



**HAL**  
open science

# Combinaison des mesures GNSS et topométriques dans un réseau d'auscultation

Maïlys Bucher

► **To cite this version:**

Maïlys Bucher. Combinaison des mesures GNSS et topométriques dans un réseau d'auscultation. Sciences de l'ingénieur [physics]. 2015. dumas-01337090

**HAL Id: dumas-01337090**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01337090>**

Submitted on 24 Jun 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET METIERS**  
**ÉCOLE SUPÉRIEURE DES GÉOMÈTRES ET TOPOGRAPHES**

---

**MÉMOIRE**

**présenté en vue d'obtenir**

**le DIPLÔME D'INGÉNIEUR CNAM**

**Spécialité : Géomètre et Topographe**

**par**

**Mailys BUCHER**

---

**Combinaison des mesures GNSS et topométriques dans  
un réseau d'auscultation**

**Soutenu le 06 juillet 2015**

---

**JURY**

**PRESIDENT : M. Jérémie ROBERT**

**Président du jury**

**MEMBRES : M. Stéphane DURAND**  
M. Laurent MOREL  
M. Frédéric DURAND  
Mme Joëlle DUROY  
M. Philippe REBUT

**Maître de stage**  
Professeur référent

## Remerciements

Pour ce premier travail de longue haleine j'ai eu la chance de bénéficier de très bonnes conditions de travail. J'ai en effet été extrêmement bien encadrée et entourée. Je dois cela à plusieurs personnes que je tiens à remercier.

Avant tout, je remercie tout particulièrement et très sincèrement mon maître de stage Stéphane DURAND. Il a su m'accompagner tout au long de ce travail et rester disponible en toutes circonstances. Son soutien m'a permis de faire face aux difficultés rencontrées durant ces cinq mois.

Je tiens également à remercier mon professeur référent Laurent MOREL pour ses conseils, son recul et ses avis critiques.

Je remercie aussi l'ensemble des membres du laboratoire Géomatique et Foncier de l'ESGT ainsi que l'ensemble des professeurs rencontrés tout au long de ces trois années de formation.

De plus, je pense que mes camarades et amis de la T0 méritent des remerciements très spéciaux pour tous ces moments partagés au fil de ces cinq mois. Donc merci à Adélie, Jérémy, Lucie, Maryem et Olivier.

Enfin, je remercie mes parents, ma sœur et Thomas Avenal pour m'avoir supportée et soutenue tout ce temps.

## Liste des notations

### Opérateurs :

**E(.)** : opérateur espérance

**Var(.)** : opérateur variance

### Indices, exposants et accents

.<sub>topo</sub> : matrices relatives à l'ajustement topométrique

.<sub>GNSS</sub> : matrices relatives à l'ajustement GNSS

.<sub>comb1</sub> : matrices relatives au cumul des équations normales

.<sub>comb2</sub> : matrices relatives à l'intégration de vecteurs GNSS

.<sub>vect</sub> : matrices relatives aux vecteurs GNSS

.<sup>T</sup> : transposée

.<sup>-1</sup> : inverse

.<sup>0</sup> : valeur approchée

... : valeur connue

### Notations :

A : jacobienne de  $f$

Az : angle zénithal

A<sub>i</sub> : matrice A relative au groupe d'observations  $i$

B : matrice permettant le passage des équations d'observations aux équations de condition

c : second membre de l'équation d'Helmert, vecteur colonne

c<sub>k</sub> :  $k$ -ième élément de c (HVCE)

c<sub>k</sub> :  $k$ -ième élément de C<sub>VCE</sub> (LSVCE)

C : second membre de l'équation normale

C<sub>VCE</sub> : second membre de l'équation normale dans le cas de la LSVCE

D<sub>nij</sub> : dénivelée du point  $i$  vers le point  $j$

Dp : distance pente

Dx : différence de la première composante des coordonnées cartésiennes de deux points

Dy : différence de la seconde composante des coordonnées cartésiennes de deux points

Dz : différence de la troisième composante des coordonnées cartésiennes de deux points

h<sub>ij</sub> : élément de la matrice H de la HVCE,  $i$ -ème ligne  $j$ -ème colonne

H : matrice de passage des coordonnées des points au vecteurs GNSS entre ces points

H1 : partie de H relative aux coordonnées inconnues

H2 : partie de H relative aux coordonnées connues

$H_i$  : altitude du point  $i$

$H_j$  : altitude du point  $j$

$H_z$  : lecture horizontale

$I_3$  : matrice identité en dimension 3

$L$  : vecteur des observations

$L_0$  : vecteur des valeurs des observations calculées à partir du modèle et des valeurs approchées des inconnues

$m$  : nombre d'inconnues

$M$  : matrice de passage entre deux systèmes de coordonnées d'un même système de référence

$n$  : nombre d'observations

$n_{kl}$  : élément de la  $k$ -ième ligne  $i$ -ème colonne de  $N_{VCE}$

$N$  : matrice normale

$N_i$  : matrice normale associée au groupe d'observations  $i$

$N_{VCE}$  : matrice normale dans le cadre de la LSVCE

$P$  : matrice des poids

$P_i$  : matrice des poids associée au groupe d'observations  $i$

$P_A^\perp$  : projecteur orthogonal faisant le lien entre les équations d'observation et les équations de condition

$Q_0$  : partie constante de la matrice de covariance associée aux observations

$Q_i$  : matrice de covariance associée au groupe d'observations  $i$

$Q_L$  : matrice de covariance associée aux observations

$R(X)$  : défaut de linéarité

$t$  : vecteur faisant le lien entre les équations d'observations aux équations de condition (LSVCE)

$v$  : vecteur des erreurs accidentelles

$\text{vect}_{ij}$  : vecteur GNSS entre les points  $i$  et  $j$

$V$  : vecteur des résidus

$V_i$  : vecteur des résidus associé au groupe d'observations  $i$

$X$  : vecteur des inconnues

$\hat{X}$  : solution des moindres carrés

$X_0$  : vecteur des valeurs approchées des inconnues

$x_i$  : première composante des coordonnées cartésiennes du point  $i$

$y_i$  : seconde composante des coordonnées cartésiennes du point  $i$

$Y$  : vecteur contenant les observations et les termes constants après linéarisation du problème

$Y_i$  : vecteur  $Y$  relatif au groupe d'observations  $i$

$z_i$  : troisième composante des coordonnées cartésiennes du point  $i$

$\sigma_k^2$  : composante de la variance associée au groupe d'observations  $k$

# Table des matières

Remerciements .....	2
Liste des notations.....	3
Table des matières.....	5
Introduction .....	7
<b>Partie I : Apports de la combinaison.....</b>	<b>9</b>
<b>Chapitre 1 : Moindres carrés, principes généraux et notations .....</b>	<b>9</b>
I.1.1 - Poser le problème.....	9
I.1.2 - Linéarisation du problème.....	9
I.1.3 - Matrice de covariance associée aux observations.....	10
I.1.4 - Solution des moindres carrés .....	10
I.1.5 - Indicateurs de la qualité du traitement .....	10
I.1.6 - Précisions.....	10
I.1.7 - Comportement statistique des erreurs.....	11
I.1.8 - Processus itératif global.....	11
<b>Chapitre 2 : La combinaison des observations, deux calculs.....</b>	<b>12</b>
I.2.1 - Outils de calcul utilisés .....	12
I.2.1.1 - Pour les mesures topographiques.....	12
I.2.1.2 - Pour les données GNSS .....	12
I.2.2 - Travaux antérieurs.....	13
I.2.2.1 - Principe du calcul.....	13
I.2.2.2 - Mise en œuvre .....	14
I.2.2.3 - Résultats et conclusions .....	15
I.2.3 - Apports à la réflexion .....	16
I.2.4 - Équivalence des deux calculs .....	17
I.2.4.1 - Dans les conditions des travaux précédents.....	17
I.2.4.2 - Généralisation de l'équivalence.....	20
I.2.4.3 - Invariance des résultats face au type de coordonnées .....	25
I.2.5 - Résultats obtenus et conclusions .....	26
I.2.5.1 - Résultats obtenus.....	26
<b>Chapitre 3 : Complexification du réseau .....</b>	<b>28</b>
I.3.1 - Résultats antérieurs.....	28
I.3.2 - Simulation mise en œuvre.....	29
<b>Partie II : La pondération relative des observations .....</b>	<b>32</b>
<b>Chapitre 1 : Présentation de la VCE .....</b>	<b>32</b>
II.1.1 - Présentation .....	32
II.1.2 - Le modèle stochastique .....	32

<b>Chapitre 2 : Tour d’horizon sur la VCE</b> .....	34
II.2.1 - Estimateur d’Helmert .....	34
II.2.2 - Autres estimateurs équivalents .....	36
II.2.2.1 - BIQUE.....	36
II.2.2.2 - MINQUE .....	36
II.2.3 - Estimation par maximum de vraisemblance .....	37
II.2.3.1 - ML.....	37
II.2.3.2 - REML.....	37
II.2.4 - LSVCE .....	38
<b>Chapitre 3 : Illustration</b> .....	40
II.3.1 - Exemple utilisé .....	40
II.3.2 - Modèle stochastique .....	41
II.3.3 - Application de la HVCE .....	42
II.3.4 - Application de la LSVCE.....	42
II.3.5 - Influence sur la solution .....	43
II.3.6 - Extension au cas non linéaire.....	44
<b>Chapitre 4 : Mise en œuvre de la VCE</b> .....	45
II.4.1 - Présentation du chantier.....	45
II.4.2 - Traitement des données.....	47
II.4.3 - Mise en œuvre de la VCE sur notre jeu de données .....	48
II.4.3.1 - Choix des méthodes .....	48
II.4.3.2 - Mise en œuvre de la LSVCE.....	48
II.4.3.3 - Comparaison à la HVCE.....	49
II.4.3.4 - Comparaison à une repondération manuelle.....	50
Conclusion.....	54
Bibliographie.....	56
Table des figures .....	58
Table des tableaux.....	59
Table des équations .....	59
Table des annexes.....	59

## Introduction

Par définition, selon le CNRTL (Centre National des Ressources Textuelles et Lexicales), combiner consiste à associer, assembler, suivant des rapports déterminés, deux ou plusieurs choses en vue d'un résultat précis. En géomatique, la combinaison de techniques d'observation et de mesure est largement utilisée notamment en matière de mesure de déformation (Helz, 2005), (Vasco *et al.*, 2007), (Baszkiewicz *et al.*, 2014).

Dans ce travail nous nous sommes attachés à l'étude de la combinaison des mesures topométriques et GNSS (Global Navigation Satellite System) dans le cadre de l'auscultation et de la surveillance d'ouvrages, à ses intérêts et ses contraintes.

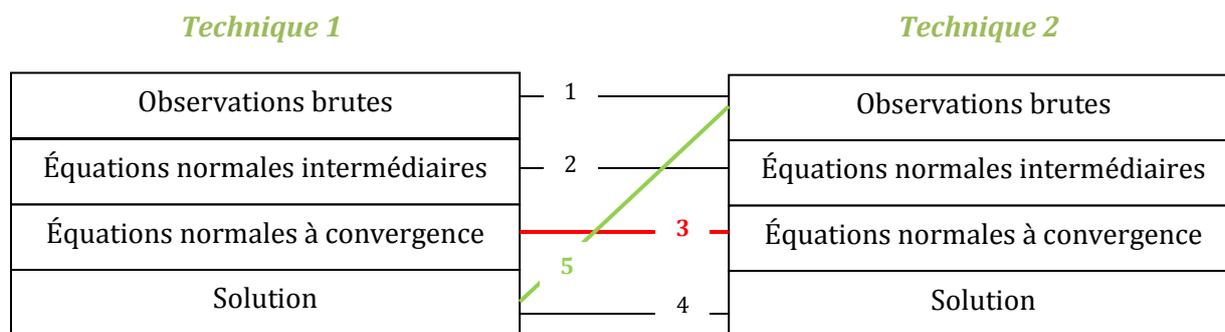
Cette réflexion a été développée au cours d'un TFE (Travail de Fin d'Études) dans le cadre du diplôme ingénieur de l'ESGT (École Supérieure des Géomètres et Topographes) et a été menée au sein de l'équipe L2G (Équipe de Géodésie et Géomatique) du GeF (laboratoire Géomatique et Foncier) au Mans.

La problématique de la combinaison des mesures topométriques et GNSS fait partie, depuis plusieurs années, des réflexions menées par le L2G. Notre étude s'inscrit ainsi dans la continuité de trois travaux principaux : la thèse de Benoît Legru conduite entre 2007 et 2010, le TFE d'Angélique Azzini réalisé en 2010 et le TFE de Clément Guérin lui aussi réalisé en 2010.

Avant de donner un aperçu de ces travaux, il est essentiel de bien avoir à l'esprit qu'il n'y a pas une mais plusieurs procédures envisageables pour combiner des méthodes d'observation. Ces niveaux de combinaison sont distingués en fonction de l'étape de calcul à laquelle ils interviennent pour chacune des techniques.

Comme le montre la Figure 1, différentes méthodes sont possibles pour combiner deux techniques de mesure :

1. au niveau des mesures brutes, mais cela est très difficile dans le cas d'observations différentes par essence comme c'est le cas pour les méthodes GNSS et topométriques. À notre connaissance, ce type de combinaison n'a pas été mis en œuvre jusqu'alors ;
2. au niveau des équations normales à chaque itération ;
3. au niveau des équations normales à convergence. Ce type de combinaison est très utilisé en géodésie, notamment pour la création de systèmes de référence (Altamimi *et al.*, 2011). C'est cette dernière option qui a été retenue dans les études précédentes. Un cumul des équations normales est réalisé et la solution tient naturellement compte des deux types d'observations ;
4. au niveau des positions finales, cette combinaison consiste en une moyenne pondérée des résultats issus des différentes techniques ;
5. enfin, il est possible de traiter les résultats d'une technique comme des observations et de les combiner avec les mesures d'une autre technique. Dans le cas de nos types d'observations cela revient à intégrer un vecteur GNSS parmi les mesures brutes topométriques et d'ajuster ces observations en une seule fois.



**Figure 1** : Niveaux de combinaison possibles et en rouge celle mise en œuvre en 2010, en vert celle mise en œuvre cette année.

Les travaux précédents mettaient en œuvre le cumul des équations normales à convergence propres à chaque technique de mesure. La démarche alors employée pour mettre en lumière les apports de la combinaison des méthodes d'observations a été tout d'abord la simulation de réseaux à trois points, permettant l'étude de la précision du positionnement planimétrique analysée au travers de la valeur du demi grand-axe. Puis, une session de mesurage a été réalisée.

La conclusion principale de ces études est que la combinaison permet, dans une certaine configuration, d'améliorer le positionnement planimétrique en termes de précision.

Pour poursuivre cette réflexion, nous avons envisagé deux pistes de recherche.

Pour commencer, nous avons cherché à mettre en place un nouveau type de calcul pour la combinaison. Nous avons choisi d'ajuster des vecteurs GNSS et des mesures topométriques (méthode 5 de la Figure 1). L'idée est alors de comparer les résultats donnés par ce type de calcul par rapport à ceux déjà obtenus par le cumul d'équations normales.

Ensuite, une problématique récurrente de la combinaison de mesures est la pondération des groupes d'observations les uns par rapport aux autres. Nous avons donc cherché à résoudre cette difficulté en étudiant la VCE (Variance Component Estimation), méthode largement utilisée en géomatique. Notre objectif était alors de répertorier les différents types de VCE existants et d'en appliquer un ou plusieurs à notre problématique.

La réflexion autour de ce sujet sera développée en sept chapitres. Tout d'abord, nous présenterons la méthode des moindres carrés et expliciterons nos notations.

Ensuite, nous reviendrons sur les travaux antérieurs et détaillerons la démarche qui a été la nôtre. Nous pourrions alors montrer que notre façon de procéder est équivalente à celle des travaux précédents dans les conditions utilisées alors.

Nous poursuivrons la réflexion en étendant les résultats obtenus au cas de réseaux de taille et géométrie aléatoires.

Suite à cela nous nous placerons dans le cas où nous avons des observations. Nous aborderons alors la problématique des pondérations relatives des observations GNSS et topométriques. La solution employée pour aborder cela est la VCE que nous présenterons.

Nous réaliserons ensuite un inventaire des principales méthodes de VCE existantes et utilisées.

Puis, nous illustrerons sur un exemple simple les deux méthodes de VCE retenues pour notre étude.

Enfin, nous les mettrons en œuvre sur un jeu de données réelles.

## Partie I : Apports de la combinaison

### Chapitre 1 : Moindres carrés, principes généraux et notations

Avant tout il est essentiel de faire quelques rappels sur la méthode des moindres carrés afin, notamment, de familiariser le lecteur avec les notations employées tout au long de ce rapport.

La méthode des moindres carrés est une méthode d'optimisation qui permet la résolution de problèmes où les observations sont redondantes. Nous emploierons une écriture matricielle plus adaptée à ce type de problèmes.

#### I.1.1 - Poser le problème

Un problème d'ajustement par moindres carrés revêt la forme suivante :  $n$  observations contenues dans le vecteur  $L$  sont liées aux  $m$  inconnues contenues dans le vecteur  $X$  par une équation d'observation ( $f$ ), aux erreurs accidentelles sur la mesure près, rassemblées dans le vecteur  $v$ .

Cela nous donne donc (modèle de Gauss-Markov) :

$$L = f(X) + v \quad (1)$$

Dans le cas où la fonction  $f$  n'est pas linéaire, il convient de passer par une étape de linéarisation.

#### I.1.2 - Linéarisation du problème

Pour linéariser la fonction  $f$  nous utilisons un développement de Taylor à l'ordre 1, soit :

$$f(X) \approx f(X_0) + f'(X_0)(X - X_0)$$

Où  $X_0$  est le vecteur des valeurs approchées des  $m$  inconnues du problème et  $f'(X_0)$  est la jacobienne de  $f$  en  $X_0$ . Nous posons alors  $A = f'(X_0)$  de taille  $(n, m)$ .

Posons alors  $L_0 = f(X_0)$  le terme d'ordre 0 du développement de Taylor. Cela correspond aux valeurs des observations calculées à partir du modèle et des valeurs approchées des inconnues.

Nous pouvons en déduire :

$$L - L_0 = A(X - X_0) + v$$

D'où, avec  $Y = L - L_0$  :

$$Y = A(X - X_0) + v \quad (2)$$

Par ailleurs, lors de la linéarisation, la différence entre  $f$  et sa « tangente » en  $X_0$  est appelée défaut de linéarité et s'exprime :

$$R(X) = f(X) - f(X_0) - A(X - X_0) \quad (3)$$

Pour pallier ce défaut, le problème est résolu de manière itérative en choisissant un critère de convergence. Le défaut de linéarité est considéré négligeable dès que le critère de convergence est respecté pour toutes les inconnues.

### I.1.3 - Matrice de covariance associée aux observations

La matrice de covariance associée aux observations  $Q_L$  est formée à partir des précisions *a priori* sur les observations.

$Q_L$  est connue à un réel  $\sigma_0^2$  près, appelé facteur unitaire de variance.

Nous pouvons alors définir la matrice des poids  $P$ , inverse de la matrice de covariance :

$$P = Q_L^{-1} \quad (4)$$

### I.1.4 - Solution des moindres carrés

La solution des moindres carrés s'exprime au travers du système d'équations normales :

$$N(X - X_0) = C \quad (5)$$

Avec :  $N = A^T P A$  de taille  $(m, m)$ , la matrice normale ;

$C = A^T P Y$  de taille  $m$ , le second membre de l'équation normale.

Si le problème est correctement posé,  $N$  est une matrice symétrique définie positive et est donc inversible. Le système admet alors une solution unique que nous noterons  $\hat{X}$  et qui est un estimateur sans biais de  $X$  :

$$(\hat{X} - X_0) = N^{-1} C \quad (6)$$

### I.1.5 - Indicateurs de la qualité du traitement

À partir de la solution des moindres carrés le vecteur des résidus s'exprime :

$$V = Y - A(\hat{X} - X_0) \quad (7)$$

Il représente l'estimation, à partir des observations, des erreurs accidentelles sur les mesures.

À partir de ce vecteur des résidus il est possible d'obtenir l'estimateur du facteur unitaire de variance  $\hat{\sigma}_0^2$ . Cet estimateur est sans biais et s'exprime :

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n - m}$$

### I.1.6 - Précisions

La matrice de covariance associée à l'estimateur des moindres carrés  $\hat{X}$  est notée  $Q_{\hat{X}}$  et s'exprime :

$$Q_{\hat{X}} = \sigma_0^2 N^{-1} \quad (8)$$

Notons  $\hat{\omega}_i^2$  l'élément diagonal des  $i$ -ème ligne et colonne et  $\hat{\omega}_{ij}$  l'élément de la  $i$ -ème ligne et  $j$ -ème colonne.

La précision sur la valeur estimée  $\hat{x}_i$  de la  $i$ -ème inconnue du problème est donnée par la racine carrée de l'élément diagonal de  $Q_{\hat{X}}$  correspondant :

$$\sigma_0 \hat{\omega}_i \quad (9)$$

De plus, les éléments de  $Q_{\hat{X}}$  nous permettent de déterminer les régions de confiance 1D (une dimension) et 2D (deux dimensions).

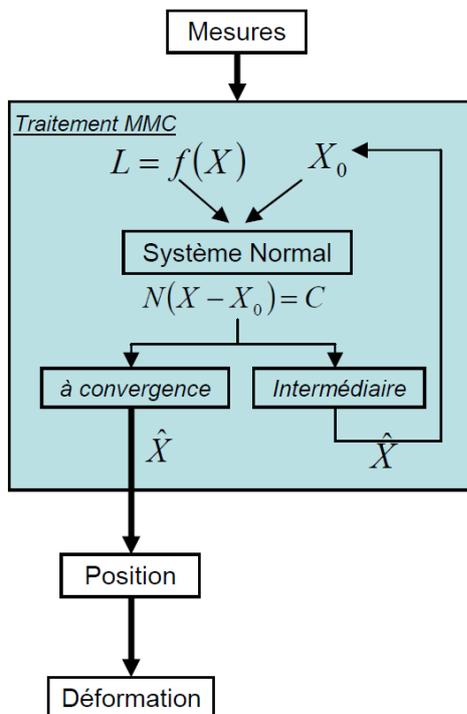
Dans le cas d'une région 2D nous parlons d'ellipse de confiance. Les éléments constitutifs de cette ellipse sont son demi-grand axe  $a$ , son demi-petit axe  $b$  et son orientation  $\varphi$ .

### 1.1.7 - Comportement statistique des erreurs

Dans la méthode des moindres carrés, nous considérons qu'il n'y a ni faute ni erreur systématique dans les mesures. Les seules erreurs présentes sont les erreurs accidentelles qui suivent en général une loi normale centrée et ont pour variance  $\sigma_0^2 Q_L$ , ce qui peut être noté :  $N(0, \sigma_0^2 Q_L)$ .

Cette hypothèse permet la réalisation d'un certain nombre de tests permettant la validation de l'ajustement.

### 1.1.8 - Processus itératif global



**Figure 2** : Schéma récapitulatif du déroulement d'un ajustement par la Méthode des Moindres Carrés dans le cas général non linéaire.  
Source : (Azzini *et al.*, 2010)

La résolution d'un problème d'ajustement par la méthode des moindres carrés dans le cas non linéaire est itérative.

Les principales étapes de l'ajustement sont représentées à la Figure 2.

Le traitement commence avec les équations d'observation et le choix de valeurs approchées pour les paramètres à estimer. Cela nous permet de construire les matrices A et Y et d'en déduire le système normal et la solution intermédiaire  $\hat{X}$  qui en découle. Cette solution est alors comparée au vecteur des valeurs approchées  $X_0$ . Si l'écart entre les deux est supérieur au critère de convergence alors nous associons à  $X_0$  la valeur de  $\hat{X}$  et recommençons le traitement.

Des itérations sont réalisées jusqu'à ce que le critère de convergence soit respecté. Dès lors qu'il l'est, le défaut de linéarité est négligeable, le système normal obtenu est dit à convergence et la solution  $\hat{X}$  qui en résulte est la solution finale des moindres carrés.

Le lecteur intéressé pourra se reporter à (Sillard, 2001) et (Durand, 2015) pour de plus amples informations.

## Chapitre 2 : La combinaison des observations, deux calculs

Plusieurs calculs sont envisageables pour combiner des mesures. Nous allons ici présenter les deux calculs qui ont été choisis et utilisés dans le cadre de notre étude : la combinaison au niveau des équations normales à convergence, mise en œuvre en 2010, et l'intégration d'un vecteur GNSS que nous avons mise en œuvre cette année.

### I.2.1 - Outils de calcul utilisés

#### I.2.1.1 - Pour les mesures topographiques

Les observations topométriques à ajuster sont les lectures horizontales ( $H_z$ ), les angles zénithaux ( $A_z$ ) et les distances selon la pente ( $D_p$ ).

Les matrices nécessaires à l'ajustement de ce type d'observations sont obtenues dans notre étude, en ajustement ou en simulation, à l'aide de CoMeT (Compensation de Mesures Topométriques). Il s'agit d'un logiciel d'ajustement d'observations topométriques par la méthode des moindres carrés développé au sein de l'équipe L2G et dont plus de détails sont disponibles dans (Durand *et al.*, 2012) et (Guérin, 2010).

Ce logiciel réalise l'ajustement des mesures en trois dimensions. Ce type de modélisation est utilisé dans certains logiciels professionnels tels que Geolab (BitWise Ideas Inc., 2001) ou Columbus (Best-Fit Computing, 2012-2013).

Il permet aussi l'export des différentes matrices intervenant dans le calcul :  $A$ ,  $Y$ ,  $\hat{X}$ ,  $X_0$ ,  $V$ ,  $N$ ,  $C$  et  $P$  (équations (2) à (7)).

#### I.2.1.2 - Pour les données GNSS

Le traitement GNSS, quant à lui, a été effectué à l'aide de scripts développés par Benoît Legru sous Matlab (Legru, 2011).

Les observations à traiter sont les mesures de phase L1 et le modèle utilisé est celui des doubles différences qui permet d'avoir des équations d'observation relativement simples. Ce modèle consiste en une combinaison des observations de deux satellites et deux récepteurs GNSS observant simultanément. Il est d'autant plus intéressant que la ligne de base entre les récepteurs est courte. Or, notre étude est à replacer dans un contexte d'auscultation impliquant de courtes distances entre les stations. Ce modèle est donc particulièrement adapté dans notre cas.

Le modèle utilisé peut être exprimé de la façon suivante (Durand *et al.*, 2004) :

$$\Delta\Phi = \Delta\rho - \lambda\Delta N + \Delta t_{tropo} - \Delta i_{iono} + \Delta t_{rajet} + \Delta c_{centre\ phase} + e$$

Avec :

- $\Delta\Phi$  est la double différence des observations de phase. Notons,  $i$  et  $j$  les deux récepteurs et  $k$  et  $l$  les deux satellites. Alors :  $\Delta\Phi = \Phi_i^k - \Phi_j^k - \Phi_i^l + \Phi_j^l$  où  $\Phi_i^k$  est la mesure de phase entre un satellite  $k$  et un récepteur  $i$  ;
- $\Delta\rho$  est la double différence des distances géométriques séparant satellites et récepteurs ;

- $\lambda$  est la longueur d'onde de la porteuse GNSS sur laquelle les mesures sont faites ;
- $\Delta N$  est le terme d'ambiguïtés entières associé à la double différence de phase  $\Delta\Phi$  ;
- $\Delta t_{topo}$  et  $\Delta t_{iono}$  sont les doubles différences respectivement sur les retards troposphériques et ionosphériques ;
- $\Delta t_{trajet}$  et  $\Delta t_{centre\ phase}$  sont les doubles différences respectivement sur les erreurs de trajet multiple et de variation de position du centre de phase ;
- $e$  est la double différence des erreurs accidentelles sur les mesures de phase.

Les inconnues du problème sont alors les coordonnées des récepteurs GNSS  $i$  et  $j$  contenues dans le terme de distance géométrique, et la valeur des ambiguïtés entières  $\Delta N$  sur les doubles différences. Nous considérons les coordonnées des satellites  $k$  et  $l$ , également contenues dans le terme de distance géométrique, comme connues.

Dans le cadre des simulations, les termes  $\Delta t_{topo}$ ,  $\Delta t_{iono}$  sont négligés, ainsi que les termes de décalage de centre de phase et de multitrajet. Cette approximation peut être considérée comme valable car les longueurs des lignes de base sur lesquelles nous sommes amenés à travailler sont courtes.

Il avait également été considéré au cours de la simulation qu'il n'y avait pas de terme d'ambiguïté, c'est-à-dire que les observations étaient non ambiguës. Les seules inconnues restantes pour la simulation sont donc les coordonnées des récepteurs.

## 1.2.2 - Travaux antérieurs

### 1.2.2.1 - Principe du calcul

Benoît Legru et Angélique Azzini ont travaillé sur la problématique de la combinaison des mesures GNSS et topométriques. Le type de combinaison qui avait été choisi était alors le cumul des équations normales.

Ce calcul consiste tout d'abord en l'ajustement des mesures topométriques et GNSS en parallèle jusqu'à obtention des systèmes normaux à convergence (équation (5)). Le premier ajustement nous permet donc d'obtenir les matrices  $\hat{X}_{topo}$ ,  $N_{topo}$ ,  $C_{topo}$ , et le second les matrices  $\hat{X}_{GNSS}$ ,  $N_{GNSS}$ ,  $C_{GNSS}$

Ensuite, nous réalisons le cumul des équations normales de la manière suivante :

$$N_{comb1} = N_{topo} + N_{GNSS}$$

$$C_{comb1} = C_{topo} + C_{GNSS}$$

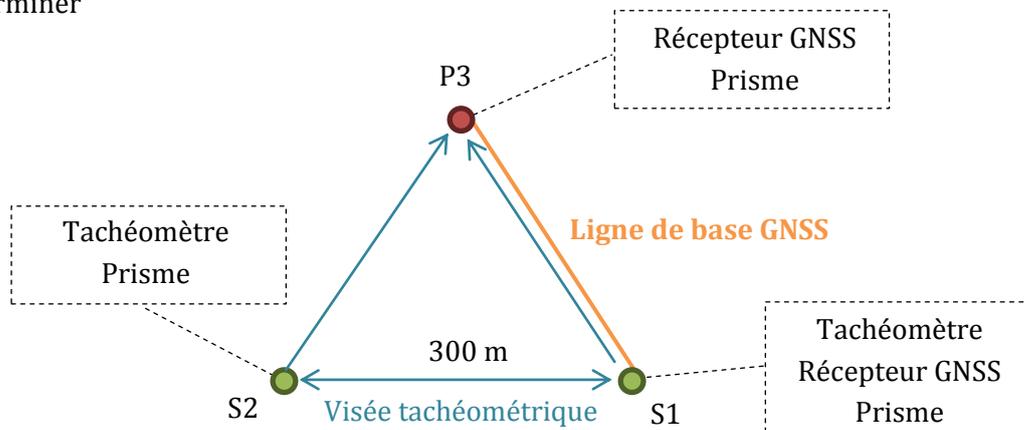
$$\hat{X}_{comb1} = N_{comb1}^{-1} C_{comb1}$$

Remarquons que les matrices relatives à la topométrie et au GNSS ne sont pas forcément de la même taille. Les sommes présentées ici sont donc réalisées en réécrivant les matrices pour qu'elles correspondent aux mêmes inconnues dans le même ordre. L'idée dans cette réécriture est de compléter les matrices par des zéros lorsqu'une inconnue est ajoutée.

### 1.2.2.2 - Mise en œuvre

Nous avons cherché à retrouver les résultats et conclusions obtenus dans les travaux précédents. Pour cela, nous avons réutilisé les scripts de Benoît Legru et suivi la même démarche.

Nous travaillons sur un réseau à trois points S1, S2 et P3 parmi lesquels seul P3 est à déterminer



**Figure 3 :** Schéma du réseau à trois points utilisé. La ligne de base S1-P3, en orange, est mesurée et les tachéomètres mesurent les lectures horizontales, les angles zénithaux et les distances pentes des visées représentées en bleu.

Comme schématisé sur la Figure 3, S1 est stationné par un tachéomètre mais aussi par un récepteur GNSS. S2 est, quant à lui, stationné uniquement par un tachéomètre et P3 par un récepteur GNSS. Notons de plus que S1 et S2 sont distants de 300 m.

D'autre part, les observations réalisées sont les suivantes :

- $S2 \rightarrow S1$  (Hz, Az et Dp) ;
- $S2 \rightarrow P3$  (Hz, Az et Dp) ;
- $S1 \rightarrow S2$  (Hz), visée d'orientation seulement ;
- $S1 \rightarrow P3$  (Hz, Az et Dp) ;
- $S1 \rightarrow P3$  ligne de base GNSS.

À partir de ce modèle de réseau à trois points nous pouvons en imaginer une infinité. En effet, pour cela il suffit de faire varier la position du point P3 ou encore la distance entre les deux stations S1 et S2.

Nous nous sommes limités au cas où S1 et S2 sont distants de 300 m et avons réalisé plusieurs simulations dans lesquelles nous avons fait varier la position planimétrique de P3 de sorte qu'il parcourt une surface de  $1 \text{ km}^2$  autour des points S1 et S2.

Concrètement, Les coordonnées planes de P3 parcourent toutes deux l'intervalle  $[-500 \text{ m}, 500 \text{ m}]$  centré sur S1 par pas de 5 m.

Nous avons alors étudié la valeur du demi-grand axe de l'ellipse de confiance à 95% associée aux coordonnées planes de P3 en fonction de sa position.

Pour réaliser une simulation avec la méthode des moindres carrés, aucune observation n'est nécessaire. Il suffit d'utiliser des coordonnées approchées pour chaque point. La simulation de

l'ajustement GNSS nécessite en supplément les éphémérides des satellites. Nous avons utilisé les éphémérides radiodiffusées GPS de la station MAN2 et datées du 10 février 2015.

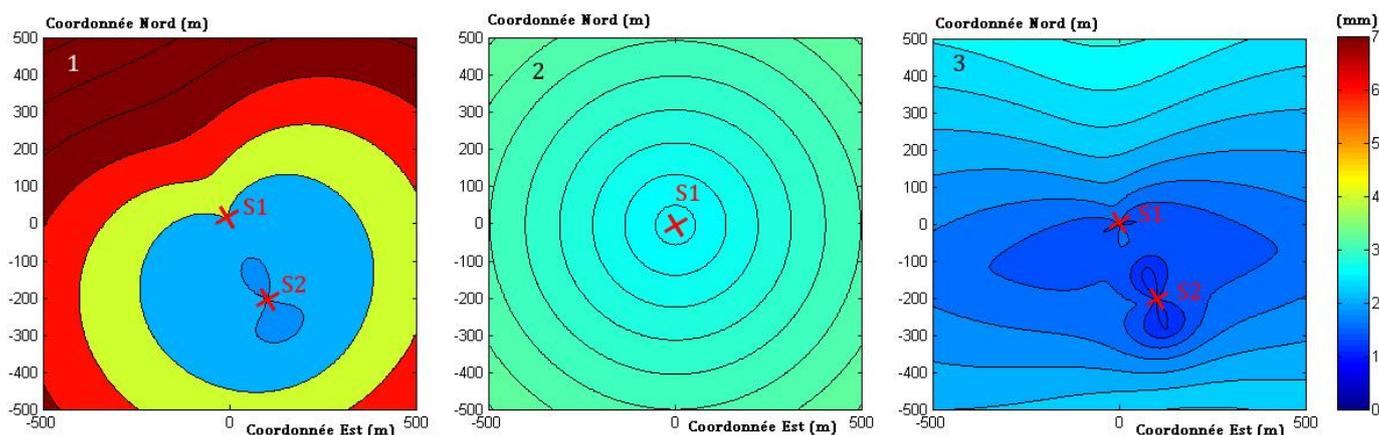
Il est cependant nécessaire de choisir les poids à associer aux observations, nous avons choisi pour la topométrie :

- 3 dmgon sur les angles  $H_z$  et  $A_z$  ;
- $\pm 1 \text{ mm} \pm 1 \text{ ppm}$  sur les distances  $D_p$  ;
- 0,1 mm de précision de centrage.

Étant donné que nous réalisons une étude relative il n'est pas nécessaire que les pondérations utilisées soient extrêmement réalistes.

Pour les mesures GNSS nous avons réalisé une simulation à partir du fichier de navigation. Cela nous a permis d'obtenir la matrice de covariance simulée associée à un vecteur GNSS. Nous avons ensuite affecté un coefficient à cette matrice de sorte que la précision du positionnement soit d'environ 2 mm + 2 ppm comme cela avait été fait en 2010. Cette démarche est expliquée et justifiée dans (Blewitt, 1997, p.44).

### 1.2.2.3 - Résultats et conclusions



**Figure 4 :** Résultats de la simulation de la combinaison du GNSS et de la topométrie par cumul des équations normales, distance de 300 m entre S1 et S2. Variation en mm de la valeur du demi-grand axe de l'ellipse de confiance à 95% sur les coordonnées planes du point P3 en fonction de sa position.

**1-** dans le cas de la topométrie seule, **2-** dans le cas du GNSS seul et **3-** dans le cas des deux techniques combinées par cumul des équations normales. Les valeurs sont en millimètres et en coordonnées locales.

Nous retrouvons ici les résultats obtenus dans les travaux précédents (Azzini *et al.*, 2010). Comme le montre la Figure 4, dans le cas de la topométrie seule, les valeurs obtenues pour le demi-grand axe de l'ellipse de confiance à 95% associée au point P3 varient de 1,7 mm à proximité de S2 à 12 mm en s'éloignant de S1. Nous remarquons une symétrie d'axe S1-S2. De plus la précision se dégrade un peu plus vite suivant cet axe.

Dans le cas du GNSS, la variation de ce même paramètre est moins importante et s'échelonne de 2,5 mm en étant proche de S1 à 3,3 mm en s'éloignant. La précision se dégrade proportionnellement à la distance, on observe donc un phénomène radial.

Si maintenant nous considérons les résultats de la combinaison des deux techniques d'observation, nous pouvons constater que la valeur du demi-grand axe de l'ellipse de confiance

à 95% associée aux coordonnées planes de P3 est au minimum de 1,2 mm autour de S2 et atteint 2,8 mm en s'éloignant des stations.

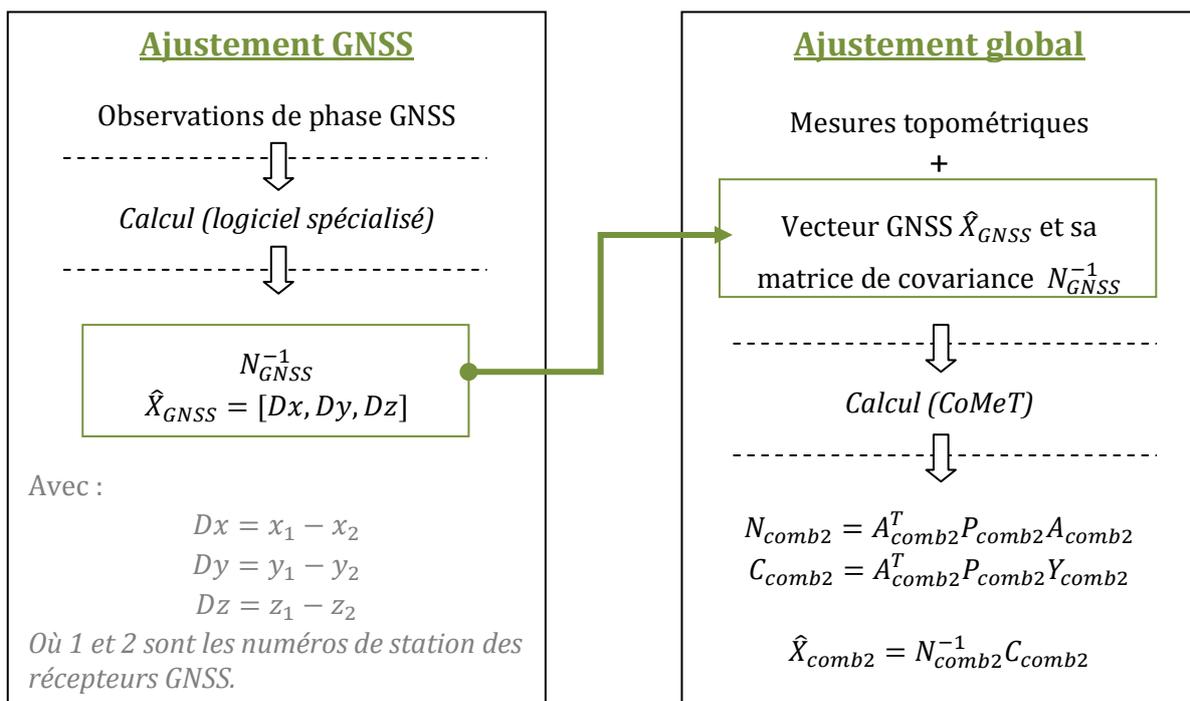
Finalement, la combinaison des observations, dans ce cas particulier de réseau à trois points, permet d'obtenir des améliorations allant de 20% à proximité des stations à 40% en s'en éloignant. Notons que nous considérons ici le pourcentage d'amélioration de la combinaison par rapport à la technique (topométrie ou GNSS) donnant les meilleurs résultats pour une position donnée de P3.

### 1.2.3 - Apports à la réflexion

Afin de poursuivre la réflexion nous avons combiné le vecteur issu de l'ajustement GNSS avec les mesures topométriques (méthode 5 de la Figure 1).

Nous allons formuler notre réflexion en coordonnées cartésiennes. En effet, de cette manière les expressions seront plus simples. Nous montrerons ensuite que le type de coordonnées choisi n'a pas d'influence sur les résultats.

Ce calcul se révèle très intéressant pour deux raisons principales. Tout d'abord, les données GNSS sont traitées grâce à un logiciel spécialisé comme par exemple Leica Geo Office (LGO) (Leica geosystems, Online Help version 8.3) ou encore GAMIT (Herring *et al.*, 2010) et non au travers de scripts Matlab. Cela permet de s'affranchir du développement de tels scripts mais aussi d'avoir accès à des modélisations fines pour l'ajustement des observations de phase. Ensuite, CoMeT est capable d'intégrer un vecteur GNSS parmi les observations topométriques à ajuster. Ce logiciel permet également de saisir la matrice de covariance associée qui servira à la construction de la matrice des poids.



**Figure 5 :** Schématisation de l'intégration d'un vecteur GNSS

Comme le montre la Figure 5, La mise en œuvre de cette combinaison se déroule en deux temps. Tout d'abord nous ajustons les mesures GNSS à l'aide d'un logiciel spécialisé, LGO dans notre cas, qui nous permet d'obtenir le vecteur  $\hat{X}_{GNSS}$  ainsi que la matrice de covariance qui lui est associée  $N_{GNSS}^{-1}$ . En simulation nous utilisons des scripts Matlab que nous avons développé pour obtenir ces matrices.

Ensuite, nous utilisons ce vecteur et les mesures topométriques en tant qu'observations d'un second ajustement réalisé avec CoMeT.

Nous obtenons alors la solution ajustée  $\hat{X}_{comb2}$  tenant compte des deux techniques d'observation.

Cette combinaison est d'autant plus intéressante que nous pouvons montrer qu'elle est équivalente à la précédente.

## 1.2.4 - Équivalence des deux calculs

### 1.2.4.1 - Dans les conditions des travaux précédents

Notons  $\cdot_{topo}$  les matrices relatives à l'ajustement des mesures topométriques seules,  $\cdot_{GNSS}$  celles relatives à l'ajustement des mesures GNSS seules,  $\cdot_{comb1}$  celles relatives à la combinaison par cumul d'équations normales et  $\cdot_{comb2}$  celles relatives à la combinaison par ajout du vecteur GNSS en tant qu'observation. Les notations utilisées sont celles présentées dans la Partie I :

Dans ce rapport nous proposons deux façons de combiner les observations GNSS et les mesures topométriques :

- le cumul des systèmes normaux à convergence propres à chaque technique (comb1) ;
- la combinaison dans un unique calcul du résultat de l'ajustement GNSS, le vecteur GNSS, et des données brutes topométriques (comb2).

Nous pouvons montrer que ces deux niveaux de combinaison sont équivalents. L'équivalence sera prouvée si :

- les matrices normales sont identiques, c'est-à-dire si :  $N_{comb1} = N_{comb2}$  ;
- les seconds membres des systèmes normaux sont égaux, soit si :  $C_{comb1} = C_{comb2}$ .

Dans le cas du cumul d'équations normales nous aurons :

$$\begin{aligned} N_{comb1} &= N_{topo} + N_{GNSS} \\ C_{comb1} &= C_{topo} + C_{GNSS} \\ \hat{X}_{comb1} - X_{comb1}^0 &= N_{comb1}^{-1} C_{comb1} \end{aligned}$$

Comme dans (Durand, 2015) les valeurs approchées propres à la combinaison  $X_{comb1}^0$  sont obtenues en utilisant les valeurs ajustées de chaque méthode.

Maintenant, si nous intégrons un vecteur GNSS en tant qu'observation dans un ajustement global :

En se ramenant aux conditions de 2010, cela signifie que nous ajoutons aux observations topométriques un vecteur  $vect = [Dx, Dy, Dz]$  dont la matrice de covariance  $N_{GNSS}^{-1}$  associée est connue et résulte de l'ajustement des observations GNSS dont le vecteur est la solution. En effet, un seul des deux points formant le vecteur est inconnu, la matrice  $N_{GNSS}^{-1}$  associée aux coordonnées du point inconnu correspond donc bien, par extension, à la matrice de covariance du vecteur GNSS.

Explicitons le vecteur  $x_{GNSS}$  entre un point P et un point S, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{bmatrix} Dx \\ Dy \\ Dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_P - x_S \\ y_P - y_S \\ z_P - z_S \end{bmatrix}$$

Où  $[x_P, y_P, z_P]$  et  $[x_S, y_S, z_S]$  sont les coordonnées cartésiennes respectivement des points P et S. Nous distinguons alors deux cas en fonction de si l'inconnue est P ou S.

Nous noterons par la suite  $\ddot{\phantom{x}}$  les coordonnées connues et  $\overset{\circ}{\phantom{x}}$  les coordonnées approchées.

### Cas où P est inconnu et S connu :

Le vecteur des observations est alors (partie I.1.2 -) :

$$Y_{comb2} = \begin{bmatrix} Y_{topo} \\ Y_{GNSS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{topo} \\ (x_P - \ddot{x}_S) - (x_P^{\circ} - \ddot{x}_S) \\ (y_P - \ddot{y}_S) - (y_P^{\circ} - \ddot{y}_S) \\ (z_P - \ddot{z}_S) - (z_P^{\circ} - \ddot{z}_S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{topo} \\ x_P - x_P^{\circ} \\ y_P - y_P^{\circ} \\ z_P - z_P^{\circ} \end{bmatrix}$$

En notant  $X_A$  les autres inconnues, le vecteur des inconnues de cet ajustement est de la forme :

$$X_{comb2} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ X_A \end{bmatrix}$$

Nous pouvons en déduire la matrice  $A$  des moindres carrés (partie I.1.2 -), définie par bloc :

$$A_{comb2} = \begin{bmatrix} A_{topo} & & & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{topo} \\ I_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Où nous notons  $I_3$  la matrice identité en dimension 3

De même, la matrice des poids, définie par bloc, sera :

$$P = \begin{bmatrix} Q_{topo}^{-1} & 0 \\ 0 & N_{GNSS} \end{bmatrix}$$

D'où la matrice normale  $N$  :

$$N_{comb2} = \begin{bmatrix} A_{topo} \\ I_3 \quad 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_{topo}^{-1} & 0 \\ 0 & N_{GNSS}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{topo} \\ I_3 \quad 0 \end{bmatrix} = [A_{topo}^T Q_{topo}^{-1} \mid N_{GNSS}] \begin{bmatrix} A_{topo} \\ I_3 \quad 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Soit : } N_{comb2} = A_{topo}^T Q_{topo}^{-1} A_{topo} + N_{GNSS} = N_{topo} + N_{GNSS} = N_{comb1}$$

Et le second membre de l'équation normale  $C$  :

$$C_{comb2} = \begin{bmatrix} A_{topo} \\ I_3 \quad 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_{topo}^{-1} & 0 \\ 0 & N_{GNSS}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{topo} \\ Y_{GNSS} \end{bmatrix} = [A_{topo}^T Q_{topo}^{-1} \mid N_{GNSS}] \begin{bmatrix} Y_{topo} \\ Y_{GNSS} \end{bmatrix}$$

$$C_{comb2} = A_{topo}^T Q_{topo}^{-1} Y_{topo} + N_{GNSS} Y_{GNSS}$$

$$\text{Or : } Y_{GNSS} = \begin{bmatrix} x_P - x_P^0 \\ y_P - y_P^0 \\ z_P - z_P^0 \end{bmatrix} = X_{GNSS} - X_{GNSS}^0 = N_{GNSS}^{-1} C_{GNSS}$$

$$\text{Soit : } C_{comb2} = C_{topo} + N_{GNSS} N_{GNSS}^{-1} C_{GNSS} = C_{topo} + C_{GNSS} = C_{comb1}$$

*Cas où  $S$  est inconnu et  $P$  connu :*

De même que précédemment, la matrice des observations s'écrit :

$$Y_{comb2} = \begin{bmatrix} Y_{topo} \\ Y_{GNSS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{topo} \\ (\ddot{x}_P - x_S) - (\ddot{x}_P - x_S^0) \\ (\ddot{y}_P - y_S) - (\ddot{y}_P - y_S^0) \\ (\ddot{z}_P - z_S) - (\ddot{z}_P - z_S^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{topo} \\ -x_S + x_S^0 \\ -y_S + y_S^0 \\ -z_S + z_S^0 \end{bmatrix}$$

La matrice des inconnues est :

$$X_{comb2} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \\ X_A \end{bmatrix}$$

La matrice  $A$  est :

$$A_{comb2} = \begin{bmatrix} & A_{topo} & & \\ -1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{topo} \\ -I_3 \quad 0 \end{bmatrix}$$

La matrice des poids est inchangée :

$$P = \begin{bmatrix} Q_{Ltopo}^{-1} & 0 \\ 0 & N_{GNSS} \end{bmatrix}$$

D'où la matrice normale  $N$  :

$$N_{comb2} = \begin{bmatrix} A_{topo} \\ -I_3 \quad 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_{topo}^{-1} & 0 \\ 0 & N_{GNSS}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{topo} \\ -I_3 \quad 0 \end{bmatrix} = [A_{topo}^T Q_{topo}^{-1} \mid -N_{GNSS}] \begin{bmatrix} A_{topo} \\ -I_3 \quad 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Soit: } N_{comb2} = A_{topo}^T Q_{topo}^{-1} A_{topo} + N_{GNSS} = N_{topo} + N_{GNSS} = N_{comb1}$$

Et le second membre de l'équation normale  $C$  :

$$C_{comb2} = \begin{bmatrix} A_{topo} \\ -I_3 \quad 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_{topo}^{-1} & 0 \\ 0 & N_{GNSS}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{topo} \\ Y_{GNSS} \end{bmatrix} = [A_{topo}^T Q_{topo}^{-1} \mid -N_{GNSS}] \begin{bmatrix} Y_{topo} \\ Y_{GNSS} \end{bmatrix}$$

$$C_{comb2} = A_{topo}^T Q_{topo}^{-1} Y_{topo} - N_{GNSS} Y_{GNSS}$$

$$\text{Or: } Y_{GNSS} = \begin{bmatrix} -x_S + x_S^0 \\ -y_S + y_S^0 \\ -z_S + z_S^0 \end{bmatrix} = -(X_{GNSS} - X_{GNSS}^0) = -N_{GNSS}^{-1} C_{GNSS}$$

$$\text{Soit: } C_{comb2} = C_{topo} + N_{GNSS} N_{GNSS}^{-1} C_{GNSS} = C_{topo} + C_{GNSS} = C_{comb1}$$

Ainsi, les deux méthodes de combinaison des mesures sont bien équivalentes dans les conditions définies. Généralisons alors cette démonstration.

### 1.2.4.2 - Généralisation de l'équivalence

Il s'agit ici d'étendre l'équivalence au cas de l'intégration de  $v$  vecteurs GNSS.

De même que précédemment, dans le cas du cumul d'équations normales nous aurons :

$$\begin{aligned} N_{comb1} &= N_{topo} + N_{GNSS} \\ C_{comb1} &= C_{topo} + C_{GNSS} \\ \hat{X}_{comb1} - X_{comb1}^0 &= N_{comb1}^{-1} C_{comb1} \end{aligned}$$

Intéressons-nous à l'intégration de plusieurs vecteurs GNSS :

Notons  $X_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$  les coordonnées cartésiennes déterminées par GNSS du point  $i$ ,  $X_{inc}$  le vecteur des points inconnus de l'ajustement GNSS et  $X_A$  les autres inconnues du problème.

Nous considérons  $p$  points inconnus dans l'ajustement GNSS et donc le vecteur des inconnues suivant :

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \\ X_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{inc} \\ X_A \end{bmatrix}$$

Pour commencer étudions l'écriture des vecteurs GNSS :

Un vecteur GNSS  $vect_{ij}$  entre les points  $i$  et  $j$  s'écrit :

$$vect_{ij} = X_i - X_j = \begin{bmatrix} x_i - x_j \\ y - y_j \\ z_i - z_j \end{bmatrix}$$

Ce qui peut être écrit sous la forme :

$$vect_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix} = [I_3 \quad -I_3] \begin{bmatrix} X_i \\ X_j \end{bmatrix}$$

Généralisons cela au cas de  $v$  vecteurs GNSS impliquant  $n$  points dont au moins l'un est connu et dont  $p$  sont inconnus. Nous organisons les points dans l'ordre suivant : points inconnus  $X_{inc}$ , puis points connus  $X_c$ :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{inc} \\ X_c \end{bmatrix}$$

Nous avons, en notant  $vect$  le vecteur colonne contenant les vecteurs GNSS du réseau :

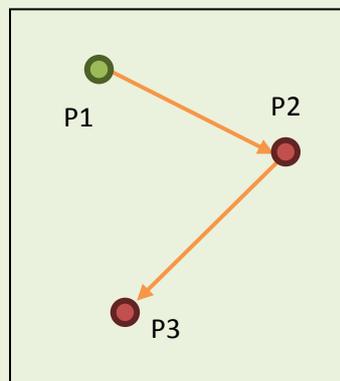
$$vect = H \begin{bmatrix} X_{inc} \\ X_c \end{bmatrix}$$

D'après les démonstrations précédentes, nous comprenons que  $H$  contient par bloc ligne  $I_3$ ,  $-I_3$  et des 0 en fonction des deux points composant le vecteur à exprimer. Nous pouvons alors écrire, en notant  $H_1$  la partie de la matrice  $H$  relative à  $X_{inc}$  et  $H_2$  celle relative à  $X_c$  :

$$vect = [H_1 \quad H_2] \begin{bmatrix} X_{inc} \\ X_c \end{bmatrix}$$

**EXEMPLE**

Illustrons la construction de la matrice  $H$  sur un réseau à trois points dont l'un, P1 est connu (représenté en vert) et deux, P2 et P3, sont inconnus, en rouge. Les lignes de base mesurées sont en orange.



Les vecteurs mesurés sont donc  $P1 \rightarrow P2$  et  $P2 \rightarrow P3$ . Construisons la matrice  $H$  permettant de faire le lien entre la matrice des vecteurs et la matrice des points.

$$vect = \begin{bmatrix} X_{P1} - X_{P2} \\ X_{P2} - X_{P3} \end{bmatrix}$$

$$vect = \begin{bmatrix} -I_3 & 0 & I_3 \\ I_3 & -I_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ P_1 \end{bmatrix}$$

Par identification :

$$H = \begin{bmatrix} -I_3 & 0 & I_3 \\ I_3 & -I_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} -I_3 & 0 \\ I_3 & -I_3 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} I_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*Ensuite, revenons sur l'ajustement GNSS :*

Au terme de l'ajustement GNSS nous obtenons la solution ajustée des moindres carrés :

$$\hat{X}_{GNSS} = N_{GNSS}^{-1} C_{GNSS} = \hat{X}_{inc}$$

La matrice de covariance associée à cette solution est :

$$Q_{\hat{X}_{GNSS}} = N_{GNSS}^{-1}$$

Soulignons alors le fait que la matrice de covariance associée à  $x_c$  est la matrice nulle.

Aussi pouvons-nous écrire, d'après le principe de la propagation de la variance (Durand, 2015) :

$$Q_{vect} = H_1 Q_{\hat{X}_{GNSS}} H_1^T = H_1 N_{GNSS}^{-1} H_1^T$$

*Maintenant, revenons à la combinaison des observations topométriques et des vecteurs GNSS :*

Nous conservons la même organisation des inconnues que celle définie précédemment.

Nous comprenons grâce aux démonstrations liées à l'insertion d'un unique vecteur GNSS que la matrice  $A$  des moindres carrés s'écrit :

$$A_{comb2} = \begin{bmatrix} A_{topo} \\ H_1 \end{bmatrix}$$

De même pour les matrices  $P$  et  $Y$  :

$$P = \begin{bmatrix} Q_{topo}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_{vect}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{topo} \\ Y_{vect} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons alors exprimer la matrice normale  $N$  :

$$N_{comb2} = A_{topo}^T Q_{topo}^{-1} A_{topo} + H_1^T Q_{vect}^{-1} H_1 = N_{topo} + H_1^T Q_{vect}^{-1} H_1 \quad (10)$$

Et le second membre de l'équation normale  $C$  :

$$C_{comb2} = A_{topo}^T Q_{topo}^{-1} Y_{topo} + H_1^T Q_{vect}^{-1} Y_{vect} = C_{topo} + H_1^T Q_{vect}^{-1} Y_{vect} \quad (11)$$

Pour que l'équivalence soit démontrée il faut montrer que :

- 1-  $H_1^T Q_{vect}^{-1} H_1 = N_{GNSS}$  ;
- 2-  $H_1^T Q_{vect}^{-1} Y_{vect} = C_{GNSS}$ .

**1- Commençons par montrer que  $H_1^T Q_{vect}^{-1} H_1 = N_{GNSS}$  :**

$$H_1^T Q_{vect}^{-1} H_1 = H_1^T (H_1 Q_{\hat{X}_{GNSS}} H_1^T)^{-1} H_1 = H_1^T (H_1 N_{GNSS}^{-1} H_1^T)^{-1} H_1$$

L'égalité est donc vraie si  $H_1$  est inversible. En effet, sous cette hypothèse nous obtenons :

$$H_1^T Q_{vect}^{-1} H_1 = H_1^T (H_1^T)^{-1} N_{GNSS} H_1^{-1} H_1 = N_{GNSS} \quad (12)$$

Soit en injectant le résultat (12) dans l'équation (10) :

$$N_{comb2} = N_{topo} + N_{GNSS} = N_{comb1}$$

**2- De même montrons que  $H_1^T Q_{vect}^{-1} Y_{vect} = C_{GNSS}$  :**

De même que précédemment, l'égalité est vraie si  $H_1$  est inversible :

$$H_1^T Q_{vect}^{-1} Y_{vect} = H_1^T (H_1 Q_{\hat{X}_{GNSS}} H_1^T)^{-1} Y_{vect} = H_1^T (H_1^T)^{-1} N_{GNSS} (H_1)^{-1} Y_{vect} \quad (13)$$

$Y_{vect}$  est composé de vecteurs impliquant :

- Soit un point connu et un point  $p$  inconnu, cela correspond aux cas traités précédemment que nous noterons  $Y_{vect-k}$ , nous avons alors montré que :

$$Y_{vect-k} = \hat{X}_p - X_p^0$$

- Soit de deux points  $i$  et  $j$  inconnus, nous noterons ce cas  $Y_{vect-l}$  :

$$Y_{vect-l} = (\hat{X}_i - \hat{X}_j) - (X_i^0 - X_j^0) = (\hat{X}_i - X_i^0) - (\hat{X}_j - X_j^0)$$

Nous pouvons ainsi en déduire que :

$$Y_{vect} = H_1 N_{GNSS}^{-1} G_{GNSS} \quad (14)$$

D'où, en injectant l'expression (14) dans l'équation (13) :

$$H_1^T Q_{vect}^{-1} Y_{vect} = H_1^T (H_1^T)^{-1} N_{GNSS} (H_1)^{-1} H_1 N_{GNSS}^{-1} C_{GNSS}$$

$$H_1^T Q_{vect}^{-1} Y_{vect} = C_{GNSS} \quad (15)$$

Nous obtenons finalement en injectant l'égalité (15) dans l'équation (11) :

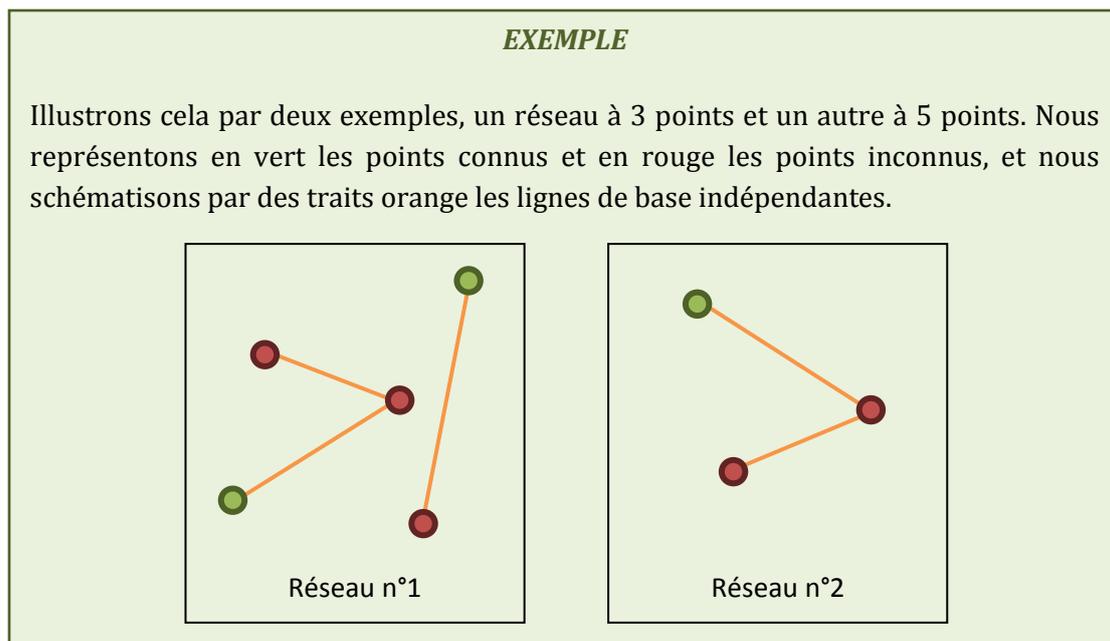
$$C_{comb2} = C_{topo} + C_{GNSS} = C_{comb1}$$

### Intéressons-nous à l'hypothèse $H_1$ inversible :

Pour que cette démonstration fonctionne il faut que  $H_1$  soit inversible. Revenons sur cette caractéristique de  $H_1$  que nous n'avons pas démontrée à l'heure actuelle.

Tout d'abord un élément important à souligner est le fait que nous ajustons des vecteurs GNSS indépendants. En effet, c'est la manière courante de procéder, LGO (Leica geosystems, Online Help version 8.3), par exemple, utilise cette méthode.

Or, intuitivement nous savons que pour un réseau GNSS donné, il y a autant de vecteurs indépendants que de points inconnus.



Dans la mesure où nous avons autant de vecteurs que de points inconnus, nous pouvons en déduire que  $H_1$  est carrée. En effet, 1 point inconnu est composé de 3 coordonnées qui impliquent 3 lignes pour décrire le vecteur. Si nous notons  $p$  le nombre de points inconnus,  $H_1$  est de taille  $(3p, 3p)$ .

Ainsi,  $H_1$  est une matrice carrée, composée par des matrices identités et des matrices nulles, qui me paraît inversible. Cette propriété intuitive de la matrice  $H_1$  reste à démontrer et pourra faire l'objet d'études postérieures.

### 1.2.4.3 - Invariance des résultats face au type de coordonnées

Nous venons de démontrer l'équivalence en coordonnées cartésiennes. Étendons alors la démonstration à tout type de coordonnées au sein d'un même système de référence. Nous savons que dans ces conditions tous les types de coordonnées sont liés par des relations mathématiques exactes et bijectives. Traduisons cela au travers d'une expression matricielle. Nous notons donc  $X$  le vecteur des inconnues exprimé en coordonnées cartésiennes et  $X'$  ce même vecteur des inconnues exprimé dans un type de coordonnées quelconque. De manière générale, nous noterons  $'$  toute matrice exprimée dans le type de coordonnées quelconque. Alors, il existe une matrice  $M$  telle que :

$$X' = MX \quad (16)$$

Ce qui nous donne d'après l'équation (2) :

$$Y = AX + v \quad \Leftrightarrow \quad Y = AM^{-1}X' + v$$

D'où, en posant  $A' = AM^{-1}$  :

$$Y = A'X' + v$$

Commençons par étudier le cas du cumul des équations normales :

Exprimons la matrice normale de la combinaison  $N'_{comb1}$ . Selon le principe de la propagation de la variance nous pouvons écrire :

$$N'_{topo} = (MN_{topo}^{-1}M^T)^{-1} = (M^T)^{-1}N_{topo}M^{-1}$$

$$N'_{GNSS} = (MN_{GNSS}^{-1}M^T)^{-1} = (M^T)^{-1}N_{GNSS}M^{-1}$$

D'où, nous pouvons en déduire :

$$N'_{comb1} = (M^T)^{-1}N_{topo}M^{-1} + (M^T)^{-1}N_{GNSS}M^{-1}$$

De même, déterminons le second membre de l'équation normale  $C'_{comb1}$ . Selon l'équation (5) :

$$C'_{topo} = N'_{topo}X'$$

$$C'_{topo} = (M^T)^{-1}N_{topo}M^{-1}X'$$

D'où, d'après l'équation (16) :

$$C'_{topo} = (M^T)^{-1}N_{topo}X = (M^T)^{-1}C_{topo}$$

De la même manière, nous obtenons :

$$C'_{GNSS} = (M^T)^{-1}C_{GNSS}$$

Et :

$$C'_{comb1} = (M^T)^{-1}C_{topo} + (M^T)^{-1}C_{GNSS}$$

Intéressons-nous désormais au cas de l'intégration de vecteurs GNSS :

À partir des expressions (10) à (15) et de la relation  $A' = AM^{-1}$  nous pouvons écrire :

$$N'_{comb2} = (A_{topo}M^{-1})^T Q_{topo}^{-1} A_{topo}M^{-1} + (H_1M^{-1})^T Q_{vect}^{-1} H_1M^{-1}$$

$$N'_{comb2} = (M^T)^{-1} A_{topo}^{-1} Q_{topo}^{-1} A_{topo}M^{-1} + (M^T)^{-1} H_1^T Q_{vect}^{-1} H_1M^{-1}$$

$$N'_{comb2} = (M^T)^{-1} N_{topo}M^{-1} + (M^T)^{-1} N_{GNSS}M^{-1} = N'_{comb1}$$

De même nous obtenons :

$$C'_{comb2} = (A_{topo}M^{-1})^T Q_{topo}^{-1} Y_{topo} + (H_1M^{-1})^T Q_{vect}^{-1} Y_{vect}$$

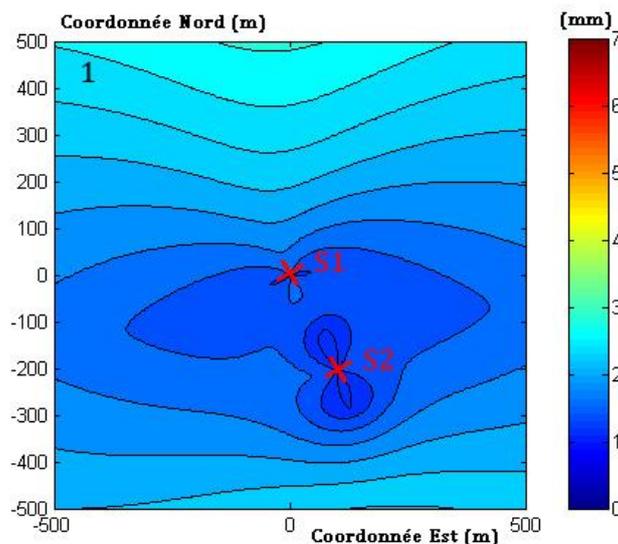
$$C'_{comb2} = (M^T)^{-1} C_{topo} + (M^T)^{-1} C_{GNSS}$$

Ainsi, les combinaisons des observations topométriques et GNSS par cumul des équations normales et par intégration des vecteurs GNSS sont bien équivalentes et ne dépendent pas du système de coordonnées utilisé.

## 1.2.5 - Résultats obtenus et conclusions

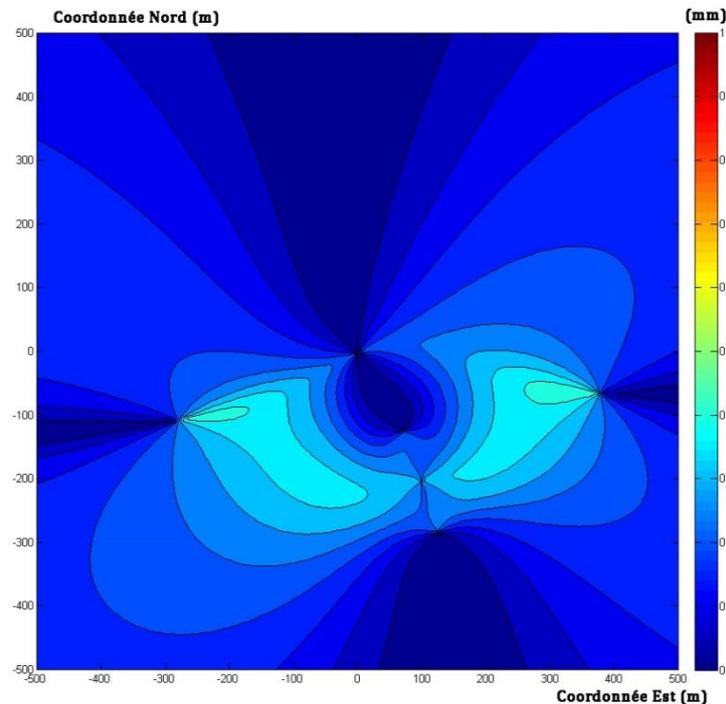
### 1.2.5.1 - Résultats obtenus

Afin d'illustrer l'équivalence entre l'intégration d'un vecteur GNSS et le cumul des équations normales, nous avons repris le réseau à trois points présenté précédemment et les mêmes données, notamment en matière d'éphémérides, de coordonnées approchées et de précisions. Nous obtenons les résultats présentés à la Figure 6. Nous constatons que nous obtenons les mêmes résultats qu'avec le calcul précédent, ce qui illustre bien l'équivalence des deux méthodes.



**Figure 6 :** Résultats de la simulation de la combinaison d'un vecteur GNSS et d'observations topométriques, distance de 300 m entre S1 et S2. Variation en mm de la valeur du demi-grand axe de l'ellipse de confiance à 95% sur les coordonnées planes du point P3 en fonction de sa position. Les coordonnées sont locales.

En combinant les observations GNSS et topométriques, nous voyons sur la Figure 6 que les valeurs du demi-grand axe de l'ellipse de confiance à 95% sur les coordonnées planes du point P3 vont de 1,2 mm à proximité de S2 à 2,8 mm en s'éloignant de S1. Ce sont bien là les valeurs obtenues avec le cumul des équations normales.



**Figure 7 :** Écarts, en centième de mm et en valeur absolue entre les valeurs du demi-grand axe de l'ellipse de confiance à 95% associée aux coordonnées planes du point P3 en fonction de sa position obtenues par cumul des équations normales et combinaison du vecteur GNSS avec les observations topométriques. Les coordonnées sont locales.

De surcroît, la Figure 7 représente les écarts des résultats obtenus par le cumul des équations normales et l'insertion d'un vecteur GNSS. Ils sont de :

- $1,7 \cdot 10^{-8} m$  au minimum ;
- $1,6 \cdot 10^{-6} m$  en moyenne ;
- $4,4 \cdot 10^{-6} m$  au maximum.

Ces valeurs sont négligeables devant les précisions utilisées qui sont, si nous les rappelons : 3 dmgon sur les angles  $H_z$  et  $A_z$  ;  $\pm 1 \text{ mm} \pm 1 \text{ ppm}$  sur les distances  $D_p$  ; 0,1 mm de précision de centrage et 2 mm + 2 ppm sur la ligne de base GNSS.

Cela confirme bien l'équivalence annoncée et nous pouvons supposer que ces écarts infimes proviennent des arrondis réalisés au fil des calculs.

## Chapitre 3 : Complexification du réseau

L'idée est ici de montrer que la géométrie d'un réseau a une influence sur les résultats obtenus en termes de précision de positionnement.

### 1.3.1 - Résultats antérieurs

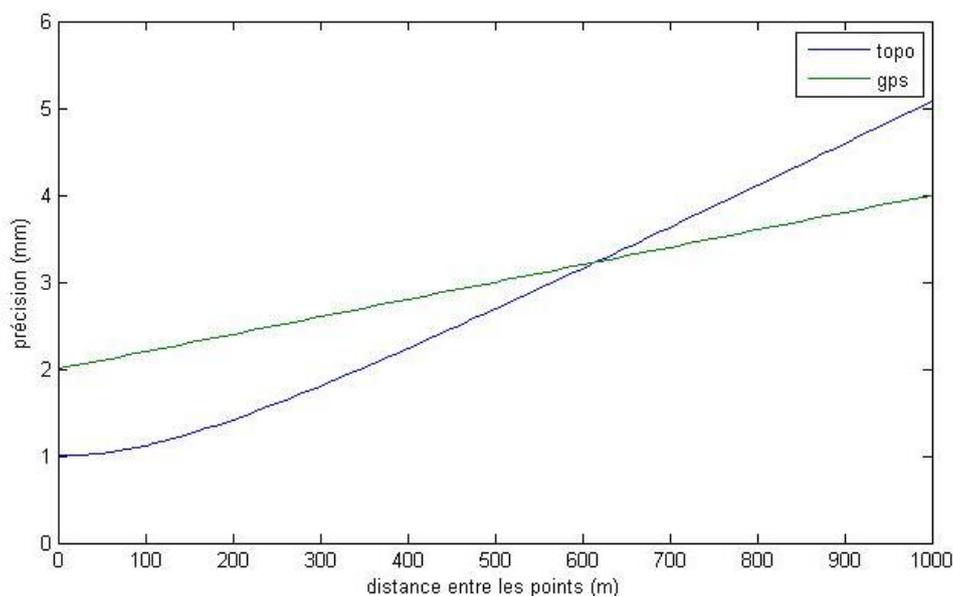
Dans sa thèse, Benoît Legru montrait, dans le cas de deux points (un point de station et un point à déterminer), l'évolution de la précision planimétrique à 95% d'un point mesuré par topométrie et GNSS. Nous avons commencé par retrouver ces résultats par simulation.

Nous avons utilisé les précisions suivantes pour la topométrie :

- 3 dmgon sur les angles  $H_z$  et  $A_z$  ;
- $\pm 1 \text{ mm} \pm 1 \text{ ppm}$  sur les distances  $D_p$  ;
- 0,1 mm de précision de centrage.

De plus, nous avons utilisé, pour les mesures GNSS, une précision planimétrique de  $2 \text{ mm} + 2 \text{ ppm}$ .

Nous avons ainsi pu tracer l'évolution de la précision planimétrique du point visé en fonction de la distance le séparant du point station. Nous avons ainsi obtenu la Figure 8. Nous voyons alors sur cette figure que la topométrie est théoriquement plus précise que le GNSS pour de courtes visées, c'est-à-dire ici pour des visées de moins de 600 m. Nous observons également que pour une certaine gamme de distance (autour de 600 m) les résultats de la topométrie et du GNSS se valent. Au-delà de cette zone d'équivalence, le GNSS devient plus précis.



**Figure 8 :** Évolution de la précision à 95% du positionnement planimétrique pour les techniques d'observation GNSS et topométrie en fonction de la distance séparant la station et le point à déterminer

Ces observations méritent d'être largement nuancées. En effet, théoriquement la topométrie est plus précise que le GNSS à courte distance, et moins précise pour de longues visées.

Cependant, la géométrie du réseau influence ces résultats. Il n'y a pas de règle systématique pour que la topométrie donne de meilleurs résultats que le GNSS et inversement. Ce que nous avons donc cherché à mettre en évidence au cours de notre étude est le fait que la géométrie du réseau a une influence sur les précisions de positionnement planimétriques.

### 1.3.2 - Simulation mise en œuvre

Avant de commencer notre étude il est nécessaire de générer des réseaux de géométrie et taille variées.

Nous avons procédé par simulation en utilisant CoMeT et des scripts personnels sous Matlab. Nous avons dû choisir un certain nombre de contraintes afin de générer, par la suite, les réseaux aléatoirement.

Tout d'abord, nous choisissons un nombre maximal de points  $n_{ptmax}$  que nous avons arbitrairement pris à 10. Les réseaux comptent alors  $n_{pt}$  points avec  $n_{pt} \in \llbracket 3 ; 10 \rrbracket$ . En effet, nous menons cette étude dans un objectif d'auscultation. Aussi les réseaux étudiés doivent-ils refléter cette situation de manière réaliste. Dans ce cadre, le cas d'un réseau à deux points ne nous a pas paru intéressant.

De même, parmi le nombre total de points du réseau, le nombre de ceux qui sont connus est de  $n_c \in \llbracket 2 ; n_{pt} - 1 \rrbracket$ .

De plus, les points sont sélectionnés à l'intérieur d'un volume défini. Nous avons choisi de centrer le chantier sur l'ESGT. Ensuite, afin de forcer la génération de volumes hétérogènes nous avons choisi de rendre l'envergure disponible pour chaque réseau en partie aléatoire. Concrètement, le volume propre à chaque réseau est défini comme suit :

- l'altitude appartient à l'intervalle  $[-100 \text{ m} , 100 \text{ m}]$  ;
- les composantes Est et Nord varient dans des intervalles allant de  $[-200 \text{ m} , 200 \text{ m}]$  à  $[-1000 \text{ m} , 1000 \text{ m}]$  par pas de 200 m.

Il existe donc pour chaque réseau généré cinq volumes possibles. Cela permet de rendre compte de l'hétérogénéité existante entre différents chantiers d'auscultation.

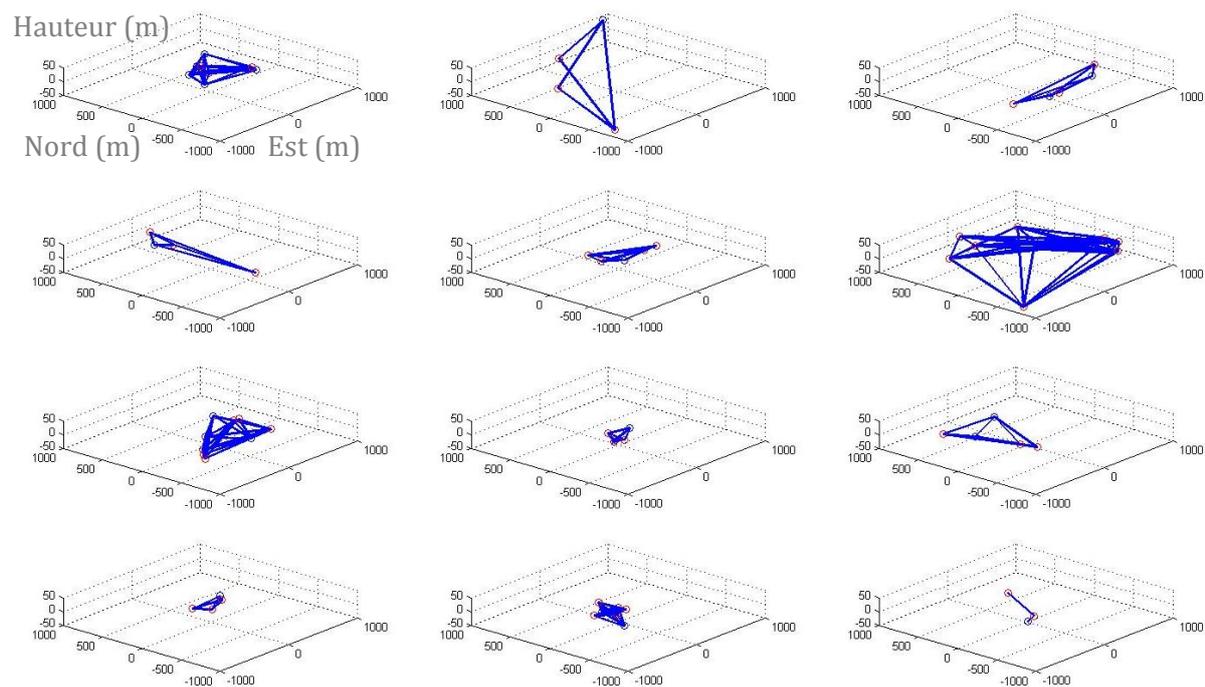
Ensuite, il est nécessaire de déterminer les liaisons entre les points. Nous partons du principe que tous les points du réseau ne sont pas systématiquement l'objet d'observations. Il nous a donc fallu déterminer une probabilité à associer à cela, nous avons choisi qu'il y avait 2 chances sur 3 pour qu'une liaison existe entre deux points.

Un autre élément primordial pour mener à bien les simulations est la détermination des pondérations à appliquer aux observations. Les observations topométriques se verront attribuer les mêmes précisions que celles utilisées pour les simulations précédentes. Rappelons les valeurs : 3 dmgon sur les angles et  $\pm 1 \text{ mm} \pm 1 \text{ ppm}$  sur les distances avec des précisions de centrage de 0,1 mm.

Le cas des observations GNSS est plus délicat à traiter. En effet, nous utilisons des vecteurs GNSS dont les éléments sont corrélés et simuler correctement cette corrélation est malaisé. Par

ailleurs, le paramètre que nous souhaitons étudier suite à ces simulations est la précision, qui est donnée par les éléments diagonaux de la matrice normale  $N$  (équations (8) et (9)). Aussi avons-nous fait le choix d'utiliser une matrice de covariance sur les observations diagonale, basée sur une précision de positionnement de 2 mm + 2 ppm. Cette modélisation est fautive mais sans conséquence sur les résultats à analyser et permet de simplifier considérablement le problème.

Les réseaux générés aléatoirement selon ces contraintes sont de taille et géométrie très différentes comme le montrent les exemples de la Figure 9 qui représente 12 de ces réseaux. En rouge sont représentés les points inconnus et en bleu les points connus.



**Figure 9 :** Mosaïque de 12 réseaux générés aléatoirement. Les coordonnées sont locales.

Pour chaque réseau généré nous réalisons deux simulations. L'une où nous considérons qu'il est entièrement observé par topométrie et l'autre par GNSS.

Notre problématique est ici de montrer que la géométrie du réseau influence les précisions des méthodes topométriques et GNSS.

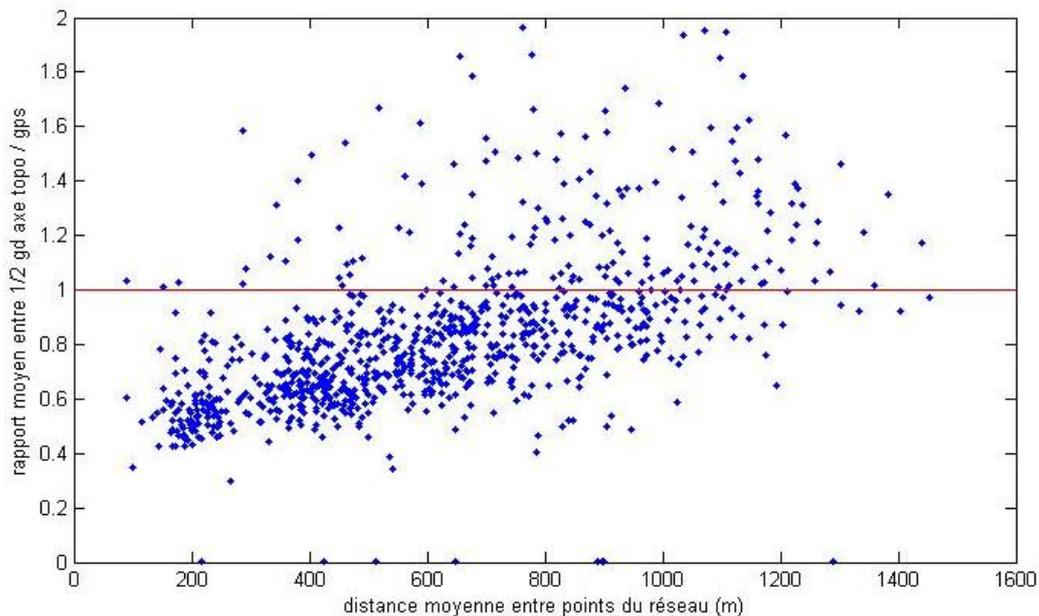
Pour résumer cette géométrie, nous nous sommes intéressés à la distance moyenne entre les points d'un réseau donné. Nous nous sommes alors intéressés à la précision planimétrique moyenne obtenue sur ce réseau en topométrie et en GNSS. L'écart entre les deux est quantifié par le rapport de la précision moyenne en topométrie et en GNSS : topométrie/GNSS. Ainsi, pour une distance moyenne donnée, propre à un réseau en particulier, si le rapport est supérieur à 1 cela signifie que le GNSS nous donne de meilleurs résultats, sinon c'est la topométrie qui est plus performante. Les résultats obtenus sont représentés sur la Figure 10.

Nous retrouvons sur cette figure la tendance selon laquelle la topométrie est plus efficace à courte distance. En effet, nous observons qu'en dessous de 700 m de distance moyenne entre les

points du réseau la topométrie fournit de meilleures précisions que le GNSS. Cependant, il est intéressant de remarquer que même sur des distances moyennes importantes et supérieures à 700 m la topométrie peut, pour certaines géométries de réseaux, donner de meilleures précisions que le GNSS.

De même, certaines géométries permettent au GNSS d'être plus précis que la topométrie sur de courtes distances.

Ces résultats nous montrent qu'au-delà de la précision de positionnement possible à obtenir avec une méthode donnée, la géométrie du réseau est à prendre en compte et joue un rôle important.



**Figure 10 :** rapport des précisions planimétriques à 95% obtenues en topométrie et GNSS en fonction de la distance moyenne entre les points du réseau. Résultats pour 1000 réseaux générés aléatoirement.

Pour aller plus loin il serait intéressant d'étudier en détails l'influence de la géométrie sur les précisions de positionnement. Nous pourrions par exemple regarder si cela vient du nombre de points (fixes ou inconnus), de leur répartition dans l'espace, ou encore regarder quel est le lien avec les fiabilités. En effet, nous nous sommes concentrés jusque-là sur l'étude des précisions mais les fiabilités sont également des indicateurs intéressants.

Ainsi, nous avons atteint notre objectif en montrant l'influence de la géométrie sur les résultats en termes de précision de positionnement. De plus, nous avons, pour cela, développé des outils de génération de réseaux qui rendent possible une étude plus approfondie sur le rôle de la géométrie dans les apports de la combinaison d'observations GNSS et topométriques. Il devient alors très intéressant de s'intéresser plus en détails au cas de réseaux complexes et aléatoires.

## Partie II : La pondération relative des observations

Nous avons donc vu qu'il est possible de combiner les mesures GNSS et topométriques selon différentes manières. Nous avons également réalisé un certain nombre de simulations sur lesquelles nous avons appuyé notre analyse. Mais pour aller plus loin dans notre étude des apports de la combinaison il sera bientôt nécessaire d'acquérir de nombreuses mesures sur des géométries relativement complexes.

Cependant, une problématique constante de la combinaison de mesures est la pondération relative des observations entre elles. Pour répondre à cela, et dans le cas où nous disposons de mesures, l'Estimation des Composantes de la Variance (VCE) existe.

### Chapitre 1 : Présentation de la VCE

#### II.1.1 - Présentation

Rappelons le modèle d'équations d'observation de Gauss-Markov (équation (2)) et I.1.3 - :

$$Y = A(X - X_0) + v, \quad \mathbf{Var}(Y) = \sigma_0^2 Q_L$$

Le principe de la VCE est de complexifier la partie stochastique du modèle ci-dessus. Pour cela, les observations sont séparées en plusieurs groupes. Le choix de ces groupes n'est pas aléatoire et doit être le reflet d'une certaine logique propre à chaque problème. En effet, pour chaque groupe  $k$  l'idée sera d'estimer un unique facteur devant la matrice de covariance  $Q_{L,k}$  qui lui est associée. Les observations regroupées doivent donc être homogènes d'un point de vue statistique.

Nous considérerons dans la suite uniquement le cas où les groupes de mesures sont non corrélés entre eux.

Ce principe a été initié par F. R. Helmert en 1907. Cependant, la VCE est gourmande en temps et efforts de calcul. Aussi cette méthode s'est-elle surtout développée dans les années 70 où de nombreuses études sur ce sujet ont été menées et où de nouveaux types de VCE ont vu le jour. Avec le développement des outils de calcul, la VCE est aujourd'hui une méthode largement répandue dans les domaines de la géomatique et de la géodésie (Erol *et al.*, 2004), (Hobiger, 2015).

#### II.1.2 - Le modèle stochastique

Comme expliqué dans (Bähr *et al.*, 2007) et (Caspary, 2000) le modèle stochastique utilisé peut être exprimé de la façon suivante, pour  $p$  groupes de mesures :

$$Q_L = Q_0 + \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 Q_k \quad (17)$$

Avec :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, Q_k = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & Q_{L,k} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui correspond à :

$$Q_L = Q_0 + \begin{bmatrix} \sigma_1^2 Q_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 Q_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 Q_3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & \sigma_p^2 Q_p \end{bmatrix} \quad (18)$$

La matrice  $Q_L$  peut ainsi être qualifiée de bloc-diagonale. En accord avec l'équation (4) nous noterons  $P$  l'inverse de cette matrice.

$Q_0$  représente la partie connue de la matrice de covariance  $Q_L$ . Dans notre cas, nous considérerons  $Q_0 = 0$ . En effet, dans le cas des observations topométriques et GNSS les matrices de covariance a priori ne comportent pas de partie connue. De plus, leur forme ne correspond pas à un modèle comportant une partie fixe à laquelle s'ajoute une partie à estimer.

Tout l'intérêt de la VCE sera alors d'estimer les facteurs  $\sigma_k^2$  devant chaque matrice de covariance associée à un groupe de mesures.

Une étape importante est alors de définir ces groupes d'observations. Pour un même groupe les mesures doivent avoir les mêmes caractéristiques techniques.

Au fil des années, les techniques de VCE se sont multipliées, mettant chacune en œuvre des estimateurs aux propriétés particulières et gagnant en efficacité de traitement. Aussi est-il intéressant de faire une synthèse des principales méthodes de VCE existant aujourd'hui.

## Chapitre 2 : Tour d'horizon sur la VCE

---

Il s'agit ici de présenter rapidement le fruit de notre travail bibliographique, c'est-à-dire les différentes méthodes existantes et utilisées dans les domaines de la géomatique et de la géodésie. Nous détaillerons plus particulièrement les méthodes HVCE et LSVCE illustrées et appliquées à notre étude plus loin dans le rapport.

En 1907, Helmert a mis au point une technique de VCE fonctionnant à deux conditions : les groupes de données doivent être non corrélés et les données au sein même de ces groupes doivent être non corrélées.

Par la suite, ce modèle a été généralisé afin de permettre l'estimation des composantes de la variance et la covariance.

Aujourd'hui, de nombreux estimateurs existent pour l'estimation des composantes de la variance. Aussi distinguerons-nous les estimateurs rigoureux des estimateurs approximatifs. Les premiers sont issus de raisonnements mathématiques et statistiques exacts ; tandis que les seconds sont obtenus en considérant, dans la construction des estimateurs, certains éléments négligeables ou en les approximant. Ces derniers deviennent intéressants dans le cas où les observations sont extrêmement nombreuses car ils permettent un gain de temps considérable pour une dégradation des résultats acceptable.

Dans notre étude nous nous intéresserons seulement aux estimateurs rigoureux et nous placerons dans le cas particulier des erreurs normalement réparties. En effet, la répartition normale des erreurs correspond au modèle le plus approprié dans le cas de mesures. Notre étude et nos données sont donc adaptées à ce modèle.

### II.2.1 - Estimateur d'Helmert

Nous allons présenter ici la HVCE (Helmert VCE) utilisée par (Sahin *et al.*, 1992) et basée sur (Welsh, 1978) et (Grafarend *et al.*, 1980). Une démonstration exhaustive de cette méthode est disponible dans les ouvrages sus-cités.

Pour commencer, et selon le modèle statistique présenté précédemment (équation (17)), les mesures sont divisées en  $p$  groupes.

Nous noterons  $.k$  avec  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  les éléments relatifs au  $k$ -ième groupe d'observations qui contient  $n_k$  mesures.

D'autre part, soulignons que :

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_p \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_p \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & P_p \end{bmatrix}$$

$$N = N_1 + N_2 + \dots + N_p \quad \text{avec} \quad N_k = A_k^T P_k A_k$$

L'équation d'Helmert s'écrit alors :

$$H\sigma^2 = c \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1p} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{p1} & h_{p2} & \dots & h_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \vdots \\ \sigma_p^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix} \quad (20)$$

Avec :

$$c_k = V_k^T P_k V_k$$

$$h_{kk} = n_k - 2Tr(N^{-1}N_k) + Tr(N^{-1}N_k N^{-1}N_k)$$

$$h_{kl} = Tr(N^{-1}N_l N^{-1}N_k) \quad (\text{pour } k \neq l)$$

Pour résoudre cela, une démarche itérative est à employer. Le traitement se déroule alors comme suit :

- Choix de valeurs approchées pour les  $\sigma_k^2$  ;
- choix des matrices de covariance *a priori* et donc de leur inverse les matrices de poids  $P_k$  ;
- les matrices  $N$  et  $N_k$  sont déterminées ;
- l'ajustement est réalisé,  $\hat{X}$  est déterminé, de même que  $V_k = A_k \hat{X} - Y_k$  ;
- à l'aide de l'équation d'Helmert (équations (19) et (20)) les facteurs  $\hat{\sigma}_k^2$  sont déterminés ;
- de nouveaux poids sont alors calculés de la manière suivante :

$$P_k \leftarrow \frac{P_k}{\hat{\sigma}_k^2}$$

- Le processus itératif continue jusqu'à ce que toutes les composantes de la variance valent 1 (Sahin *et al.*, 1992), c'est-à-dire :

$$(\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \dots, \hat{\sigma}_p^2) = (1, 1, \dots, 1)$$

Cette méthode peut toutefois conduire à l'obtention de résultats négatifs, ce qui n'a pas de sens. Il est parfois possible de remédier à cela en choisissant de meilleures valeurs approchées (Bähr *et al.*, 2007, section 3.5.2). Nous n'avons cependant pas trouvé d'article traitant explicitement de

cette possibilité. En effet, suite à notre travail bibliographique nous pouvons affirmer que cette problématique ne trouve pas de réponse simple. Certaines autres méthodes existent mais le caractère biaisé de l'estimateur ainsi obtenu est un point faible récurrent.

## II.2.2 - *Autres estimateurs équivalents*

D'autres estimateurs existent et répondent à un certain nombre de propriétés propres à chacun d'eux. Ils ont été créés dans le but de généraliser la méthode Helmert et de proposer des estimateurs respectant certaines propriétés indépendantes de la loi statistique suivie par les erreurs. Dans le cas d'une distribution normale, les estimateurs qui vont suivre sont équivalents à l'estimateur d'Helmert.

### II.2.2.1 - *BIQUE*

*Best Invariant Quadratic Unbiased Estimator*, le nom même de cet estimateur indique les propriétés qu'il respecte (Caspary, 2000), (Bähr *et al.*, 2007) :

- modélisation quadratique ;
- estimation non biaisée ;
- invariance de l'estimation ;
- estimation de minimum de variance, qui correspond à la notion de meilleur estimateur.

Dans le cas de données normalement distribuées, cet estimateur est équivalent à l'estimateur d'Helmert (Caspary, 2000, p.105).

Le problème à traiter est l'estimation des inconnues  $X$  et parallèlement l'estimation des composantes de la variance. Nous nous attachons ici à estimer une fonction linéaire des composantes de la variance notée  $q^T \sigma$ . Avec  $q$  un vecteur de taille  $k$  et  $\sigma$  le vecteur des  $p$  facteurs  $\sigma_k^2$  à estimer.

La construction de cet estimateur passe par la minimisation d'une trace par la méthode de Lagrange.

L'estimation des facteurs utilise une approche itérative. La procédure est la même que pour l'estimateur d'Helmert : des valeurs approchées des  $\sigma_k^2$  sont choisies,  $\hat{\sigma}$  est déterminé, les matrices  $Q_k$  sont multipliées par le facteur  $\hat{\sigma}_k^2$  correspondant et ainsi estimé, puis les valeurs approchées sont remplacées par les valeurs calculées et le processus reprend. Des itérations sont réalisées jusqu'à ce que les paramètres à déterminer soient tous égaux à 1 (Caspary, 2000).

### II.2.2.2 - *MINQUE*

*Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimator*. Cette méthode a été développée par C. R. Rao en 1970. À cette époque la VCE faisait déjà l'objet de nombreux travaux. Cependant, hormis l'estimation par maximum de vraisemblance qui utilise des équations compliquées, aucune méthode ne faisait alors d'hypothèse sur la distribution des variables et aucune n'était générale et apte à couvrir toute situation expérimentale et tout jeu de données (Rao, 1971).

C'est donc dans le but de fournir une méthode très générale de VCE qu'a été développé l'estimateur MINQUE.

Tout comme l'estimateur BIQUE, il s'agit d'un estimateur quadratique sans biais et pour la construction de cet estimateur il est nécessaire de minimiser une certaine norme. De même, l'objectif est d'estimer une fonction linéaire des composantes de la variance  $q^T \sigma$  (Rao, 1971) et (Searle, 1994).

De plus, tout comme les estimateurs précédents, cette méthode peut conduire à des résultats négatifs

Pendant, nous noterons que cet estimateur n'est pas invariant. En effet, il dépend des valeurs approchées données aux composantes de la variance et est non itératif (Searle, 1994). Aussi existe-t-il l'estimateur IMINQUE qui est itératif, invariant et équivalent à l'estimateur BIQUE dans le cas de données normalement réparties (Bähr *et al.*, 2007).

## II.2.3 - Estimation par maximum de vraisemblance

### II.2.3.1 - ML

*Maximum Likelihood*, il s'agit ici de l'approche par maximum de vraisemblance. Le principe de ce type d'estimation est de rechercher l'évènement le plus probable, donc maximisant la densité de probabilité des variables aléatoires en présence.

Le principe général de l'estimation par maximum de vraisemblance est le suivant : considérant un échantillon de  $n$  éléments  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , cette approche consiste à prendre comme estimation du paramètre  $\theta$  celle qui maximise la vraisemblance  $L(X, \theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ .

En pratique l'estimation de  $\theta$  sera une solution de l'équation de vraisemblance :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln(X, \theta) = 0$$

Nous remarquerons que cette équation n'a pas forcément une solution unique (Saporta, 2006).

Dans le cas de l'estimation des composantes de la variance, la densité de probabilité dépend des composantes à estimer au travers de la matrice de variance covariance  $Q_l$  et des inconnues du problème contenues dans le vecteur  $X$ . De plus, cet estimateur est biaisé et n'est pas de minimum de variance (van Loon, 2008).

Cette approche a été pour la première fois mise en œuvre pour l'estimation des composantes de la variance par Kubik (Bähr *et al.*, 2007) et (Kubik, 1970). Pour plus de détails sur cette méthode se référer à (Searle, 1994).

### II.2.3.2 - REML

Basée sur ce même principe, une autre méthode a été développée : *REstricted Maximum Likelihood*. Cette méthode est une version simplifiée de l'estimation par maximum de vraisemblance. De plus amples informations sont disponibles dans (Searle, 1994) et (van Loon, 2008).

## II.2.4 - LSVCE

*Least-Square Variance Component Estimation*, cet estimateur a été développé par Teunissen et Amiri-Simkooei en 2007 et s'appuie sur la théorie des moindres carrés.

Sa construction est basée sur le passage du modèle d'équations d'observations de Gauss-Markov, à un modèle d'équations de conditions. Ce second modèle pourra, suite à un jeu d'écriture, être interprété comme des équations d'observation où les composantes de la variance sont les inconnues.

Intéressons-nous à la détermination des composantes de la variance à l'aide de la LSVCE. Les démonstrations et raisonnements sont détaillés dans (Amiri-Simkooei, 2007). Pour commencer, le passage des équations d'observation aux équations de condition fait intervenir une matrice  $B$  de taille  $(n, n-m)$  vérifiant  $B^T A = 0$  (Teunissen et Amiri-Simkooei, 2007) et un vecteur  $t$  qui s'exprime  $t = B^T Y$ . Le problème est alors étendu de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \hat{X} \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_X A^T Q_L^{-1} \\ B^T \end{bmatrix} Y \quad \Leftrightarrow \quad Y = [A \quad Q_L B Q_t^{-1}] \begin{bmatrix} \hat{X} \\ t \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{aligned} Q_t &= B^T Q_L B \\ Q_X &= (A^T Q_L^{-1} A)^{-1} = N^{-1} \end{aligned}$$

Notons que  $E(t) = 0$ . En effet, ce vecteur ne doit pas ajouter d'information au problème.

En partant du modèle de Gauss-Markov et en passant aux équations de condition, le problème s'écrit sous la forme :

$$E(tt^T) - B^T Q_0 B = \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 B^T Q_k B \quad , \quad P_{quelconque}$$

Soit, d'après le caractère linéaire de l'espérance :

$$E(tt^T - B^T Q_0 B) = \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 B^T Q_k B \quad , \quad P_{quelconque}$$

Ceci peut être interprété en termes d'équation d'observations où les  $\sigma_k^2$  sont les inconnues (Amiri-Simkooei, 2007, p.37). De plus, l'estimation de minimum de variance peut être obtenue en choisissant judicieusement la matrice des poids :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} Q_t^{-1}$$

Cependant, très souvent, et c'est notre cas, nous ne disposons pas de cette matrice  $B$  mais plutôt de la matrice  $A$  associée au modèle de Gauss-Markov initial du problème. Aussi Teunissen et Amiri-Simkooei ont-ils proposé une formulation faisant intervenir cette dernière matrice et non plus  $B$ . Nous parlons des modèles A et B.

Dans ce cas nous aurons, pour obtenir l'estimation de minimum de variance, les formules suivantes :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} Q_L^{-1}$$

Le passage de l'une à l'autre des expressions se fait en utilisant un projecteur orthogonal, qui s'exprime comme suit :

$$P_A^\perp = I - A(A^T Q_L^{-1} A)^{-1} A^T Q_L^{-1} = Q_L B (B^T Q_L B)^{-1} B^T$$

Présentons alors la formulation qui en découle.

$$n_{kl} = \frac{1}{2} \text{Tr}(Q_k Q_L^{-1} P_A^\perp Q_l Q_L^{-1} P_A^\perp)$$

et

$$c_k = \frac{1}{2} V^T Q_L^{-1} Q_k Q_L^{-1} V - \frac{1}{2} \text{Tr}(Q_k Q_L^{-1} P_A^\perp Q_0 Q_L^{-1} P_A^\perp)$$

Soit si  $Q_0=0$  :

$$c_k = \frac{1}{2} V^T Q_L^{-1} Q_k Q_L^{-1} V$$

Avec  $V = P_A^\perp Y$  les résidus.

Nous pouvons alors en déduire les composantes de la variance :

$$\hat{\sigma}^2 = [\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \dots, \hat{\sigma}_p^2] = N_{VCE}^{-1} C_{VCE}$$

Cette méthode est itérative, autant d'itérations que nécessaire sont réalisées jusqu'à ce que les valeurs des  $\hat{\sigma}_k$  ne varient plus.

La LSVCE présente plusieurs avantages. Pour commencer, il est possible d'avoir des informations de précision portant que les facteurs  $\hat{\sigma}_k^2$ . En effet, la matrice de covariance associée à  $\hat{\sigma}^2$  est  $Q_{\hat{\sigma}^2} = N_{VCE}^{-1}$ . De plus, les valeurs des facteurs peuvent être négatives, mais il suffit alors d'utiliser les moindres carrés sous contrainte pour pallier ce problème. Cependant, cela affecte le caractère non biaisé des estimateurs.

La LSVCE est donc une méthode souple et relativement simple dans sa mise en œuvre. De plus, c'est la seule méthode présentée ici qui peut pallier la problématique d'une estimation négative.

## Chapitre 3 : Illustration

Nous allons illustrer les méthodes HVCE et LSVCE à partir d'un exemple simple.

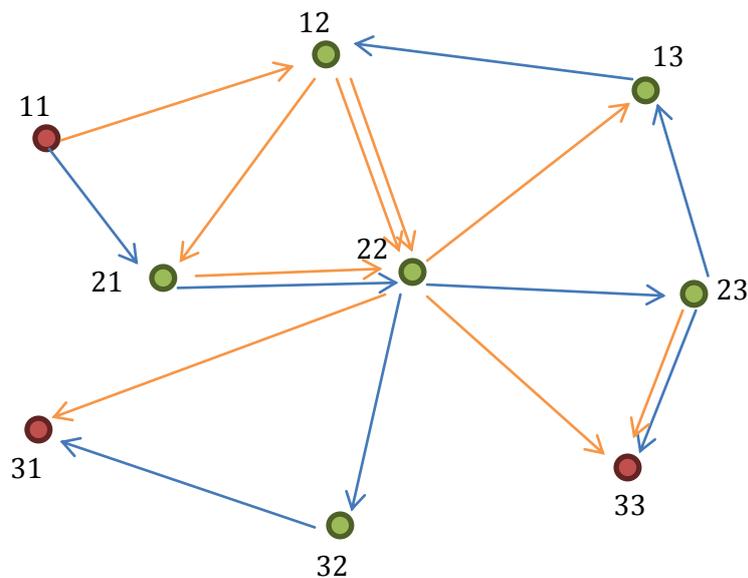
### II.3.1 - Exemple utilisé

Imaginons un chantier de nivellement utilisant deux appareils niv1 et niv2 distincts. Il est alors nécessaire, pour combiner les observations, de les pondérer correctement les unes par rapport aux autres. Intuitivement nous comprenons que deux groupes sont formés, chacun comprenant les observations propres à un instrument.

Cet exemple est intéressant car le problème s'exprime de façon relativement simple puisque les équations d'observation liées à un problème de nivellement sont linéaires et, en notant  $D_{nij}$  la dénivelée de  $i$  vers  $j$  et  $H_i$  l'altitude de  $i$ , s'expriment :

$$D_{nij} = H_j - H_i$$

Nous noterons les dénivelées de la manière suivante : a-b la dénivelée de a vers b ; et numéroterons  $_{.1}$  (respectivement  $_{.2}$ ) tous les éléments relatifs aux mesures issues de niv1 (respectivement niv2).



**Figure 11** : Schématisation du réseau de nivellement et des observations réalisées par niv1 (bleu) et niv2 (orange). Les points connus sont en rouge, les autres en vert.

Comme schématisé sur la Figure 11, le réseau comprend 9 points (11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32 et 33) dont trois connus (11, 31 et 33). niv1 observe les dénivelées 11-21, 21-22, 22-23, 23-13, 13-12, 23-33, 22-32, 32-31 et niv2 les dénivelées 11-12, 12-21, 12-22, 22-13, 12-22, 21-22, 22-31, 22-33, 23-33.

Le groupe 1 comporte donc  $n_1 = 8$  observations et le groupe 2  $n_2 = 9$  observations. Les données brutes utilisées sont répertoriées dans le Tableau 1.

Nous construisons la matrice des poids  $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$  en considérant les précisions sur les appareils suivantes :  $\sigma_{niv1} = 0,3 \text{ mm}/\sqrt{km}$  et  $\sigma_{niv2} = 3 \text{ mm}/\sqrt{km}$ .

Ensuite, nous réalisons l'ajustement des mesures par la méthode des moindres carrés. Nous obtenons ainsi la matrice normale  $N$  et la matrice des résidus  $V$ .

Ces deux matrices sont de la forme suivante :

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \text{ et } V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

	Dénivelée	Valeur (m)	Portée (km)
Niveau n°1	11--21	-20,7278	4,922
	21--22	32,7770	3,594
	22--23	-16,3622	5,557
	23--13	-27,9868	0,357
	13--12	31,5280	2,491
	23--33	-0,6024	1,339
	22--32	-28,5084	4,787
	32--31	17,0313	2,577
Niveau n°2	11--12	-0,7724	1,431
	12--21	-19,9570	0,922
	12--22	12,8220	3,554
	22--13	-44,3525	1,711
	12--22	12,8238	4,060
	21--22	32,7781	0,318
	22--31	-11,4806	2,769
	22--33	-16,9628	0,461
	23--33	-0,6000	0,971

**Tableau 1** : Observations du réseau de nivellement.

### II.3.2 - Modèle stochastique

Nous utilisons le modèle stochastique présenté dans la partie II.1.2 -. Nous rappelons qu'il est de la forme :

$$Q_L = Q_0 + \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 Q_k$$

Dans le cas du nivellement, la matrice de covariance n'a pas de partie constante indépendante des composantes de la variance. Aussi considérerons-nous  $Q_0 = 0$ .

Nous avons donc finalement une matrice de covariance associée aux observations de la forme :

$$Q_L = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 Q_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 Q_2 \end{bmatrix}$$

### II.3.3 - Application de la HVCE

Une fois l'ajustement réalisé il devient possible d'estimer les facteurs de variance  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$ . Tout d'abord, nous construisons l'équation d'Helmert selon les formules précédentes.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1^T P_1 V_1 \\ V_2^T P_2 V_2 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{aligned} h_{11} &= n_1 - 2Tr(N^{-1}N_1) + Tr(N^{-1}N_1N^{-1}N_1) \\ h_{22} &= n_2 - 2Tr(N^{-1}N_2) + Tr(N^{-1}N_2N^{-1}N_2) \\ h_{12} &= Tr(N^{-1}N_2N^{-1}N_1) \end{aligned}$$

Comme cela est expliqué dans la partie II.2.1 -, nous initions les valeurs approchées à 1 pour chaque coefficient à estimer, c'est-à-dire que toute l'information sur les précisions des niveaux est contenue dans les matrices  $Q_1$  et  $Q_2$ . Ensuite, à chaque itération nous appliquons le coefficient estimé à la matrice des poids associée de la manière suivante :

$$P_k \leftarrow \frac{P_k}{\sigma_k^2}$$

Des itérations sont réalisées jusqu'à ce que les estimateurs valent tous 1. Dans cet exemple quatre itérations suffisent, comme le montre le Tableau 2. Nous observons effectivement que la convergence est rapide.

Itération	$\sigma_1^2$ itératif	$\sigma_2^2$ itératif	$\sigma_1^2$ cumulé	$\sigma_2^2$ cumulé
0	1	1	1	1
1	1,5255	0,3163	1,5255	0,3163
2	0,9975	1,0072	1,5217	0,3186
3	0,9993	1,0002	1,5206	0,3186
4	0,9999	1,0000	<b>1,5205</b>	<b>0,3186</b>

**Tableau 2** : Résultats de l'HVCE à chaque itération et valeurs cumulées. Critère de convergence de 0,0001.

Les résultats à chaque itération sont répertoriés dans le Tableau 2, nous pouvons en déduire les valeurs cumulées des composantes de la variance, c'est-à-dire celles correspondant à la matrice des poids initiale. En effet, celle-ci est modifiée à chaque itération. Pour avoir la valeur des composantes finales ( $\sigma_1^2 = 1,5205$  et  $\sigma_2^2 = 0,3186$ ), il suffit de multiplier les coefficients estimés à chaque itération entre eux.

### II.3.4 - Application de la LSVCE

Pour réaliser l'estimation des composantes de la variance par la LSVCE deux matrices sont à construire, nous les noterons  $N_{LSVCE}$  et  $I_{LSVCE}$ .

En considérant le vecteur des inconnues suivant :

$$\sigma^2 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Nous avons :

$$l_{LSVCE} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \hat{V}^T Q_L^{-1} Q_1 \hat{V} \\ \frac{1}{2} \hat{V}^T Q_L^{-1} Q_2 \hat{V} \end{bmatrix}$$

$$N_{LSVCE} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} Tr(Q_1 Q_L^{-1} P_A^\perp Q_1 Q_L^{-1} P_A^\perp) & \frac{1}{2} Tr(Q_1 Q_L^{-1} P_A^\perp Q_2 Q_L^{-1} P_A^\perp) \\ \frac{1}{2} Tr(Q_1 Q_L^{-1} P_A^\perp Q_2 Q_L^{-1} P_A^\perp) & \frac{1}{2} Tr(Q_2 Q_L^{-1} P_A^\perp Q_2 Q_L^{-1} P_A^\perp) \end{bmatrix}$$

Avec :

$$P_A^\perp = I - A \left( \frac{1}{\sqrt{2}} A^T Q_L^{-1} A \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} A^T Q_L^{-1}$$

Et finalement :  $\sigma = N_{LSVCE}^{-1} l_{LSVCE}$

Cette fois encore nous utilisons une approche itérative. Mais contrairement à l'HVCE, aucune repondération n'est effectuée au fil des itérations. Nous obtenons donc à convergence les valeurs finales de nos estimateurs.

Itération	$\sigma_1^2$	$\sigma_2^2$
0	1	1
1	1,5255	0,3163
2	1,5216	0,3185
3	1,5206	0,3186
4	<b>1,5205</b>	<b>0,3186</b>

**Tableau 3** : Résultats de la LSVCE à chaque itération. Critère de convergence de 0,0001

Les valeurs ainsi obtenues sont les mêmes que précédemment. De plus la convergence s'effectue avec le même nombre d'itérations.

### II.3.5 - Influence sur la solution

Une fois les pondérations correctes déterminées, nous pouvons recalculer la solution et observer les variations, cela est mis en évidence dans le Tableau 4. Nous pouvons noter une légère modification de la solution allant de 0 mm à 0,2 mm, ce qui est ici négligeable. Le fait que cet écart soit minime vient du fait que les poids étaient proches des valeurs finales. Aussi la repondération n'a que très peu d'effet sur la solution.

Point	Solution avant LSVCE (m)	Solution après LSVCE (m)	Écart (mm)
12	95,7168	95,717	0,2
13	64,1888	64,189	0,2
21	75,7605	75,7607	0,2
22	108,5377	108,5376	0,1
23	92,1757	92,1758	0,1
32	80,0284	80,0284	0

**Tableau 4** : Solution des moindres carrés (altitudes) avant et après repondération et écart entre les deux.

### II.3.6 - Extension au cas non linéaire

Dans le cas de problèmes non linéaires tels que l'ajustement d'observations topographiques, la mise en œuvre de la LSVCE diffère légèrement.

La démarche à suivre est alors la suivante :

- Ajustement et obtention de la solution 0 ;
- Application de la VCE et détermination des nouveaux poids ;
- Ajustement avec les nouveaux poids et obtention de la solution 1 ;
- Comparaison de l'écart entre les solutions 0 et 1 et le critère de convergence ;
- Si l'écart est inférieur au critère de convergence, nous considérons la solution 1 comme finale. Sinon :
  - Application de la VCE ;
  - Ajustement avec les nouveaux poids et détermination de la solution 2 ;
  - Comparaison de l'écart entre les solutions 1 et 2 et le critère de convergence ;
  - Si l'écart est inférieur au critère de convergence, nous considérons la solution 2 comme finale. Sinon :
    - ...

Nous continuons ainsi jusqu'à obtention de la solution finale pour laquelle les résultats de la VCE ne varient plus et valent, en principe, 1. Ceci est similaire au processus itératif de la HVCE.

## Chapitre 4 : Mise en œuvre de la VCE

Nous avons présenté et illustré les méthodes HVCE et LSVCE. Nous allons maintenant les mettre en œuvre dans le cadre de notre problématique de la combinaison des observations topométriques et GNSS. L'objectif est donc ici d'obtenir notre propre jeu de données et de mettre en œuvre la LSVCE et la HVCE dessus.

### II.4.1 - Présentation du chantier

Nous avons réalisé une campagne de mesures le 8 avril 2015. Le réseau choisi est un réseau à trois points. Les points P1 et P2 sont distants de 50 m, P2 et P3 sont espacés de 100 m et P1 et P3 de 110 m. Le réseau est situé à proximité de l'ESGT comme le montre le plan de localisation de la Figure 12. Ce réseau ne nous a permis d'acquérir que peu de données, mais cela est un choix. Le but est ici d'illustrer la mise en œuvre de la LSVCE et de la HVCE sur les données liées à notre problématique.



Figure 12 : Plan de localisation du chantier (en rouge), à proximité de l'ESGT au Mans.



Figure 13 : Photographie du chantier et position des points.

Nous pouvons voir, sur la Figure 13, le chantier et la disposition des points les uns par rapport aux autres. Le chantier est donc relativement plat, il n'y a pas de dénivelée importante

entre les points et tous se voient entre eux. De plus, comme illustré sur la Figure 14, les points sont chacun équipés d'un montage spécifique impliquant l'utilisation de cadres métalliques permettant la superposition d'un prisme, et d'un appareil ou d'un prisme et d'une antenne GNSS en conservant l'alignement. Détaillons ces montages. Nous noterons au préalable que les prismes Trimble MultiTrack et Leica GRZ122 permettent la fixation d'une antenne GNSS à leur sommet.

Point P1 :

- Trépied ;
- Embase ;
- Support cadre métallique ;
- Embase ;
- Station totale Leica TCA1800 ;
- Adaptateur pour prisme ;
- Prisme Trimble MultiTrack ;
- Antenne GNSS LEIAT502.

Point P2 :

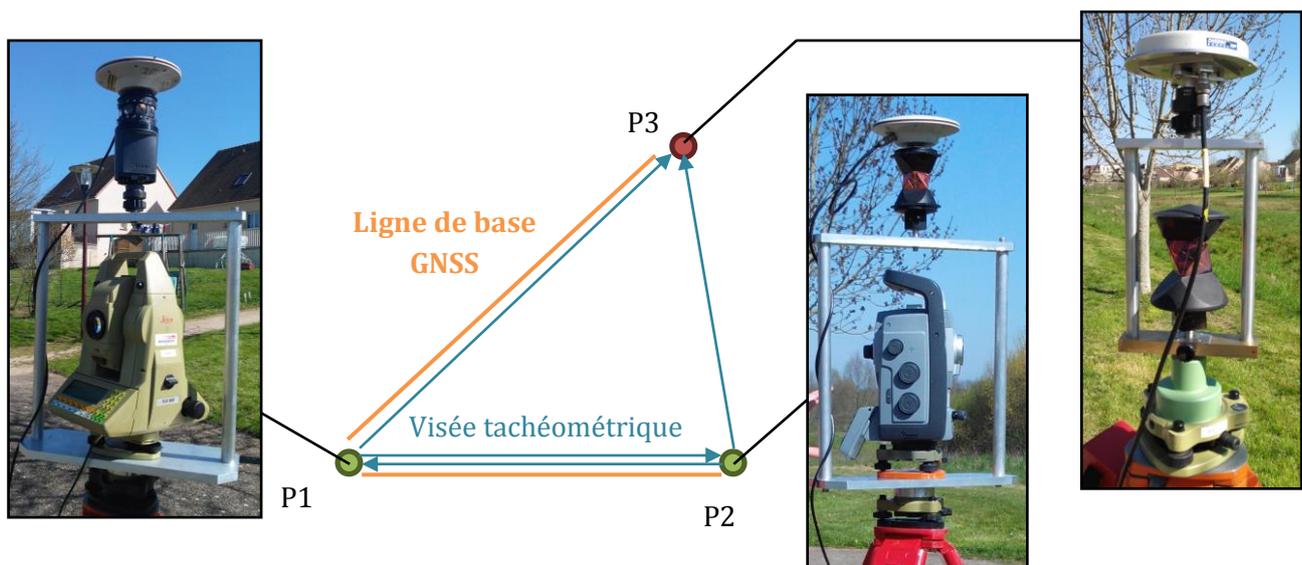
- Trépied ;
- Embase ;
- Support cadre métallique ;
- Embase ;
- Station totale Trimble S8 ;
- Prisme Leica 360° GRZ122 ;
- Antenne GNSS LEIAT502.

Point P3 :

- Trépied ;
- Embase ;
- Support de prisme ;
- Support cadre métallique ;
- Prisme Leica 360° GRZ4 ;
- Antenne GNSS THANAP002.

Les mesures réalisées sont schématisées sur la Figure 14 et sont les suivantes :

- P1 → P3 (Hz, Az, Dp) ;
- P1 → P2 (Hz, Az, Dp) ;
- P2 → P3 (Hz, Az, Dp) ;
- P2 → P1 (Hz, Az, Dp) ;
- P1 → P3 ligne de base GNSS ;
- P2 → P3 ligne de base GNSS.



**Figure 14 :** Schéma du réseau mis en place et des observations réalisées, et photographies des montages installés sur chaque point

Une fois les instruments installés nous avons enregistré les mesures pendant une heure. Les stations totales faisaient les tours d'horizon automatiquement et en continu et les récepteurs GNSS enregistraient les observations à une cadence de dix secondes.

## II.4.2 - Traitement des données

Nous avons ensuite traité les observations récoltées. Nous avons commencé par calculer à l'aide de LGO les vecteurs GNSS à l'aide de LGO et avons procédé ainsi pour le calcul des lignes de base :

- Utilisation des corrections de centre de phase recommandées par l'IGN et issues du fichier *ngs08.atx* de l'IGS (International GNSS Service) ;
- Calcul de P1 à partir de MAN2 ;
- Fixation de P1 à ses coordonnées calculées ;
- Calcul de la ligne de base P1 → P2 ;
- Calcul de la ligne de base P1 → P3.

Ensuite, nous avons réduit les observations topométriques réalisées en double retournement. Pour ce faire nous avons utilisé l'utilitaire GGW, développé au sein de l'équipe L2G, et qui permet de convertir les observations topométriques brutes en fichier au format Geolab.

Afin de corriger les observations de distance nous avons tenu compte des constantes d'addition suivantes (Bohnenstingl, 2014) et (Trimble, 2008) :

- Couple Leica TCA1800 – GRZ4 : +23,1 mm ;
- Couple Leica TCA1800 – GRZ22 : +23,1 mm ;
- Couple Trimble S8 – MultiTrack : +10 mm ;
- Couple Trimble S8 – GRZ4 : -11,3 mm.

Nous avons également corrigé les distances des paramètres météo qui étaient : une pression atmosphérique de 1029,5 hPa, une température de 18,5°C et un taux d'humidité de 23%.

Pour l'ajustement nous avons considéré les précisions suivantes :

- Pour la station Leica TCA1800 (Leica Geosystems, 2004) :
  - 3 dmgon sur les angles  $H_z$  et  $A_z$  ;
  - $\pm 0,5 \text{ mm} \pm 1 \text{ ppm}$  sur les distances  $D_p$  ;
- Pour la station Trimble S8 (Trimble, 2007-2008) :
  - 1,5 dmgon sur les angles  $H_z$  et  $A_z$  ;
  - $\pm 0,5 \text{ mm} \pm 1 \text{ ppm}$  sur les distances  $D_p$  ;
- Pour les précisions de centrage (Leica Geosystems, 2009), étant donné les prismes utilisés :
  - 2 mm.

Nous obtenons alors le fichier au format Geolab contenant les mesures topométriques.

Nous avons ainsi pu lancer le traitement global des observations par la méthode des moindres carrés en utilisant CoMeT. Nous noterons que le critère de convergence que nous avons choisi est de 1 mm. Suite à cela, nous pouvons mettre en oeuvre la VCE.

## II.4.3 - Mise en œuvre de la VCE sur notre jeu de données

### II.4.3.1 - Choix des méthodes

Les méthodes de VCE que nous avons choisies de mettre en place sont la HVCE et la LSVCE.

La HVCE nous intéresse car elle est la première technique mise au point. De plus, nombre des techniques nées ultérieurement lui sont équivalentes dans le cas particulier des erreurs normalement réparties. Rappelons que nous travaillons sous cette hypothèse.

La LSVCE, quant à elle, est la méthode la plus souple et permet notamment de pallier le problème des résultats négatifs intermédiaires et même finaux. En effet, dans la méthode Helmert, la matrice des poids est modifiée à chaque itération en fonction des valeurs estimées des composantes de la variance. Cela peut être problématique dans le cas où certains résultats intermédiaires sont négatifs car cela n'a alors aucun sens de multiplier la matrice des poids par leur inverse. De plus, dans le cas où ce serait les résultats finaux qui seraient négatifs, la méthode de Helmert n'offre aucune solution pour corriger cela contrairement à la LSVCE. En effet, il suffit alors avec cette dernière méthode de reformuler le problème sous la forme d'un problème sous contraintes où l'on force les valeurs des composantes de la variance à être positives.

### II.4.3.2 - Mise en œuvre de la LSVCE

Nous avons vu comment mettre en œuvre la LSVCE avec l'exemple du réseau de nivellement. Le problème était alors linéaire. Cette fois nous sommes face à des moindres carrés non linéaires. La résolution du problème est donc itérative. De plus, la matrice  $A$  (équation (2)), et par conséquent les matrices  $V$ ,  $N$ ,  $C$  et  $\hat{X}$ , dépendent des valeurs approchées des inconnues. C'est pourquoi il est nécessaire de travailler à convergence pour appliquer la LSVCE, de cette façon l'ensemble des matrices utilisées, et notamment la matrice  $A$ , sont les matrices finales.

Après avoir appliqué la LSVCE nous utilisons les nouveaux poids pour recalculer la solution. Nous pouvons alors appliquer de nouveau la LSVCE et continuer ainsi jusqu'à ce que les composantes de la variance estimées soient toutes de 1. Nous obtenons alors la solution des moindres carrés obtenue avec les pondérations correctes au sens de la LSVCE.

Pour mettre en œuvre la LSVCE, nous avons développé des scripts sous Matlab qui s'interfacent avec CoMeT. Les groupes de mesures réalisés sont les suivants :

- Groupe 1 : les observations topométriques auxquelles nous associons le coefficient  $\sigma_t$  ;
- Groupe 2 : les vecteurs GNSS auxquelles nous associons le coefficient  $\sigma_g$ .

Nous avons utilisé deux jeux de données issus de la même campagne de mesure. Le premier jeu (J1) correspond aux observations réalisées entre 16h30 et 16h45, le second jeu (J2) correspond, lui, aux observations faites entre 16h45 et 17h. Deux jeux peuvent sembler peu, mais cela permet de répondre à nos objectifs d'illustration et de mise en œuvre.

Présentation des résultats à chaque itération :

Il est important de noter que nous appelons ici itération l'application des résultats de la VCE à l'ajustement par moindres carrés. Étant donné que nous utilisons des moindres carrés non linéaires ceci est fait autant de fois que nécessaire, jusqu'à ce que les coefficients estimés par la LSVCE valent 1.

Pour mettre en œuvre la LSVCE nous avons, comme le montre le Tableau 5, initialisé les valeurs des coefficients à 1. Nous avons arbitrairement choisi pour ce calcul un critère d'arrêt de 0,0001. Pour J1 nous remarquons que 14 itérations sont nécessaires pour que les coefficients soient de 1 alors que pour J2 29 itérations sont nécessaires. Finalement, les valeurs de repondération à appliquer à nos jeux de données initiaux sont :

- Pour J1 :  $\sigma_t^2 = 31,1295$  et  $\sigma_g^2 = 0,3708$  ;
- Pour J2 :  $\sigma_t^2 = 21,4878$  et  $\sigma_g^2 = 533,0880$ .

Itération	J1		J2	
	$\sigma_t^2$	$\sigma_g^2$	$\sigma_t^2$	$\sigma_g^2$
0	1	1	1	1
1	24,1351	0,3691	24,2829	131,4703
2	13,3125	0,6082	10,7275	22,8888
3	2,6236	0,7819	1,7339	8,7450
4	1,1360	0,8848	1,0236	3,2691
5	1,0109	0,9407	1,0013	1,8135
6	1,0010	0,9699	0,9998	1,3470
7	1,0000	0,9848	1,0000	1,1604
8	1,0000	0,9924	0,9998	1,0776
9	1,0000	0,9962	1,0000	1,0379
10	1,0000	0,9981	0,9998	1,0191
11	1,0000	0,9991	1,0000	1,0093
12	1,0000	0,9995	0,9999	1,0048
13	1,0000	0,9998	1,0000	1,0024
14	1,0000	0,9999	0,9998	1,0016
...	<b>CONVERGENCE</b>		...	...
27			0,9999	1,0001
28			0,9999	1,0001
29			0,9999	1,0001
<b>CONVERGENCE</b>				
<b>Valeurs cumulées</b>	<b>31,1295</b>	<b>0,3708</b>	<b>21,4878</b>	<b>533,0880</b>

**Tableau 5 :** Résultats à chaque itération et cumulés de la LSVCE appliquée aux jeux de données J1 et J2. Critère de convergence de 0,0001

#### II.4.3.3 - Comparaison à la HVCE

Les méthodes LSVCE et HVCE sont théoriquement équivalentes. Il reste cependant intéressant de vérifier que dans le cas expérimental lié à nos observations nous retrouvons bien cette équivalence des deux méthodes d'estimation des composantes de la variance.

Contrairement à la LSVCE, la mise en œuvre de la HVCE reste la même dans les cas linéaire et non linéaire puisqu'à chaque itération les coefficients sont appliqués aux données et les matrices de l'ajustement par moindres carrés sont recalculées.

La mise en œuvre de la HVCE a également été réalisée au travers du développement de scripts Matlab s'interfaçant avec CoMeT.

	J1			J2		
	LSVCE	HVCE	Écart	LSVCE	HVCE	Écart
$\sigma_t^2$	31,13	31,15	0,02	21,49	21,39	0,10
$\sigma_g^2$	0,37	0,37	0,00	533,09	536,69	3,60

**Tableau 6** : Comparaison des résultats de la LSVCE et de la HVCE pour chaque jeu de données

Comme nous pouvons le voir avec le Tableau 6, la LSVCE et la HVCE donnent des résultats similaires pour chaque jeu de mesure. En effet, les écarts sont négligeables devant la valeur de l'estimation.

#### II.4.3.4 - Comparaison à une repondération manuelle

Nous connaissons maintenant les valeurs de repondération issues de la VCE. Il devient alors intéressant de comparer les précisions obtenues en repondérant les mesures par les coefficients de la VCE à celles que l'on pourrait obtenir en repondérant les observations manuellement. Nous qualifions ici de manuelle toute méthode de repondération autre que la VCE.

Se pose alors la question de ce qu'est une repondération manuelle. Il existe en effet plusieurs façons de procéder. Nous avons choisi trois démarches à comparer à la LSVCE :

- Repondération par groupe de mesures : nous reprenons les groupes de mesure de la VCE et les repondérons jusqu'à faire passer le test du Chi-2 (Manuel 1) ;
- Repondération globale des observations : nous repondérons toutes les observations par la valeur de l'estimateur du facteur unitaire de variance (Manuel 2) ;
- Repondération des mesures individuellement : nous regardons quels résidus sont les plus élevés et multiplions par deux la précision de la mesure associée jusqu'à ce que le test du Chi-2 soit validé (Manuel 3).

#### Cas manuel 1

Si nous souhaitons repondérer manuellement les observations selon deux groupes comme le fait la LSVCE, une méthode est de commencer par ajuster séparément chaque groupe de mesure, puis l'ensemble des données combinées afin d'analyser le comportement des estimateurs des facteurs unitaires de variance.

Détaillons les résultats numériques obtenus en suivant cette démarche. Estimateurs des facteurs unitaires de variance obtenus :

J1 :

- Ajustement topométrique : 13,46 ;
- Ajustement GNSS : 0,37 ;
- Ajustement global : 19,54.

J2 :

- Ajustement topométrique : 13,25 ;
- Ajustement GNSS : 87,78 ;
- Ajustement global : 38,96.

Nous observons au travers de ces résultats que la topométrie est stable alors que l'ajustement GNSS a un comportement totalement différent sur les deux jeux de données. Nous considérons donc que l'ajustement topométrique est l'ajustement sur lequel nous allons nous appuyer pour faire passer le test du Chi-2 à nos observations.

Ainsi, nous partons des observations topométriques seules, que nous considérons sans faute, et nous les repondérons par la valeur de l'estimateur du facteur unitaire de variance qui

leur est associé de sorte que le test du Chi-2 soit validé. À ces observations nous ajoutons alors les vecteurs GNSS, eux aussi considérés sans faute, et déterminons manuellement le facteur à appliquer aux matrices de covariance qui leur sont associées. Ce facteur doit permettre la validation du test du Chi-2.

En procédant ainsi nous obtenons les valeurs de repondération du Tableau 7, c'est-à-dire les valeurs des facteurs unitaires de variance pour la topométrie et pour le GNSS (200 pour J1 et 400 pour J2).

	J1		J2	
	LSVCE	Manuel	LSVCE	Manuel
$\sigma_t^2$	31,130	13,460	21,488	13,253
$\sigma_g^2$	0,371	200,000	533,088	400,000
rapport des coefficients	0,012	14,859	24,809	30,183

**Tableau 7** : Valeurs des coefficients de repondération déterminées manuellement pour chaque groupe de mesures et rapports des coefficients  $\sigma_g^2/\sigma_t^2$ .

Nous pouvons alors observer que la repondération manuelle est très éloignée de celle donnée par la VCE. En effet, la VCE a tendance à davantage repondérer la topométrie que nous ne le faisons.

De plus, ce qui est intéressant à observer est la pondération relative des groupes. Pour cela nous nous intéressons à la valeur du rapport  $\sigma_g^2/\sigma_t^2$  pour les coefficients issus de la LSVCE et ceux issus du processus manuel. Nous remarquons alors que nous n'obtenons pas les mêmes pondérations relatives. Elles sont d'ailleurs très éloignées pour le jeu de données J1. En effet, nous avons une valeur de 0,012 avec les coefficients de la LSVCE et 14,859 dans le cas manuel. Cela signifie donc que la LSVCE accorde davantage d'importance aux observations GNSS que nous ne le faisons. Il en va de même, dans une moindre mesure, dans le cas de J2.

Ces différences de pondération ont une influence sur les valeurs des régions de confiance ainsi que sur la solution. Étudions cela au travers des écarts entre celles associées à la repondération par LSVCE et celles associées à la repondération manuelle.

		P2	P3		
		Vertical (m)	1/2 grand-axe (m)	1/2 petit-axe (m)	Vertical (m)
J1	Écart (Manuel 1 - LSVCE)	0,0050	0,0089	0,0076	0,0082
	Pourcentage amélioration	92,02	96,34	96,56	94,55
J2	Écart (Manuel 1 - LSVCE)	0,0003	0,0112	0,0014	0,0001
	Pourcentage amélioration	4,83	90,74	12,30	0,83
		Hauteur (m)	Nord (m)	Est (m)	Hauteur (m)
J1	Écart (Manuel 1 - LSVCE)	0,005	0,003	-0,001	-0,007
J2	Écart (Manuel 1 - LSVCE)	0,003	0,006	-0,002	-0,001

**Tableau 8** : Écarts sur les régions de confiances et les solutions entre la repondération selon la VCE et la repondération « manuel 1 ».

Nous voyons, grâce au Tableau 8, que la LSVCE donne de meilleures précisions que ce cas manuel pour les deux jeux de données. Nous observons en effet une amélioration des résultats de la LSVCE sur ceux de la repondération manuelle allant de 0,8% à 96%. Cette amélioration est plus importante sur J1 que J2. De plus, nous notons que les solutions obtenues suites à ces deux repondérations divergent entre elles de 1 à 7 mm. Cela est important au vu du critère de

convergence de l'ajustement fixé à 1 mm. Nous voyons ressortir ici l'influence de la pondération relative des observations.

### **Cas manuel 2**

Il s'agit ici de repondérer globalement les observations, nous ne modifions donc pas les pondérations relatives des observations. Les valeurs utilisées sont celles des estimateurs des facteurs unitaires de variance :

- Dans le cas de J1 : 19,0354 ;
- Dans le cas de J2 : 38,9624.

		P2	P3		
		Vertical (m)	1/2 grand-axe (m)	1/2 petit-axe (m)	Vertical (m)
J1	Écart (Manuel 2 - LSVCE)	0,0030	0,0029	0,0023	0,0037
	Pourcentage amélioration	87,57	89,44	89,41	88,73
J2	Écart (Manuel 2 - LSVCE)	-0,0012	0,0030	-0,0066	-0,0046
	Pourcentage amélioration	-28,67	72,49	-190,46	-91,02
		Hauteur (m)	Nord (m)	Est (m)	Hauteur (m)
J1	Écart (Manuel 2 - LSVCE)	0,002	0,000	0,000	-0,001
J2	Écart (Manuel 2 - LSVCE)	-0,005	-0,001	0,000	0,002

**Tableau 9** : Écarts sur les régions de confiances et les solutions entre la repondération selon la VCE et la repondération « manuel 2 ».

De même que précédemment, il est intéressant de comparer les précisions et les solutions issues de la repondération manuelle et de la LSVCE. Le Tableau 9 nous montre que la LSVCE donne de meilleurs résultats pour J1 mais pas pour J2. En effet, l'amélioration de la LSVCE sur la repondération manuelle sur J1 va de 87% à 89% alors que sur J2 elle est négative et peut atteindre -190%. Les écarts sur les positions sont, quant à eux, globalement plus faibles que dans le cas précédent et n'excèdent pas 5 mm. Nous restons cependant supérieurs au critère de convergence de 1 mm.

### **Cas manuel 3**

Cette fois, nous procédons de manière systématique et automatique. Nous réalisons l'ajustement et regardons la valeur des résidus normés (ce sont les résidus divisés par leur précision) et déterminons lequel a la valeur maximum. Nous repondérons alors l'observation associée par 2. Nous procédons ainsi jusqu'à validation du test du Chi-2. Nous ne détaillerons pas les étapes de ces repondérations.

		P2	P3		
		Vertical (m)	1/2 grand-axe (m)	1/2 petit-axe (m)	Vertical (m)
J1	Écart (Manuel 3 - LSVCE)	0,0032	0,0004	0,0003	0,0006
	Pourcentage amélioration	88,06	55,26	55,00	54,37
J2	Écart (Manuel 3 - LSVCE)	-0,0022	-0,0004	-0,0094	-0,0086
	Pourcentage amélioration	-65,27	-45,19	-1422,73	-896,88
		Hauteur (m)	Nord (m)	Est (m)	Hauteur (m)
J1	Écart (Manuel 3 - LSVCE)	0,004	0,000	0,000	0,000
J2	Écart (Manuel 3 - LSVCE)	0,005	-0,001	0,000	0,002

**Tableau 10** : Écarts sur les régions de confiances et les solutions entre la repondération selon la VCE et la repondération « manuel 3 ».

De même que dans le cas précédent, le

Tableau 10 nous montre que la LSVCE permet l'obtention de plus petites régions de confiance pour J1 mais pas pour J2. L'amélioration de la LSVCE sur le cas manuel 3 sur J1 est comprise entre 54% et 88% alors qu'elle est négative pour J2 et atteint plus de 1000%.

Les écarts sur les positions sont, eux, toujours de l'ordre de quelques millimètres et continuent, globalement, d'excéder le critère de convergence.

Cette manière de repondérer mesure par mesure perd de son sens et n'a pas de réelle logique physique. En effet, cela revient à dire qu'un appareil a été moins précis sur certaines de ses mesures, pourtant réalisées dans les mêmes conditions, que d'autres non repondérées.

Nous pouvons donc constater, au travers des résultats précédents, que la LSVCE ne permet pas systématiquement d'obtenir les meilleures régions de confiance face à des méthodes de repondération manuelle. Nous remarquons, de plus, que le choix des pondérations relatives a une réelle influence sur les résultats.

Cependant, certaines de ces méthodes sont discutables dans la logique qu'elles renferment. En effet, la problématique inhérente à la combinaison de mesures est la pondération relative des observations. Il nous semble alors intuitif de dire que cette pondération relative fonctionne sous forme de groupes au sein desquels les observations sont jugées correctement pondérées les unes par rapport aux autres. Néanmoins, le choix de ces groupes reste délicat. Un mauvais regroupement n'a pas plus de sens qu'une quelconque autre méthode de repondération.

Finalement, la question qu'il est nécessaire de se poser dès lors que l'on cherche à modifier les pondérations des observations d'un problème est la suivante : « Faut-il chercher à obtenir les meilleurs résultats en termes de précision quoi qu'il en coûte, ou repondérer les observations en conservant un certain sens physique ? ».

Dans le cas de la combinaison des mesures topométriques et GNSS, le sens physique est à privilégier, car il permet de répondre à la problématique récurrente de la combinaison : la pondération relatives des observations.

Ainsi, la VCE apparaît comme une méthode adaptée à notre problématique. Maintenant que nous sommes capables de mettre en œuvre la LSVCE et la HVCE sur nos types de données, une analyse plus approfondie est à concevoir. Cependant, pour aller plus loin dans les tests de ces méthodes il est nécessaire d'acquérir davantage de données et d'automatiser le processus.

Il serait également intéressant d'étudier le cas de groupes d'observations différents. On pourrait par exemple séparer les observations topométriques en fonction de l'appareil duquel elles proviennent. Nous pourrions également choisir de regrouper les angles Hz, puis les angles Az, les distances  $D_p$  et enfin les vecteurs GNSS.

Tous ces tests sont maintenant réalisables car nous savons comment fonctionne les méthodes HVCE et LSVCE ainsi que comment les appliquer à nos données. Aller plus loin dans la réflexion demande donc, maintenant, davantage de données.

## Conclusion

Ce Travail de Fin d'Étude portait sur la combinaison des observations topométriques et GNSS dans le cadre de l'auscultation. Il s'inscrit dans la continuité de plusieurs autres travaux qui sont les TFE d'Angélique Azzini et de Clément Guérin de 2010, ainsi que la thèse de Benoît Legru réalisée entre 2007 et 2010.

La combinaison de mesures pouvant se faire de nombreuses manières, nous avons axé notre réflexion autour de deux d'entre elles : le cumul des équations normales, utilisé dans les travaux antérieurs, et l'intégration d'un vecteur GNSS que nous avons mise en œuvre cette année.

Cette seconde façon de procéder est très intéressante car elle permet de largement simplifier les calculs et d'utiliser des modélisations fines pour l'ajustement GNSS. De surcroît, nous avons pu montrer que les deux façons de combiner les observations GNSS et topométriques que nous avons étudiées, sont équivalentes dans le cas d'un réseau comportant un unique vecteur GNSS, dont un des points constitutifs est connu. Nous avons généralisé cela au cas de  $n$  vecteurs GNSS. Même s'il reste des éléments à démontrer nous montrons que, dans le cas de vecteurs indépendants, cette démonstration fonctionne.

Il devient alors intéressant d'étudier l'apport de la combinaison des observations. En 2010, cet apport a été montré pour une géométrie particulière de réseau à trois points. D'autre part, Benoît Legru expliquait dans sa thèse que la topométrie est en principe plus précise que le GNSS à courte distance et inversement. Cependant, cela ne tenait pas compte de l'influence de la géométrie du réseau. Nous avons donc développé un outil permettant de générer des réseaux de géométrie aléatoire et de les simuler en topométrie puis en GNSS. Nous nous sommes alors intéressés à la détermination de la méthode d'observation la plus précise en moyenne pour chaque réseau, en fonction de la distance moyenne entre les points. Nous avons alors pu constater que la géométrie influence largement les résultats annoncés en 2010. En effet, pour certains réseaux le GNSS sera plus performant que la topométrie alors même que la distance moyenne est faible. L'inverse a également été constaté. Maintenant que nous savons que la géométrie influence les résultats en terme de précision, il est nécessaire d'approfondir cela en étudiant quels paramètres de la géométrie ont une influence.

Par ailleurs, une problématique constante de la combinaison de mesures est la pondération relative des observations entre elles. Afin de répondre à cela nous avons étudié l'utilisation de la VCE (Variance Component Estimation).

Notre recherche bibliographique nous a permis de cibler les méthodes les plus connues. Parmi celles-ci notre attention a été retenue par la HVCE et la LSVCE. En effet, la HVCE est historiquement la première à avoir été mise au point. De plus, beaucoup d'autres méthodes lui sont équivalentes dans le cas particulier, qui est le nôtre, de la répartition normale des erreurs. Cependant, cette méthode a pour défaut de pouvoir conduire à l'obtention de résultats négatifs, qui n'ont alors aucun sens physique, sans qu'il soit possible de remédier à cela. Aussi la deuxième méthode que nous avons retenue est-elle la LSVCE. Il s'agit en effet d'une méthode

souple basée sur la méthode bien connue des moindres carrés et qui permet de pallier simplement la difficulté d'une estimation négative.

Nous avons mis en œuvre ces méthodes sur un jeu de données réelles que nous avons acquies. Nous sommes donc désormais capables d'appliquer la LSVCE et la HVCE à notre problématique. De plus, Nous avons étudié, au travers de plusieurs tests, les apports possibles de ces méthodes. Nous avons pu confirmer qu'elles sont bien adaptées à nos besoins. Il est maintenant nécessaire d'aller plus loin dans l'étude de ces techniques en commençant par automatiser les traitements et en réalisant de plus amples campagnes de mesure.

Au cours de ce travail de nombreux outils ont été développés et de nombreuses pistes de recherche ont été explorées. Notre réflexion, déjà commencée depuis plusieurs années, aspire à être poursuivie afin, notamment, de comprendre plus en détails les possibilités offertes par la combinaison des observations GNSS et topométriques.

## Bibliographie

Altamimi Z., Collilieux X. et Métivier L., 2011, *ITRF2008 : An improved solution of the international terrestrial reference frame*, Journal of Geodesy, p.457-473.

Amiri-Simkooei, 2007, *Least-Squares Variance Component Estimation: Theory and GPS Applications*, Thèse de doctorat, Université de Delft, 220 pages.

Azzini A., Durand S., 2010, *Auscultation par combinaison de mesures topométriques et GNSS*, I2M, octobre 2010, p.141-164.

Bähr H., Altamimi Z. et Heck B., 2007, *Variance Component Estimation for combination of terrestrial reference frames*, Universitätsverlag Karlsruhe, Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, 69 pages.

Baszkiewicz K., Kolanowski B., Krembuszewski D., Latos D., Pachelski W. et Soloducha R., 2014, *Selected methods of measuring deformations as a part of a system for monitoring structures*, The 9<sup>th</sup> International Conference "Environmental Engineering", section: Technologies of Geodesy and Cadastre, 5 pages.

Best-Fit Computing, *User Guide*, Columbus 4, < <http://bestfit.com/user-guide/> >

BitWise Ideas Inc., 2001, *Geolab User Guide*

Blewitt G., 1997, *Basics of the GPS technique : observation equations*, Department of geomatics, University of Newcastle, 46 pages.

Bohnenstingl, 2014, *Special Surveying Equipment*, section 2014/1.1, p.6

Caspary W. F., 2000, *Concepts of network and deformation analysis*, Monograph 11, School of Geomatic Engineering, The University of New South Wales, 183 pages.

Durand S. et Peyret F., 2004, *Localisation précise en temps réel par mesures de phase des signaux GNSS*, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, 320 pages.

Durand S. et Guérin C., 3<sup>ème</sup> trimestre 2012, *Validation du logiciel CoMeT d'ajustement de mesures topométriques*, Revue XYZ, n°132, p.32-40.

Durand S., 2015, *Topométrie de précision*, cours de l'École Supérieure des Géomètres et Topographes, Le Mans.

Erol S., Çelik R. N., Erol B. et Ayan T., 2004, *Assessment of satellite based and terrestrial measurement techniques in monitoring vertical deformation*, FIG Working Week 2004, 16 pages.

Grafarend E.W, Kleusberg A et Schaffrin B, 1980, *An Introduction to the Variance-Covariance-Component Estimation of Helmert Type*, p.161-180.

Guérin C., 2010, *Comparaison de logiciels d'ajustement de mesures topographiques*, Travail de Fin d'Étude, Conservatoire National des Arts et Métiers, École Supérieure des Géomètres Topographes, 52 pages.

- Helz R. L., 2005, *Monitoring ground deformation from space*, U.S. Geological Survey, 4 pages.
- Herring T. A., King R. W. et McClusky S. C., 2010, *GAMIT reference manual, GPS Analysis at MIT*, Release 10.4.
- Hobiger T., Rieck C., Haas R. et Koyama Y, 2015, *Combining GPS and VLBI for inter-continental frequency transfer*, Bureau International des Poids et Mesures, Metrologia, n°52, p.251-261.
- Kubik K., 1970, *The estimation of the weights of measured quantities within the method of least squares*, Bulletin Géodésique 95, p.21-40.
- Leica Geosystems, *Leica Geo Office Online Help*, version 8.3, English, < <http://www.surveyequipment.com/PDFs/leica-lgo-8.3-online-help.pdf> >
- Leica Geosystems, 2004, *TCA1800 – TCA2003 – TC2003*, section: *Technical Specifications*, p.7
- Leica Geosystems, 2009, *Réflecteurs topographiques*, White paper, Caractéristiques et influences, p.4, 13pages.
- Legru B., 2011, *Mesure de déformation par combinaison de techniques géodésiques : auscultation par GPS et topométrie*, Thèse de doctorat, École Doctorale du Conservatoire des Arts et Métiers, Laboratoire de Géodésie et de Géomatique (L2G), 155 pages.
- Rao C. R., 1971, *Estimation of variance and covariance components – MINQUE theory*, Journal of multivariate analysis I, p.257-275.
- Sahin M., Cross P. A. et Sellers P. C., 1992, *Variance Component Estimator applied to satellite laser ranging*, Bulletin Géodésique, 12 pages.
- Saporta G., 2006, *Probabilités analyse des données et statistique*, 2<sup>ème</sup> éd. Révisée et augmentée, Édition TECHNIP, p.190.
- Searle S. R., 1994, *An overview of covariance component estimation*, Biometrics Unit, Cornell University, Ithaca, N. Y., U.S.A., 18 pages.
- Sillard P., 2001, *Estimation par moindres carrés*, Hermes science publications, Collection ENSG-IGN, 215 pages.
- Teunissen P. J. G. et Amiri-Simkooei A. R., 2007, *Least-squares variance component estimation*, Springer, 18 pages.
- Trimble, 2008, Station totale S8, Manuel de l'utilisateur, Version 03.00, p.124
- Trimble, 2007-2008, *Trimble S8 Total Station*, Datasheet.
- Vasco D. W., Puskas C. M., Smith R. B. et Meertens C. M., 2007, *Crustal deformation and source models of the Yellowstone volcanic field from geodetic data*, Journal of Geophysical Research, **Vol. 112**, 19 pages.
- van Loon J., 2008, *Functional and stochastic modelling of satellite gravity data*, PhD thesis, Delft University of Technology, 247 pages.
- Welsch W., 1978, *A posteron Varianzenschätzung nach HELMERT*, AVN, Vol 85: 55-63.

## Table des figures

Figure 1 : Niveaux de combinaison possibles et en rouge celle mise en œuvre en 2010, en vert celle mise en œuvre cette année. ....	8
Figure 2 : Schéma récapitulatif du déroulement d'un ajustement par la Méthode des Moindres Carrés dans le cas général non linéaire. ....	11
Figure 3 : Schéma du réseau à trois points utilisé. La ligne de base S1-P3, en orange, est mesurée et les tachéomètres mesurent les lectures horizontales, les angles zénithaux et les distances pentes des visées représentées en bleu. ....	14
Figure 4 : Résultats de la simulation de la combinaison du GNSS et de la topométrie par cumul des équations normales, distance de 300 m entre S1 et S2. Variation en mm de la valeur du demi-grand axe de l'ellipse de confiance à 95% sur les coordonnées planes du point P3 en fonction de sa position. ....	15
Figure 5 : Schématisation de l'intégration d'un vecteur GNSS. ....	16
Figure 6 : Résultats de la simulation de la combinaison d'un vecteur GNSS et d'observations topométriques, distance de 300 m entre S1 et S2. Variation en mm de la valeur du demi-grand axe de l'ellipse de confiance à 95% sur les coordonnées planes du point P3 en fonction de sa position. ....	26
Figure 7 : Écarts, en centième de mm et en valeur absolue entre les valeurs du demi-grand axe de l'ellipse de confiance à 95% associée aux coordonnées planes du point P3 en fonction de sa position obtenues par cumul des équations normales et combinaison du vecteur GNSS avec les observations topométriques. ....	27
Figure 8 : Évolution de la précision à 95% du positionnement planimétrique pour les techniques d'observation GNSS et topométrie en fonction de la distance séparant la station et le point à déterminer. ....	28
Figure 9 : Mosaïque de 12 réseaux générés aléatoirement. ....	30
Figure 10 : rapport des précisions planimétriques à 95% obtenues en topométrie et GNSS en fonction de la distance moyenne entre les points du réseau. Résultats pour 1000 réseaux générés aléatoirement. ....	31
Figure 11 : Schématisation du réseau de nivellement et des observations réalisées par niv1 (bleu) et niv2 (orange). Les points connus sont en rouge, les autres en vert. ....	40
Figure 12 : Plan de localisation du chantier (en rouge), à proximité de l'ESGT au Mans. ....	45
Figure 13 : Photographie du chantier et position des points. ....	45
Figure 14 : Schéma du réseau mis en place et des observations réalisées, et photographies des montages installés sur chaque point. ....	46

## Table des tableaux

Tableau 1 : Observations du réseau de nivellement.....	41
Tableau 2 : Résultats de l'HVCE à chaque itération et valeurs cumulées .....	42
Tableau 3 : Résultats de la LSVCE à chaque itération .....	43
Tableau 4 : Solution des moindres carrés avant et après repondération et écart associé .....	44
Tableau 5 : Résultats à chaque itération et cumulés de la LSVCE appliquée aux jeux de données J1 et J2.....	49
Tableau 6 : Comparaison des résultats de la LSVCE et de la HVCE pour chaque jeu de données .50	
Tableau 7 : Valeurs des coefficients de repondération déterminées manuellement pour chaque groupe de mesures et rapports des coefficients $\sigma g2/\sigma t2$ .....	51
Tableau 8 : Écarts sur les régions de confiances et les solutions entre la repondération selon la VCE et la repondération « manuel 1 ».....	51
Tableau 9 : Écarts sur les régions de confiances et les solutions entre la repondération selon la VCE et la repondération « manuel 2 ».....	52
Tableau 10 : Écarts sur les régions de confiances et les solutions entre la repondération selon la VCE et la repondération « manuel 3 ».....	52

## Table des équations

(1).....	9
(2).....	9
(3).....	9
(4).....	10
(5).....	10
(6).....	10
(7).....	10
(8).....	10
(9).....	10
(10).....	23
(11).....	23
(12).....	23
(13).....	23
(14).....	23
(15).....	24
(16).....	25
(17).....	32
(18).....	33
(19).....	35
(20).....	35

## Table des annexes

Annexe 1 : Résumé

Annexe 2 : Poster

Annexe 1 :

---

# Résumé

# Combinaison des mesures GNSS et topométriques dans un réseau d'auscultation

La combinaison de techniques d'observation et de mesure est très utilisée en géomatique, notamment en matière de mesure de déformation.

Au cours de cette étude nous nous sommes intéressés à la combinaison des observations topométriques et GNSS (Global Navigation Satellite System) dans un but d'auscultation et de surveillance d'ouvrages. Notre travail a été réalisé dans le cadre d'un TFE (Travail de Fin d'Études) au sein du laboratoire GeF (Géomatique et Foncier) et de l'équipe L2G (équipe de géodésie et géomatique).

Notre réflexion s'inscrit dans la continuité de plusieurs travaux : les TFE d'Angélique Azzini et Clément Guérin de 2010 et la thèse de Benoît Legru conduite entre 2007 et 2010.

**MOTS-CLEFS :** combinaison de techniques d'observation, auscultation, GNSS, topométrie, Variance Component Estimation, LSVCE, HVCE.

Avant toute chose, il est nécessaire de bien comprendre qu'il n'y a pas une mais plusieurs façons de combiner des observations. En effet, les procédures de combinaison possibles se distinguent en fonction de l'étape de calcul à laquelle elles interviennent.

## Technique de mesures 1

Observations brutes
Équations normales intermédiaires
Équations normales à convergence
Solution

## Technique de mesures 2

Observations brutes
Équations normales intermédiaires
Équations normales à convergence
Solution

**Figure 1 :** Niveaux de combinaison possibles et en rouge celle mise en œuvre en 2010, en vert celle mise en œuvre cette année.

Ainsi, comme nous pouvons le voir avec la Figure 1, il est possible de combiner les observations brutes issues de deux techniques d'observation distinctes (méthode 1) ou encore les équations normales intermédiaires (méthode 2). Il est également possible de combiner les équations normales à convergence (méthode 3). Cette méthode est celle qui a été utilisée dans les travaux antérieurs, elle consiste en la réalisation d'un cumul des équations normales. D'autre part, une autre combinaison envisageable est celle des solutions (méthode 4) qui passe par une moyenne pondérée des résultats. Enfin, nous pouvons également combiner la solution d'une technique et les observations brutes d'une autre (méthode 5). C'est cette dernière méthode que nous avons retenue et mise en œuvre pour notre étude.

## Deux méthodes pour combiner les observations topométriques et GNSS

### Le cumul des équations normales

Les travaux antérieurs utilisaient le cumul d'équations normales pour combiner les observations. Les équations normales sont obtenues au terme d'un ajustement par la méthode des moindres carrés pour chacune des méthodes à combiner.

Pour ce calcul, deux outils ont été utilisés. Tout d'abord, CoMeT (Compensation de Mesures Topométriques), logiciel d'ajustement de données topométriques par la méthode des moindres carrés développé par le L2G, a permis l'ajustement topométrique et l'export des matrices utiles. Ensuite, le traitement des données GNSS était réalisé à l'aide de scripts Matlab traitant les observations de phase L1 en utilisant le modèle des doubles différences. Ces scripts faisaient de nombreuses approximations comme, par exemple, considérer les termes de retard ionosphérique et troposphérique comme négligeables.

À l'aide de ce calcul, l'intérêt de la combinaison des observations GNSS et topométriques au sein d'un réseau d'auscultation a pu être montré sur une géométrie particulière de réseau à trois points.

### L'intégration d'un vecteur GNSS

Afin de poursuivre cette étude nous avons mis en œuvre une autre technique de combinaison des observations. L'idée est ici d'ajuster un vecteur GNSS et des observations topométriques. Nous noterons que le vecteur est la solution de l'ajustement GNSS.

L'intérêt de cette façon de procéder par rapport à la précédente tient surtout au fait que le vecteur GNSS peut être obtenu à l'aide de logiciels spécialisés tels que Leica Geo Office (LGO) ou encore GAMIT. Cela nous permet donc d'avoir accès à des modalisations fines. De plus, CoMeT permet l'intégration de ce type de données ainsi que de la matrice de covariance associée au sein d'un ajustement topométrique.

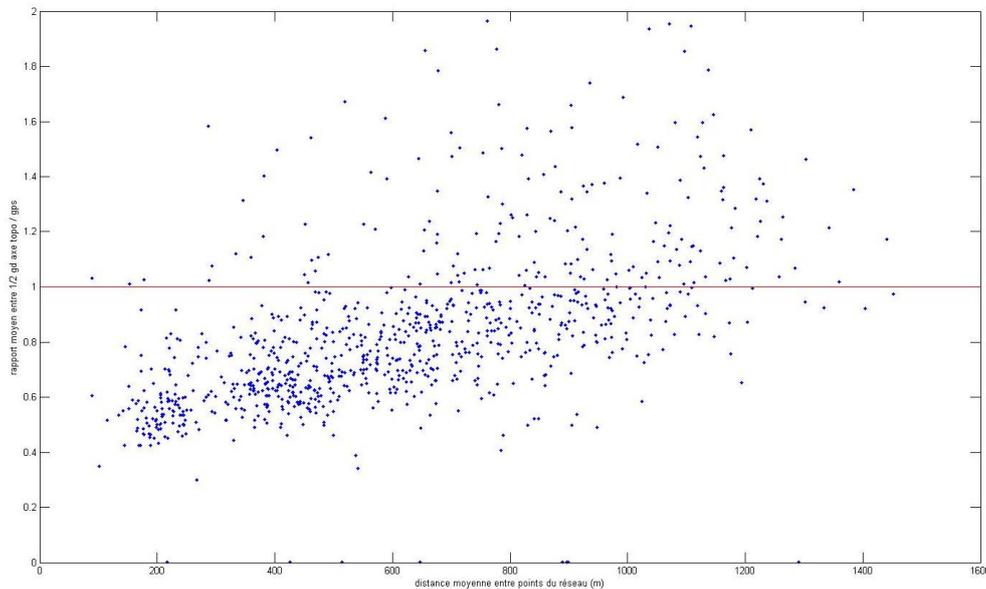
Au cours de la mise en œuvre de cette procédure de combinaison nous avons prouvé qu'elle est équivalente au cumul des équations normales. Cependant cette démonstration n'est pas totalement aboutie. En effet, elle met en œuvre une matrice qui doit être inversible pour que cela fonctionne et nous n'avons pas encore pu prouver cette inversibilité qui est cependant intuitive. La finalisation de cette démonstration fait partie de nos perspectives d'avenir.

Suite à cela nous sommes revenus sur un résultat que Benoît Legru avait présenté dans sa thèse. Il était alors question de montrer l'évolution de la précision planimétrique d'un point observé depuis une unique station en fonction de la distance les séparant. Cette évolution était présentée pour une observation par topométrie et par GNSS. Nous observions alors que la topométrie était plus précise pour de courtes distances et le GNSS plus performant que la topométrie sur de longues lignes de base.

Nous avons alors cherché à étudier si cela restait vrai dans le cas de géométries plus complexes. Nous avons pour cela généré des réseaux aléatoires répondant à un certain nombre de contraintes comme un nombre de points ou une emprise maximum. Ensuite, pour résumer la géométrie de ces réseaux nous avons déterminé pour chacun d'eux la distance moyenne entre les points qui les composent. Nous avons alors simulé ces réseaux comme s'ils étaient observés en topométrie seule et en GNSS seul et avons comparé la précision planimétrique moyenne à 95% données par les deux méthodes.

Les résultats obtenus sont présentés à la Figure 2. Nous observons alors que dans le cas de géométries plus complexes nous ne retrouvons pas la systématique des résultats du réseau à deux points de 2010. La tendance générale de la topométrie plus précise à courte distance reste présente. Cependant, pour certains réseaux de faible distance moyenne, le GNSS sera plus précis que la topométrie, et inversement. Nous pouvons donc en conclure que la géométrie du

réseau est un facteur très important et influent. Une étude plus poussée sera nécessaire pour comprendre plus précisément comment cette géométrie influence les résultats en matière de précision de positionnement.



**Figure 2 :** rapport des précisions planimétriques à 95% obtenues en topométrie et GNSS en fonction de la distance moyenne entre les points du réseau. Résultats pour 1000 réseaux générés aléatoirement. Une valeur supérieure à 1 signifie que le GNSS est plus précis, sinon c'est la topométrie qui est plus précise.

### La pondération relative des observations

Après une étude théorique menée au travers de nombreuses simulations, une étude plus pratique devient intéressante. Or, il est connu que dès lors que l'on combine des mesures, la problématique de la pondération relative des observations se pose. Pour résoudre ce problème, il existe la VCE (Variance Component Estimation).

De très nombreuses méthodes de VCE ont été mises au point depuis la naissance de cette technique au début du 20<sup>ème</sup> siècle. Elles ont toutes en commun le même principe. L'idée est de séparer les observations en groupes homogènes d'un point de vue statistique. Le principe sera d'estimer un coefficient devant chaque matrice de poids associée à un groupe de mesures.

Le choix de ces groupes n'est pas aléatoire et doit être le reflet d'une certaine logique propre à chaque problème. En effet, pour chaque groupe  $k$  l'idée sera d'estimer un unique facteur devant la matrice de covariance  $Q_{L,k}$  qui lui est associée.

Pour estimer ces coefficients, nous avons choisi d'étudier plus en détails deux méthodes : la HVCE (Helmert Variance Component Estimation) et la LSVCE (Least-Square Variance Component Estimation).

La méthode de Helmert est la première à avoir été créée. Nous utilisons ici la version généralisée permettant l'estimation des composantes de la covariance. De plus, dans le cas particulier des erreurs normalement distribuées, nombre d'autres méthodes plus complexes dans leur mise en œuvre lui sont équivalentes. Or, la répartition suivant la loi normale des erreurs étant le modèle le plus adapté dans le cas de mesures, nous nous plaçons naturellement dans ce cas. Le seul défaut de la HVCE est qu'elle peut produire des résultats négatifs, ce qui n'a aucun sens pour des composantes de la variance, et qu'il n'existe pas de solution pour pallier ce problème.

La LSVCE est, quant à elle, une méthode récente et souple basée sur le principe des moindres carrés. L'idée est ici de reformuler le problème de sorte que les composantes de la variance soient les inconnues. Elles sont alors déterminées par moindres carrés non linéaires. De

plus, la LSVCE peut elle aussi produire des résultats négatifs mais il suffit alors de poser le problème sous la forme de moindres carrés sous contraintes pour pallier le problème. La LSVCE est équivalente à la HVCE dans le cadre d'erreurs normalement distribuées.

Nous avons mis en œuvre ces deux méthodes sur des données issues d'une campagne de mesure d'un réseau à trois points. Tout d'abord, nous avons obtenu des résultats cohérents nous assurant du bon fonctionnement de nos scripts.

Ensuite, nous avons cherché à apprécier l'intérêt de la VCE par rapport à une repondération manuelle. Pour cela nous avons considéré trois façons de repondérer manuellement : en reprenant les groupes de la VCE (manuel 1), toutes les observations globalement (manuel 2), mesure par mesure lorsqu'elles ressortent au niveau des résidus (Manuel 3). Nous avons alors étudié les écarts entre les régions de confiance obtenues après repondération selon les coefficients de la LSVCE et selon les trois repondérations manuelles (Tableau 1).

		P2	P3		
		Vertical (m)	1/2 grand-axe (m)	1/2 petit-axe (m)	Vertical (m)
J1	Écart (Manuel 1 - LSVCE)	0,00496	0,00894	0,00759	0,00815
	Écart (Manuel 2 - LSVCE)	0,00303	0,00288	0,00228	0,00370
	Écart (Manuel 3 - LSVCE)	0,00317	0,00042	0,00033	0,00056
J2	Écart (Manuel 1 - LSVCE)	0,00028	0,01123	0,00141	0,00008
	Écart (Manuel 2 - LSVCE)	-0,00123	0,00302	-0,00659	-0,00456
	Écart (Manuel 3 - LSVCE)	-0,00218	-0,00036	-0,00939	-0,00861

**Tableau 1** : Écarts des valeurs des régions de confiance entre les repondérations manuelles mises en œuvre et la LSVCE.

Nous observons avec le Tableau 1 que la LSVCE ne donne pas systématiquement les meilleurs résultats en termes de précision. Cependant, si nous considérons le sens physique associé à ces différentes repondération, c'est bien la repondération par groupe comme le fait la VCE ou le cas manuel 1 qui a la meilleure logique physique. Or, dans ce cas, la VCE qui donne de meilleurs résultats pour les deux jeux de données considérés.

Une étude plus approfondie sur des jeux plus nombreux est à envisager pour la suite. Actuellement nous avons atteint notre objectif en parvenant à mettre en œuvre la LSVCE sur nos propres données et en obtenant des résultats cohérents et encourageants : la LSVCE semble être adaptée à nos besoins.

Finalement, nous avons pu montrer en matière de combinaison d'observations topométriques et GNSS l'équivalence entre le cumul des équations normales et l'intégration d'un vecteur GNSS. Cela permet de largement simplifier les calculs et d'utiliser des modélisations fines pour l'ajustement GNSS. Il devient alors intéressant d'étudier l'influence de la géométrie du réseau. Jusqu'alors la seule géométrie étudiée était un réseau simple à trois points et une seule ligne de base. Nous avons donc développé des outils de génération de réseaux de taille et géométrie aléatoires et variées. De cette façon nous avons pu montrer que la géométrie du réseau a une influence très importante sur les résultats en termes de précision. Cela étant dit, il devient intéressant de comprendre comment cette géométrie a une influence. Ceci est une perspective d'avenir de ce travail. Ensuite, nous avons étudié la problématique de la pondération relative des observations. Nous avons étudié et retenu la solution de la VCE et plus particulièrement la LSVCE qui semble correspondre à nos besoins et que nous sommes désormais capables d'appliquer à nos observations.

Annexe 2 :

---

**Poster**

# Combinaison des mesures GNSS et topométriques dans un réseau d'auscultation

Mailys Bucher - Travail de Fin d'Études - juillet 2015

## CONTEXTE

Laboratoire GeF (Géomatique et Foncier), équipe L2G (Géomatique et Géodésie)

Travaux antérieurs :

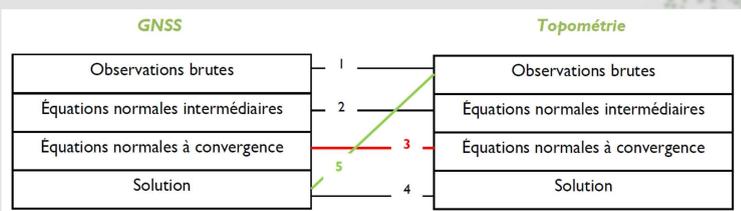
- TFE Angélique Azzini 2010
- TFE Clément Guérin 2010
- Thèse Benoît Legru 2007 - 2011

Objectifs : poursuivre la réflexion sur les apports de la combinaison et traiter la problématique des pondérations relatives au travers de la VCE (Estimation des Composantes de la Variance).

## LA COMBINAISON DE MESURES

Plusieurs façons de combiner, deux mises en oeuvre pour notre étude :

- 2010 : Cumul équations normales (Fig. 1 : méthode 3)
- 2015 : intégration vecteur GNSS (Fig. 1 : méthode 5)



=> Les deux sont ÉQUIVALENTES

Figure 1 : Niveaux de combinaison possibles.

## GÉOMÉTRIE DU RÉSEAU

En 2010 : Étude de l'évolution de la précision en fonction de la distance dans le cas de deux points. Obtention de la Fig. 2 :

- La topométrie est plus précise que le GNSS à courte distance et inversement
- Pas de notion de géométrie

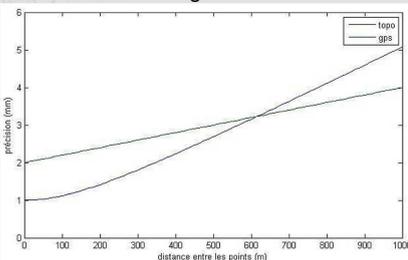


Figure 2 : Évolution de la précision à 95% du positionnement planimétrique en topométrie et GNSS en fonction de la distance entre le point et la station

Objectif de cette année : Reprendre la démarche de 2010 et montrer l'influence de la géométrie

Génération de réseaux aléatoires en choisissant des contraintes (nombre de points, emprise...) (Fig. 3a) et simulation en topométrie et GNSS puis comparaison des précisions moyennes obtenues dans les deux cas.

Obtention Fig. 3b : On retrouve la tendance des résultats de 2010 mais pas de systématisme, en fonction de la géométrie le GNSS peut être plus précis que la topométrie à courte distance et inversement

=> La géométrie a bien une influence

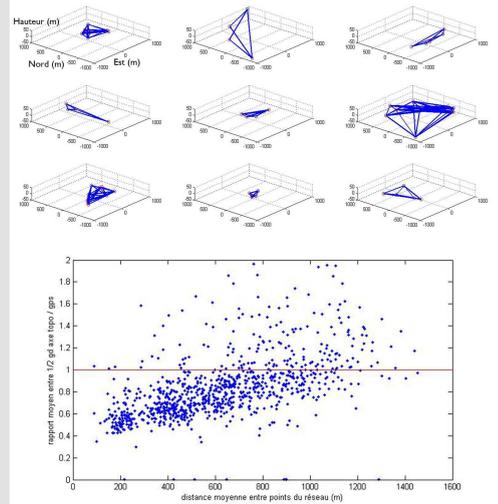


Figure 3 : a. Mosaïque de 9 réseaux générés aléatoirement, géométrie et taille variées.

b. Rapport des précisions planimétriques à 95% topométrie / GNSS en fonction de la distance moyenne entre les points du réseau. Si la valeur est supérieure à 1 cela signifie que le GNSS est plus précis que la topométrie, et inversement

## ESTIMATION DES COMPOSANTES DE LA VARIANCE (VCE)

Problématique constante de la combinaison : la pondération relative des mesures. Dans le cas où nous possédons des mesures la VCE permet de répondre à cela.

Principe : Séparation des mesures en groupes et estimation du coefficient à appliquer à la matrice de poids de chaque groupe.

Ici, 2 groupes : topométrie ( $\sigma_t$ ) et GNSS ( $\sigma_g$ )

Choix de deux méthodes : Helmert VCE (HVCE) et Least Squares VCE (LSVCE) et mise en oeuvre sur des données réelles (Fig. 4).

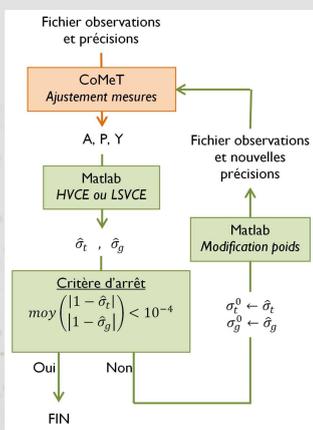
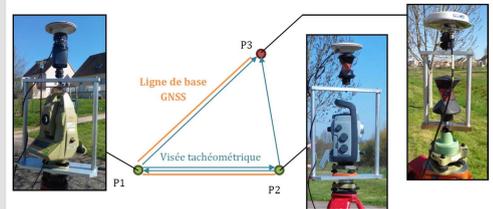


Figure 4 : Schéma de mise en oeuvre des méthodes LSVCE et HVCE. CoMeT est un logiciel d'ajustement des mesures développé par le L2G

## ACQUISITION DE MESURES

Le chantier a été installé à proximité de l'ESGT. Le but était d'avoir un jeu de données pour mettre en oeuvre la LSVCE et la HVCE. Nous avons donc choisi un réseau simple à trois points (Fig. 6)..

Figure 6 : Schéma du réseau mis en place et des visées réalisées ainsi que photographies des montages installés



## TESTS ET RÉSULTATS

Le but est d'apprécier l'intérêt de la VCE par rapport à une repondération manuelle, c'est-à-dire une méthode de repondération issue de l'expérience de l'opérateur et choisie par lui. Nous présentons deux cas ici.

Manuel 1 = recherche des coefficients par nous-mêmes selon les mêmes groupes que la VCE. Repondération de la topométrie seule pour valider le test du Chi-2, puis combinaison des mesures et repondération du GNSS pour valider le test du Chi-2.

	P2		P3	
	Vertical (m)	1/2 grand-axe (m)	1/2 petit-axe (m)	Vertical (m)
J1 Écart (Manuel 1 - LSVCE)	0,0050	0,0089	0,0076	0,0082
Pourcentage amélioration	92,02	96,34	96,56	94,55
J2 Écart (Manuel 1 - LSVCE)	0,0003	0,0112	0,0014	0,0001
Pourcentage amélioration	4,83	90,74	12,30	0,83
	Hauteur (m)		Nord (m)	
	Est (m)		Hauteur (m)	
J1 Écart (Manuel 1 - LSVCE)	0,005	0,003	-0,001	-0,007
J2 Écart (Manuel 1 - LSVCE)	0,003	0,006	-0,002	-0,001

Le choix de la repondération influence la solution, variation millimétrique non négligeable devant le critère d'arrêt de 1 mm. Sur nos deux jeux de données la LSVCE donne de meilleurs intervalles de confiance à 95%.

	P2		P3	
	Vertical (m)	1/2 grand-axe (m)	1/2 petit-axe (m)	Vertical (m)
J1 Écart (Manuel 3 - LSVCE)	0,0032	0,0004	0,0003	0,0006
Pourcentage amélioration	88,06	55,26	55,00	54,37
J2 Écart (Manuel 3 - LSVCE)	-0,0022	-0,0004	-0,0094	-0,0086
Pourcentage amélioration	-65,27	-45,19	-1422,73	-896,88
	Hauteur (m)		Nord (m)	
	Est (m)		Hauteur (m)	
J1 Écart (Manuel 3 - LSVCE)	0,004	0,000	0,000	0,000
J2 Écart (Manuel 3 - LSVCE)	0,005	-0,001	0,000	0,002

Manuel 3 = repondération systématique des mesures qui ressortent en termes de résidus, multiplication de leur précision par 2 jusqu'à validation du test du Chi-2.

Le choix de la repondération influence ici aussi la solution de quelques millimètres. De plus, la LSVCE ne permet pas forcément d'avoir de plus petites régions de confiance. Mais le sens physique associé à la repondération est à prendre en compte. C'est pour cela que nous pouvons considérer que la VCE répond à nos besoins. D'autres tests devront encore être effectués pour confirmer cela et approfondir notre réflexion.

Au cours de ce travail, de nombreux outils ont été développés et de nombreuses pistes de recherche ont été explorées. Notre réflexion, déjà commencée il y a plusieurs années, aspire à être poursuivie afin, notamment, de comprendre plus en détails les possibilités offertes par la combinaison des observations GNSS et topométriques

## **Combinaison des mesures GNSS et topométriques dans un réseau d'auscultation.**

**Mémoire d'Ingénieur C.N.A.M., Paris 2015**

---

### **RESUME**

La combinaison des techniques d'observation est une méthode couramment employée en auscultation et surveillance d'ouvrages. Il apparaît donc intéressant de combiner la topométrie et le GNSS qui sont deux techniques largement répandues et maîtrisées. De plus, ces deux méthodes étant très différentes dans leur nature, nous n'apportons pas la même information en les utilisant.

Nous avons, dans ce rapport, étudié plusieurs façons de combiner les observations et en avons étudié les apports en termes de précision. De plus, une problématique constante de la combinaison de mesures est la pondération relative des observations entre elles. Pour répondre à cela, nous avons utilisé la solution de la VCE (Variance Component Estimation), et notamment la HVCE (Helmert VCE) et la LSVCE (Least-Squares VCE).

**Mots clés :** combinaison de techniques d'observation, auscultation, GNSS, topométrie, Variance Component Estimation, LSVCE, HVCE.

---

### **SUMMARY**

The combination of several measurement techniques is a common approach in auscultation and structure surveillance. Thus, it seems interesting to combine tachymetry and GNSS which are widespread and fully understood techniques. Besides, because both methods are very different, they bring different information.

In this report we studied several ways to combine measurements and their contribution in terms of precision. Moreover, another common issue with combination of measurements is their relative weighting. The VCE (Variance Component Estimation) is the solution we used in order to solve this problem, and notably the HVCE (Helmert VCE) and the LSVCE (Least-Squares VCE).

**Key words:** measurement techniques combination, auscultation, GNSS, tachymetry, Variance Component Estimation, LSVCE, HVCE.