



HAL
open science

La schématisation en résolution de problèmes mathématiques au CM2 : aide cognitive ou obstacle ?

Stella Stecker

► **To cite this version:**

Stella Stecker. La schématisation en résolution de problèmes mathématiques au CM2 : aide cognitive ou obstacle ?. Education. 2016. dumas-01384726

HAL Id: dumas-01384726

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01384726>

Submitted on 16 Nov 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Mémoire de Recherche
Master 2 MEEF 2015-2016
Option M2N

La schématisation en résolution de
problèmes mathématiques au CM2 :
aide cognitive ou obstacle ?

Stella STECKER

Site de formation : Torcy
Groupe : T2B2

Tuteur de recherche : Guilhem LABINAL
Responsable de recherche : Michèle Dell Angelo

Mai 2016

SOMMAIRE

1. Introduction	3
2. Cadre théorique de recherche	5
2.1. Définitions et cadrage des principaux concepts	5
2.1.1. Qu'est-ce qu'un problème mathématique ?	5
2.1.2. Quelles sont les étapes en résolution de problèmes ?	8
2.1.3. Qu'est-ce qu'un schéma ?	9
2.1.4. Le schéma : un outil d'acquisition de compétences au cycle 3	12
2.2. La représentation visuelle en mathématiques	14
2.2.1. Définition du champ conceptuel	14
2.2.2. Les obstacles rencontrés par les élèves ?	15
2.3. Cadre didactique en résolution de problèmes	17
2.3.1. Apprendre à symboliser les problèmes	17
2.3.2. Apprendre à catégoriser les problèmes	19
3. Problématisation	20
3.1. Question de recherche	20
3.2. Hypothèses	20
4. Observations	21
4.1. Données	21
4.2. Echantillon observé	22
4.3. Outils d'observation	23
4.3.1. Pré-test et post-test	23
4.3.2. Séquence d'apprentissages	26
5. Analyse des informations	30
5.1. Analyse des résultats quantitatifs	31
5.2. Analyse didactique des productions d'élèves	37
6. Discussion, conclusions, et perspectives	68
Bibliographie	70
Annexes	71

1. INTRODUCTION

Résoudre un problème mathématique ne peut se restreindre à faire une opération et à trouver un résultat. Cette activité est un processus bien plus complexe qui nécessite la mise en œuvre de compétences spécifiques ; d'où une place plus affirmée dans les programmes scolaires¹ de mathématiques à partir du cycle 3. Le document d'accompagnement précise que *« La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages. »* (cf. annexe 1).

Le psychologue, Jean-Michel Hoc² (1987) considère que la résolution de problèmes est une activité mathématique qui requiert la mise en œuvre de connaissances de haut niveau. Il précise que cette activité fait suite à des apprentissages spécifiques tels que des activités d'automatismes et des activités dirigées par des règles. Cette approche permet de prendre la juste mesure des instructions officielles concernant cette compétence, qui est devenue un élément clé dans les apprentissages mathématiques. La résolution de problèmes devient une finalité des apprentissages mathématiques à l'école primaire, Isabelle Demonty, régente en mathématiques, spécialisée en didactique des mathématiques et Annick Fagnant, Docteur en Sciences de l'éducation, s'accordent à reconnaître que *« l'apprentissage des mathématiques par la résolution de problèmes apparaît comme une démarche privilégiée pour développer des compétences et des connaissances durables chez les élèves »*³.

Notre recherche s'appuie sur les travaux d'auteurs tels que le biologiste américain Paul Ehrlich (1990), le spécialiste en pédagogie universitaire Jacques Tardif (1992), le formateur à ESPE⁴ de Picardie Alain Descaves (1992), ou encore l'enseignant chercheur Jean Julo (1995) qui s'accordent à reconnaître l'existence d'au moins deux grandes étapes dans la résolution de problèmes : d'une part, la construction de la représentation du problème et d'autre part, la résolution, incluant la technique opératoire.

¹ Bulletin officiel [B.O.] hors-série n° 3 du 19 juin 2008 - programmes CE2-CM1-CM2.

² Hoc J-M., *Psychologie cognitive de la planification*, 1987, Presses Universitaires de Grenoble.

³ Fagnant A., Demonty I., *Résoudre des problèmes : pas de problème !*, Maths & Sens, Editions De Boeck & Larcier, 2005, Bruxelles.

⁴ Ecole Supérieure du Professorat et de l'Éducation.

C'est précisément dans la phase de représentation, que s'inscrit notre objet de recherche, qui est de comprendre le rôle de la schématisation en résolution de problèmes mathématiques au cycle 3. **Il s'agit de vérifier si la schématisation en mathématique est un outil d'aide à la résolution de problèmes pour des élèves de CM2 (Cours Moyen 2^{ème} année).**

Tout d'abord, nous présenterons le cadre théorique de notre recherche, avec notamment une clarification des termes « schéma », « problème mathématique » et « représentation visuelle en mathématique ». Il sera également question dans cette partie de mettre en regard les travaux de chercheurs, spécialistes en didactique des mathématiques, tels que Marceline Lapara, Claire Margolinas, Jean Julo, ou encore Agnès Camus-Musquer. Leurs travaux présentent les conditions didactiques nécessaires à la résolution de problèmes mathématiques, inscrivant la schématisation comme un outil d'aide à la modélisation mais aussi à la symbolisation dans la mesure où elle fait l'objet d'un apprentissage spécifique.

Puis, après avoir exposé la problématisation de notre recherche, nous présenterons le protocole d'observations mis en place dans une classe seine et marnaise de CM2. Le recueil de données s'articulera autour d'un pré-test, d'une séquence d'apprentissages dédiée à la schématisation dans le cadre spécifique de la résolution de problèmes mathématiques, et d'un post-test.

Ensuite, une analyse des données recueillies nous permettra de mesurer les effets de la séquence sur l'activité de résolution de problèmes sur la base d'une série de dix énigmes, objet du pré-test et du post-test.

Et enfin, nous conclurons notre travail en apportant une réponse à notre question de recherche avec potentiellement une proposition de prolongement au travail mené. Il sera également question de mettre en évidence les limites de notre expérimentation.

2. CADRE THEORIQUE DE RECHERCHE

2.1. Définitions des éléments du cadre théorique

2.1.1. Qu'est-ce qu'un problème mathématique ?

Parmi les nombreuses définitions de l'objet « problème mathématique », nous avons sélectionné les plus représentatives et convergentes vers notre sujet d'étude, orientées vers les champs de la psychologie cognitive, la psychologie du développement et la didactique des mathématiques :

- Gérard Vergnaud, Psychologue, spécialiste du développement et de l'éducation de l'enfant : *« Par problème, il faut entendre dans le sens large que lui donne le psychologue, toute situation dans laquelle il faut découvrir des relations, développer des activités d'exploration, d'hypothèses et de vérification pour produire une solution. »*⁵
- Allen Newell & Herbert A. Simon, Chercheurs en psychologie cognitive : *« Un problème surgit de l'écart qui se forme entre un état initial et un état but. Résoudre un problème c'est chercher un ensemble de procédures qui permettent le passage d'un état à un autre. »*⁶
- Jean Brun, Professeur en didactique des mathématiques : *« Un problème est généralement défini comme une situation initiale avec un but à atteindre, demandant au sujet d'élaborer une suite d'actions ou opérations pour atteindre ce but. »*⁷

Ces définitions nous éclairent sur le caractère relatif d'un problème. Pour qu'il y ait problème, il doit y avoir, pour la personne concernée, une véritable activité de recherche. Si la solution paraît évidente d'emblée, il n'y a pas de problème. Nous comprenons ainsi, que l'énoncé ne suffit pas à déterminer s'il s'agit d'un problème ou pas. L'historique des élèves va conditionner la réponse à cette question, en tenant compte des acquis, des apprentissages préalables, du contexte général... Plus précisément, une même situation pourra présenter un vrai problème pour un élève, alors qu'elle ne le sera pas pour un autre.

⁵ Vergnaud G., « Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques » Grand N, n°38 CRDP de Grenoble, novembre 1986, p. 22.

⁶ Newell A., Simon H.A., *Human Problem Solving*. Englewood Cliff, N.J. : Prentice Hall. 1972.

⁷ Brun, 1990, p. 2.

Selon les recherches de Daniel Gilis et Jean-Claude Guillaume⁸, Chargés de Recherche en Didactique des Mathématiques à l'IFE⁹, la stratégie de résolution mise en place par deux élèves sera différente, au sens qu'il existe autant de stratégies de résolution que d'individus. L'élève confronté à une réelle situation-problème devra construire une procédure pour la traiter, alors que l'élève plus apte à trouver la solution, n'aura qu'à appliquer une procédure déjà connue. Ce constat nous conduit à prêter une attention toute particulière aux productions d'élèves lors de notre phase d'expérimentation, afin d'identifier si la situation-problème proposée en est réellement une et quelle stratégie a été mise en place par chaque élève.

En 1972, Roland Charnay, didacticien des mathématiques, propose une typologie de problèmes¹⁰ pour analyser les processus d'utilisation. Il distingue sept types de problèmes :

- Le problème ouvert, qui présente un énoncé court, n'induisant ni la méthode, ni la solution. Ce type de problème est utilisé pour mettre les élèves en situation de recherche ;
- La situation problème, destinée à engager les élèves dans la construction de nouvelles connaissances. Elle permet de donner du sens aux apprentissages ;
- Le problème de réinvestissement, appelé encore problème d'application. L'élève est amené à utiliser des données déjà étudiées ;
- Le problème d'intégration, destiné à permettre à l'élève d'étendre le champ d'utilisation d'une notion connue ;
- Le problème de synthèse, qui a pour objectif de mobiliser conjointement chez l'élève différentes connaissances ;
- Le problème évaluatif, qui permet de faire un bilan des connaissances de l'élève ;
- Le problème intégratif qui peut être ouvert mais dont la complexité nécessite de mettre en œuvre une démarche de modélisation mathématique.

⁸ Gilis D., Guillaume, J.C., « La résolution de problèmes : un nouveau savoir scolaire ? ». *Spirale, Revue de Recherches en Education*, N° 15, 1995, p. 91-119.

⁹ Institut Français de l'Éducation.

¹⁰ Charnay R., « Problème ouvert, problème pour chercher » *Grand N*, n° 51, 1992, p. 77-83.

Notre objet de recherche portera particulièrement sur les situations-problèmes, parce qu'elles sont les plus propices à provoquer chez l'élève un conflit cognitif entre ses représentations initiales et la réalité de la situation. Elles vont permettre à l'élève de prendre conscience que ses connaissances actuelles sont erronées ou insuffisantes. Il devra avoir recours à de nouvelles stratégies et de nouveaux outils tels que la schématisation pour résoudre le problème.

En complément de la typologie de R. Charnay, la classification proposée par Gérard Vergnaud est traditionnellement utilisée en didactique des mathématiques pour organiser et identifier les différents types de problèmes mathématiques (*cf. annexe 2*). Cette typologie est segmentée, d'une part, en problèmes additifs et soustractifs (problème de transformation d'état, problème de composition d'état, problème de comparaison d'état, problème de composition de transformation) et, d'autre part, en problèmes de multiplication et de division (problèmes ternaire et quaternaire).

Cependant, en référence aux observations de Daniel Gilis et Jean-Claude Guillaume, nous nous interrogeons sur la pertinence de s'astreindre à une seule classe de problèmes, dans la mesure où chaque élève présente un niveau de développement cognitif qui lui est spécifique, le conduisant à adopter une stratégie de résolution particulière. Déjà en 1963, le psychologue français Pierre Greco soulignait les limites de classer les problèmes en typologies, tant les processus mentaux en jeu sont variés : *« On peut distinguer plusieurs catégories ou types de problème, et malheureusement leur classification morphologique ne saurait rien préjuger quant à la classification correspondante des processus mentaux intéressés. »*¹¹

Afin d'observer précisément la schématisation chez des élèves de CM2, nous choisissons de privilégier dans notre recherche les situations-problèmes propices à la schématisation telles que des situations de partage, de comparaison, ou encore de transformation.

¹¹ Greco P., « Apprentissage et structures intellectuelles ». *Traité de Psychologie Expérimentale. Vol. VII, L'intelligence*, 1963, p. 167-217, Paris.

2.1.2. Quelles sont les étapes de résolution de problème ?

Comme évoqué en introduction, la plupart des auteurs s'accordent à reconnaître deux étapes essentielles dans le processus de résolution de problème : la représentation et la résolution.

Parmi les auteurs les plus reconnus, nous citerons, le professeur Lieven Verschaffel, Docteur en Sciences de l'Education, qui a proposé, en 2000, un processus en cinq étapes¹² :

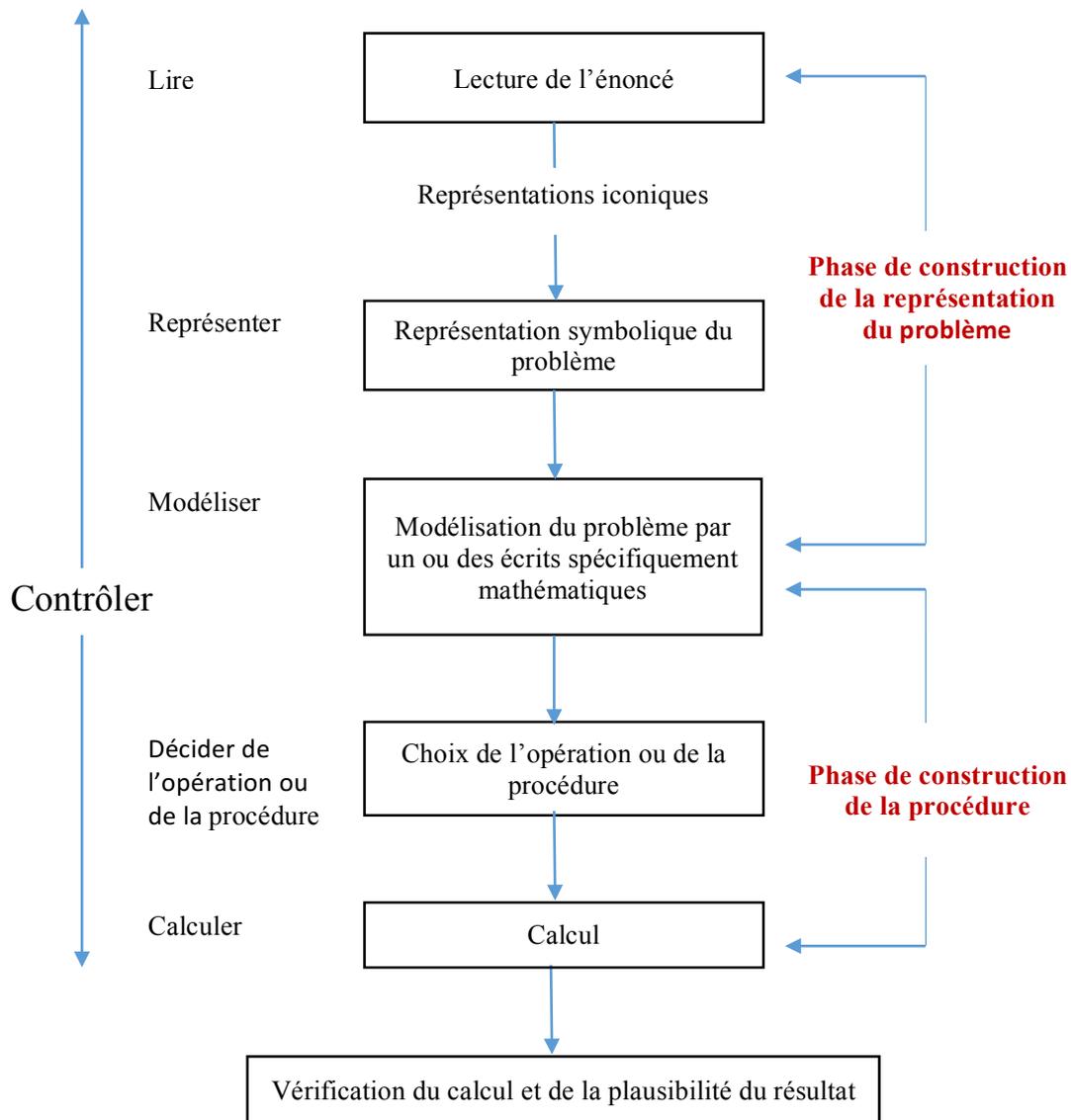
- Construire une représentation mentale du problème ;
- Décider comment résoudre le problème ;
- Exécuter les calculs nécessaires ;
- Interpréter le résultat et formuler une réponse ;
- Evaluer la situation.

Cependant, dans le cadre de notre recherche, nous avons choisi de prendre appui sur une proposition de schéma de résolution de problèmes plus détaillée, particulièrement au niveau de la phase de représentation, qui est au cœur de notre problématique. Nous choisissons d'utiliser le schéma proposé par Alain Descaves¹³, qui considère que résoudre un problème consiste à traiter conjointement plusieurs étapes, dont l'étape essentielle de la construction de la représentation. Son schéma¹⁴ illustre précisément les différentes étapes de la résolution de problèmes.

¹² Fagnant A., Demonty I., *Résoudre des problèmes : pas de problème !, Maths & Sens, Editions De Boeck & Larcier, 2005, Bruxelles.*

¹³ Alain Descaves participe à des travaux de recherche dans le cadre des IREM (Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques).

¹⁴ Descaves A., *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes, Hachette éducation, 1992, Paris.*



2.1.3. Qu'est-ce qu'un schéma ?

Le mot « schéma » tire son origine étymologique du grec : skêma qui signifie forme, figure. Cependant, ce terme est complexe à définir car il est polysémique et peut varier en fonction de la discipline dans laquelle il est employé. De manière générale, les termes de dessin, croquis et schéma sont utilisés à l'école primaire sans que leur sens premier soit précisément bien connu. La différence fondamentale entre ces trois termes réside dans le degré d'abstraction qu'ils requièrent.

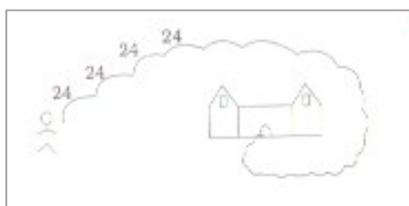
Les définitions les plus conventionnelles définissent le schéma comme une forme graphique ou imagée, réduite à l'essentiel.

Définitions du CNRTL¹⁵ : « Représentation graphique réduite à l'essentiel, et souvent symbolique, mais où toutes les informations se trouvent données de façon précise. Synon. Diagramme » ; « Rendu de la forme générale, dessin simplifié. ».

Définitions du Larousse : « Dessin, tracé figurant les éléments essentiels d'un objet, d'un ensemble complexe, d'un phénomène, d'un processus et destinés à faire comprendre sa conformation et/ou son fonctionnement ; plan : Schéma du moteur à explosion. » ; « Grandes lignes, points principaux qui permettent de comprendre un projet, un ouvrage, etc. : Schéma de la réorganisation d'un service. »

Le schéma aide à comprendre, à mémoriser, à interroger et à analyser. Un schéma n'est pas une représentation parfaite du réel. Il permet une visualisation et une meilleure compréhension d'un système de façon extrêmement simplifiée. La schématisation fait appel à la capacité d'abstraction. La différence fondamentale entre un dessin et un schéma est justement le niveau d'abstraction requis.

Alain Descaves¹⁶ souligne les différents degrés d'abstraction dont l'élève est capable pour se représenter la structure du problème. Il met en relief l'importance d'outiller les élèves avec des apprentissages particuliers, pour favoriser des représentations iconiques plus abstraites et conventionnelles, et aboutir sur une représentation symbolique du problème. Avec le cas du « Terrible géant Tneïtok¹⁷ », il favorise l'utilisation de la droite numérique pour se représenter le problème. Pour lui, il s'agit d'amener l'élève à passer d'un schéma dessin à un schéma plus normalisé, tel que la droite graduée, pour l'exemple du terrible géant Tneïtok.



Représentation d'un élève de CM1



Représentation d'un autre élève de CM1
qui connaît la droite numérique

¹⁵ Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales.

¹⁶ Descaves A., Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes, Hachette éducation, 1992, Paris.

¹⁷ « La légende raconte que, dans les grandes plaines de Russie, le terrible géant Tneïtok était si grand qu'il ne pouvait se déplacer que par bonds de 24 vestes (veste : mesure russe qui vaut 1 km). Se trouvant à 5940 vestes de son château, en combien de bonds pouvait-il l'atteindre ? »

Mais que faut-il comprendre avec le terme de schéma à l'école primaire ?

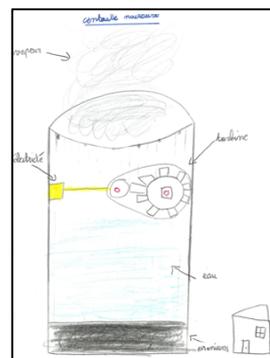
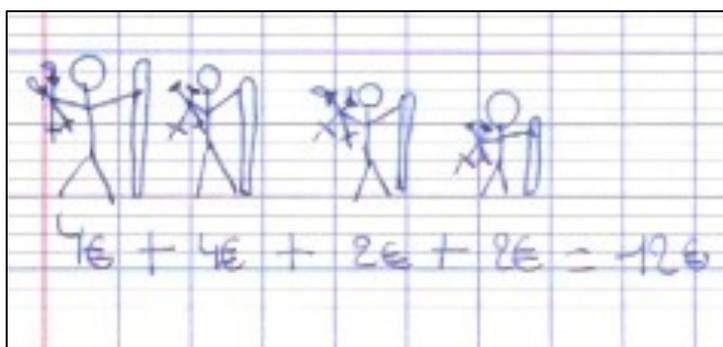
Dans le champ scolaire, et particulièrement celui des mathématiques, le schéma apparaît comme une représentation simplifiée de la réalité qui a pour objectif de faire ressortir les éléments essentiels d'un sujet (souvent un énoncé de problème). Les données sont donc triées et organisées grâce au schéma, permettant d'accéder à une image mentale de la situation en question. Grâce au schéma mathématique, l'élève va pouvoir faire le lien entre les données de l'énoncé et enclencher la bonne stratégie pour arriver à la solution.

Nous retiendrons la définition M. Adam (2000) : *« Le schéma se présente comme une représentation intermédiaire entre le texte linéaire et l'illustration, servant à faire ressortir les caractères propres à l'objet représenté et surtout ayant une fonction structurante, pour ceux qui ont du mal à bien organiser leur pensée. »*¹⁸

Pour notre recherche, nous définirons le schéma comme une représentation graphique et symbolique, représentative de la réalité et qui dégage les caractéristiques structurales et fonctionnelles d'un sujet d'étude.

Les schémas sont traditionnellement classés en quatre catégories, définies en fonction du mode d'acquisition du schéma et de son utilisation :

- Les schémas iconiques : ils traduisent un niveau d'abstraction assez faible. Ils se caractérisent par des dessins naïfs, à caractère figuratif. Les élèves qui l'utilisent, proposent en général, une représentation très personnelle de la réalité.



¹⁸ Monnier N., *Les schémas dans les activités de résolution de problèmes*, Grand N, n°71, 2003, p. 26.

- Les schémas symboliques : ils présentent un degré d'abstraction supérieur aux schémas iconiques. Parmi les plus utilisés, nous pouvons citer la droite numérique ou encore les représentations ensemblistes (représentation liée à l'aspect d'une collection d'objets). Ils proposent une représentation du réel mais sous une forme plus mathématique. Il est important de noter que ce type de schémas doit faire l'objet d'un apprentissage spécifique pour les élèves, sans quoi ils sont absents des outils élèves.

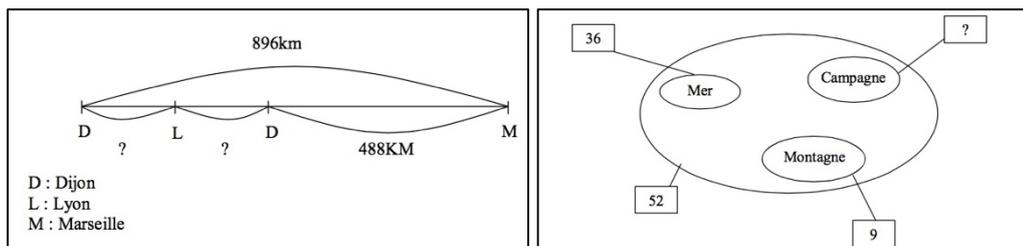


Schéma linéaire

Schéma ensembliste

- Les graphiques et les tableaux : appelés aussi organisateurs graphiques. Ils interviennent comme des outils d'aide à la représentation des informations textuelles de l'énoncé.

Dans le cadre de notre travail, nous choisissons de restreindre le champ de la recherche aux schémas iconiques et symboliques, sachant que dans le champ scolaire, les schémas iconiques sont les plus utilisés par les élèves, quelle que soit la discipline concernée (mathématiques, géographie, sciences).

2.1.4. La schématisation : un outil d'acquisition de compétences au cycle 3

Durant le cycle des approfondissements (programmes du CE2, CM1 et du CM2), les élèves travaillent sur le croquis, le dessin d'observation et le schéma.

Le B.O¹⁹ du 18 juin 2008 ne mentionne pas le terme « schéma » sur le premier palier du cycle 3, mais il évoque les mots de « croquis », de « cartes » et de « cahier d'expérience ».

¹⁹ Bulletin officiel [B.O.] hors-série n° 3 du 19 juin 2008 - programmes CE2-CM1-CM2.

C'est au niveau de la compétence 3, au deuxième palier du cycle 3 (qui concerne plus spécifiquement le CM2), que le terme « schéma » apparaît dans la compétence 3 (les principaux éléments de mathématiques et de la culture scientifique et technologique) :

- *« Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations, de la proportionnalité, et faisant intervenir différents objets mathématiques : nombres, mesures, “règle de trois”, figures géométriques, schémas. »*

Sur ce même palier, il est toujours question de croquis et de cartes, en culture humaniste (compétence 5) :

- *« Lire et utiliser différents langages : cartes, croquis, graphiques, chronologie, iconographie. »*

Il faut se référer aux programmes du collège, de la 6^{ème} plus précisément, pour voir apparaître le schéma comme une compétence à valider. La grille de référence de validation des compétences du socle commun mentionne les termes de « croquis » et « schéma ».

Une lecture fine des progressions du cycle 3, accompagnant le BO cité en référence, laisse apparaître que le terme de schéma est employé également en géographie et en sciences :

- *« Savoir compléter ou réaliser un schéma retraçant le chemin ou la fabrication d'un produit industriel ou agro-alimentaire choisi en fonction de la production locale. »*
- *« Savoir lire un schéma retraçant le cycle des déchets recyclables. »*
- *« Concevoir des modélisations de mouvements de flexion / extension, schématiser, représenter l'amplitude. »*
- *« Savoir schématiser des circuits électriques simples. »*

Comme nous venons de le souligner dans les instructions officielles énoncées par le ministère de l'éducation nationale, le mot « schéma » fait partie intégrante des programmes et des outils visant à l'acquisition de compétences dans diverses disciplines. On constate que les textes officiels emploient le terme « schéma » dans les trois disciplines que sont : les mathématiques, la géographie et les sciences. Cependant, on constate toutefois une distinction propre à chaque discipline. On utilisera plus spécifiquement le terme de « schéma » en résolution de problèmes mathématiques, de « carte » et « croquis » en géographie, et « de dessin » en sciences.

2.2. La représentation visuelle en mathématiques :

Sous un angle cognitiviste, nous pouvons avancer que comprendre un problème c'est en construire sa représentation. Par conséquent, si l'élève n'arrive pas à schématiser le problème c'est qu'il n'arrive pas à se le représenter.

2.2.1. Définition du champ conceptuel

La représentation visuelle en mathématiques se comprend comme la transformation d'une information en image mentale, afin de l'illustrer sur papier sous des formes diverses : simples dessins, graphiques, mots, schémas ou encore symboles.

De récentes études (Van Garderen, 2007 ; Zhang et coll., 2012) se sont intéressées aux capacités de visualisation des élèves et ont mis en évidence qu'ils avaient recours à deux types de représentations visuelles en résolution de problèmes : la représentation visuelle externe, et la représentation visuelle interne.

Les outils de **représentation visuelle externe** en mathématiques sont généralement des diagrammes ou des graphiques. Cette forme de représentation associe un type d'information à une forme de représentation. A. Ives²⁰ et S. Carpenter²¹ (2007) ont montré que ces « *organiseurs graphiques* » permettaient d'atténuer le travail d'organisation des élèves en difficulté, qui ne parvenaient pas à trier l'information et à mettre en évidence les relations entre les divers objets et les concepts mathématiques. Les droites graduées, ainsi que les lignes numériques sont des outils de représentation visuelle externe.

Cette forme de représentation est propice à la modélisation, étape de la phase de représentation (cf. schéma d'Alain Descaves).

Contrairement à la représentation visuelle externe, **la représentation visuelle interne** est beaucoup plus complexe puisqu'elle requiert un exercice mental conséquent. Pour mieux comprendre un énoncé de problème, l'enseignant invite ses élèves à se le représenter et à se créer une image mentale. Pour y parvenir, les élèves doivent associer les informations contenues dans l'énoncé à des connaissances déjà acquises sur ce même sujet. Il s'agit donc pour l'enseignant d'expliquer aux élèves, à l'aide de mots, comment se crée une

²⁰ Department of Zoology, University of Wisconsin, Madison, WI 53706, USA.

²¹ Center for Limnology, University of Wisconsin, Madison, WI 53706, USA.

image mentale. Il s'agit là précisément de l'objet de notre expérimentation : **apprendre aux élèves à se créer des images mentales.**

Ces images mentales peuvent être de deux natures :

- Figuratives, caractérisées par des schémas iconiques, c'est-à-dire des dessins naïfs représentant l'aspect visuel des informations ;
- Schématiques, caractérisées par les schémas symboliques, c'est à dire des schémas plus élaborés, présentant les relations entre les données.

En d'autres termes, il s'agira, lors de la séquence expérimentée, d'apprendre aux élèves à se créer des images mentales, en verbalisant les étapes de la résolution du problème et en réfléchissant à voix haute. La méthodologie d'enseignement ne relève pas d'une technique pédagogique spécifique. Elle est propre à chaque énoncé de problème et à chaque élève. Cet aspect du cadre théorique est important puis

qu'il permet de justifier pourquoi aucune fiche de séance n'est annexée à la recherche. Les séances seront toutes abordées selon la même méthodologie explicitée en troisième partie. Seuls les énoncés seront nouveaux à chaque séance, proposant des situations variées, propices à la schématisation.

Les recherches de Van Garderen et Montague²² (2003) ont montré que les élèves atteints de troubles d'apprentissage privilégiaient les images figuratives pour résoudre des problèmes mathématiques. Pour interpréter les résultats de notre expérimentation, nous appuierons sur ces observations, à savoir : une imagerie schématique (schéma symbolique) témoignant d'une stratégie experte de l'élève. A contrario, une imagerie figurative (schéma iconique) est le signe d'une difficulté à se représenter le problème à résoudre.

2.2.2. Obstacles rencontrés par les élèves

Dès le CE2, les élèves sont évalués sur leur capacité à résoudre des problèmes imaginaires, en s'aidant des techniques opératoires. En cas de difficulté, la schématisation est suggérée comme une aide. L'objectif d'apprentissage étant de faire évoluer rapidement leur représentation iconique (simple dessin) vers une représentation plus

²² Van Garderen D., & Montague M., *Visual-spatial representation, mathematical problem solving, and students of varying abilities.*, 2003, *Learning Disabilities Research & Practice*.

symbolique (codage mathématique) ; ce qui constitue une première étape vers l'abstraction qui reste problématique pour bon nombre d'élèves.

Résoudre un problème numérique implique de mettre en relation les données de l'énoncé et un outil mathématique connu. Annie Feyfant, Chargée d'étude et de recherche au service Veille et Analyses de l'Institut français de l'Éducation (IFE), fait émerger une cause probable à la non résolution, qui serait « *une compréhension imparfaite de la situation décrite dans l'énoncé.* »²³ Pourtant, elle fait remarquer que l'échec peut persister bien que la compréhension de l'énoncé soit satisfaisante et la technique opératoire maîtrisée. Elle en conclut que c'est le processus mental de mise en relation, entre la situation et l'opération, qui est déficient. En s'appuyant sur les travaux de Barrouillet & Camos²⁴, Annie Feyfant précise que les performances dépendent bien plus de la construction de la représentation que de l'opération à effectuer.

Un obstacle à la représentation visuelle chez les élèves peut être induit involontairement par l'enseignant. Ce constat est également le point de départ du travail de recherche mené par Marceline Lapara et Claire Margolinas²⁵, publié en 2009, qui a pour objectif de mettre en évidence le rôle du schéma dans la résolution de problèmes mathématiques, et plus précisément de clarifier les enjeux de savoirs liés à la résolution de problème et à l'utilisation de schémas. Les deux chercheuses ont constaté que l'apport de schéma par l'enseignant pour aider des élèves n'est pas toujours un outil efficace et pertinent pour la résolution de problèmes. Elles ont cherché à identifier les raisons de cet échec. Pourquoi l'introduction de schémas par le maître est-il aussi peu efficace, particulièrement auprès des élèves en difficulté ? Alors que le schéma est pensé par le maître comme une aide, il s'avère être un obstacle supplémentaire pour les élèves, source de surcharge cognitive.

Les chercheuses ont mis en évidence que l'utilisation de schéma dans le cadre de la résolution de problèmes mathématiques impliquaient deux objets cognitifs distincts (la résolution de problème et la schématisation). Leur travail de recherche fait ressortir une raison principale à ce constat : l'enseignant utilise le schéma sur un plan d'exposition du

²³ Feyfant A., *La résolution de problèmes mathématiques au primaire.*, Dossier de veille de l'IFÉ, n° 105, novembre 2015, ENS de Lyon.

²⁴ Les auteurs soulignent l'importance du choix des énoncés de problèmes qui vont conditionner les stratégies et les résultats des élèves : « *La sémantique et la structure du problème déterminent pour une large part les performances et les stratégies des sujets* », 2003.

²⁵ Laparra M., & Margolinas C., *Le schéma : un écrit de savoir ? Pratiques*, 2009, p. 51-82.

problème (retranscription et compréhension de l'énoncé) et non pas conjointement, sur un plan de résolution du problème. Cette recherche permet de souligner l'importance du contexte d'utilisation du schéma. S'il est introduit par l'enseignant pour exposer les données du problème, le schéma sera pour l'élève une charge cognitive supplémentaire, à cause de ses capacités d'abstraction qui ne sont pas les mêmes que son enseignant.

En d'autres termes, les chercheuses ont mis en évidence, le rôle déterminant de la pratique enseignante, pour faire du schéma un véritable objet d'apprentissage. Leur travail leur a permis de conclure que l'approche didactique de l'enseignant est conditionnée par sa propre conception des schémas. Le schéma peut s'avérer être un outil d'aide à la résolution de problèmes, à condition que l'enseignant aborde explicitement et de manière conjointe les deux objets cognitifs que sont la résolution de problème et sa schématisation. Dans le cas contraire, l'utilisation du schéma peut produire un effet inverse et nuire aux apprentissages des élèves, surtout ceux qui sont déjà en difficulté.

Cet élément du cadre théorique nous alerte sur le danger pour ces apprentissages qui proposent des schémas aux élèves dans le cadre de la séquence dédiée à la schématisation. Il s'agira alors de penser une séquence, qui permette aux élèves de produire leurs propres schémas, avec leurs connaissances et leurs capacités cognitives. Il ne s'agira en aucun cas de proposer un schéma illustrant la situation visant à les faire « mieux comprendre » ; l'effet produit risquant d'être contraire à l'attendu. Un schéma imposé obligerait l'élève à surmonter un obstacle supplémentaire, donc à mobiliser des ressources cognitives supplémentaires dont il ne dispose pas nécessairement.

2.3. Les conditions didactiques nécessaires à la résolution de problèmes

2.3.1. Apprendre à symboliser les problèmes

Les recherches scientifiques sur le sujet sont convergentes vers la nécessité de pratiquer un étayage avec les élèves sur la phase de représentation du problème. L'acquisition d'une image mentale est un prérequis à la schématisation. Il apparaît que le processus de symbolisation est plus important que le produit fini (le schéma) dans l'apprentissage.

Le travail de recherche mené par Agnès Camus-Musquer²⁶, docteur en Sciences de l'Éducation, permet de mettre en exergue les bénéfices d'une schématisation réfléchie dans la résolution de problèmes mathématiques. Il faut comprendre par schématisation réfléchie un processus de symbolisation exercé par les élèves de manière consciente, afin de raisonner par analogie pour résoudre des problèmes arithmétiques. Le processus de symbolisation décrit par Agnès Camus-Musquer se caractérise par une action conjointe de deux autres processus, que sont : le processus d'abstraction (mise en mot de ce qui accompagne la pensée de l'enfant) et le processus de concrétisation (analogie et attention sélective) ; étape nécessaire vers l'abstraction. Agnès Camus-Musquer fait ressortir l'importance du processus de symbolisation en résolution de problème, bien plus que le schéma lui-même. Elle avance que la schématisation n'a d'intérêt que si elle provient de l'élève. Selon elle, la schématisation est une compétence qui doit faire l'objet d'un apprentissage conscient et explicite. Elle met également en lumière quatre autres éléments intervenant dans les conditions de mises en œuvre pédagogiques et didactiques : l'élève, le problème arithmétique, ce que construit l'élève et la pédagogie mise en place par l'enseignant.

Les conclusions d'Agnès Camus-Musquer confortent notre angle de recherche, qui consiste à nous intéresser au processus de symbolisation, plus qu'au schéma en tant que produit fini. Il nous permet également d'inscrire le processus de symbolisation dans une optique de représentation de la situation et non pas dans une optique d'exposition du problème, couramment insufflée par l'enseignant.

Bien qu'il soit complexe de définir précisément les processus de résolution adoptés par l'élève, nous évoquerons les termes suivants pour coder les productions écrites de l'expérimentation :

- Symbolisation experte, exprimée par une proposition de schéma complet et juste (schémas iconiques et/ou symboliques) ;
- Symbolisation superficielle, traduite par une proposition de schéma incomplet et non pertinent (schémas iconiques).

²⁶ Camus-Musquer A., *L'activité de schématisation réfléchie. Actualité de recherche en Éducation et en formation*, 2007, Strasbourg.

2.3.2. Apprendre à catégoriser les problèmes

Dans un article de recherche publié en 2002²⁷, l'enseignant-chercheur, Jean Julo s'interroge sur les rapports existants entre apprentissages et résolution de problèmes. Ses recherches sont axées sur le repérage des classes de problèmes, l'activité de catégorisation et sur la schématisation, au sens d'une représentation graphique épurée. Jean Julo met en avant l'idée que les apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes impliquent deux conditions essentielles :

- Savoir catégoriser des problèmes (stratégies observées chez les élèves experts) (Travaux de Vergnaud et Durand, 1976). Apprendre aux élèves à catégoriser passe par des outils de représentations graphiques, que sont les schémas. Ils ont à la fois une fonction sémiotique et une fonction opératoire (ils vont permettre à l'élève de trouver la bonne procédure) ;
- Avoir une bonne organisation des connaissances en mémoire (Travaux de Schoenfeld et Hermann, 1982).

Il s'appuie sur des travaux montrant que les problèmes mathématiques rencontrés par les élèves sont mémorisés en tant que connaissances sous une certaine forme, de façon à intervenir dans la construction d'une nouvelle représentation. Il défend l'idée que le travail de l'enseignant doit permettre d'aider l'élève à se représenter le problème et non à le résoudre. Le schéma intervient alors comme un outil modélisant, pour permettre alors à l'élève de mettre en place des stratégies le conduisant à la solution. Jean Julo avance que l'élève ne peut schématiser une situation que s'il est capable de se la représenter. Pour aider efficacement les élèves en résolution de problèmes, il préconise de les confronter régulièrement à différents types de problèmes leur permettant de se constituer une mémoire de « schémas de problèmes ». Selon lui, cette mémoire de schémas de problèmes va permettre aux élèves de résoudre des situations nouvelles par analogie. Plus l'enseignant propose des situations-problèmes variées, plus l'élève stocke en mémoire un modèle associé, qu'il sera capable de remobiliser en cas de confrontation dans une situation similaire. Apprendre à catégoriser des schémas de problèmes revient à automatiser la résolution sur la base d'un modèle.

²⁷ Julo J., *Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ?*, Grand N, n°69, 2002, p. 31-52.

Les conclusions de Jean Julo sont partagées par Rémi Brissiaud²⁸, Docteur en psychologie cognitive, qui considère également que l'apprentissage de la résolution de problèmes doit se faire à partir d'exemples. La résolution se fait alors par la recherche en mémoire d'un problème proche, appelé processus par analogie ou par automatisme. Dans ce cas, le recours à la schématisation n'est pas toujours nécessaire. Cependant, elle peut être bénéfique à l'élève, en lui permettant de faire remonter en mémoire immédiate de travail, le processus adéquat pour la résolution ; processus qu'il connaît et qu'il a appris. Toutefois, une analogie trop restrictive et trop conformiste à la situation en mémoire risque d'induire l'élève en erreur en cas de situations-problèmes très proches, mais, dont le processus de résolution n'est pas transférable de l'une à l'autre.

3. PROBLEMATISATION

3.1 Problématique :

Est-ce que schématiser pour résoudre des problèmes mathématiques est une aide cognitive pour des élèves de CM2 ou bien un obstacle supplémentaire à la tâche ?

3.2 Hypothèses :

Nous faisons l'hypothèse que schématiser en résolution de problèmes mathématiques permet aux élèves d'améliorer leurs performances en résolution de problèmes mathématiques.

Sous-hypothèses :

- La schématisation permet de modifier le processus de résolution de problème pour des élèves de CM2.
- La schématisation permet aux élèves de mieux se représenter le problème et donc de mieux l'appréhender.
- La schématisation est un outil permettant à l'élève d'entrer dans une phase de recherche.

²⁸ Brissiaud R., *Calcul et résolution de problèmes arithmétiques : il n'y a pas de paradis pédagogique perdu. Café pédagogique, 30 mai 2006.*

4. OBSERVATIONS

Le cadre théorique posé pour notre recherche nous permet d'énoncer clairement le contexte d'observation.

Ainsi notre travail d'expérimentation a pour objectif de vérifier l'impact d'une séquence d'apprentissage dédiée à la schématisation, entendue comme un processus de symbolisation et d'aide à la création d'images mentales, sur les performances d'élèves de CM2 en résolution de problèmes mathématiques. Il convient donc de définir précisément ce que nous allons observer, sur qui et comment.

4.1. Données d'observation

Les données d'observation vont porter sur plusieurs critères aboutissant à deux niveaux d'analyse grâce à une approche quantitative et une approche qualitative.

- **Les performances quantitatives et qualitatives.**

Cette observation est concrète, factuelle et par conséquent mesurable grâce aux critères suivants :

- nombre de bonnes réponses avec schéma
- nombre de bonnes réponses sans schéma
- nombre d'énigmes traitées et terminées (réponse juste ou fausse)
- temps d'exécution

L'observation de ces différents critères permettra d'apporter un premier élément de réponse à notre hypothèse principale, qui est de vérifier si la schématisation est une aide cognitive ou alors un obstacle (surcharge cognitive) pour résoudre des problèmes en CM2.

- **La méthodologie de résolution de problèmes**

Il s'agit de regarder concrètement comment les élèves résolvent les problèmes mathématiques, de vérifier s'il y a des changements visibles dans leur processus de résolution, et si oui lesquels. Nous pourrions alors confirmer ou infirmer la sous-hypothèse suivante : la schématisation modifie le processus de résolution de problèmes pour des élèves de CM2.

Cette observation repose sur l'analyse des brouillons des élèves et sur les différentes étapes traitées pour résoudre les problèmes. Nous regarderons plus précisément les choix opérés en termes de schématisation et d'opérations par les élèves.

- **La schématisation.**

Le recueil de données repose sur une série de dix énigmes à résoudre, propices à la schématisation. L'objectif est de mesurer l'impact du schéma dans la résolution du problème selon les critères suivants :

- nombre de schémas réalisés
- nombres de schémas justes
- forme des schémas
- pertinence des schémas (complets, incomplets, faux, inutiles)

4.2 Echantillon observé

L'expérimentation s'est déroulée au sein de l'école primaire de Soignolles en Brie, petite commune de Seine et Marne comptant 2069 habitants. Elle est rattachée à l'académie de Créteil et dépend administrativement de la circonscription de Pontault Combault.

Le secteur est plutôt rural. L'école est la seule du village et est rattachée directement à la mairie de Soignolles.

Le taux d'activité des habitants de la commune est de 76.7%²⁹, ce qui reflète une population active. Les parents appartiennent à des catégories socio-professionnelles assez diverses et hétérogènes, ce qui apporte une certaine mixité des élèves au sein de l'école.

Le cadre environnemental et social privilégié de cette école est à souligner.

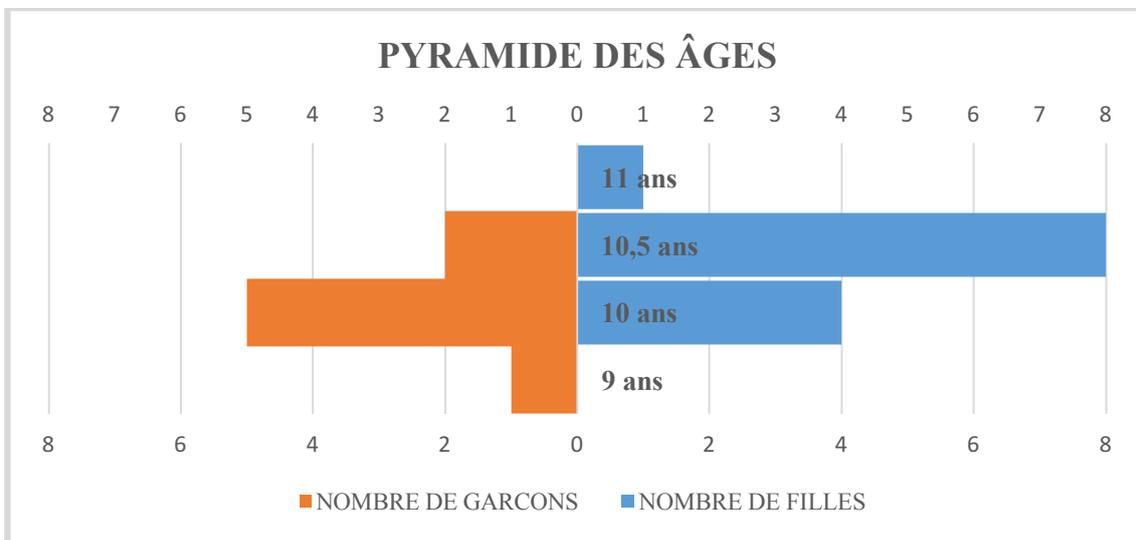
Depuis la rentrée 2015, l'école compte 215 élèves, répartis dans 9 classes différentes :

Classes maternelles			Classes primaires					
PS	MS	GS	CP	CE1	CE1 / CE2	CE2	CM1	CM2
25	25	25	20	25	22	25	27	21

²⁹ Source : site internet du conseil général de Seine et Marne, www.seine-et-marne.fr.

Présentation des élèves :

L'expérimentation se déroule dans une classe de CM2, comptant 21 élèves (13 filles et 8 garçons).



4.3. Outils d'observation

L'observation se déroule en trois temps, comprenant un pré-test, une séquence d'apprentissage de 8 séances et un post-test. L'expérimentation s'échelonne sur une période de deux semaines, en fin de la quatrième période scolaire³⁰.

4.3.1. Pré-test et post-test

Notre recherche s'appuie sur une série de dix situations-problèmes (*cf. annexe 3*) à résoudre par les élèves. En classe, le terme « d'énigmes » sera préféré à celui de « situations problèmes » afin de favoriser l'enrôlement et la motivation à la tâche des élèves. Cette série d'énigmes a été utilisée pour le pré-test et le post-test. Le contenu, la forme et les modalités d'exécution sont stricto sensu les mêmes pour les deux tests.

Pour réaliser les deux tests, les élèves ont occupé leur place habituelle, agrémentée d'un classeur en guise de séparation d'avec le voisin. Une copie double ainsi que la feuille d'énigmes ont été distribuées à chacun.

³⁰ Du 1^{er} au 15 avril 2016.

Les modalités d'exécution sont les suivantes :

- Travail individuel
- Par écrit sur la copie fournie
- Brouillon non autorisé, tout doit apparaître sur la copie
- Durée : 60 minutes
- Calculatrice interdite³¹
- Lecture des 10 énigmes par l'enseignante
- Explication du vocabulaire si besoin

Consigne énoncée aux élèves :

« Après vous avoir lu et éventuellement expliqué le vocabulaire difficile, vous aurez 1 heure pour résoudre toutes ces énigmes. Le travail doit être fait sur la copie double. Toutes vos recherches (calcul, opération, schéma,) doivent apparaître sur cette feuille. Aucun autre brouillon n'est autorisé. L'objectif est de résoudre un maximum d'énigmes en 1 heure. Vous êtes libres de choisir l'ordre dans lequel vous allez résoudre les énigmes. Il n'y a aucune obligation de les faire dans l'ordre. Si vous êtes bloqués sur une énigme, ne perdez pas trop de temps et passez à la suivante. Vous pourrez y revenir à la fin, s'il reste du temps. La calculatrice est interdite. Ce travail ne sera pas noté. Quand vous aurez terminé et que vous aurez bien relu votre travail, vous devrez me rendre votre copie ainsi que la feuille d'énigmes. »

Critères de sélection des 10 énigmes :

La sélection des situations-problèmes prend appui sur les éléments du cadre théorique. Elle s'est opérée au regard des questions suivantes :

- Est-ce que la situation est propice à la schématisation ?
- Est-ce que la situation représente une réalité concrète pour l'élève (pertinence du sens donné par l'élève) ?
- Est-ce que la situation proposée contraint l'élève à développer des compétences de représentation et d'abstraction ?

³¹ La calculatrice a été autorisée uniquement pour une élève en grandes difficultés de calcul.

- Est-ce que les quatre opérations (addition, soustraction, division, multiplication) sont sollicitées ?
- Est-ce que les données numériques sont assez simples pour ne pas provoquer trop d'erreurs de calculs ou alors provoquer une surcharge cognitive liée à des calculs trop laborieux ?

Les énigmes N°1, N°5, N°7, N°8 et N°10 sont issues des cours de mathématiques de l'ESPE³² de Créteil. Les autres ont été prélevées dans le manuel de mathématiques « 1000 problèmes » des éditions Hatier Education (2001)

Énigme n°1 :

Un pâtissier coupe une bûche glacée en 6 coups de couteau.
Combien de parts de bûche obtient-il ?

Énigme n°2 :

Un automobiliste est parti de Tours et est arrivé à Lille. Il est passé par Paris et Amiens, parcourant ainsi 500 km. Il s'est arrêté à Amiens pour déjeuner. Les distances sont les suivantes : Tours-Paris, 230 km ; Paris-Amiens, 150 km. Après son déjeuner, combien lui restait-il encore à parcourir avant d'atteindre Lille ?

Énigme n°3 :

Un bassin carré mesure 2,40m de côté. Calcule son périmètre. On met une clôture tout autour à un mètre du bord. Quelle est la longueur de cette clôture ?

Énigme n°4 :

Pendant 8 jours, Hélène part skier avec son grand frère de 12 ans et ses parents. La location du matériel est de 5€/jour/adulte et de 3€/jour/ enfant (de moins de 15 ans). Au delà de 4 jours, les prix baissent et passent à 4€/jour/ adulte et à 2€/jour/ enfant.
Combien les parents d'Hélène devront dépenser en tout pour la location de matériel ?

Énigme n°5 :

Un restaurant propose le menu du jour à 15€. Il y a 4 choix possibles pour l'entrée, 3 choix possibles pour le plat principal et 2 choix possibles pour le dessert. Combien de menus différents peut-il constituer ?

Énigme n°6 :

Un rallye cycliste comporte 105 km. Le départ est à 7 heures le matin. Les relais sont distants de 5 km. Chaque participant doit pointer au départ, à chaque relai et à l'arrivée. Combien de fois doit-il pointer ?

Énigme n°7 :

La distance entre chaque arrêt d'un autobus est d'environ 1500m. Au premier arrêt, 10 personnes montent ; au second arrêt, 3 personnes descendent ; au troisième arrêt, 5 personnes montent. Y a-t-il plus ou moins de voyageurs dans l'autobus quand il repart après ce troisième arrêt ? Combien en plus ou en moins ?

Énigme n°8 :

En prévision d'une sortie scolaire, M. Fournier veut repartir les 29 élèves de CM1 dans des voitures qui peuvent contenir 4 élèves chacune. Combien de voitures, M. Fournier doit-il prévoir ?

Énigme n°9 :

Un chêne a 8 grosses branches. Chaque grosse branche donne naissance à 8 petites branches et sur chaque petite branche il y a 10 glands. Combien y a-t-il de glands en tout sur ce chêne ?

Énigme n°10 :

Dans une boîte, on dispose 5 morceaux de sucre sur la longueur, 3 morceaux de sucre sur la largeur et 4 morceaux sur la hauteur. Combien de morceaux de sucre y a-t-il dans la boîte ?

³² Cours de Mme Pézard et de M. Brugier

Suite à la lecture des énigmes, des questions ont été posées par les élèves :

Énigmes	Questions Elèves	Réponses Enseignante
N° 1	« On peut couper la bûche dans tous les sens ou juste comme d'habitude ? »	« Le pâtissier ne coupe la bûche que dans un seul sens. Il fait des tranches dans la longueur de la bûche comme vous en avez l'habitude à la maison. »
N° 3	« Est-ce qu'il y a une porte dans la clôture ? »	« Si l'énoncé ne le précise pas, c'est qu'il n'y en a pas. »
N° 4	« Ça veut dire quoi : 5 euros, un trait droit, jour, un trait droit ? »	« Cela veut dire que le prix est de 5 euros, pour 1 jour, pour 1 adulte. C'est-à-dire qu'un adulte paye 5 euros par jour. »
	« Mais quel âge, elle a Hélène ? »	« Lisez bien l'énoncé, vous avez toutes les informations dont vous avez besoin pour résoudre l'énigme. »
N°6	« C'est quoi un relai ? »	« Des relais dans une course sont des points intermédiaires. Par exemple, quand vous avez fait le rallye du grand skieur pendant la classe de neige, vous deviez pointer votre carte à chaque relai rencontré sur votre trajet. »

4.3.2. Séquence d'apprentissage

Comme énoncé dans le cadre théorique de la recherche, résoudre des problèmes mathématiques implique pour l'élève de mettre en œuvre des compétences très variées particulièrement au niveau des représentations visuelles.

La séquence d'apprentissage mise en œuvre dans l'expérimentation intervient essentiellement au niveau de la première étape : l'étape de représentation. Elle est essentielle puisqu'elle va conditionner la réussite de la 2^{ème} étape.

L'objectif principal de la séance vise à apprendre aux élèves à se représenter une situation-problème grâce à la schématisation afin d'améliorer leurs compétences en résolution de problèmes mathématiques.

Au cours de la période 2 de l'année scolaire, suivant le modèle de Stella Baruk³³, nous avons proposé aux élèves de la classe de CM2 dont il est question pour l'expérimentation de la recherche, l'énigme de l'âge du capitaine :

« Sur un bateau, il y a 26 moutons et 10 chèvres, quel est l'âge du capitaine ? »

³³ Baruk S., *L'âge du capitaine. De l'erreur en mathématiques*. 307 p., Edition du Seuil/Science ouverte, 1985, Paris.

Seul un élève sur les 21 a répondu qu'on ne pouvait pas répondre. Tous les autres ont répondu : 36 ans, 37 ans (en comptant le bateau).

Ce qui nous conduit sur le second objectif de la séquence qui est aussi de permettre aux élèves de donner du sens à la résolution de problèmes mathématiques en « désapprenant » les points suivants :

- Résoudre un problème se limite à faire des calculs.
- Pour résoudre un problème, il faut faire un calcul avec toutes les données chiffrées de l'énoncé.

Nous avons choisi de nous inspirer de la méthode proposée par les chercheurs Demonty I., Fagnant A. et Lejong M., qui préconisent d'organiser la séquence autour de deux étapes majeures³⁴.

Organisation de la séquence			
Les grandes étapes	Le déroulement	Méthodologie	Durée
<p><u>Etape 1</u></p> <p>Familiarisation avec la démarche de représentation dessinée et mise en évidence avec des caractéristiques d'une bonne représentation</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Résolution d'un problème et réalisation d'un dessin qui explique le problème et qui peut aider à le résoudre - Exploitation des dessins produits par les élèves - Correction du problème et confrontation des démarches de résolution. - Réinvestissement - Ebauche de la synthèse 	<ul style="list-style-type: none"> - Choisir un problème différent à chaque séance - Demander aux élèves de reproduire au tableau les dessins choisis - Compléter la synthèse (cf. annexe 4) 	<p>30 min par séance</p> <p>6 séances</p>
<p><u>Etape 2</u></p> <p>Analyse approfondie de diverses représentations dessinées</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Réalisation de l'activité - Confrontation des productions et argumentation des choix - Exploitation des productions et corrections - Compléter la synthèse commencée à la 1^{ère} étape. 		<p>45 min par séance</p> <p>2 séances</p>

³⁴ Demonty I., Fagnant A., Lejong M., *Résoudre des problèmes : pas de problème !*, Editions De Boeck, 2004, Bruxelles.

Fiche de préparation de la séquence expérimentée :

Cycle : 3	Niveau : CM2	Discipline : Mathématiques « Résolution de problèmes »	Nombre de séances : 8
Apprendre à schématiser pour acquérir une bonne représentation du problème			
Compétences visées : - savoir dégager les éléments de contexte - savoir dégager la ou les questions - savoir dégager les données pour résoudre le problème - comprendre les relations qui unissent les données - savoir schématiser la situation			
Séances	Objectifs disciplinaires	Matériel / support (cf. annexe 5)	Grands types de tâches élèves
Pré-test / 10 énigmes à résoudre / 60 min			
N°1 30 min	Schématiser et résoudre un problème quaternaire de division quotient Apprendre à utiliser la droite numérique	Situation du Géant Tneïtok Situation du ruban à découper	Trouver le nombre de bonds. - schématiser - modéliser - rechercher la bonne opération
N°2 30 min	Situation de partage, incluant une fraction simple	Situation de la pizza	Déterminer le nombre d'invités de Mario : - se créer une image mentale - schématiser - traduire les fractions en schéma - compter
N°3 30 min	Situation de partage, incluant la recherche des composants	Situation du partage des économies	Trouver le montant des économies de chaque enfant. - se créer une image mentale - modéliser - rechercher la bonne opération
N°4 30 min	Situation de partage, incluant la recherche des composants	Situation des achats de Nicolas	Trouver le prix des articles - se créer une image mentale - modéliser - rechercher la bonne opération
N°5 30 min	Schématiser et résoudre des problèmes nécessitant l'addition et la soustraction.	Situation des tailles	Trouver la taille de chaque enfant - se créer une image mentale - repérer les étapes de la résolution - schématiser - trouver les bonnes opérations
N°6 30 min	Schématiser et résoudre un problème ternaire Produit cartésien $A \times B$	Situation de la tenue vestimentaire	Trouver le nombre de tenues possibles - se créer une image mentale - schématiser - rechercher de la bonne opération
N°7 45 min	A partir d'un énoncé et de dessins, comprendre	Situation du grand magasin	Interpréter et corriger un schéma imposé à partir d'un énoncé.

	<p>un problème qui contient des données perturbantes et qui met l'accent sur l'importance de la question</p> <p>Problème qui met l'accent sur les relations entre les données</p>	<p>Situation de Rachid et Frédéric qui jouent aux billes</p> <p><i>(cf. annexes 6 et 7)</i></p>	<p>- sélectionner les données utiles</p> <p>- mettre en relation les données</p>
<p>N°8</p> <p>Durée : 45 min</p>	<p>Problème qui met l'accent sur les données importantes et sur les relations qui les unissent</p> <p>Trace écrite (2^{ème} partie)</p>	<p>Situation du magasin de jouets</p> <p><i>(cf. annexe 8)</i></p>	<p>Compléter un énoncé à partir d'un dessin.</p> <p>- identifier les informations pertinentes</p> <p>Trouver le prix des objets</p> <p>- mettre en relation les données de l'énoncé.</p>
<p>Post-test / 10 énigmes à résoudre / 60 min</p>			

5. ANALYSE DES INFORMATIONS

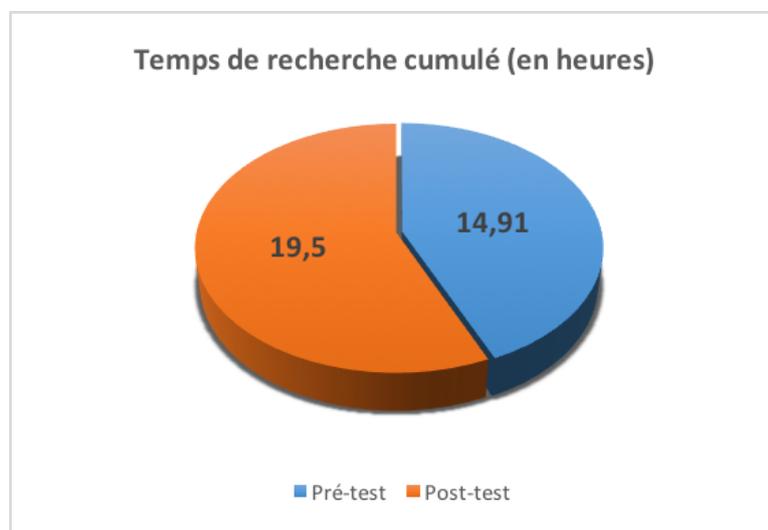
L'objectif de cette étape est de confronter nos hypothèses de recherche à des faits et observations concrets de la réalité d'une salle de classe de CM2.

Notre analyse portera dans un premier temps, sur une approche globale quantitative des performances mesurées. Ensuite, nous proposerons une analyse didactique des productions d'élèves, pour chacune des dix énigmes, afin de mettre en relief les améliorations, les régressions, les modifications de processus de résolution et les comportements élèves.

5.1. Analyse globale des performances entre les deux tests

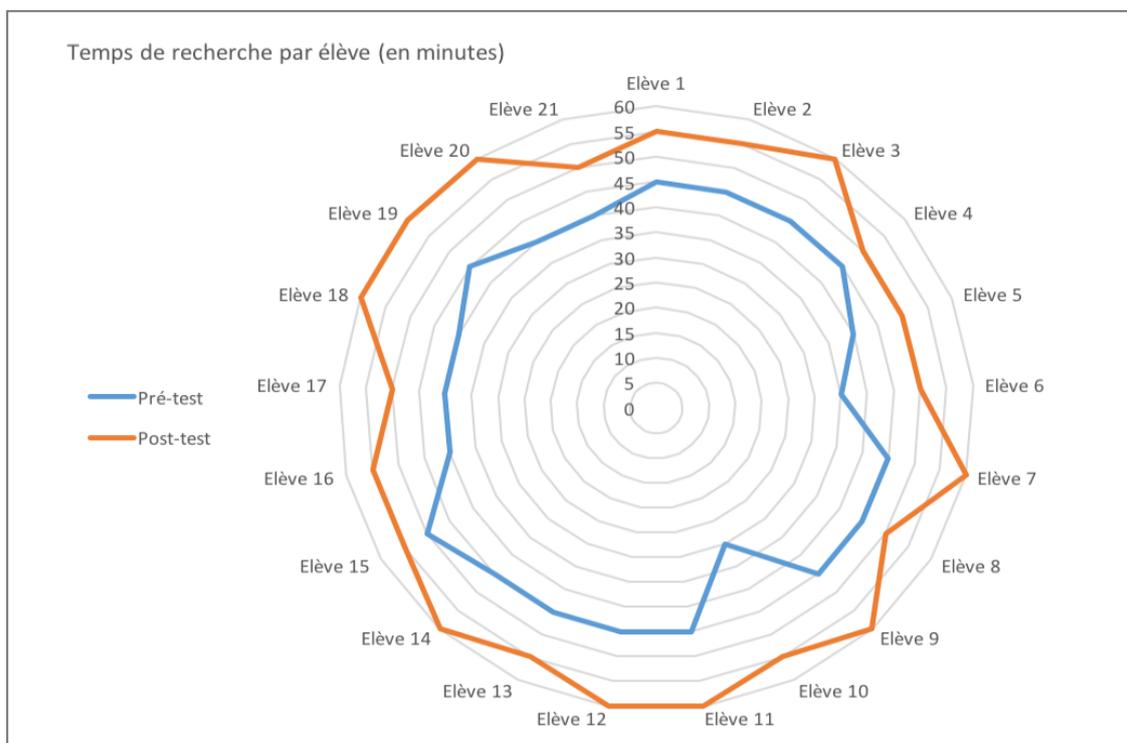
Les résultats observés sont une compilation de toutes les productions d'élèves de l'échantillon.

Un temps de recherche et de travail plus long.



Un chronométrage précis entre le début du travail et la remise des copies de chaque élève a permis de mettre en évidence **une augmentation de 30,7%** du temps de recherche en post-test par rapport au pré-test. Cette augmentation représente un volume horaire global de 4 heures et 35 minutes (soit 4,59 heures). Une analyse plus fine de ce critère, montre que les 21 élèves, tous sans exception, ont augmenté leur temps de recherche entre les

deux tests, avec une moyenne individuelle de 43 minutes en pré-test et 56 minutes en post-test.



Temps de recherche	Pré-test	Post-test
30 min	1	-
35 min	1	-
40 min	6	-
45 min	12	-
50 min	1	6
55 min	-	6
60 min	-	9
TOTAL	21	21

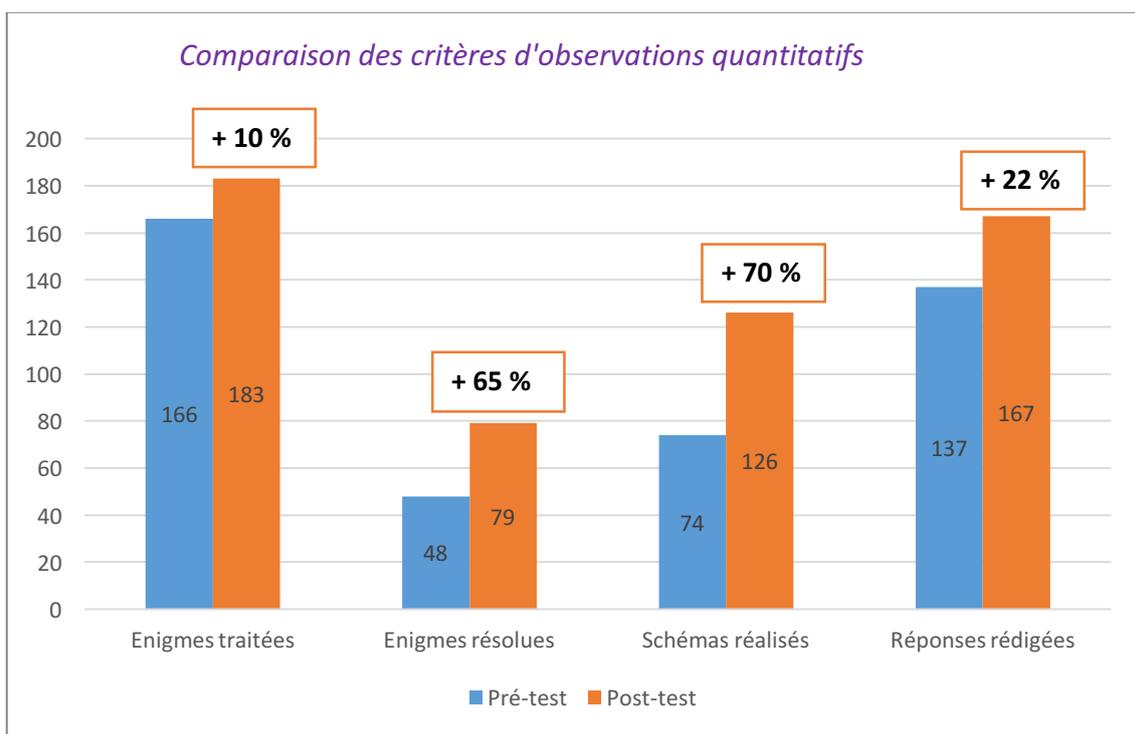
Sur le graphique ci-dessus, nous pouvons remarquer que la courbe rouge représentant les résultats du post-test est plus régulière que la courbe bleue. Cela signifie que les temps individuels de travail sont plus concentrés et moins disparates que ceux du pré-test. En effet, en post-test, les productions des élèves sont concentrées sur trois timings différents (50, 55 et 60 minutes), alors qu'en pré-test, on constate 5 timings différents. Il est intéressant de noter que le capital temps de 60 mn n'a été utilisé entièrement qu'en post-test et pour 9 élèves.

En pré-test, 45 minutes ont suffi à 20 élèves sur 21 pour terminer le travail.

Une augmentation des performances au global mais d'importantes disparités selon les énigmes...

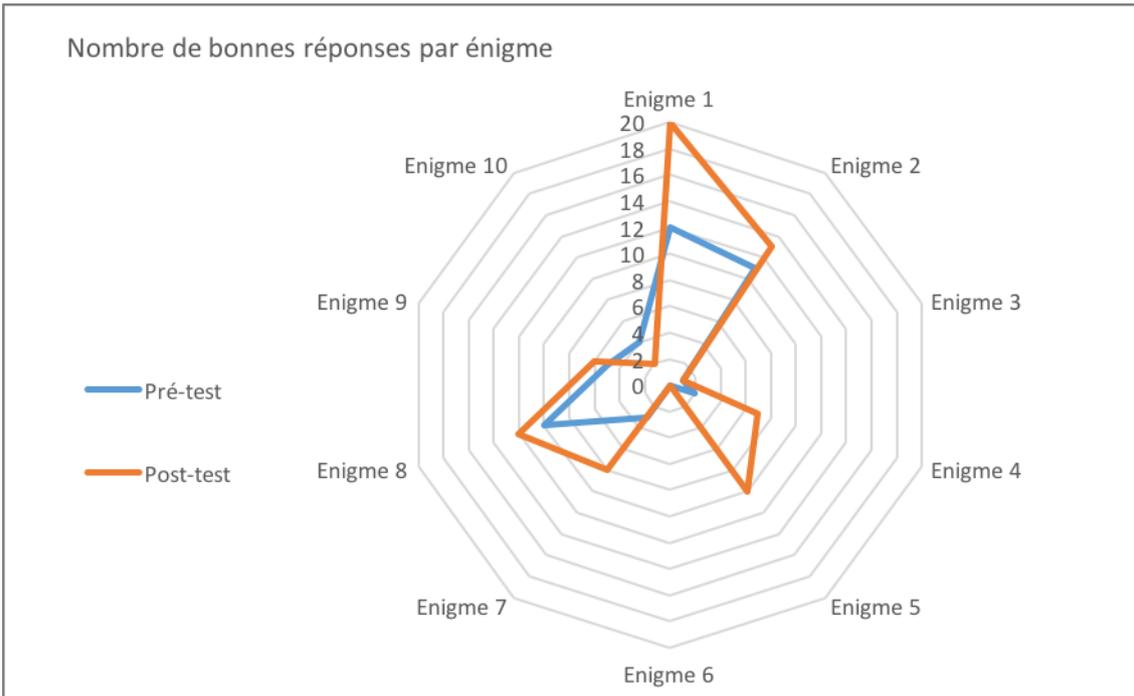
Le graphique suivant est à interpréter en nombre de réponses, avec un plafond maximal de 210 réponses (10 énigmes à traiter par 21 élèves).

Nous constatons que les 4 critères d'observations sont en progression, allant de +10% d'énigmes traitées, à +70% de schématisation.



Les résultats du post-test sont sans appel. Les performances des élèves en résolution de problèmes mathématiques ont augmenté de 65% entre les deux tests. Nous remarquons cependant que les résultats sont très disparates d'une énigme à l'autre, comme en témoigne le mapping ci-dessous. L'énigme N°1 (le découpage de la bûche) présente une augmentation de 10 bonnes réponses en post-test, atteignant un score de 20/21 alors que les performances des énigmes N°3 (le périmètre de la clôture du bassin) et N°6 (les pointages sur le rallye cycliste) sont les mêmes pour les deux tests.

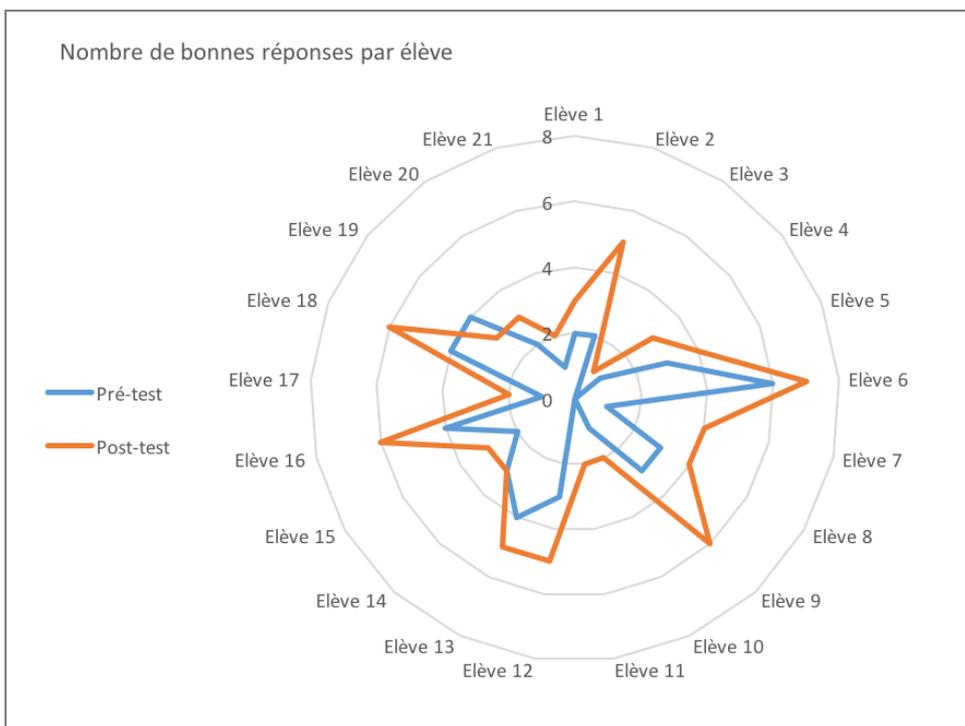
A contrario, les performances de l'énigme 10 (La boîte à sucre) sont décroissantes : 2 bonnes réponses en moins en post-test.



L'analyse didactique des productions d'élèves nous permettra de mettre en évidence les éléments de réponse à ce constat.

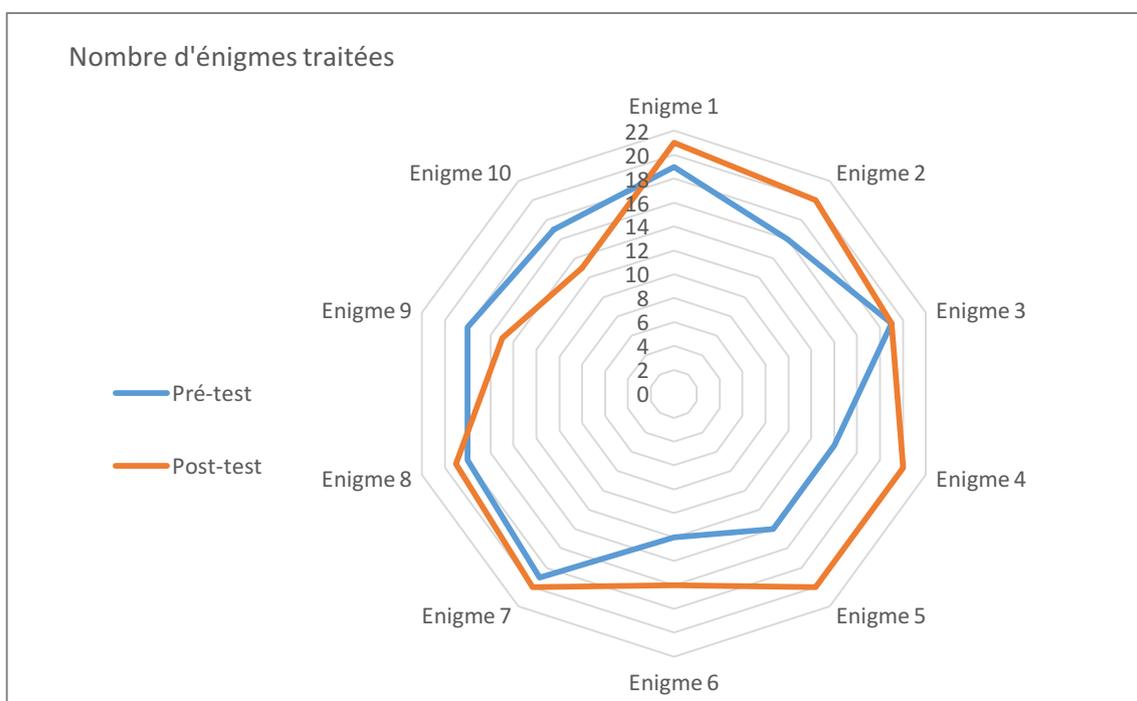
... mais aussi selon les élèves.

L'écart entre « les bons élèves » et « les moins bons » se creuse.



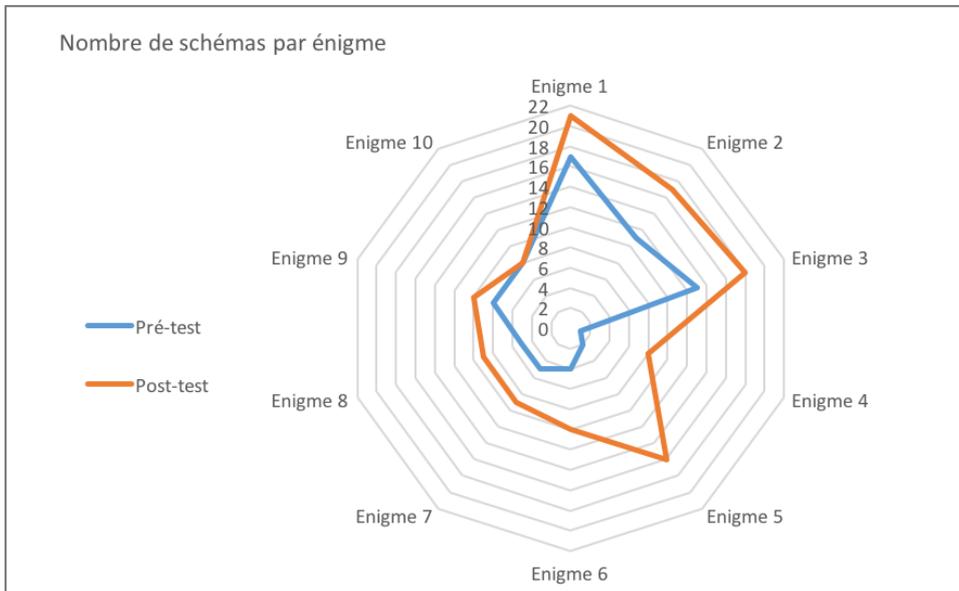
2 élèves (élèves 14 et 19) n'ont pas amélioré leurs performances. On remarque que les élèves n'ont pas tous progressé de la même façon. Les écarts de performances sont maintenus. La séquence d'apprentissage a davantage profité aux élèves en facilité qu'aux élèves les plus en difficulté. La courbe du post-test adopte une forme en étoile, permettant de mettre en avant les disparités de performances entre les élèves.

Plus d'énigmes traitées au total malgré une baisse de traitement des énigmes N°9 et N°10.



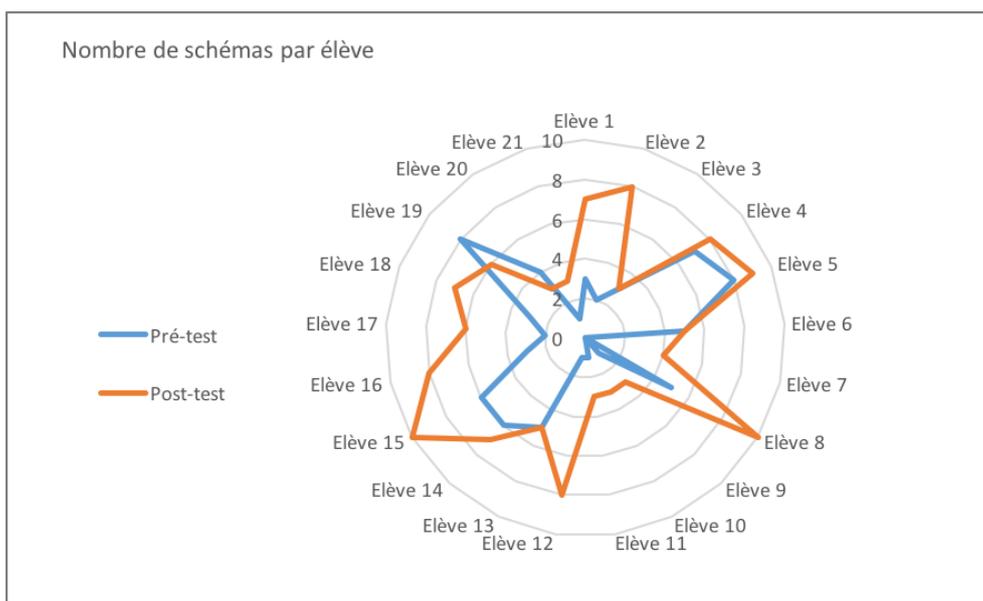
Cette information est à croiser avec le temps de recherche, qui a été optimisé en post-test. Il semblerait que les élèves aient manqué de temps pour traiter l'intégralité des énigmes en post-test, contrairement au pré-test où 45 minutes ont suffi. Nous avons constaté que les élèves ont traité les énigmes dans l'ordre de présentation du test. Ce qui expliquerait pourquoi les énigmes N°9 et N°10, abordées en dernier, n'ont pu être traitées par les élèves. C'est plus une contrainte de temps qui intervient, qu'un choix délibéré de la part des élèves.

Plus de schémas réalisés au total malgré une baisse de la schématisation pour les énigmes N° 9 et N° 10.



Au même titre que le constat précédent, le nombre de schémas réalisés souffre du manque de temps rencontré par les élèves pour traiter les énigmes N°9 et N°10. Nous pouvons constater sur la courbe rouge, le net décrochage au niveau des énigmes n°9 et n°10. Cet élément mis à part, le taux de schématisation a progressé de 70%, se répercutant sur toutes les catégories d'énigmes.

Un recours à la schématisation très disparate d'un élève à l'autre.



Les résultats du post-test dégagent une tendance en nette progression quant à la schématisation mais ils soulignent de manière forte les disparités entre les élèves. Même si globalement, tous les élèves ont produit plus de schémas entre les deux tests, les écarts en nombre de schémas d'un élève à l'autre, viennent nuancer ce constat.

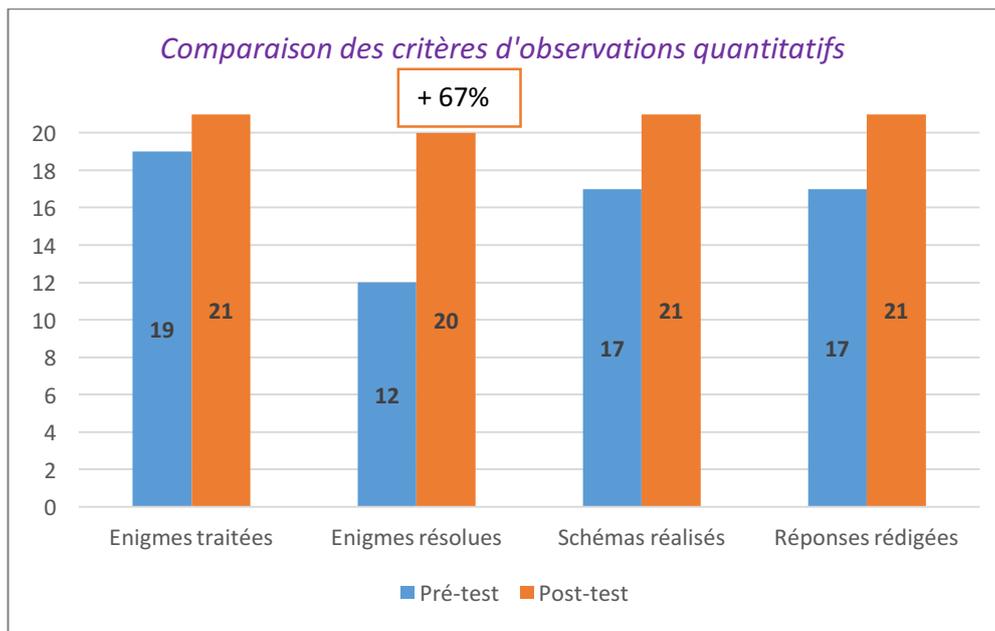
En synthèse, une première analyse quantitative permet de mettre en évidence des tendances se dégageant du post-test :

- Un temps de recherche individuel plus long : en moyenne 13 minutes de plus.
- Un manque de temps pour finir la série d'énigmes : 8 énigmes traitées sur 10.
- Une amélioration évidente des performances des élèves, creusant davantage l'écart entre les très bons élèves et les élèves les plus en difficulté.
- Plus d'énigmes traitées au global pour tous les élèves. Ce qui révèle une plus grande facilité pour les élèves à entrer dans la tâche de la résolution de problème.
- Plus de schémas réalisés (+70%). Ils sont répartis de manière régulière entre les énigmes, mais très disparates entre les élèves. L'outil de schématisation n'a pas profité à tous les élèves, dans les mêmes proportions.

5.2. Analyse didactique des productions d'élève

5.2.1 Énigme N°1

« Un pâtissier coupe une bûche glacée en 6 coups de couteau. Combien de parts de bûche obtient-il ? »



Les quatre critères quantitatifs d'analyse sont tous en progression, avec un score presque maximal. Il est à noter une progression de 67% de bonnes réponses en post-test.

Pour réussir cette énigme, l'élève doit avoir une bonne représentation de la situation, qui peut paraître assez simple. Il s'agit de bien dissocier les coups de couteau des parts de bûche.

Production de l'élève 13 en pré-test

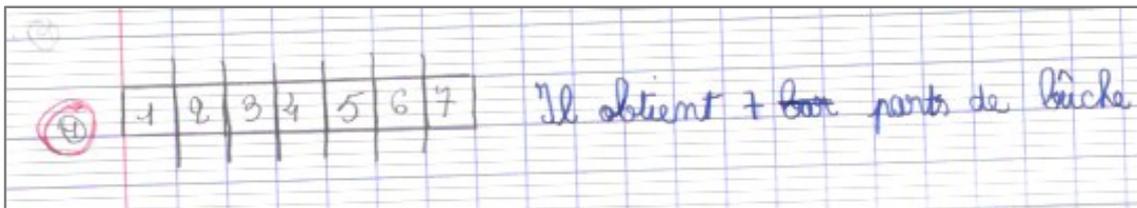


- Confusion entre la notion de parts et de coups de couteau.
- Absence d'une phrase réponse qui permet de valider

la bonne compréhension de la tâche.

Le schéma laisse à supposer que l'élève s'est créé une image mentale erronée : 6 coups de couteau = 6 parts.

Production de l'élève 13 en post-test



Nous constatons une meilleure représentation de la situation. Les coups de couteau dessinés dépassent de la bûche et montrent que l'élève fait bien la différence dans son esprit entre une part de bûche et un coup de couteau. L'élève a bien dessiné les 6 coups de couteau pour ensuite numéroter les parts de bûche.

L'énigme N°1 a été révélatrice du fait qu'une représentation initiale erronée, aboutissait sur un schéma erroné. Dans ce cas, le schéma n'est pas pertinent et ne fait que conforter l'élève dans sa représentation fautive de la situation.

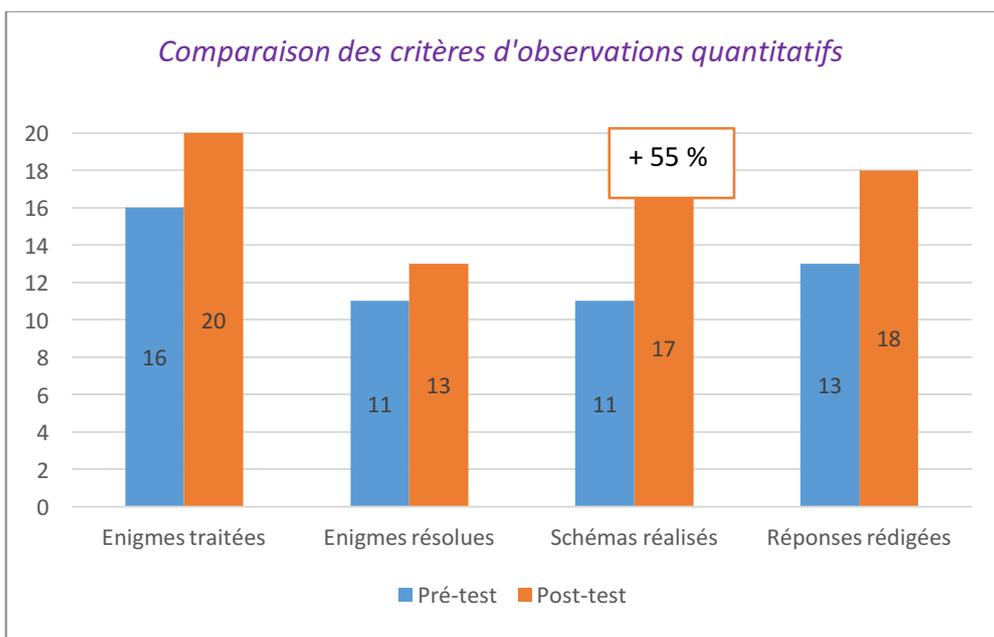
On peut supposer que la situation du ruban à découper travaillée avec les élèves durant la séquence leur a permis de rectifier leur représentation du problème. Ce constat s'inscrit typiquement dans une résolution par analogie, telle que décrite par Jean Julo., et permet d'améliorer considérablement le taux de réussite pour cette énigme, passant de 57% à 95%.

Conclusions de l'analyse de l'énigme N°1 :

- Une progression de bonnes réponses de l'ordre de 66%, pour une augmentation du taux de schématisation nettement inférieure (+ 24%).
- La schématisation n'a pas permis de modifier les représentations initiales erronées.
- Un taux de réussite en nette progression grâce aux transferts de compétences acquises lors du travail sur une situation identique. C'est le travail sur la situation-problème du ruban à découper (séance N°1) qui a permis à l'élève de se familiariser avec la situation pour en automatiser le traitement.

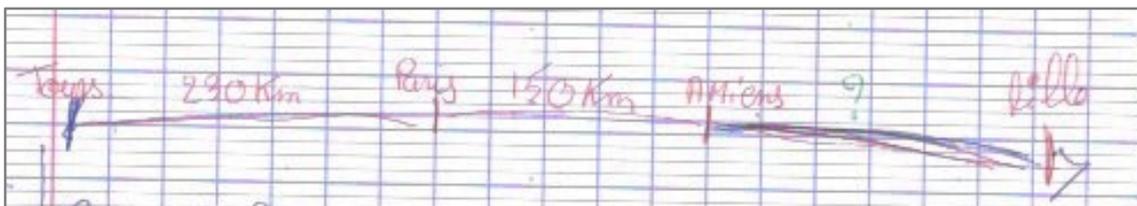
5.2.2 Analyse de l'énigme N°2

« Un automobiliste est parti de Tours et est arrivé à Lille. Il est passé par Paris et Amiens, parcourant ainsi 500 km. Il s'est arrêté à Amiens pour déjeuner. Les distances sont les suivantes : Tours-Paris, 230 km ; Paris-Amiens, 150 km. Après son déjeuner, combien lui restait-il encore à parcourir avant d'atteindre Lille ? »



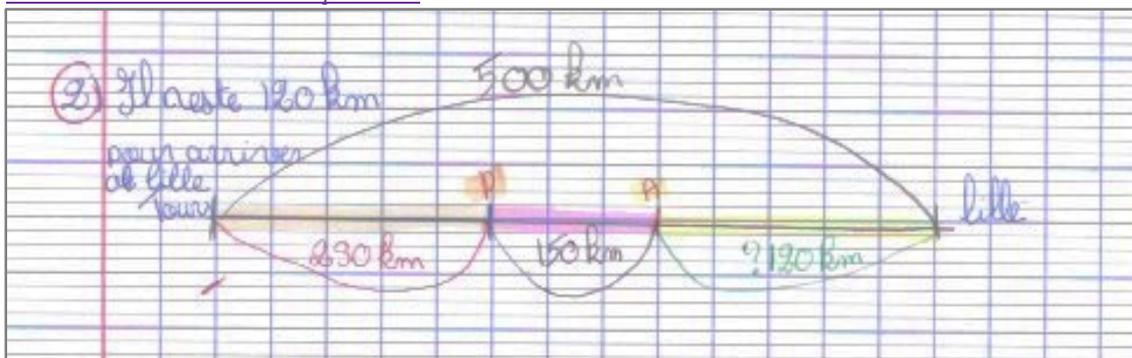
La représentation d'un trajet est particulièrement abstraite pour les élèves puisqu'il n'est pas linéaire. Cependant, dès le cycle 2, ils ont appris à représenter et à mesurer des longueurs de trajets grâce à la droite numérique, d'où cette schématisation symbolique très présente et spontanée dans les productions d'élèves.

Production de l'élève 14 en pré-test



Le schéma est incomplet ; il manque la distance totale du trajet (500 km).

Production de l'élève 14 en post-test



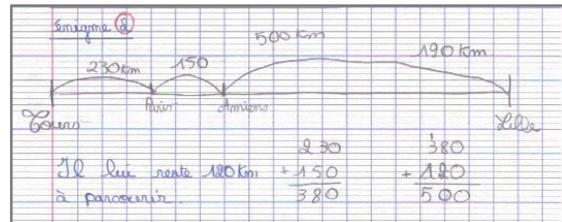
Le deuxième schéma est complet. A noter aussi l'amélioration concernant le soin apporté au schéma : usage de la règle, utilisation de couleurs différentes, écriture soignée.

Lors des deux tests, l'élève a trouvé la bonne réponse. L'apport de la séquence d'apprentissage lui a permis de passer d'une représentation iconique à une représentation plus symbolique du problème.

Production de l'élève 4 en pré-test



Production de l'élève 4 en post-test



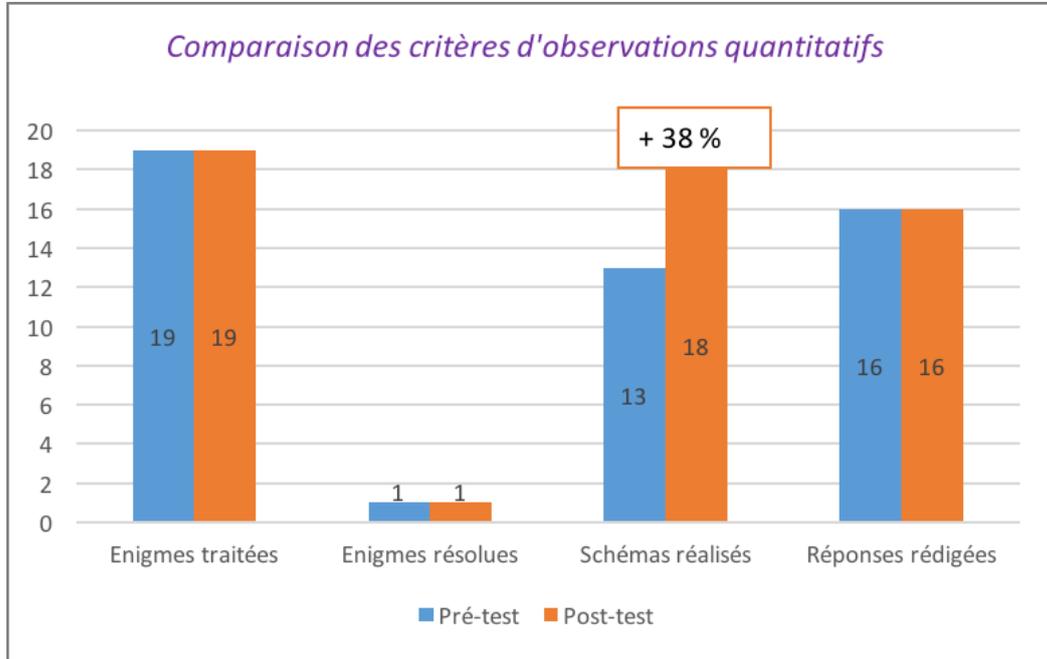
La production de cet élève montre une vraie progression de la compétence de schématisation. Son travail de pré-test présente les données de manières indépendantes, avec le trajet Tours-Lille d'une part et les étapes intermédiaires d'autre part. Il n'a pas réussi à faire le lien entre les deux, contrairement à sa deuxième schématisation qui témoigne d'une bonne mise en relation des données de l'énoncé. Il a réussi à traduire la situation de manière graphique, lui permettant ainsi de se construire une représentation juste.

Conclusions de l'analyse de l'énigme N°2 :

- Pour cette situation-problème, la schématisation n'est pas indispensable pour traiter le problème (une progression de schématisation de 55% pour une augmentation du taux de réussite de seulement 18%).
- La schématisation a permis à certains élèves qui avaient des difficultés pour rentrer dans la tâche en pré-test, d'organiser les données et de résoudre l'énigme.
- A contrario, malgré une schématisation pertinente, d'autres élèves ont choisi la mauvaise opération et ont communiqué des solutions non plausibles.
- La connaissance de la règle graduée a été réinvestie dans les productions
- Une amélioration de la qualité des schémas, qui sont plus soignés, complets et conventionnels.

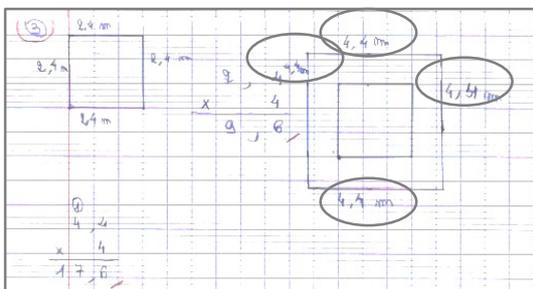
5.2.3 Analyse de l'énigme N°3

« Un bassin carré mesure 2,40 m de côté. Calcule son périmètre. On met une clôture tout autour à un mètre du bord. Quelle est la longueur de cette clôture ? »

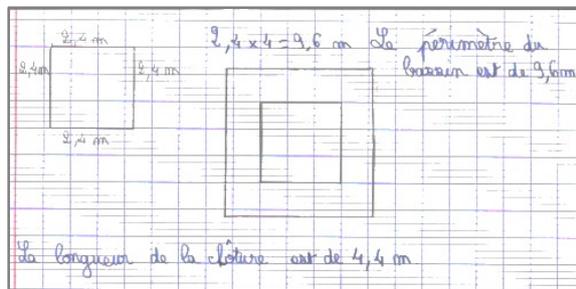


Malgré un taux de traitement élevé et un taux de schématisation en progression (+38%), cette situation n'a été réussie que par un élève en pré-test et en post-test. Il est intéressant de noter que l'élève qui a réussi en pré-test n'a pas réussi en post-test. Sur le schéma du post-test, il n'a pas reporté les dimensions de la clôture sur les 4 côtés. On peut supposer que c'est la cause de l'erreur de représentation.

Production de l'élève 13 en pré-test



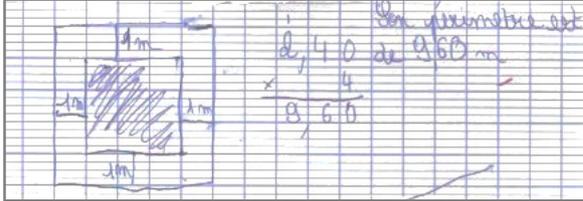
Production de l'élève 13 en post-test



Pour l'élève qui a réussi en post-test, la différence majeure entre ses deux schémas est la présence de la dimension des côtés qui paraît être un critère de réussite incontournable

pour cet exercice, puisqu'il semble permettre une meilleure représentation de la situation, quand il s'agit d'un calcul de périmètre.

Production de l'élève 18 en pré-test



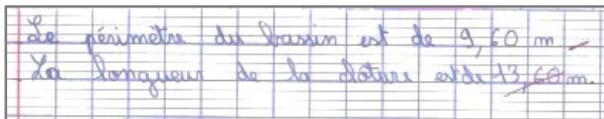
Production de l'élève 18 en post-test



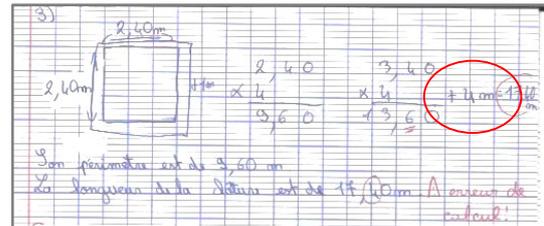
15 élèves sur 21 ont réussi à calculer le périmètre du bassin, alors qu'un seul a trouvé la bonne réponse pour le périmètre de la clôture.

Il est cependant intéressant de regarder plus précisément le travail de l'élève 7. Elle a commis une erreur d'inattention, ne lui permettant pas de trouver la réponse juste, sans quoi elle aurait réussi l'énigme.

Production de l'élève 7 en pré-test



Production de l'élève 7 en post-test



Ce qui change entre les deux productions est que l'élève a schématisé la situation et détaillé les calculs. On observe dans les étapes de son raisonnement que sa représentation de la situation a évolué in extrémis, peut-être grâce au schéma, qui visuellement lui a fait prendre conscience de l'inadéquation entre sa représentation du problème et sa procédure de résolution. On suppose qu'en vérifiant ses calculs, son schéma lui a permis de repérer et de corriger son erreur.

L'erreur commise en majorité par les autres élèves est qu'ils ont ajouté seulement 1m aux côtés du bassin, au lieu de 2 m.

Cette erreur nous interpelle car, pour la plupart, ils ont réalisé des schémas corrects, avec une clôture qui entoure bien les 4 côtés du bassin. Cependant, ils n'ont reporté la donnée « 1 m » que sur une extrémité du bassin, utilisant donc une mesure de 3,40 m pour le calcul du périmètre de la clôture.

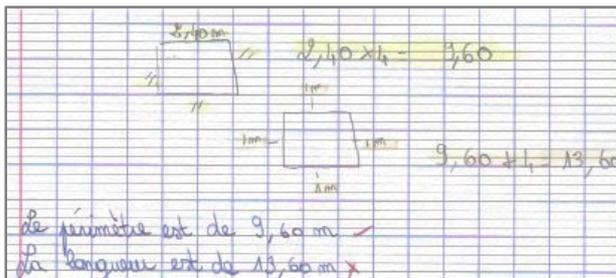
Nous pouvons constater que ce n'est pas la formule de calcul du périmètre d'un rectangle qui est un obstacle à la résolution du problème mais bien la représentation de la situation. Et, bien qu'elle soit correctement schématisée, leur représentation reste erronée. Nous

pouvons en conclure que le schéma n'a pas permis de corriger la représentation erronée initiale.

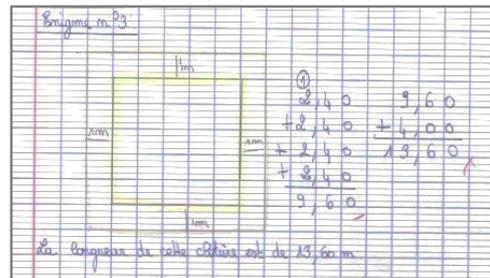
Autre erreur commise par les élèves, ils ont utilisé le périmètre du bassin pour calculer celui de sa clôture : soit en le multipliant par 4 ou soit en y ajoutant 4 ou 3. Nous pouvons penser qu'ils ont mis en place une stratégie de résolution du problème par étape, en liant les résultats entre eux. Peut-être est-ce dû à un effet du contrat didactique³⁵, au regard de la définition du concept proposée par Guy Brousseau dans les années 1980.

Au même titre que l'énigme N°2, les productions d'élèves témoignent en majorité d'une amélioration au niveau de la schématisation ; ils sont plus nombreux, plus complets, plus soignés, en phase avec les apprentissages visés.

Production de l'élève 19 en pré-test



Production de l'élève 19 en post-test



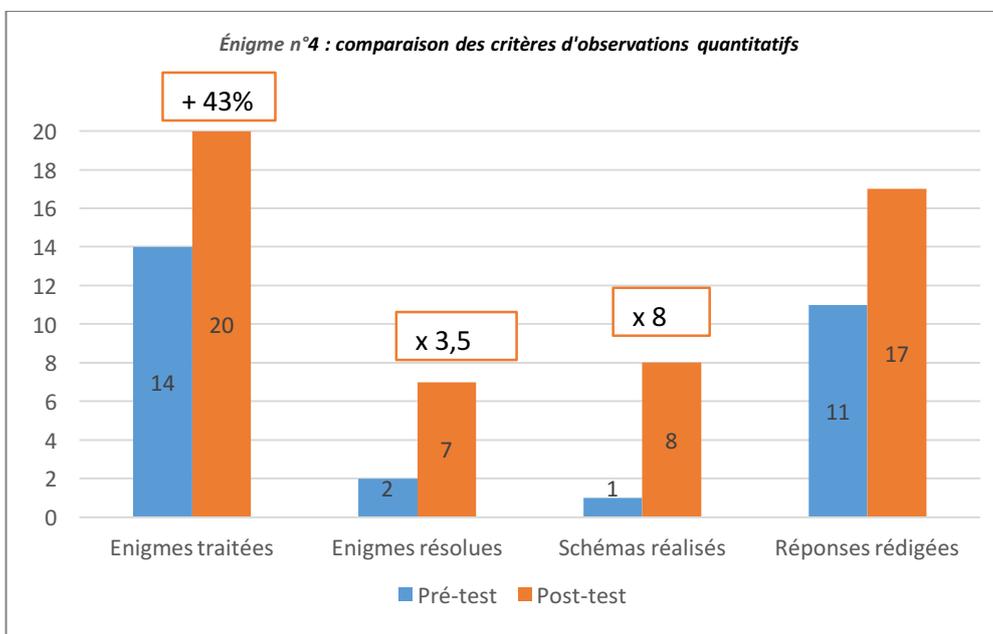
Conclusions de l'analyse de l'énigme 3 :

- L'augmentation de la schématisation n'a pas influencé la performance globale des élèves.
- La schématisation n'a pas permis d'améliorer la représentation initiale des élèves et a conduit à des mauvais choix d'opérations.
- Le cas de l'élève 7 est à noter, même s'il est isolé. Le schéma lui a permis, certainement en phase de validation, de corriger son scénario de résolution.
- Une amélioration de la qualité des schémas, qui sont plus soignés, complets et conventionnels.

³⁵ Définition de Guy Brousseau, 1980 : « C'est l'ensemble des comportements de l'enseignant qui sont attendus de l'élève, et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus de l'enseignant. »

5.2.4. Analyse de l'énigme N°4

« Pendant 8 jours, Hélène part skier avec son grand frère de 12 ans et ses parents. La location du matériel est de 5€/jour/adulte et de 3€/jour/ enfant (de moins de 15 ans). Au-delà de 4 jours, les prix baissent et passent à 4€/jour/ adulte et à 2€/jour/ enfant.
Combien les parents d'Hélène devront-ils dépenser en tout pour la location de matériel ? »

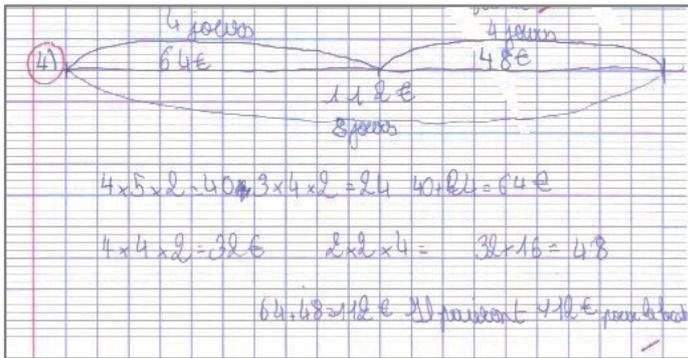


Pour traiter cette énigme, les élèves n'ont pas eu de mal à se représenter la situation ; le faible taux de schématisation en témoigne. La difficulté majeure a été d'organiser des données hétérogènes et de les mettre en lien. Un tableau à double-entrée se prête parfaitement à la situation présentant les personnes en ligne et les jours en colonnes. Réaliser ce tableau est trop coûteux en temps pour des élèves de CM2. De plus, les nombres choisis sont petits, propices au calcul mental ; raison supplémentaire pour ne pas réaliser ce type de schématisation, qui plus est, est exclu de notre cadre théorique.

	Jour 1	Jour 2	Jour 3	Jour 4	Jour 5	Jour 6	Jour 7	Jour 8	Total
Hélène	3 €	3 €	3 €	3 €	2 €	2 €	2 €	2 €	20€
Frère	3 €	3 €	3 €	3 €	2 €	2 €	2 €	2 €	20€
Papa	5 €	5 €	5 €	5 €	4 €	4 €	4 €	4 €	36€
Maman	5 €	5 €	5 €	5 €	4 €	4 €	4 €	4 €	36€
Total	16€	16€	16€	16€	12€	12€	12€	12€	112€

Un élève qui n'avait pas du tout abordé l'énigme lors du pré-test (copie rendue après 40 mn) a proposé le schéma suivant :

Production de l'élève 18 en post-test



Sa stratégie de résolution témoigne de connaissances de la droite graduée.

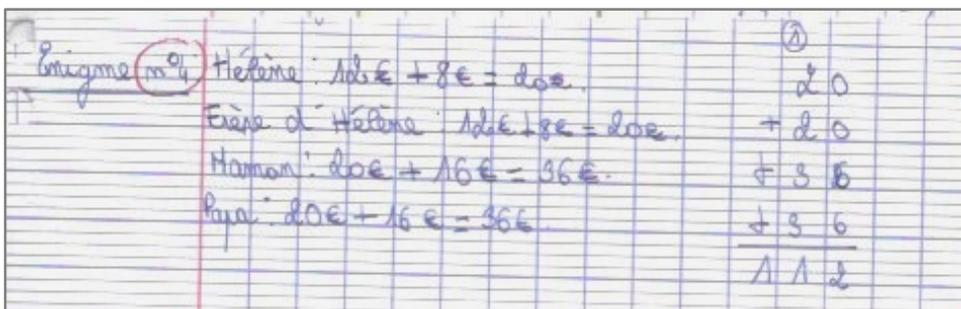
Cependant la schématisation de la situation avec une ligne du temps ne prend en compte qu'un aspect des données de l'énoncé.

L'élève n'a pas eu besoin de schématiser les autres données comme le nombre de personnes concernées. Nous supposons qu'elles sont proches de la structure familiale de l'élève. Une vérification a confirmé cette supposition ; la famille de l'élève est composée de 2 enfants (fille et garçon) et de deux parents.

Regardons maintenant les productions de l'élève 19 qui a résolu l'énigme lors des deux tests. Il est intéressant d'observer l'évolution de la forme de son travail. Ses capacités en calcul mental le dispensent des calculs intermédiaires. L'élève s'est fait une représentation de la situation juste. Il a immédiatement enclenché les calculs. Il a travaillé vite, si bien qu'il a négligé la phase de communication de la réponse (phrase réponse). De manière différente, lors du post-test, il a essayé d'organiser les données de la situation, tout en détaillant les calculs intermédiaires. Sa production est le reflet de toutes les étapes mentales réalisées.

Le résultat est le même pour les deux tests. Cependant nous percevons une recherche de transparence et de clarté dans la phase de communication du deuxième travail. A noter aussi l'utilisation de couleurs (jaune fluo pour les enfants, orange fluo pour les parents).

Production de l'élève 19 en pré-test



Production de l'élève 19 en post-test

Groupe n°4				
<u>Hélène</u>	<u>Frère</u>	<u>Romain</u>	<u>Marion</u>	⊕
$5 \times 4 = 20$	$3 \times 4 = 12$	$5 \times 4 = 20$	$5 \times 4 = 20$	20
$2 \times 4 = 8$	$2 \times 4 = 8$	$4 \times 4 = 16$	$4 \times 4 = 16$	+ 20
<u>8 jours</u>	<u>8 jours</u>	<u>8 jours</u>	<u>8 jours</u>	+ 36
<u>20€</u>	<u>20€</u>	<u>36€</u>	<u>36€</u>	+ 36
				<u>112</u>
Ils devront payer : 112€				

Ci-après, la production de l'élève 15, représentative des erreurs faites par la majorité de la classe. L'élève s'est concentré sur une donnée principale de la situation qui est de savoir qu'au-delà de 4 jours de location les prix baissent, tout en occultant le nombre de personnes concernées par la situation. Il a calculé le coût pour un adulte pour une durée de 8 jours et pour un enfant pour une durée de 8 jours. Il n'a pas répondu à la question. Sa représentation initiale erronée n'a pas évolué avec la schématisation. Il a proposé un schéma conforme à sa propre représentation de la situation et de la tâche à effectuer.

Production de l'élève 15 en pré-test

4)	$5 \times 4 = 20$ € par jour pour les adultes (pendant 4 jours)
	$3 \times 4 = 12$ € par jour pour les enfants (pendant 4 jours)
	$4 \times 4 = 16$ € par adultes (au delà de quatre jours)
	$2 \times 4 = 8$ € enfants (au delà de quatre jours)
Ils devront dépenser	56€
en tout	$\begin{array}{r} 20 \\ + 12 \\ + 8 \\ + 16 \\ \hline 56 \end{array}$

Production de l'élève 15 en post-test

4) 4 jours

$5 \times 4 = 20 \text{€}$ par adulte + 20

$3 \times 4 = 12 \text{€}$ par enfants 12

32€

24

+ 32

56€

56€

4 jours

Les pins brissent

$4 \times 4 = 16 \text{€}$ par adulte

$2 \times 4 = 8 \text{€}$

24

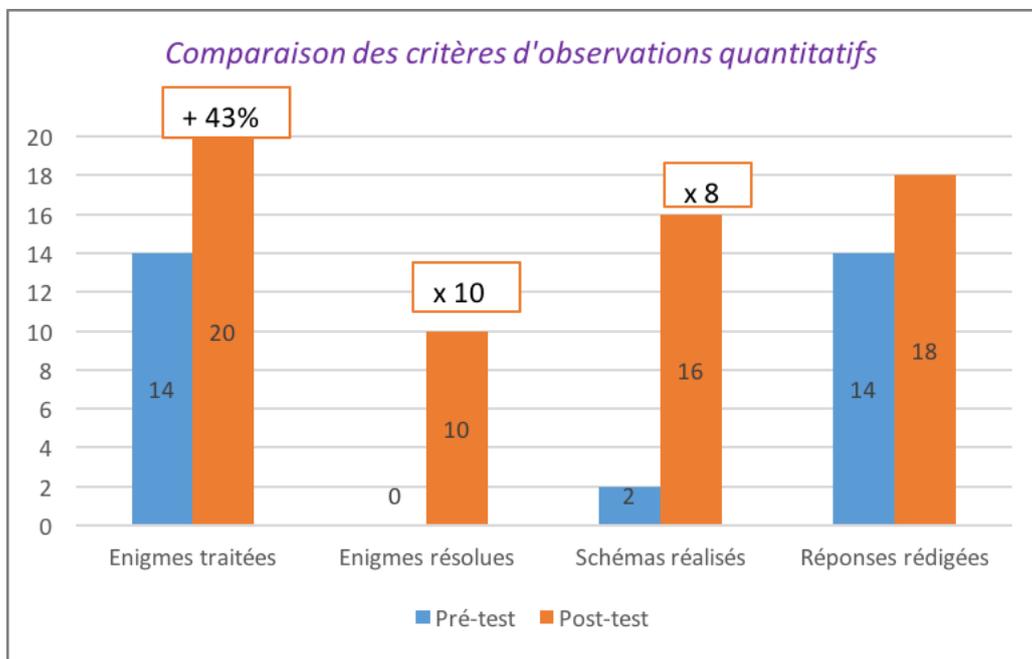
Les parents d'Heléne doivent dépenser

Conclusions de l'analyse de l'énigme N°4 :

- Une représentation de la situation erronée aboutit à une schématisation fautive.
- Une meilleure organisation des données entre les deux tests met en évidence la volonté d'une communication plus transparente et précise
- 95% des élèves ont traité l'énigme et ont cherché la solution en post-test, contre seulement 66% en pré-test. Cela traduit un accroissement de la motivation à la tâche des élèves et de la dynamique de recherche (moins de situation de blocage immédiat appelée communément « la page blanche »). On constate un enrôlement de l'élève au travail de recherche.
- Un travail de schématisation plus précis, complet et soigné

5.2.5 Analyse de l'énigme N°5

« Un restaurant propose le menu du jour à 15€. Il y a 4 choix possibles pour l'entrée, 3 choix possibles pour le plat principal et 2 choix possibles pour le dessert. Combien de menus différents peut-il constituer ? »



Ce problème ternaire à produit cartésien ($A \times B$) a été source de beaucoup de difficultés pour tous les élèves en pré-test. Ils n'ont été que 14 à essayer de le réaliser. Il est observé une confusion générale entre les termes « menu », « plat » et « repas » ; le mot « plat » est utilisé à la place du mot « menu ». Ce point d'observation est très factuel dans les phrases réponse des deux tests : « *Il peut y avoir 31 plats différents.* », « *Il peut constituer 9 plats* », « *Il y a 24 repas* ».

L'erreur la plus commune a été d'additionner les possibilités (4 entrées + 3 plats + 2 desserts). Cette phase d'observation nous montre que le réflexe des élèves, en résolution de problème, est d'utiliser l'opération qu'ils maîtrisent la plus : l'addition.

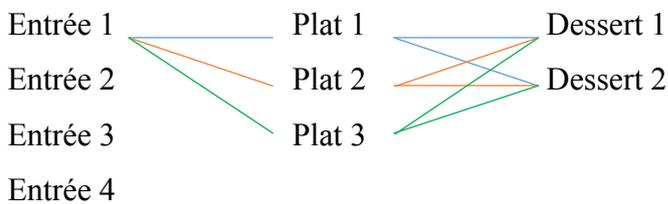
L'énigme de la tenue vestimentaire³⁶, travaillée pendant la séquence dédiée à la schématisation, leur a permis d'automatiser ce type d'énigme. D'ailleurs, ils ont été nombreux à faire le rapprochement entre les deux situations. Durant la séquence, les élèves ont travaillé à partir de cartes images. Ils ont eu à choisir des éléments de tenues, avec pour objectif de composer le plus de tenues complètes possibles. A l'unanimité, ils

³⁶ *J'ai 5 pulls, 4 pantalons et 3 paires de chaussures. Combien de tenues différentes puis-je porter ?*

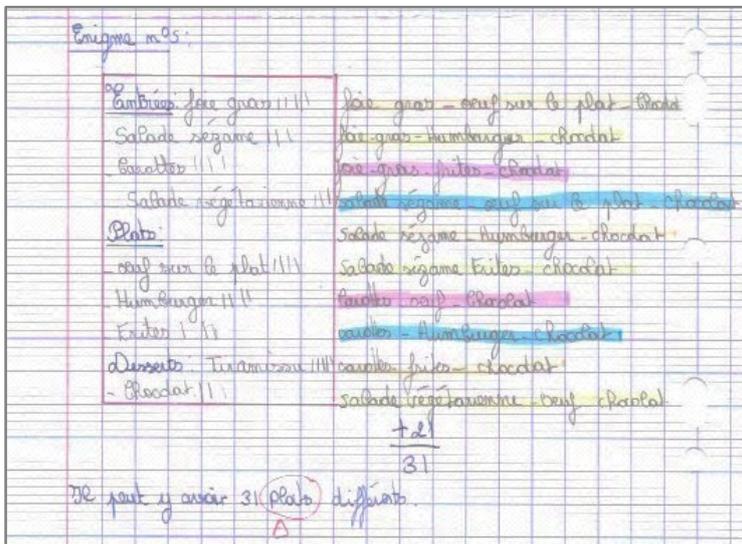
ont émis le fait que c'était un travail très long à faire. Une fois le nombre maximum de tenues possibles trouvé (60 tenues), ils ont cherché un autre moyen de trouver la solution sans tout compter, mais grâce à une opération (la multiplication).

Au regard des productions d'élèves, nous supposons que les élèves ont mentalement associé la multiplication à ce type de situation. En post-test, 4 élèves ont d'abord posé et résolu l'opération, pour ensuite schématiser. Les schématisations proposées ne reflètent pas la complexité de la situation car elles ne proposent pas un système de distribution reliant les données entre elles. Les schémas des élèves restent au stade de représentations iconiques et non symboliques.

Proposition de schématisation



Production de l'élève 19 en post-test

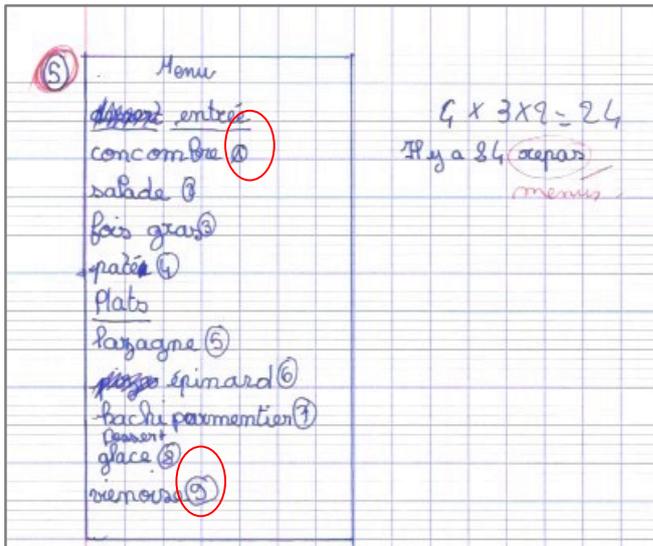


L'élève a essayé de répertorier toutes les solutions possibles : stratégie coûteuse en temps et peu fiable. Il en est resté au 1^{er} stade de la séance d'apprentissage avec la situation de la tenue vestimentaire.

Son schéma témoigne

toutefois d'une bonne organisation et d'un souci de rigueur.

Production de l'élève 8 en post-test



L'élève a immédiatement traduit la situation en opération.

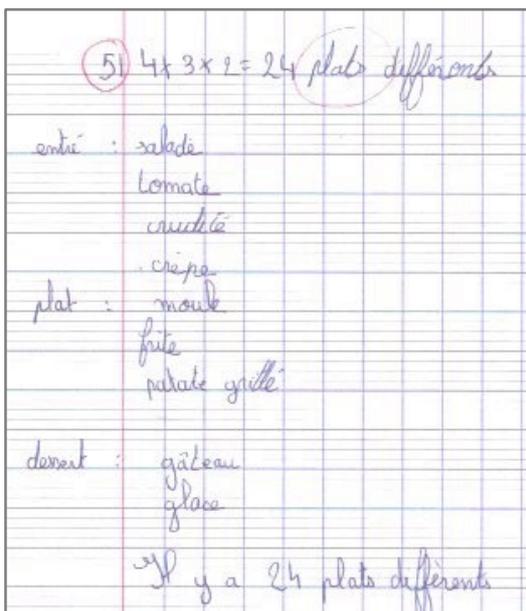
Le schéma n'est pas pertinent. Il permet juste à l'élève d'inscrire la situation dans une forme de réalité. D'ailleurs, la forme du schéma est celle d'une ardoise présentant le menu dans les restaurants.

Nous pouvons nous interroger également sur la pertinence de numéroter les éléments du menu.

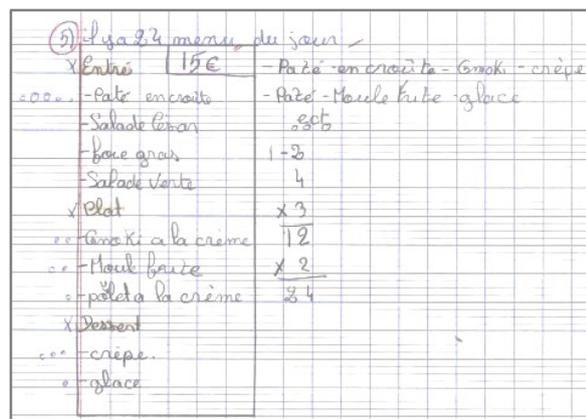
Cette numérotation n'a aucune utilité pour la suite de la résolution. Cela peut traduire une mauvaise représentation de la situation. Cependant, l'opération est juste. Nous pouvons présumer d'un transfert d'apprentissage acquis grâce à l'énigme de la tenue vestimentaire (Apprentissage par analogie).

Les deux productions d'élèves à suivre nous confortent dans cette hypothèse. En effet, les élèves ont d'abord posé en ligne l'opération et après seulement, ils ont tenté de schématiser la situation. Dans ce cas présent, la schématisation n'est pas pertinente. Elle est même très chronophage.

Production de l'élève 1 en post-test



Production de l'élève 14 en post-test

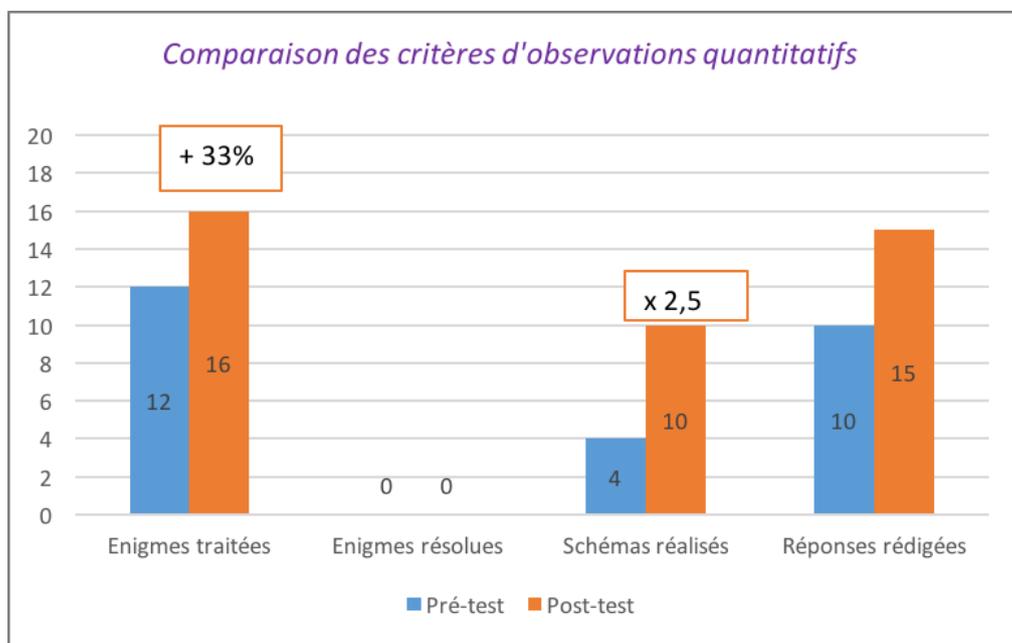


Conclusions de l'analyse de l'énigme N°5 :

- L'énigme a été résolue grâce à un transfert d'apprentissage acquis avec une situation similaire, travaillée en classe (association de la multiplication à ce type de situation), qui se traduit par un processus d'automatisation de la reconnaissance de l'opération.
- La schématisation n'a pas été pertinente ; elle a été visiblement chronophage.
- Certains indices nous permettent de douter de la bonne représentation de la situation par les élèves : de nombreuses confusions entre « plats » et « menus » et une numérotation inutile des éléments de la carte.
- L'énigme semble résolue grâce à l'utilisation d'un modèle de schéma de problèmes stocké en mémoire, malgré une mauvaise représentation mentale de la situation. C'est par automatisme que l'énigme a été résolue.

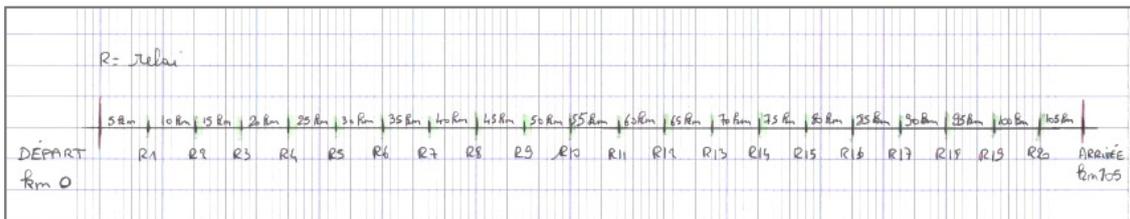
5.2.6 Analyse de l'énigme N°6

« Un rallye cycliste comporte 105 km. Le départ est à 7 heures le matin. Les relais sont distants de 5 km. Chaque participant doit pointer au départ, à chaque relais et à l'arrivée. Combien de fois doit-il pointer ? »



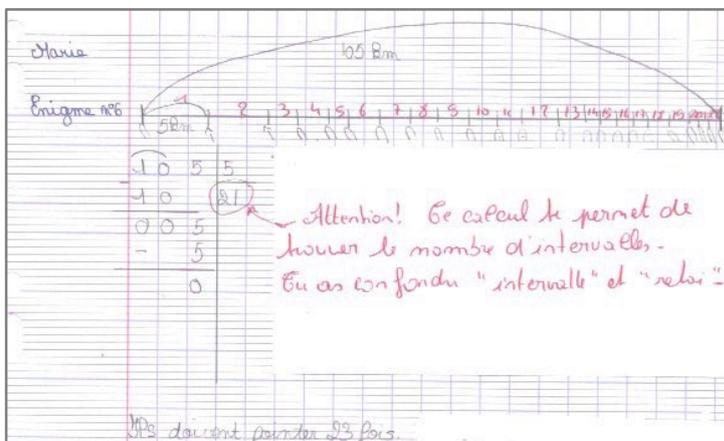
Pour résoudre ce problème, il convient de le faire en 3 étapes : d'abord, il faut déterminer le nombre d'intervalles sur la distance totale (21 intervalles), ensuite il faut compter les relais (20 relais) et enfin répondre à la question qui est de déterminer le nombre de pointages incluant les relais, le départ et l'arrivée (22 pointages). Dans la représentation de la situation, pour bien dissocier « l'intervalle » du « point de relai », il est très utile de schématiser, pour bien isoler visuellement ces deux aspects de la situation.

Proposition de schématisation de la situation



Malgré onze réponses très proches de la solution, aucun élève n'a réussi à résoudre l'énigme. En post-test, seuls dix élèves ont réalisé un schéma (contre quatre en pré-test). Ils sont passés immédiatement à la résolution du problème, au détriment de la phase d'analyse de la situation. Leurs représentations de la situation étant erronées, les solutions l'ont été également. Nous constatons de nombreuses confusions entre « intervalle » et « point de relai ». Les élèves ont majoritairement divisé 105 par 5, trouvant 21 et associant ce résultat au nombre de points de relai. 43% des élèves ont proposé ce résultat comme réponse de l'énigme, ne traitant pas l'élément de l'énoncé qui dit que chaque participant doit pointer à l'arrivée et au départ.

La production suivante de l'élève 16 est probante à ce sujet. Il a divisé 105 par 5 ; il a trouvé 21. Sur son schéma sont dessinés 21 points de relai à la place de 21 intervalles.

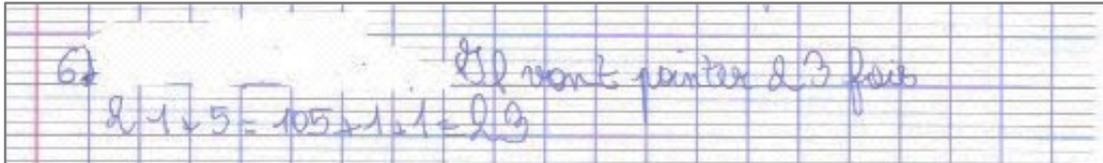


A ce résultat, il a ajouté le pointage du départ plus celui de l'arrivée. Il propose donc comme solution : 23 pointages

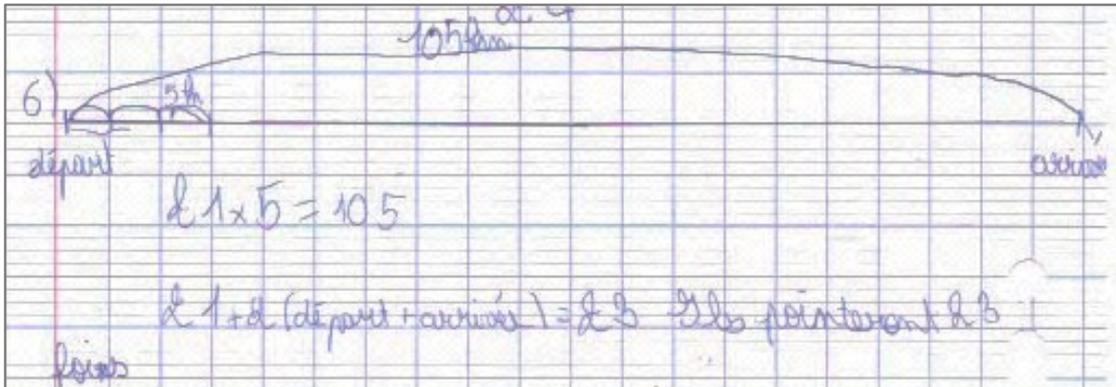
Production de l'élève 16 en post-test (énigme non traitée en pré-test)

L'élève 18 a fait la même confusion entre « intervalle » et « point de relai ». Sa procédure montre l'addition de 21 intervalles et de 2 pointages (départ, arrivée). La confusion était déjà présente lors du pré-test. La schématisation n'a pas permis de modifier sa représentation de la situation.

Production de l'élève 18 en pré-test



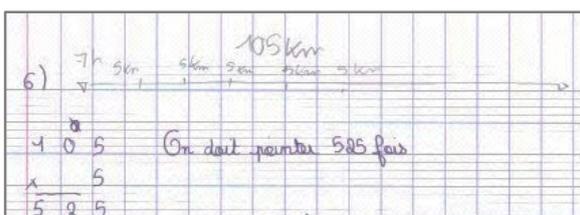
Production de l'élève 18 en post-test



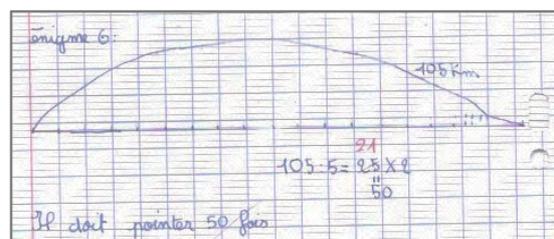
L'élève 15 a schématisé la situation dans les deux cas en utilisant une droite graduée, qui est un choix pertinent dans ce cas présent. Il est à noter une schématisation plus complète et plus conventionnelle en post-test.

Une lecture des deux schémas semble témoigner d'une bonne représentation de la situation. Cependant, la résolution est fautive. Nous supposons que dans son processus de résolution de problème, l'élève a occulté la phase de vérification du calcul et de la plausibilité du résultat, telle que définie par Alain Descaves.

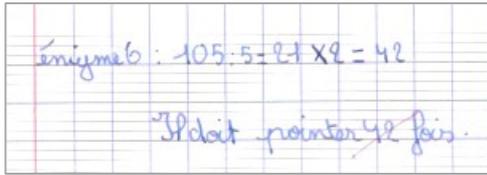
Production de l'élève 15 en pré-test



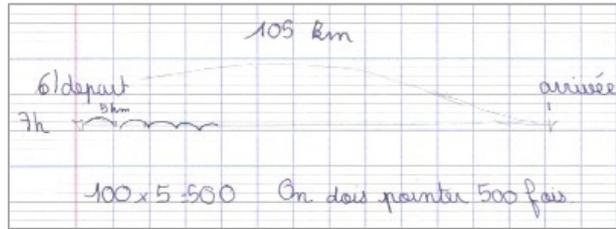
Production de l'élève 15 en post-test



Production de l'élève 12 en pré-test



Production de l'élève 12 en post-test



Bien qu'incomplète, la schématisation

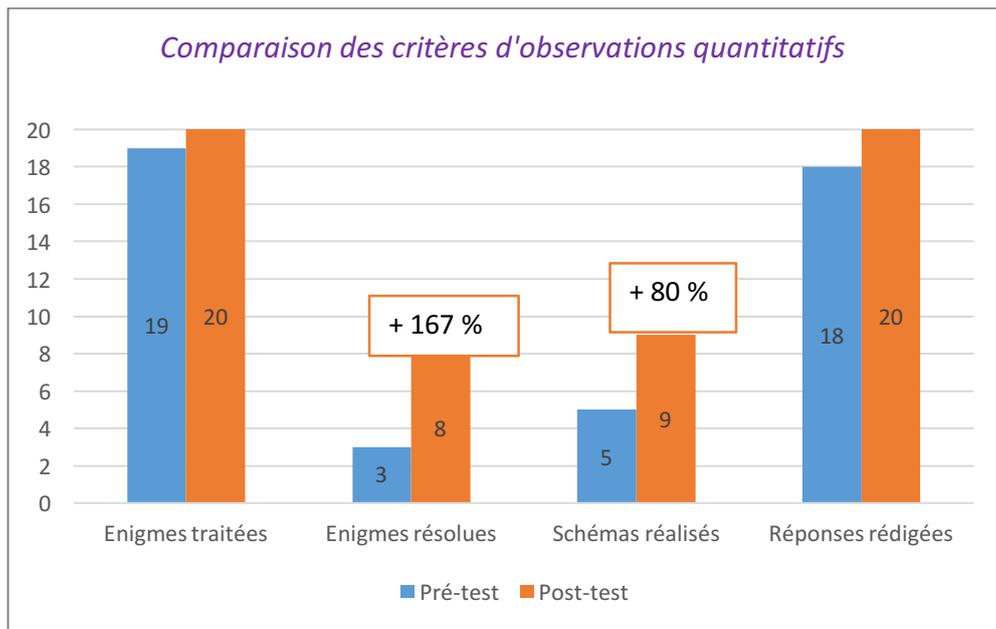
de la situation en post-test reflète, à priori, une bonne représentation de la situation.

Conclusions de l'analyse de l'énigme N°6 :

- Une mauvaise représentation de la situation due à une confusion entre « intervalle » et « point de relai ».
- La schématisation n'a pas permis de modifier les représentations erronées.
- La schématisation de cette situation semble trop coûteuse en temps pour les élèves. Par conséquent, elle est partielle et peu pertinente pour bien intégrer toutes les données de l'énoncé et permettre une image mentale juste.

5.2.7. Analyse de l'énigme N°7

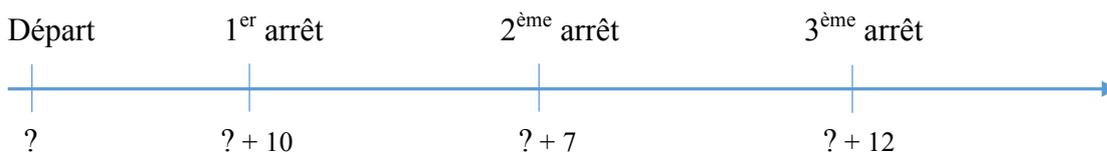
« La distance entre chaque arrêt d'un autobus est d'environ 1500m. Au premier arrêt, 10 personnes montent ; au second arrêt, 3 personnes descendent ; au troisième arrêt, 5 personnes montent. Y a-t-il plus ou moins de voyageurs dans l'autobus quand il repart après ce troisième arrêt ? Combien en plus ou en moins ? »



Cette situation est une addition, composée de trois transformations. Pour résoudre cette énigme, l'élève doit trouver une transformation, malgré un état initial inconnu.

L'énigme oblige à prendre en compte une donnée inconnue (?) pour prendre en compte le nombre de personnes au départ du bus. Ceci requiert pour les élèves des capacités d'abstraction importantes, qui peuvent être allégées grâce à un schéma.

Proposition de schématisation de la situation



Il y a trois réponses possibles à la situation, en fonction du point initial de comparaison :

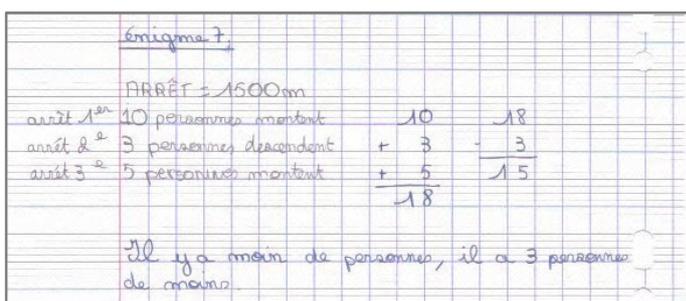
- La différence est de 12 passagers en plus, entre le départ et le 3^{ème} arrêt
- La différence est de 2 passagers en plus entre le 1^{er} arrêt et le 3^{ème} arrêt
- La différence est de 5 passagers en plus entre le 2^{ème} arrêt et le 3^{ème} arrêt

Pour être considérée comme juste, la réponse doit mentionner le point initial de comparaison.

La majorité des élèves n'a pas répondu précisément à la question. Les phrases réponses fournies laissent transparaître un élément d'incompréhension de la situation. L'énoncé ne précise pas le point de comparaison : combien de personnes en plus ou moins, avant le 2^{ème} arrêt, avant le 3^{ème} arrêt ou au départ du bus c'est-à-dire avant le 1^{er} arrêt ?

Cette zone d'incertitude chez l'élève s'est traduite par des phrases réponses évasives, et détournées. Pour la plupart, ils ont donné le nombre de passagers après le 3^{ème} arrêt, exprimé comme suit : « 10-3+5= 12, donc il y a plus de personnes », « il y en a plus. Il y a 2 personnes de plus ».

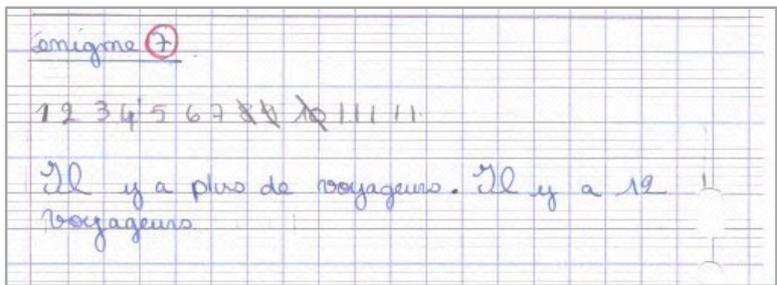
Production de l'élève 4 en pré-test



Le pré-test montre que l'élève est passé par une phase de sélection des mots importants de l'énoncé, qu'il a recopiés sous forme de texte. La capacité d'abstraction de l'élève semble limitée.

Son calcul traduit une représentation erronée du problème qui consiste à compter tous les mouvements de passagers comme des montées, alors qu'il y a en réalité trois descentes.

Production de l'élève 4 en post-test

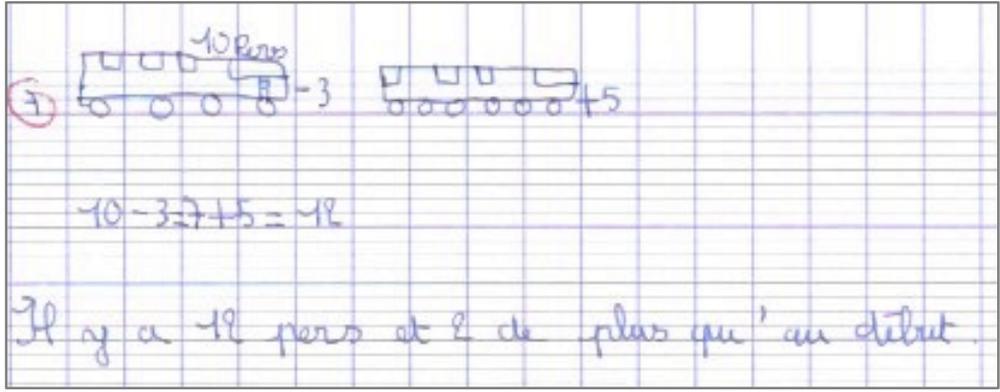


La deuxième production de l'élève est schématisée. Elle traduit plus simplement la situation qui le conduit à un raisonnement plus juste.

L'élève a d'abord représenté les passagers sous forme de suite numérique ; ce qui lui permet un comptage fiable. Ensuite, il a barré les trois passagers qui sont descendus. Et ensuite, pour symboliser les cinq personnes montées au 3^{ème} arrêt, il a utilisé des bâtons. Comme il n'a indiqué sur son schéma ni le départ, ni les points d'arrêt, il ne s'est pas interrogé sur le point initial de comparaison, qui ne ressort pas non plus dans sa phrase réponse.

Analysons une autre production d'élève réalisée en post-test qui montre que l'élève 12 a dessiné un bus, non pas pour mieux comprendre la situation, mais visiblement pour remplir sa part du contrat didactique. Après deux semaines de résolutions de problèmes avec schématisation, il a dû se sentir obligé de faire un schéma, même inutile, pour répondre aux attentes implicites de son enseignante.

Production de l'élève 12 en post-test (énigme non traitée en pré-test)



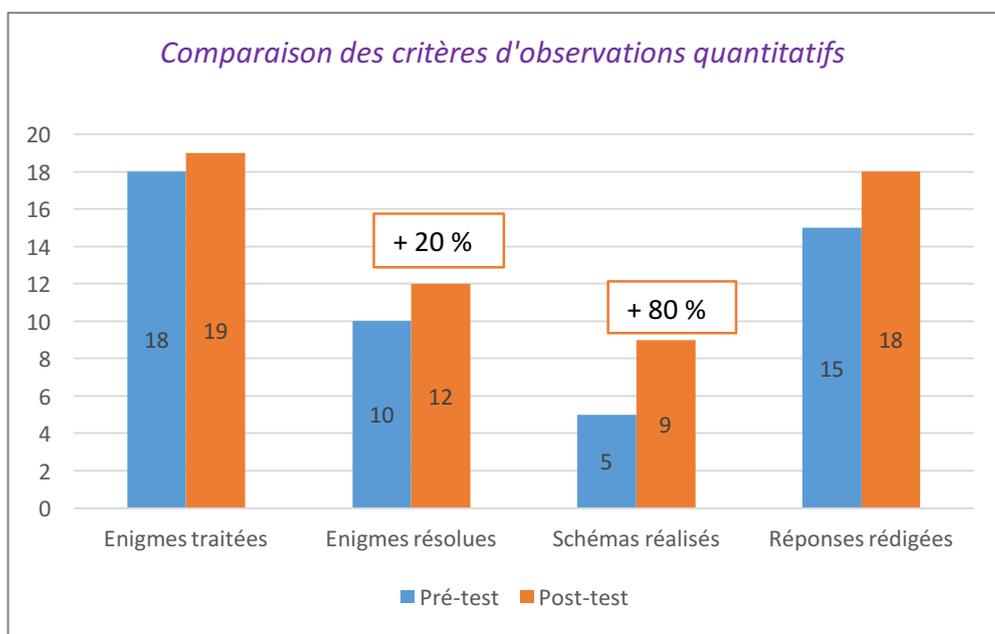
La phrase réponse donne un point de comparaison initial, qui entend le mot « début » comme « départ ». A contrario, le résultat chiffré trouvé indique, lui, une comparaison à partir du 1^{er} arrêt.

Conclusions de l'analyse de l'énigme N°7 :

- Confusion entre le point de départ et le 1^{er} arrêt, qui est caractérisée par une phrase réponse détournée, incomplète ou imprécise.
- Les schémas proposés en post-test ressemblent plus à des schémas d'obligation de la part des élèves qu'à des schémas d'aide à la représentation. Ils s'apparentent à des dessins enfantins, loin d'une schématisation symbolique codée.

5.2.8. Analyse de l'énigme N°8

« En prévision d'une sortie scolaire, M. Fournier veut répartir les 29 élèves de CMI dans des voitures qui peuvent contenir 4 élèves chacune. Combien de voitures, M. Fournier doit-il prévoir ? »



Cette énigme présente une situation de quotition partition. Il s'agit de déterminer combien de paquets de 4 on peut faire avec un groupe de 29. Schématiser permet de ne pas oublier de traiter le reste de la division. 29 divisé par 4 donne 7 avec un reste de 1. La réponse est donc : 8 voitures (7 voitures contenant 4 élèves et 1 voiture avec 1 seul élève).

Une forte progression de schémas est à noter en post-test : + 80%. Cependant, seulement 20% de bonnes réponses supplémentaires.

5 réponses différentes ont été données en post-test, contre 6 en pré-test : 6 voitures, 7 voitures, 7,85 voitures, 8 voitures, 9 voitures.

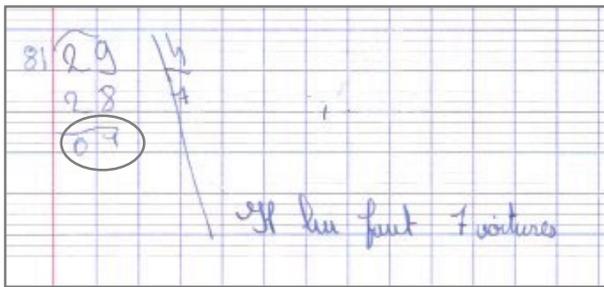
Les deux erreurs les plus fréquentes sont :

- Un résultat décimal improbable avec la situation (7,85 voitures). Les élèves font abstraction du sens réel de la situation. Il s'agit du même phénomène décrit dans les recherches de Verschaffel & De Corte (2008), qui relate le fait que les élèves ont « tendance à exclure la connaissance du monde réel lors de la résolution de problèmes verbaux administrés dans le contexte étroit de l'arithmétique scolaire ».
- Ne pas traiter le reste de la division et oublier un élève en ne proposant que 7 voitures.

Les procédures élèves sont de deux ordres : - soit une division posée avec reste, - soit une schématisation en bâtons des 29 élèves, regroupés par paquets de 4.

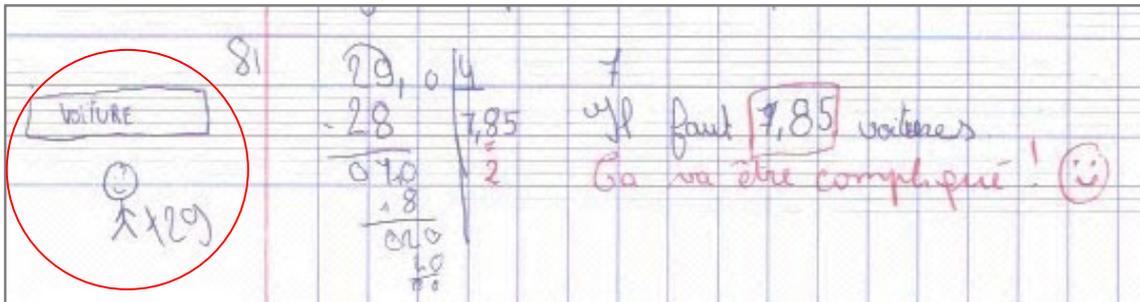
La schématisation évite de poser l'opération et de faire une erreur de calcul. La division est l'opération la plus redoutée de élèves.

Production de l'élève 1 en pré-test



A partir de la même procédure de résolution du problème, cet élève a proposé deux réponses différentes qui montrent qu'il traite l'énigme comme un exercice scolaire et non pas comme une situation de partage courante.

Production de l'élève 1 en post-test



Production de l'élève 17 en post-test (énigme non traitée en pré-test)



Contrairement à l'élève 1, l'élève 17 aborde la situation de manière plus pratique. Cet élève a habituellement de grandes difficultés en calcul posé. Schématiser lui a permis d'éviter l'opération, qui est pour lui une charge cognitive importante et le conduit souvent à une erreur de calcul. Nous pouvons constater que l'élève a une bonne représentation de la situation. La schématisation lui a permis de traiter l'énigme et de trouver la bonne réponse en faisant l'économie du calcul. Il est important de noter que cet élève n'a pas traité l'énigme en pré-test.

Production de l'élève 12 en pré-test

énigme 8

$$\begin{array}{r} 294 \\ 287 \\ \hline 07 \end{array}$$

Il aura besoin de 8 voitures

Production de l'élève 12 en post-test



En pré-test, l'élève 12 a adopté une procédure experte ; c'est-à-dire qu'il a été capable d'accéder directement au stade de la construction de la procédure, en choisissant une opération (la division). Sa production lors du post-test met en évidence l'influence de la séquence dédiée à la schématisation. Il a schématisé la situation, bien qu'il n'en ait pas besoin. Il a schématisé, sous forme de dessins, 7 voitures complètes et 1 voiture ne contenant qu'un élève. Cette étape a influencé sa procédure de résolution en privilégiant la multiplication et par conséquent le calcul mental.

Analysons maintenant les productions de l'élève 19, qui a résolu l'énigme en pré-test en utilisant un schéma, mais qui a échoué en post-test en passant directement par la division. Elle a oublié de traiter le reste de son opération.

Production de l'élève 19 en pré-test



Production de l'élève 19 en post-test

énigme n°8

$$\begin{array}{r} 29 \\ 287 \\ \hline 07 \end{array}$$

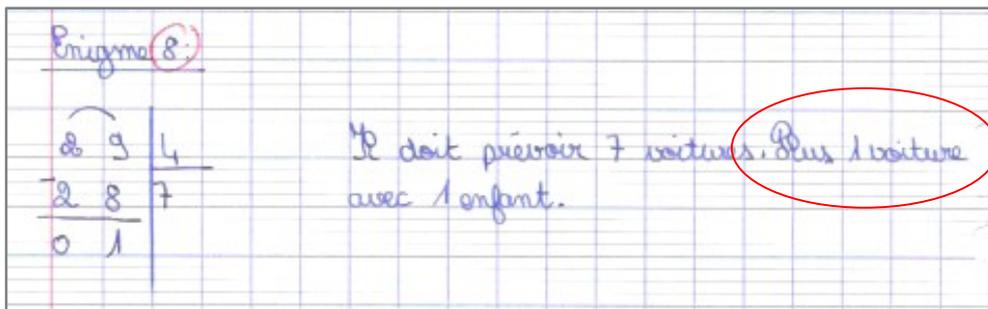
Il doit en prévoir 2

En pré-test, il a utilisé une addition réitérée, en comptant mentalement de 4 en 4 jusqu'à arriver à 29. Il n'a eu qu'à compter le nombre de blocs pour donner sa réponse.

En post-test, il a posé directement une division, se représentant la situation comme une situation de partage ; rappelons que c'est une stratégie experte. Cependant, il a omis de prendre en compte le reste (1) et a utilisé le résultat du quotient (7) pour répondre. Nous pouvons supposer qu'il n'a pas traité la dernière phase de résolution de problème, qui est la phase de vérification. En pré-test, la schématisation lui a probablement permis de vérifier instantanément, consciemment ou non, la solution proposée.

Le non-traitement du reste de la division a concerné 24% des élèves. Nous pouvons constater qu'utiliser la procédure de la division euclidienne, implique une phase de vérification. La production suivante de l'élève 16 témoigne, d'une relecture et d'une vérification de la plausibilité de son résultat. Elle a d'abord répondu : « Il doit prévoir 7 voitures. ». Puis, elle a ajouté dans un deuxième temps : « Plus 1 voiture avec 1 enfant. »

Production de l'élève 16 en pré-test

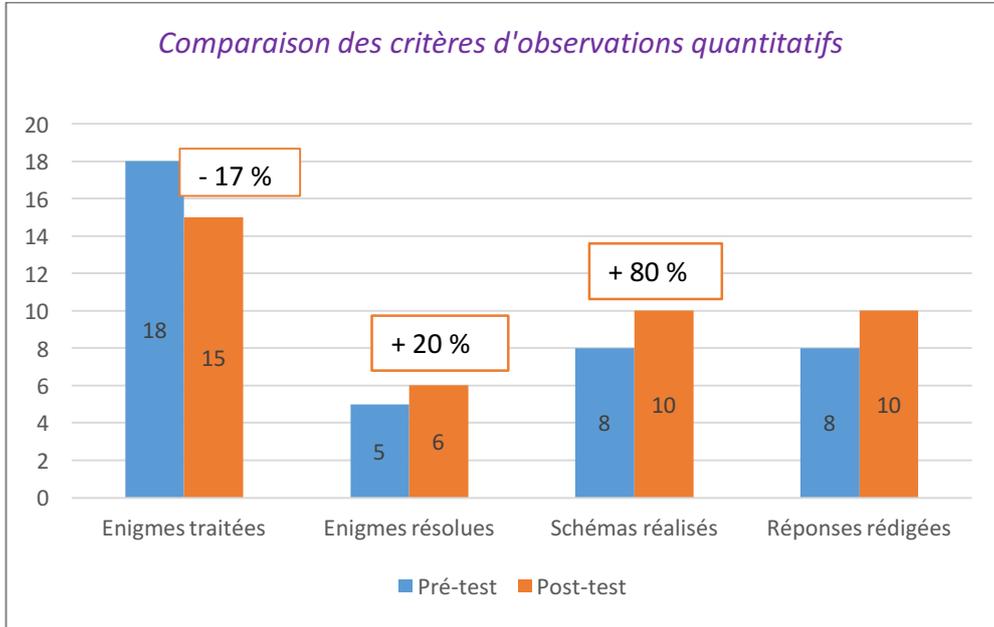


Conclusions de l'analyse de l'énigme N°8 :

- La schématisation a permis aux élèves en difficulté avec le calcul (mental et posé) d'éviter l'opération et de réussir l'énigme. La difficulté d'apprentissages a pu être compensée.
- La schématisation a permis de favoriser le calcul mental en permettant à l'élève de modifier sa stratégie de résolution du problème.
- La schématisation permet de donner du sens à l'opération, qui se distingue de la technique opératoire, caractérisée par la division avec reste.
- La schématisation permet de faire émerger des stratégies nouvelles en résolution de problèmes et constitue ainsi un outil supplémentaire pour l'élève au service de ses apprentissages.

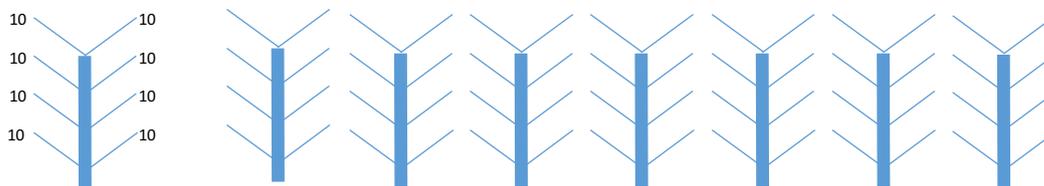
5.2.9. Analyse de l'énigme N°9

« Un chêne a 8 grosses branches. Chaque grosse branche donne naissance à 8 petites branches et sur chaque petite branche il y a 10 glands. Combien y a-t-il de glands en tout sur ce chêne ? »



Cette énigme présente une situation multiplicative. La difficulté principale est de se représenter la situation compte tenu d'un énoncé qui accumule les informations : d'abord un chêne, qui a 8 branches, qui elles-mêmes ont 8 branches, qui portent chacune 10 glands. Une schématisation complète serait trop coûteuse en temps. Il convient donc de schématiser complètement une grosse branche pour déterminer le nombre de glands avant de procéder au calcul.

Proposition de schématisation de la situation



Les erreurs des élèves autres que les erreurs de calcul :

- Ne calculer le nombre de glands que pour une seule grosse branche et non pour huit ; soit 80 glands (8×10)
- Confondre les branches et les glands dans les données numériques.

Énoncé 9

1 chêne
8 grosses branches
chaque grosse branche mesure 8 petites branches
10 glands sur chaque petite branche

8	
x 10	

80	

9)

branches

8	
x 8	

64	

37	
x 2	

74	

8 x 8 x 10 = 640 = 204 petite branches

Les procédures élèves observées dans les productions suivantes témoignent des différentes stratégies de résolution mises en place par les élèves :

- Calculer le nombre de branches ($8 \times 8 = 64$) et multiplier ce résultat par le nombre de glands par branche (10), pour trouver 640 glands. Cela représente un quart des procédures.

9) $8 \times 8 = 64$ $64 \times 10 = 640$ Il y a 640 glands sur le chêne.

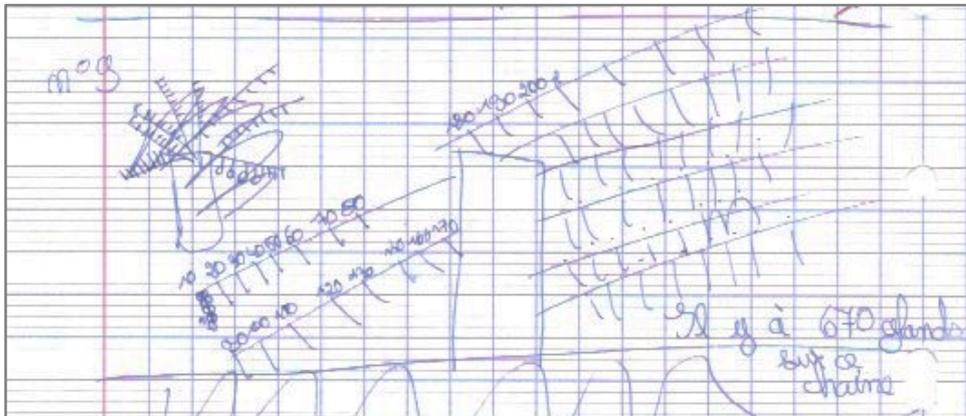
- Calculer le nombre de glands pour une grosse branche (80 glands). Ensuite, multiplier ce résultat par le nombre de grosses branches (8), pour trouver 640 glands.

10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 80
 $80 \times 8 = 640$
Il y a 640 glands sur ce chêne.

Production de l'élève 19 en pré-test

- Dessiner les branches avec les glands et compter.

La procédure est très coûteuse en temps et sujette aux erreurs de comptage.



Production de l'élève 5 en pré-test

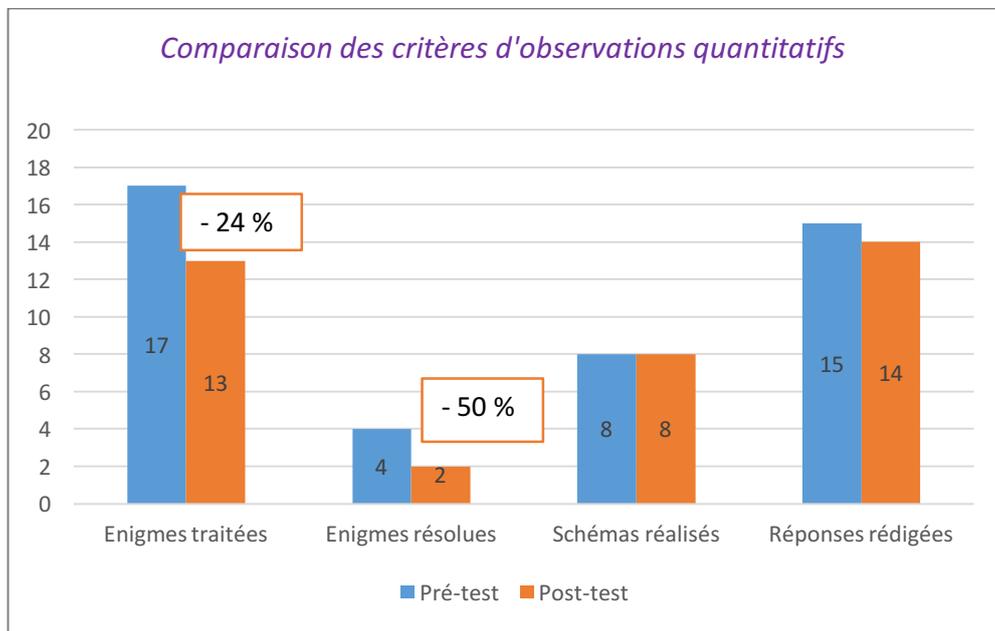
Les schémas proposés par les élèves relèvent tous du dessin (représentation iconique), plus ou moins soigné mais permettant de se représenter la situation. Aucune évolution notable n'est à souligner entre les deux tests.

Conclusions de l'analyse de l'énigme N°9 :

- Pour certains élèves, une schématisation partielle, parce que trop chronophage, entraîne un processus incomplet de résolution. (Schématiser une seule grosse branche peut conduire à ne comptabiliser que les glands de cette branche).
- Il n'y a pas d'amélioration visible des performances élèves entre les deux tests. Globalement, les productions de pré-test et de post-test sont similaires.
- Il est intéressant de souligner que 4 élèves qui avaient essayé de schématiser la situation en pré-test et qui n'avaient pas réussi, n'ont pas du tout traité l'énigme en post-test, certainement par manque de temps et par conscience de la difficulté.
- Une schématisation trop coûteuse en temps ne permet pas d'améliorer les performances des élèves et peut conduire à des erreurs de comptage et de calculs.

5.2.10. Analyse de l'énigme N°10

« Dans une boîte, on dispose 5 morceaux de sucre sur la longueur, 3 morceaux de sucre sur la largeur et 4 morceaux sur la hauteur. Combien de morceaux de sucre y a-t-il dans la boîte ? »

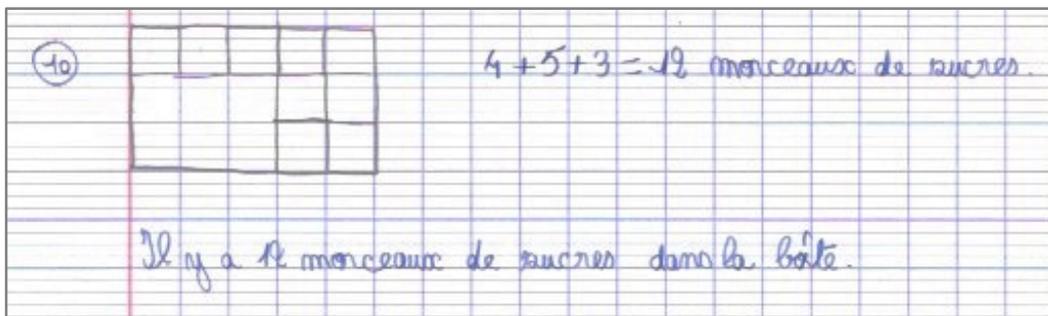


Cette énigme s'apparente à une situation de calcul de volume de pavé droit. Le calcul expert est de multiplier la longueur, par la largeur, par la hauteur : $5 \times 3 \times 4 = 60$ sucres. La difficulté pour les élèves est de se représenter la boîte de sucres en 3 dimensions et de faire du lien entre les données numériques de l'énigme.

Les erreurs les plus fréquentes sont liées à de mauvais choix d'opérations :

- $5 \times 4 \times 2 = 40$ $3 \times 4 \times 2 = 24$ $40 + 24 = 64$ sucres

- $4 + 5 + 3 = 12$ sucres



Production de l'élève 13 - pré-test

Les productions de l'élève 6, montrent une esquisse de schéma en pré-test, suivie de la bonne opération. Il montre aussi qu'en post-test, il a directement calculé son résultat. On comprend que le schéma l'a aidé à conceptualiser la situation et à valider le choix de son opération. Au même titre que l'énigme N°5, portant sur les différents menus possibles, il a certainement associé la situation à la bonne opération, automatisant ainsi la résolution du problème.

Production de l'élève 6 en pré-test

⑩

$15 \times 4 = 60$

$m^3 10$

$15 \times 4 = 60$

Il y a dans la boîte 60 morceaux.

Production de l'élève 6 en post-test

⑩

$5 \times 3 \times 4 = 60$

Il y a 60 morceaux de sucre dans la boîte.

L'élève 8 a réussi à trouver le bon nombre de morceaux de sucre en pré-test en automatisant le calcul. A contrario, la schématisation l'a induit en erreur lors du post-test. Il n'a pas réussi à se représenter l'angle de la boîte à sucre. Le sucre qui est dans l'angle doit être commun à la largeur et à la longueur. Il a ajouté une rangée de sucre supplémentaire pour répondre aux données de l'énoncé : 5 morceaux de sucre sur la longueur et 3 morceaux de sucre sur la largeur.

Ce point de l'énoncé est devenu pour lui un obstacle initié par une mauvaise schématisation. Son schéma traduit également ses essais-erreurs.

⑩

5

3

$3 \times 5 = 15$
 $15 \times 4 = 60$

Il y a 60 sucres dans la boîte.

Production de l'élève 8 en pré-test

Production de l'élève 8 en post-test

Handwritten student work for student 8. It features a 5x5 grid with numbers 1-20. Below the grid is a multiplication problem: $20 \times 4 = 80$. To the right is a diagram of a box with a horizontal line across the middle, labeled "epaisseur". Below the diagram is the text "Il y a 80 morceaux de sucres dans la boîte".

Les productions de l'élève 17 montrent comment la schématisation l'a conduit à faire le mauvais choix d'opération en post-test, alors que son pré-test était concluant. Ce fait permet de douter quand à la bonne représentation de la situation par l'élève. Peut-être a-t-il réussi en pré-test grâce à un transfert en associant automatiquement l'opération situation parce qu'il a déjà traité cette situation. Nous pouvons parler d'automatisme dans ce cas. Le fait de schématiser en post-test l'a obligé à se créer une image mentale créant probablement une surcharge cognitive, le conduisant à l'échec.

Production de l'élève 17 en pré-test

Handwritten student work for student 17 in the pre-test. It shows a multiplication problem: $5 \times 8 = 40$. Below it is a calculation: $5 \times 4 = 20$. At the bottom is the text "Il y a dans une boîte 20 morceaux de sucre."

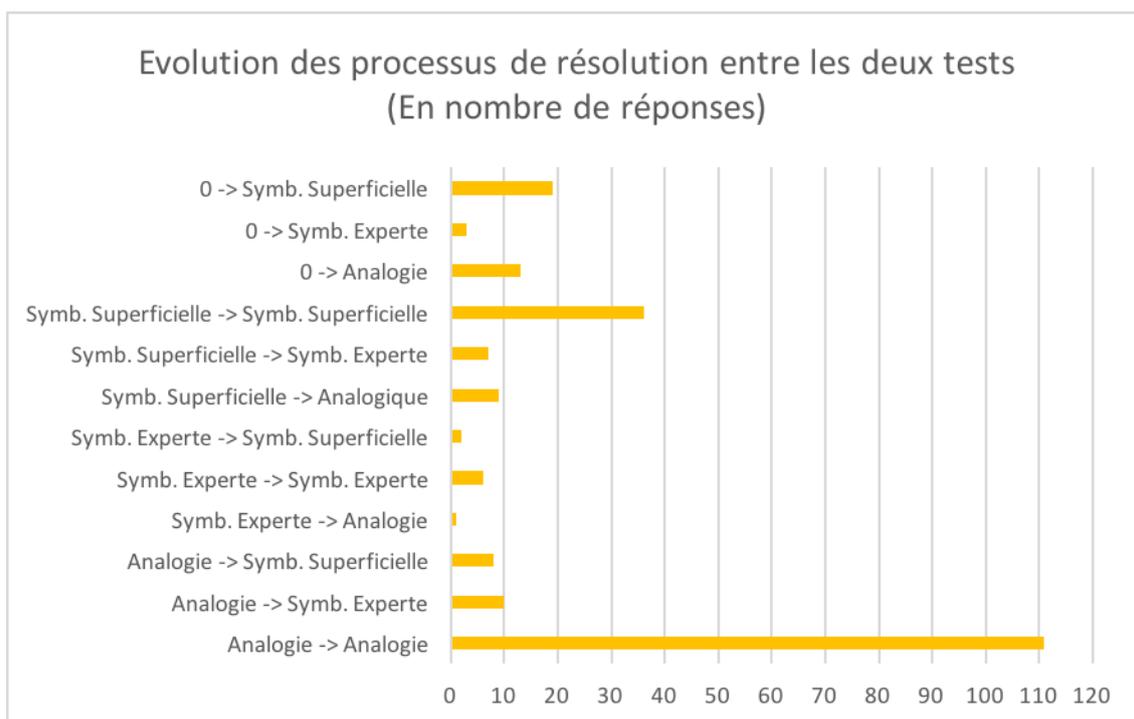
Production de l'élève 17 en post-test

Handwritten student work for student 17 in the post-test. It shows a diagram of a box labeled "Sucre" with a grid inside. To the right of the diagram is the text "il y a 12 il sucre".

Conclusions de l'analyse de l'énigme N°10 :

- C'est la seule énigme sur les dix qui présente des résultats en post-test inférieurs aux résultats du pré-test (2 bonnes réponses contre 4 en pré-test).
- La schématisation peut complexifier la tâche des élèves et s'imposer comme un obstacle à la résolution du problème en créant une surcharge cognitive si l'image mentale n'est pas en place correctement chez l'élève.
- La schématisation peut mettre en évidence des fragilités de représentation compensées par une automatisation du calcul (catégorisation de problèmes et automatisation de résolution).

Une synthèse pertinente de l'analyse des productions d'élèves, nous conduit à interpréter les éléments didactiques prégnants, en termes d'évolution des processus de résolution de problèmes. (Cf. *annexe 9*)



Nous pouvons constater que la résolution de problèmes par analogie est largement dominante ; elle pèse 50% de l'échantillon observé. De plus, la séquence expérimentée n'a fait qu'accroître sa proportion entre les deux tests de l'ordre de 23%.

La résolution par symbolisation partielle intervient en deuxième position et représente 16% de l'échantillon. Elle s'est également accrue entre les deux tests (+27%).

Les autres processus de résolution restent minoritaires dans les productions des élèves.

6. DISCUSSION, CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Résoudre une situation-problème requiert de la part d'un élève de traiter les informations d'un énoncé en recherchant des inférences, c'est-à-dire en traitant l'explicite pour décoder l'implicite.

Pour y parvenir, il doit prendre des indices (textuels, numériques, visuels...) et faire des analogies avec des situations connues et apprises. Il doit également interpréter les données pour faire des déductions.

Le processus est complexe et fait intervenir des compétences très variées : linguistiques, langagières, en numération, en calcul, mais aussi en schématisation.

Souvent, il est recommandé aux élèves, particulièrement ceux en difficulté, de faire un schéma pour mieux comprendre la situation et pour traiter les informations.

D'où notre question de recherche, qui a été de vérifier si la schématisation est une aide pour des élèves de CM2 en résolution de problème mathématique, ou bien au contraire, un obstacle. Un protocole d'observations a été mis en place sur un échantillon de vingt-et-un élèves de CM2, visant à mesurer les effets d'une séquence d'apprentissage dédiée à la schématisation sur la résolution de situations-problèmes.

Bien que le nombre de schémas réalisés ait progressé de 70%, la schématisation n'est pas la raison de l'accroissement de 65% des performances des élèves entre les deux tests. Nous avons constaté que l'amélioration des résultats concernait essentiellement des situations-problèmes semblables à celles travaillées pendant la séquence expérimentée. Nous pouvons conclure à une prédominance des processus de résolution de problème par analogie ou par automatisme, telle qu'évoquée par Jean Julo en 2002.

Notre hypothèse principale s'en trouve donc invalidée : la schématisation n'a pas permis aux élèves d'accroître leurs performances en résolution de problème.

Nous avons émis l'idée, en deuxième hypothèse, que la schématisation permettait de modifier le processus de résolution de problème. Cette hypothèse est invalidée par le constat que le processus de résolution par analogie est prépondérant dans les tests et qu'il n'a fait que s'accroître. Dans une moindre mesure, ce constat se vérifie avec le processus de symbolisation superficielle.

Une troisième hypothèse, nous amenait à penser que la schématisation permettait aux élèves de mieux de se représenter la situation-problème. Cette hypothèse n'a pas été vérifiée. Nous avons établi que des représentations initiales fausses aboutissaient à des schémas erronés. De plus, les schémas produits par les élèves se sont apparentés, pour beaucoup, à des dessins très figuratifs témoignant d'un faible niveau d'abstraction et donc d'une difficulté apparente dans le processus de symbolisation. Ces dessins figuratifs ont également témoigné de la part des élèves, d'une compréhension des attentes implicites de l'enseignante. On peut en conclure, qu'ils ont schématisé plus « pour faire plaisir à la maîtresse » que pour réellement résoudre le problème.

Notre dernière hypothèse supposait que la schématisation était un outil permettant à l'élève d'entrer plus facilement dans la phase de recherche. Cette hypothèse est confirmée par un accroissement de 10% d'énigmes traitées, mais aussi par un temps de recherche moyen par élève, passant de 43 minutes à 56 minutes.

Bien que notre recherche dégage des tendances de fond intéressantes, elle reste néanmoins exploratoire et ne saurait faire l'objet d'une généralisation, dans la mesure où elle concerne un échantillon particulièrement restreint. De plus, la séquence expérimentée s'est déroulée sur deux semaines, suivant un rythme intensif pour les élèves. Nous pouvons nous interroger sur la pérennité des apprentissages sur le long terme. Et enfin, l'interprétation des processus de résolution de problèmes sur la base de productions d'élèves reste subjective et mérite d'être approfondie grâce à des entretiens individuels verbalisés avec les élèves.

Cependant, l'analyse des résultats interprétés par élève soulève certaines questions didactiques, telles que le rôle des intelligences multiples, dans l'aide à la représentation mentale des situations-problèmes, et dans le passage du processus de représentation iconique au processus de représentation symbolique.

BIBLIOGRAPHIE

- BARUK S., (1985), L'âge du capitaine. De l'erreur en mathématiques, Edition du Seuil/Science ouverte, Paris.
- BRISSIAUD R., (2006). « Calcul et résolution de problèmes arithmétiques : il n'y a pas de paradis pédagogique perdu ». Café pédagogique, 30 mai.
- Bulletin officiel [B.O.] hors-série n° 3 du 19 juin 2008 - programme CE2-CM1-CM2.
- CAMUS-MUSQUER A., (2007). L'activité de schématisation réfléchie, Actualité de recherche en Education et en formation, Strasbourg.
- DEMONTY I., FAGNANT A., LEJONG M., (2004), Résoudre des problèmes : pas de problème !, Editions De Boeck, Bruxelles.
- DESCAVES A., (1992), Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes, Hachette éducation, Paris.
- FEYFANT A., (2015). La résolution de problèmes mathématiques au primaire. Dossier de veille de l'IFÉ, n° 105, novembre. Lyon : ENS de Lyon.
- GILIS D., GUILLAUME J.C., (1995), « La résolution de problèmes : un nouveau savoir scolaire ? ». SPIRALE, Revue de Recherches en Education, N° 15, p. 91-119.
- GOUANELLE C., SCHNEEBERGER P., (1996). Utilisation de schémas dans l'apprentissage de la biologie à l'école : la reproduction humaine. Aster N°22. Images et activité scientifiques, Paris.
- JULO J., (2002), Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ?, Grand N, N°69, (pp. 31-52).
- LAPARRA M., MARGOLINAS C., (2009). Le schéma : un écrit de savoir ? Pratiques (pp.51-82).
- MONNIER N., (2003), Les schémas dans les activités de résolution de problèmes, Grand N, 71, p. 26.

ANNEXES

Annexe 1

« Extrait des progressions pour le cycle 3, en résolution de problèmes. B.O.
Juin 2008 (source : www.eduscol.education.fr) »

Cours élémentaire deuxième année	Cours moyen première année	Cours moyen deuxième année
<i>Calcul – calculer mentalement</i>		
Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations.	Résoudre des problèmes engageant une démarche à une ou plusieurs étapes.	Résoudre des problèmes de plus en plus complexes.
<i>Grandeurs et mesures</i>		
Résoudre des problèmes dont la résolution implique les grandeurs ci-dessus.	Résoudre des problèmes dont la résolution implique éventuellement des conversions.	Résoudre des problèmes dont la résolution implique des conversions. Résoudre des problèmes dont la résolution implique simultanément des unités différentes de mesure.
<i>Organisation et gestion de données</i>		
Savoir organiser les données d'un problème en vue de sa résolution.	-	Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité et notamment des problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes ou aux conversions d'unité, en utilisant des procédures variées (dont la "règle de trois").

Annexe 2

« Classification des problèmes mathématiques par Gérard Vergnaud » (source : www.2.ac-poitiers.fr)

Famille addition/soustraction						
Les problèmes de catégorie « partie-partie-tout » ou de catégorie « réunion/extraction »		Les problèmes de catégorie « état initial-transformation-état final » ou de catégorie « augmentation/diminution »			Les problèmes « plus petit-écart-plus grand », ou de catégorie « comparaison »	
Catégorie réunion - recherche du tout	Catégorie extraction - recherche d'une partie	Catégorie état initial/transformation/état final – recherche de l'état final	Catégorie état initial/transformation/état final – recherche de l'état initial	Catégorie état initial/transformation/état final – recherche de la transformation	Catégorie comparaison – différence connue – recherche de la plus grande ou de la plus petite collection	Catégorie comparaison – différence inconnue – recherche de l'écart
Jean a 3 billes. Paul a 5 billes. Combien de billes ont-ils ensemble ?	Jean et Paul ont ensemble 8 billes. Paul a 5 billes. Combien Jean a-t-il de billes ?	Jean avait 3 billes. Il en a gagné 6 pendant la récréation. Combien a-t-il de billes maintenant ?	Jean a 14 billes. Il en a gagné 6 pendant la récréation. Combien avait-il de billes avant la récréation ?	Jean a 14 billes. Il joue aux billes pendant la récréation et rentre en classe avec 22 billes. Combien a-t-il gagné de billes pendant la récréation ?	Jean a 14 billes. Paul en a 5 de moins que Jean. Combien Paul a-t-il de billes ? Jean a 14 billes. Paul en a 5 de plus que Jean. Combien Paul a-t-il de billes ? Jean a 14 billes. Il en a 3 de plus que Paul. Combien Paul a-t-il de billes ? Jean a 14 billes. Il en a 5 de moins que Paul. Combien Paul a-t-il de billes ?	Jean a 14 billes et Paul en a 18. Combien Jean a-t-il de billes de moins que Paul ?

Famille multiplication/division			
Les réunions	Les partitions/les quotitions		Les comparaisons
Ce sont des problèmes connaissant la valeur d'une part, le nombre de parts pour une recherche du tout.	Ce sont des problèmes avec la connaissance du tout pour la recherche de la valeur d'une part ou du nombre de parts.		
Catégorie réunion – recherche du tout	Catégorie partition – nombre de parts connu, recherche de la valeur d'une part	Catégorie quotition - valeur de la part connue, recherche du nombre de parts	Catégorie comparaison - valeur de référence (multiplicande) et nombre de fois (multiplicateur) connus – recherche du cardinal d'une collection exprimée dans un rapport
Dans une tablette de chocolat, il y a 8 rangées de 6 carrés. Combien y a-t-il de carrés de chocolat ?	Vincent, François et Paul ont gagné ensemble 36 € au loto. Ils se partagent équitablement le gain. Combien vont-ils recevoir chacun ?	Dans une classe, il y a 28 élèves. Le maître constitue plusieurs équipes de 7 élèves. Combien peut-il constituer d'équipes ?	Jacques a 3 lapins. Paul en a 5 fois plus que lui. Combien Paul a-t-il de lapins ? Jacques a 3 lapins. C'est 3 fois moins que Paul. Combien Paul a-t-il de lapins ? Jacques a 12 lapins. Paul en a 3 fois moins que lui. Combien Paul a-t-il de lapins ?

Annexe 3

« Série de 10 énigmes, support du pré-test et du post-test »

Énigme n°1 :

Un pâtissier coupe une bûche glacée en 6 coups de couteau.
Combien de parts de bûche obtient-il ?

Énigme n°2 :

Un automobiliste est parti de Tours et est arrivé à Lille. Il est passé par Paris et Amiens, parcourant ainsi 500 km. Il s'est arrêté à Amiens pour déjeuner. Les distances sont les suivantes : Tours-Paris, 230 km ; Paris-Amiens, 150 km. Après son déjeuner, combien lui restait-il encore à parcourir avant d'atteindre Lille ?

Énigme n°3 :

Un bassin carré mesure 2,40m de côté. Calcule son périmètre. On met une clôture tout autour à un mètre du bord. Quelle est la longueur de cette clôture ?

Énigme n°4 :

Pendant 8 jours, Hélène part skier avec son grand frère de 12 ans et ses parents. La location du matériel est de 5€/jour/adulte et de 3€/jour/ enfant (de moins de 15 ans). Au delà de 4 jours, les prix baissent et passent à 4€/jour/ adulte et à 2€/jour/ enfant.
Combien les parents d'Hélène devront dépenser en tout pour la location de matériel ?

Énigme n°5 :

Un restaurant propose le menu du jour à 15€. Il y a 4 choix possibles pour l'entrée, 3 choix possibles pour le plat principal et 2 choix possibles pour le dessert. Combien de menus différents peut-il constituer ?

Énigme n°6 :

Un rallye cycliste comporte 105 km. Le départ est à 7 heures le matin. Les relais sont distants de 5 km. Chaque participant doit pointer au départ, à chaque relai et à l'arrivée. Combien de fois doit-il pointer ?

Énigme n°7 :

La distance entre chaque arrêt d'un autobus est d'environ 1500m. Au premier arrêt, 10 personnes montent ; au second arrêt, 3 personnes descendent ; au troisième arrêt, 5 personnes montent. Y a-t-il plus ou moins de voyageurs dans l'autobus quand il repart après ce troisième arrêt ? Combien en plus ou en moins ?

Énigme n°8 :

En prévision d'une sortie scolaire, M. Fournier veut repartir les 29 élèves de CM1 dans des voitures qui peuvent contenir 4 élèves chacune. Combien de voitures, M. Fournier doit-il prévoir ?

Énigme n°9 :

Un chêne a 8 grosses branches. Chaque grosse branche donne naissance à 8 petites branches et sur chaque petite branche il y a 10 glands. Combien y a-t-il de glands en tout sur ce chêne ?

Énigme n°10 :

Dans une boîte, on dispose 5 morceaux de sucre sur la longueur, 3 morceaux de sucre sur la largeur et 4 morceaux sur la hauteur. Combien de morceaux de sucre y a-t-il dans la boîte ?

Annexe 4

« Fiche de synthèse de la séquence expérimentée – Trace écrite élèves »

Auteurs : Demonty I., Fagnant A., Lejong M.

Source : Résoudre des problèmes : pas de problème !, Editions De Boeck, 2004, Bruxelles.



Quelques exemples de synthèse.



La phase de représentation du problème

À quoi faut-il être attentif lorsque je représente un problème ?

Représenter un problème, c'est...

faire un dessin,
un schéma

faire
un tableau

expliquer avec
ses mots

Tout n'est pas important dans un problème... Il faut :

des données
importantes
(pas toujours des
nombres)

quelque chose qui
lie les données
(attention aux
mots-pièges)

la (ou les)
question(s)



La phase de représentation du problème

À quoi faut-il être attentif lorsque je représente un problème ?

Un dessin,
un schéma

Un tableau

Une explication

**La représentation
d'un problème contient :**

Des données utiles
(pas toujours toutes
les données
numériques)

Des relations entre
les données

La question

Annexe 5

« Situations travaillées pendant la séquence d'apprentissage expérimentée »

Situation de la tenue vestimentaire

J'ai 5 pulls, 4 pantalons et 3 paires de chaussures. **Combien de tenues différentes puis-je porter ?**

Situation du ruban à découper

On découpe un ruban de 20 m avec 4 coups de ciseaux, régulièrement espacés sur toute la longueur. **Quelle est la longueur de chaque morceau ?**

Situation du partage de la pizza

Mario a partagé une pizza en 12 morceaux égaux. Il en a donné une part à chacun de ses invités et à lui-même. Après la distribution, il reste un quart de pizza. **Combien Mario a-t-il d'invités ?**

Situation de la taille de Décimus, Millie et Logix

Décimus, Millie et Logix comparent leurs tailles. Le plus grand, Décimus, mesure 1,53 m. La différence de taille entre le plus petit, Logix et Décimus est de 0,18 m. La différence de taille entre Décimus et Millie est la même que celle entre Millie et Logix. **Quelle est la taille de chacun ?**

Situation du partage des économies

Pierre, Lucie et Guillaume ont regroupé leurs économies. Ils ont 240€. Lucien a deux fois plus d'argent que Pierre et Pierre trois fois moins que Guillaume. **Combien d'argent avait chacun ?**

Situation des achats de Nicolas

Nicolas fait des achats. Il achète un sac de sport et une planche à roulettes qui vaut 10€ de plus que le sac de sport. Il achète aussi une paire de rollers qui est deux fois plus chère que le sac de sport. Pour payer ses achats, il fait un chèque de 210€. **Combien coûte chacun des trois articles achetés par Nicolas ?**

Situation du Géant Tneïtok.

La légende raconte que, dans les grandes plaines de Russie, le terrible géant Tneïtok était si grand qu'il ne pouvait se déplacer que par bonds de 24 vestes (veste : mesure russe qui vaut 1 km). **Se trouvant à 5940 vestes de son château, en combien de bonds pouvait-il l'atteindre ?**

Annexe 6

Auteurs : Demonty I., Fagnant A., Lejong M.

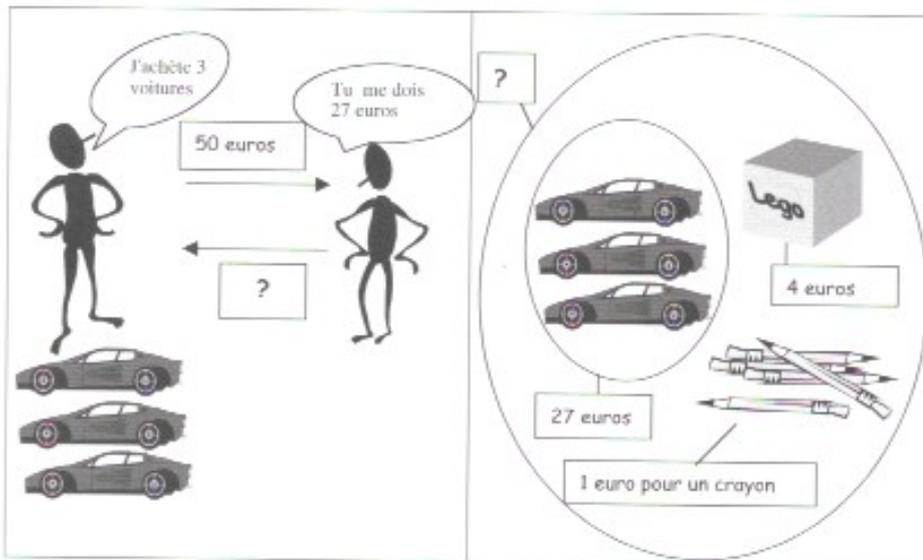
Source : Résoudre des problèmes : pas de problème !, Editions De Boeck, 2004, Bruxelles.

Le grand magasin

Lis l'énoncé suivant

Thomas entre dans un grand magasin. Il est 9 h 30. Il a un billet de 50 euros dans son portefeuille. Il choisit trois petites voitures. Le prix est indiqué : 9 euros la voiture. La caissière lui demande 27 euros. Au rayon des jeux de construction, Thomas achète une boîte de legos à 4 euros. Il regarde ensuite le prix des crayons. Un crayon coûte 1 euro, il en choisit 5. Il regarde l'heure : vite, il doit se dépêcher car sa maman l'attend devant le magasin à 10 h 15, dans 5 minutes !

Céline a dessiné le problème de deux façons différentes afin de répondre à deux questions. Retrouve la question correspondant à chaque dessin et réponds-y.



Question correspondant au premier dessin et réponse à la question :

.....

Question correspondant au deuxième dessin et réponse à la question :

.....

Annexe 7

Auteurs : Demonty I., Fagnant A., Lejong M.

Source : Résoudre des problèmes : pas de problème !, Editions De Boeck, 2004, Bruxelles.

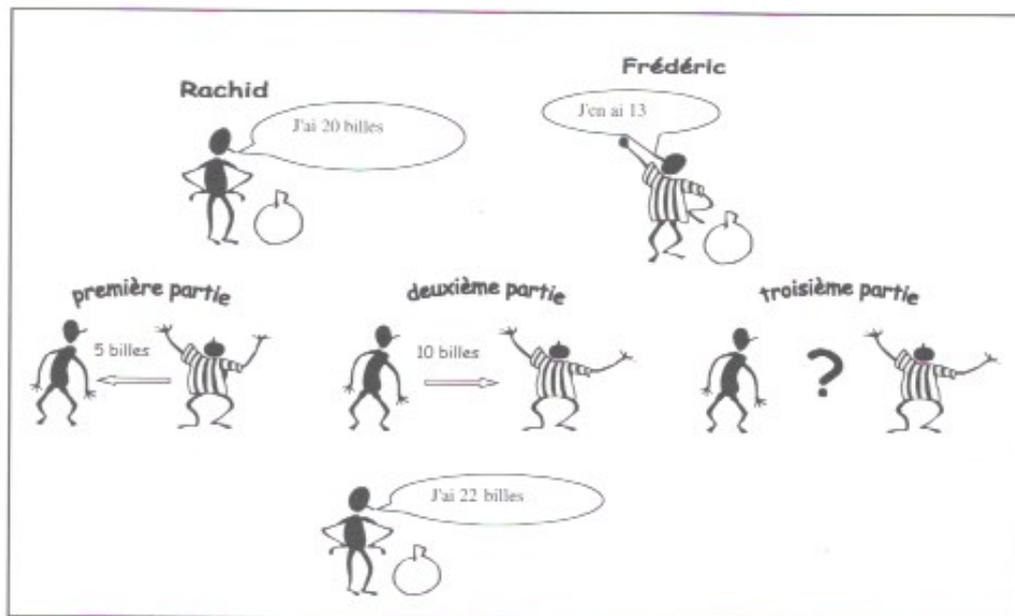
Rachid et Frédéric jouent aux billes

Lis le problème suivant :

Rachid a un gros sac de 20 billes. Frédéric, lui, en a 13. A la récréation, les deux enfants jouent une première partie : Frédéric gagne 5 billes. Les deux amis jouent une deuxième partie et Rachid perd 10 billes. Après-midi, ils jouent encore une nouvelle partie tous les deux. Quand Rachid rentre chez lui, il compte ses billes. Il en a 22.

Rachid a-t-il gagné ou perdu des billes lors de la troisième partie ? Combien ?

Lucas a dessiné le problème. Il a commis une erreur. Corrige-la et résous le problème.



.....

.....

Annexe 8

Auteurs : Demonty I., Fagnant A., Lejong M.

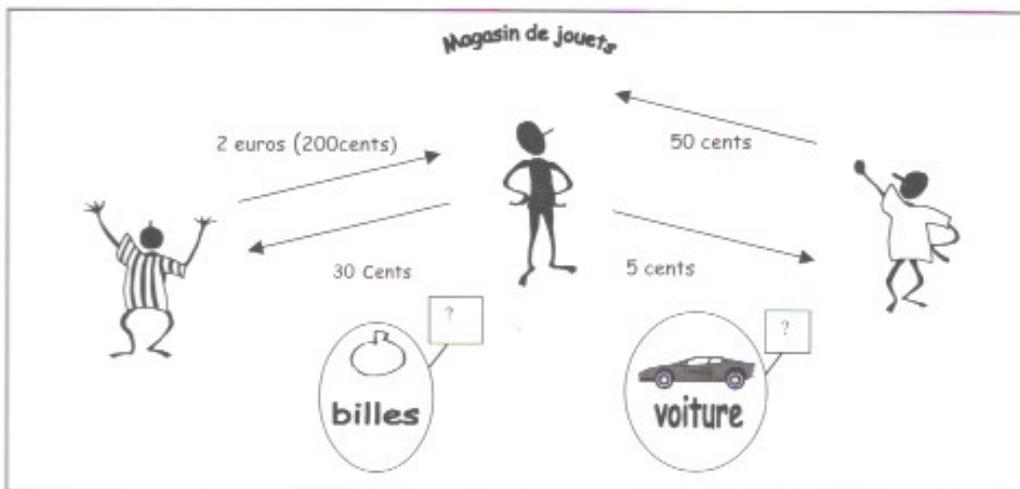
Source : Résoudre des problèmes : pas de problème !, Editions De Boeck, 2004, Bruxelles.

Le magasin de jouets

Lis le problème suivant :

C'est mercredi, Kévin et Stéphane se promènent dans le quartier. Ils rentrent dans un magasin de jouets. Ils ne savent pas ce qu'ils peuvent acheter avec l'argent dont ils disposent. Le marchand leur propose d'acheter un sac de billes et une petite voiture.

Anna a dessiné la situation. Essaie de bien comprendre son dessin puis, à l'aide du dessin, complète l'énoncé du problème.



C'est mercredi, Kévin et Stéphane se promènent dans le quartier. Ils rentrent dans le magasin de jouets. Ils ne savent pas ce qu'ils peuvent acheter. Le marchand s'impatiente. Il dit à Kévin :

- « Toi , tu as euros, tu peux acheter »

- « D'accord » répond Kévin.

Le marchand lui rend 30 cents. Il s'adresse ensuite à Stéphane :

- « A toi maintenant, tu as cents. Tu peux acheter une petite voiture ».

- « D'accord » répond Stéphane.

Le marchand lui rend cents.

Les garçons essaient de savoir combien coûtent un sac de billes et une petite voiture. Et ils y arrivent ! Fais comme eux, trouve le prix d'une petite voiture et d'un sac de billes.

Combien coûte un sac de billes et quel est le prix de la petite voiture ?

.....
.....

