



UNIVERSITÉ DE NANTES



**Master « Métiers de l'Enseignement,
de l'Éducation et de la Formation »
Mention second degré
Parcours: Mathématiques**

**L'utilisation des jeux pour l'apprentissage des mathématiques
dans l'enseignement secondaire**

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de master

soutenu par
Jonathan Clarté
le 28 juin 2016

en présence de la commission de soutenance composée de :
Christine CHOQUET, directeur de mémoire
François DUCROT, membre de la commission



UNIVERSITÉ DE NANTES



ENGAGEMENT DE NON PLAGIAT

Je, soussigné **Jonathan Clarté**, déclare être pleinement conscient que le plagiat de documents ou d'une partie d'un document publiés sur toutes formes de support, y compris l'internet, constitue une violation des droits d'auteur ainsi qu'une fraude caractérisée. En conséquence, je m'engage à citer toutes les sources que j'ai utilisées pour écrire ce rapport ou mémoire.

Signature :

Résumé : dans ce travail nous nous demandons comment et pourquoi utiliser le jeu en classe de mathématiques. Le jeu étant une activité de loisir, il semble incompatible avec l'activité scolaire. Mais dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques, la situation de jeu peut être pertinente en tant que situation de recherche dès lors qu'elle puisse servir de base à un travail mathématique. Nous définissons des critères d'analyse de jeux et de situations de jeux qui pourront nous aider à construire des activités de jeux pertinentes. Nous étudions ensuite différentes mises en places d'activités de jeux dans un contexte de classe en Lycée.

Table des matières

Introduction : pourquoi le jeu.....	5
I. Première partie : approche théorique.....	7
1. Une brève histoire des jeux.....	7
2. Les jeux aujourd'hui, contexte socio-culturel.....	7
3. Les jeux et les mathématiques.....	10
4. La dialectique jeu/apprentissage.....	11
5. Un cadre didactique pour parler du jeu dans l'apprentissage des mathématiques.....	12
6. Game design / Ingénierie didactique, même combat ?.....	14
II. Deuxième partie : éléments pour une classification des jeux à l'usage des enseignants de mathématiques.....	16
1. Les critères de ludicité.....	16
2. Jeux de loisir, jeux pédagogiques et récréations mathématiques.....	18
3. Prémisses d'une classification.....	20
III. Troisième partie : utiliser le jeu en contexte scolaire.....	24
1. Différentes manières d'aborder le jeu.....	24
2. Réflexions sur l'utilisation du jeu en contexte scolaire à travers 3 expérimentations en classe de seconde.....	27
IV. Conclusion : ouverture vers une recherche rigoureuse et scientifique.....	35
Bibliographie.....	37
Annexe 1 : activité de recherche « jeu du Lièvre et de la tortue ».....	38
Annexe 2 : fiche d'analyse de jeu.....	39
Annexe 3 : activité jeu de Nim.....	40
Annexe 4 : analyse mathématique du jeu de Nim.....	41
Le jeu de Nim fini.....	41
Analyse stratégique.....	41

Introduction : pourquoi le jeu

Après une formation initiale en mathématiques, j'ai travaillé pendant 5 ans dans le milieu du jeu en tant que ludothécaire. Ces années de travail et de réflexion sur le jeu en tant que pratique culturelle m'ont amené à défendre cette activité souvent malmenée. Le regard que j'ai pu porter sur le jeu au cours de mon activité professionnelle m'a amené à deux constats quant à la manière dont le jeu peut être perçu par d'autres professionnels, notamment par ceux des domaines de l'éducation et de l'enseignement. D'un côté, le jeu est considéré comme une pratique récréative, accessoire, voire inutile et improductive. Le jeu serait du temps perdu, une activité insignifiante et, dans le meilleur des cas, inutile. Lorsqu'il ne s'agit pas carrément d'une activité régressive ou néfaste. C'est notamment une opinion communément admise pour beaucoup d'activités ludiques telles que les jeux vidéo, les jeux symboliques de l'enfant, les jeux sportifs, etc. Ces pratiques de jeu sont souvent opposées aux activités culturelles « saines » car nécessitant du travail et des efforts : sport, musique, études, ... D'un autre côté, de nombreux professionnels de l'éducation et de la formation considèrent le jeu comme un outil formidable au service d'une pédagogie moderne et innovante. Pas une semaine ne passe sans que l'on n'entende parler d'un *serious game* censé nous apprendre les économies d'eau ou d'énergie ou bien la meilleure manière de travailler avec nos collaborateurs. On nous sert également du jeu éducatif à toutes les sauces, pour apprendre le calcul ou la géographie ou les règles grammaticales. Les différentes positions exprimées à propos de l'utilisation de pratiques ludiques dans des contextes d'apprentissages sont souvent passionnées et relèvent rarement d'une analyse rigoureuse et suffisamment large quant aux pratiques ludiques considérées. Pour ouvrir sur les questions que je me suis posé dans ce travail, je pars de plusieurs constats qui m'interpellent quand à la relation entre le jeu et l'apprentissage des mathématiques :

- en premier lieu, historiquement les jeux sont un objet d'étude prolifique en mathématiques, qu'il s'agisse de la théorie des jeux combinatoire comme de la théorie des jeux en économie

- en second lieu, beaucoup de jeux conçus aujourd'hui, notamment dans le domaine du jeu vidéo, font appel dans leur conception à des outils mathématiques avancés : analyse et probabilités pour l'équilibrage de jeux, disjonction de cas, récursivité, analyse statistique, géométrie vectorielle et spatiale pour la modélisation, etc.

- enfin, le jeu est une pratique culturelle qui nécessite des notions mathématiques au moins élémentaires pour beaucoup de jeux : assimilation d'un système formel, numération, ...

Ces constats sont couplés au fait qu'il existerait apparemment de nombreux jeux

pédagogiques ou éducatifs utilisés par des professeurs en classe pour apprendre les mathématiques avec d'autres outils que les exercices ou les problèmes « habituels ». On peut trouver ces types de jeux dans les revues de l'APMEP par exemple. Cela m'amène à me poser les questions suivantes :

- Dans quel mesure le jeu permet-il de développer des compétences mathématiques ?

- Comment mettre en place du jeu en classe ?

Mon travail ne permettra pas de répondre de manière générale à ces deux questions mais permettra de dresser modestement certains contours quand à l'utilisation du jeu dans la perspective d'un apprentissage des mathématiques. Les hypothèses que je suivrais pour mon travail sont les suivantes :

- Il est nécessaire de séparer, dans l'activité en classe, le temps de jeu du temps de travail mathématique.

- Tous les jeux ne se valent pas et il convient de choisir avec soin les jeux autant que le contexte de l'activité pour une activité mathématique donnée.

I. Première partie : approche théorique

1. Une brève histoire des jeux

Les cultures humaines ont des activités de jeux depuis toujours. Les traces d'objets ludiques les plus anciennes remontent à la préhistoire. Au cours de l'histoire, les individus ont joué, qu'il s'agisse d'enfants comme d'adultes. On sait avec quoi mais on ne sait pas forcément à quels jeux. En effet, les jeux ont longtemps été de tradition orale, plutôt informels, et surtout trop insignifiants pour la plupart pour être notés par écrit. Seuls subsistent les éléments de jeu avec lesquels les individus jouaient. Différents travaux archéologiques ont tenté tant bien que mal de reconstituer des règles de jeux anciens. Mais, si l'on ne connaît pas forcément les règles de ces jeux passés, on sait que les jeux ont été pratiqués dans toutes les cultures, et surtout dans toutes les classes sociales. Certes, les jeux étaient différents : de la soule médiévale aux échecs, il y a un grand écart. Qui plus est, les jeux ont pour beaucoup été associés à des valeurs diverses. Certains nourriraient l'esprit et la culture des hommes, tandis que d'autres ne seraient que vices et pêchés. Caillois (1967) classe d'ailleurs les jeux selon des critères de valeurs morales et civilisationnelles. Les jeux institutionnalisés (sport, théâtre) étant plus « nobles » que les jeux qui ne le sont pas (affrontement physique, jeux de faire-semblant). Ces registres de valeurs dans la pratique des jeux sont restés ancrés dans les esprits et aujourd'hui encore les pratiques des jeux sont questionnées dans leurs valeurs et dans leur légitimité.

2. Les jeux aujourd'hui, contexte socio-culturel

Aujourd'hui, le jeu s'est fortement développé dans nos sociétés de loisir. Qu'il s'agisse de jeux télévisés, de jeux vidéos, de jeux de société, des jouets des enfants ou de nombreuses pratiques ludiques spécialisées, le jeu est devenu une pratique culturelle dont on ne peut nier la présence et l'importance. Par ailleurs, on constate également l'apparition de pratiques dites « de jeu » dans des contextes qui ne semblent pas particulièrement dévolus au loisir, comme la formation, le management ou la gestion d'entreprise. Ces jeux sont appelés *serious games*, ou jeux sérieux, et ont des objectifs et des finalités, ce qui n'est à priori pas le cas pour les jeux tels que nous les connaissons et les dénommons jusqu'à aujourd'hui.

La variété et l'éventail des pratiques ludiques ne permettent pas d'en réduire la description à un ensemble de caractéristiques données. Brougère (2005) renvoie la définition du jeu à la parabole de Wittgenstein et les airs de familles¹ : les membres d'une même famille n'ont pas une caractéristique commune, mais les uns ont le même nez, d'autres ont des yeux similaires, ou des traits voisins, et cette proximité de proche en proche, plus floue, moins catégorielle, est plus pertinente pour décrire le jeu qu'un enfermement dans des caractéristiques. Car le jeu renvoie à des

1 L. Wittgenstein *in* Recherches philosophiques (1953)

réalités multiples qui ont toutes fait couler des litres d'encre. Si, en mathématiques, on s'intéresse essentiellement aux mécanismes et aux règles des jeux, aux critères de décisions qui guident le joueur vers une potentielle victoire, on ne peut raisonnablement parler de jeu sans exprimer également d'autres éléments fondamentaux et constitutifs de ce qui fait jeu. Ainsi, le jeu est toujours une activité récréative, une activité de loisir, une activité à laquelle on adhère et qui opère une séparation de la réalité ordinaire. Entrer dans le jeu c'est, pour un temps, entrer dans un autre monde, fictif, et agir à l'intérieur de celui-ci pour un temps donné. Le jeu est également une affaire sociale. Le jeu se joue bien souvent à plusieurs et on y vit des interactions magnifiées et elle même séparées de la réalité ordinaire. Dans le jeu on peut plus facilement trahir, mentir, tromper, négocier, séduire, improviser, et ce, sans conséquence lorsque l'on sort du jeu. Bien souvent, nos amis comprennent qu'on les ai trahis dans un jeu. On dit que « ce n'est qu'un jeu », et nos amis redeviennent nos amis lorsqu'on en sort. Et tout le monde, enfant comme adulte, arrive généralement à effectuer cette différenciation entre jeu et réalité. Ce qui est important à retenir dans ce qui vient d'être dit c'est que, en utilisant le jeu dans un contexte d'apprentissage des mathématiques, il est important de ne pas réduire la réalité des jeux aux composantes d'apprentissage et de mathématiques. Les autres réalités du jeu (bien culturel, espace imaginaire, activité sociale, ...) doivent également être considérées. Un parallèle serait d'étudier une œuvre littéraire ou poétique en n'étudiant que la grammaire et les figures de style sans prendre en compte le plaisir de la lecture, la fiction qui est racontée, ou le contexte socio-historique dans lequel l'œuvre est créée. Utiliser le jeu, c'est prendre en considération l'éventail de ces réalités.

Nous utiliserons dans ce travail les définition du jeu telles qu'elles sont exprimées par R. Caillois (1967) et G. Brougère (2005). La classification de Caillois nous permet d'envisager des pistes de classification qui pourront guider notre approche. Les critères exprimés par G. Brougère sont quant à eux les plus récents et les plus efficaces pour parler du jeu aujourd'hui.

Tout d'abord, considérons que le vocable de « jeu » en français renvoie à trois concepts distincts :

- Le « jeu » en tant qu'objet matériel, c'est à dire l'ensemble d'éléments qui permettent de jouer à un ou plusieurs jeux spécifiques : par exemple un jeu de cartes, un jeu de dés, ...
- Le « jeu » en tant qu'un ensemble de matériel et de règles abstraites qui permettent de jouer. Par exemple le jeu du Monopoly, le jeu des Colons de Catane, ...
- Le « jeu » en tant qu'activité, en tant que *praxis* des individus en situation. Nous verrons par la suite que c'est au regard de cette conception et ce sens du jeu que nous pouvons avoir une véritable réflexion sur l'intérêt didactique du jeu en classe de mathématiques.

Au regard donc de ce concept de jeu, abordons maintenant la définition telle que Gilles Brougère la présente :

Les cinq critères qui font jeu sont :

- le **second degré, ou fiction réelle**, c'est à dire que le jeu est une activité séparée de l'ordinaire, du premier degré. Les objets manipulés, et le sens des phrases prononcées, est relatif à ce qui se passe à l'intérieur du jeu. On y retrouve le concept de *cercle magique* telle que le formule J. Huizinga (1938) dans *Homo Ludens*. Pour être dans le jeu, le joueur considère les éléments du jeu de façon très sérieuse, tout en sachant en même temps qu'il ne s'agit que d'un jeu. On retrouve ici une démarche de « faire-semblant » qui est véritablement centrale. Ce critère est également à rapprocher de la notion de suspension d'incrédulité² que l'on retrouve dans l'expérience fictionnelle (cinéma, livre, conte, ...)

- la **décision**, est un critère qui s'établit à deux niveaux : il y a d'un côté la décision pour le joueur d'adhérer au jeu. Le joueur est le seul qui a la possibilité de se dire en jeu. C'est un choix volontaire et conscient. Il ne peut être forcé à jouer. La seconde composante de la décision est le fait qu'au sein de l'espace ludique, le joueur est en situation de puissance : ce sont ses décisions (généralement en interaction avec celles des autres joueurs) qui font évoluer la situation de jeu. Jouer, c'est nécessairement agir sur l'issue.

- la **règle du jeu** a plusieurs formes et s'établit à plusieurs niveaux. Il s'agit des structures sous-jacentes qui permettent une articulation entre les individus et permettent de prendre en compte les décisions des individus. Ces règles sont pour parties des règles explicites (règles de déplacement des pions, procédures de significations des éléments symboliques du jeu, etc.) et en partie implicites (règles non-dites du jeu symbolique chez l'enfant, règles sociales régissant le comportement des joueurs à une table, rituels et habitudes, ...)

- la **frivolité**. Le jeu ne relève pas d'une activité productive. Le jeu, ce n'est pas grave. Cela rejoint le second degré, où tout en étant extrêmement sérieux dans son espace propre, le jeu n'a aucune conséquence sur le monde hors du jeu. Cet élément constitutif est à la fois nécessaire et complexe, notamment dans les réflexions sur l'utilisation du jeu dans les démarches d'apprentissage puisqu'il questionne l'impossible utilitarisation d'une activité qui ne peut être qu'improductive.

- l'**incertitude**. L'issue d'un jeu n'est jamais déterminée à l'avance, mais résulte des événements qui ont lieu à l'intérieur du jeu, donc bien souvent à partir des décisions et des actions des participants, modulées parfois par des éléments extérieurs (hasard notamment).

2 La suspension d'incrédulité est l'action mentale effectuée par un individu pour mettre de côté son scepticisme le temps de l'expérience d'une œuvre de fiction

Il peut également être intéressant d'utiliser un des couples de classification des jeux introduits par Roger Caillois : l'**Agon** et l'**Alea**. Selon Caillois, l'Agon représente les jeux fondés sur la compétition réglée et équitable. Il s'agit principalement de jeux d'affrontement entre les joueurs où sont mises en avant les compétences de chaque participant. A l'inverse, les jeux de type Alea sont les jeux de hasard, où les participants s'en remettent à la chance pour gagner. Dès lors, ce ne sont pas les compétences individuelles des joueurs qui déterminent l'issue du jeu. Il convient évidemment de remarquer que l'étude des probabilités remet en question l'inopérance des compétences du joueur dans le cadre des jeux de type Alea. Néanmoins, cette dyade Agon/Alea reste un concept intéressant pour décrire et analyser les différents types de jeux et d'activités que nous rencontrerons.

3. Les jeux et les mathématiques

Pour parler de la relation entre jeux et mathématiques, nous aborderons dans un premier temps les relations que ces deux univers ont eu au cours de l'histoire. Tout d'abord, beaucoup de jeux à règles (nous reprenons ici l'appellation utilisée dans le système de classification des jeux ESAR) utilisent des éléments de mathématiques depuis très longtemps. En premier lieu les nombres : nombres d'osselets, nombre de points sur un dé, etc. Mais en dehors des nombres, les jeux étant affaire de décision, il convient pour chaque joueur d'optimiser sa décision afin de s'assurer autant que possible la victoire. C'est là tout l'art du raisonnement appliqué au ludique, généralement appelé stratégie. L'étude stratégique des jeux commence très tôt. Pour ne citer que le cas du jeu d'échec, les premiers traités sur ce jeu datent du 9^e siècle³, et d'autres jeux ont sûrement été également étudiés. Mais la place des jeux dans la société est souvent ambiguë, entre vif intérêt et dénonciation parce que cause de vice. D'ailleurs, malgré ces dénonciations (le jeu d'échec est condamné par le Concile de Paris en 1212), les jeux gardent une place importantes dans les sociétés. Ce même jeu d'échec, bien qu'apostasié, est un jeu pratiqué par l'aristocratie comme moyen d'entraînement et de formation de l'esprit. On décèle d'ailleurs là un lien existant déjà entre jeu et apprentissage. Toujours est-il que pour beaucoup, le jeu, ou tout du moins certains jeux, sont des situations de raisonnement qui côtoient par la logique et la déduction, les raisonnements mathématiques. L'intérêt des mathématiciens pour les jeux est peut être ancien, mais le formalisme mathématique appliqué aux situations de jeu est vraisemblablement plus récent.

En premier lieu, citons les jeux de hasard comme situation de problème que les mathématiciens ont rencontré. La notion de hasard, qui reste mystérieuse pour les personnes de l'époque, y compris les mathématiciens et les philosophes, est au cœur de certaines préoccupations. Et pour ces préoccupations, ni la géométrie (qui traite de problèmes de configuration spatiale), ni

3 *Kitab ash-shatranj* par Al-Adli vers 842

l'algèbre (qui traite de problèmes de grandeurs numériques), n'offre d'outils adaptés à l'analyse de ces problèmes. C'est ainsi qu'à partir du 17^e siècle, des mathématiciens (comme par exemple Blaise Pascal et Pierre de Fermat), posent les premières pierres de la théorie des probabilités.

En second lieu, les jeux de stratégie, les jeux sans hasard, semblent n'avoir été étudiés rigoureusement avec une démarche mathématique que bien plus tardivement. L. Rougetet propose par exemple 1901 comme étape importante pour la théorie des jeux combinatoire, date à laquelle C. L. Bouton publie un algorithme de résolution du jeu de Nim. Mais cette théorie des jeux combinatoires se développe surtout tout au long du 20^e siècle avec les travaux de nombreux mathématiciens, et surtout avec l'essor de l'informatique. Pour illustration, le Nimrod (1951) était un ordinateur programmé spécialement pour résoudre des parties du jeu de Nim.

Dans la seconde moitié du 20^e siècle se structure une nouvelle théorie au croisement entre mathématiques et économie, qui prend ses racines dans la théorie des jeux combinatoires et dans les théories sur les jeux en probabilité, mais en prenant en compte la présence et l'action de plusieurs joueurs (ou agents). La théorie des jeux n'a alors plus grand-chose à voir avec les jeux de loisir et est plutôt devenue un outil utilisé particulièrement sur les places financières et comme outil d'analyse des systèmes économiques. Nous n'aborderons pas ici en détail les tenants et les aboutissants de la théorie des jeux, ni les systèmes de classification et de représentations de jeux dans le cadre de cette théorie.

4. La dialectique jeu/apprentissage

Le premier problème auquel on est confronté pour l'utilisation du jeu en classe est le fait que d'un côté le temps de classe, le temps scolaire, est un temps contraint, un temps de travail et d'activité contrainte pour les élèves. On attend de la part des élèves des activités précises qui sont tout sauf libres. Ils n'ont pas le choix de leur activité. Ils sont soumis au contrat didactique (de la classe), au contrat scolaire (de l'établissement). L'activité ludique, est quant à elle une activité de loisir, une activité qui se déroule dans un temps libéré des contraintes. On ébauche ici la dialectique qui existe entre jeu et apprentissage : le jeu est une activité de temps libre, l'apprentissage (scolaire) est une activité de temps contraint. L'existence de cette dialectique ne rend pas impossible l'activité de jeu en classe, parce que l'activité de jeu est une activité soumise à des contraintes – à priori librement choisies, et au sein d'un temps de classe soumis à des contraintes, des espaces aménagés de liberté peuvent exister pour les élèves.

Une hypothèse que nous formulons est que, si l'on souhaite utiliser du jeu en classe ou en contexte d'apprentissage, il est important de distinguer les temps de jeu des temps de travail. Il n'est pas impossible de réserver un temps plus ou moins long au cours duquel les élèves vont être en

situation de jeu. Dès lors, ils ne sont plus dans une posture d'apprenant. La situation se situe dans un cadre adidactique tel que nous le définissons plus loin. Cela ne veut pas dire qu'aucun n'élève n'effectue de raisonnement mathématique durant ce temps de jeu, il s'agit juste de dire que le travail mathématique proprement dit se situe à un autre moment. C'est avant ou après avoir joué que ce travail peut s'effectuer. Nous distinguerons donc différentes manières de valoriser ce temps de jeu dans le cadre d'une activité mathématique. Mais nous retiendrons vraiment la nécessité, lorsque l'on souhaite utiliser le jeu, de bien séparer l'activité de jeu de l'activité de travail et d'apprentissage. Nous formulons l'hypothèse que c'est cette séparation, cette distinction des temps, qui nous permet de résoudre ce paradoxe dialectique entre jouer et apprendre dans notre contexte d'apprentissage des mathématiques.

5. Un cadre didactique pour parler du jeu dans l'apprentissage des mathématiques

Pour notre travail de recherche, nous orienterons notre regard selon deux cadres théoriques, proches mais néanmoins différents : d'une part nous travaillerons avec les travaux de N. Pelay (2011) sur la dialectique jeu/apprentissage des mathématiques, et notamment à travers la manière dont il formule le concept de situation adidactique dans le cadre d'une activité de jeu. Par ailleurs, nous nous emploierons également à prendre en considération les travaux effectués sur les différentes représentations mentales employées et leur lien avec l'activité mathématiques. Nous nous référons principalement aux travaux de Fernando Hitt (2013) à ce sujet.

N. Pelay s'appuie sur la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de G. Brousseau pour développer une analyse didactique de l'utilisation du jeu dans un contexte d'apprentissage non scolaire. Selon lui, l'activité de jeu place l'élève dans une situation adidactique, c'est à dire une situation où le savoir visé est maintenu privé par le maître, et l'apprenant agit de son propre mouvement pour entrer en relation avec ce savoir. Selon Brousseau, la situation adidactique est une « *situation où la connaissance du sujet se manifeste seulement par des décisions, par des actions régulières et efficaces sur le milieu et où il est sans importance pour l'évolution des interactions avec le milieu que l'actant puisse ou non identifier, expliciter ou expliquer la connaissance nécessaire* » (Brousseau, 2003). Comme le remarque N. Pelay, cette définition du « *paradigme des situations adidactiques* » semble avoir de nombreuses caractéristiques communes avec le concept de jeu tel que défini précédemment (action des joueurs, règle, frivolité, incertitude).

Par ailleurs, nous rejoignons l'approche de F. Hitt quand à son approche des représentations dans la construction des connaissances mathématiques. Tout d'abord, Hitt essaie d'introduire dans le cadre de la didactique des mathématiques le concept d'*habitus* selon Bourdieu (1980, p88-89) : « *Les conditionnements associés à une classe particulière de conditions d'existence produisent des*

habitus, systèmes de dispositions durables et transposables, structures structurées prédisposées à fonctionner comme structures structurantes, c'est à dire en tant que principes générateurs et organisateurs de pratiques et de représentations qui peuvent être objectivement adaptées à leur but sans supposer la visée consciente de fins et la maîtrise expresse des opérations nécessaires pour les atteindre, objectivement « réglées » et « régulières » sans être en rien le produit de l'obéissance à des règles, et étant tout cela, collectivement orchestrées sans être le produit de l'action organisatrice d'un chef d'orchestre. » Ce concept nous interpelle à deux titres : d'une part comme la place d'un *habitus* de classe (au sens social) qui est institué dans la situation micro-sociale de la classe (au sens scolaire) : les présupposés de la relation didactique hérité de la pratique culturelle de l'école par les élèves tout au long de leur vie, ainsi que par le capital culturel spécifique à la culture scolaire et qui est réparti de manière hétérogène dans une classe de 35 élèves de seconde générale. Par exemple, à travers l'accompagnement personnalisé, il nous est permis de mettre en place des temps qui réorganisent la structure d'« heure de cours » et permettent ainsi de remettre en question ces *habitus* de classe qui peuvent être un frein à certains processus d'apprentissage. L'autre intérêt de la transposition de ce concept, qui est intéressant théoriquement mais nous ne pourrons que l'effleurer dans notre travail, est justement le questionnement de ce qui s'établit comme transformation des *habitus* de la classe scolaire à travers changement de paradigme didactique qui peut s'opérer dans ces temps d'accompagnement personnalisé (relation et interaction entre les élèves, posture et relation avec l'enseignant, ...)

En ce qui concerne plus spécifiquement le registre des représentations telles qu'abordées par Hitt, nous retiendront le fait que, comme Hitt le mentionne à propos de l'approche de Duval, certains registres de représentations « transitoires », sont délaissés par Duval et constituent pourtant un terreau significatif dans la construction des représentations finales des idées mathématiques par les élèves. Dans le cadre de séance de pratique et d'analyse du jeu, nous nous appuierons sur le fait que pour parler et analyser des objets ludiques, les élèves ne disposent *a priori* d'aucun registre de représentation institué. La construction des représentations nécessaires à l'analyse et à l'expression attendue à propos des jeux se fera donc indépendamment des habitudes construites en classe de mathématiques.

Pour conclure, nous insisterons sur le fait que la dialectique jeu / apprentissage que nous nous emploierons à travailler s'appuiera sur 3 sources d'interactions structurantes des représentations de l'élève : d'une part la relation de jeu qui s'opère entre l'élève, le jeu et les autres élèves, et qui constitue un espace d'opération et d'expérimentation des représentations (hypothèses stratégiques et applications) ; ensuite la relation qui s'opère entre les élèves sous la forme du débat pour confronter les analyses et les hypothèses relatives au jeu et à ses stratégies ; et enfin, la

confrontation à l'objectif de projet qui nécessite ainsi une forme exprimable des représentations et des analyses effectuées précédemment.

6. Game design / Ingénierie didactique, même combat ?

Un dernier concept nous paraît pertinent pour parler des jeux dans le contexte de l'apprentissage des mathématiques. Il s'agit d'un concept utilisé tant par G. Brougère dans son analyse des ludicités, que par les concepteurs de jeu vidéo comme angle de vue particulier sur l'expérience vécue par le joueur : il s'agit du concept de *flow* ou d'expérience optimale, au sens de M. Csíkszentmihályi (1990), ou tout du moins de certaines de ses caractéristiques.

Jenova Chen (2011) reformule brièvement le concept de flow et traduit ce concept pour le *game design* de jeux vidéos :

« Selon la recherche bien documentée de Mihaly Csikszentmihalyi et le rassemblement à grande échelle d'observations personnelles, la phénoménologie du Flow comporte huit points majeurs :

- 1. Un challenge qui requiert des compétences*
- 2. La fusion de l'action et de la conscience*
- 3. Des objectifs définis*
- 4. Un ressenti direct*
- 5. La concentration sur la tâche à accomplir*
- 6. La sensation de contrôle*
- 7. La perte de conscience de soi*
- 8. La transformation du temps*

Ces composants ne sont pas tous nécessaires pour que le Flow soit éprouvé. [Csikszentmihalyi 1990]

Une fois que nous avons digéré les composants ci-dessus et les avons revisités avec une perspective de game design, voici les trois éléments fondamentaux qu'un jeu vidéo se doit d'avoir avant d'évoquer l'expérience du Flow.

- 1. Comme prémisses, le jeu est intrinsèquement gratifiant, et le joueur est prêt à jouer au jeu.*
- 2. Le jeu offre un montant correct de challenges pour correspondre à la capacité du joueur, qui lui permet de plonger profondément dans le jeu.*
- 3. Le joueur a besoin d'éprouver une sensation de contrôle personnel au cours de l'activité de*

jeu. »

Ces différentes caractéristiques du *flow* sont à observer en lien avec les caractéristiques des situations d'apprentissage, notamment des situations d'apprentissage des mathématiques. Il me semble que les points les plus en lien avec une démarche pédagogique sont 1 (un challenge qui requiert des compétences), 3 (des objectifs définis), 5 (la concentration sur la tâche à accomplir), 6 (la sensation de contrôle). Si les autres points peuvent être importants, ils nous semblent difficilement utilisables pour la conception d'activités pédagogiques. Au regard de ce concept, situation de jeu et situation d'apprentissage peuvent avoir des corrélations pertinentes et utilisables.

De ce concept d'expérience optimale, nous retiendrons par ailleurs que l'expérience optimale s'établit dans une situation d'équilibre entre les compétences de l'individu et les contraintes imposées par la situation. Ainsi, si les contraintes sont trop importantes par rapport aux compétences mobilisables, l'individu se retrouve dans une situation d'anxiété et n'est donc pas dans cette situation d'optimalité de l'expérience. Inversement, si les contraintes de la situation sont trop faibles par rapport aux compétences mobilisables par l'individu, alors l'individu se trouve dans la zone d'ennui. Dans notre contexte d'apprentissage des mathématiques, nous identifierons deux points essentiels qui établissent les frontières des zones d'ennui et d'anxiété dans le cadre des jeux dans l'apprentissage mathématique. Un jeu à règles nécessite d'une part des compétences nécessaires pour jouer au jeu. Dans notre contexte de jeux à composantes mathématiques, nous étudierons précisément les compétences mathématiques nécessaires pour pouvoir jouer au jeu. Il s'agit des compétences pré-requises pour pouvoir jouer convenablement au jeu et avoir un sentiment de prise de décision dans la pratique de ces jeux (ne pas s'en remettre entièrement au hasard par exemple). Ne pas disposer des compétences nécessaires à un jeu, c'est se trouver dans la zone d'anxiété : les contraintes de la situation sont trop fortes par rapport aux compétences mobilisables. De l'autre côté, il y a la zone d'ennui, que nous qualifierons également de zone de sortie du jeu. Dans le cadre d'un jeu réglé, cette zone d'ennui est atteinte lorsque le jeu est résolu, lorsque l'incertitude a été déterminée, quel que soit le raisonnement mathématique mis en place pour cela. On parlera alors des conditions suffisantes à la sortie de jeu. Un jeu résolu n'est plus un jeu, c'est l'application d'une règle de calcul, d'un algorithme. Ce qui va donc nous intéresser dans notre relation entre jeu et apprentissage des mathématiques, c'est que les apprenants fassent un mouvement depuis la zone située entre ennui et angoisse (la zone potentiellement « optimale ») vers la frontière de résolution du jeu. Une fois cette frontière atteinte, le jeu a été analysé et cesse d'être un jeu, si cette zone est atteignable. Et dans le cadre d'apprentissage des mathématiques, il peut être intéressant qu'elle le soit.

II. Deuxième partie : éléments pour une classification des jeux à l'usage des enseignants de mathématiques

1. Les critères de ludicité

Nous pouvons comprendre le lien entre jeux et mathématiques à l'aune d'un des critères de définition des situations ludiques selon G. Brougère : l'incertitude. Une situation de jeu est nécessairement une situation dont l'issue est incertaine à priori. Les jeux à règles étant définies comme un système formel, l'analyse mathématique d'un jeu vise à prévoir, à réduire, cette incertitude pour le joueur qui a pu effectuer cette analyse du jeu. En utilisant les deux catégories de R. Caillois que nous avons retenu, l'Alea et l'Agon, nous pouvons à la fois comprendre les spécificités ludiques de ces deux types et les raisonnements qu'ils mobilisent pour les joueurs.

Les jeux de type Agon sont des jeux d'affrontement. Ceux qui nous intéressent sont les jeux dans lesquels cet affrontement relève des compétences logico-mathématiques des joueurs (ces jeux sont parfois appelés jeux de stratégie). Pour ces jeux, l'issue est de déterminer un vainqueur parmi les joueurs. Ce vainqueur sera celui qui aura mobilisé avec le plus de succès ses compétences logico-mathématiques. Identifier et réduire l'incertitude de ce type de jeu consiste à effectuer principalement des raisonnements stratégiques souvent par étude de cas et par des suppositions sur le comportement des autres joueurs.

Les jeux de type Alea sont des jeux de « soumission au monde ». Les joueurs s'en remettent au « destin », au « hasard ». L'incertitude de l'issue vient de cette réalisation du hasard. L'issue de ces jeux est plus généralement de déterminer si le joueur participant est gagnant ou perdant. Les raisonnements effectués sur ce type de jeux conduisent bien souvent à une estimation des risques gains/pertes et par conséquent à une décision de type « participer au jeu / ne pas participer au jeu »

Les critères de ludicité de G. Brougère observés à l'aune de notre approche « jeu, mathématiques et apprentissages » :

Incertain : comme nous venons de le dire, les jeux sont à priori fortement incertains. C'est à dire que l'issue est imprédictible. L'enjeu principal de l'analyse mathématique des jeux est justement de réduire cette incertitude en construisant une prédictibilité des jeux, ou tout du moins de certains jeux. Le raisonnement mathématique appliqué au jeu permet de partir d'un stade où l'incertitude est maximale et se dirige vers un stade où, dans l'idéal le jeu est résolu et où l'incertitude a été entièrement écartée.

Règle du jeu : pour les jeux que nous observons, les règles de jeu sont explicites. Ce caractère

explicité des règles est une condition nécessaire à l'étude mathématique que l'on peut faire. Ces règles permettent de définir le système formel au sein duquel nous pouvons raisonner pour déterminer des stratégies.

Décision : le jeu suppose et nécessite des décisions de la part du joueur. La première décision est la décision d'entrée dans le jeu. D'autre part, le jeu évolue en fonction des décisions effectuées par les joueurs. Dans le cadre de jeux de pur hasard, la décision relève généralement de l'entrée ou non dans le jeu par l'estimation du risque (calcul d'espérance, calcul de probabilités, ...). Dans le cadre de jeux de stratégie, ce caractère de décision est fondamental puisque c'est ce caractère que nous tendrons à optimiser à travers un raisonnement.

Second degré : le second degré est une composante importante et difficile à prendre en compte pour les jeux à visée d'apprentissage, notamment dans un contexte de classe. En effet, le second degré suppose une séparation de la réalité ordinaire, un « faire-semblant » important, qui n'est absolument pas naturel en classe. Dans quelle mesure est-il possible de proposer des situations « extra-ordinaires » en classe ? La question est posée et nous en ébaucherons quelques lignes. Mais ce sujet est vaste et nous ne prétendons pas le résoudre ici. La situation d'apprentissage scolaire relève de cadres du second degré dans les apprentissages. L'entraînement à des activités, à travers des exercices, des situations d'apprentissages, place l'apprenant dans des situations de faire-semblant, des situations qui n'ont pas d'impact sur le réel. On retrouve donc également ce rapport à la frivolité.

Frivolité : la frivolité du jeu, c'est ce que l'on associe souvent à son caractère gratuit, improductif. Ce qui est important à voir dans ce caractère de frivolité, c'est le fait que l'issue du jeu n'est pas très grave, le jeu est relativement sans conséquence. On a ici une zone frontière et discutable. Les conséquences des jeux pouvant être discutées, ainsi que la nature de jeu ou de non-jeu lorsque les issues ne sont plus inconséquentes. A priori, l'issue d'une partie, le gagnant ou le perdant, ne change rien au monde en dehors du jeu. Chacun rentre chez soi inchangé (si ce n'est d'avoir eu le plaisir de jouer). Cette dimension d'improductivité peut être questionnée d'abord dans le cadre des jeux d'argent. Gagner ou perdre, qui n'a pas d'impact en soi tant sur la vie ordinaire que sur les parties suivantes du jeu, en a beaucoup plus lorsque de l'argent est en jeu. Mais dans ces jeux, si de l'argent, ou n'importe quelle quantité s'avère changer de main, le jeu en lui-même reste improductif, il ne crée ni bien, ni richesses. Une autre question qui peut être posée au regard de ce critère dit d'« improductivité », c'est le rapport qu'il peut avoir à l'apprentissage. Les objectifs pédagogiques supposant une production de savoir, de connaissances ou de compétences, chez l'apprenant. Un jeu pédagogique ou éducatif est-il dès lors frivole ?

2. Jeux de loisir, jeux pédagogiques et récréations mathématiques

Pour affiner notre réflexion sur les jeux, nous dégagerons une première typologie des objets ludiques que nous pouvons rencontrer et utiliser dans le contexte de l'apprentissage des mathématiques. Nous identifierons d'abord trois grandes familles dans les jeux qui nous intéressent : les jeux de loisir, les jeux pédagogiques et les récréations mathématiques. Il y a également des objets mathématiques un peu curieux qu'il nous faudrait analyser en détail pour savoir comment les catégoriser : il s'agit d'activités de type manipulation de fractales ou jeu de la vie de Conway.

Les jeux dits de loisir sont ceux que l'on qualifierait naturellement de jeux : qu'ils soient traditionnels ou contemporains, ce sont avant tout des activités de loisir, sans aucun objectifs spécifiques. Ces jeux de loisir se jouent à partir de deux joueurs et, pour ceux qui relèvent principalement des compétences logico-mathématiques, leur résolution exhaustive (déterminer à l'avance l'issue de la partie) est très difficile voire impossible. C'est d'ailleurs la difficulté de résolution de ces jeux qui les maintient dans ce statut même de jeu. On peut voir par exemple que le jeu de la bataille (le jeu de cartes) n'est un jeu que pour les enfants. Lorsque ces mêmes enfants comprennent qu'ils n'ont aucune influence sur le jeu et que celui-ci est entièrement déterminé dès la distribution des deux paquets de cartes, alors ils arrêtent de jouer à ce jeu, il perd son statut de jeu. Il est important de bien comprendre que cette résolution des jeux fait sortir ces objets ludiques de la famille des jeux. C'est un sujet et un débat d'actualité comme on a pu le voir avec les programmes informatiques champions d'échecs ou de Go. Lorsque ces jeux complexes deviennent résolus, ils perdent de leur statut et de leur intérêt. Il n'y a plus de défi à surmonter, il y a une frontière tangible à la perspective de progression. Mais avant d'en arriver là, la question qui nous intéresse est : est-ce que les élèves produisent ou apprennent des mathématiques en jouant à ces jeux ? Cela ne nous semble a priori pas évident. Par contre, ils manipulent des notions mathématiques. Certaines des notions manipulées sont intrinsèquement en lien avec le jeu. En premier lieu, les nombres et grandeurs, mais parfois également des notions de positions relatives, de distances, de dénombrement. Dans les jeux, ces notions sont utilisées de manière intuitives et ne sont presque jamais formulées. Lorsqu'elles le sont, c'est généralement lorsqu'elles sont parfaitement maîtrisées, comme par exemple en jouant au jeu de l'oie, dire que l'on fait 3 et 4 et que l'on avance de 7, c'est l'expression de l'addition mais parce qu'elle est devenue naturelle, évidente. Elle peut être formulée de manière plus découpée (compter les points sur les dés, compter sur les doigts) lorsque la compétence est en cours d'apprentissage, mais dans la plupart des cas ce type de mouvement d'apprentissage, d'entraînement, de pratique d'un savoir mathématique est relativement absent. Dans un jeu avec du hasard, l'évaluation du risque, que l'on pourrait formellement analyser avec les outils probabilistes, est généralement abordée uniquement de manière intuitive par les joueurs. Des

raisonnements sont mis en place, mais il est peu fréquent que ces raisonnements soient exhaustifs et rigoureux. Il s'agit la plupart du temps d'une estimation, d'une intuition.⁴ Il en va de même dans le cadre des raisonnements stratégiques par étude de cas et dénombrement des situations possibles. Les joueurs sont nécessairement limités par leurs capacités cognitives et le temps imparti qui ne leur permettent pas d'évaluer les n prochains coups possibles dans toutes les configurations envisageables. Les joueurs usent de leur propre crible heuristique pour effectuer leur choix. Heuristique dont, à priori, nul d'autre que le joueur n'a connaissance. La constitution et l'usage de ce crible heuristique, que ce soit sous l'approche probabiliste comme sous l'approche combinatoire, est-ce une activité mathématique ? Sans explicitation et sans publication, il est difficile d'en juger. Il nous semble donc intéressant de dire qu'exprimer ces raisonnements de recherche de stratégie, de prise de décision, et les échanger et les confronter avec d'autres est par contre une activité qui peut relever des mathématiques. Le fait de formuler est une condition nécessaire pour que l'on puisse évaluer ou non si il s'agit d'une activité mathématique. De plus, c'est le fait de formuler ses raisonnements qui permet également cet ajustement permis par les conflits socio-cognitifs effectués avec d'autres joueurs, avec d'autres apprenants. C'est d'ailleurs une activité que l'on constate dans les processus d'apprentissages de nombreux jeux « compétitifs », ou jeux à apprentissage, comme par exemple les échecs ou le go (analyse de parties, décomposition stratégique ou tactique de différentes situations de jeu). On en arrive à décrire une activité qui nous semble intéressante à étudier d'un point de vue de l'apprentissage des mathématiques. Si jouer à un jeu est une activité qui peut être questionnable du point de vue de l'apprentissage des mathématiques, il n'en va pas de même pour cette autre activité qu'est l'analyse des jeux. Il convient de préciser qu'analyser un jeu n'est pas jouer. Tout comme étudier le solfège n'est pas jouer de la musique On peut étudier un jeu sous différentes approches. L'approche que nous mentionnions précédemment est celle d'une analyse stratégique, qui est sûrement la première à laquelle on pense en terme d'approche mathématiques. L'analyse stratégique, en effet, est sûrement la plus structurée et la plus formalisable en terme d'analyse mathématique. C'est également elle qui a été la plus étudiée par les mathématiciens à travers l'histoire. Une analyse stratégique rigoureuse nécessite un formalisme qui peut devenir très complexe. Mais établir une stratégie gagnante ou une stratégie forte à un jeu nécessite cette formulation. Un joueur ne peut pas s'assurer une stratégie gagnante sans avoir étudié rigoureusement les différents cas possibles, sans avoir dénombrer et étudié les positions et les comportements possibles. L'intuition n'est alors plus suffisante pour permettre une généralisation et le raisonnement mathématique devient inéluctable. Qui plus est, la formulation de la stratégie gagnante ou forte doit pouvoir s'exprimer de manière calculatoire, algorithmique, opérable. Elle doit

4 Ces estimations relatives au comportement des individus sont elles-mêmes faites sans rigueur scientifique, uniquement à partir d'observations composées au cours de plusieurs années d'observations de comportement de joueur dans le cadre d'une activité d'animateur jeu / ludothécaire.

pouvoir être transmissible. Toutes ces conditions plaident en faveur d'une activité mathématique forte. Il conviendrait d'ajouter que, en dehors de jeux très simples, la plupart des jeux de loisir auxquels nous pouvons jouer ne sont pas analysables exhaustivement. Et heureusement, car sinon ils perdraient vraisemblablement leur statut de jeu.

3. Prémisses d'une classification

Quelques critères importants permettent de décrire un jeu et alors d'identifier à quel classe il peut se rattacher et dès lors à quel approche mathématique il peut se rattacher :

Le premier critère que nous retenons est la distinction entre **jeux de hasard**, **jeux de stratégie** ou **jeux mixtes**. La distinction entre ces différents types est la nature des modifications de l'état du jeu. Dans un jeu de stratégie, l'évolution du jeu ne dépend que des décisions des joueurs. Dans un jeu de hasard pur, l'évolution du jeu ne dépend que d'une expérience aléatoire. Dans un jeu mixte, ces deux processus d'évolution cohabitent. Les jeux de hasard purs font intervenir des raisonnements probabilistes pour leur analyse. Les jeux de stratégie font intervenir des raisonnements déductifs pour leur analyse. Les jeux mixtes font intervenir des raisonnements des deux types pour leur analyse. Nous n'entrerons pas dans les détails de la théorie des jeux ici et des différentes formes de représentation des jeux ainsi que des différents types de stratégies dominantes.

La question fondamentale qui se pose avec les jeux dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques est « sur quoi se fondent les décisions des joueurs dans le jeu ? ». L'objectif pour un apprentissage des mathématiques précis est que ces décisions découlent d'un raisonnement mathématique. Pour pouvoir identifier comment les décisions d'un joueur sont prises, il convient de se demander également combien de décisions différentes le joueur peut-il faire ? Tout d'abord ces différentes décisions sont à séparer en plusieurs niveaux. Par exemple dans une partie du jeu d'échec, la décision de jeu d'un joueur est d'une part de choisir une pièce (niveau 1) puis de choisir le déplacement de cette pièce (niveau 2). Dans un jeu de type Nim, le joueur doit choisir dans quel tas prendre des allumettes (niveau 1) puis combien d'allumettes il va prendre (niveau 2). Plus le jeu comporte de niveaux décisionnels, plus il va être difficile à analyser. Par ailleurs, certains jeux vont nécessiter au joueur d'effectuer des décisions différentes sur le même niveau. Par exemple jouer deux cartes de sa main, ou bien déplacer deux pièces sur un plateau. Ces différentes décisions se situent sur le même niveau hiérarchique.

Les **compétences nécessaires du jeu** : il s'agit des compétences que doivent maîtriser les joueurs pour pouvoir effectuer une décision qui ne relève pas du hasard. Ces compétences peuvent être d'ordre numérique (comparaison de grandeurs, compétences calculatoires, ...), d'ordre géométrique (position relative de différents éléments, distance, configurations du plan, ...), d'ordre probabiliste

ou statistique (résultats possibles d'un lancer de dé ou d'un tirage de carte, ...). Un joueur qui ne dispose pas de ces compétences ne peut pas jouer au jeu. Quelques exemples précis de compétences nécessaires (avec quelques jeux nécessitant ces compétences) :

Opérations algébriques (addition, multiplication, division, soustraction) => jeu de l'oie, jeu de Nim, puissance 4 des multiplications

Comparaison de grandeurs (supérieur, inférieur) => stupide vautour, croc, ...

Position relative de deux objets (par exemple distance entre deux pions sur un plateau) => neutron, dames, quorridor, ...

Identification de configurations géométriques => blocus, puissance 4, quarto, pylos, ...

Les **compétences mathématiques permettant de construire une stratégie** pour ce jeu : il s'agit des outils mathématiques dont dispose un joueur pour effectuer une analyse du jeu et ainsi dégager des comportements plus favorables que d'autres. Ces outils conceptuels peuvent être des outils statistique, des modèles probabilistes, des outils de représentation de type arbres ou tableaux, ainsi que la capacité discursive à établir une disjonction des cas. Les jeux mobilisent par ailleurs bien souvent des raisonnements par récurrence puisque les tours de jeu sont souvent des itérations d'une même procédure. Pour beaucoup de jeux, les raisonnements stratégiques ne doivent pas nécessairement viser une résolution exhaustive du jeu, ce qui est une activité mathématique difficile, mais peut consister en un raisonnement sur des cas particuliers d'un jeu ou sur des composantes réduites d'un jeu.

Raisonnement probabiliste (calcul d'espérance, calcul de probabilité d'occurrence d'un événement favorable, ...) => Las Vegas, Fermer la boîte, 10000, ...

Raisonnement combinatoire (identifier les différents cas de figure possible, représentation sous forme d'arbre, ...) => quarto, jeu de Nim, neutron, quorridor, ...

La recherche de stratégie pour différents jeux va dépendre fortement des mécaniques de jeu. Il convient donc de préciser au moins quelques grandeurs importantes à prendre en compte et quelques descripteurs pour les mécaniques de certains jeux.

Dans les jeux de hasard, on peut identifier plusieurs types de générateurs de hasard. En partant des jeux de dés, on peut déterminer quelques catégories de jeux de hasard en se basant sur l'inventaire des jeux de dés par R. Knizia : jeux de chance pure, jeux de mise, jeux de score, jeux de combinaison et jeux de bluff.

Pour les jeux de stratégie, de nombreux critères avant même les éléments de mécanique de jeu sont à prendre en compte. Ces différents critères sont issus en grande partie des travaux effectués en théorie des jeux combinatoires, notamment à partir des travaux de John H. Conway (1976) :

- Le nombre de joueurs : à 2 joueurs ou à plus de deux joueurs (existence ou non de coalition, typologie des structures sociales)
- L'asymétrie des positions : est-ce que les différents joueurs sont dans des situations identiques ou équivalentes, ou au contraire ont-ils des objectifs de jeu et des options fortement différentes
- Jeux impartiaux et jeux partisans : les jeux impartiaux sont des jeux où les deux joueurs ont exactement les mêmes options. Un jeu de dames ou d'échecs est partisan car un joueur ne peut déplacer que les pions blancs, tandis que l'autre ne peut déplacer que les pions noirs : ils n'ont pas les mêmes options.
- Jeux à observation complète ou à observation incomplète : les deux joueurs n'ont pas forcément accès à tous les états possibles du jeu, ils ne savent peut-être pas dans quel état est le jeu. Dans un jeu à observation incomplète, certaines informations sont publiques mais d'autres sont privées et tous les joueurs n'y ont pas accès.
- Jeux à fin déterminante ou à fin non-déterminante : dans certains jeux, le fait de finir le jeu donne la victoire au joueur qui termine (ou la défaite), tandis que dans d'autres jeux, finir le jeu ne donne pas le gagnant immédiatement : il faut procéder à un décompte quelconque : ce sont d'autres critères qui établissent le joueur victorieux ou le joueur perdant.
- Jeux à position : les joueurs disposent de marqueurs ou de pions qui sont disposés sur un plateau, qu'il s'agisse d'une ligne (comme au backgammon) ou d'un plan (comme aux dames), et les positions relatives des pions sont déterminantes pour l'état et les issues du jeu.
- Pions attribués / non-attribués : dans certains jeux, les pions sont définitivement attribués à un joueur donné (dames, échecs), dans d'autres jeux, ce n'est pas le cas (othello, awalé).
- Jeux à actions successives ou jeux en simultané : les actions des joueurs sont-elles effectuées l'une après l'autre ou bien sont-elles effectuées de manière simultanée ?

Nous ne terminerons pas cet inventaire des caractéristiques complètes à prendre en compte pour choisir et utiliser un jeu dans une perspective d'un apprentissage spécifique en mathématiques, nous identifions uniquement certains caractères qui nous semblent pertinents à prendre en compte pour une ingénierie didactique basée sur l'utilisation du jeu. Ces prémisses de classification ne sont à prendre que pour ce qu'ils sont, c'est à dire des prémisses, des lignes générales qui nous semblent pertinentes et intéressantes mais qui ne sont, à l'heure actuelle pas encore suffisamment affinées et

mises en place dans une stratégie globale d'apprentissage des mathématique pour pouvoir être établies avec conviction.

III. Troisième partie : utiliser le jeu en contexte scolaire

1. Différentes manières d'aborder le jeu

1. Analyser des jeux

L'analyse des jeux est une activité qui, lorsqu'elle est effectuée de manière rigoureuse, est foncièrement d'ordre mathématique. Définir l'ensemble des cas possibles, identifier et formaliser les situations perdantes ou gagnantes, sont des activités mathématiques. Il convient de rappeler qu'analyser un jeu ce n'est pas jouer à ce jeu. Il est néanmoins nécessaire, pour pouvoir analyser un jeu et ainsi se positionner en stratège, d'avoir précédemment joué à ce jeu pour comprendre le sens stratégique et avoir des prémisses de réflexion, pour avoir de la matière permettant de nourrir cette analyse. En effet, chacun, quel que soient ses compétences d'analyse stratégique, joue à un jeu en essayant autant que possible d'effectuer les décisions qui lui permettront de gagner. Ces décisions sont généralement intuitives et non formalisées. Elles sont effectuées de tête, et leur pertinence va dépendre de l'adéquation entre les capacités du joueur et la difficulté du jeu. On retrouve donc ici un parallèle avec cette notion d'expérience optimale agonistique. Disposer d'un bon prémisses pour l'analyse d'un jeu, c'est d'avoir proposé et fait jouer à un jeu où les joueurs se sont trouvés dans des situations proches de cette expérience optimale de concentration pour une analyse stratégique.

Être dans cette zone d'optimalité cela veut dire que les joueurs ont identifié et su maîtriser les éléments de jeu à leur disposition, ont su effectuer des études de cas, des projections et des anticipations sur les coups suivants, ont su se construire des représentations mentales cohérentes qui constituent nécessairement une base pour pouvoir ensuite verbaliser et formaliser un travail sur le jeu. Cela veut également dire qu'ils ont de la matière à partager avec les autres élèves et l'on peut vraisemblablement disposer de situations de débat et d'échanges intéressants. Qui plus est, les modes de raisonnement et de représentation d'un jeu sont multiples et on peut donc voir et identifier différents registres de représentation (séquentiels, sous formes de tableaux, d'arbres, de graphes, de phrases, de schémas, etc.).

Être dans cette zone d'optimalité agonistique présente également un autre avantage fondamental : la résolution du jeu n'est pas atteinte. Dans ce cas, il est donc pertinent de proposer ensuite en temps de recul, un autre temps qui va permettre de pousser au bout cette réflexion en changeant d'outil et de point de vue. Pour résoudre le jeu, on va effectuer un travail mathématique, un travail d'analyse stratégique, qui va permettre de conclure l'expérience vécue en amenant (on non) à une résolution plus poussée du jeu. Nous faisons également l'hypothèse qu'il n'est pas systématiquement nécessaire que l'analyse stratégique résolve entièrement le jeu. Cela peut être le

cas sur certains exemple de jeux (jeux combinatoires, jeux de hasard), surtout lorsque cela est possible, mais rapidement des jeux parfois avec des règles très simples ne peuvent être résolus (ne serait-ce que le Go ou le jeu de Hex), et il ne faut pas s'interdire de travailler avec ces jeux. En effet, ils sont eux même source de travaux importants en mathématiques et en informatique, et il nous semble tout à fait pertinent de cultiver la curiosité et l'intérêt mathématique des élèves avec ce type de jeu. Et réaffirmons que non-résolus ne veut pas dire qu'il n'y a rien à dire et à analyser sur ces jeux. Qui plus est, travailler uniquement avec des jeux dont on peut trouver des stratégies optimales peut inciter à penser que le seul intérêt des jeux est de les résoudre et que les seuls jeux qui valent en mathématique sont les jeux pour lesquels on peut effectuer une résolution. Hors, comme nous le disons, les jeux résolus perdent leur statut de jeu. Nous nous devons donc d'ouvrir vers des jeux qui le sont encore.

2. Concevoir ou modifier des jeux

Une autre activité qui peut avoir tout son sens dans le cadre de la classe de mathématique mais que nous ne détaillerons pas ici est la conception ou la modification de jeux. Concevoir un jeu, c'est savoir manier le langage et les objets élémentaires utilisés pour les jeux (tour de jeu, cartes, dés, pions, etc.) et savoir les agencer de manière à formuler un ensemble de règles cohérentes et qui recouvrent les différents cas de figure possible. De plus, la conception d'un jeu permet de faire un lien entre un langage formel (celui des règles du jeu) et une expérience réelle (jouer au jeu). Cela permet une rétroaction rapide et permet donc au concepteur de jeu de modifier et d'ajuster ses règles de jeu. Les élèves peuvent ainsi, en concevant un jeu, se voir confrontés au fait que leur jeu peut être trop dur, trop facile, ennuyant, etc.

Mais ce travail de conception est un travail de longue haleine qui nécessite une mise en place transdisciplinaire et pourrait, par exemple, faire l'objet d'un EPI au collège.

3. Modéliser des jeux

La modélisation d'un jeu de société est une activité qui peut être très intéressante et gratifiante à la fois pour la représentation en abstraction d'un jeu et à la fois comme activité d'algorithmique. Nous retiendrons qu'effectuer une modélisation d'un jeu est tout à fait pertinent dans le cadre de l'apprentissage de l'algorithmique et de la programmation. Programmer un jeu ou dispositif ludique est d'ailleurs mentionné dans les programmes pour l'apprentissage de l'algorithmique, apprentissage qui va s'étendre au collège et en primaire à partir de la rentrée 2016. Modéliser un jeu nécessite des capacités de représentation et de formalisation fortes. Pour résumer et faire ressortir quelques notions fondamentales pour les éléments nécessaires à la modélisation d'un jeu, voici un bref inventaire vraisemblablement non-exhaustif :

- Identifier les grandeurs en jeu et les variables nécessaires : modéliser un jeu c'est trouver une manière de formaliser des grandeurs qui ont une existence physique en une existence algébrique. Par exemple la position d'un pion sur un plateau, ou bien encore le nombre d'allumettes dans un tas, etc. Qui plus est, il faudra distinguer dans ces variables celles qui sont des variables d'environnement (par exemple le nombre de cases du plateau) de celles qui sont des variables dynamiques évoluant au cours du jeu (par exemple le nombre d'allumettes restantes dans un tas)

- Identifier les choix possibles pour chaque joueur : il est nécessaire ainsi de procéder à une étude de cas, à dénombrer proprement les possibilités offertes mais également sur quelles variables est-ce que l'on agit. Il sera également important d'identifier les coups impossibles et ainsi d'avoir un minimum de gestion d'erreur.

- Identifier les boucles et les structures conditionnelles : un jeu se déroule généralement en une répétition de séquences similaires et procède à disjonctions de cas en fonctions de certaines circonstances. Les boucles et structures conditionnelles sont généralement très présentes dans ce type de programme, et il est important d'identifier comment les placer, où les faire commencer et comment les faire terminer.

Nous concluons sur ce bref panorama de l'implémentation de jeux avec deux points qui nous semblent important à aborder. D'une part il convient de reconnaître qu'il n'y a jamais une seule façon d'implémenter un jeu et que des choix différents sont fait par chaque développeur, qu'il soit apprenant ou professionnel. La pratique et l'apprentissage permettant d'obtenir des techniques et des simplifications des programmes, mais il est très rare qu'il y ait une seule solution optimale. D'autre part, l'implémentation d'un jeu sous forme informatique est une démarche qui peut être très intéressante en complément d'une démarche d'analyse du jeu et ce pour au moins trois raisons. D'une part, modéliser le jeu nécessite de se le représenter formellement et donc d'en avoir une représentation différente de celle que l'on a pu avoir en jouant simplement et matériellement à ce jeu. Ensuite, le fait de disposer d'une forme informatique d'un jeu permet d'effectuer des simulations plus rapidement, voir d'en effectuer à la chaîne et ainsi répéter un grand nombre de fois un jeu pour en faire une analyse statistique. Enfin, la programmation d'un jeu et l'analyse des comportements stratégiques peut permettre de concevoir un programme qui mette en place une stratégie dans un jeu, ce qui conduit à l'élaboration des prémisses calculatoire d'une « intelligence artificielle », entre guillemets car le terme n'est pas forcément le plus pertinent.

2. Réflexions sur l'utilisation du jeu en contexte scolaire à travers 3 expérimentations en classe de seconde

1. Première expérimentation : Le jeu du « lièvre et la tortue » en classe, activité de recherche pour introduire les probabilités

Les probabilités sont une partie de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire qui se prête le plus naturellement à l'utilisation de certains types de jeu. En effet, comme dit précédemment, l'histoire même des probabilités repose sur une analyse de situations issues de jeux de hasard. Qui plus est, les objets générateurs de hasard les plus communément rencontrés et utilisés dans les énoncés sont des objets issus des jeux : roues, fléchettes, mais surtout dés et cartes. Bien évidemment les jeux mentionnés dans ces exemples sont exclusivement des jeux de hasard pur, c'est à dire des jeux sans décision opératoire du joueur à l'intérieur du jeu. Au mieux, la question posée est de savoir si il vaut mieux jouer ou ne pas jouer, ou sur quelle issue il est préférable de parier.

Une des raisons principales qui amène à utiliser le jeu et les générateurs aléatoires issus du domaine du jeu est que ces générateurs aléatoires sont les objets permettant des situations d'équiprobabilités les plus communément partagés par les élèves (et les mathématiciens). Et qui plus est, ils disposent d'un nombre d'issues dénombrables.

Utiliser le jeu et ses objets présente également un intérêt fondamental pour l'apprentissage des mathématiques et pour permettre aux élèves de se construire un sens des probabilités, une représentation des grandeurs manipulées, parfois intuitives parfois contre-intuitives.

L'énoncé du jeu que nous avons proposé est donné dans l'annexe 1

Les élèves disposaient de dés pour effectuer des essais et des expérimentations du jeu. La consigne, qui était de réaliser un écrit donnant un compte-rendu de la recherche effectuée (dans le registre des narrations de recherches), a été travaillé avec ces élèves au cours de différents travaux de recherche tout au long de l'année. Les élèves travaillent par groupes de 2 ou 3.

Au regard des critères de ludicités exposés précédemment dans le cadre des jeux pour l'apprentissage des mathématiques, notre analyse de cette activité est la suivante :

Agon / Alea : il s'agit d'un jeu de hasard pur sans décision du joueur et se classe donc dans la catégorie Alea

Incertitude : l'objet de l'analyse est justement de se questionner sur les issues possibles et leur probabilité d'occurrence. Le jeu est donc incertain et l'objectif de l'activité est la réduction de cette incertitude.

Règle du jeu : le jeu est défini par une règle simple et sans cas particulier, qui définit le début du jeu, son évolution et son issue.

Décision : ce jeu ne permet aucune décision à l'intérieur du jeu de la part du joueur. L'unique décision des joueurs est le fait de faire une partie ou non du jeu.

Second degré et frivolité : les dimensions de second degré et de frivolité du jeu semblent entièrement évidentes, il s'agit évidemment d'une action symbolique sans conséquence, si ce n'est que, proposé comme une activité de recherche en classe, le jeu relève d'une activité avec enjeu. Qui plus est, l'activité de recherche autour du jeu est évaluée. Si le jeu en lui-même est sans conséquence, l'activité dans laquelle il s'insère l'est.

Il était attendu que les élèves effectuent des essais, jouent au jeu lui-même et confrontent leurs pronostics *a priori* aux résultats d'un certain nombre de simulations. Les réponses possibles à la question posée sont au nombre de 3 : le lièvre a l'avantage, la tortue a l'avantage ou le lièvre et la tortue ont les mêmes chances de victoire. Pour répondre à cette question, les élèves disposent de plusieurs registres de représentations. Certains de ces registres sont issus d'apprentissages effectués en classe cette année (les outils statistiques de calcul de fréquence, la notion de fluctuation de l'échantillonnage, ...), d'autres sont issus d'apprentissages antérieurs et donc moins accessibles pour les élèves car plus lointains (représentation sous forme d'arbres, de tableaux, ...), enfin il peut également y avoir des modes de représentation relevant des registres transitoires (dessins, schémas, etc.).

Les obstacles épistémologiques que les élèves peuvent rencontrer dans la construction de leur représentation des probabilités sont les suivants : d'une part, les mesures de probabilités ne sont pas additives dans le cadre de la combinaison linéaire d'événements. Effectuer 6 itérations d'un événement ayant une probabilité de $1/6$ ne donne pas un événement ayant une probabilité de $6 \times 1/6 = 1$. L'objectif caché de notre expérimentation était justement la rencontre de cet obstacle et la capacité à le surmonter à travers l'expérimentation effectuée dans le cadre d'un jeu.

Très rapidement, certains élèves se sont attelés à effectuer une modélisation de la situation, sans vraiment avoir une vision claire de la relation entre la modélisation effectuée et la situation de jeu décrite. D'autres ont « joué au jeu » en effectuant des lancers de dés et en observant qui, du lièvre ou de la tortue, sortait vainqueur du jeu. Un des objectifs de cette démarche (expérimentation et rédaction d'un compte rendu) était de disposer d'éléments relatifs aux registres de représentations employés par les élèves pour construire du sens à partir d'expériences probabilistes, ainsi que de voir comment ces représentations mentales peuvent être utilisées pour résoudre des problèmes.

Notre conclusion est que les élèves, si ils se sont impliqués dans la recherche et ont effectué

une véritable activité mathématique, n'ont pas véritablement été en situation de jeu, et ce pour plusieurs raisons. D'une part, beaucoup d'élèves, sachant qu'ils sont dans une situation de classe de mathématiques, ne se mettent pas dans une situation de jeu, dans une situation d'expérimentation. Pour d'autres groupes, il y a eu eu expérimentation, mais que nous ne pouvons pas vraiment qualifier de situation de jeu. Nous supposons qu'ils avaient une certaine pression vis à vis des enjeux de l'activité ainsi que des *habitus* de classe guidant leur comportement, *habitus* qui refluent la posture de jeu en classe.

Les élèves ont effectivement été dans une situation d'activité mathématique de recherche et de formulation, ils ont effectué un travail intéressant, mais on ne peut pas dire que l'activité en elle-même ait relevé du jeu. Du jeu il n'y avait que la présentation de l'activité, nommée comme telle. Ces observations nous amènent à questionner la pertinence de l'utilisation du vocable de « jeu » pour la description d'expérience aléatoires dans le cadre de l'étude des probabilités.

2. Deuxième expérimentation : Un « Projet Jeu » en Accompagnement Personnalisé

En nous basant sur les textes officiels relatifs à l'accompagnement éducatif en classe de seconde, nous avons réalisé à partir du mois de février un projet autour du jeu avec les élèves de la même classe de seconde. Ce projet, dans sa conception consistait à faire découvrir des jeux de société contemporains aux élèves de la classe, et de les faire travailler sur l'explication et la transmission de ces jeux. Au fil de l'année et avec de multiples ajustements, ce projet est devenu un projet de réalisation d'un affichage d'affiches présentant des jeux, exposés dans le Lycée. Nous avons prévu de faire travailler les élèves sur des analyses stratégiques et des situations problématiques issues des jeux auxquels les élèves avaient joué. Mais cela ne s'est pas fait de cette manière pour diverses raisons. Le déroulé de ce projet sur les différentes séances a été le suivant :

Séance 1 (effectuée deux fois, une fois avec chaque groupe de demi-classe) : présentation globale du projet et découverte de jeux de société

Séance 2 (effectuée deux fois, une fois avec chaque groupe de demi-classe) : découverte d'autres jeux, choix d'un jeu et remplissage d'une fiche de description des jeux (cf annexe)

Séance 3 : séance effectuée avec la professeur-documentaliste pour réfléchir à la réalisation d'une affiche à propos des jeux.

Séance 4 : séance de travail pour la réalisation d'une affiche

Séance 5 : séance finale pour la réalisation de l'affiche.

L'objectif initial était d'alterner entre des temps de jeu, des temps d'analyse des jeux (analyse

stratégique, expression des ressentis et des avis sur différents jeux, élaboration d'une réflexion argumentée sur les jeux), ainsi que des temps de recherche et d'expression sur des éléments de la culture ludique. Si cette démarche initiale était envisagée dès la rentrée de septembre 2015, plusieurs éléments étaient à prendre en compte avant la mise en place d'une activité autour du jeu dans le contexte de l'accompagnement personnalisé. Dans un premier temps, en tant qu'enseignant stagiaire au sein d'une équipe pédagogique dans un établissement, les discours au sujet du contenu et des modalités de mise en œuvre de l'accompagnement éducatif étaient très floues. J'ai eu des discours contradictoires entre les différents enseignants, l'administration, les textes officiels. Sans compter que les demandes de certains parents portaient sur la nécessité d'un soutien en mathématiques. Finalement, j'ai décidé de séparer mon temps disponible pour l'accompagnement personnalisé en deux activités : d'un côté ce projet jeu que je présente ici et d'un autre côté un temps de soutien en mathématiques. Cela, ajouté à des temps de formation, des jours fériés et d'autres éléments du calendrier, m'ont conduit à ne disposer que de 5 séances pour ce projet, séances s'étalant de février à juin.

Pour analyser les différentes séances qui se sont déroulées, nous décomposerons ces séances en 3 parties : la première est le temps de jeu proprement dit, la seconde est le temps d'analyse des jeux et la troisième est le temps de la réalisation des affiches.

Pour pouvoir parler des temps de jeu, nous commencerons par parler des différents jeux qui ont été choisis pour ce projet. Tout d'abord, ces jeux sont issues de la collection dont dispose l'association d'animation « La Sauce Ludique » qui nous a prêté ses jeux pour le temps de ce projet. Les élèves joueront à des jeux à règles contemporains ou traditionnels qui ont été spécifiquement choisis selon certains critères qui nous semblent pertinents. Les qualités retenues pour ces jeux sont les suivantes :

- un nombre de joueurs réduit (de 2 à 4),
- un temps de jeu de moins de 20mn,
- des règles de jeu simples et facilement analysables,
- des thèmes de jeu adaptés à l'âge du public,
- des jeux de hasard et de stratégie (pas de question, de rapidité, ...).

Les jeux sélectionnés sont les suivants : Héros à louer, Quarto, Kooba, Las Vegas, Awalé, Kamisado, Mini-villes, Desperados of Dice Town, The Game, 6 qui Prend, Armadora, Mr Jack Pocket.

Pour la première séance, j'ai présenté aux élèves le déroulement et l'objectif du projet jeu,

c'est à dire d'une part de jouer à des jeux et d'autres part d'effectuer un travail d'analyse et de production à partir de ces jeux. J'ai ensuite présenté aux élèves le déroulement de la séance : il y a plusieurs jeux de société dont ils ne connaissent pas les règles. Je suis présent pour expliquer aux différentes tables les règles des jeux mais je ne peux pas expliquer les règles à tous les groupes en même temps, par conséquent, ceux qui attendent une explication de règle peuvent prendre le livret de règle et mettre en place le jeu en fonction de ce qui est décrit. Ils peuvent ensuite lire le livret de règle pour avoir une compréhension des règles du jeu. Les séances s'effectuant par demi-classe, il y a environ 18 élèves par groupes qui se répartissent sur 5 jeux différents. Sur les 50 minutes de la séance, je donne également comme consigne aux élèves de jouer au moins à 2 jeux différents.

Durant ce temps de classe, ma posture professionnelle relevait plus de mon ancien travail d'animateur jeu, qui consistait à aller d'un groupe à l'autre et d'expliquer aussi clairement que possible le déroulement du jeu en accompagnant éventuellement les premiers tours de jeu. Passant d'un groupe à l'autre, je m'assure de répondre aux différentes questions et de vérifier si, d'une part, les élèves comprennent et appliquent bien les règles du jeu et, d'autre part, que les élèves prennent plaisir à jouer aux différents jeux. Lorsqu'ils ont fini une partie ou lorsqu'ils ne semblent pas prendre plaisir à un jeu, je leur demande de formuler leur avis et leur ressenti sur le jeu. Pour les élèves comme pour moi, la dialectique temps de classe / temps récréatif qui a lieu durant ces séances de jeu n'est pas évidente à gérer. D'un côté il est attendu que les élèves soient en situation de jeu, s'autorisent à prendre du plaisir à jouer à des jeux, aient un espace plus libéré que dans un temps de classe. Mais par ailleurs, il nous sommes toujours dans le cadre de l'institution scolaire, j'ai toujours le statut d'enseignant et donc d'autorité scolaire qui va avec. Par ailleurs en tant que professeur, mes propositions d'activité sont en fait des impositions. Le jeu n'est ici pas libre mais contraint, le temps de loisir n'en est pas vraiment un, d'autant qu'il y a nécessairement des objectifs pédagogiques dans l'activité.

A partir de la deuxième séance, après avoir continué pour un temps la découverte de jeux, les élèves devaient se positionner sur le choix d'un jeu et en effectuer une description en utilisant comme support une fiche d'analyse des jeux⁵. La construction de ce document à destination des élèves est issu d'un document utilisé dans le cadre de formation BAFA et conçu par les professionnels de l'association « La Sauce Ludique ». Nous avons simplifié ce document pour qu'il serve notre propos et puisse être utilisé par les élèves sans entrer dans des détails trop techniques et pas nécessairement adaptés pour le travail visé. Cette fiche d'analyse se découpe en trois parties. La première partie est constituée des éléments du jeu qui peuvent être obtenus à partir d'une analyse documentaire : l'auteur du jeu, l'éditeur, le nombre de joueur ou le matériel sont des éléments qui

5 Voir Annexe 2

sont documentés directement sur le jeu. La deuxième partie, la description du jeu et de ses objectifs, suppose une reformulation des éléments clés des règles du jeu. Il s'agit de l'activité la plus relevante d'une activité mathématique puisqu'elle nécessite que l'élève se soit approprié le système formel du jeu et puisse ensuite le communiquer de manière synthétique en quelques lignes. Enfin, la dernière partie du document est plus d'ordre subjectif et propose aux joueurs de rédiger une évaluation du jeu. Cette évaluation s'effectue à travers des critères formels (le diagramme étoilé avec les parts de hasard, stratégie, négociation, etc.) et à travers des critères personnels (ressenti, avis personnel).

Pour conclure sur ce travail, les élèves ont effectivement adhéré au temps de jeu effectué sur les premières séances et ont, pour la plupart, effectué convenablement le travail de description de chaque jeu. Ce travail était hélas le seul qui proposait un tant soit peu d'abstraction et d'analyse pouvant avoir un lien quelconque avec du travail mathématique. Sur l'ensemble des 5 séances effectuées par les élèves, le temps d'activité mathématique était très réduit, voire inexistant. Le projet était intéressant, il y a eu des temps de jeu, des temps de travail de communication et de rédaction, mais les objectifs d'apprentissage de mathématiques n'ont pas été effectués. Cette expérience m'amène à établir le fait que la mise en place d'une approche transdisciplinaires, combinant plusieurs approches et plusieurs interlocuteurs, et foncièrement pertinente, car œuvrant aux objectifs d'ouverture culturelle des élèves. Hélas, le contexte d'apprentissage et la pression exercée sur les enseignants et les élèves pour l'apprentissage des mathématiques rend difficile cette ouverture à d'autres pratiques connexes des mathématiques, pratiques qui ont pourtant l'avantage de susciter de la curiosité, de recontextualiser les mathématiques dans le monde, et ainsi de permettre une motivation intrinsèque de certains élèves pour certaines composantes de cette matière jugée souvent trop austère et abstraite pour la majorité des élèves.

3. Troisième expérimentation : Une découverte des jeux combinatoires avec des jeux de type « jeux de Nim »

Cette troisième expérimentation avec utilisation des jeux a été effectuée sur un temps de classe. La première problématique à laquelle est confrontée cette situation est que le contenu étudié n'a pas de place dans le programme d'apprentissage en mathématique en seconde. Certains éléments et modes de représentation peuvent cependant être en lien avec certaines composantes du programme. Le jeu de Nim et sa résolution sont présentées dans l'annexe 4.

Dans cette activité (voir annexe 3), les élèves vont étudier la résolution de jeux de type Nim. L'activité commence par une projection d'un extrait du film « L'année dernière à Marienbad » dans lequel on voit le personnage principal jouer à un jeu de type Nim en expliquant qu'il gagne toujours à ce jeu. L'enjeu de la séance présenté aux élèves est de leur faire acquérir cette stratégie gagnante

et de comprendre comment le personnage fait pour gagner à tous les coups. L'activité est découpée en une alternance de différents temps, d'une part des temps de jeu à des exemples ou variantes précises de jeux de Nim, ensuite à des temps de réflexion et d'échange pour exprimer des stratégies gagnantes à ces jeux. La première partie de l'activité reprend le principe du jeu des bâtonnets, connu également comme la course à 20. Après quelques parties du premier jeu, nous effectuons une mise en commun pour discuter de la manière de gagner à coup sûr au jeu. On s'attend à ce que les élèves expriment une règle du type « si je suis dans une situation $4n+1$, alors je peux gagner à coup sûr ». En terme de représentation, nous souhaitons amener les élèves à représenter les états du jeu sous forme d'arbre, ce qui nous semble une forme de représentation adaptée pour la résolution de ce jeu et des suivants. Le deuxième type de jeu proposé est le jeu de Nim « classique » composé de différents tas d'objets. En contrepoint de la règle du jeu présenté dans l'extrait de film, les règles proposées sont celle de la règle « normale » tandis que dans le film il s'agit de la variante « misère » ; La différence entre les deux est que, dans la version normale, le joueur qui prend le dernier bâtonnet gagne, tandis que dans la variante misère, celui qui prend le dernier bâtonnet perd. L'analyse des situations particulières doit permettre d'effectuer un raisonnement qui permet de se généraliser et de résoudre entièrement le jeu de Nim à deux tas, ce qui nous permet ensuite d'aborder les jeux de Nim à 3 tas. À partir du jeu à 3 tas, l'analyse exhaustive est moins aisée et la description d'un graphe général est plus délicate. L'objectif du travail est de pouvoir au moins résoudre la situation (1, 2, 3) totalement en utilisant les résolutions obtenues pour les situations à deux tas. La résolution complète du jeu de Marienbad n'est pas attendue, mais elle est proposée. Le concept de Nim-addition qui généralise la résolution des jeux de type Nim ne sera pas abordé.

Cette activité a duré en tout 1h30 environ. La première demi-heure a eu lieu après 1h30 de cours, en fin d'année. Les élèves étaient peu concentrés et peu impliqués. L'idée était de proposer un autre type d'activité en fin d'année, sans avoir les contraintes du programme et sous des formes plus créatives, tout en ayant une activité mathématique. La mise en activité des élèves a été difficile. L'heure et demie précédente ayant été épuisante et difficile, il m'a été difficile de faire vivre et de donner envie aux élèves de participer à cette activité. J'ai eu du mal à introduire l'activité malgré le fait que j'ai préparé quelques mots d'introduction sur le lien entre jeux, mathématiques et informatique. Les élèves attendaient quand même cette séance, dont j'avais parlé la semaine précédente déjà. Ils ont joué le jeu et ont fait quelques parties du premier jeu (les bâtonnets). Je n'avais prévu que de faire un échange oral avec eux, et j'ai improvisé sur le moment le fait de faire venir un élève au tableau et de le faire jouer directement sur le tableau au jeu contre moi. Je crois que le fait de jouer directement au tableau peut être intéressant, notamment en faisant participer l'ensemble de la classe qui peut faire office de « coach stratégique » pour celui qui est au tableau. Nous n'avons pas eu le temps d'analyser entièrement ce premier jeu, analyse qui a donc été reportée.

au lendemain.

La deuxième séance de cette activité a eu lieu le lendemain matin, sur une séance d'une heure. Il s'agissait de la dernière séance de classe de l'année. Nous avons commencé la séance en se rappelant l'analyse du jeu de la veille et en reformulant les raisonnements proposés. J'ai fait le choix de traduire moi-même les propositions dites par les élèves sous forme d'arbre. Assez rapidement, la situation « 5 objets restants » est vue comme une situation perdante. Mais il a été difficile d'amener les élèves à effectuer ensuite un raisonnement par récurrence (seule un mode intuitif et informel était attendu) pour aller vers la généralisation $4n+1$ de l'ensemble des situations perdantes. L'étape suivante a été de les amener à résoudre le jeu de Nim à 2 tas et leur faire observer que la situation (n, n) est une situation perdante. Cela s'est fait oralement avec quelques élèves, mais je ne suis pas sûr que la notion ait été assimilée. Pour la suite, lorsque les élèves jouaient aux version du jeu à 3 tas, je suis passé dans les rangs et j'ai obligé les petits groupes d'élèves (2-4) à jouer contre moi. Je leur laisse systématiquement le choix de commencer ou non. C'est au cours de cette phase qu'un des élèves a eu une réflexion très pertinente : il a dit que, si on sait à l'avance qui va gagner ou perdre, ce n'est plus un jeu. C'est en effet, très pertinent et cela viens corroborer les éléments d'analyse cités plus haut.

Cette activité, étant hors programme, a été placée en toute fin d'année, après avoir fait l'ensemble des séquences relatives au programme de seconde ; Par conséquent, l'attention des élèves et leur intérêt pour ce qui est fait en classe était plutôt réduit. Néanmoins, il s'agit de l'activité pour laquelle nous avons constaté le meilleur équilibre entre activité de jeu et activité mathématique. Des réflexions et des raisonnements intéressants ont été formulés par des élèves, et une grande partie d'entre eux ont essayé de jouer aux jeux proposés. Des élèves habituellement passifs et décrocheurs se sont intéressés à ce qu'il s'est passé en classe. Cet outil, et la réflexion sur l'élaboration de stratégie gagnante dans des jeux suffisamment simples est une pratique qui nous semble intéressante pour l'apprentissage des mathématique et aussi pour l'apprentissage de raisonnements qui seront utiles pour l'algorithmique et la programmation qui ont vocation à être de plus en plus étudiées en classe. En terme de raisonnement mathématique, il est néanmoins difficile d'amener les élèves à avoir de la rigueur dans leur raisonnement. Pour beaucoup, lors des parties observées ou sur lesquelles nous avons échangé, ils essaient de gagner sans pour autant effectuer un raisonnement poussé. Par conséquent, il n'y a pas de démarche déductive qui les conduise vers une solution tranchée au problème. Les élèves sont restés sur la dimension de jeu et pas sur la dimension de recherche de problème qui est proposée de façon sous-jacente au jeu.

IV. Conclusion : ouverture vers une recherche rigoureuse et scientifique

Les travaux, recherches et expérimentations effectués dans le cadre de mon année de stage, ne permettent pas d'établir avec précision des réponses aux questions initialement posées, à savoir :

- **Dans quel mesure le jeu permet-il de développer des compétences mathématiques ?**
- **Comment mettre en place du jeu en classe ?**

En effet, les différentes expérimentation ont été effectuées au sein d'une seule et même classe. Le contexte de classe, la gestion de ce groupe classe et de ses apprentissages étant en soi une composante nouvelle et pour laquelle je ne disposait d'aucune expérience, ne me permet pas d'effectuer des affirmation ni même des comparaisons par rapport à d'autres situations de classe. Ces expérimentations permettent néanmoins de saisir que le jeu n'est nullement un remède miracle et que sont utilisation doit être pensée sur différents niveaux. Si le fait de joueur peut faire appel à des raisonnements mathématiques, la démarche d'implication des élèves et le fait de les faire entrer dans une véritable activité mathématique doit avoir été travaillée et contextualisée en amont. Le jeu ne permet pas de formuler directement des raisonnements, et les élèves ne voient pas nécessairement l'intérêt de la démarche de généralisation et d'abstraction faite comme analyse stratégique. Ils se cantonnent bien souvent au fait de jouer sans aller plus loin. Nous affirmons quand même que les éléments pour l'analyse des jeux sont cohérents mais ne forment pas encore un cadre suffisant pour une classification des objets ludiques mathématiques.

Effectuer un travail rigoureux et scientifique supposerait de réaliser une séquence utilisant le jeu à travers une ingénierie didactique relevant explicitement les variables didactiques considérées et ayant des critères observables pouvant être menés rigoureusement. Cela n'a vraisemblablement que peu de sens d'effectuer ce type de recherche dans le contexte de l'apprentissage du métier au sein duquel l'expérimentation est effectuée. Le chercheur se trouvant à la fois dans une situation d'observateur et à la fois dans une position d'enseignant. Nous devrions proposer un autre protocole expérimental pour disposer d'élément suffisamment solides pour pouvoir effectuer une analyse scientifique. Voici différentes pistes permettant de pousser plus loin le travail entamé ici et ainsi disposer d'éléments objectivables pour une analyse scientifique :

- Effectuer une étude sociographique sur la manière dont des enseignants du secondaire utilisent le jeu en classe et hors de la classe, pour quels objectifs pédagogiques, et avec quels effets. Une telle enquête permet de questionner la place du jeu pour les enseignants de mathématiques, et également d'avoir des informations sur les mises en pratique du jeu en classe et avec quels effets.

- Proposer une ou plusieurs activités, à travers une séance unique ou bien menée tout au long d'une séquence, à des enseignants de mathématiques d'un niveau donné et effectuer des observations quand à la mise en place de cette démarche et d'en percevoir les effets en terme d'apprentissages mathématiques de la part des élèves.

Ces différentes démarches sont suffisamment lourdes à mettre en place pour qu'il s'agisse d'un travail de recherche global à mener sur un temps suffisamment long et avec un tant soit peu de recul quand à l'activité professionnelle considérée (c'est à dire le métier de professeur de mathématiques).

Bibliographie

Brougère, G. (2005) *Jouer / Apprendre*. Economica.

Caillois, R. (1967) *Des jeux et des hommes*. Gallimard.

Chen J. (2007) *Flow in Games*. Thèse, MFA thesis. Disponible en ligne sur http://www.jenovachen.com/flowingames/Flow_in_games_final.pdf

Conway, J. H. (1976), *On numbers and Games*, CRC

Garon, D. (Dir) (2002) *Le Système ESAR: guide d'analyse, de classification et d'organisation d'une collection de jeux et jouets*. Montréal : Éditions ASTED ; Paris : Éditions du Cercle de la librairie.

Colipan, X.. Étude didactique des situations de recherche pour la classe concernant des jeux combinatoires de type Nim. Éducation. Université Joseph Fourier, 2014

Godot, K. (2005) *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation. Exemple de la roue aux couleurs*. Thèse de doctorat. Université Joseph-Fourier Grenoble I.

Hitt, F. (2013) *Théorie de l'activité, Interactionnisme et socioconstructivisme. Quel cadre théorique autour des représentations dans la construction des connaissances mathématiques ?* article

Knizia, R. (2010) *Dice Games properly explained*, Blue Terrier Press

Pelay, N. (2011) *Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard, Lyon

Sautot J.-P. (2004). *Éducatif, vous avez dit jeu éducatif ?* Compte rendu d'un atelier de production aux Rencontres Ludiques.

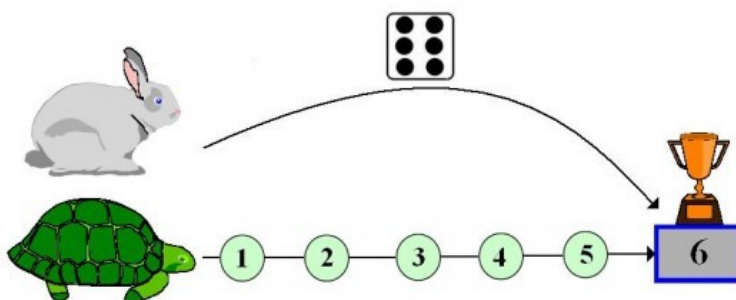
Annexe 1 : activité de recherche « jeu du Lièvre et de la tortue »

Le lièvre et la tortue

Règle du jeu :

À chaque tour, on lance un dé. Si le 6 sort, alors le lièvre gagne la partie, sinon la tortue avance d'une case. La tortue gagne quand elle a avancé 6 fois.

Le jeu est-il à l'avantage du lièvre ou de la tortue ?



- Vous pouvez utiliser tous les outils à votre disposition (pions, dés, papier et crayon, calculatrice, ...)
- Vous écrirez vos recherches et vos démarches sur une feuille libre que vous rendrez à la fin de l'heure
- La recherche et le compte rendu seront notés sur 5, et seront pris en compte les éléments suivants :
 1. le travail de recherche effectué : qu'il aboutisse ou non, tant que vous avez cherché, c'est bien,
 2. la rédaction : votre compte rendu doit être clair et compréhensible, et les démarches détaillées
 3. le contenu mathématique : si vous utilisez des outils mathématiques adaptés, ce sera valorisé

Tant que vous jouez le jeu, ce sera valorisé !

Question bonus : combien de cases faudrait-il ajouter ou enlever à la tortue pour que le jeu soit le plus équitable possible entre le lièvre et la tortue ?

Annexe 2 : fiche d'analyse de jeu

NOM DU JEU :

AUTEUR :		ILLUSTRATEUR :	
DUREE : environ minutes	EFFECTIF : de à	AGE : à partir de ans	
MATERIEL :		THEMATIQUE :	

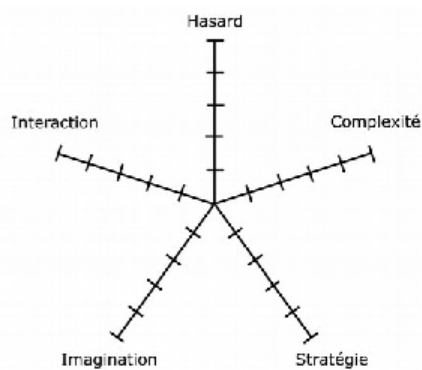
REGLE DU JEU :

But du jeu :

Déroulement :

Fin du jeu :

EVALUATION DU JEU :



VOTRE AVIS SUR LE JEU :

Annexe 4 : analyse mathématique du jeu de Nim

Nous nous intéressons dans ce document aux jeux présentant les caractéristiques suivantes :

- jeux à deux joueurs (duel)
- observation complète (les deux joueurs ont en permanence accès à toutes les informations sur l'état du jeu et aux états précédents)
- jeu déterminé (il existe un nombre fini d'états du jeu)
- jeu impartial (pas de match nul possible)

Le jeu de Nim fini

Un jeu de Nim fini suit les règles suivantes :

- Il est défini par un ensemble de p entiers non nuls $N_i : (N_1, N_2, \dots, N_p)$
- Deux joueurs 1 et 2 jouent à tour de rôle en soustrayant un nombre $k \geq 1$ d'un des N_i , avec $k \leq N_i$
- Si un joueur ne peut plus jouer, il a perdu i.e. un joueur qui se retrouve dans l'état $()$ a perdu.

On notera $E=(N_1, N_2, \dots, N_p)$ un état possible du jeu.

On peut représenter le jeu sous forme d'un graphe orienté. Deux états E_1 et E_2 sont connectés ($E_1 \rightarrow E_2$) si et seulement si il existe un jeu possible pour un joueur permettant de passer de E_1 à E_2 .

Propriété 1 : Si $E_1=(N_1, N_2, \dots, N_p)$ et $E_2=(N'_1, N'_2, \dots, N'_q)$ tel que $E_1 \rightarrow E_2$. Alors $\sum N_i > \sum N'_i$. Par conséquent, le graphe orienté du jeu ne contient pas de cycle et converge vers l'état final $()$

Définition : on appelle état gagnant un état qui pointe vers l'état final $()$ ou vers au moins un état perdant. On appelle état perdant un état qui ne pointe vers aucun état perdant.

Propriété : c'est deux définition étant complémentaires l'une de l'autre, chaque état est ou bien gagnant ou bien perdant.

Théorème : il existe une stratégie gagnante pour tout joueur qui se trouve dans un état gagnant (il est sûr de gagner).

Propriété : Si on considère deux jeux $J_1 (N_1, N_2, \dots, N_p)$ et $J_2 (N'_1, N'_2, \dots, N'_q)$ tels que $p \leq q$ et pour tout $i \leq q$, $N'_i \leq N_i$, alors $J_2 \subset J_1$

Analyse stratégique

Théorème : pour tout jeu de Nim fini, il existe une stratégie gagnante pour le joueur 1 ou le joueur 2.

démonstration : tout état du jeu est soit gagnant, soit perdant, la situation de départ est soit gagnante soit perdante. Si elle est gagnante, alors le joueur 1 dispose d'une stratégie gagnante. Si elle est perdante, alors le joueur 2 se trouvera à son tour dans un état gagnant et disposera dès lors d'une stratégie gagnante.

Théorème : le jeu de Nim (n) est gagnant : $(n) \rightarrow ()$

Théorème : le jeu de Nim (n,n) est perdant

démonstration : joueur 1 a deux choix : soit il joue (k,n) avec $0 < k < n$, soit il joue (n). Si il joue (n), alors joueur 2 joue () et joueur 1 a perdu. Si il joue (k,n), alors joueur 2 joue (k,k) toujours avec $0 < k < n$. Joueur 1 se retrouve alors dans la situation initiale. Si il se retrouve dans le jeu (1,1), alors il joue forcément (1) et il a perdu.

Corollaire : le jeu de Nim $J=(k,n)$ est gagnant

démonstration : joueur 1 joue (k,k) et alors joueur 2 est perdant d'après le théorème précédent.

Résolution du jeu de Nim à 3 tas

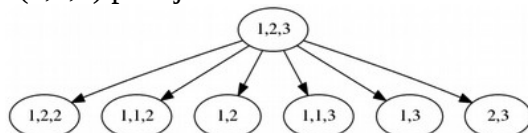
Situations triviales

(k,k,n) est gagnant $(k, k, n) \rightarrow (k, k)$

Cas particuliers :

(1,2,3) est perdant

Démonstration : (1,2,3) peut jouer :



(1,2,2) qui est gagnant (k,k,n)

(1,1,2) qui est gagnant

(1,2) qui est gagnant

(1,1,3) qui est gagnant

(1,3) qui est gagnant

(2,3) qui est gagnant

Corollaire : pour tout $k > 0$, $(1+k,2,3)$, $(1,2+k,3)$ et $(1,2,3+k)$ sont gagnants

Définition : Nim-addition. On définit la Nim-addition d'un jeu (k,n,p) comme la somme « sans retenue » des nombre k, n et p en base 2 : $k=(k_q k_{q-1} \dots k_1 k_0)_2$, $n=(n_q n_{q-1} \dots n_1 n_0)_2$, $p=(p_q p_{q-1} \dots p_1 p_0)_2$. La Nim-addition N de k, n et p est le nombre en base 2 $N=(N_q N_{q-1} \dots N_1 N_0)_2$ avec, pour tout i compris entre 0 et q, $N_i \equiv k_i + n_i + p_i [2]$

Remarque fondamentale : toutes les situations perdantes décrites précédemment ont une Nim-addition nulle. Toutes les situations gagnantes décrites précédemment ont une Nim-addition non-nulle.

Propriété 1 : De toute situation à Nim-addition non-Nulle on peut jouer de manière à se placer dans une situation à Nim-addition nulle.

Démonstration : supposons que (k,n,p) soit une situation à Nim-addition non-nulle. Il existe alors un nombre fini de rangs i tels que $k_i + n_i + p_i \equiv 1 [2]$. Il existe nécessairement un plus grand rang i_{\max} tel que $k_i + n_i + p_i \equiv 1 [2]$ et nécessairement, k_i ou n_i ou p_i est non nul. Si plusieurs d'entre eux sont non-nuls, choisissons le plus grand des trois entre k, n et p. Pour l'écriture, supposons qu'il s'agisse de p. A chacun des rang i tels que $k_i + n_i + p_i \equiv 1 [2]$, si $p_i=1$ alors on soustrait 1 à p_i , et si $p_i=0$ alors on ajoute 1 à p_i . Comme on raisonne en base 2,

on a, par définition, retiré à p au maximum la quantité $2^{i_{\max}} - \sum_{j=0}^{i_{\max}} 2^j \geq 1$. Par conséquent, il s'agit d'un coup possible.

Propriété 2 : De toute situation à Nim-addition nulle, on ne peut jouer que vers une situation à Nim-addition non-nulle.

Démonstration : supposons $k_i + n_i + p_i \equiv 0[2]$ pour tout i . Jouer un coup, c'est nécessairement, pour au moins un rang i donné, modifier une et une seule valeur (un 1 en 0 ou un 0 en 1). Par conséquent, pour ce rang, on a alors après le coup joué $k_i + n_i + p_i \equiv 1[2]$ et nous sommes donc dans une situation de Nim-addition non nulle.

Théorème : Soit (k,n,p) un jeu de Nim dont la Nim-addition est non-nulle. Alors le joueur 1 dispose d'une stratégie gagnante qui consiste à jouer systématiquement de manière à ce que son adversaire soit dans une situation de Nim-addition nulle.

Corollaire : Soit (k,n,p) un jeu de Nim dont la Nim-addition est nulle. Alors le joueur 2 dispose d'une stratégie gagnante (celle décrite ci-dessus)

Démonstration du théorème : Soit $J=(k,n,p)$ un jeu de Nim dont la Nim-addition est non-nulle. Appelons (s_i) la suite des sommes $k+n+p$ au i -ème coup. (s_i) est strictement décroissante par définition du jeu. Si le joueur 1 joue de manière à placer systématiquement son adversaire dans une situation de Nim-addition nulle, il y aura forcément un rang j auquel $s_j \leq 6$, et le joueur 2 sera alors dans une des situations perdantes connues.

Démonstration du corollaire : Comme joueur 1 est dans une situation de Nim-addition nulle, il joue forcément de manière à placer joueur 2 dans une situation de Nim-addition non-nulle et par conséquent il suffit d'appliquer le théorème en inversant joueur 1 et joueur 2.

Le jeu de Nim à n tas

Idée générale : le jeu de Nim à n tas ne diffère pas du jeu de Nim à 3 tas. En effet, la stratégie gagnante consiste toujours à placer l'adversaire dans une situation à Nim-addition nulle et on peut toujours jouer de manière à le faire (dés lors qu'on est soi-même dans une situation à Nim-addition non-nulle. Les propriétés 1 et 2 ci-dessus et le théorème peuvent relativement facilement être étendus au cas à n tas.