



HAL
open science

Relations géométriques et reproduction de figures complexes

Camille Joggi

► **To cite this version:**

Camille Joggi. Relations géométriques et reproduction de figures complexes. Education. 2016. dumas-01365879

HAL Id: dumas-01365879

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01365879>

Submitted on 13 Sep 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ÉCOLE SUPÉRIEURE DU PROFESSORAT
ET DE L'ÉDUCATION
DE L'ACADÉMIE DE PARIS**

**RELATIONS
GÉOMÉTRIQUES ET
REPRODUCTION DE
FIGURES
COMPLEXES**

**CAMILLE JOGGI
PROFESSEURE DES ÉCOLES**

GROUPE A (1er degré)
SOUS LA DIRECTION DE M. PIERRE CAMPET

2015 - 2016

*Mots-clés : reproduction de figures complexes, géométrie, relations géométriques,
raisonnement géométrique*

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.....	1
CADRE THÉORIQUE.....	2
1. Les enjeux de la géométrie	2
2. La géométrie de l'école au collège.....	3
3. La géométrie à l'école primaire.....	5
4. Les concepts de la géométrie.....	5
5. Les instruments de la géométrie.....	5
6. Connaissances et savoir-faire géométriques à l'école primaire.....	6
a) Les formes géométriques.....	6
b) Les relations géométriques.....	6
7. Les différents types de problèmes géométriques.....	7
a) Les problèmes de description.....	8
b) Les problèmes de construction.....	8
c) Les problèmes de représentation.....	8
d) Les problèmes de reproduction.....	8
i) Définition et enjeux.....	8
ii) Les variables didactiques.....	9
MISE EN OEUVRE EN CE2.....	12
1. Problématique	12
2. Contexte.....	13
3. Séquence sur la reproduction de figures en CE2.....	15
a) Description de la séquence.....	15
b) Séance 1.....	15
i) Présentation du problème.....	15
ii) Analyse à priori.....	16
iii) Analyse du déroulé et des productions.....	19
c) Séance 1.2.....	21
i) Présentation du problème.....	21
ii) Analyse à priori.....	22
iii) Analyse du déroulé et des productions.....	23
iv) Conclusion de l'analyse de la séance diagnostique.....	26
d) Séance 2.....	29
i) Présentation du problème.....	29
ii) Analyse à priori.....	30
iii) Analyse du déroulé et des productions.....	33
e) Séance 3.....	35
i) Présentation du problème.....	35
ii) Analyse à priori.....	37
iii) Analyse du déroulé et des productions.....	40
CONCLUSION.....	43
BIBLIOGRAPHIE.....	45

INTRODUCTION

La géométrie au cycle 3 est une géométrie pragmatique. Un de ses enjeux est cependant de préparer au raisonnement géométrique : il s'agit pour cela d'amener les élèves à faire évoluer leur point de vue sur les objets géométriques¹. Les élèves à l'école primaire adoptent en effet spontanément une vision des figures géométriques en termes de surfaces². Or, la majorité des problèmes géométriques rencontrés au collège reposent sur l'identification de relations géométriques entre lignes et / ou points, telles que l'alignement, le milieu d'un segment, ou le parallélisme³. Il est donc capital d'amener les élèves à développer une vision de ces figures en termes de réseaux de lignes et de points et de relations entre ces objets⁴.

La reproduction de figures complexes semble constituer une activité appropriée pour ce travail d'identification de relations géométriques. Elle pose en effet un problème aux élèves dont la résolution amène à identifier des relations géométriques dans le modèle, et à les mobiliser pour sa reproduction. Plusieurs procédures sont de plus souvent possibles pour reproduire une figure complexe, et la procédure choisie dépend des relations géométriques identifiées dans le modèle. La confrontation à une multiplicité de procédures de reproduction amène ainsi l'élève à changer son regard sur la figure. Finalement, cette approche permet de donner du sens à cet apprentissage, puisque la mobilisation des relations géométriques apparaît comme une réponse à un problème.

L'objet du travail présenté ci-après est d'étudier comment l'activité de reproduction de figures complexes permet de faire évoluer le regard des élèves de cycle 3 sur les figures géométriques pour développer leur capacité à identifier et mobiliser les relations géométriques. en jeu.

Une première partie de ce travail sera consacrée à la présentation du cadre théorique : elle s'attachera à exposer les principes régissant l'enseignement de la géométrie à l'école primaire, en se concentrant particulièrement sur celui des relations géométriques et de la reproduction de figures complexes. Une seconde partie présentera la séquence menée en classe et l'analyse du travail et des productions d'élèves. Finalement, une dernière partie permettra de synthétiser cette analyse de manière à proposer une réponse aux questions soulevées par la problématique.

1 PELTIER Marie-Lise, BRIAND Joël, NGONO Bernadette, VERGNES Danielle, *Euromaths Enseigner les mathématiques en CE2 Livre du professeur*, Paris, Hatier, 2010, pp. 39-40.

2 BARRIER Thomas, HACHE Christophe, MATHÉ Anne-Cécile « Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figure et activité des élèves », *Grand N*, 2014, n°93, 2014, p. 14.

3 Idem.

4 Idem ;, *ibid.*, P. 22

CADRE THÉORIQUE

Cette première partie a pour objectif d'exposer les enjeux de l'enseignement de la géométrie et de présenter les principes qui régissent son enseignement à l'école primaire, en particulier au cycle 3.

1. Les enjeux de la géométrie

Une des priorités de la géométrie est d'amener les élèves à s'approprier une vision de l'espace qui les entoure et de ses représentations⁵. Cet enjeu se retrouve dans les programmes 2008 qui préconisent que la « géométrie doit rester en prise avec le monde sensible qu'elle permet de décrire »⁶. Cet enjeu est pérennisé dans les nouveaux programmes qui affirment, pour le cycle 2, que l'apprentissage de la géométrie se fait en « lien avec le travail mené dans Questionner le monde »⁷, et pour le cycle 3, que les activités géométriques sont « aussi une occasion de fréquenter de nouvelles représentations de l'espace (patrons, perspectives, vues de face, de côté, de dessus...) »⁸.

Au delà de l'apprentissage de la vision de l'espace, la géométrie a pour enjeu l'apprentissage du raisonnement géométrique⁹. Cet enjeu est inscrit dans les programmes 2008, qui indiquent que « la géométrie est aussi le domaine de l'argumentation et du raisonnement »¹⁰, et qu'« elle permet le développement des qualités de logique et de rigueur. »¹¹. Un enjeu fondamental du cycle 3 est donc de préparer à cet apprentissage du raisonnement géométrique. Cet enjeu transparaît dans les nouveaux programmes de 2015 qui préconisent que les « activités géométriques pratiquées au cycle 3 [se distinguent de celles du cycle 2, en ce qu'elle accordent une part plus grande] au raisonnement et à l'argumentation »¹².

5 KAHANE J.-P., *L'enseignement des sciences mathématiques. Rapport de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Éd. Odile Jacob, 2002, p. 92-93.

6 *Bulletin officiel du Ministère de l'Éducation nationale*, 28 août 2008, numéro 6, Programmes du collège, Programmes de l'enseignement de mathématique, p. 2.

7 *Bulletin officiel du Ministère de l'Éducation nationale*, 26 novembre 2015, numéro 11, p. 73.

8 *Bulletin officiel du Ministère de l'Éducation nationale*, 26 novembre 2015, numéro 11, p. 197.

9 KAHANE J.-P., *L'enseignement des sciences mathématiques. Rapport de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, *op. cit.*, p. 96-97.

10 *Bulletin officiel du Ministère de l'Éducation nationale*, 28 août 2008, numéro 6, Programmes du collège, Programmes de l'enseignement de mathématique, p. 2.

11 Idem.

12 *Bulletin officiel du Ministère de l'Éducation nationale*, 26 novembre 2015, numéro 11, p. 197.

2. La géométrie de l'école au collège

La géométrie à l'école primaire se caractérise par un changement progressif de point de vue sur les objets géométriques¹³. De la maternelle au début du cycle 2, la géométrie enseignée est une géométrie « perceptive ». L'élève apprend à reconnaître des figures usuelles de manière globale : « un objet est carré, parce que, *globalement*, je le reconnais comme tel (début de l'école primaire) »¹⁴. A partir du cycle 2 et jusqu'à la fin du cycle 3, la géométrie devient « instrumentée » : un objet est carré parce que, à l'aide d'*instruments* adaptés (compas, équerre, règle), je peux en vérifier certaines *propriétés* (fin de l'école primaire) »¹⁵. Enfin, à partir du collège, la géométrie devient mathématisée : « un objet est carré parce que, en fonction d'*informations* initiales *données* ou d'informations *déduites*, je peux en énoncer certaines *propriétés* (collège) »¹⁶.

Pour illustrer le changement de point de vue qui s'opère entre le cycle 3 et le collège, considérons la figure 1 ci-dessous. Après avoir tracé le carré ABCD, puis trouvé le milieu des côtés des carrés et les avoir nommés I, J, K et L, on demande aux élèves si IJKL est un carré.

Un élève de cycle 3 utilisera son équerre et sa règle pour vérifier que IJKL est un quadrilatère qui a 4 angles droits et 4 côtés de la même longueur, et qu'il est donc un carré. Cet élève fait de la géométrie instrumentée.

L'élève du collège devra s'appuyer non sur les instruments, mais sur le raisonnement. Sachant que I, J, K, et L, sont situés au milieu des côtés du carré ABCD, il pourra s'appuyer sur le théorème des milieux en considérant les triangles ABD et CBD pour montrer que [IL],[KJ] et [BD] sont parallèles et que $IL = KJ = 1/2BD$; à partir du même théorème, en considérant les triangles BAC et DAC, il pourra montrer que [LK], [IJ] et [AC] sont parallèles et que $LK = IJ = 1/2AC$. Étant donné que ABCD est un carré, ses diagonales sont perpendiculaires et de même longueur. Il pourra en déduire que [IL], [KJ], [LK] et [IJ] sont de même longueur. De plus,

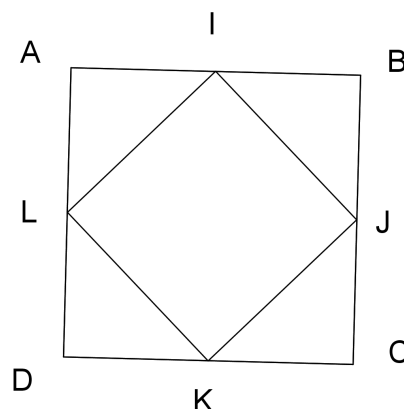


Figure 1: Géométrie du cycle 3 au collège : changement de regard.

13 CHARNAY Roland « De l'École au collège : les élèves et les mathématiques », Grand N, n°62, p. 45, 1997.

14 Idem.

15 Idem., *ibid.*, p. 46

16 Idem.

comme la diagonale $[AC]$ est perpendiculaire à la diagonale $[DB]$, il pourra en déduire que $[IL]$ et $[KJ]$ sont perpendiculaires à $[LK]$ et $[IJ]$. Il aura ainsi montré que le quadrilatère $IJKL$ a 4 côtés de la même longueur et 4 angles droits, et qu'il s'agit donc d'un carré. L'élève du collège fait de la géométrie mathématisée.

Pour effectuer ce raisonnement, l'élève du collège n'aura pas utilisé ses instruments, mais aura porté sur la figure une multiplicité de regards qui lui auront permis de faire émerger différents sous-éléments de la figure et leurs relations : identification des deux quadrilatères (illustration 1. a) dont on sait que $ABCD$ est un carré, du positionnement des sommets du carré $IJKL$ au milieu des côtés du carré $ABCD$ (illustration 1. b), des triangles BAC et DAC (illustration 1. c), puis ADB et CDB (illustration 1. d), lui permettant d'appliquer le théorème des milieux et d'en déduire des relations d'égalité de longueur et de parallélisme entre les côtés opposés du quadrilatère ; et enfin, identification de réseaux de segments parallèles et perpendiculaires (illustration 1. e) déduits à partir des propriétés des diagonales du carré $ABCD$ et du théorème des milieux.

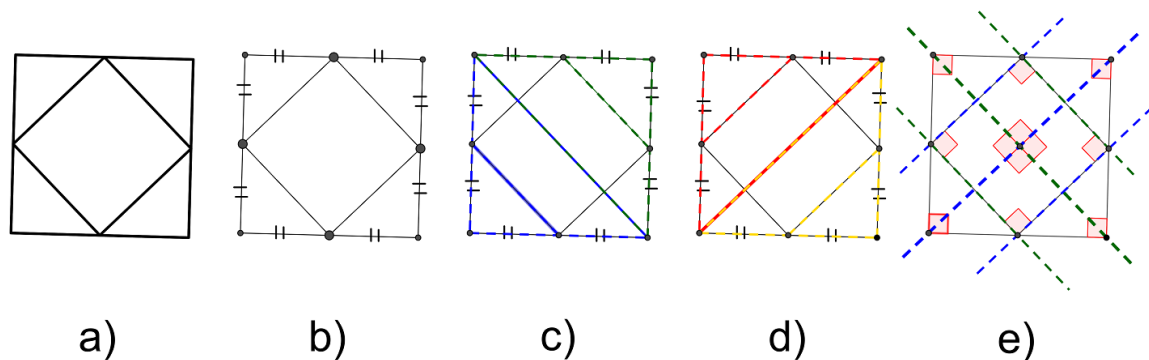


Illustration 1: Différents regards.

L'élaboration de la preuve repose donc notamment sur l'identification de ces sous éléments et leurs relations, et donc sur la capacité à porter sur la figure une multiplicité de regards concomitants.

Le cycle 3 constitue ainsi un temps charnière dans l'apprentissage de la géométrie : un de ses enjeux est de développer chez les élèves la capacité à identifier des relations géométriques en les exerçant à porter sur les figures cette multiplicité de regards ; ceci dans le but de les préparer au raisonnement géométrique.

3. La géométrie à l'école primaire

A l'école primaire, le travail réalisé en géométrie suit trois axes. En premier lieu, la géométrie enseignée à l'école primaire est expérimentale, et s'appuie sur quatre types d'activités sur les objets géométriques : reproduire, décrire, représenter et construire. Ces activités visent à construire chez l'élève des images mentales des concepts et des propriétés géométriques (côtés de même longueur, angles droits, parallélisme, axes de symétrie, etc.).

L'enseignement de la géométrie a également pour mission de faire évoluer les compétences techniques de l'élève dans le maniement des instruments (règle, équerre, compas). Enfin, il s'agit d'amener l'élève à acquérir et utiliser un vocabulaire précis (face, arête, sommet, côté, etc.).

4. Les concepts de la géométrie

Deux types de concepts constituent les objets de la géométrie : les **objets géométriques** qui peuvent être de dimensions 3 (les solides), de dimension 2 (les figures planes), de dimension 1 (les droites, demi-droites ou segments), ou de dimension 0 (les points), et les **relations géométriques** entre ces objets (alignement, perpendicularité, etc.). Ces concepts se caractérisent par un vocabulaire précis, accompagné d'un système de représentation graphique et de codage. Par exemple, les points sont codés par des lettres, les segments par deux lettres encadrées par des crochets, et ainsi de suite. Ces concepts sont également caractérisés par des définitions et des propriétés. Par exemple, un carré est un quadrilatère qui a 4 angles droits et 4 côtés de la même longueur. Finalement, chacun de ces concepts est caractérisé par un savoir-faire. Par exemple, le carré se caractérise par la procédure à mettre en œuvre pour le construire (procédure liée aux propriétés qui le caractérisent).¹⁷

5. Les instruments de la géométrie

Chacun des instruments de la géométrie a été élaboré dans un but déterminé : l'équerre pour construire et vérifier des angles droits, la règle graduée pour mesurer des longueurs.¹⁸ Chaque instrument comporte sa technique d'utilisation propre, qui s'explique par une théorie sous-

17 BILGOT A. et MAYENSON J.-B. - *La géométrie plane à l'école primaire*, Mercredi 15 octobre 2014
Groupe MIG, ESPE Paris, 2014.

18 FÉNICHEL Muriel, PAUVERT Marcelle, PFAFF Nathalie, *Donner du sens aux mathématiques Tome 1. Espace et géométrie*, Paris, BORDAS pédagogie, 2004.

jacente à l'usage de l'instrument.¹⁹ Par exemple, le compas est constitué de deux branches jointes par une articulation, dont on peut fixer l'écart des extrémités. Une des branches se termine par une pointe et peut se fixer sur un point précis d'une feuille, tandis que l'autre branche comporte une mine qui permet de garder une trace de son déplacement sur une feuille. Ainsi, une fois l'écart des extrémités fixé et la pointe fixée sur la feuille, il est possible de faire tourner la branche à mine autour de la pointe : l'écart entre les deux branches étant conservé, tous les emplacements de la branche à mine seront équidistants de la pointe. Or, un cercle se définit par l'ensemble des points équidistants à son centre. Le compas permet donc d'obtenir un cercle dont le centre correspond à l'emplacement de la pointe et le rayon à l'écart des extrémités des deux branches.

6. Connaissances et savoir-faire géométriques à l'école primaire

a) Les formes géométriques

A l'école maternelle jusqu'au début du cycle 2, les formes géométriques sont tout d'abord reconnues de manière perceptive, dans leur globalité ; elles sont reconnues au toucher (formes déplaçables, manipulables) et à la vue ; elles sont tracées sur papier à main levée. L'élève apprend à distinguer les formes les unes par rapport aux autres, par exemples les formes aux « bords droits » des formes aux « bords arrondis ». A l'école élémentaire, on passe de la reconnaissance perceptive à la reconnaissance instrumentée. Il ne suffit pas de reconnaître la forme globalement, il faut vérifier avec les instruments que cette forme réponde à certaines caractéristiques : un carré doit avoir 4 angles droits et 4 côtés de la même longueur. Ces caractéristiques sont ensuite utilisées pour tracer ces formes de manière précise, en utilisant des instruments appropriés.²⁰

b) Les relations géométriques

A l'école primaire, les relations géométriques sont souvent dans un premier temps abordées dans le méso-espace (par exemple, le préau ou la cour de récréation). Elles sont ensuite, dans un deuxième temps, reprises dans le micro-espace (la feuille de papier) ; ceci permet aux

19 BILGOT A. et MAYENSON J.-B. - *La géométrie plane à l'école primaire*, Mercredi 15 octobre 2014
Groupe MIG, ESPE Paris, 2014, p. 45.

20 BILGOT A. et MAYENSON J.-B. - *La géométrie plane à l'école primaire*, Mercredi 15 octobre 2014
Groupe MIG, ESPE Paris, 2014.

élèves de construire les représentations mentales de ces concepts géométriques. Finalement, elles sont dans un troisième temps utilisées « dans l'analyse, la reproduction ou la construction de figures, (...) ce qui contribue à engager les élèves dans un changement de point de vue sur ces objets. »²¹

L'enseignement de la notion d'alignement suit la progression décrite ci-dessus. Elle est tout d'abord typiquement abordée dans le méso-espace du préau, par exemple à travers une activité d'alignement de plots, alignement validé par diverses procédures (visée, corde étirée, etc.). La situation d'alignement de plot est ensuite modélisée sur le tableau noir, avec des aimants à aligner, et se valide avec la règle. En dernier lieu s'effectue le passage au micro-espace de la feuille de papier : les élèves sont alors confrontés à des exercices de repérages d'alignement de points et / ou de segments dans différentes figures géométriques. Ce repérage se fait au moyen de la règle, en intervenant sur les figures en prolongeant des segments, en joignant des points, en traçant des traits. La notion d'alignement est par la suite reprise à travers des problèmes de reproduction et de construction.²²

La notion de milieu de segment est elle aussi abordée en tout premier dans le méso-espace, où elle est typiquement présentée comme la solution d'un jeu. Dans un second temps, les élèves découvrent différentes procédures pour déterminer le milieu d'un segment : par pliage en deux d'une bande de papier ou mesurage à l'aide d'une règle graduée. Cette notion est par la suite reprise à travers des problèmes de reproduction et de construction.

7. Les différents types de problèmes géométriques

Les programmes de 2008 encouragent à aborder l'apprentissage de la géométrie à travers des problèmes. En effet, les « problèmes de reproduction ou de construction de configurations géométriques diverses mobilisent la connaissance des figures usuelles. Ils sont l'occasion d'utiliser à bon escient le vocabulaire spécifique et les démarches de mesurage et de tracé ».²³ Il existe quatre grandes classes de problèmes en géométrie : les problèmes de construction, de description et de représentation, dont une définition succincte sera donnée, et les problèmes de reproduction,²⁴ qui seront davantage détaillés, puisqu'ils font l'objet de ce travail.

21 PELTIER Marie-Lise, BRIAND Joël, NGONO Bernadette, VERGNES Danielle, *Euromaths Enseigner les mathématiques en CE2 Livre du professeur, op. cit.*, p. 40.

22 Idem.

23 *Bulletin officiel du Ministère de l'Éducation nationale, 19 juin 2008*, numéro 3.

24 FÉNICHEL Muriel, PAUVERT Marcelle, PFAFF Nathalie, *Donner du sens aux mathématiques Tome 1. Espace et géométrie*, Paris, BORDAS pédagogie, 2004, p. 39.

a) Les problèmes de description

La description orale ou écrite d'un objet géométrique peut avoir pour but de construire l'objet : il s'agit alors d'un programme de construction. Alternativement, cette description peut avoir pour but d'identifier un objet géométrique parmi d'autres : il s'agit alors typiquement d'un jeu du portrait. Les situations de description permettent de donner du sens au vocabulaire géométrique. Elles peuvent s'attacher au nom des objets (cercle, losange, cerf-volant, sphère, pavé droit) ou aux propriétés géométriques caractérisants l'objet en question (angles droits, nombre de côtés, égalités de longueurs, etc.).

b) Les problèmes de construction

Dans le cas d'un problème de construction, l'élève n'a pas à sa disposition un modèle de l'objet à construire, mais une représentation, une description de l'objet ou un bon de commande.

c) Les problèmes de représentation

Dans le cas des solides, la représentation d'un objet consiste à représenter un objet 3D sur une surface plane. Certaines propriétés de l'objet 3D seront conservées, mais pas toutes.

d) Les problèmes de reproduction

i) Définition et enjeux

Dans un problème de reproduction, les élèves disposent d'un modèle qu'ils doivent reproduire : la reproduction peut se faire à la même échelle, ou comporter un agrandissement ou une réduction. L'élève a à disposition un certain nombre d'outils déterminés. La figure à reproduire et les outils à disposition diffèrent en fonction de l'objectif.

Lorsque la tâche consiste à la reproduction d'une figure simple, l'objectif est de mettre en évidence et de mobiliser certaines propriétés géométriques des figures planes, tout en faisant travailler une technique. Par exemple, pour reproduire un carré sur papier uni, il faut respecter deux contraintes : les angles droits et la longueur des côtés ; il faut également maîtriser l'usage de l'équerre et, selon la procédure de reproduction mise en œuvre, l'utilisation du compas ou d'une bande de papier pour le report de longueur ou l'utilisation de la règle graduée pour mesurer une longueur et la reporter.

Lorsque la tâche consiste à la reproduction d'une figure complexe, l'objectif est de travailler la reconnaissance perceptive puis instrumentée et la mobilisation de relations géométriques.

Ainsi, la reproduction de figures complexes contraint à suivre un certain nombre d'étapes. En premier lieu, il faut reconnaître les figures élémentaires qui composent le modèle. Par exemple, dans la figure 2, ABCD et IJKL sont des carrés. En deuxième lieu, il s'agit de repérer les relations géométriques présentes. Dans le cas présent, il faut reconnaître que les sommets I, J, K, L du carré IJKL sont situés au milieu de chacun des côtés du carré ABCD. En troisième lieu, il faut élaborer une chronologie des étapes de reproduction. Par exemple, pour la figure 2 :

- 1) tracer le carré ABCD,
- 2) placer le point I au milieu du segment [AB],
- 3) placer le point J au milieu du segment [BC],
- 4) placer le point K au milieu du segment [CD],
- 5) placer le point L au milieu du segment [DA],
- 6) tracer le carré IJKL.

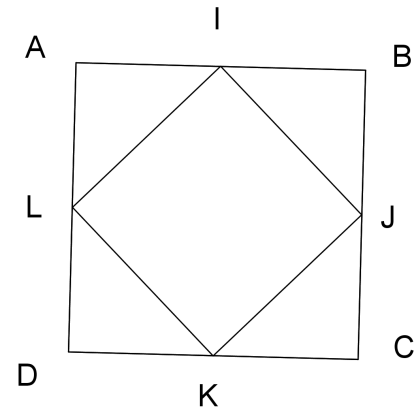


Figure 2 : Problèmes de reproduction : les étapes.

Finalement, il s'agit de tracer la figure.

ii) Les variables didactiques

Il est possible d'adapter la tâche de reproduction à l'objectif visé et aux prérequis des élèves en faisant jouer de nombreuses variables didactiques.

Supports

Le support peut tout d'abord être mobile ou fixe. Un support mobile (comme un tangram ou une planche à clous) permet d'éviter les difficultés liées au maniement d'instruments.

Dans le cas d'un support fixe (papier), la reproduction peut se faire sur papier quadrillé ou sur papier uni. Une reproduction sur quadrillage permet un allègement du travail technique : il devient par exemple possible de tracer un angle droit sans équerre. Il faut noter cependant que dans le cas où le modèle se trouve sur quadrillage, la reconnaissance des propriétés géométrique n'est pas toujours indispensable. La reproduction de la figure peut alors se faire par simple report du nombre de carreaux, lorsque les segments suivent le quadrillage, ou par repérage des positions relatives des sommets sur le quadrillages et du trajet pour aller de l'un à l'autre, lorsque les segments ne suivent pas le quadrillage.

Cette variable didactique a été utilisée dans la séance 1.2 exposée plus bas: l'amorce (figure 10 page 20) y a été présentée sur quadrillage, de manière à alléger le travail technique des

élèves au niveau du tracé du carré et des milieux de segments ; le modèle étant par contre présenté sur papier uni, le travail de reconnaissance des relations géométriques est resté inchangé.

Instruments

Selon l'objectif visé, il est possible de jouer sur les instruments à disposition. En effet, selon les instruments disponibles, les procédures de résolution ne seront pas les mêmes. Par exemple, si l'usage de l'équerre est interdit ou découragé par un système de coût, les élèves ne pourront pas tracer d'angles droits ou de droites perpendiculaires et devront trouver d'autres relations dans la figure, comme le milieu de segment, ou l'alignement. C'est ce qui a été mis en place dans la séance 3 présentée ci-dessous (figure 31 page 33).

Renseignements fournis dans l'énoncé

Il est possible de faciliter la reconnaissance des objets élémentaires ou de certaines relations géométriques à partir de renseignements fournis dans l'énoncé. Dans les figures présentées en séance 1 et 3 (figures 10 page 20 et 31 page 33) ci-dessous, l'indication des points M et N dans le modèle permettait de faciliter la reconnaissance des alignements en jeu.

Nécessité de tracés supplémentaires sur la figure modèle ou non

La reproduction d'une figure sera d'autant plus difficile qu'il sera nécessaire de faire des tracés supplémentaires. Par exemple, pour reproduire

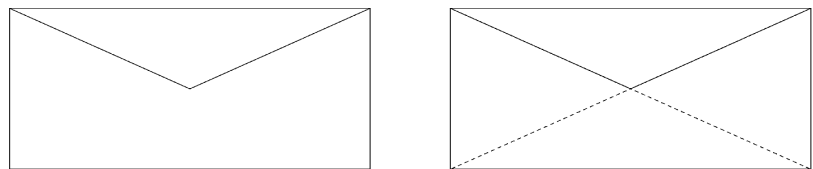


Figure 3 : Problèmes de reproduction – variables didactiques – tracés supplémentaires ou non.

le modèle de la figure 3 (à gauche), il sera nécessaire de prolonger les deux demi-diagonales (figure 3 à droite) pour faire apparaître qu'elles appartiennent aux diagonales du rectangle. Il pourra être observé que chacune des figures complexes utilisées dans les séances présentées plus bas nécessite d'effectuer des tracés supplémentaires sur le modèle pour vérifier des relations nécessaires à sa reproduction.

Amorce de la figure donnée ou non

Dans les problèmes d'agrandissement ou de réduction, l'amorce permet de définir de manière unique la figure produite (ce qui permet notamment de produire un calque de validation). Elle

peut également constituer un moyen de différenciation dans des problèmes à l'échelle, car elle peut faciliter la construction en allégeant les étapes. Il arrive cependant qu'elle rende la construction plus difficile en introduisant une contrainte. Chacune des figures utilisées dans la séquence présentée s'accompagne d'une amorce ; ce choix a été fait afin de pouvoir changer d'échelle (contraignant ainsi les élèves à faire usage des relations géométriques identifiées) tout en définissant la figure produite de manière unique pour la validation au moyen du calque ; l'amorce a également permis d'alléger le travail technique de certaines étapes de construction.

Orientation de la figure modèle

L'orientation du modèle peut influencer sur la facilité à reconnaître les figures élémentaires. Un carré sera plus facilement reconnu s'il est orienté de façon conventionnelle qu'en « configuration losange ». Afin d'exercer les élèves à reconnaître les formes géométriques indépendamment de leur orientation sur la feuille, la majorité des figures à reproduire sont présentées de façon non conventionnelle.

MISE EN OEUVRE EN CE2

1. Problématique

Au cours de la séquence sur l'alignement effectuée en début d'année, il a été observé que les élèves avaient des difficultés à identifier les alignements spontanément. A l'inverse, la séquence effectuée plus tard sur les figures planes a montré que les élèves identifiaient beaucoup plus facilement les formes géométriques. Cette observation est en accord avec le constat de Barbier, Hache et Mathé, qui avancent que « les élèves entrent spontanément dans les problèmes géométriques en adoptant une vision des figures en termes de surfaces (juxtaposition et / ou superpositions de surfaces) »²⁵.

Ce constat peut s'expliquer par le fait que la reconnaissance perceptive des figures planes est travaillée dès le cycle 1 : lorsqu'il arrivent au cycle 3, les élèves ont donc développé des représentations mentales très fortes des figures planes ; ce n'est pas le cas des relations géométriques, qui ne sont abordées qu'au la fin du cycle 2 : les représentations mentales de ces relations sont donc à construire.

Or, le raisonnement géométrique, introduit au collège, repose notamment sur l'identification des relations géométriques entre des lignes et / ou des points, comme montré plus haut par la démonstration autour de la figure 1 (page 3) . Un des enjeux du cycle 3 est donc de préparer au raisonnement géométrique en amenant les élèves à faire évoluer leur regard sur les figures pour passer d'un point de vue global, où la figure est vue en termes de surfaces, à un point de vue local, où la figure est vue en termes de lignes et de points en relation²⁶. Ce changement de regard est nécessaire à l'identification des relations entre ces éléments - telles que l'alignement, la perpendicularité ou le milieu d'un segment - sur lesquelles s'appuie la preuve en géométrie.

Le constat ci-dessus m'a conduit à la mise en œuvre d'une séquence sur la reproduction de figures complexes pour travailler l'identification des relations géométriques, dont l'alignement ; en effet, la reproduction d'une figure complexe amène l'élève à identifier les relations entre les sous-éléments du modèle de manière perceptive, puis instrumentée, puis à

25 BARRIER Thomas, HACHE Christophe, MATHÉ Anne-Cécile « Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figure et activité des élèves », *Grand N*, 2014, n°93, 2014, p. 14

26 PELTIER Marie-Lise, BRIAND Joël, NGONO Bernadette, VERGNES Danielle, *Euromaths Enseigner les mathématiques en CE2 Livre du professeur*, Paris, Hatier, 2010, pp. 39-40.

mobiliser ces relations pour reproduire le modèle. A travers l'analyse de cette séquence, je m'attacherai à étudier comment l'activité de reproduction peut faire évoluer le regard que l'élève porte sur la figure à reproduire pour l'amener à améliorer sa capacité à identifier et mobiliser ces relations géométriques.

2. Contexte

Comme cela a été indiqué ci-dessus, une séquence sur l'alignement a eu lieu en début d'année. Cette notion a tout d'abord été abordée lors d'une activité dans le macro-espace (le préau), à travers un travail sur l'alignement de plots ; cet alignement a ensuite été validé de différentes façons (visée, corde tendue, etc.). Cette activité a ensuite été transposée sur le tableau noir, où les plots du macro-espace ont été représentés par des aimants alignés ou presque ; l'alignement des aimants a été validé au moyen de la grande règle. Finalement, la séquence a été complétée par des activités sur feuille de papier (micro-espace), où les élèves se sont exercés à repérer des alignements avec leur règle, en intervenant sur des figures, en prolongeant des segments et en joignant des points.

Comme mentionné plus haut, il a été observé que les élèves avaient beaucoup de difficultés à repérer les alignements, surtout si leur identification reposait sur une action à effectuer sur la figure (par exemple dans le cas de diagonales en partie effacées) ; ces difficultés témoignent d'une faible représentation mentale de la relation d'alignement.

Une séquence sur le repérage de milieux de segment a été menée en amont de la séquence présentée. Lors de cette séquence, les élèves ont appris qu'il était possible de trouver le milieu d'un segment au moyen d'une bande de papier reportant la longueur du segment, puis pliée en deux. Il est intéressant de noter que les élèves utilisaient spontanément la règle graduée pour trouver le milieu de segment, et qu'il était difficile de les dissuader d'utiliser une méthode reposant sur la mesure.

Une séquence sur les angles droits a également été menée en amont de la séquence présentée. Cette notion faisait suite à celle découverte en CE1, et n'a pas posé de difficulté particulière. Il convient de noter ici que la notion de perpendicularité n'a pas été abordée avant la séquence présentée. Le repérage d'un angle droit a donc été abordé comme un secteur angulaire particulier, qui se vérifie par superposition avec l'angle droit de l'équerre. L'angle droit n'est donc pas abordé comme la relation entre deux droites qui se coupent à angle droit, mais comme un élément d'une surface qui vérifie une propriété spécifique.

Enfin, une séquence sur les polygones et sur les figures planes usuelles a été menée en amont de la séquence présentée. Après une première activité de classement des figures planes, un travail a été mené sur l'identification des figures planes et la reconnaissance instrumentée de certaines de leurs propriétés : égalité de longueurs des côtés, présence et nombre d'angles droits, nombre de côtés.

L'identification des propriétés géométriques des figures planes a été travaillée tout au long de la séquence de façon ritualisée à travers des jeux du portrait. Ces jeux du portrait ont été joués en suivant deux modalités.

Selon la première modalité, de nombreuses formes géométriques (dont nous avons auparavant repéré et codé les angles droits et les égalités de longueurs) étaient affichées au tableau en grand format. L'enseignante choisissait une forme géométrique qu'elle gardait secrète. Les élèves devaient trouver la forme de l'enseignante en posant des questions totales avec l'obligation d'utiliser du vocabulaire géométrique. Chaque réponse à une question impliquait l'élimination de figures (chaque élimination devant être argumentée par les élèves). Un / une secrétaire avait pour mission de noter toutes les questions posées et les réponses apportées, le but étant de trouver la figure en posant le moins de questions possible.

La seconde modalité impliquait de faire, par équipe de deux, le portrait d'une figure affichée au tableau, à nouveau en utilisant le vocabulaire géométrique, dans le but de la faire deviner aux autres élèves. A chaque fois, il était interdit d'utiliser le nom de la figure, afin de contraindre les élèves à utiliser les propriétés géométriques de la figure. Ce n'est que lorsque la figure avait été identifiée que son nom pouvait être prononcé.

Au début de la séquence présentée, les élèves étaient donc capable de repérer certaines propriétés géométriques (angle droit, égalité de longueur, nombre de côtés), sur des figures planes usuelles, de décrire une figure en utilisant ces propriétés géométriques pour permettre à autrui de la reconnaître parmi d'autres, et de reconnaître une figure parmi d'autres à partir de la description verbale de ses propriétés géométriques.

3. Séquence sur la reproduction de figures en CE2

a) Description de la séquence

La première séance fait office de séance diagnostique. Le modèle à reproduire (figure 4) fait intervenir le repérage de sous figures connues – carrés et triangles rectangles –, d'angles droits, de milieux de segments et d'alignements. L'analyse des productions des élèves à l'issue de cette séance doit permettre d'affiner la programmation des séances subséquentes.

Pour la séance 2, il a été choisi de présenter un modèle plus simple (figure 23), qui ne fait intervenir qu'une seule relation géométrique : celle de milieu de segment. En séance 3, il a été choisi de présenter une figure qui fait intervenir essentiellement la relation d'alignement (figure 31).

Pour chacune des séances, une première partie présente la figure à reproduire, une deuxième partie expose l'analyse à priori de la séance, et une dernière partie détaille l'analyse de son déroulé et des productions des élèves.

b) Séance 1

i) Présentation du problème

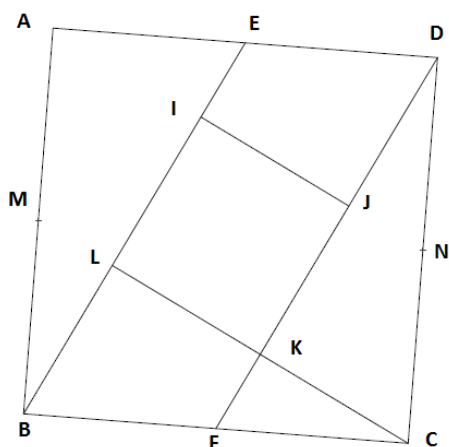


Figure 4: Modèle en séance 1.

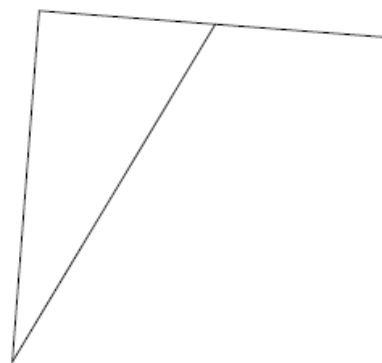


Figure 5: Amorce en séance 1.

Dans une première phase, les élèves sont disposés par groupe. Une affiche A3 est distribuée à chaque groupe, sur laquelle se trouvent le modèle à reproduire et l'amorce (figures 4 et 5). La consigne donnée est la suivante :

Voici une figure. On a commencé à la reproduire, et vous allez devoir terminer sa reproduction. Avant cela, vous devez trouver toutes les formes et les relations géométriques que vous reconnaissez et qui vous aideront à la reproduire.

L'enseignant procède ensuite à un rappel des formes et des relations géométriques connues des élèves.

La phase de recherche par groupe dure environ 10 minutes. Après une mise en commun de 10 minutes au cours de laquelle sont listés tous les éléments repérés – formes simples, angles droits, milieux de segments, alignements -, les élèves, dans une deuxième phase, reproduisent la figure individuellement.

Ils ont ensuite à disposition un calque leur permettant de valider ou d'invalidier leur production.

L'idée est d'utiliser les affiches produites par les différents groupes et les constructions individuelles pour mettre en évidence les difficultés des élèves et affiner la programmation de la séquence.

ii) Analyse à priori

La figure modèle a été choisie parce qu'elle met en jeu la reconnaissance et la mobilisation des propriétés et relations de milieu d'un segment et d'alignement. L'amorce proposée n'est pas à l'échelle de la figure modèle, ceci afin d'éviter l'utilisation du report de longueur, ce qui permettrait de reproduire la figure sans mobiliser la reconnaissance des milieux de segments.

Le tableau ci-dessous présente la procédure attendue pour la reproduction de cette figure, au niveau de l'analyse et la construction, et montre les propriétés à identifier et mobiliser à chaque étape.

	Analyse	Construction	Propriété en jeu
1	<i>Identifier et vérifier que ABCD est un carré.</i>	Refermer le carré ABCE.	Reconnaissance d'une figure simple (carré : angles droits et égalités de longueur).
2	<i>Repérer et vérifier que le point F est au milieu du segment [BC].</i>	Placer F au milieu du segment [BC]. Tracer le segment [DF].	Milieu d'un segment.
3	<i>Repérer et vérifier que le point que le point M est au milieu du segment [AB].</i>	Placer le point M au milieu du segment [AB] sur la figure en construction.	Milieu d'un segment
4	<i>Identifier et vérifier que [CL] et M sont alignés.</i>	Placer la règle de manière à ce qu'elle relie les points C, L et M. Tracer le segment [CL].	Alignement
5	<i>Repérer et vérifier que le point N est au milieu du segment [DA].</i>	Placer le point N au milieu du segment.	Milieu d'un segment
6	<i>Repérer et vérifier que N, [IJ] et A sont alignés.</i>	Placer la règle de manière à ce qu'elle relie A, I, J et N. Tracer le segment [IJ].	Alignement
7		Effacer les traits de constructions qui n'apparaissent pas sur le modèle.	
<i>Tableau 1 : Procédure de reproduction en séance 1.</i>			

Analyse de la figure

Comme montré ci-dessus, la procédure attendue repose sur l'identification du carré ABCD, de milieux de segments et de relations d'alignement. Cette analyse met donc en jeu différents regards sur la figure (illustration 2) : un regard en termes de surfaces qui permet d'identifier le

carré ABCD (illustration 2 à gauche), en termes de réseaux de segments, de droites, de points et de relations entre ces objets, permettant d'identifier les milieux de segments (illustration 2 au centre) et les alignements (illustration 2 à droite). Un enjeu de cette première séance sera donc de faire coexister ces différents regards sur la figure, afin de faire émerger ces différentes relations entre ses sous-éléments.

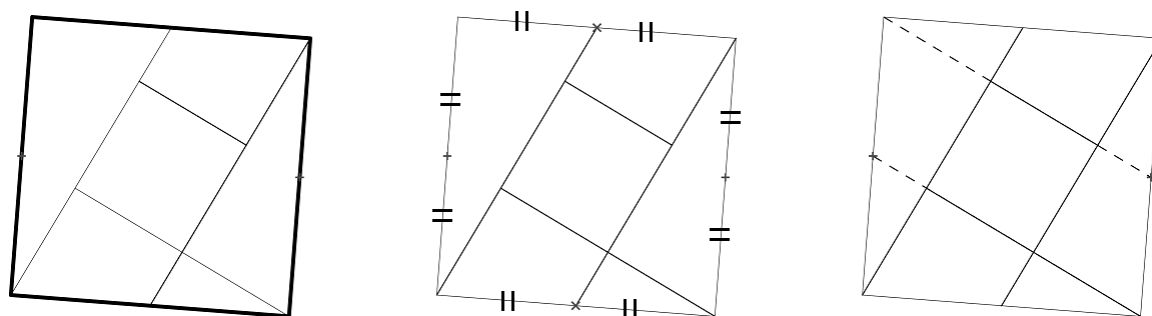


Illustration 2: Trois regards.

Procédures de construction

Pour refermer le carré (étape 1), les élèves doivent maîtriser la construction des angles droits avec l'équerre. La procédure la plus précise et rapide consiste à tracer deux droites perpendiculaires aux deux côtés donnés : l'intersection de ces deux droites donnera le 4ème sommet C du carré. Une seconde procédure consiste à tracer une perpendiculaire à un côté donné, à reporter la longueur des côtés du carré sur cette perpendiculaire, puis à relier les deux sommets libres.

Pour trouver l'emplacement des milieux des segments (étapes 2, 3 et 5), l'élève peut utiliser la règle graduée pour mesurer la longueur du segment, calculer la moitié et placer le milieu à la moitié de la distance par rapport à l'extrémité du segment. Cette procédure est cependant découragée dans ce cas, car la longueur des côtés a été choisie de manière à ce qu'elle ne mesure pas un nombre exact de centimètres. Une autre méthode, qui a été vue en classe en amont, consiste à utiliser une bande de papier sur laquelle la longueur est reportée, et que l'on plie en deux afin de trouver le centre. Cette procédure est la plus précise dans ce cas-là.

Enfin, pour tracer les segments [IJ] et [LC] de manière à respecter les alignements repérés (étapes 4 et 6, tableau 1), l'élève peut tracer les droites (AN) et (MC), puis effacer les traits de constructions ne faisant pas partie de la figure ; il peut également placer la règle de façon à aligner les points A et N, puis M et C, et tracer en une seule fois les segments [IJ] (délimité

par les segments [EB] et [DF]) et [LC] (délimité par le segment [EB]). Cette procédure est plus économique, mais repose sur une très forte représentation mentale de la notion d'alignement.

iii) Analyse du déroulé et des productions

Tout d'abord, lors de l'analyse de la figure complexe opérée par chaque groupe, et pendant la mise en commun, il a été observé que les élèves repéraient facilement les formes simples composant la figure complexe. Tous les groupes ont ainsi repérés que la figure ABCD était un carré, la majorité ont trouvé que la figure IJKL était également un carré. Les angles droits ont également facilement été identifiés. Les élèves n'ont par contre pas repéré spontanément que les points F, M et N étaient au milieu des segments [BC], [AB] et [CD] respectivement ; ils n'ont pas non plus identifiés les alignements de manière spontanée.

Lors de la mise en commun, l'enseignante a donc attiré l'attention des élèves, par un questionnement guidé, sur l'emplacement des points F, M et N par rapport aux segments auxquels ils appartiennent, ainsi que sur les alignements entre les points A et N avec le segment IJ, ainsi qu'entre le point M, et le segment LC, invitant les élèves à prolonger les segments IJ et LC de manière à vérifier cet alignement. A l'issue de cette mise en commun, les élèves se sont lancés dans la construction individuelle.

L'analyse des productions d'élèves montre qu'une grande majorité d'entre eux, bien qu'ayant correctement identifiés que ABCD est un carré, éprouvent des difficultés à refermer ce carré. Il semble que la difficulté provienne d'un défaut de maîtrise du maniement de l'équerre pour construire un angle droit, c'est ce qui semble être le cas pour l'élève A (figure 6).

Quelques élèves placent ensuite correctement le point F au milieu du segment [BC] (étape 2), mais la majorité place ce point de manière imprécise, comme les élèves A, B et D (figures 6, 7 et 9). Il est difficile de juger si le problème provient d'une difficulté à mobiliser la relation de milieu de segment lors de la construction, ou d'une difficulté technique à trouver le milieu d'un segment (manque de précision ou problème de manipulation de l'outil).

Finalement, la majorité des élèves (15 sur 24) ne mobilise pas les relations d'alignement mis en jeu, et place les segments [IJ] et [CL] de façon approximative, comme c'est le cas pour l'élève A (figure 6). Il est intéressant de remarquer que sur la figure de l'élève A, l'emplacement des points M et N ne sont pas même marqués, ce qui prouve que la relation d'alignement de ces segments avec ces points n'a pas été mobilisée. A l'inverse, les quelques

élèves qui ont mobilisés cette relation (9 élèves sur 24), comme c'est le cas pour les élèves B, C et D (figures 7, 8 et 9) ont clairement marqué l'emplacement de ces points. Ces trois élèves montrent une bonne capacité à mobiliser la relation d'alignement.

Parmi les élèves qui ont mobilisé les relations d'alignement, on peut cependant noter une différence de procédure. Une partie des élèves (4 élèves), comme l'élève B (figure 7) a tracé des segments supplémentaires pour pouvoir mobiliser la relation d'alignement – il n'a d'ailleurs pas effacé ses traits de construction -, tandis que d'autres élèves (5 élèves), comme les élèves C et D (figures (8 et 9), n'ont pas utilisé de traits de construction supplémentaires : ils semblent avoir placé leur règle de façon à ce que les points A et N, puis M et C soient alignés, puis ont tracé les segments IJ et LC en s'arrêtant à l'emplacement approprié (c'est à dire qu'il ont pris en compte que [IJ] est délimité par [EB] et [DF] et que [LC] est délimité par [EB]). Cette procédure témoigne d'une bonne représentation mentale de la notion d'alignement et des relations d'incidences.

Il faut cependant noter que parmi les élèves qui mobilisent la relation d'alignement, certains semblent avoir du mal à mobiliser la relation de milieu de segment, comme l'élève C (figure 8), qui ne place pas le point M exactement au milieu du segment AB.

Au terme de la séance la majorité des élèves obtient un premier essai invalidé par le calque. Les divergences par rapport au modèle s'expliquent en majorité par une mauvaise fermeture du carré (étape 1) : ceci, même pour les quelques élèves qui ont manifesté une bonne capacité à mobiliser les relations géométriques en jeu. Les autres erreurs s'expliquent par un mauvais placement des milieux de segments, et / ou par une non mobilisation des relations d'alignement.

On peut aussi penser qu'une partie des difficultés des élèves peut provenir de la difficulté à gérer la chronologie. Il n'est possible de tracer les segments IJ et LK qu'après avoir placé les points M et N sur les segments AB et CD. Les étapes ne peuvent donc pas se dérouler dans n'importe quel ordre. Un élève qui se lance dans la reproduction de la figure sans anticipation des étapes peut donc se retrouver en difficulté : ceci peut expliquer que de nombreux élèves n'aient pas mobilisé les alignements en jeu : une fois le carré ABCD refermé, le point F placé et le segment DF tracé (jusque là, la chronologie ne pose pas de problèmes), certains élèves ont directement tracés les segments IJ et LC, sans réaliser qu'ils devaient avant cela placer les points M et N.

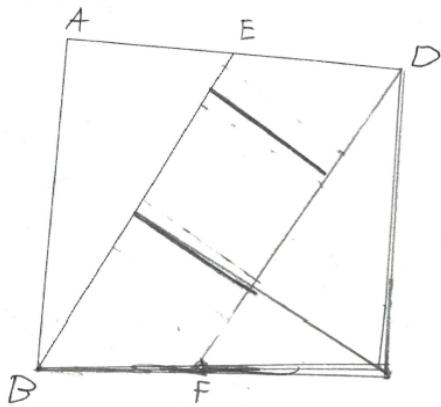


Figure 6: Séance 1 - 1er essai - élève A.

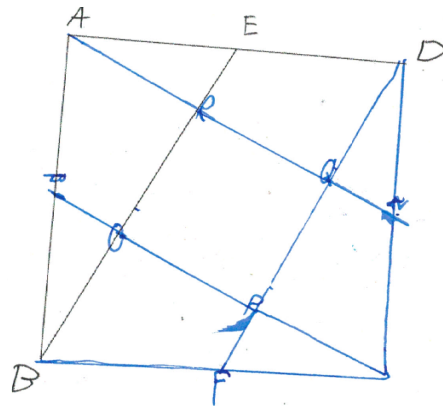


Figure 7: Séance 1 - 1er essai - élève B.

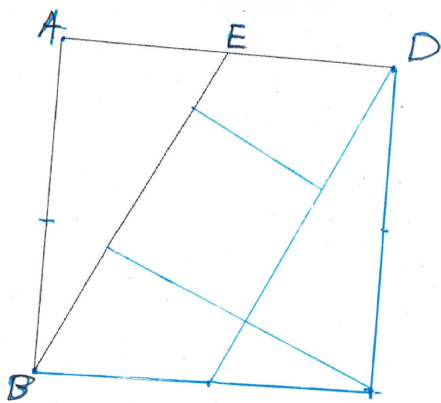


Figure 8: Séance 1 - 1er essai - élève C.

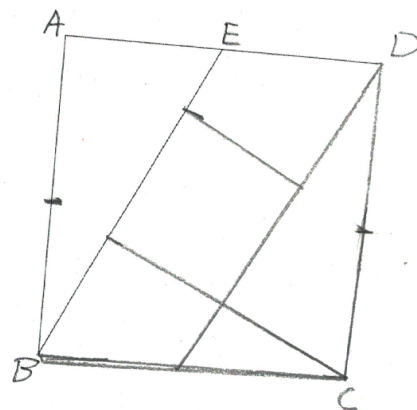


Figure 9: Séance 1 - 1er essai - élève D.

c) Séance 1.2

i) Présentation du problème

A l'issue de la première séance, il a été noté que de nombreux élèves n'avaient pas refermé le carré correctement, et avaient souvent placé les milieux de segments de manière imprécise ou erronée. Dans les deux cas, ces erreurs s'expliquent par des difficultés liées à la maîtrise de l'instrument (l'équerre dans le premier cas, la règle graduée ou la bande de papier dans le second cas).

D'une part, ces difficultés d'ordre technique ralentissent les élèves dans la reproduction de la figure, en mobilisant leurs ressources sur des aspects de la construction qui ne sont pas liés à l'objectif. De plus, elles rendent difficiles l'analyse fine des difficultés liées au repérage et à la

mobilisation des relations géométriques. Finalement, les répercussions d'une mauvaise fermeture du carré ont un impact sur le reste de la figure : si le carré ABCD est refermé de façon erronée, les longueurs de ses côtés [BC] et [CD] seront erronées, et les points F et N seront mal placés par rapport au calque, même s'ils ont été correctement placés au milieu de leur segment respectif : la validation au moyen du calque risque donc d'invalider une figure alors même que toutes les relations géométriques ont été identifiées et mobilisées dans la construction.

Pour pallier ce problème, le modèle a été proposé une nouvelle fois avec la même amorce, à l'exception près que cette fois-ci, l'amorce était présentée sur fond de quadrillage (figure 10). L'idée était d'alléger les étapes de construction, afin que les élèves puissent se concentrer sur la mobilisation des relations géométriques mises en évidence lors de l'étape d'analyse de la figure : le repérage des milieux des segments et des alignements.

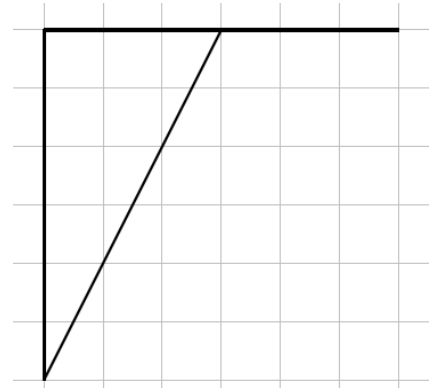


Figure 10: Séance 1.2 - amorce sur quadrillage.

Cette extension de la première séance a débuté par un rappel oral du déroulé de la dernière séance, avec pour support une version grand format de la figure à reproduire et son amorce, suivi d'un retour sur les procédures de constructions des élèves et des difficultés rencontrées ; ce retour a permis de mettre en évidence l'importance de la chronologie des étapes et du repérage et de la mobilisation des relations géométriques de milieu de segment et d'alignement.

ii) Analyse à priori

Les étapes de construction sont les mêmes que lors de la première séance. L'analyse du modèle reste également la même, puisqu'elle est toujours présentée sur papier uni. Cependant, l'ajout du quadrillage allège les procédures mises en jeu pour la fermeture du carré ABCD et le placement des milieux des segments.

La construction du carré est facilitée, puisque celui-ci peut être construit sans équerre, en se servant du quadrillage. De même, les points peuvent à présent être placés au milieu de leur segment sans utiliser ni règle graduée ni bande de papier, simplement à l'aide du quadrillage : il suffit de compter le nombre de carreaux qui séparent les deux extrémités du segment, de diviser ce nombre par deux, et de placer le point au nombre de carreau calculé d'une extrémité

du segment. Cet allègement de certains aspects de la tâche ne tue pas pour autant le problème : en effet, le modèle restant sur papier uni, le travail d'analyse préalable de la figure reste le même. La disposition du quadrillage ne dispense pas de devoir utiliser le concept d'alignement pour pouvoir reproduire la figure.

iii) Analyse du déroulé et des productions

Le rappel opéré en début de cours, couplé à l'allègement de la construction grâce au quadrillage a eu un effet significatif sur pour la majorité des élèves. Pour 65% des élèves (15 élèves sur 24), dont l'élève A est représentatif (figure 12), cet allègement a permis de réaliser la figure correctement, en utilisant les relations repérées lors de l'analyse.

On peut en effet constater que cet élève a été capable d'analyser correctement que ABCD est un carré, et d'utiliser cette observation pour refermer le carré, en s'aidant du quadrillage. Les points F, M et N sont cette fois-ci bien placés au milieu de leurs segments respectifs. On peut également observer que l'élève A a été capable de mobiliser les relations d'alignement qu'il avait reconnue lors de l'analyse, pour tracer les segments [IJ] et [LD] : les traits de constructions ont finalement été effacés. Sa production contraste avec son premier essai sur papier uni (figure 11).

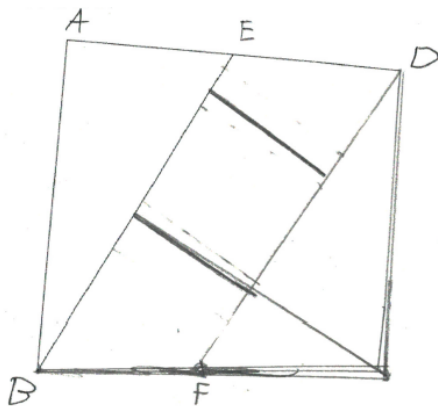


Figure 11: Séance 1 - amorce sur papier uni - élève A.

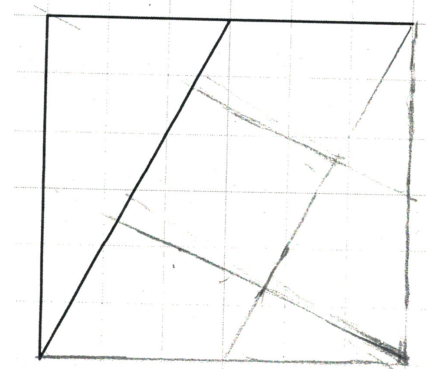


Figure 12: Séance 1.2 - amorce sur quadrillage - élève A.

Il faut cependant noter que l'élève A semble ne pas avoir marqué l'emplacement des points F, M et N. S'il semble certain qu'il ait correctement identifié les points F, M et N comme étant situés au milieu de leur segment respectif, il semble que l'élève A n'ait mobilisé cette relation que de manière implicite : il a pu repérer visuellement l'emplacement du point F, placé sa règle et tracer [DF] en une seule étape, et de même pour les segments MC et AN. En

contraste, les élèves E et D (figures 13 et 14) ont clairement marqué l'emplacement des points F, M et N, que ce soit en nommant les points (élève D) ou sans les nommer (élève E). La mobilisation des milieux des segments ne s'est donc pas faite de manière implicite pour ces élèves, mais de manière explicite.

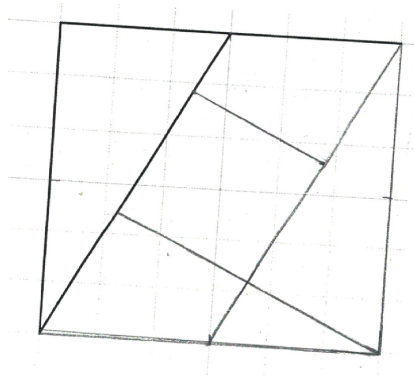


Figure 13: **amorce sur quadrillage** - élève E.

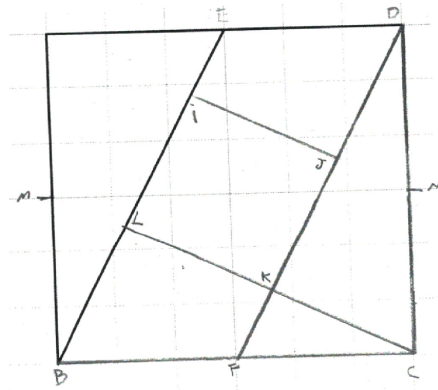


Figure 14: **amorce sur quadrillage** - élève D.

Pour le 35% restant de la classe (9 élèves), si la présentation de l'amorce sur quadrillage allège également les deux premières étapes de la reproduction, avec le carré ABCD correctement refermé, et le segment F correctement placé, ces élèves rencontrent toujours des difficultés dans la construction des segments IJ et LC. Il semble y avoir deux types d'explication pour ces difficultés. La majorité semble avoir perçu les relations d'alignement dans la figure, mais semble avoir du mal à gérer la chronologie des étapes de construction.

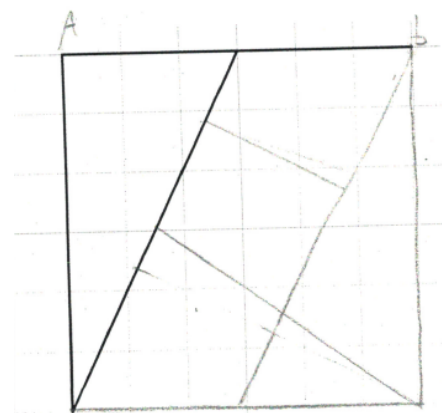


Figure 15: **Séance 1.2 - amorce sur quadrillage** - élève F.

A ce titre, l'élève F (figure 15) est représentatif. En analysant les traits de construction, il est possible de constater que le segment IJ est correctement placé, alors même que le point N, avec lequel le segment IJ est aligné, n'a pas été placé. Il semblerait donc que l'élève F ait bien reconnu l'alignement entre A, I, J et N, et probablement également le placement de N au milieu du segment CD. Cependant, l'élève F n'a pas matérialisé ce point N sur la figure, il a en

quelque-sortes sauté l'étape, comme l'élève A ci-dessus (figure 12). Cela n'a pas porté préjudice à l'emplacement du segment IJ, car cet élève a réussi à placer « implicitement » le point N au bon endroit grâce au quadrillage.

La même chose s'est produite lorsque l'élève F a voulu reproduire le segment LC. Cependant, le fait de n'avoir pas matérialisé le point M lui a cette fois porté préjudice : l'élève F semble avoir aligné le point C avec un point sur le segment AB situé non pas au centre, mais à $\frac{2}{6}AD$ de A : l'élève F s'est « trompé d'un carré » dans son placement implicite du point F. La difficulté rencontrée par l'élève F semble donc provenir d'une difficulté à gérer la chronologie des étapes de construction.

Finalement, un dernier type d'élève semble encore avoir du mal à utiliser les alignements repérés lors de l'analyse préalable de la figure. Seule une petite proportion d'élève est concernée. L'élève G (figure 16) est représentatif de ce panel d'élèves. Il semble en effet que cet élève ait placé les segments IJ et CL sans prendre en compte les alignements repérés dans l'analyse.

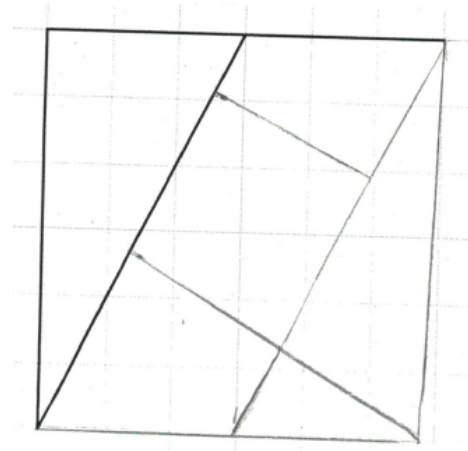


Figure 16: Séance 1.2 - amorce sur quadrillage - élève G.

Pour ces 9 élèves (dont les élèves F et G sont représentatifs), la validation au moyen du calque et un retour de l'enseignante ont permis d'améliorer leur production : on peut par exemple constater l'évolution de la figure de l'élève F en comparant les figures 17 et 18. Dans la figure 18, l'élève F a cette fois utilisé les relations d'alignement pour obtenir les segments IJ et LC. On peut cependant remarquer que les points F, M et N ne sont toujours pas marqués. L'élève F « saute » donc l'étape de marquage de ces points, ce qui complique la reproduction de sa figure : il semble en effet que l'élève F a tâtonné pour orienter son trait correctement, alors que s'il avait marqué les points M et N, aucun tâtonnement n'aurait été nécessaire.

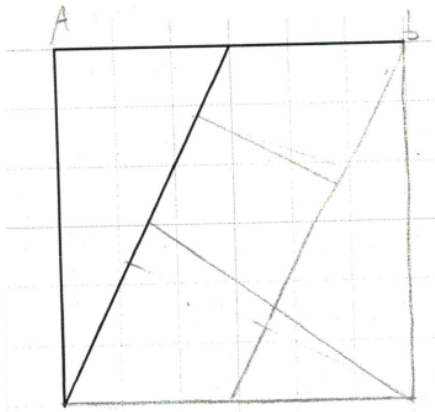


Figure 17: Séance 1.2 - *amorce sur quadrillage* – 1^{er} essai - élève F.

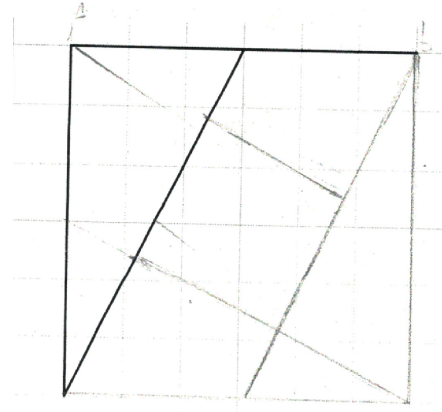


Figure 18: Séance 1.2 - *amorce sur quadrillage* - 2^e essai - élève F.

iv) Conclusion de l'analyse de la séance diagnostique

Trois types de difficultés ressortent de cette séance diagnostique.

Difficultés d'ordre technique

De nombreuses difficultés semblent être liées à la précision et la maîtrise des instruments. La maîtrise de l'équerre pour tracer un angle droit et construire un carré semble devoir être renforcée pour la majorité des élèves. Il est également possible d'observer que certains élèves ont de la peine à effectuer des traits droits à la règle. Finalement, la recherche du point milieu d'un segment semble poser des problèmes de précisions ; ceux-ci semblent être dû tantôt à l'utilisation de la mesure lorsque la longueur du segment n'est pas un nombre exact de centimètres, tantôt à une mauvaise maîtrise de l'utilisation de la bande de papier.

Difficultés liées à l'analyse préalable du modèle

Les élèves repèrent facilement les formes simples à l'intérieur de la figure complexe. Ils identifient également relativement facilement la plupart des angles droits.

A l'inverse, les élèves ont eu des difficultés à identifier d'emblée les relations géométriques entre lignes, ou entre lignes et points : les milieux d'un segment, et surtout, les alignements, ce qui renforce le constat d'une faible représentation mentale de ces relations géométriques.

Difficultés liées à la construction

Les élèves éprouvent des difficultés à mobiliser les propriétés identifiées lors de l'analyse, les milieux de segments et les alignements, ainsi qu'à gérer la chronologie des étapes.

Évolution au cours de la séance

Une évolution de l'activité des élèves a pu être observée au cours de la séance. L'élève H est représentatif d'une telle évolution. Lors de son premier essai sur papier uni (figure 19), cet élève trace le segment DF sans avoir, semble-t-il, placé le point F au préalable sur le segment BC ni donc mobilisé la relation de milieu de segment entre le point F et le segment BC. En quelque-sort, le segment DF a été placé « au jugé ». Il semble en être de même pour le tracé du segment MC : le point M n'étant pas marqué sur la figure. Lors de son premier essai de reproduction sur quadrillage (figure 20), cet élève, tout comme l'élève A plus haut, semble identifier correctement l'emplacement des points M, N et F au milieu de leur segment, mais ne mobilise cette relation que de manière implicite. Cela l'amène à placer le point F de manière incorrecte (malgré le quadrillage), tandis que les points M et N (implicites) semblent placés correctement. Cet élève mobilise correctement les alignements présents dans la figure pour terminer sa reproduction. Son deuxième essai sur quadrillage (figure 21) lui permet ensuite d'effacer les traits de construction superflus.

Enfin, lors de son retour sur la même figure sur papier uni (figure 22), cet élève réussit à corriger et terminer sa figure. On peut observer qu'il a corrigé l'emplacement du point F, ce qui montre qu'il a réussi à mobiliser correctement la relation de milieu de segment. On peut observer que l'emplacement des points M et N est clairement indiqué, ce qui montre que cet élève a réussi à gérer la chronologie des étapes de manière efficace (il a compris que ces points étaient nécessaires au tracé des segments IJ et LC), et qu'il a là aussi mobilisé la relation de milieu de segments. Enfin, les relations d'alignement ont clairement été mobilisées, comme le montre les traits de constructions effacés correspondants aux segments AI et JK.

On peut donc conclure qu'à travers cette première séance prolongée, les élèves semblent avoir fait évoluer leur regard sur la figure à reproduire, passant d'un regard en termes de surfaces à un regard en termes de réseaux de lignes et de points en relation. Cette première séance semble également avoir renforcé leurs représentations mentales des relations géométriques d'alignement et de milieu de segments.

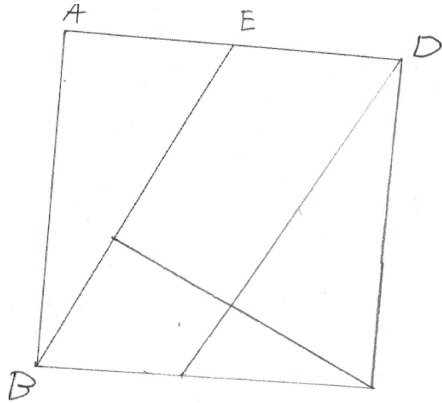


Figure 19: Séance 1.1 - amorce sur papier uni, 1er essai - élève H.

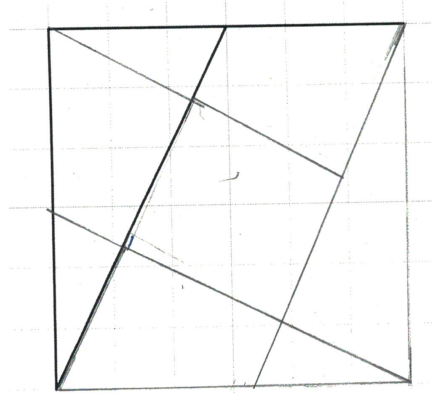


Figure 20: Séance 1.2 - amorce sur quadrillage - 1er essai - élève H.

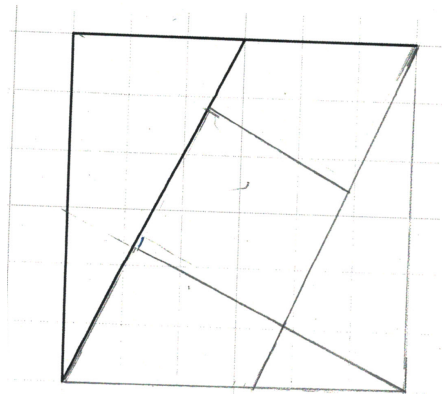


Figure 21: Séance 1.2 : amorce sur quadrillage - 2ème essai - élève H.

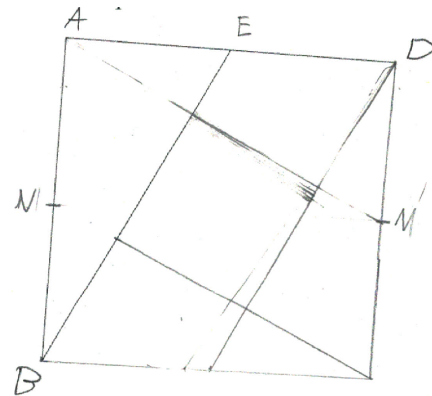


Figure 22: Séance 1.2 : amorce sur papier uni - 2ème essai - élève H.

Programmation des séances suivantes

La suite de la séquence a été programmée de façon à prendre en compte l'analyse effectuée ci-dessus. Afin d'alléger la tâche des élèves sans sacrifier l'objectif - la reconnaissance et la mobilisation des relations géométriques à travers la reproduction de figure -, il a été décidé de ne travailler le repérage et la mobilisation que d'une seule relation géométrique à la fois, et de choisir le modèle et l'amorce en fonction de la relation géométrique visée. Afin d'aider les élèves à surmonter les difficultés liées à la chronologie, ainsi qu'à l'utilisation des relations géométriques repérées, des aides seraient distribuées pendant la construction. Finalement, il a été décidé de choisir, pour la séance 2, un modèle mettant en jeu la reconnaissance des milieux des segments, et pour la séance 3, un modèle permettant de travailler l'alignement.

d) Séance 2

i) Présentation du problème

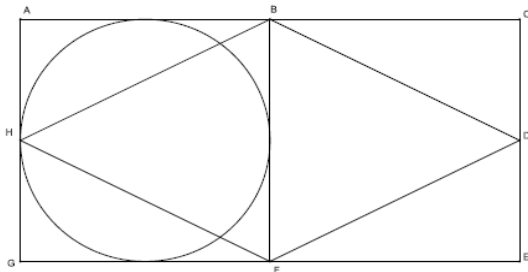


Figure 23: Modèle en séance 2.



Figure 24: Amorce en séance 2.

Le modèle présenté aux élèves en séance 3 est montré dans la figure 23, et son amorce dans la figure 24. Au début de la séance, la figure est affichée en grand format au tableau. L'enseignante annonce ensuite la tâche des élèves : ils vont devoir reproduire la figure à partir de l'amorce.

L'enseignante rappelle aux élève comment procéder : commencer par analyser la figure pour repérer les formes simples qui la composent et les relations géométriques entre ses sous-éléments. Puis les élèves listent les différentes relations géométriques qu'ils connaissent et doivent rechercher (milieux de segments, alignements, etc.).

L'analyse est ensuite guidée par le questionnement proposé par le fichier de maths Euromaths CE2 (figure 25). Une partie des élèves répond aux questions individuellement avant d'entamer la reproduction, tandis que l'enseignante procède à une analyse guidée avec une autre partie de la classe (groupe de besoin).

La construction se fait ensuite de manière individuelle. Les élèves ont accès à un calque pour auto-validation.

Finalement, la séance se conclut par une mise en commun sous forme de correction collective, qui permet, à travers le questionnement guidé de l'enseignante, de mettre en évidence les relations géométriques qu'il faut avoir identifiées pour pouvoir reproduire le modèle (les milieux de segments, le centre du cercle).

DÉCOUVERTE

Tu as déjà vu cette figure page 113.

1 Quelles figures géométriques reconnais-tu ?

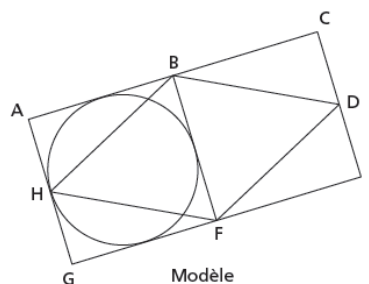
.....
.....

2 a. Quelle est la position du point B sur le segment [AC] ?

b. Quelle est la position du point D sur le segment [CE] ?

3 Effectue les tracés nécessaires pour trouver le centre du cercle.
Appelle I ce point.

*Figure 25: Séance 2 - analyse guidée proposée par le manuel
Euromaths CE2.*



ii) Analyse à priori

La figure modèle a été choisie parce qu'elle met en jeu la reconnaissance et l'utilisation d'une relation entre ligne et point : la reconnaissance du milieu d'un segment. La reconnaissance et la mobilisation de cette relation pour la reproduction de la figure complexe constituent l'objectif de cette séance.

Ici encore, l'amorce choisie implique un changement d'échelle par rapport au modèle, de façon à ce qu'il ne soit pas possible de reproduire la figure par report de longueur. Ceci permet de s'assurer que la reconnaissance et la mobilisation des propriétés de la figure sont indispensables à sa reproduction. L'amorce choisie est constituée du rectangle entier et non d'un demi rectangle à refermer. Ce choix a été fait dans le but d'alléger la tâche des élèves de tout ce qui n'est pas lié à l'objectif et risque de les en détourner. Or, comme l'a montré la séance diagnostique, la technique de construction de carrés et de rectangles est une compétence non maîtrisée et qu'il faudra retravailler par la suite, mais qui n'est pas directement liée à l'objectif de la séquence présentée.

Finalement, la figure choisie, plus simple, ne pose pas de difficulté particulière au niveau de la gestion de la chronologie, ce qui va dans le sens de l'allègement de la tâche pour les élèves, leur permettant de se concentrer sur le repérage des milieux et la reproduction.

Le tableau 2 ci-dessous présente la procédure attendue pour la reproduction de cette figure, au niveau de l'analyse et de la construction, et indique les propriétés à identifier et mobiliser à chaque étape.

	Analyse	Construction	Propriété en jeu
1	<i>Repérer et vérifier que le point B est le milieu du segment [AC].</i>	Placer le point B au milieu de [AC].	Milieu d'un segment.
2	<i>Repérer et vérifier que le point F est au milieu du segment [EG]</i>	Placer F au milieu du segment [EG]. Tracer le segment [BF].	Milieu d'un segment.
3	<i>Repérer et vérifier que le point D est au milieu du segment [CE]</i>	Placer D au milieu du segment [CE].	Milieu d'un segment
4	<i>Repérer et vérifier que le point H est au milieu du segment [GA]</i>	Placer le point H au milieu du segment [GA]. Tracer le losange BFDH.	Milieu d'un segment
5	<i>Repérer et vérifier que le centre du cercle se trouve à l'intersection des diagonales ou des médiatrices du carré ABFG.</i>	Tracer les diagonales ou les médiatrices du carré ABFG. Nommer son intersection I. Construire le cercle de centre I et de rayon OH.	Centre d'un cercle, intersection des diagonales / médiatrices d'un carré.
6		Effacer les traits de construction qui n'apparaissent pas sur le modèle.	

Tableau 2 : Procédure de reproduction en séance 2.

Analyse de la figure

Comme montré ci-dessus, la procédure attendue repose majoritairement sur l'identification de la relation entre les sommets du losange BFDH et les côtés du rectangle ACEG (milieux de segments). L'analyse guidée proposée par le manuel amène l'élève à reconnaître les figures connues constituant le modèle, ce qui met en jeu un regard sur la figure en termes de surfaces (illustration 3 à gauche). Cette analyse guidée conduit ensuite l'élève à voir et analyser la

figure en termes de réseaux de segments et de points et de relations entre ces objets, afin d'identifier les milieux de segments (illustration 3 à droite).

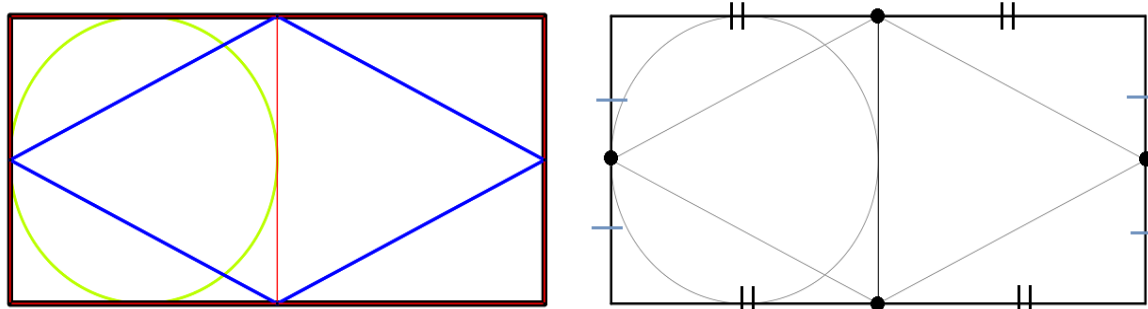


Illustration 3: Deux regards.

Procédures de construction

Pour trouver les milieux des côtés du rectangle (étapes 1 à 4) et tracer le losange, les élèves peuvent utiliser deux procédures : ils peuvent utiliser une bande de papier, y reporter la longueur du segment, plier la partie reportée de la bande en deux, puis placer le point à l'emplacement du pli. La seconde procédure consiste à mesurer la longueur du côté, calculer la moitié et placer le point à la moitié de la longueur du segment. Dans ce cas-là, les côtés du carré mesurent exactement 8 cm et 4cm : ainsi, les deux procédures permettent d'atteindre le même degré de précision.

Pour pouvoir reproduire le cercle (étape 5) il s'agit de repérer que son centre se trouve au croisement des diagonales du carré ABFG ou au croisement de ses médiatrices. Faire cette supposition peut être difficile pour des élèves de CE2. Deux aides (figures 26 et 27) ont donc été préparées pour les élèves en difficulté à ce stade, afin de les aider à faire cette supposition et à la vérifier.

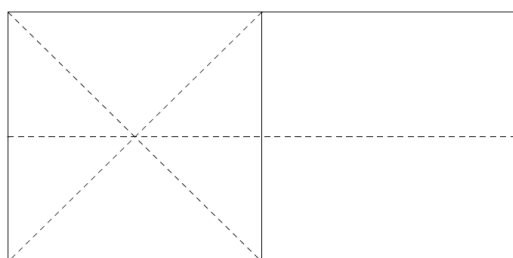


Figure 26: Séance 2 - aide 1.

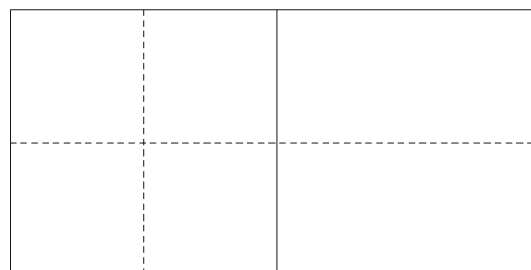


Figure 27: Séance 2 - aide 2.

iii) Analyse du déroulé et des productions

La reproduction de cette figure a été en majorité réussie par les élèves. A nouveau, le repérage des figures simples constituant la figure complexe (question 1 de l'analyse guidée, figure 25) n'a pas posé de problèmes. Le rectangle, les deux carrés, le losange et le cercle ont été reconnus sans difficultés. Par ailleurs, à travers l'analyse guidée du manuel (question 2 de l'analyse guidée, figure 25), les élèves ont pu facilement reconnaître et vérifier que les sommets du losange étaient situés au milieu des côtés du carré. La reconnaissance du centre du cercle a posé davantage de difficultés, mais les aides 1 et 2 (figures 26 et 27) se sont avérées suffisamment utiles pour pallier ces difficultés.

Au niveau de la construction, la grande majorité des élèves a réussi à placer les points B, D, F et H au milieu de leur segment respectif, et donc à construire le losange BDFH. Pour trouver le milieu des segments, deux procédures ont été utilisées. Une partie des élèves a utilisé une bande de papier, tandis que l'autre a utilisé la règle graduée. Par contre, la construction du cercle a posé problème pour un certain nombre d'élèves, et plusieurs essais entrecoupés de validation au moyen du calque, ainsi que l'intervention de l'enseignante ont été nécessaires.

La production de l'élève I (figure 28) est représentative de la majorité des élèves (17 élèves sur 24). Cet élève a correctement placé les points A, B, C et D au milieu de leur segment respectif. Cet élève s'est ensuite trouvé en difficulté lorsqu'il s'est agi de construire le cercle. L'aide lui a suggéré que le centre du cercle pourrait se trouver à l'intersection des diagonales du carré ABFG, ce qu'il a vérifié sur le modèle, avant de s'en servir pour construire le cercle.

Pour le reste des élèves (7 élèves sur 24), si l'analyse a été globalement réussie, la mobilisation des relations mises en évidence dans l'analyse pour la reproduction semble avoir posé problème. L'élève J (figures 29 et 30) est représentatif de cette catégorie d'élève.

En analysant le premier essai de l'élève J (figure 29), il est possible d'observer qu'il a correctement identifié les figures simples et les milieux des segments dans l'analyse guidée. Il a même trouvé le centre du cercle à l'intersection du carré ABFG. Cependant, lors de la reproduction de la figure, cet élève semble ne pas mobiliser les éléments identifiés dans l'analyse. Cependant, aussitôt confronté au calque de validation, cet élève réalise son erreur, et se corrige (figure 30). L'élève J est représentatif du 30 % d'élèves restants. L'activité de cet élève témoigne donc d'une évolution dans sa capacité à mobiliser les relations géométriques identifiées pour reproduire une figure.

DÉCOUVERTE

Tu as déjà vu cette figure page 113.

1 Quelles figures géométriques reconnais-tu ?

le rond, le losange, le rectangle et des arcs...

2 a. Quelle est la position du point B sur le segment [AC] ? *le point B est au milieu de [AC]*

b. Quelle est la position du point D sur le segment [CE] ? *il est au milieu de [CE]*

3 Effectue les tracés nécessaires pour trouver le centre du cercle. Appelle I ce point.

4 Reproduis la figure en l'agrandissant. Le rectangle est déjà dessiné.

J'ai utilisé ma règle graduée :
oui non

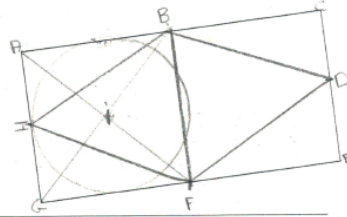
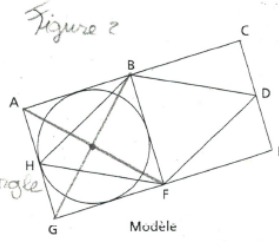


Figure 28: Séance 2 - élève I.

DÉCOUVERTE

Tu as déjà vu cette figure page 113.

1 Quelles figures géométriques reconnais-tu ?

le rectangle... les arcs... des triangles... le losange... les arcs...

2 a. Quelle est la position du point B sur le segment [AC] ? *le milieu...*

b. Quelle est la position du point D sur le segment [CE] ? *le milieu...*

3 Effectue les tracés nécessaires pour trouver le centre du cercle. Appelle I ce point.

4 Reproduis la figure en l'agrandissant. Le rectangle est déjà dessiné.

J'ai utilisé ma règle graduée :
oui non

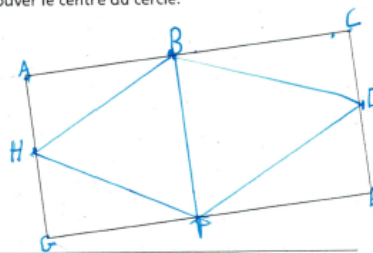
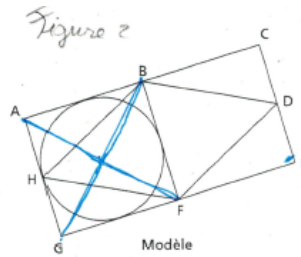


Figure 29: Séance 2 - élève J - 1er essai.

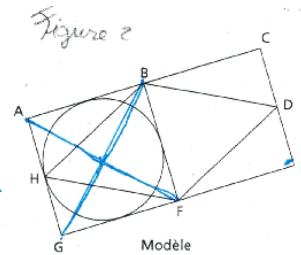
DÉCOUVERTE

Tu as déjà vu cette figure page 113.

1 Quelles figures géométriques reconnais-tu ?

le rectangle - le carré - des triangles...

le losange - le carré...

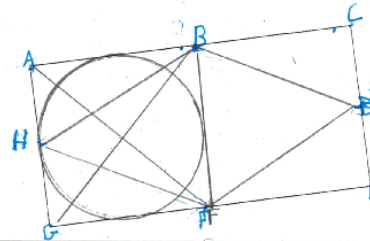


2 a. Quelle est la position du point B sur le segment [AC] ? *le milieu...*

b. Quelle est la position du point D sur le segment [CE] ? *les milieux...*

3 Effectue les tracés nécessaires pour trouver le centre du cercle. Appelle l ce point.

4 Reproduis la figure en l'agrandissant. Le rectangle est déjà dessiné.



J'ai utilisé ma règle graduée :
oui non

Figure 30: Séance 2 - élève J - 2ème essai.

e) Séance 3

i) Présentation du problème

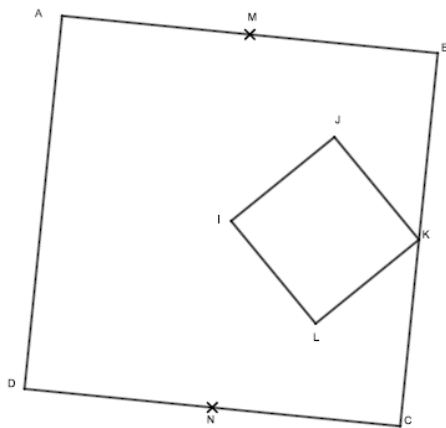


Figure 31: Modèle - séance 3.

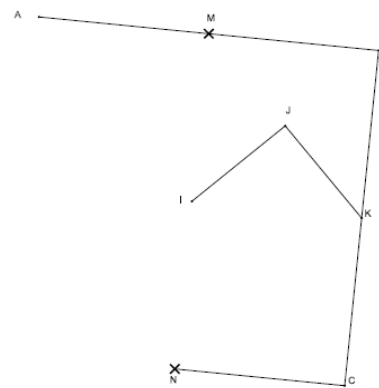


Figure 32: Amorce - séance 3.

L'analyse de la séance diagnostique a montré que les élèves éprouvent des difficultés à repérer spontanément les alignements ; ils n'ont notamment pas le réflexe d'agir sur le modèle en prolongeant les segments pour vérifier ces derniers. L'objectif de cette séance est donc d'amener les élèves à identifier des alignements dans un modèle, et mobiliser ces alignements

pour pouvoir le reproduire.

Le déroulé de la séance est le même que pour les séances 1 et 2. Au départ, le modèle et son amorce (figures 31 et 32) sont affichés en grand format au tableau. La séance commence par l'énoncé de la consigne : il va falloir reproduire le modèle à partir de son amorce.

Au moyen d'un questionnement guidé, et en s'appuyant sur le modèle de la séance 1, l'enseignant commence par rappeler aux élèves la procédure à suivre pour reproduire une figure : analyser la figure pour trouver les figures simples qui la composent, puis repérer les relations géométriques en jeu, comme les milieux des segments, les alignements, ou les égalités de longueur.

Il est rappelé, toujours au moyen d'un questionnement guidé, et en s'appuyant sur la figure de la séance 1, qu'il faut parfois intervenir sur le modèle pour pouvoir identifier et / ou vérifier certaines relations comme les alignements, notamment en prolongeant des segments. Un exemple est donné en amenant les élèves à repérer un alignement dans le modèle à reproduire et à le vérifier en prolongeant le segment de part et d'autre, puis les élèves répondent aux questions de l'analyse guidée du manuel Euromaths CE2 (figure 33) de manière individuelle, avant de se lancer dans la reproduction à partir de l'amorce.

Finalement, la séance se conclut par une mise en commun sous forme de correction collective, qui permet, sous le questionnement guidé de l'enseignante, de mettre en évidence les relations géométriques qu'il faut avoir identifiées pour pouvoir reproduire le modèle (les alignements), et établir la chronologie des étapes de construction.

2 Sur cette figure, on a désigné les points par des lettres. Complète la description de la figure :

ABCD est un

Les points A, I, L et C sont

Les points D, I, J et B sont

Le point est le centre du carré ABCD.

Le point K est le du segment [BC].

Le point M est le du segment [AB].

Le point N est le du segment [CD].

Les points K, J et M sont Les points K, L et N sont

Le quadrilatère IJKL est un

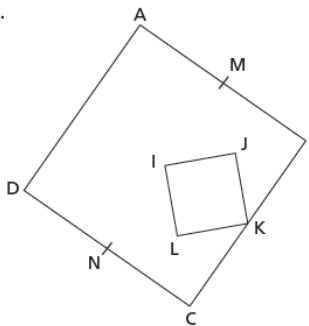


Figure 33: Séance 3 - analyse guidée.

ii) Analyse à priori

La figure modèle a été choisie parce qu'elle met en jeu l'identification et la mobilisation d'une relation entre lignes et / ou points : l'alignement. La reconnaissance et la mobilisation de cette relation pour la reproduction de la figure complexe constituent l'objectif de cette séance. L'amorce choisie n'est pas à l'échelle du modèle, comme pour les séances précédentes, afin de rendre indispensable l'analyse des propriétés de la figure pour sa reproduction.

Il faut également noter que l'amorce n'induit pas qu'une procédure mais deux. La première, exposée dans le tableau 3 ci-dessous, repose sur les propriétés d'alignement uniquement, tandis que la seconde, présentée dans le tableau 4, mobilise le repérage des angles droits, qui n'est pas la propriété dont l'on désire travailler la reconnaissance et la mobilisation.

Le tableau 3 ci-dessous expose la procédure attendue pour la reproduction de cette figure, qui repose sur l'identification et la mobilisation des alignements.

	<i>Analyse</i>	Construction	Propriété en jeu
1	<i>Repérer et vérifier que B, I, J et D sont alignés.</i>	Tracer la demi-droite BI, prolongeant ainsi le segment IJ de part et d'autre.	Alignement
2	<i>Repérer et vérifier que C, N et D sont alignés.</i>	Prolonger la demi-droite passant par C perpendiculaire à [BC]. Placer le point D à l'intersection de cette demi-droite et de [DJ].	Alignement
3	<i>Repérer et vérifier que A, I, L et C sont alignés.</i>	Tracer le segment AC.	Alignement
4	<i>Repérer et vérifier que M, I et N sont alignés.</i>	Tracer la demi-droite MI. Placer le point N à l'intersection de [CD] et de [MI].	Alignement
5	<i>Repérer et vérifier que K, L et N sont alignés.</i>	Tracer [KN]. Placer le point I à l'intersection de [AC] et [KN].	Alignement
6		Effacer les traits de constructions qui n'apparaissent pas sur le modèle.	

Tableau 3 : Procédure n°1 de reproduction en séance 3 (alignements).

Le tableau 4 ci-dessous présente une autre procédure possible pour la reproduction de cette figure, qui repose sur l'identification et la mobilisation des formes géométriques (carrés) et leurs propriétés (les angles droits).

	<i>Analyse</i>	Construction	Propriété en jeu
1	<i>Repérer et vérifier que ABCD est un carré → l'angle BAD est droit</i>	Tracer la perpendiculaire d à [BA] passant par A.	Angle droit
2	<i>Repérer et vérifier que C, N et D sont alignés.</i>	Prolonger la demi-droite passant par C perpendiculaire à [BC]. Placer le point D à l'intersection de cette demi-droite et de d.	Alignement
3	<i>Repérer et vérifier que IJKL est un carré. L'angle JIL est donc droit.</i>	Tracer la droite perpendiculaire p à [JI] passant par I.	Angle droit
4	<i>Comme IJKL est un carré, l'angle JKL est donc droit.</i>	Tracer la droite perpendiculaire q à [JK] passant par K. Placer le point L à l'intersection de p et q.	Angle droit
5		Effacer les traits de constructions qui n'apparaissent pas sur le modèle.	
<i>Tableau 4 : Procédure n°2 de reproduction en séance 3 (angles droits des carrés).</i>			

Il est souhaitable que les élèves reproduisent la figure en suivant la première procédure, puisqu'elle mobilise des relations d'alignement. Cependant, il paraîtrait aberrant de pénaliser la seconde procédure, puisqu'elle reste valide. Il a été choisi donc ici de garder la figure et l'amorce telle que proposée par le manuel, mais, afin de contraindre les élèves à utiliser l'alignement pour la construction, d'interdire l'utilisation de l'équerre.

Analyse de la figure

Comme montré ci-dessus, la procédure attendue repose majoritairement sur l'identification de relations d'alignement. L'analyse guidée proposée par le manuel (figure 33 page 34) amène

l'élève à reconnaître les figures connues constituant le modèle, ce qui met en jeu un regard sur la figure en termes de surfaces (illustration 4 à gauche). Cette analyse guidée conduit également l'élève à voir et analyser la figure en termes de réseaux de segments et de points et de relations entre ces objets, afin d'identifier les alignements et le centre du carré à l'intersection des diagonales (illustration 4 au centre), ainsi que les milieux de segments (illustration 4 à droite).

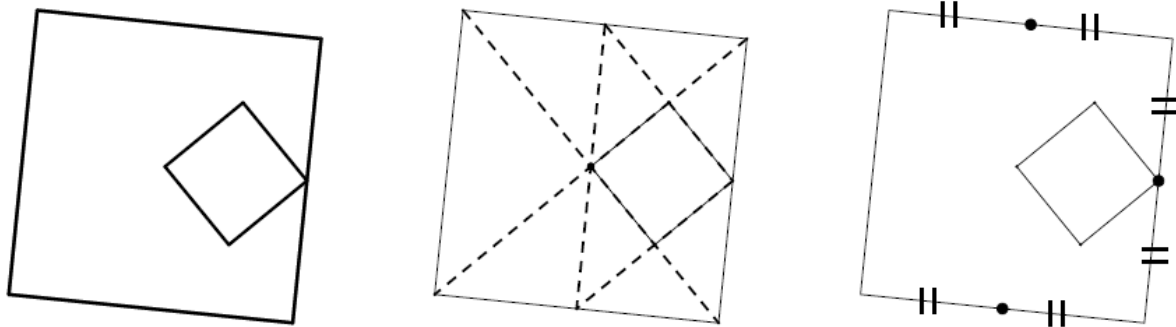


Illustration 4 : Trois regards.

Procédures de construction

La reproduction du modèle repose uniquement sur des relations d'alignement et d'incidence, si la procédure décrite dans le tableau n° 1 est suivie. Pour cela, l'élève peut tracer tous les segments et demi-droites à la règle, comme indiqué dans le tableau n°1, puis effacer les traits de construction. Un élève à l'aise avec les notions d'alignement et d'incidence pourra limiter un maximum la quantité de traits de construction superflus. Par exemple, à l'étape 3, au lieu de tracer le segment AC, puis KN, de nommer L leur intersection et d'effacer [AI] et [LC], l'élève peut ne tracer que le segment IC, puis tracer le segment KL en s'assurant par le positionnement de sa règle que K, L et N sont alignés, et en s'arrêtant au niveau du segment [IC] qui marque l'extrémité du segment et le point L. Cet élève n'aura alors plus que le segment [LC] à effacer.

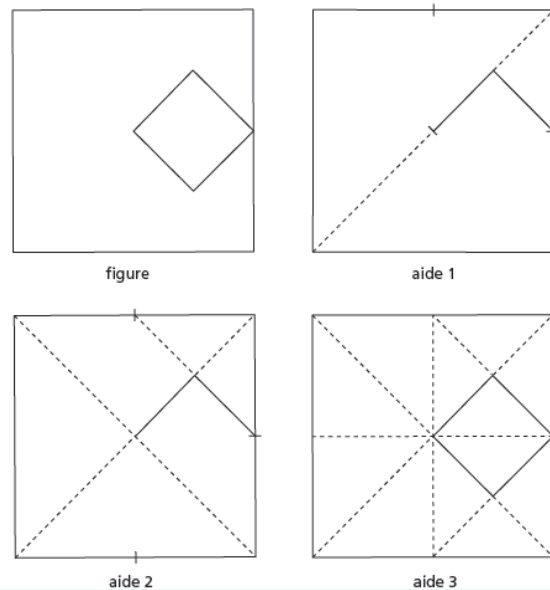


Figure 34: Séance 3 - aides.

Afin d'alléger la tâche des élèves au niveau de la chronologie, et de les aider à utiliser les alignements découverts lors de l'analyse préalable de la figure, les aides de la figure 34 leur sont proposées.

iii) Analyse du déroulé et des productions

A nouveau, le repérage des figures simples constituant la figure complexe (question 1 de l'analyse guidée, figure 33 page 34) n'a pas posé de problèmes. Les deux carrés ont été reconnus sans difficultés. Par ailleurs, à travers l'analyse guidée du manuel (question 2), les élèves ont pu facilement reconnaître et vérifier les milieux des segments. Le repérage des alignements a été réussi: les élèves n'ont cette fois-ci pas hésité, pour la plupart, à prolonger les segments sur le modèle afin de vérifier cette relation.

La construction a ainsi été majoritairement réussie, en dehors de quelques erreurs de précision. Cependant, il est intéressant de noter la variété des procédures. Il avait été noté, en analyse préalable, qu'il existait une autre procédure n'utilisant pas l'alignement pour restaurer la figure, mais uniquement les propriétés dérivées du constat que les quadrilatères ABCD et IJKL sont des carrés et ont donc des angles droits. Afin de privilégier la procédure mettant en jeu les alignements, l'enseignante avait demandé aux élèves de trouver un moyen de restaurer la figure sans utiliser l'équerre. De plus, l'aide proposée aux élèves induisait l'utilisation des alignements.

Au final, la majorité des élèves (19 sur 23) a utilisé les relations d'alignement pour restaurer la figure. Parmi eux, pour 13 élèves, la procédure de reproduction a mis en jeu à la fois des relations d'alignements et la reconnaissance d'angles droits. Beaucoup d'élèves, comme l'élève K (figure 35) ont trouvé le point D en utilisant le fait que ABCD est un carré (étapes 1 et 2 dans le tableau n°4) plutôt qu'en utilisant l'alignement des points B, J, I, D et C, N et D, ainsi que l'incidence entre les demi-droites BJ et CN. D'autres élèves, comme l'élève L (figure 36) ont tracés le segment KL en utilisant le fait que IJKL est un carré, et en traçant la perpendiculaire à [JK] passant par K.

Cependant, 6 élèves sur 23 ont réussi à reproduire la figure en n'utilisant que les alignements. Les élèves M et N (figures 37 et 38) sont des exemples représentatifs de ces élèves. L'élève M (figure 37) n'a pas eu le temps d'effacer ces traits de constructions. Finalement, 4 élèves, comme l'élève O (figure 39), ont reproduit la figure sans utiliser les propriétés d'alignements.

Cette analyse témoigne de la tendance des élèves à reconnaître spontanément des propriétés

liées aux surfaces (les formes usuelles, les angles droits) ; il est visible que ces propriétés sont instinctivement utilisées au détriment des relations entre lignes et points.

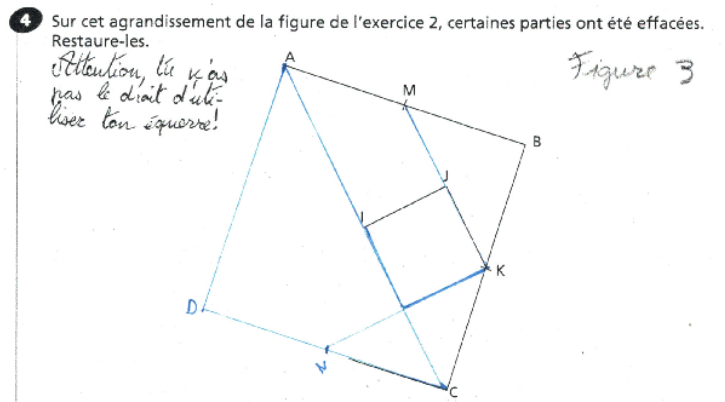


Figure 35: Séance 3 - élève K.

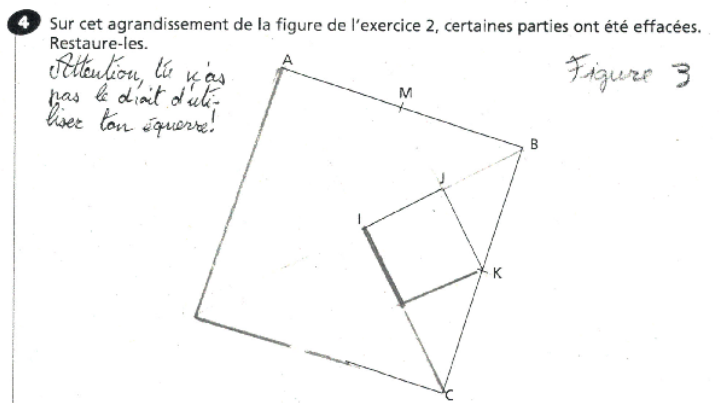


Figure 36: Séance 3 - élève L.

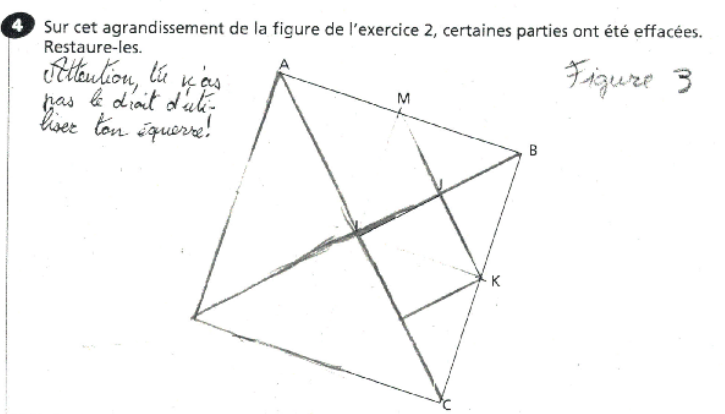


Figure 37: Séance 3 - élève M.

- 4 Sur cet agrandissement de la figure de l'exercice 2, certaines parties ont été effacées. Restaure-les.

Attention, tu n'as pas le droit d'utiliser ton équerre!

Figure 3

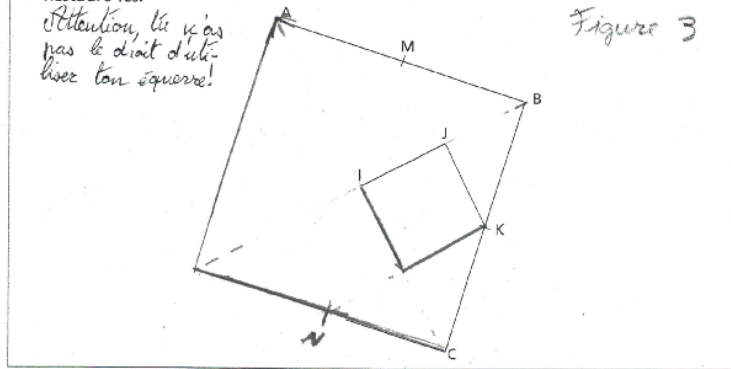


Figure 38: Séance 3 - élève N.

- 4 Sur cet agrandissement de la figure de l'exercice 2, certaines parties ont été effacées. Restaure-les.

Attention, tu n'as pas le droit d'utiliser ton équerre!

Figure 3

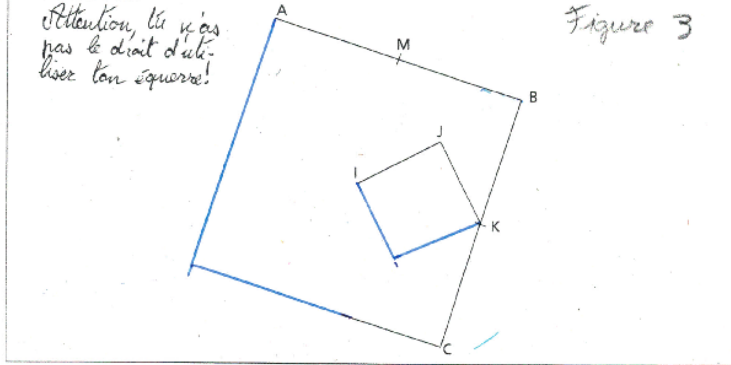


Figure 39: Séance 3 - élève O.

CONCLUSION

L'objet du travail présenté dans ce mémoire était d'étudier comment l'activité de reproduction de figures complexes permet de faire évoluer le regard que les élèves portent sur la figure à reproduire pour les amener à améliorer leur capacité à identifier et mobiliser les relations géométriques en jeu.

Lors de la séance diagnostique, les élèves étaient capables de repérer spontanément les formes géométriques qui composaient la figure. A l'inverse, ils n'identifiaient les relations géométriques entre lignes et / ou points que sous l'impulsion de l'enseignante. En outre, l'analyse des premières activités et productions des élèves met en lumière des difficultés à mobiliser ces relations géométriques dans un problème de reproduction, même une fois identifiées sous l'impulsion de l'enseignante et vérifiées au moyen des instruments. Ces observations confirment le constat d'une faible représentation mentale des relations géométriques. Elles s'expliquent également par le fait qu'il s'agissait de la première confrontation des élèves à un problème de reproduction sur papier uni.

Au fil de la séance cependant, grâce à la validation au moyen du calque et aux interventions de l'enseignante lors des mises en commun, les élèves ont commencé à développer une compréhension des relations géométriques qui allait au delà de la reconnaissance passive : ils ont réalisé qu'elles devaient être mobilisées pour la reproduction de figure. L'analyse de l'évolution de l'élève H au cours de la séance diagnostique (figures 19, 20, 21 et 22, page 28) témoigne en effet d'une véritable progression dans la capacité à mobiliser les relations géométriques en jeu.

La reproduction des figures proposées par la suite en séances 2 et 3 (figures 23 page 29, et 31 page 35) reposait sur l'identification, respectivement des relations de milieu de segment et d'alignement, abordées lors de la séance diagnostique, en allégeant le travail technique des élèves et la gestion de la chronologie. La facilité avec laquelle les élèves ont identifiés les relations en jeu lors de ces séances semble indiquer qu'un renforcement de leurs représentations mentales de ces relations s'est opéré au cours de la séance 1. Ce renforcement semble avoir permis aux élèves d'améliorer leur capacité à « voir » le modèle sous la forme d'un réseau de segments et de points et à reconnaître les relations qui caractérisent ces sous-éléments du modèle.

L'analyse ci-dessus a cependant montré que les élèves peuvent identifier une relation

géométrique tout en éprouvant de la difficulté à la mobiliser, comme en témoigne la première production de l'élève J en séance 2 (figure 29 page 34); cela indique qu'il ne suffit pas, à l'école primaire, de se contenter de simples analyses de figures complexes dont il faudrait repérer les figures simples qui la composent et les relations géométriques qui caractérisent ses sous-éléments. Il faut proposer une activité qui amène l'élève à donner du sens à ces relations en les mobilisant : la reproduction de figures complexes est en cela une activité non seulement appropriée, mais nécessaire. L'évolution de l'élève J en séance 2, entre son premier et son second essai (figures 29 et 30 pages 34 et 35) témoigne en effet d'une véritable évolution de sa compréhension de la relation de milieu de segment.

Enfin, l'analyse des productions d'élèves en séance 3 met en lumière la propension des élèves à « voir » la figure en termes de surfaces plutôt qu'en termes de réseaux de lignes et de points, ce qui les amène à mobiliser plus volontiers les propriétés liées aux formes géométriques plutôt que les relations entre les lignes et / ou les points constituant la figure. Cette observation confirme que les représentations mentales des formes géométriques sont beaucoup plus fortes chez les élèves que celles des relations géométriques.

Pour ces raisons, il semble capital d'exposer les élèves à des problèmes de reproduction de manière répétée durant tout le cycle 3, tout en les adaptant au niveau des élèves et aux relations connues et étudiées au cours de l'année. En effet, plus les élèves seront confrontés aux problèmes de reproduction, plus ils auront l'occasion de renforcer leurs représentations mentales des relations géométriques, et de développer leur capacité à « voir » les figures comme des réseaux de lignes et de points en relation, permettant ainsi de développer leur capacité à identifier les relations géométriques en jeu. Cette confrontation aux activités de reproduction conduit également les élèves à donner du sens à ces relations en les mobilisant dans un problème. Puisque la majorité des problèmes de géométrie rencontrés au collège reposent notamment sur l'identification et la mobilisation des relations géométriques en jeu dans les figures, les activités de reproduction de figures complexes permettent ainsi de répondre à un enjeu majeur de l'enseignement de la géométrie au cycle 3 en contribuant à préparer les élèves au raisonnement géométrique.

BIBLIOGRAPHIE

BARRIER Thomas, HACHE Christophe, MATHÉ Anne-Cécile « Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figure et activité des élèves », Grand N, n°93, pp. 13 à 37, 2014

BILGOT A. et MAYENSON J.-B. - *La géométrie plane à l'école primaire, Mercredi 15 octobre 2014 Groupe MIG, ESPE Paris, 2014.*

CHARNAY Roland « De l'École au collège : les élèves et les mathématiques », Grand N, n°62, pp. 35 à 46, 1997

FÉNICHEL Muriel, PAUVERT Marcelle, PFAFF Nathalie, *Donner du sens aux mathématiques Tome 1. Espace et géométrie*, Paris, BORDAS pédagogie, 2004.

KAHANE J.-P., *L'enseignement des sciences mathématiques. Rapport de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Éd. Odile Jacob, 2002.

PELTIER Marie-Lise, BRIAND Joël, NGONO Bernadette, VERGNES Danielle, *Euromaths Enseigner les mathématiques en CE2 Livre du professeur*, Paris, Hatier, 2010.

PELTIER Marie-Lise, BRIAND Joël, NGONO Bernadette, VERGNES Danielle, *Euromaths CE2 Manuel de l'élève*, Paris, Hatier, 2010.

Bulletin officiel du Ministère de l'Éducation nationale, 14 février 2002, numéro 1.

Bulletin officiel du Ministère de l'Éducation nationale, 19 juin 2008, numéro 3.

Bulletin officiel du Ministère de l'Éducation nationale, 28 août 2008, numéro 6, Programmes du collège, Programmes de l'enseignement de mathématique.

Bulletin officiel du Ministère de l'Éducation nationale, 26 novembre 2015, numéro 11.