array}$$

Il y a 22 timbres sur 1 page

Fig. 24 : Production de l'élève 4

Problème 1 :

J'ai collé 448 timbres dans un album de 14 pages. Il y a le même nombre de timbre sur chaque page. Combien y a-t-il de timbre sur une page ?

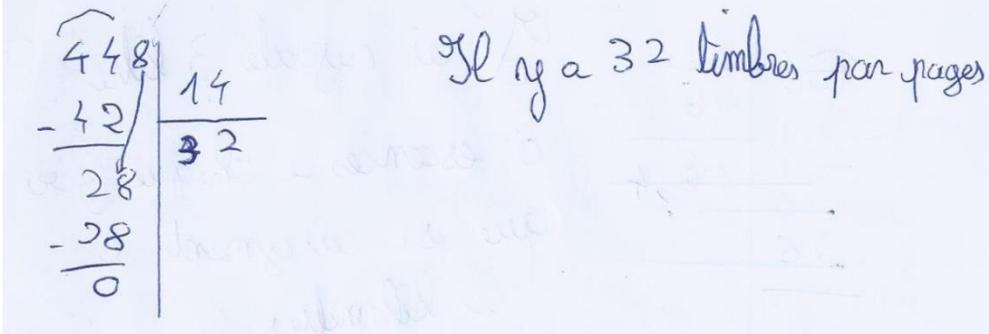


Fig. 25 : Production de l'élève 5

Problème 1 :

J'ai collé 448 timbres dans un album de 14 pages. Il y a le même nombre de timbre sur chaque page. Combien y a-t-il de timbre sur une page ?

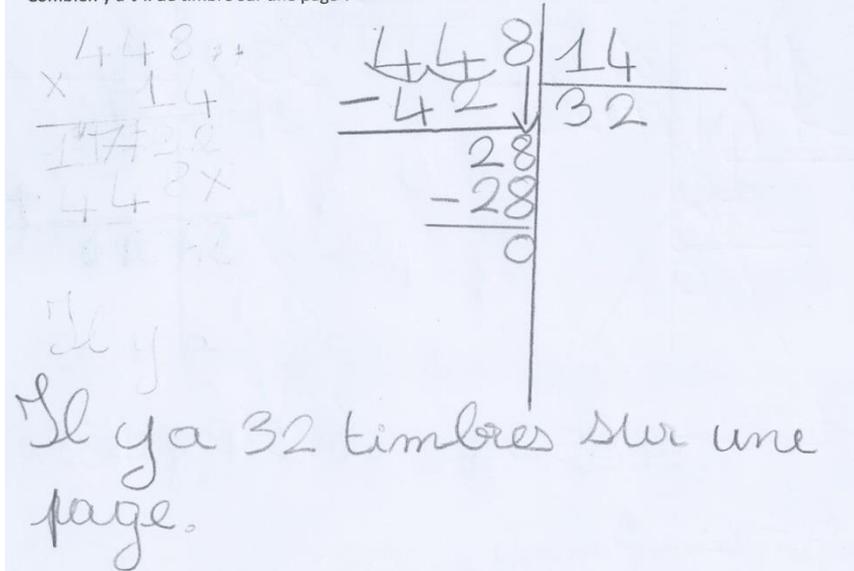


Fig. 26 : Production de l'élève 6

Problème 1 :

J'ai collé 448 timbres dans un album de 14 pages. Il y a le même nombre de timbre sur chaque page. Combien y a-t-il de timbre sur une page ?

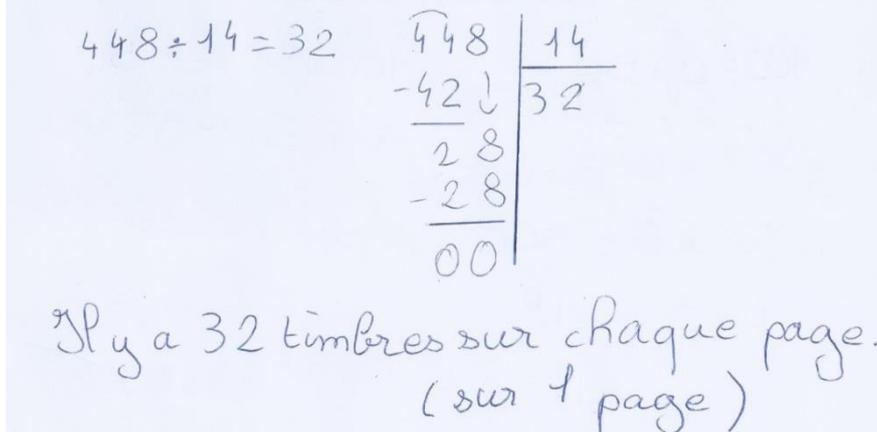


Fig. 27 : Production de l'élève 7

B. Problème n°2

Problème 2 :

Complète le tableau suivant en faisant apparaître tes calculs :

Nombre de kilomètres	100	50	150	300
Litres d'essence	6	3	9	18

$$100 \div 2 = 50$$

$$6 \div 2 = 3$$

$$100 + 50 = 150$$

$$6 + 3 = 9$$

$$100 \times 3 = 300$$

$$6 \times 3 = 18$$

Fig. 28 : Production de l'élève 1

Problème 2 :

Complète le tableau suivant en faisant apparaître tes calculs :

Nombre de kilomètres	100	50	150	300
Litres d'essence	6	3	9	18

$$6 \div 2 = 3$$

$$6 + 3 = 9$$

$$6 \times 3 = 18$$

Fig. 29 : Production de l'élève 2

Problème 2 :

Complète le tableau suivant en faisant apparaître tes calculs :

Nombre de kilomètres	100	50	150	300
Litres d'essence	6	3	9	18

$$\begin{array}{r}
 150 \\
 + 50 \\
 + 50 \\
 + 50 \\
 \hline
 = 300
 \end{array}$$

Fig. 30 : Production de l'élève 3

Problème 2 :

Complète le tableau suivant en faisant apparaître tes calculs :

Nombre de kilomètres	100	50	150	300
Litres d'essence	6	3	5	10

$6 \div 2 = 3$ —————→
 ~~$6 \div 4 =$~~
 $5 + 5 = 10$

Fig. 31 : Production de l'élève 4

Problème 2 :

Complète le tableau suivant en faisant apparaître tes calculs :

Nombre de kilomètres	100	50	150	300
Litres d'essence	6	3	9	18

$$\begin{array}{r} 100 \\ - 6 \\ \hline 94 \\ - 36 \\ \hline 58 \end{array}$$

J'ai rajouté 3 litre
d'essences à chaque fois
que sa augmente de
50 kilomètres

Fig. 32 : Production de l'élève 5

Problème 2 :

Complète le tableau suivant en faisant apparaître tes calculs :

Nombre de kilomètres	100	50	150	300
Litres d'essence	6	3	9	18

$$\begin{array}{r} 150 \\ - 75 \\ \hline 75 \\ - 10 \\ \hline 65 \\ - 10 \\ \hline 55 \\ - 10 \\ \hline 45 \\ - 10 \\ \hline 35 \\ - 10 \\ \hline 25 \\ - 10 \\ \hline 15 \\ - 10 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 300 \\ - 18 \\ \hline 282 \\ - 18 \\ \hline 264 \\ - 18 \\ \hline 246 \\ - 18 \\ \hline 228 \\ - 18 \\ \hline 210 \\ - 18 \\ \hline 192 \\ - 18 \\ \hline 174 \\ - 18 \\ \hline 156 \\ - 18 \\ \hline 138 \\ - 18 \\ \hline 120 \\ - 18 \\ \hline 102 \\ - 18 \\ \hline 84 \\ - 18 \\ \hline 66 \\ - 18 \\ \hline 48 \\ - 18 \\ \hline 30 \end{array}$$

$100 \div 2 = 50$

$6 + 3 + 9 = 18$

$6 \div 2 = 3$

$6 + 3 = 9$

Fig. 33 : Production de l'élève 6

Problème 2 :

Complète le tableau suivant en faisant apparaître tes calculs :

Nombre de kilomètres	100	50	150	300
Litres d'essence	6	3	9	18

$$100 \div 2 = 50$$

$$6 \div 2 = 3$$

$$100 + 50 = 150$$

$$6 + 3 = 9$$

$$100 \times 3 = 300$$

$$6 \times 3 = 18$$

Fig. 34 : Production de l'élève 7

C. Problème n°3

Problème 3 :
Avec 500 g de farine, Serge fait 30 crêpes. Combien lui faut-il de farine pour faire 15 crêpes ? 45 crêpes ? 60 crêpes ?

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500	250	265	1015

$30 \div 2 = 15$
 $500 \div 2 = 250$
 $250 + 15 = 262$
 $500 + 250 + 265 = 1015$

pour 15 crêpes il faudra 250g de farine pour 45 crêpes il faudra 265g de farine et pour 60 crêpes il faudra 1015g de farine

Fig. 35 : Production de l'élève 1

Problème 3 :
Avec 500 g de farine, Serge fait 30 crêpes. Combien lui faut-il de farine pour faire 15 crêpes ? 45 crêpes ? 60 crêpes ?

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500	250	750	1000

$500 \div 2 = 250$ $500 + 250 = 750$
 $500 \times 2 = 1000$

Fig. 36 : Production de l'élève 2

Problème 3 :

Avec 500 g de farine, Serge fait 30 crêpes. Combien lui faut-il de farine pour faire 15 crêpes ? 45 crêpes ? 60 crêpes ?

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500	250	750	1000

$$\begin{array}{r} 500 \\ \div 30 \\ \hline 250 \end{array}$$

Fig. 37 : Production de l'élève 3

Problème 3 :

Avec 500 g de farine, Serge fait 30 crêpes. Combien lui faut-il de farine pour faire 15 crêpes ? 45 crêpes ? 60 crêpes ?

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500	250	750	1000

$$\begin{aligned} 500 \div 2 &= 250 \\ 500 + 250 &= 750 \\ 750 + 250 &= 1000 \end{aligned}$$

Fig. 38 : Production de l'élève 4

Problème 3 :

Avec 500 g de farine, Serge fait 30 crêpes. Combien lui faut-il de farine pour faire 15 crêpes ? 45 crêpes ? 60 crêpes ?

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500	250	750	1000

$$\begin{array}{r} 500 \\ - 30 \quad 30 \\ \hline 200 \quad 16 \\ - 180 \\ \hline 20 \end{array}$$

J'ai rajouté 250g à chaque fois pour compléter le tableau car pour le nombre de crêpe augmenté de 15 et le nombre de grammes en farine de 250g

Fig. 39 : Production de l'élève 5

Problème 3 :

Avec 500 g de farine, Serge fait 30 crêpes. Combien lui faut-il de farine pour faire 15 crêpes ? 45 crêpes ? 60 crêpes ?

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500	250 265	750 1015	1500

$$30 \div 2 = 15$$

$$500 \div 2 = 250$$

$$250 + 15 = 265$$

$$500 + 250 + 265 = \del{695} \underline{1015}$$

Il lui faut 250g de farine pour 15 crêpes,
265g pour 45 crêpes, 1015g pour 60 crêpes.

Fig. 40 : Production de l'élève 6

Problème 3 :

Avec 500 g de farine, Serge fait 30 crêpes. Combien lui faut-il de farine pour faire 15 crêpes ? 45 crêpes ? 60 crêpes ?

Nombre de crêpes	30	15	45	60
Farine (en g)	500	250	750	1kg

$$30 \div 2 = 15$$

$$500 \div 2 = 250 \text{ g}$$

$$30 \times 2 = 60$$

$$500 \times 2 = 1000 \text{ g} / 1 \text{ Kg}$$

$$30 + 15 = 45$$

$$500 + 250 = 750 \text{ g}$$

Fig. 41 : Production de l'élève 7

D. Problème n°4

Problème 4 :
Le prix des remontées mécanique au ski est de 23 € par jour et par personne.

a) Combien paiera une personne pour cinq jours ?
b) Combien paieront cinq personnes pour une journée ?

~~$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 5 \\ \hline 115 \end{array}$$~~

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 5 \\ \hline 115 \end{array}$$

pour cinq jours ils vont payer 115 €

ils paieront 115 € pour 5 personnes

Fig. 42 : Production de l'élève 1

Problème 4 :
Le prix des remontées mécanique au ski est de 23 € par jour et par personne.

a) Combien paiera une personne pour cinq jours ?
b) Combien paieront cinq personnes pour une journée ?

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 5 \\ \hline 115 \end{array}$$

Pour cinq jours, une personne paiera 115€.

Pour cinq personnes et une journée, le prix est de 115€.

Fig. 43 : Production de l'élève 2

Problème 4 :

Le prix des remontées mécanique au ski est de 23 € par jour et par personne.

- a) Combien paiera une personne pour cinq jours ?
- b) Combien paieront cinq personnes pour une journée ?

Handwritten student work for Fig. 44. It shows two multiplication problems. The first is $23 \times 5 = 115$ with the result written as 115 €. Below it, the student writes "il paiera 115 €". The second is $115 \times 5 = 575$.

Fig. 44 : Production de l'élève 3

Problème 4 :

Le prix des remontées mécanique au ski est de 23 € par jour et par personne.

- a) Combien paiera une personne pour cinq jours ?
- b) Combien paieront cinq personnes pour une journée ?

Handwritten student work for Fig. 45. It shows two multiplication problems, each with a circled plus sign. The first is $23 \times 5 = 115$. The second is $115 \times 5 = 575$. To the right of the first calculation, the student writes "a) Pour une personne et 5 jours le prix est de 115 €". To the right of the second calculation, the student writes "b) Pour cinq personnes et 1 journée le prix est de 115 €".

Fig. 45 : Production de l'élève 4

Problème 4 :

Le prix des remontées mécanique au ski est de 23 € par jour et par personne.

- a) Combien paiera une personne pour cinq jours ?
- b) Combien paieront cinq personnes pour une journée ?

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 5 \\ \hline 115 \end{array}$$

ⓐ Le prix pour cinq jours est 115 €

ⓑ Cinq personnes paieront 115 € pour une journée

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 5 \\ \hline 115 \end{array}$$

Fig. 46 : Production de l'élève 5

Problème 4 :

Le prix des remontées mécanique au ski est de 23 € par jour et par personne.

- a) Combien paiera une personne pour cinq jours ?
- b) Combien paieront cinq personnes pour une journée ?

$$\begin{array}{r} 234 \\ \times 5 \\ \hline 115 \end{array}$$

Il paiera 115 € pour 5 jours.

Il paiera 115 € par 5 personnes

Fig. 47 : Production de l'élève 6

Problème 4 :

Le prix des remontées mécanique au ski est de 23 € par jour et par personne.

- a) Combien paiera une personne pour cinq jours ?
- b) Combien paieront cinq personnes pour une journée ?

$$23 \times 5 = 115 \quad \begin{array}{r} 23 \\ \times 5 \\ \hline 115 \end{array} \quad * \quad 115 + 23 = 138$$

a) Pour 5 jours, 1 personne paye ~~115€~~ 138€

$$23 \times 5 = 115 \quad \begin{array}{r} 23 \\ \times 5 \\ \hline 115 \end{array} \quad * \quad 115 + 23 = 138$$

b) Pour 1 jour, 5 personnes paient 138€.

Fig. 48 : Production de l'élève 7

E. Problème n°5

Problème 5 :
 Une pièce de monnaie pèse 7,5 g. La caissière du supermarché a fait 45 rouleaux de 25 pièces de 1 €. Quel est le poids total des 45 rouleaux de pièce ?

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 7,5 \\ \hline 125 \\ 1750 \\ \hline 187,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 187,5 \\ \times 45 \\ \hline 9375 \\ 89000 \\ \hline 8437,5 \end{array}$$

Le poids de 45 rouleaux est de 8437,5 g

Fig. 49 : Production de l'élève 1

Problème 5 :
 Une pièce de monnaie pèse 7,5 g. La caissière du supermarché a fait 45 rouleaux de 25 pièces de 1 €. Quel est le poids total des 45 rouleaux de pièce ?

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 25 \\ \hline 225 \\ + 9000 \\ \hline 1125 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1125 \\ \times 7,5 \\ \hline 5625 \\ + 78750 \\ \hline 8437,5 \end{array}$$

Le poids de 45 rouleaux de 25 pièces est de 8437,5 g

Fig. 50 : Production de l'élève 2

Problème 5 :

Une pièce de monnaie pèse 7,5 g. La caissière du supermarché a fait 45 rouleaux de 25 pièces de 1 €. Quel est le poids total des 45 rouleaux de pièce ?

Handwritten multiplication showing the calculation of the total weight:

$$\begin{array}{r} 7,5 \\ \times 45 \\ \hline 337,5 \end{array}$$

Donc pèse 337,5

Fig. 51 : Production de l'élève 3

Problème 5 :

Une pièce de monnaie pèse 7,5 g. La caissière du supermarché a fait 45 rouleaux de 25 pièces de 1 €. Quel est le poids total des 45 rouleaux de pièce ?

Handwritten calculation showing the weight of one roll and the total weight:

$$7,5 \times 25 = 187,5g$$

45 rouleaux de 25 pièces toutes pièces 187,5g

Fig. 52 : Production de l'élève 4

Problème 5 :

Une pièce de monnaie pèse 7,5 g. La caissière du supermarché a fait 45 rouleaux de 25 pièces de 1 €. Quel est le poids total des 45 rouleaux de pièce ?

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 7,5 \\ \hline 225 \\ 3150 \\ \hline 3375 \end{array} \quad \begin{array}{l} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array}$$

$7,5 \times 45 = 337,5$

le poids de 45 rouleaux est 337,5

Fig. 53 : Production de l'élève 5

Problème 5 :

Une pièce de monnaie pèse 7,5 g. La caissière du supermarché a fait 45 rouleaux de 25 pièces de 1 €. Quel est le poids total des 45 rouleaux de pièce ?

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 7,5 \\ \hline 125 \\ 1750 \\ \hline 1875 \end{array} \quad \begin{array}{r} 187,5774 \\ \times 45777 \\ \hline 9375 \\ + 85000 \\ \hline 8437,5 \end{array}$$

Le poids total de 45 rouleaux est 8437,5.

Fig. 54 : Production de l'élève 6

Problème 5 :

Une pièce de monnaie pèse 7,5 g. La caissière du supermarché a fait 45 rouleaux de 25 pièces de 1 €. Quel est le poids total des 45 rouleaux de pièce ?

$$25 \times 7,5 = 187,5$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 7,5 \\ \hline 125 \\ 1750 \\ \hline 187,5 \end{array}$$

$$187,5 \times 45 = 8437,5$$

$$\begin{array}{r} 187,5 \\ \times 45 \\ \hline 09375 \\ 75000 \\ \hline 8437,5 \end{array}$$

Le poids total de 45 rouleaux de pièces est 8437,5g.

Fig. 55 : Production de l'élève 7

Annexe 5 : Grille d'analyse des procédures des élèves n°1

		Procédure utilisée		
		Type de procédure	Résultat correct	Observations
Elève 1	Problème 1	RU	X	
	Problème 2	LMX	X	
	Problème 3	LMX		Erreur de calcul
	Problème 4	LM	X	
	Problème 5	LM		Erreur de calcul
Elève 2	Problème 1	RU	X	
	Problème 2	LMX	X	
	Problème 3	LMX	X	
	Problème 4	LM	X	
	Problème 5	LM	X	
Elève 3	Problème 1	RU	X	
	Problème 2	LA		Erreur de calcul
	Problème 3	LMX		Erreur de calcul
	Problème 4	LM		Non compréhension question b
	Problème 5	LM		Non compréhension du problème
Elève 4	Problème 1	RU		Erreur dans le quotient mais reste est correct
	Problème 2	LMX		Erreur de calcul
	Problème 3	LMX	X	
	Problème 4	LM	X	
	Problème 5	LM		Compréhension partielle du problème

		Procédure utilisée		
		Type de procédure	Résultat correct	Observations
Elève 5	Problème 1	RU	X	
	Problème 2	LA	X	
	Problème 3	LA	X	
	Problème 4	LM	X	
	Problème 5	LM		Non compréhension du problème
Elève 6	Problème 1	RU	X	
	Problème 2	LMX	X	
	Problème 3	LMX		Erreur de calcul
	Problème 4	LM	X	
	Problème 5	LM	X	
Elève 7	Problème 1	RU	X	
	Problème 2	LMX	X	
	Problème 3	LMX	X	
	Problème 4	LM		Non compréhension du problème
	Problème 5	LM	X	

Annexe 6 : Grille d'analyse des procédures des élèves n°2

	Problèmes de proportion simple			Problème de proportion double	Problème de proportion simple composée
	Problème 1	Problème 2	Problème 3	Problème 4	Problème 5
Elève 1	RU	LMX	LMX	LM	LM
Elève 2	RU	LMX	LMX	LM	LM
Elève 3	RU	LA	LMX	LM	LM
Elève 4	RU	LMX	LMX	LM	LM
Elève 5	RU	LA	LA	LM	LM
Elève 6	RU	LMX	LMX	LM	LM
Elève 7	RU	LMX	LMX	LM	LM

Laëtitia ROBLIN

La proportionnalité au CM2

Résumé :

La proportionnalité est l'une des notions les plus importantes au cycle III. Cependant, c'est aussi l'une des notions les plus difficiles à enseigner car elle pose de nombreuses difficultés que ce soit du côté des enseignants ou du côté des élèves.

On peut recenser de nombreux ouvrages traitant de l'apprentissage de la proportionnalité que ce soit d'un point de vue didactique, (par exemple : Vergnaud, 1990 et Comin, 2002) ou d'un point de vue psychologique (par exemple : Levain, 1994).

Ce mémoire est né suite à la volonté d'approfondir mes connaissances sur cette notion afin de comprendre comment l'enseigner au mieux aux élèves. Le but de l'enseignement de la proportionnalité est de conduire les élèves à utiliser la procédure la plus adaptée et la plus efficace pour résoudre des problèmes. J'ai donc choisi d'étudier les procédures utilisées par les élèves pour résoudre différents problèmes relevant de la proportionnalité.

Cette recherche avait donc pour but de déterminer selon la catégorie de problèmes donnés quelles procédures seraient utilisées par des élèves de CM2 pour résoudre ces problèmes de proportionnalité.

Mots clés : Proportionnalité, procédures de résolution, cycle III

Proportionality in primary school

Summary:

Proportionality is one of the most important concepts in Cycle III. However, it is also one of the most difficult concepts to teach because it poses many difficulties both for teachers and students.

We can identify many books about the learning of proportionality either from a didactic point of view, (for exemple Vergnaud, 1990 Comin, 2002) or from a psychological point of view (for exemple Levain , 1994).

This master's thesis was born from the desire to improve my knowledge of this concept, in order to understand how to teach students better. The aim of the teaching of proportionality is to lead students to use the most appropriate and the most effective procedure to solve problems. So I have chosen to study the procedures used by students to solve different problems related to proportionality.

This study is aiming at determining which procedures the pupils in CM2 will use to solve proportionality problems, according to their categories.

Keywords: Proportionality, resolution procedure, cycle III