



HAL
open science

La manipulation en maternelle : un outil d'aide à la construction du nombre

Marjorie Souillard

► **To cite this version:**

Marjorie Souillard. La manipulation en maternelle : un outil d'aide à la construction du nombre. Education. 2016. dumas-01428946

HAL Id: dumas-01428946

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01428946>

Submitted on 6 Jan 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année universitaire 2015-2016

Master Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation

Mention Premier degré

**La manipulation en maternelle :
un outil d'aide à la construction du nombre.**

Présenté par Marjorie SOUILLARD

Première partie rédigée en collaboration avec Aline CHARPY

Mémoire de M2 encadré par Laurent PECH

Autorisation de diffusion électronique d'un mémoire de Master 2 MEEF dans la base DUMAS¹

Autorisation de l'étudiant(e)

Je soussignée MARJORIE SOUILLARD.

auteur et signataire du mémoire de niveau Master 2, intitulé :

La manipulation en maternelle : un outil d'aide à la construction du nombre

, agissant en l'absence de toute contrainte,

autorise **n'autorise pas** ²

le Service Interétablissement de Documentation de l'Université Grenoble Alpes-Grenoble INP à le diffuser, sans limitation de temps, sur la base DUMAS en texte intégral.

- Je certifie la conformité de la version électronique déposée avec l'exemplaire imprimé remis au jury.
- Je m'engage à signaler les documents pour lesquels je ne détiens pas les droits de reproduction et de représentation ou les autorisations afférentes. Ces documents devront être masqués ou retirés de la version diffusée sur la base DUMAS par les auteurs.
- La présente autorisation de diffusion n'a pas de caractère exclusif. L'auteur conserve par conséquent toutes les possibilités de cession de ses droits et de diffusion concomitante de son mémoire.
- Je renonce à toute rémunération pour la diffusion effectuée dans les conditions précisées ci-dessus.
- Conformément à la loi « informatiques et libertés » du 6 janvier 1978, modifiée en 2004, je pourrai à tout moment modifier cette autorisation de diffusion par simple lettre ou courriel à la BUPE : membupe@univ-grenoble-alpes.fr

Fait à Chambéry

le 14 Mai 2016

Signature de l'étudiant(s)(e),

Précédée de la mention « bon pour accord »



Bon pour accord
~~Marjorie Souillard~~

Attestation de non-plagiat

Je soussigné(e) (Prénom NOM)

MARJORIE SOUILLARD

Auteur du mémoire de master 2 ou de l'écrit scientifique réflexif MEEF-PE / ~~MEEF-SD~~ / ~~MEEF-EE~~
(entourez la mention et indiquez le titre du mémoire)

La manipulation en maternelle : un outil d'aide à la construction du nombre.

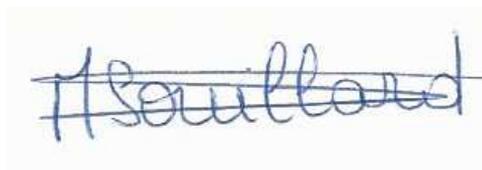
déclare sur l'honneur que ce mémoire est le fruit d'un travail personnel, que je n'ai ni contrefait, ni falsifié, ni copié tout ou partie de l'œuvre d'autrui afin de la faire passer pour mienne.

Toutes les sources d'information utilisées et les citations d'auteur ont été mentionnées conformément aux usages en vigueur.

Je suis conscient(e) que le fait de ne pas citer une source ou de ne pas la citer clairement et complètement est constitutif de plagiat, que le plagiat est considéré comme une faute grave au sein de l'Université, pouvant être sévèrement sanctionnée par la loi.

Fait à Chambéry,

Le 14 Mai 2015



Signature de l'étudiant(e)

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.....	5
1. QUELQUES DEFINITIONS POUR MIEUX COMPRENDRE	6
1.1. Qu'est-ce qu'un nombre ?.....	6
1.2. Qu'est-ce qu'un chiffre ?.....	8
1.3. Qu'est-ce que compter ?.....	8
1.4. Qu'est-ce que dénombrer ?.....	9
2. L'ENFANT ET LE NOMBRE.....	9
2.1. La construction du concept de nombre avant Piaget.....	9
2.2. La construction du concept de nombre selon Piaget	10
2.3. De nouvelles recherches	11
3. L'ENFANT ET LA CONSTRUCTION DU NOMBRE	11
3.1. Les attentes institutionnelles : Programme de l'école maternelle 2015.....	11
3.2. L'apprentissage du dénombrement.	12
3.3. Les différentes situations de vie de classe et l'usage du nombre.....	15
4. LES DIFFERENTES ETAPES DE L'APPRENTISSAGE MATHEMATIQUE	16
5. LA MANIPULATION AU SERVICE DE L'APPRENTISSAGE MATHEMATIQUE ..	16
5.1. Définition	16
5.2. Les stades sensori-moteur et préopérateur chez Piaget.....	16
5.3. Enjeux.....	17
6. LA MANIPULATION AU SERVICE DE LA RESOLUTION DE PROBLEMES.....	19
6.1. Enjeux.....	19
6.2. Mise en œuvre	20
7. LE LANGAGE DANS LA COMPREHENSION DES TACHES MATHEMATIQUES .	20
8. L'EMERGENCE DE LA PROBLEMATIQUE.....	21
9. EXPERIMENTATION.....	22
9.1. Participants	22
9.2. Matériel	22
9.3. Procédure	23
10. RESULTATS	28
11. DISCUSSION.....	34
11.1. Recontextualisation	34
11.2. Analyse des résultats	34
12. CONCLUSION.....	40
BIBLIOGRAPHIE	41

INTRODUCTION

L'enfant a un besoin naturel de manipuler les objets qui l'entourent pour comprendre leurs fonctionnements et développer de nouvelles compétences.

En 2015, Les nouveaux programmes de l'école maternelle donnent une place importante au rythme de développement de l'enfant. Elle stipule que « l'équipe pédagogique aménage l'école [...] afin d'offrir aux enfants un univers qui stimule leur curiosité, répond à leurs besoins [...] et multiplie les occasions d'expériences sensorielles [...]. » ((Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, 26 mars 2015). Aussi, l'apprentissage par la manipulation est au cœur de l'actualité.

De nombreux chercheurs en didactiques des mathématiques ont exposés l'intérêt de la manipulation dans l'apprentissage des mathématiques chez les élèves de maternelle.

Ces recherches ont présenté le rôle important qu'elle joue pour l'enseignant et pour l'élève. Ils attirent l'attention sur le fait que la manipulation ne doit pas se cantonner à un simple exercice manuel, mais doit contribuer à développer une réflexion à partir de résolution de problèmes.

Ma problématique est née d'un regard croisé entre ma pratique de classe et mes lectures. Elle vise à mettre en avant l'impact de la manipulation, dans le cadre d'une résolution de problème, sur les procédures des élèves dans l'apprentissage de la notion de quantité et de ses différentes représentations.

Dans une première partie, j'aborderai le cadre conceptuel. Je développerai ici un cadrage linguistique, une présentation de la construction du nombre chez l'enfant et les différentes procédures à maîtriser. Nous poursuivrons sur l'intérêt de la manipulation en mathématique et plus particulièrement dans le cadre de la résolution de problèmes. Enfin, nous présenterons la place du langage en mathématiques.

Suite à ce cadrage théorique, je vous exposerai dans une seconde partie la démarche méthodologique dans laquelle vous trouverez la présentation du matériel utilisé, la population étudiée, la démarche expérimentale et ses modalités d'évaluations puis la réflexion qu'elle a engendrée.

Enfin, je conclurai quant à savoir si la manipulation dans le cadre d'une résolution de problèmes à un impact sur les procédures des élèves dans l'acquisition de la notion de quantité et ses différentes représentations.

1. QUELQUES DEFINITIONS POUR MIEUX COMPRENDRE

Nombre, chiffre, dénombrer, compter, l'ensemble de ce vocabulaire est utilisé au quotidien par les enseignants. Cependant, selon les études menées par la chercheuse en pédagogie des mathématiques Stella Baruk en 2003, de nombreux enseignants ne sont pas capables de donner une définition précise de ces termes.

1.1. Qu'est-ce qu'un nombre ?

D'après Stella Baruk, « un nombre est un élément d'un ensemble de nombres » (2003 p.28). Cette définition abstraite est, selon Baruk, « frustrante » (2003, p.28). Elle nous conduit à approfondir nos recherches sur la compréhension des ensembles de nombres.

D'après le didacticien des mathématiques et membre de l'équipe ERMEL Roland Charnay, il existe « différents ensembles de nombres inclus les uns dans les autres » (2013, p.10).

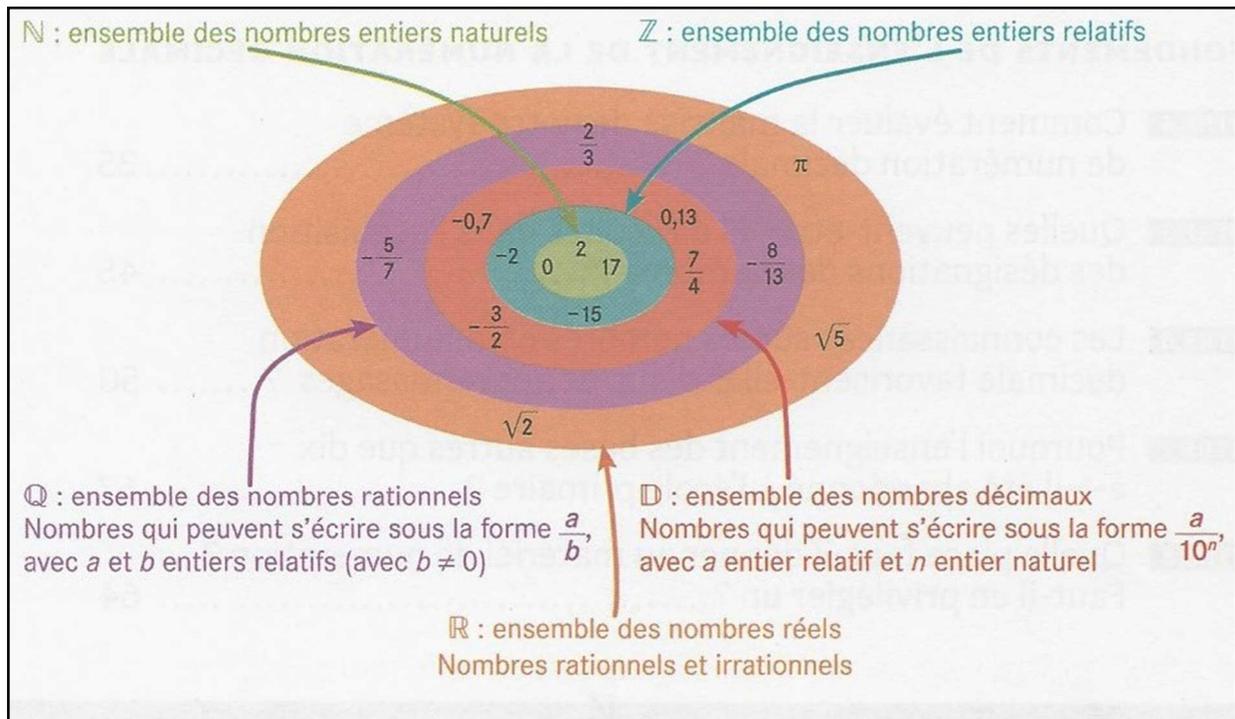


Figure 1- Représentation des ensembles de nombre

A l'école maternelle, l'apprentissage des mathématiques s'appuie sur le vécu des élèves. Aussi, les nombres utilisés sont ceux que les enfants rencontrent hors de l'école et à l'école, ceux qui leur permettent de compter des objets ou des personnes. Cet ensemble de nombres est appelé « ensemble des nombres entiers naturels » et est désigné en mathématiques par la lettre \mathbb{N} .

1.1.1. Les fonctions du nombre : A quoi sert le nombre ?

Pour que les élèves puissent accéder à la compréhension du nombre. Ils doivent en saisir le sens et l'usage.

En 2006, les enseignants Ney, Rajain et Vaslot, définissent trois fonctions du nombre :

(Ney, Rajain, & Vaslot, 2006)

- « Les nombres servent à mémoriser les quantités et à construire ainsi des collections ayant le même nombre d'éléments, sans la présence explicite de la collection de référence. » ;
- « Les nombres servent à comparer les quantités sans la présence explicite des collections. » ;
- « Les nombres servent à agir sur les quantités sans la présence explicite des collections de référence (à les transformer, les réunir, les partager, donc à calculer) ».

Les élèves devront progressivement apprendre à résoudre des situations d'apprentissages impliquant ces trois fonctions.

1.1.2. Les représentations du nombre

D'après Dominique Pernoux, ex-formateur en mathématiques à l'IUFM d'Alsace, il est primordial d'offrir aux élèves différentes représentations du nombre. Selon Charnay et le didacticien Raymond Duval, il est important de développer chez les élèves de maternelle la capacité à passer de l'une à l'autre des représentations, c'est ce que Charnay le transcodage. (Charnay, 2013).

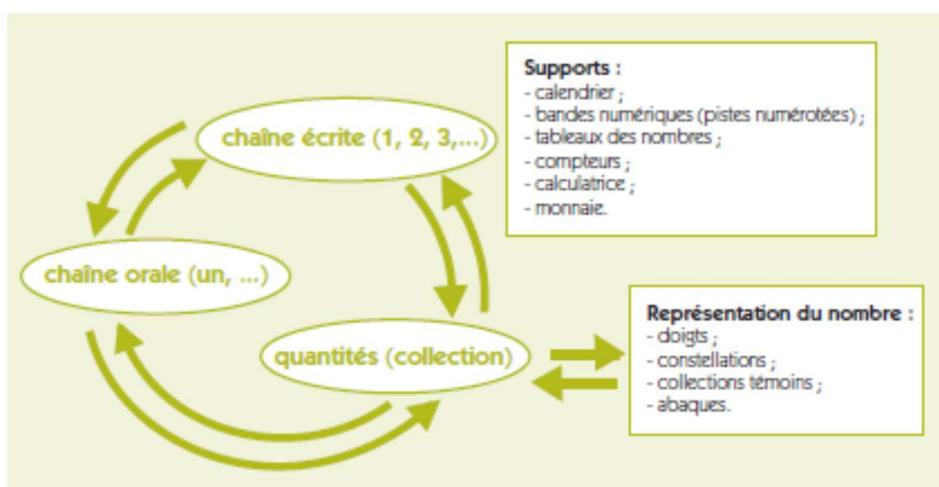
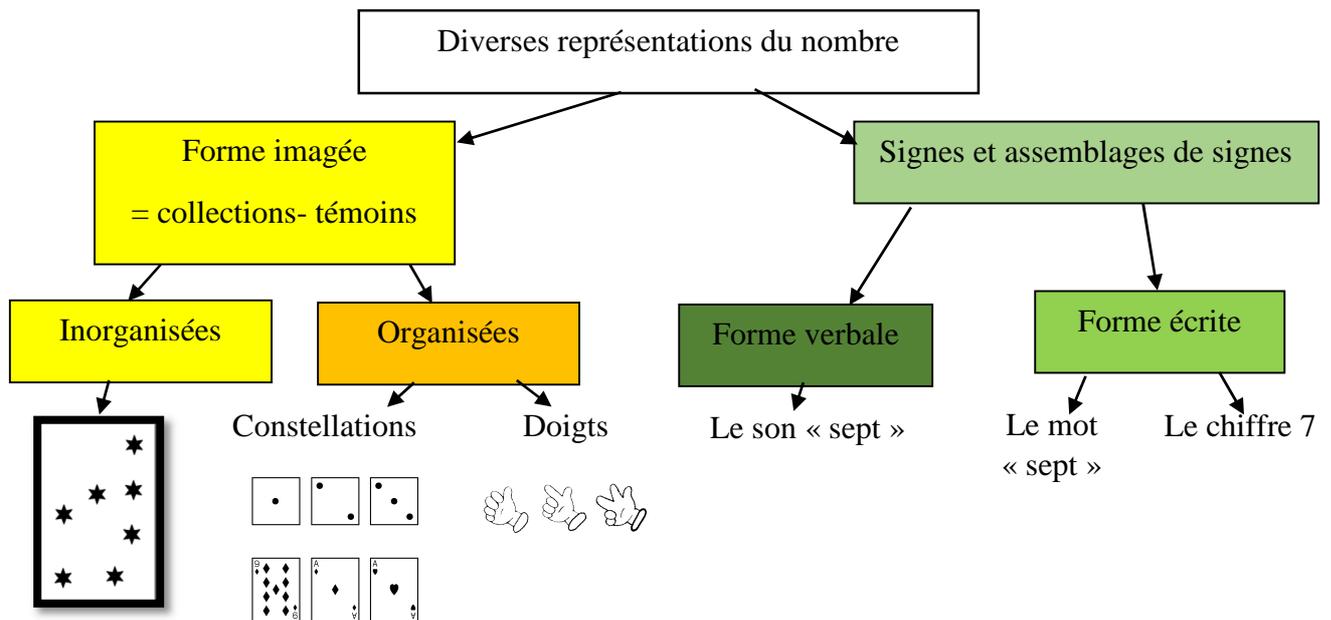


Figure 2 - Les différentes formes de représentations du nombre et les quantités

Il existe donc trois façons de représenter des nombres :



1.2. Qu'est-ce qu'un chiffre ?

Avant de définir un chiffre, il est intéressant de rappeler que l'homme n'a pas toujours eu besoin d'utiliser l'écriture chiffrée. Une légende raconte que pour compter ses moutons, un berger mettait dans un panier autant de cailloux que de moutons. C'est ce que l'on appelle la correspondance terme à terme : un caillou correspondant à un mouton. Seulement, ce système finit par atteindre ses limites puisque l'expression des grandes quantités est fastidieuse. Avec les civilisations Egyptienne, et Romaine, on voit naître des écritures du nombre sous forme de symboles. Chaque symbole représentant une quantité.

Il existe différentes numérations : additive chez les Egyptiens, hybride chez les Romains. En France, nous utilisons actuellement la numération de position, c'est un système d'écriture des nombres qui utilise une quantité limitée de chiffre : $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ dont la position conditionne la quantité exprimée.

Exemple : 52 est différent de 25

1.3. Qu'est-ce que compter ?

D'après les didacticiens des mathématiques, Fabien et Fabienne Emprin « Dans le langage courant, l'action de compter correspond à réciter ce que l'on nomme comptine numérique : un, deux, trois ... c'est énoncer la suite des mots-nombres ». (Emprin, 2010 ; Durpaire et Mégard, 2010 p.23) Charnay, précise que compter « c'est énumérer en désignant chacun des objets par un nombre, dans l'ordre de la suite des mots-nombres et en commençant par un » (2013 p 17). Ces trois auteurs s'accordent pour dire que savoir compter n'est pas la seule capacité que les

élèves doivent acquérir. Pour Fabien et Fabienne Emprin, « cette action de récitation n'est qu'une partie de ce que l'élève doit être capable de faire pour dénombrer des quantités en comptant : le comptage-dénombrement » (Emprin, 2010 ; Durpaire et Mégard, 2010 p.23). A ce stade de l'apprentissage, les élèves de maternelle ne sont pas encore capables d'utiliser les fonctions du nombre. Or, comme le précisent les chercheurs du groupe ERMEL « le but que nous poursuivons avec les élèves de Grande Section se situe dans la prise de conscience de l'utilité du nombre. » (Charnay et al, 2005 p. 39)

1.4. Qu'est-ce que dénombrer ?

Fabienne et Fabien Emprin définissent le dénombrement comme étant la capacité à « extraire le nombre de » (cités par Durpaire et Mégard, 2010 p.23). Charnay précise que « c'est une activité qui consiste à déterminer le nombre des éléments d'une quantité » (2010 p.17). Selon les didacticiennes des mathématiques, Cerquetti-Aberkane et Marilier, « cette connaissance est proche des notions autant que, plus que, moins que » (Cerquetti Aberkane & Marilier).

Dénombrer, c'est avoir compris que le nombre traduit une quantité. Le rôle des enseignants de Grande Section va être de proposer des situations d'apprentissage visant à conduire progressivement les élèves vers ce concept, en adaptant leur pédagogie aux capacités des différents élèves.

2. L'ENFANT ET LE NOMBRE

Aujourd'hui, pour faire acquérir au mieux ces notions aux élèves de l'école maternelle, il convient de s'interroger sur les différentes études menées au sujet de l'acquisition du nombre chez l'enfant.

2.1. La construction du concept de nombre avant Piaget

Depuis Pythagore et jusqu'au XIX^e siècle, il existait une thèse qui affirmait que les nombres naturels étaient innés chez l'homme. Ce concept se trouvait encore dans les *Cahiers de pédagogie moderne* (Ed. Bourrelier, 1958) où l'on pouvait encore lire : que « c'est du concept de cet enfant vierge que doit normalement partir une réflexion qui veut aboutir à l'élaboration d'une méthode et d'une progression valable pour l'enseignement du calcul au CP » (Charnay et al., 2005).

Les programmes de 1945, stipulent que « dans l'enseignement au CP, l'apprentissage des nombres doit se faire par l'observation de collections, d'objets simples ou usuels, maniés ou dessinés [...]. Pour avoir véritablement la notion d'un nombre, il faut pouvoir le reconnaître sous ses aspects divers ; connaître son nom, sa figure, sa constitution. ». Malheureusement, avec

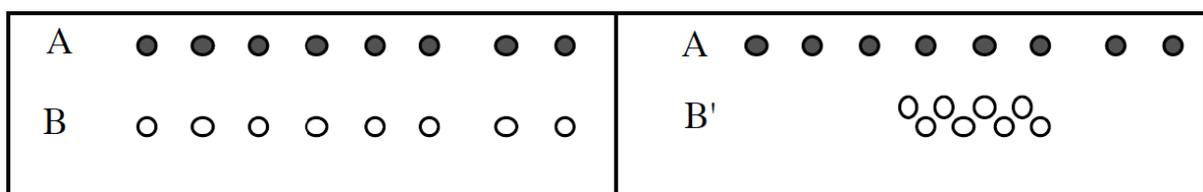
ces méthodes, on s'aperçoit que « le nombre est souvent confondu avec la collection : c'est à la fois un mot, un signe, une collection, une constellation » (Charnay et al., 2005 p. 19).

2.2. La construction du concept de nombre selon Piaget

C'est à cette époque que Piaget, psychologue suisse, et son élève Szeminska développent une théorie que Piaget décrit dans *La genèse du nombre chez l'enfant* en 1941. Dans cet ouvrage, l'auteur s'intéresse au processus de développement de la pensée enfantine jusqu'à l'adolescence et conclut qu'il se scinde en différents stades. Le passage d'un stade à un autre résulte d'une instabilité due à des situations provoquant un conflit intellectuel. En ce qui concerne le nombre, Piaget a démontré que ce concept fait appel à des constructions préalables présentes chez l'enfant. Il n'est pas intuitif comme on pouvait le penser avant. Il déclare que le nombre est la synthèse des structures de classification et d'ordre (aspect cardinal : expression de la quantité, et ordinal : indique une position). Ses expériences montrent que la construction de chacun de ces aspects passe par un certain nombre d'étapes obligatoires. Leur ordre est fixe mais leur durée peut varier selon les enfants.

2.2.1. L'aspect cardinal : Acquisition de la notion de conservation

Pour construire l'aspect cardinal, Piaget préconise, dans un premier temps, d'utiliser une collection d'objets similaires. L'épreuve à laquelle est soumise l'enfant vise à mettre en avant la notion de conservation. Il est vain pour l'élève de compter une quantité s'il n'est pas convaincu de la conservation de cette quantité. Par exemple, on présente à un enfant une collection A et on lui demande de construire une même collection B. Dans un second temps, on dispose cette collection différemment (B'), comme le montre le schéma suivant :



L'enfant doit comprendre que la disposition de la collection a changé mais que la quantité de celle-ci est la même. Cette certitude peut se traduire par les énoncés tels que nous *n'avons rien enlevé, ni rajouté* ou par le processus de correspondance des collections d'abord visuellement, puis par comparaison de chacun des termes.

2.2.2. L'aspect ordinal : Acquisition de la capacité de sériation

Pour construire l'aspect ordinal, l'enfant doit développer la capacité de sériation, il s'agit par exemple de ranger des objets par longueur croissante. La difficulté la plus récurrente dans le

concept de sériation est l'intercalation. L'enfant va voir qu'un objet est petit ou grand mais il n'est pas aisé pour lui de passer à des considérations relatives du type *plus grand que*.

2.3. De nouvelles recherches

Des recherches plus récentes ont vu le jour en 1978 avec le couple R. Gelman, professeur de psychologie et C.R. Gallistel, spécialiste des processus cognitifs de l'apprentissage et de neurobiologie. Ces auteurs analysent, de façon empirique, les capacités de comptage de l'enfant. L'activité de comptage serait selon eux, gouvernée par cinq « principes » permettant de dénombrer.

- 1) Le principe d'ordre stable : la liste de la chaîne numérique est une liste fixe
- 2) Le principe de correspondance terme à terme : chaque objet pointé doit être mis en correspondance terme à terme avec un mot de la liste.
- 3) Le principe cardinal : le dernier mot-nombre prononcé désigne le cardinal de l'ensemble des objets contenus dans la collection.
- 4) Le principe d'ordre indifférent : l'ordre dans lequel les éléments d'une collection sont énumérés n'affecte pas le comptage.
- 5) Le principe d'abstraction : on peut compter des objets de natures différentes.

Selon R. Gelman et C.R. Gallister, ces principes sont présents implicitement chez l'enfant dès l'âge de trois ans : bien plus tôt que ce que prévoyait Jean Piaget. Cependant, c'est leur mise en œuvre simultanée qui poserait problème au jeune enfant. Cette étude, fait nettement apparaître le rôle de la liste numérique comme outil de dénombrement et l'importance de la reconnaissance globale de petites collections (subitizing). Elle sera appuyée par des recherches plus récentes, notamment celles menées en 2013 par M. Fayol qui apportent un nouvel éclairage sur les pratiques de comptage et de calcul de l'enfant.

3. L'ENFANT ET LA CONSTRUCTION DU NOMBRE

3.1. Les attentes institutionnelles : Programme de l'école maternelle 2015

Le bulletin officiel spécial n°2 du 26 mars 2015 publié par le Ministère de l'Éducation Nationale précise les attentes ministérielles vis-à-vis de l'école maternelle : elle « doit conduire progressivement chaque élève à comprendre que les nombres permettent à la fois d'exprimer des quantités (usage cardinal) et d'exprimer un rang ou un positionnement dans une liste (usage ordinal) » (M.E.N, 2015, p. 3).

Le bulletin officiel fixe des objectifs, ainsi qu'un cadrage ; les progressions. En fin de Grande Section, les élèves doivent être capables :

- « D'évaluer et comparer des collections d'objets avec des procédures numériques ou non numériques.
- De réaliser une collection dont le cardinal est donné. Utiliser le dénombrement pour comparer deux quantités, pour constituer une collection de taille donnée ou pour réaliser une collection de quantité égale à la collection proposée.
- D'utiliser des symboles analogiques, verbaux et écrits, conventionnels ou non conventionnels pour communiquer des informations orales et écrites sur une quantité.
- D'avoir compris que le cardinal ne change pas si on modifie la disposition spatiale ou la nature des éléments.
- Quantifier des collections jusqu'à dix au moins ; les composer et les décomposer par manipulations effectives puis mentales. Dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix.
- Dire la suite des nombres jusqu'à trente. Lire les nombres écrits en chiffre jusqu'à dix »
(M.E.N, 2015, p. 15)

L'enfant arrive à l'école maternelle avec des connaissances sur le nombre, néanmoins il n'en a pas encore saisi la fonction. L'école doit construire le concept de nombre chez les élèves en s'appuyant « sur la notion de quantité, sa codification orale et écrite, l'acquisition de la suite orale des nombres et l'usage du dénombrement. » (MEN, 2015 p 13 et 14).

3.2. L'apprentissage du dénombrement.

Lors des premières manipulations, les enfants, par manque de connaissances sur le nombre, vont utiliser des procédures non numériques, pour comparer des collections, notamment la correspondance terme à terme ou l'estimation globale pour comparer des collections. Progressivement, l'enfant doit passer de la « débrouillardise à l'usage du nombre » (Ney et al., 2006, p .32). L'enseignant doit apporter aux élèves des situations d'apprentissages favorisant l'usage du nombre en mettant à distance les procédures « sensori-motrices ». (Ney et al, 2006 p 32). Aussi, pour développer le recours au nombre, il faut proposer des situations problèmes faisant appel à la mémorisation, l'anticipation ou la comparaison. L'enseignant veille toujours à proposer des situations adaptées au niveau des élèves.

3.2.1. Mémoriser la suite numérique jusqu'à 30

Normalement acquise entre 2 et 6 ans, la suite orale des nombres est utilisée dans des situations de dénombrement. Selon la didacticienne des mathématiques, Karen Fuson, les procédures de

dénombrement sont fortement liées à la maîtrise de la suite numérique. Elle définit quatre niveaux d'acquisition :

- Niveau 1 : Le niveau chapelet (*undeux-trois*) :

Les mots sont énoncés les uns à la suite des autres. Lors d'un dénombrement, il existe des problèmes de coordination entre le geste et la récitation. L'élève rencontre des difficultés à associer un mot-nombre à chaque objet.

- Niveau 2 : Le niveau de la chaîne insécable :

Tous les mots sont distincts, mais la chaîne est un ensemble. L'élève sait dire la suite en commençant par *un*, mais la récitation à partir d'un autre nombre reste difficile. A ce stade, les élèves sont capables de dire la suite des nombres, en s'arrêtant à un nombre défini, mais cet exercice reste encore complexe.

- Niveau 3 : Le niveau chaîne sécable :

Les élèves sont capables de compter à partir d'un nombre (différent de *un*) jusqu'à un autre nombre fixé à l'avance. Ils sont également capables de compter à rebours.

- Niveau 4 : Le niveau chaîne terminale :

Les nombres sont connus et distincts les uns des autres. Les élèves sont capables d'avancer ou de reculer.

En 2007, Brissiaud et Fuson s'accordent pour dire que connaître la suite numérique n'est pas savoir dénombrer. Aussi, Brissiaud rajoute que l'enfant doit d'abord comprendre comment se forment les nombres avant de connaître leurs noms. Les activités de dénombrement proposées seront établies en lien avec les connaissances de la suite numérique des élèves. Ainsi, lors des situations de manipulation, l'enseignant veillera à proposer une tâche en lien avec la connaissance de la suite numérique. Si l'élève connaît la suite numérique jusqu'à 10, le dénombrement ne devra pas excéder 10. La suite numérique ne doit pas être un frein à la compréhension de dénombrement.

Afin de poursuivre l'apprentissage de la comptine, l'enseignant proposera des situations d'apprentissage spécifiquement liées à l'apprentissage de la suite numérique, afin que chaque enfant en fin de Grande Section la maîtrise jusqu'à 30.

3.2.2. Dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus

3.2.2.1. Le comptage

Pour réussir le dénombrement d'une quantité, les élèves doivent maîtriser l'énumération. Elle consiste à mettre en place une procédure visant à organiser sa réflexion en associant *objet* et *pointage*. Le but est de rapprocher un objet à un pointage en les pointant une seule fois. Les

procédures d'énumération sont liées à la nature de la collection, à son organisation spatiale, et au fait que les objets soient déplaçables ou non. Comme vu précédemment, ils doivent également, maîtriser les cinq « principes » énoncés par Gelman et Gallister.

Lors de la mise en place d'activités de dénombrement de collections, l'enseignant doit être vigilant aux situations proposées à ses élèves. Selon Brissiaud, les élèves doivent avoir recours au « comptage-dénombrement » et non au « comptage-numérotage ». (Brissiaud, 2007, p.29).

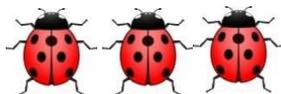
Le principe de cardinalité s'acquiert également par le comptage rapide, appelé « subitizing » ou reconnaissance perceptive immédiate des petites quantités. Selon Charnay, le subitizing est « la capacité à estimer très rapidement (quasi instantanément) et de façon sûre et précise de très petites quantités (de 1 à 3 objets parfois 4), à condition que les objets soient facilement individualisés » (Charnay, 2013, p.30). Selon Brissiaud, le subitizing joue « un rôle crucial dans l'accès à l'idée de totalisation et de nombre » (Brissiaud, 2007, p.33).

Il est important de créer des images mentales, et de présenter aux élèves différentes représentations de la quantité par l'intermédiaire de constellations de dés, de doigts, de bâtons, etc. appelées collections témoins. Ceci explique l'intérêt des affichages avec les mains, les dés et un nombre d'objets représentant le même nombre à l'école maternelle.

3.2.2.2. *Les collections témoins*

Il existe de nombreuses façons de représenter les nombres de façon non linguistique, c'est ce que l'on appelle la collection témoin. Elle permet de mettre en correspondance terme à terme les éléments d'une collection de départ avec une autre collection. On décompose le nombre en un, puis un, puis un etc. Cela favorise la création mentale d'une représentation du nombre. Les chercheurs Baruk, Fayol et Brissiaud, partagent l'idée qu'il est primordial de construire le nombre à travers des représentation figuratives.

La collection de doigts est l'une des collections témoins les plus usitées. Fayol, (cité par Charnay, 2013) lui attribue un rôle de médiateur du fait de son caractère kinesthésique. Malgré cela, Brissiaud pense que les configurations de doigts peuvent être un frein à la compréhension. En effet, pour certains enfants, cette représentation de la quantité *trois* par la constellation des doigts peut être perçue comme un pouce, un index et un majeur. Cette représentation peut s'avérer être un obstacle à la compréhension et à l'acquisition du nombre. A contrario, la quantité représentée avec l'image de trois coccinelles, comme ci-dessous fait référence à une



seule et même image, celle d'une coccinelle représentée trois fois. Il est indispensable

d'apprendre à créer des liens entre les différentes représentations du nombre pour en construire le sens.

3.2.3. Associer le nom des nombres connus avec leur écriture chiffrée

Selon Emprin, les élèves de maternelle perçoivent les écritures chiffrées comme des images, au même titre que les collections témoins. Il est important de travailler le transcodage pour qu'ils aient différentes représentations de la quantité. L'auteur souligne également l'importance de la manipulation de « quantités réellement présentes » (cité par Durpaire et Mégard, 2010 p.23) plutôt que des dessins de collections.

Pour les élèves, le fait de fréquenter différents supports présentant des nombres favorise l'apprentissage. Les calendriers, les affichages, les bandes numériques, les jeux de loto, de dominos, de cartes traditionnelles, de dés sont autant de supports d'apprentissages à exploiter lors des situations d'enseignements.

3.3. Les différentes situations de vie de classe et l'usage du nombre

En 2005, les chercheurs du groupe ERMEL, ont défini différentes situations d'apprentissages :

✓ Les situations dites « fonctionnelles »

Elles s'appuient sur le vécu de la classe. Elles ont pour but de répondre à un problème posé dans le déroulement de vie de la classe. Cela peut-être la répartition des élèves dans des ateliers en éducation physique et sportive, la modification de la quantité d'ingrédients pour réaliser des gâteaux d'anniversaire, etc.

✓ Les situations dites « rituelles »

Elles sont intégrées au déroulement de la classe au quotidien. Elles se répètent quasi-quotidiennement par nécessité, par convention sociale ou par jeu. Elles peuvent être proposées par les enfants ou par le professeur des écoles, mais elles conservent une notion de sens. C'est l'activité du comptage des absents, du nombre de filles ou de garçons, etc.

✓ Les situations dites « construites »

Ce sont les séquences d'apprentissages que le professeur des écoles conçoit pour viser un apprentissage précis. Elles peuvent viser des objectifs différents en fonction des moments où elles sont mises en place.

- Objectif de construction ou de découverte d'une connaissance (phase de recherche et d'acquisition du savoir)
- Objectif de maîtrise (phase d'entraînement)
- Objectif de transfert (phase de réinvestissement)

- Objectif de prise de conscience des compétences (phase d'évaluation)

Lorsque l'on aborde un nouvel apprentissage, il est intéressant de rechercher des situations permettant à l'enfant de vivre réellement le problème en mettant en jeu l'aspect sensori-moteur.

4. LES DIFFERENTES ETAPES DE L'APPRENTISSAGE MATHEMATIQUE

En 2006, la didacticienne des mathématiques, Catherine Berdonneau définit trois étapes dans l'apprentissage des mathématiques :

- La phase d'activité motrice qui implique tout le corps. Ce sont les situations mathématiques vécues en salle de motricité.

Exemple d'activité : Jeu dansé « il était un bergère... »

- La phase d'activité restreinte qui n'utilise que les membres supérieurs du corps (doigts, main, poignet) et l'espace se réduit.

Exemple d'activité : Jeu de doigts « voici ma main... »

- La phase de représentation mentale (ou phase d'abstraction). C'est une phase intériorisée qui met en évidence les différents liens établis par l'élève. Cette étape permet de valider l'acquisition des concepts. Elle est primordiale dans l'acquisition du vocabulaire. La situation peut utiliser la manipulation mais l'action ne peut être réussie que si l'élève a établi des liens entre les différentes activités.

Exemple d'activité : Jeu de marchande « apporte-moi quatre assiettes... »

Ces différentes phases de mise en action de l'enfant lui permettent d'appréhender la notion mathématique au niveau sensoriel et moteur. Pour Piaget, c'est en interaction avec son environnement que l'enfant construit ses premiers raisonnements.

5. LA MANIPULATION AU SERVICE DE L'APPRENTISSAGE MATHEMATIQUE

5.1. Définition

D'après le dictionnaire *Larousse*, la manipulation est « l'action de soumettre quelque chose à des opérations diverses, en particulier dans le but de recherche ou d'apprentissage ».

Cette définition attribue à la manipulation la notion d'apprentissage. Cependant, comme le précise Berdonneau « c'est grâce à la manière dont le maître exploite les supports de manipulation que l'élève va pouvoir assimiler la connaissance ». (Berdonneau, 2006)

5.2. Les stades sensori-moteur et préopératoire chez Piaget

Selon Piaget, les élèves de l'école maternelle passent par deux grands stades : le stade sensori-moteur et le stade préopératoire. En ce qui concerne le stade sensori-moteur, Piaget pense que,

Phase
d'action

sur la base de leurs comportements innés et aléatoires, les bébés seraient en mesure de coordonner des informations sensorielles et motrices pour résoudre des problèmes simples. Il s'agit donc d'une construction de l'intelligence à partir des sens, de l'action et des déplacements qui précèdent le langage. Pendant la période de la naissance de l'enfant jusqu'à ses deux ans environ, se produisent les changements les plus rapides et fondamentaux de son développement. Piaget observe que les changements de ce stade se divisent en six sous-stades, où les actions réflexes vont devenir, par répétition, des actions intentionnelles :

- L'enfant exerce ses réflexes.
- L'enfant utilise des réactions circulaires primaires : il répète des actions qui lui sont agréables.
- L'enfant utilise des réactions circulaires secondaires : il répète des actions qui produisent des résultats qui l'intéressent. Il n'a pas encore d'objectifs.
- L'enfant utilise des comportements orientés vers un but.
- L'enfant utilise des réactions circulaires tertiaires : il explore et découvre intentionnellement le monde qui l'entoure.
- L'enfant utilise des combinaisons mentales : il se représente mentalement et anticipe le résultat d'une action.

On comprend alors que l'action de l'enfant sur les objets qui l'entourent va développer sa pensée et son rapport au monde.

Le stade préopératoire, c'est l'intelligence par la représentation. L'enfant développe le langage, il est capable de penser en terme symbolique, de se représenter des choses à partir de mots ou de symboles. L'enfant saisit aussi des notions de quantité. Ce stade apparaît entre 2 à 7 ans ; l'enfant peut alors se représenter des actions passées ou futures grâce à la fonction sémiotique. Le langage détient donc une fonction importante pour structurer la pensée de l'enfant, mais l'action reste primordiale pour qu'il continue d'explorer celle-ci sur les objets et son pouvoir d'anticipation : « L'apprentissage se construit à partir des actions intériorisées du sujet sur le réel. Donc apprendre, c'est dépasser les actions sensori-motrices afin d'accéder à des opérations mentales qui favorisent l'anticipation et la conceptualisation. Le matériel est nécessaire à condition que le problème posé, c'est-à-dire les contraintes imposées, soit pertinent pour forcer ces opérations. » (Ney et al, 2006, p. 33).

5.3. Enjeux

D'après Catherine Berdonneau, il existe trois raisons de développer l'usage de la manipulation :

- C'est un outil d'aide à l'élaboration de représentations mentales.

Le fait de passer par l'aspect kinesthésique va faciliter la mémorisation mais va également permettre à l'élève d'élaborer des concepts.

- Elle permet un apprentissage spécifique et libère l'élève de toutes contraintes extérieures (graphie, collage, découpage. Etc.).

Les élèves, libérés des contraintes extérieures, peuvent centrer leur attention sur la tâche à accomplir, et la répéter à plusieurs reprises.

- Elle est un outil d'évaluation de progrès pour l'enseignant.

De par l'observation des actions des élèves, l'enseignant peut suivre et analyser les démarches mentales de l'enfant.

5.3.1. Un outil au service de l'enseignant

Selon Catherine Berdonneau en 2005 et Thierry Dias, plus tard, en 2012, la manipulation est primordiale pour l'enseignant et pour l'élève. Il s'agit d'un outil qui met l'élève dans une situation d'apprentissage effective. Il pourra s'engager davantage dans une action réelle, différente de l'action symbolique et schématique que l'on retrouve avec un travail sur fiche. Il va y trouver une aide pour élaborer des représentations du nombre. De plus, la manipulation constitue un indicateur de vigilance car la manipulation ne laisse pas la place au « faire semblant » (Berdonneau, 2006) qui sera facilement décelable par l'enseignant. Celui-ci pourra suivre, de façon fiable, le raisonnement effectué par l'élève qui procédera par essai-erreur. Par conséquent, la manipulation dans la situation d'apprentissage fournira au professeur des écoles une évaluation sûre et généralement aisée.

En effet, l'observation des gestes et des manipulations entreprises par les élèves lors d'une tâche de dénombrement est révélatrice pour l'enseignant des acquis ou des procédures en cours d'acquisition chez l'élève. Elle va permettre à l'enseignant de proposer des activités annexes visant à la consolidation des pré-requis. Elle facilite ainsi la gestion de l'hétérogénéité de la classe, et permet de mettre en place une différenciation en fonction du niveau des élèves afin de les faire progresser vers la réussite.

Pour des élèves nouvellement arrivés en France ou allophones, l'utilisation de supports de manipulation permet à des situations mathématiques de prendre sens malgré l'obstacle du langage. Cependant, le support de manipulation ne contient pas le savoir. L'apprentissage nécessite une médiation de l'enseignant. C'est grâce à la manière dont le maître exploite les supports de manipulation que l'élève va pouvoir assimiler la connaissance correspondante.

5.3.2. Outil au service de l'élève

Berdonneau (2006) relate différents avantages à mettre en place la manipulation dans les apprentissages mathématiques. Elle répond à un besoin sensoriel et permet de s'adapter aux différentes façons de penser de l'enfant. Elle canalise l'attention et permet un meilleur apprentissage facilitant ainsi l'élaboration des concepts. Elle libère des tâches diverses et limitantes qui n'ont pas de lien avec l'apprentissage mathématique. Elle permet de répéter l'action autant de fois que nécessaire. Elle donne place aux erreurs, développe l'autonomie, permet la validation et favorise l'anticipation.

François Boule (1985, p.7), formateur en mathématiques, considère la manipulation comme une source de motivation. L'usage de matériel permet à l'enfant de se libérer l'esprit et va favoriser l'émergence d'initiatives personnelles (essai/erreur).

L'enseignant doit rester attentif à l'emploi du matériel car la manipulation est nécessaire mais n'est pas source d'apprentissage. En effet, si l'enfant joue sans aucun but, il manipule mais l'action n'est pas finalisée, il n'y a pas d'enjeu : l'élève n'élabore pas de stratégies. Pour permettre l'apprentissage, il faut mettre en place des contraintes pour forcer les élèves à anticiper leur action, cela se traduit par une mise en situation de résolution de problèmes l'obligeant à s'investir intellectuellement.

6. LA MANIPULATION AU SERVICE DE LA RESOLUTION DE PROBLEMES

Selon Ney et al., « Le fondement de l'apprentissage des mathématiques est la résolution de problèmes. Les élèves apprennent des mathématiques parce qu'ils résolvent des problèmes construits à cette effet. La résolution de problèmes est non seulement possible, mais souhaitable dès l'école maternelle. » (Ney et al, 2006, p. 32). D'après les chercheurs du groupe ERMEL l'enseignant, peut proposer aux élèves une résolution de problèmes selon trois types de situations. Elles peuvent être construites par l'enseignant, rituelles ou encore fonctionnelles ; lorsqu'il s'agit d'un problème vécu, qui se pose dans la réalité de la classe.

6.1. Enjeux

Le rôle premier de la mise en place de résolution de problèmes est de donner du sens aux apprentissages. En effet, les différentes conditions de mise en œuvre de situation de résolution de problèmes « permettent d'affirmer que les nouvelles connaissances construites ont un sens pour l'élève parce qu'elles sont une réponse à la nécessité de remettre en cause les procédures acquises qui ne sont plus suffisantes pour résoudre le problème » (Ney et al, 2006, p. 34) Comme les procédures antérieures ne sont plus suffisantes, il se produira alors un conflit sociocognitif chez l'élève lorsqu'il se rendra compte que sa procédure ne fonctionne pas dans

ce cas-là. Le travail en groupe permettra de faire évoluer ses procédures de recherche. Cette dernière, facilitée par la manipulation, tient également une place primordiale car l'enseignant doit permettre à l'enfant de rechercher et tester plusieurs réponses pour mieux les rejeter si nécessaire afin de construire lui-même son savoir.

6.2. Mise en œuvre

Afin d'éveiller la curiosité des élèves, l'enseignant doit mettre en scène une fiction pour lancer la situation problème. Selon le principe de zone proximale de développement développé par Lev Vygotski, l'enseignant devra mettre en place une activité qui impose des contraintes, mais celles-ci doivent rester surmontables pour que l'élève s'implique dans la tâche et en tire un apprentissage. Ces contraintes doivent être incontournables pour que l'enfant soit en situation d'apprentissage concrète, pour qu'il soit confronté à un nouveau savoir. L'enseignant, tout comme l'élève, doit avoir recours à l'anticipation pour adapter ces contraintes au savoir qu'il souhaite développer chez ses élèves. Cette situation vise à prouver que le nouvel apprentissage est le moyen le plus efficace pour résoudre le problème proposé. L'enseignant développe chez ses élèves la prise d'initiative, il n'intervient que pour verbaliser les procédures avec ses élèves. Ces échanges permettront à l'enseignant de mettre en avant les réussites, ou les difficultés rencontrées par les élèves. Le didacticien Thierry Dias (2012, p.66) accorde une place prépondérante à cette phase de verbalisation. En effet, celle-ci permet de mettre en avant la procédure correcte facilitant l'émergence de la notion travaillée.

7. LE LANGAGE DANS LA COMPREHENSION DES TACHES MATHÉMATIQUES

Comme le rappelle le document d'accompagnement des programmes de 2002 cycle 2 deux langages sont utilisés en mathématiques, le langage usuel et le langage mathématique. En maternelle, « les problèmes doivent le plus souvent être présentés aux élèves sous forme orale, si possible en appui sur une situation matérialisée. La même remarque peut être faite, quel que soit le cycle, pour les élèves dont le français n'est pas la langue maternelle et que le recours trop fréquent à des supports écrits risque d'exclure des activités mathématiques. » (Ministère de la Jeunesse, 2003 p.8). Certains élèves allophones ou nouvellement arrivés en France peuvent être bloqués face à des situations mathématiques, non pas parce qu'ils ne savent pas faire, mais parce que la langue fait obstacle à leur compréhension de la tâche. Ce constat s'applique également aux enfants francophones. Selon Stella Baruk (2003, p. 41), la verbalisation est essentielle à la compréhension. Il faut « faire dire ce qui est 'dans la tête' » pour mettre en place une procédure de résolution de problèmes. Cela signifie qu'à travers les

activités de résolution de problèmes et la mise en place de manipulation, nous allons débiter un apprentissage précis du langage mathématique : *plus que, autant que, moins que*.

8. L'ÉMERGENCE DE LA PROBLÉMATIQUE

En début d'année scolaire, dans cette classe de Grande Section, j'ai pu observer que de nombreux enfants rencontraient des difficultés à dénombrer et à faire des liens entre les différentes représentations des nombres inférieurs à 6 et entre autres, avec l'écriture chiffrée. Aussi, je me suis interrogée sur comment faire pour améliorer leurs compétences. Suite à mes diverses lectures, il en a ressorti que pour ces élèves, le nombre n'a pas de sens, et qu'il faut donc lui en donner.

La résolution de problèmes correspond aux besoins de mes élèves, puisqu'elle développe l'envie d'utiliser le nombre. Néanmoins, je voulais un moyen de travailler le nombre qui permettent aux enfants de l'appréhender de manière kinesthésique et « ludique », tout en développant leur prise d'initiative. C'est pour cette raison que mon choix s'est porté sur la manipulation.

Ma problématique est donc née d'un regard croisé entre mes observations de classe et mes lectures. La manipulation dans une activité de résolution de problèmes semble être un bon outil pédagogique pour permettre aux élèves de donner du sens au nombre (dans son aspect cardinal) et à ses différentes représentations. Elle devrait permettre aux élèves de pouvoir procéder à des essais sans avoir peur de l'échec car la manipulation permet de recommencer et de s'auto-valider. La verbalisation et les échanges autour de l'activité permettront aux élèves et au professeur des écoles de mettre des mots sur les difficultés constatées.

Ainsi, la question qui me semble intéressante à étudier est la suivante : En quoi la manipulation, dans le cadre d'une résolution de problèmes, permet-elle à l'élève de corriger ses procédures, facilitant ainsi l'acquisition de la notion de quantité et de ses différentes représentations ?

Avant de répondre à cette question, j'ai mis en avant deux hypothèses. Tout d'abord, on peut supposer que la manipulation dans le cadre d'une résolution de problème va permettre aux élèves de s'approprier la notion de quantité, en corrigeant leurs procédures de manière autonome, et en identifiant seuls les obstacles qui les ont conduits à une réponse erronée. La seconde hypothèse est que l'élève ne parviendra pas à remettre en cause seul sa procédure, la manipulation n'est pas autocorrective, mais elle facilitera la verbalisation des difficultés et la prise de conscience des obstacles.

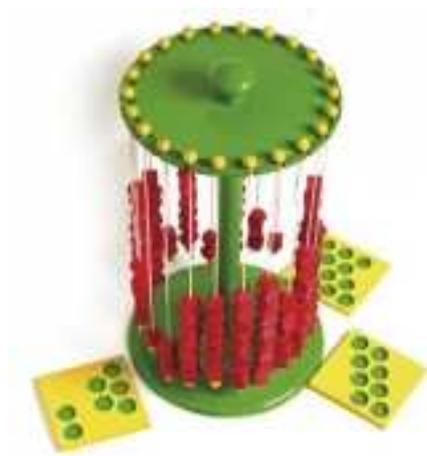
9. EXPERIMENTATION

9.1. Participants

L'étude a été conduite dans une école se situant dans un Réseau d'Education Prioritaire (dit REP), au sein d'une classe de grande section. La classe compte 24 élèves, 12 filles et 12 garçons. Les élèves sont issus de familles défavorisées, les 2/3 des élèves sont allophones, 2 élèves sont dites ENAF (élèves nouvellement arrivés en France), et deux élèves sont en situation de handicap. L'hétérogénéité qui existe au sein de cette classe conduit à mettre en place une importante différenciation.

Au cours de notre étude, nous nous intéresserons à la capacité des élèves en difficulté à remettre en cause, par la manipulation, leurs procédures erronées et à bien identifier les problèmes qu'ils rencontrent au cours d'une résolution de problèmes.

9.2. Matériel



bois percées) représentant des constellations de trous (deux représentations par quantité), ces constellations sont horizontales et non déplaçables. Le support porte vingt-deux branches verticales de cerises rouges de 0 à 10 (deux branches par quantité), les branches ainsi que les fruits qu'elles portent sont mobiles. La manipulation consiste à faire coïncider une branche et un panier en remplissant avec juste ce qu'il faut de cerises les trous du panier. Le seul lien qui unisse un panier et une branche c'est le nombre. L'usage de ce matériel va permettre de valider instantanément la solution proposée par l'élève. En cas d'erreur, le constat est visuel.

Pour cette étude, le matériel utilisé va jouer un rôle primordial. Je cherché un jeu facile à manipuler pour que les consignes de manipulation ne viennent pas surcharger cognitivement les élèves. Mon choix s'est dirigé vers « l'arbre aux cerises ». Cet outil pédagogique a été élaboré par Hervé Le Madec pour travailler la notion de nombre avec des élèves en difficulté scolaire.

Ce jeu en bois est composé de vingt-deux paniers jaunes (planches de



Les élèves en difficulté, peuvent bénéficier temporairement d'une aide supplémentaire : la bande numérique jusqu'à 10.



En amont de la séquence sur la notion « *autant que* », support de l'étude, un bilan des connaissances (évaluation diagnostique) a été réalisé en septembre à partir d'une grille d'observation. Il avait pour but d'acter les connaissances en lien avec : la comptine numérique, l'énumération et l'association des différentes représentations du nombre, à l'entrée en grande section¹.

9.3. Procédure

L'étude a été conduite sur une séquence composée de neuf séances. Elle a pris en compte les vingt-quatre élèves de la classe répartis en quatre groupes hétérogènes de six élèves. J'ai fait le choix de groupes hétérogènes, premièrement pour ne pas déstabiliser les élèves : les groupes avaient initialement été constitués pour qu'ils soient les plus homogènes possibles entre eux dans l'hétérogénéité de la classe. De plus certains élèves sont des personnes ressources pour leurs camarades en difficulté. Le second argument est justement cette entraide et ce partage : au sein de ce groupe-classe, l'hétérogénéité est source d'échange. Les élèves en réussite aiment partager leur stratégie avec ceux plus en difficulté. Cette mutualisation est venue en complément des apports de l'enseignant et s'est avérée bénéfique.

La séquence travaille la notion « *autant que* » sur des collections jusqu'à 6, pour les élèves les en difficulté, et jusqu'à 7 pour le reste de la classe (voire 10). Elle a été élaborée autour d'une activité de résolution de problèmes travaillant la fonction mémoire de la quantité. Son objectif était de conduire les élèves à comprendre que le dénombrement est un moyen expert pour construire une collection identique à une collection donnée lorsqu'elles ne sont pas proches l'une de l'autre. Elle visait à approfondir les compétences suivantes : dénombrer une quantité, connaître la comptine numérique, effectuer une correspondance terme à terme, associer une représentation du nombre à son écriture chiffrée.

¹ Annexe 1 : grille d'évaluation diagnostique.

Pour chaque séance, j'ai établi des critères d'observation permettant de « catégoriser » les élèves sur la base de la maîtrise de la comptine numérique, de l'énumération et de leurs capacités à utiliser différentes représentations du nombre. Au cours de cette étude, j'ai fait le choix de m'intéresser qu'aux élèves en difficulté. Sur ce panel d'élèves, j'ai différencié les élèves pour qui la manipulation offrait une identification autonome des limites à leurs procédures, et ceux pour qui la manipulation ne s'avérait pas autocorrective mais facilitait la verbalisation des difficultés.

J'ai conduit les séances sur les jeudis et vendredis matin, en période 2 sur le créneau horaire de 9h20 à 10h00 et en période 3 sur le créneau horaire de 10h45 à 11h20. A chaque fin de séance un bilan en groupe d'atelier a été réalisé, un présentateur était désigné (tous les enfants du groupe tiennent ce rôle) pour exposer en groupe-classe oralement la tâche réalisée et faire le bilan de ses apprentissages.

Vous trouverez ci-dessous le déroulé des séances réparties sur les mois de septembre (9), octobre (10), novembre (11), décembre (12) et janvier (1) précisez cela :

	9	10	11	12	1
Evaluation diagnostique					
Séance 1 : Phase de découverte			5/6		
Séance 2 : Phase d'appropriation de la tâche			12/13		
Séance 3 : Phase d'identification du problème			19/20		
Séance 4 : Phase d'action (recherche) avec contrainte de distance et de transmission d'information			26/27		
Séance 5 : Phase d'action (recherche) avec contrainte de distance, de transmission d'information et d'aller/retour				3/4	
Séance 6 : Phase d'action (recherche) avec contrainte de distance, de transmission d'information et de temps				10/11	
Séance 7 : Phase d'entraînement avec contrainte de distance, de transmission d'information et d'aller/retour				17/18	
Séance 8 : Phase de familiarisation avec contrainte de distance, de transmission d'information et d'aller/retour					7/8
Séance 9 : Phase de réinvestissement autour d'un autre jeu (Jeu des lapins et terriers)					14/15

Description des séances :

L'évaluation diagnostique a été réalisée sur le temps d'accueil, en individuel, et pendant les regroupements, les élèves ont été confronté à des problèmes simples :

Activité 1 : Jeu des présents : compter les élèves de la classe.
Activité 2 : Défi comptine : dire le plus loin possible sans erreur
Activité 3 : La comptine en folie : compter à partir d'un nombre autre que « un », à rebours.
Activité 4 : Jeu du Lucky Luke (jeu sur les différentes représentations du nombre)

Ce bilan, a permis de repérer les élèves en difficulté avec les différentes compétences à maîtriser pour réussir un dénombrement de collection.

Les séances 1 et 2, sont des séances de découverte, qui ont été réalisées sur des temps d'accueil. Leurs objectifs étaient de permettre aux élèves de se familiariser avec le matériel et apprendre à maîtriser le vocabulaire : branches, cerises, paniers, arbre et autant que. Cet apprentissage linguistique conditionnait la réussite de l'élève dans la tâche mathématique, le langage ne devait pas venir entacher la procédure mathématique.



La séance 3, cadrerait le but de l'activité. Les objectifs devaient être mis en avant par les élèves c'est pourquoi je suis passée par une phase de verbalisation.

Extrait de l'entretien entre l'enseignant et le groupe-classe :

Enseignant : *Qu'avez-vous fait avec ce matériel ?*

Élève : *On a joué.*

Enseignant : *Et comment avez-vous joué ?*

Élève : *On doit mettre des cerises dans des paniers.*

Enseignant : *Et on peut remplir les paniers comme on veut ?*

Elève : *Il faut remplir avec la bonne branche.*

Enseignant : *Comment je sais si c'est la bonne branche ?*

Elève : *Il y a tous les trous du panier de remplis.*

Enseignant : *Et s'ils ne sont pas tous remplis ?*

(Cet entretien a été conduit et appuyé en réalisant des exemples concrets affichés progressivement au tableau. Lorsque le résultat n'était pas correct, une croix rouge était posée sous le modèle.)

Elève : *Il manque des cerises.*

Enseignant : *Et s'il y en a une dehors comme là ça veut dire quoi ?*

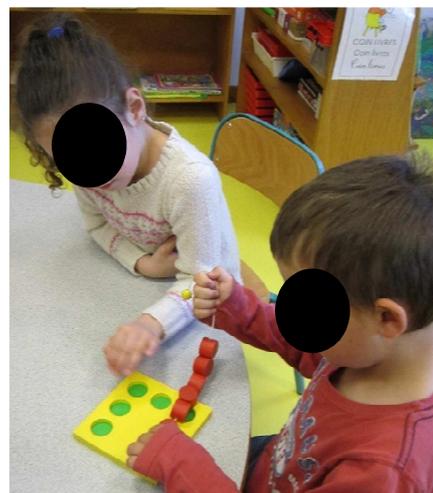
Elève : *Il y a trop de cerises.*

Enseignant : *Alors que faut-il faire pour réussir ?*

Elève : *Mettre pareil de cerises et de trous.*

Enseignant (concluant l'entretien et réalisant le modèle correct) : *Donc pour réussir il faut faire quoi : « mettre **autant** de cerises **que** de trous sur le panier. »*

La séance 4, se décomposait en deux activités : une première, travaillant la correspondance terme à terme (collections jusqu'à 7), une seconde travaillant, la mise en mémoire de la quantité. L'enseignant observait, relevait et analysait les erreurs dans les procédures². Les élèves devaient par la manipulation prendre conscience, seuls, de leurs erreurs. Une phase de verbalisation était réalisée avec chaque élève dont la réponse est erronée. La consigne était : « Vous devez remplir votre panier de cerises avec autant de cerises qu'il y a de trous ». Le passage entre la première et la seconde activité n'était possible que si les élèves étaient en réussite sur la première activité. Le cas échéant la quantité demandée était réduite pour que seule l'aptitude à la procédure puisse être mise en avant. Lors de la seconde activité, « l'arbre aux cerises » était mis à distance des paniers. La consigne était : « Vous devez aller chercher auprès du maraicher juste ce qu'il faut de cerises pour remplir votre panier. » L'élève devait dénombrer une quantité de trous sur son panier, mettre en mémoire cette quantité, ou utiliser un moyen de la garder en mémoire, puis transmettre la bonne quantité au maraicher. Les élèves disposaient de matériels qu'ils pouvaient utiliser s'ils en ressentaient le besoin (kaplas, papier, crayons). L'enseignant restait près des maraichers car l'erreur de dénombrement ne devait pas venir d'eux. Au cours de cette étape, l'enseignant observait la solution choisie pour transmettre la quantité (collection témoin, écriture chiffrée). En fin de séance, un bilan a été réalisé avec le groupe. Les élèves échangeaient sur leurs difficultés et sur les moyens qu'ils avaient mis en œuvre pour réussir la tâche. Un élève



² Annexe 2 : grille d'observation des maitrises du dénombrement.

du groupe était désigné pour faire le bilan des apprentissages devant le groupe-classe : « *J'ai appris que si je veux bien compter et pas me tromper, je ne dois pas compter trop vite et montrer une seule chose à la fois* » (Elève A, 5 ans). A chaque fin de séance, des bilans par petit groupe puis en grand groupe étaient réalisés.

La séance 5, introduisait une contrainte supplémentaire. Les élèves devaient réussir le problème en un seul essai. Le matériel utilisé en séance 4 était toujours à disposition. Les élèves devaient mettre dans les bacs verts les paniers gagnés et dans les bacs rouges les paniers perdus. La manipulation permettait aux élèves de faire un bilan de leurs connaissances sur les quantités.

La séance 6, introduisait une contrainte supplémentaire, celle du temps. Le matériel à disposition était du papier et des crayons. Cette activité a été réalisée uniquement avec des quantités inférieures à 7. Les élèves étaient laissés libres pour transmettre la quantité, mais la contrainte les incitait fortement à avoir recours à l'écriture chiffrée. Le fait de dessiner une collection prend du temps, pour réduire l'usage du dessin et favoriser l'écriture du nombre, le temps était réduit. La consigne était la suivante : « Vous devez être le premier à remplir votre panier avec autant de cerises qu'il y a de trous. La commande doit être passée rapidement auprès du maraîcher en une seule fois car le magasin ferme dans moins d'une minute ». L'enseignant évaluait la connaissance des représentations du nombre.

La séance 7 était conduite en atelier dirigé sous forme de défi. Le but était identique à la séance précédente, mémoriser une quantité, la transmettre et valider l'exactitude de sa réponse. La contrainte de temps était maintenue. La consigne a été formulée ainsi : « Vous devez tirer au hasard un panier, mémoriser la quantité, et vous allez passer commande au maraîcher qui vous apportera la bonne quantité de cerises. Ensemble, vous vérifierez si vous avez raison. » Chaque enfant était acteur de la réussite de l'équipe. L'enseignant jouait un rôle de médiateur et d'arbitre.



La séance 8, était une phase de familiarisation dans laquelle l'activité de la séance 5 était reprise et réalisée en autonomie.

La séance 9, réinvestissait la notion « d'autant que » à travers une résolution de problèmes par manipulation dans une autre situation. Les élèves ont eu comme consigne : « Vous devez mettre autant de lapins que de terriers » (collections jusqu'à 8). Les lapins et les terriers étaient à distance les uns des autres.

10.RESULTATS

Vous trouverez ci-dessous les tableaux récapitulatifs des compétences en dénombrement de mes élèves à leur entrée en grande section, réalisée à partir d'activités ritualisées (Lucky Luke, défi comptine, comptage des enfants...) ou fonctionnelles. Ces tableaux exposent les résultats des vingt-quatre élèves de la classe.

Tableau 1- Résultats de l'évaluation diagnostique : comptine numérique - Septembre 2015

	OUI	NON
Distinguer tous les mots-nombres jusqu'à 10.	24	0
Compter à partir d'un nombre différent de « un »	3	21
S'arrêter à un nombre défini	9	15
Compter d'un nombre donné jusqu'à un autre nombre fixé à l'avance	3	21
Compter à rebours	3	21

On constate que les élèves maîtrisent tous la comptine numérique jusqu'à 10, mais pour beaucoup au niveau de la chaîne insécable (selon K. Fuson).

Tableau 2- Résultats de l'évaluation diagnostique : énumération - Septembre 2015

	OUI	NON
Associer un nombre à un élève (correspondance terme à terme)	16	8
Prononcer le dernier mot pour donner une quantité jusqu'à 6 (cardinalité)	14	10
Dénombrer une collection en désordre et en donner la quantité (non pertinence de l'ordre d'énumération)	3	21
Faire abstraction de la nature des éléments et dénombrer jusqu'à 7 (abstraction)	12	12

On peut remarquer que certains élèves ont des difficultés à mettre en correspondance terme à terme. Cependant, le principe de cardinalité est acquis pour plus de la moitié de la classe. La non maîtrise du principe d'abstraction fait très légèrement diminuer les compétences des élèves, mais la moitié de la classe réussit l'épreuve. Néanmoins, le dénombrement d'une collection non organisée de faible quantité met en difficulté plus des $\frac{3}{4}$ de la classe.

Tableau 3- Résultats de l'évaluation diagnostique : connaissance des différentes représentations du nombre –Septembre 2015

	OUI	NON
Associer deux constellations organisées entre elles (dont doigts) jusqu'à 6	16	8
Associer une constellation organisée (doigts) et l'écriture chiffrée jusqu'à 6	12	12
Associer une écriture chiffrée à un mot-nombres jusqu'à 6	10	14
Associer trois représentations du nombre jusqu'à 6	10	14

Les élèves arrivent en majorité à mettre en lien des constellations organisées entre elles. Lorsqu'il s'agit de mettre en lien l'écriture chiffrée et une constellation, les erreurs sont plus

fréquentes. Les liens entre écriture chiffrée et mot-nombres sont fragiles. La capacité de transcodage entre trois quantités n'est pas encore acquise jusqu'à 6.

Suite à ce premier bilan, des activités de remédiation ont été mises en place en amont de la séquence de dénombrement, support de notre étude.

Au cours de la séance 4 de notre étude, nous avons pu constater les effets de cette remédiation.

Vous trouverez ci-dessous les résultats obtenus par les élèves à l'activité de correspondance terme à terme.

Tableau 4 – Progression des élèves en correspondance terme à terme entre Septembre et Novembre 2015

		OUI	NON
Séance 4 Activité 1	L'élève a réussi la tâche de dénombrement par correspondance terme à terme jusqu'à 8	21	3
	Si non, l'élève se corrige-t-il seul en manipulant de nouveau le matériel	1	2

Vingt-et-un élèves sur vingt-quatre réussissent à mettre en correspondance terme à terme des objets et un mot-nombre. Parmi les trois élèves en difficulté, un parvient à se corriger seul par le biais de la manipulation, mais deux restent en échec. Une phase de verbalisation a été réalisée avec ces trois élèves dont les réponses étaient erronées.

Vous trouverez ci-dessous un tableau reprenant les échanges entre ces trois élèves et l'enseignant.

Tableau 5 - Entretien avec les élèves en échec sur l'activité 1 de correspondance terme à terme dans la séance 4

	Réponse formulée par les élèves	Identifie seul son erreur	Explicite sa stratégie	Identifie où se trouve son erreur ou sa difficulté	Observation du PE
Elève A (s'autocorrige)	« Je n'ai pas bien compté la première fois, j'ai vu qu'il y avait un trou sans rien, alors j'ai pris la branche avec un en plus »	Oui	Oui	« Je me suis trompé parce que je n'ai pas bien dit la chanson (comptine numérique) »	Comptine numérique acquise mais l'élève A, veut aller trop vite (omission).
Elève B	« Je n'arrive pas à compter	Non	Non	« Je ne sais pas compter comme ça et	Problème abstraction et

(ne s'autocorrige pas)	parce que c'est pas pareil »			après comme ça » (l'élève explique que la configuration lui pose problème)	de repérage dans l'espace
Elève C (ne s'autocorrige pas)	« Bah ça fait ça (l'élève me montre 4 avec ses doigts et montre une branche de 6 »	Non	Non	Non	Elève atteinte d'un handicap. La comptine est connue jusqu'à 10. Le pointage est correct. Mais le cardinal est faux.

On constate que les difficultés exprimées sont liées : à un problème d'abstraction et de repérage dans l'espace, ainsi qu'à une non maîtrise de l'adéquation entre la comptine numérique et le pointage par omission.

Les élèves poursuivent la séance 4 par l'activité 2. « l'arbre aux cerises » est éloigné de la table d'atelier dirigé.

Vous trouverez ci-dessous les résultats des élèves après éloignement de « l'arbre à cerises ».

Tableau 6 - Résultats des élèves obtenus après éloignement de l'outil pédagogique.

			OUI	NON
Séance 4 - Activité 2	Après la mise à distance, l'élève transmet le bon nombre (jusqu'à 7) (deux essais possibles)		20	4
	Par quel moyen,	✓ Les doigts	13	
		✓ Les kaplas	1	
		✓ L'écriture chiffrée	0	
		✓ L'oral	3	
		✓ Le dessin	3	
	Si non, l'élève se corrige seul en manipulant de nouveau le matériel		3	1
	Par quel moyen,	✓ Les doigts	2	
		✓ Les kaplas	1	
		✓ L'écriture chiffrée	0	
		✓ L'oral	0	
✓ Le dessin		0		

Il en ressort que la mise à distance de « l'arbre aux cerises » n'a pas posé de difficultés aux élèves qui avaient la possibilité d'utiliser du matériel pour exprimer la quantité. On note un recours important à la constellation de doigts. Les quatre élèves dont les réponses sont erronées

après plus de deux essais, ont verbalisé leurs difficultés. Une élève n'est pas parvenue à réussir l'activité seule.

Vous trouverez ci-dessous un tableau reprenant les échanges entre ces quatre élèves et l'enseignant.

Tableau 7 - Entretien avec les élèves en échec dans l'activité 2 : mise à distance de l'arbre dans la séance 4

	Réponse formulée par les élèves	Identifie seul son erreur	Explicite sa stratégie	Identifie où se trouve son erreur ou sa difficulté	Observation du PE
Elève A (s'autocorrige)	« Je n'arrive pas à faire doucement »	Oui	Oui	« Je ne dis pas les mots en même temps que je touche les trous »	Problème de maîtrise de la comptine numérique
Elève B (s'autocorrige)	« C'est le "bordel" j'arrive pas à compter » (collection non organisée)	Oui	Oui	« Il faudrait que ça soit en ligne pour que j'arrive à faire »	Problème de repérage dans l'espace et un problème d'abstraction
Elève C (ne s'autocorrige pas)	« C'est trop loin »	Non	Non	Non	Problème de mémoire de travail et problème de transcodage. La comptine est connue. L'énumération maîtrisée.
Elève D (s'autocorrige)	« A chaque fois j'oublie parce que je compte et devant l'arbre je sais plus »	Oui	Oui	« Je dois m'aider avec mes doigts »	Problème de mémoire de travail.

Nous retrouvons les trois élèves en échec sur la tâche précédente. On peut s'apercevoir que pour certains élèves, les procédures sont à travailler, mais pour d'autres c'est la mémoire de travail qui pose problème.

Lors de la séance 5, les élèves ne disposaient plus de matériel hormis du papier et des crayons. Ils devaient réussir le dénombrement en un seul voyage. La consigne ne précisait pas si le recours à la constellation de doigts ou à l'oral était autorisé.

Vous trouverez ci-dessous les résultats des élèves lors de la séance 5.

Tableau 8- Résultats des élèves lors d'un dénombrement de collection en un seul voyage.

			OUI	NON
Séance 5	Après la mise à distance, l'élève transmet-il le bon nombre (jusqu'à 7) (un seul essai)		16	8
	Par quel moyen,	✓ Les doigts	12	X
		✓ L'écriture chiffrée	0	
		✓ L'oral	3	
		✓ Le dessin	1	
	Si non, l'élève se corrige-t-il seul en manipulant de nouveau le matériel		6	2
	Par quel moyen,	✓ Les doigts	6	X
		✓ L'écriture chiffrée	0	
		✓ L'oral	0	
		✓ Le dessin	0	

On observe que le moyen privilégié pour communiquer une quantité inférieure à 10 en une seule fois, sans se tromper, est l'usage des doigts. Parmi les huit élèves en difficulté, six se sont trompés dans le comptage, soit des trous, soit des cerises entraînant un résultat erroné. Les erreurs commises ont été corrigées par la manipulation pour six élèves. Seulement, deux élèves ne sont pas parvenues à faire l'exercice, il s'agit des élèves B et C. Les difficultés identifiées sont de nouveaux : la mémoire de travail, l'organisation spatiale et capacité d'abstraction.

La séance 9 devait permettre de valider l'apport bénéfique ou non de la manipulation et des phases de verbalisations dans les procédures des élèves dans la résolution d'un nouveau problème semblable au précédent.

Vous trouverez ci-dessous les résultats des élèves sur l'activité lapins/terriers.

Tableau 9- Résultats des élèves lors de la séance 9 : phase de réinvestissement – Janvier 2016

			OUI	NON
L'élève transmet la bonne quantité en un seul essai (jusqu'à 8)			21	3
Par quel moyen,	✓ Les doigts	8	X	
	✓ Les kaplas	1		
	✓ L'écriture chiffrée	5		
	✓ L'oral	7		
	✓ Le dessin	0		
Si non, l'élève se corrige seul en manipulant de nouveau le matériel			1	2
Par quel moyen,	✓ Les doigts	1		
	✓ Les kaplas	0		
	✓ L'écriture chiffrée	0		
	✓ L'oral	0		
	✓ Le dessin	0		

Pour une grande majorité de la classe, l'exercice n'a pas posé de problème. Parmi les élèves en difficulté, nous retrouvons l'élève C, l'élève D et un nouvel élève E.

Vous trouverez ci-joint les retours d'entretiens.

Tableau 10 - Retour des entretiens avec les élèves en difficulté en séance 9

	Réponse formulée par les élèves	Identifie seul son erreur	Explicite sa stratégie	Identifie où se trouve son erreur ou sa difficulté	Observation du PE
Elève C (ne s'autocorrige pas)	« J'ai tout compté, ça fait 6 »	Non	Non	Non	Le comptage est correct, mais l'élève n'arrive pas à prendre dans la collection la quantité de 6.
Elève D (s'autocorrige)	« J'ai compté avec mes doigts mais après j'ai eu besoin de prendre les lapins et je savais plus combien il fallait en prendre »	Oui	Oui	« Si je n'ai pas mes doigts pour compter je sais pas faire »	Problème de mémoire et de transcodage.
Elève E (s'autocorrige)	« J'ai compté un en trop parce que c'est tout collé les terriers »	Oui	Oui	« Je savais plus compter parce que c'était tout près les uns des autres, et j'ai compté un deux fois »	Problème de repérage dans l'espace avec une collection désorganisée de huit éléments

L'élève E n'avait jamais rencontré de problème jusqu'à cette activité. Il s'est corrigé seul après discussion, il manifeste un problème d'organisation du comptage pour des collections désorganisée. L'élève D, rencontre toujours son problème de mise en mémoire de la quantité, et le transcodage est difficile. L'élève C, dénombre bien, mais lorsqu'elle doit prendre six lapins, elle dit « six » mais en prend une poignée.

A partir de ces résultats, nous allons analyser les procédures des élèves afin de valider ou d'invalider les deux hypothèses mises en avant.

11. DISCUSSION

11.1. Recontextualisation

Tout au long de cette étude, je souhaitais montrer en quoi la manipulation dans une résolution de problèmes pouvait aider les élèves à corriger leurs procédures et faciliterait l'acquisition de la notion de quantité et de ses différentes représentations. J'avais émis deux hypothèses, une première selon laquelle la manipulation, par la résolution de problèmes, permettrait aux élèves d'autocorriger leurs procédures et d'identifier seuls les obstacles. Dans une seconde, je supposais que la manipulation n'était pas autocorrective, mais qu'elle permettrait de faciliter la verbalisation des difficultés et la prise de conscience des obstacles.

Pour conduire à bien cette étude, je me suis appuyée sur une résolution de problèmes dans laquelle je demandais aux élèves de mettre en place progressivement des procédures pour aboutir au dénombrement, c'est-à-dire à la notion de quantité ; en utilisant la notion « *autant que* ».

11.2. Analyse des résultats

Au vu des résultats, il s'est dégagé deux catégories d'élèves :

- Ceux qui font le lien entre nombre et quantité et dont les procédures sont correctes
- Ceux qui ne font pas encore correctement le lien entre nombre et quantité, et pour qui les procédures sont encore approximatives.

Au sein de cette seconde catégorie, on peut dégager deux profils d'élèves :

- Ceux qui sont en échec, mais pour qui la manipulation permet une autocorrection et une prise de conscience des difficultés seuls.
- Ceux qui sont en échec, mais pour qui la manipulation ne permet pas une autocorrection et qui nécessitent le recours à la verbalisation avec guidage de l'enseignant.

Analyse du bilan de compétences réalisé en début d'année.

Selon le tableau 1, nous pouvons constater que les élèves connaissent tous la comptine numérique jusqu'à 10, les mots-nombres sont tous différenciés. A ce stade de l'année, seulement trois élèves sont capables de compter à partir d'un nombre différent de « *un* », compter à rebours et anticiper un résultat. Néanmoins, neuf élèves sont en mesure de s'arrêter sur un nombre défini à l'avance. Il semble qu'au vu des âges d'acquisition de la chaîne numérique annoncés par la didacticienne K. Fuson, les élèves soient en retard dans les apprentissages. Ils devraient déjà maîtriser le compter à partir de X, ainsi que le compter à

rebours. Pour remédier au retard constaté, des activités ritualisées autour de l'apprentissage de la comptine numérique sont mises en place lors des regroupements du matin et de l'après-midi. (exemple : défi comptine).

Sur le tableau 2, nous retrouvons les compétences en énumération. Seize élèves sont en mesure de réaliser une correspondance terme à terme avec des collections de six éléments. Huit élèves rencontrent des difficultés d'adéquation entre le geste de pointage et la récitation du mot-nombre. Pour beaucoup, ils veulent aller « trop vite » et se trompent par omission ou par recomptage. Selon Gelman, chez ces élèves, le principe d'adéquation unique n'est pas acquis. S'agissant des compétences d'acquisition de la cardinalité, c'est-à-dire l'aptitude de l'élève à répondre à la question : « Combien ? » sans reprendre son comptage, quatorze élèves sont en réussite. Les dix autres reprennent le comptage depuis « un » pour répondre à la question. Pour les élèves en réussite, on peut supposer que le principe de cardinalité est acquis et qu'ils ne rencontreront pas de problèmes lors de la séquence. Les résultats obtenus lors du dénombrement d'une quantité dans une collection non organisée sont faibles (3/21). Cependant au vu de l'âge des élèves, on peut supposer qu'ils ont besoin de temps et d'entraînement. En effet, pour réussir certaines tâches les élèves ont besoin d'acquérir d'une part de maturité et d'autres part de vivre de nombreuses situations. Concernant la capacité d'abstraction, la moitié de la classe ne parvient pas à compter des objets de collections différentes. Tout comme l'aspect repérage dans l'espace, le principe d'abstraction devrait progressivement évoluer. Pour améliorer les performances des élèves, des ateliers de manipulation sont proposés aux élèves lors de accueil (exemple : boîte à compter).

Le tableau 3, expose les résultats obtenus sur leurs capacités à associer les différentes représentations du nombre. Plus de la moitié des élèves connaissent les correspondances entre une collection organisée, les doigts et l'écriture chiffrée jusqu'à 6. Néanmoins, le mot-nombre ne renvoie pas spécialement à la bonne quantité, seulement dix élèves réussissent à mettre en lien les mots- nombres et leur écriture chiffrée. Ces résultats exposent une grande disparité dans les aptitudes des élèves. Un travail autour d'activités de type loto des nombres ou jeu du Lucky Luke a été mis en place pour faciliter la mise en correspondance des différentes représentations.

Analyse de la séquence.

Cette étude est axée sur le comportement adopté par les élèves en difficulté. Aussi le panel de vingt-quatre élèves étudiés en séance 4 se réduit aux cinq élèves identifiés en difficulté à l'issue de l'activité 2 de la séance 4.

- **Analyse des profils des élèves en difficultés**

▪ *Elève A*

L'élève A, à deux reprises, commet des erreurs en séance 4 (voir tableaux 4 et 6) qu'il corrige par manipulation. Lors des entretiens (voir tableaux 5 et 7), il donne l'impression de maîtriser la comptine numérique, et d'avoir obtenu un résultat erroné parce qu'il a voulu faire l'exercice trop rapidement. Néanmoins, lors de l'activité 2, la même erreur est commise et il formule sa difficulté différemment « *je n'arrive pas à faire doucement* » (tableau 7). A travers ses paroles et l'observation de ses gestes, on peut constater que l'élève A ne maîtrise pas l'énumération par manque de maîtrise de la comptine numérique. En effet, il ne parvient pas à énoncer la comptine distinctement et plus doucement. Aussi, pour cet élève, la quantité à dénombrer a été réduite (<6) afin de rester sur la partie stable et conventionnelle de la comptine, lui facilitant ainsi l'énumération. Après avoir exprimé cette difficulté, l'élève A n'a pas rencontré d'autres difficultés lors des autres séances.

Bilan pour l'élève A au vu des hypothèses émises : La manipulation est autocorrective, l'élève est conscient de la nature de son erreur. La phase de verbalisation permet d'exprimer cette difficulté et de remédier au problème pour laisser place à la maîtrise de la procédure. Aussi, cet élève n'a pas eu de collections supérieures à 6 à dénombrer lors des autres séances et n'a pas manifesté d'autres problèmes. Il maîtrise les différentes représentations du nombre jusqu'à 6.

▪ *Elève B*

L'élève B, ne parvient pas à s'autocorriger dans l'activité 1 de la séance 4 (tableau 4). Lors de la phase de verbalisation, elle n'identifie pas seule les raisons de son échec et est bloquée pour mettre des mots sur son erreur. Elle passe par la gestuelle que je verbalise pour elle et lui demande de me corriger si mes mots ne correspondent pas à ce qu'elle veut exprimer (tableau 5). Cette élève est en difficulté face à la configuration horizontale des paniers et verticales des cerises. Elle n'arrive pas à mettre en place une stratégie pour dénombrer la collection correctement. Un de ses camarades lui soumet l'idée d'utiliser les kaplas pour s'aider. Dans l'activité 2, l'usage des kaplas lui permet de s'autocorriger, et elle formule plus précisément sa difficulté (tableau 7). Dans la séance 5 (tableau 8) elle est de nouveau en difficulté et les kaplas ne sont plus disponibles. Elle commet des erreurs de comptage liées à une procédure erronée. Lors de la séance 9, cette élève ne commet pas d'erreur. Cependant, il convient de préciser que les « terriers » étaient alignés dans un premier temps, puis disposés dans des configurations de constellations organisées type dé.

Bilan pour l'élève B au vu des hypothèses émises : La manipulation n'a pas été autocorrective dans un premier temps. Néanmoins la phase de verbalisation a permis à cette élève de traduire sa difficulté par des gestes puis des mots qui ont fait mûrir ses propos pour aboutir à l'expression d'un problème à dénombrer des constellations non organisées. Après cet épisode, la manipulation a été autocorrective.

▪ *Elève C*

L'élève C est une élève en situation de handicap, elle a rencontré de grosse difficulté lors de la séquence. Cette élève maîtrise correctement la comptine numérique jusqu'à 10 de manière stable et conventionnelle. Elle parvient à énumérer correctement les trous des paniers (collection <6), elle donne le cardinal « ça fait 4 » montre 4 mais prend une branche de 6. (Tableau 5). Malgré la manipulation, elle ne réussit pas à se corriger. Lors de l'activité 2 de la séance 4, la manipulation n'est pas autocorrective, elle ne parvient pas à verbaliser sa difficulté qui semble être liée à un problème de mémoire et de transcodage. (tableau 7). Lors de la séance 9, elle rencontre les mêmes difficultés. (tableau10).

Bilan pour l'élève C au vu des hypothèses émises : La manipulation n'est pas autocorrective et ne permet pas à l'élève de verbaliser précisément ses difficultés.

Les résultats de cette élève soulèvent une interrogation. Lors des situations rituelles, elle parvient à compter et énumérer toutes les filles ou tous les garçons de la classe voire l'ensemble du groupe. Elle donne le cardinal en répondant à la question « Combien ? » sans reprendre son calcul. Or, dans le cadre de cette situation, rien n'est ressorti. Tout laisse à penser que c'est probablement la situation qui reste encore « trop abstraite » pour elle. Par conséquent, on peut penser qu'elle ne met pas de sens derrière cette situation qui concrètement ne rentre pas dans son quotidien et ne réussit pas à la faire entrer dans l'activité.

▪ *Elève D*

L'élève D a réussi à s'autocorriger par la manipulation. Cependant, il identifie son problème comme une difficulté à recourir au nombre sans faire usage de la collection de doigts (tableaux 7 et 10). Il n'arrive pas à garder en mémoire la quantité sans la « ressentir ». La bande numérique lui est proposé comme recours à cette surcharge cognitive.

Bilan pour l'élève D au vu des hypothèses émises : La manipulation est autocorrective, l'élève identifie sa difficulté. La manipulation le contraint à avoir recours à d'autres représentations du nombre mais elles ne sont pas encore bien maîtrisées et mémorisées à ce stade de l'année.

▪ *Elève E*

L'élève E échoue lors de la séance de réinvestissement. Néanmoins, la manipulation permet à l'élève de remettre en cause son résultat erroné. Il identifie le problème comme étant lié à un problème d'organisation de son dénombrement du fait de la constellation désorganisée (tableau 10). La situation a été reprise en changeant la quantité de terriers et en les espaçant.

Bilan pour l'élève E au vu des hypothèses émises : La manipulation est autocorrective, l'élève identifie sa difficulté et remédie seul au problème.

Au vu des résultats, les hypothèses envisagées au préalable sont plus ou moins vérifiées. En effet, la phase de verbalisation, comme le souligne Stella Baruk, a facilité la compréhension de la procédure. Néanmoins, des phases de remédiation ont été nécessaires pour que les élèves puissent parvenir à réussir à passer au-delà de leurs difficultés pour accéder à la compréhension de la notion de quantité.

On peut donc en conclure que la manipulation dans une résolution de problèmes est bénéfique pour mettre en exergue les difficultés des élèves mais qu'un ajustement pédagogique est nécessaire pour que les élèves réussissent à s'approprier la procédure.

Les limites à la recherche

Lors de cette étude, j'ai pu m'apercevoir de certaines limites. Premièrement, certains problèmes n'ont pas été suffisamment anticipés : la prise en compte de l'organisation spatiale des constellations et la mémoire de travail. Le bilan de connaissances avait révélé la difficulté des élèves dans le dénombrement des constellations non organisées or la moitié des paniers du jeu représentent ce type de constellations.

Deuxièmement, je pensais qu'à travers la manipulation de petites quantités inférieures à 10, les élèves réussiraient plus facilement à avoir recours aux différentes représentations du nombre. Or, pas du tout. L'usage de la constellation de doigts a été un frein, même les élèves connaissant plusieurs types de représentations du nombre ont eu recours aux doigts. La consigne aurait dû être plus précise lors de la séance 5.

La troisième limite, que j'ai identifiée est le manque d'appropriation et de répétition de la tâche par les élèves. En effet, la rapidité du passage entre l'activité 1 et 2 de la séance 4, a occasionné chez certains élèves des erreurs lors du premier essai. De plus, à chaque séance, l'usage de « l'arbre aux cerises » changeait.

La quatrième limite est que pour certains élèves en difficultés cette situation est encore trop abstraite pour eux. Par conséquent, ils se sentent face à une véritable tâche mathématique et ne rentrent pas dans le problème.

Perspectives d'amélioration et de progression

Afin d'améliorer la situation de l'étude, j'apporterai certaines améliorations. Tout d'abord, je veillerai à proposer des constellations organisées puis progressivement, sur des petites quantités, j'introduirai des constellations désorganisées. De plus lors de l'étude, je percevais la manipulation comme un moyen de faciliter les liens entre les différentes représentations de la quantité et cela n'a pas été le cas. Il convient donc de procéder à un réajustement. En amont à l'activité 2 de la séance 4, qui met à distance rapidement l'arbre, j'envisagerai une situation du type un "tirage de carte". Les cartes proposeraient différentes représentations du nombre et l'élève devrait trouver le panier correspondant puis la branche de cerises à associer.

Je mettrai en place en parallèle des jeux du type "jeu de kim" pour travailler la mémoire et le "subitizing".

Concernant la poursuite de la séquence, je proposerai aux élèves de poursuivre avec des situations d'ajout pour commencer à introduire la décomposition.

Retour sur ma pratique personnelle

Lors de cette expérimentation, j'ai pris la mesure de l'importance de penser les situations d'apprentissage dans leur globalité. En effet, malgré le bilan des compétences, j'ai proposé une situation avec des constellations désorganisées alors que j'avais au préalable pu constater les difficultés qu'elles entraînaient. Or, j'ai pu observer que certains élèves ont longuement réfléchi à comment organiser leur dénombrement pour ne pas se tromper. Indirectement, j'ai induit chez eux une réflexion et l'élaboration d'une stratégie qui n'était pas voulue initialement. Fort heureusement pour beaucoup, ce problème ne s'est pas avéré être un frein (sauf pour les élèves B et E).

J'ai également pris conscience de l'importance de la situation. En effet, l'élève C m'a laissé perplexe et m'a énormément fait réfléchir. Je ne parvenais pas à comprendre pourquoi elle n'arrivait pas à rentrer dans l'activité sachant que, malgré son handicap, ses compétences le lui permettaient. Pendant plusieurs séances, lors d'activités fonctionnelles, j'ai fait appel à elle pour voir si elle était en capacité de répondre à la question « Combien ? » et elle a bien compris le principe de cardinalité. J'en ai conclu que pour qu'elle puisse rentrer dans une activité, il fallait que cette situation ait du sens à ses yeux.

12. CONCLUSION

La manipulation est un outil pédagogique intéressant car moins stressant pour les élèves et plus évocateur pour l'enseignant. Elle permet aux élèves des prises d'initiatives, elle conforte les élèves à l'aise avec les démarches, elle initie une réflexion chez les élèves en difficulté et permet de remettre en cause leurs procédures. Au vu des résultats de cette étude, on peut souligner le rôle autocorrectif de la manipulation et sa capacité à permettre aux élèves en difficulté de mettre des mots sur leurs problèmes. Néanmoins, sans accompagnement de l'adulte et sans la verbalisation des problèmes effectifs, la manipulation en résolution de problèmes peut s'avérer inutile.

On peut donc en conclure que la manipulation dans la résolution de problèmes permet, chez la majeure partie des élèves de cette étude, de faciliter l'acquisition de la notion de quantité ou la prise de conscience des difficultés qui limitent leurs procédures. Cependant, les liens entre les différentes représentations de la quantité n'ont pas été travaillés du fait du recours quasi systématique des élèves à la constellation de doigts.

Bien que cette situation-problème se voulait très enrichissante, elle est restée malgré tout, une situation d'apprentissages encore trop abstraite pour certains. De plus, il ne faut pas oublier que l'acquisition des procédures de comptage et de la cardinalité sont des tâches difficiles à conceptualiser. Il ne faut pas les considérer comme acquises trop tôt.

BIBLIOGRAPHIE

- Baruk, S. (2003). *Comptes pour petits et grands volume 1*. Paris: Magnard.
- Berdonneau, C. (2005). *Mathématiques actives pour les tout-petits*. Paris: Hachette livre.
- Berdonneau, C. (2006, Juin 7). *De l'importance des gestes pour l'apprentissage des concepts mathématiques*. Récupéré sur Académie de bordeaux: http://web.ac-bordeaux.fr/dsden24/fileadmin/contributeurs/Bergerac_Ouest/13-14/ANIM_PEDA_R13/ATELEIRS/berdonneau02.pdf
- Boule, F. (1985). *Manipuler, organiser, représenter prélude aux mathématiques*. Paris: Arnaud colin - Bourrelier.
- Brissiaud, R. (2007). *Premiers pas vers les maths*. Paris: Retz.
- Brissiaud, R. (2014, Décembre 16). *Rémi Brissiaud : Le nombre dans la synthèse de la consultation maternelle*. Récupéré sur [cafepedagogique.net](http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2014/12/16122014Article635543110360526449.aspx):
<http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2014/12/16122014Article635543110360526449.aspx>
- Cerquetti Aberkane, F., & Marilier, M.-C. (s.d.). *Dénombrément*. Récupéré sur Télé formation mathématiques: <http://www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM/parcours/AffNot.asp?CleFiche=1102&Auteur=CF&Numr=0>
- Charnay, R. (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes Grande section*. Paris: Hatier ERMEL.
- Charnay, R. (2013). *Comment enseigner les nombres entiers et la numération décimale? de la PS au CM2*. Paris: Hatier.
- Dalongeville, A. (2007). *Situations-problèmes pour enseigner l'histoire au cycle 3*. Paris: Hachette éducation.
- Dias, T. (2012). *Manipuler et expérimenter en mathématiques*. Paris: Magnard.
- Durpaire, J.-L., & Mégard, M. (2008). *Le nombre au cycle 2*. Sceren.
- Emprin, F. E. (2008). *Partie 2 Apprendre le nombre Premières compétences pour accéder au dénombrement. Le nombre au cycle 2, 23*.
- Fayol, M. (2013). *L'acquisition du nombre*. Paris: PUF.
- Françoise, C. -A. (s.d.). *Apprendre les mathématiques*. Récupéré sur Apprendre les mathématiques. (s. d.). Consulté à l'adresse <http://www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM/AC/AffFicheT.asp?CleFiche=1102&Org=QUTH>
- Jean Piaget, A. S. (1941). *La gènèse du nombre chez l'enfant*. Delachaux et Niestlé.
- Larousse en ligne définition manipulation*. (s.d.). Récupéré sur Larousse.fr:
<http://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/manipulation/49185>

- Ministère de la Jeunesse, d. I. (2003, février). *Découvrir le monde cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2)*. Récupéré sur dpernoux.chez-alice.fr: <http://dpernoux.chez-alice.fr/Docs/decouvrirmondecycle2.pdf>
- Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche. (26 mars 2015). *Programme de l'école maternelle*. Paris: Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche.
- Ney, L., Rajain, C., & Vaslot, E. (2006). *Des situations pour apprendre le nombre Cycle 1 et GS*. Charleville-Mezieres: SCEREN.
- Papalia, D., Olds, S., Feldmann, R., Bève, A., Laguerre, N., Thibault, M., . . . Jacques, J. (2010). *Psychologie du développement humain 7ème édition*. De Boeck.
- Pernoux, D. (s.d.). *Mathématiques en maternelle : Le domaine numérique*. Récupéré sur pernoux.pagesperso-orange.fr: <http://pernoux.pagesperso-orange.fr/nombre.pdf>
- Weil-Barais, A., & Deleau, M. (2004, Février). *Les apprentissages scolaires*. Récupéré sur [books.google](https://books.google.fr/books?id=13-mdaw-7mQC&printsec=frontcover&hl=fr&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false): https://books.google.fr/books?id=13-mdaw-7mQC&printsec=frontcover&hl=fr&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

Annexes

Annexe 1 : grille d'évaluation diagnostique.

BILAN DES COMPETENCES EN DENOMBREMENT (GRANDE SECTION)

Date du bilan : **Septembre 2015**

Nom :

Prénom :

1 La comptine numérique (énonciation de suite mot-nombre)

L'élève maîtrise la comptine numérique sans erreur, ni oubli, ni répétition jusqu'à :		
	OUI	NON
Distinguer tous les mots nombres jusqu'à 10		
Compter à partir d'un nombre différent de « un »		
S'arrêter à un nombre défini		
Compter d'un nombre donné jusqu'à un autre nombre fixé à l'avance		
Compter à rebours		
D'avancer ou de reculer		

2 Le pointage d'éléments

L'élève est capable de :		
	OUI	NON
Mettre en correspondance terme à terme deux collections		
Prononcer le dernier mot pour donner une quantité jusqu'à 6		
Dénombrer une collection en désordre et en donner la quantité		
Faire abstraction de la nature des éléments et dénombrer jusqu'à 6		

3 Reconnaissance des écritures chiffrées

L'élève est capable d' :		
	OUI	NON
Associer deux constellations organisées entre elles (dont doigts)		
Associer une constellation organisée et l'écriture chiffrée	Jusqu'à :	
Associer une écriture chiffrée à un mot nombre	Jusqu'à :	
Associer 3 représentations du nombre	Jusqu'à :	

Annexe 2 : grille d'observation des maitrises du dénombrement.

Grille observation : Maitrise du dénombrement – Séquence sur « l'arbre aux cerises »

Séance n° :

Noms										
										Estimation globale
										Utilise la correspondance terme à terme
										Recours au dénombrement
										Synchronisation entre les gestes et la récitation de la comptine
										Organisation du dénombrement
										Dénombrer tous les objets de la collection
										Prend un tas sans dénombrer
										S'aperçoit qu'il a oublié ce qui lui avait été demandé
										Recours au dénombrement mais la réponse est erronée.
										Recours au dénombrement sans erreur et en déclarant qu'il a terminé
										Maîtrise du principe cardinal
										Identifie son erreur seul
										Verbalise son erreur seul et sans difficulté
										Ne verbalise pas. L'adulte initie l'identification du problème
Remarques										

Année universitaire 2015-2016

Master 2 *Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation*

Mention Premier degré

Titre du mémoire : La manipulation en maternelle : un outil d'aide à la construction du nombre.

Auteur : SOUILLARD Marjorie

Résumé :

La manipulation dans les apprentissages mathématiques est source de motivation, elle permet de se libérer l'esprit des contraintes et favorise l'émergence de procédure personnelle. Elle répond à un besoin sensoriel encore très présent chez les jeunes élèves. Mise en place dans une situation de résolution de problèmes, elle va permettre aux élèves de donner du sens à leurs apprentissages et à verbaliser leurs difficultés. L'étude conduite vise à mettre en avant dans le cadre d'une situation problème l'impact de la manipulation sur les procédures des élèves dans l'acquisition de la notion de quantité et ses différentes représentations. L'étude s'appuie sur les résultats des élèves en difficulté, et vise à mettre en avant le rôle autocorrectif de la manipulation ainsi que sa capacité à aider à la verbalisation des obstacles. Il en ressort la manipulation est autocorrective et qu'elle permet une verbalisation, néanmoins la situation proposée reste malgré tout une situation d'école pour laquelle certains enfant ont du mal à donner du sens.

Mots clés : enseignement des mathématiques, cycle 1, résolution problème, dénombrement, procédure.

Summary :

Handling in the teaching of mathematics is source of motivation, it makes it possible to release the spirit from the constraints and supports the emergence of personal procedure. It still meets a very important sensory need for the young pupils. Organized in a problem solving, it will make it possible to the pupils to give meaning to their learning and to put into words their difficulties. The led study aims at proposing with in the framework of a solving problem the impact of holding on the procedures of the pupils in the acquisition of the concept of the quantity and its various representations. The study is based only on the results of the students in difficulty, and seeks to propose the self-correcting role of handling and aims at high lighting their capacities to charge a problem. It comes out handling from it is self-correcting and that it allows an entry of charge, nevertheless the situation suggested Remains despite everything a situation of school for which child have difficulty giving direction.

Key words : teaching mathematics, cycle 1, problem solving, count, procedure