



**HAL**  
open science

## Une situation-problème en classe de sixième

Guillaume Permingeat

► **To cite this version:**

Guillaume Permingeat. Une situation-problème en classe de sixième. Education. 2016. dumas-01436583

**HAL Id: dumas-01436583**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01436583>**

Submitted on 16 Jan 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Année universitaire 2015-2016**

**Master Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation**

**Mention : Mathématiques**

**Parcours : 2<sup>nd</sup> degré**

# **UNE SITUATION-PROBLEME EN CLASSE DE SIXIEME**

**Présenté par Guillaume PERMINGEAT**

Première partie rédigée en collaboration avec Guillaume LEBRAT

**Mémoire encadré par Michèle Gandit**

# Sommaire

<b>1. Introduction générale.....</b>	<b>1</b>
<b>2. Première partie : les situations-problèmes.....</b>	<b>2</b>
2.1. Introduction .....	2
2.2. Trois conceptions différentes de l'apprentissage .....	2
2.3. Caractéristiques d'une situation-problème.....	4
2.4. Comment construire nos situations-problèmes? Comment gérer la classe ? .....	5
2.5. Problématique.....	9
<b>3. Seconde partie : étude expérimentale.....</b>	<b>10</b>
3.1. ANALYSE A PRIORI. Introduction .....	11
3.1.1. Recherche individuelle.....	13
3.1.2. Recherche en groupe .....	17
3.1.3. L'institutionnalisation et les derniers travaux .....	19
3.2. ANALYSE A POSTERIORI. Introduction .....	22
3.2.1. Recherche individuelle.....	22
3.2.2. Recherche en groupe .....	26
3.2.3. L'institutionnalisation et les derniers travaux .....	28
3.3. RESULTATS DU TEST ET CONCLUSION .....	28
<b>Bibliographie.....</b>	<b>31</b>

## **1. Introduction générale**

Ce mémoire de Master 2 MEEF parcours mathématiques, traite des situations-problèmes. Il compte deux parties bien distinctes.

Une première partie se retrouve dans les deux mémoires des stagiaires : Guillaume Lebrat et Guillaume Permingeat. Elle étudie les notions utilisées dans les deux situations-problèmes qu'ils vont bâtir et définit leur problématique commune. Les niveaux des classes : seconde et sixième, dans lesquelles ils enseignent étant fort différents, seules les lignes directrices des situations-problèmes apparaîtront dans cette partie commune.

La seconde partie est l'étude expérimentale de la situation-problème que Guillaume Permingeat a proposée à ses élèves de sixième d'un collège dans la Drôme. Elle porte sur les délicates notions de périmètre et d'aire. Les analyses a priori et a posteriori de cette situation-problème sont successivement présentées avant la conclusion de cette partie expérimentale.

## 2. Première partie : les situations-problèmes

### 2.1. Introduction

L'expression « situation-problème » peut avoir des sens différents. Il convient d'abord d'examiner la théorie de l'apprentissage qui sous-tend ce concept. Puis il faudra définir exactement ce que nous entendons par « situation-problème » pour celles que nous proposerons à nos élèves. Bien entendu, nous n'avons pas la prétention de donner un nouveau sens à la longue liste qui existe sur cette expression. Nous précisons d'ores et déjà que notre travail sera en grande partie basé sur l'ouvrage : *Problème ouvert et situation-problème*<sup>1</sup> ainsi que sur d'autres études qui seront mentionnées. Dans cette première partie, après avoir étudié différentes conceptions de l'apprentissage, nous donnerons les caractéristiques d'une situation-problème puis nous présenterons les lignes directrices suivies pour la construction et la gestion de celles que nous proposerons dans nos classes ; enfin, nous préciserons notre problématique commune.

### 2.2. Trois conceptions différentes de l'apprentissage

L'enseignement par situation-problème est issu de la théorie de l'apprentissage appelée le constructivisme. Il faut d'abord souligner le rôle majeur de l'œuvre de Piaget dans le constructivisme ; mais pour mieux comprendre cette théorie, il semble utile d'examiner succinctement deux autres théories de l'apprentissage qui s'y opposent.

Dans la conception dite de la « tête vide », l'élève est censé partir d'une situation initiale où il ne sait rien. Elle part du principe qu'un énoncé clair du professeur est nécessairement bien compris d'un auditeur. Ainsi, le professeur crée avec l'élève une situation de communication telle que ce dernier accède progressivement à la situation finale de connaissance souhaitée. On peut mettre dans cette catégorie le cours magistral. Les limites de ce mode d'apprentissage sont connues : malgré toute la clarté du discours du professeur, il y a souvent une grande différence entre le sens de ses explications et le sens que l'élève peut leur donner. De plus, la conception part du postulat que la tête de l'élève est vide au départ, ce qui n'est généralement pas le cas pour la plupart des connaissances que l'on veut faire acquérir. Souvent la vie courante lui en a donné une première idée ou elles ont été déjà abordées dans des classes

---

<sup>1</sup> ARSAC, GERMAIN, MANTES *Problème ouvert et situation-problème* Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques Académie de Lyon Université Claude Bernard Lyon

précédentes et il n'est pas question d'en faire table rase. L'élève a probablement un état initial de connaissances qui peut se heurter au discours du professeur.

Dans la conception dite des « petites marches », l'élève part d'un état initial de connaissances et est conduit par le professeur vers l'état final supérieur en effectuant une série d'étapes intermédiaires faciles. Les limites de cette conception ont été aussi analysées : l'intégralité d'une tâche à faire pour accéder à un niveau de connaissance supérieur ne peut pas se réduire à savoir effectuer un ensemble de tâches intermédiaires. Les auteurs de l'ouvrage *Problème ouvert et situation-problème*<sup>2</sup> en donnent un exemple très imagé : une personne ayant parfaitement appris à changer les vitesses, accélérer, freiner, tourner le volant ne sait pas nécessairement conduire. On peut aisément multiplier les exemples : savoir parfaitement exécuter les mouvements des bras et des jambes de la brasse ne veut pas dire que l'on sache nager ; en mathématiques, savoir calculer un discriminant, donner son signe, écrire les racines lorsqu'il est positif ou nul ne veut pas dire que l'on sache résoudre les problèmes se ramenant à une équation du deuxième degré. Par ailleurs, les auteurs remarquent que même en cas de succès, l'élève risque fort d'être désemparé lorsqu'il se trouve sans guide, livré à lui-même, pour transférer ses connaissances dans un nouveau domaine.

Les inconvénients soulignés précédemment ne se retrouvent pas dans le modèle d'apprentissage du constructivisme. On retrouve un état initial mais qui n'est pas vide, on parle plutôt d'un ancien équilibre des connaissances. En situation d'apprentissage, l'élève passe par lui-même, après une phase de déséquilibre de son ancien système de connaissances, à un nouvel équilibre supérieur. L'apprentissage ne doit pas se réduire à de la mémorisation ou à une simple juxtaposition ou encore à un conditionnement. On constate que ce modèle d'apprentissage se fonde sur plusieurs hypothèses remarquablement cohérentes qu'il convient d'explicitier.

La première hypothèse est due à Piaget ; elle se résume par la célèbre formule : « C'est en agissant que l'on apprend » que l'on retrouve dans de nombreuses études ou articles sur la didactique, par exemple, chez Robinet<sup>3</sup> ou Giordan<sup>4</sup>. Il faut entendre ici agir par résoudre un problème. Cette résolution doit être l'œuvre personnelle de l'élève.

---

<sup>2</sup> Opus cité en note 1 page 94

<sup>3</sup> ROBINET, De l'ingénierie didactique Cahier de didactique des mathématiques numéro 1 IREM Université Paris VII Page 1

<sup>4</sup> GIORDAN L'agir et le faire page 1 [www.andregiordan.com/articles/apprendre/agirrfaire.html](http://www.andregiordan.com/articles/apprendre/agirrfaire.html)

La deuxième hypothèse est aussi due aux travaux de Piaget. Robinet<sup>3</sup> en donne la formulation suivante : « Pour lui (Piaget), la connaissance passe d'un état d'équilibre à un autre par des phases transitoires au cours desquelles les connaissances antérieures sont mises en défaut. Si ce moment de déséquilibre est surmonté, c'est qu'il y a eu une réorganisation des connaissances au cours de laquelle les nouveaux acquis sont intégrés au savoir ancien ».

La troisième hypothèse est due à l'origine à Bachelard<sup>5</sup>. Citons-le : « Quel que soit son âge, l'esprit n'est jamais vierge, table rase ou cire sans empreinte ». Non seulement Bachelard rejette la conception de la « tête vide » au départ mais encore il insiste sur l'obstacle que constituent les représentations initiales : « Les représentations se constituent en obstacles à la connaissance scientifique ». Cette hypothèse est en parfaite cohérence avec la précédente : la phase de déséquilibre de l'état initial est nécessaire et doit être surmontée.

Enfin, la quatrième hypothèse relève du socioconstructivisme. L'hypothèse émet l'idée que les conflits entre élèves peuvent faciliter l'acquisition de connaissances. Il s'agit plus précisément de conflits sociocognitifs, car ils concernent la connaissance, et il y a dans tout conflit une composante sociale. Le travail en groupe d'élèves semble approprié pour favoriser ce type de conflit.

Tel est le cadre général du constructivisme, à savoir la théorie de l'apprentissage dans lequel se situent les situations-problèmes, quel que soit le sens donné à cette expression dans les différentes études. Il importe maintenant de caractériser plus précisément le sens que nous adopterons afin de pouvoir construire les situations-problèmes que nous proposerons à nos élèves.

### **2.3. Caractéristiques d'une situation-problème**

Dans l'ouvrage *Problème ouvert et situation-problème*<sup>6</sup>, les auteurs relèvent cinq caractéristiques pour les situations qu'ils appellent situations-problèmes. Suivons leur cheminement.

Une première caractéristique est la possibilité pour l'élève de s'engager dans la résolution du problème. En effet, si l'élève se heurte d'emblée à un mur qu'il estime infranchissable, aucun processus ne sera enclenché vers un nouvel équilibre supérieur de ses connaissances. Il restera sur ses anciennes connaissances, passif, sans s'apercevoir qu'elles sont insuffisantes.

---

<sup>5</sup> BACHELARD, *La formation de l'esprit scientifique* Ed Vrin

<sup>6</sup> Opus cité en note 1 page 99

La deuxième caractéristique écarte la situation contraire. Elle précise que les connaissances de l'élève ne doivent pas lui permettre de résoudre immédiatement le problème. En effet, s'il en était ainsi, l'élève resterait aussi, mais pour d'autres raisons, sur ses anciennes connaissances. Là encore, aucun processus vers un équilibre supérieur de ses connaissances ne pourrait être enclenché.

La troisième caractéristique est énoncée ainsi dans l'ouvrage cité ci-dessus<sup>7</sup> : « La situation-problème doit permettre à l'élève de décider si une solution trouvée est convenable ou pas ». L'élève doit prendre conscience que ses connaissances sont insuffisantes, mais il ne fera évoluer cet ancien équilibre de connaissances que s'il est certain que la solution trouvée convient.

La quatrième caractéristique porte sur l'adaptation nécessaire entre la connaissance que l'on désire faire acquérir à l'élève et la résolution du problème par celui-ci. En effet, si l'élève résout le problème par une solution étrangère à la connaissance visée, il ne fera pas évoluer son ancien équilibre de connaissance : la situation-problème est mal choisie. Il est donc essentiel dans l'analyse a priori du problème posé de s'interroger sur les démarches possibles des élèves dans sa résolution.

La cinquième caractéristique porte sur la formulation du problème dans plusieurs registres de connaissances : graphique, géométrique, etc. Cette dernière caractéristique sera nuancée dans nos situations-problèmes car la multiplicité des registres de formulation est difficilement applicable pour nos élèves de sixième et de seconde.

Telles sont les caractéristiques qui nous permettront de construire les situations-problèmes que nous proposerons à nos élèves. Il importe maintenant de donner les lignes directrices de la construction de nos situations-problèmes et de connaître la gestion de la classe lorsque nous les présenterons.

#### **2.4. Comment construire nos situations-problèmes? Comment gérer la classe ?**

Les niveaux de nos classes : sixième et seconde sont très différents et les sujets de nos situations-problèmes le sont aussi. En conséquence, leurs constructions ne peuvent être rigoureusement les mêmes ; elles ne seront données d'une façon précise que dans l'analyse a priori de chacune d'entre elles. Néanmoins, les lignes directrices de ces constructions suivront les points suivants.

---

<sup>7</sup> Opus cité en note 1 page 99



- Plusieurs questions sur un même thème seront proposées à chaque élève d'une classe. Il doit se les approprier et entrer dans la problématique.
- Les premières questions doivent permettre un démarrage pour tous les élèves. Les suivantes seront de plus en plus ouvertes. L'ensemble des questions ne doit pas pouvoir être résolu immédiatement par l'élève. Leur résolution n'est possible qu'après un travail personnel de recherche de l'élève, seul ou en groupe. La conjonction de coordination *ou* est prise ici dans son sens inclusif. L'élève doit avoir, aussi souvent que possible, des moyens de contrôler ses résultats.
- La résolution de l'ensemble des activités conduit l'élève à se forger un niveau de connaissance supérieur à son ancien niveau sur le thème choisi.

Le point initial appelle un premier commentaire sur la dévolution. Une définition en a été donnée par Brousseau<sup>8</sup> : « Processus par lequel l'enseignant parvient dans une situation didactique à placer l'élève comme simple actant dans une situation a-didactique (à modèle non didactique). Il cherche par là à ce que l'action de l'élève ne soit produite et justifiée que par les nécessités du milieu et par ses connaissances, et non par l'interprétation des procédés didactiques du professeur. La dévolution consiste pour l'enseignant, non seulement, à proposer à l'élève une situation qui doit susciter chez lui une activité non convenue, mais aussi à faire en sorte qu'il se sente responsable de l'obtention du résultat proposé, et qu'il accepte l'idée que la solution ne dépend que de l'exercice des connaissances qu'il possède déjà ». Ainsi dans le processus de dévolution, le professeur doit faire en sorte que l'élève assume sa responsabilité dans l'apprentissage.

On comprend le désarroi de l'élève qui se retrouve seul responsable alors que le plus souvent, il a été guidé dans ses actes de connaissances : non seulement chez lui, dans les actes les plus élémentaires de la vie courante par ses parents ou une personne familière mais aussi, souvent à l'école par le « maître ou la maîtresse », lorsque leur conception de l'apprentissage se prête à une telle aide. Pourtant, l'élève doit s'approprier les problèmes que posent les activités et se rendre compte que ses connaissances antérieures ne suffisent pas pour les résoudre dans leur ensemble. Si cette appropriation est faite, l'élève pourra dépasser la phase de déséquilibre et accéder, en cas de succès, à un nouvel équilibre de ses connaissances. On constate que le processus de dévolution est particulièrement délicat à enclencher : il se heurte à de nombreuses difficultés. Les situations-problèmes proposées devront accorder la plus grande

---

<sup>8</sup> BROUSSEAU *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*  
[http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire\\_V5.pdf](http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf) page 5

attention à ce premier point : il importera de trouver des facteurs qui permettent de favoriser l'enclenchement du processus de dévolution.

Le deuxième point précise les qualités des activités à résoudre dans le cadre de la situation-problème proposée. Les problèmes liés aux premières activités doivent être accessibles à tous les élèves. En effet, si la résolution d'un problème semble d'emblée impossible à l'élève, son processus vers une connaissance supérieure sera bloqué dès le début. Au demeurant, cette façon de faire, favorise le démarrage du processus de dévolution, surtout si l'élève a la possibilité de contrôler ses résultats comme le précise ce deuxième point. En revanche, il ne faut pas que tous les problèmes liés à l'ensemble des activités puissent être résolus facilement par l'élève ; dans le cas contraire, il ne remettrait pas en question son ancien système de connaissances. Cette résolution doit se faire par un travail personnel de recherche de l'élève, qu'il se trouve seul ou en groupe. Chaque mode de travail présente un avantage. Pour profiter de ces deux modes, nous prévoyons de présenter aux élèves une situation-problème en deux parties. Dans la première partie, le travail sera individuel et portera sur des activités relativement simples, la première étant facilement accessible à tous les élèves. Puis dans la seconde partie, les élèves seront répartis en petits groupes. Une mise en commun sur leurs résultats sera établie. Dans un second temps, un problème plus difficile traité en groupe sur le même thème sera proposé. Il s'agit d'évaluer chaque fois les bénéfices des conflits sociocognitifs évoqués dans la quatrième hypothèse du socioconstructivisme. Bien évidemment dans un enseignement par groupes d'élèves, leur composition est essentielle : groupes par affinité, groupes hétérogènes ou groupes de niveau. Chaque composition peut présenter des avantages et des inconvénients. Les résultats obtenus peuvent être fort différents. Nous traiterons cette difficile question de la composition des groupes dans nos analyses a priori respectives de nos deux situations-problèmes.

Le troisième point évoque l'équilibre supérieur de connaissances que l'élève doit atteindre par lui-même grâce à la qualité des questions posées. Elles doivent favoriser la critique de son ancien système de connaissances et la formulation de conjectures à vérifier sur le nouveau. Cet équilibre de connaissances doit être en parfaite adéquation avec le programme de la classe et dépasser le niveau des classes antérieures lorsque les notions traitées ont déjà été étudiées.

Après avoir examiné les différents points que nous respecterons lors de l'élaboration de nos situations-problèmes, il faut aborder la question de la gestion de la classe durant leur déroulement. Plusieurs phases peuvent être distinguées durant cette gestion.

Une phase d'action. Durant cette phase, l'élève rassemble et organise ses connaissances en vue de la résolution des questions posées. C'est la phase essentielle de recherche.

Une phase de formulation. Chercher et trouver une résolution pour un problème n'est évidemment pas suffisant, il faut pouvoir la communiquer. Dans cette phase, l'élève ou le groupe explicite sa résolution du problème. Cette explicitation se fera par écrit dans nos situations-problèmes.

Une phase de validation. L'élève ou le groupe prouve la validité de sa solution.

Durant ces trois premières phases, le rôle du professeur, immense dans la préparation, devient très réduit puisque c'est l'élève qui a la responsabilité du travail. Si des questions lui sont posées sur la validité d'une solution, il doit indiquer que les réponses seront données à la mise en commun ultérieure et l'inciter à une nouvelle vérification éventuellement d'une autre façon. Le rôle du professeur sera plus prononcé dans la phase suivante.

La phase d'institutionnalisation. L'institutionnalisation peut se définir de la façon suivante : « L'institutionnalisation est le processus par lequel va s'opérer le changement de statut de certaines connaissances pour en faire des savoirs qu'on pourra ensuite exiger dans les évaluations »<sup>9</sup>. Parmi les connaissances acquises, certaines méritent d'être retenues : il faut les préciser, les généraliser, les formuler et leur donner un statut officiel en les reliant à des savoirs inscrits au programme. La confrontation des résultats des différents groupes de travail semble être une manière intéressante de procéder. Une synthèse effectuée par les représentants des groupes et le professeur, permettra d'atteindre les objectifs de l'institutionnalisation.

Une dernière phase comporte des exercices et une évaluation. Cette phase consiste à familiariser les élèves avec les nouveaux acquis qu'ils se sont construits. Cette phase sera l'objet de séances ultérieures.

Telles sont les lignes directrices que chacun d'entre nous suivra dans la construction de sa propre situation-problème. L'analyse a priori de chacune d'entre elles donnera de façon précise le détail de chaque construction. Il faut maintenant définir notre problématique commune.

---

<sup>9</sup> PERRIN GLORIAN *Que nous apprennent les élèves en difficultés en mathématiques ?* Repères Irem N° 29  
Octobre 1997 page 54

## **2.5. Problématique**

Notre problématique sera strictement restreinte aux deux situations-problèmes que nous aurons expérimentées dans nos classes respectives. Plus précisément, elle sera la suivante :  
Quel éclairage pédagogique l'expérimentation d'une situation-problème peut-elle apporter dans l'apprentissage d'un thème mathématique ?

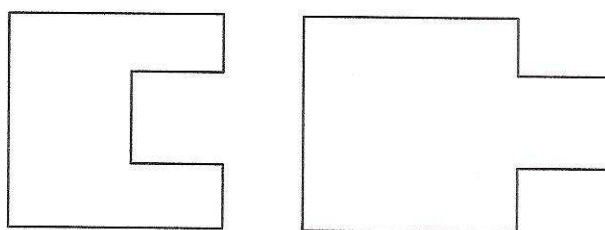
### **3. Seconde partie : étude expérimentale**

Etude expérimentale de la situation-problème proposée à une classe de sixième par Guillaume Permingeat sur les notions de

**PERIMETRE ET AIRE.**

### 3.1. ANALYSE A PRIORI. Introduction

La notion de « périmètre et aire » est délicate. De nombreux professeurs et didacticiens précisent que ces deux grandeurs sont fréquemment confondues par les élèves. Ainsi, Douady et Perrin–Glorian classent parmi les erreurs habituelles des élèves « les confusions aire périmètre et les confusions de formules »<sup>10</sup>. Les mesures de ces deux grandeurs sont aussi mélangées : il n'est pas rare de trouver une aire en cm et un périmètre en cm<sup>2</sup>. Pour ma part, ne pouvant faire sur mes élèves un test préliminaire qui aurait influencé le déroulement de la situation-problème que je compte leur poser, j'ai présenté à plusieurs personnes de mon entourage les deux figures très simples suivantes :



Toutes les personnes interrogées ont constaté immédiatement que l'aire de la figure de droite était supérieure à celle de gauche, ce qui est exact ; mais un certain nombre a affirmé qu'il en était de même avec les périmètres, ce qui est faux.

On peut considérer que cette confusion s'enracine d'abord dans notre expérience de la vie quotidienne, car la plupart du temps nous manions des surfaces dont l'aire et le périmètre augmentent simultanément. Il est aussi intéressant de faire une approche historique des deux grandeurs : périmètre et aire. En effet, on met souvent en avant l'hypothèse que le processus d'apprentissage au cours de l'histoire et celui de l'individu, ont des liens.

Les notions de périmètre et d'aire sont évidemment très anciennes. Jean Brette, ancien responsable du département de mathématiques au palais de la Découverte, nous signale dans un de ses articles<sup>11</sup> des calculs sur le périmètre et l'aire de disques datant du XVIIe siècle avant J.-C. : « Dans le papyrus Rhind (environ 1650 avant J.-C.) le scribe Ahmès donne une recette permettant de calculer l'aire d'un disque. Et on dispose de quelques tablettes d'argile « babyloniennes » datant de la même période et concernant le périmètre ou l'aire ».

---

<sup>10</sup> PERRIN-GLORIAN *L'aire et la mesure*  
www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue\_x/fic/24/24x1.pdf. page 1 Introduction  
<sup>11</sup> BRETTE Promenade mathématique en Mésopotamie 2013 page 1

Dans ses premiers écrits, l'histoire multiplie les exemples où les surfaces ne sont pas définies par des aires mais par des périmètres. Bien entendu, dans ses débuts, l'histoire se mêle souvent intimement avec la légende ; mais, peu importe, une confusion entre aire et périmètre est bien présente dans ces écrits et reflète la pensée d'une certaine époque.

Par exemple, le grand poète latin Virgile a mis en vers la légende de la fondation de Carthage par Didon, épouse d'Enée et première reine de Carthage. Elle aurait fondé cette ville vers la fin du IXe siècle avant J.-C., lorsqu'un roi lui a offert un territoire aussi grand que pourrait en recouvrir une peau de bœuf. La mélancolique mais rusée Didon fit découper une peau de bœuf en fines lanières et fit entourer un territoire suffisant pour y bâtir une citadelle. Ce territoire, appelé Byrsa (« bœuf »), deviendra le centre historique de la cité punique<sup>12</sup>.

Plus loin de la légende et donc plus historiquement, Defrasne<sup>13</sup> rapporte l'action héroïque d'Horatius Cocles qui sauva seul, la citadelle de Rome d'une invasion par les Etrusques. L'historien précise ensuite qu'il reçut la plus haute récompense que le sénat accordait à l'époque aux héros exceptionnels : autant de terre qu'une charrue peut en entourer en un jour.

De nos jours, les surfaces sont bien définies par des aires. Les actes notariés d'achat d'une parcelle mentionnent toujours son aire mais ne signalent pas son périmètre. Toutefois, il faut reconnaître qu'il a existé dans l'histoire une confusion entre ces deux notions. Cette confusion se retrouve chez l'élève.

C'est certainement, la raison pour laquelle le programme de la classe de sixième mentionne explicitement :

*Différencier périmètre et aire.*

Il faut noter que dans les programmes de CM2, périmètre et aire sont étudiés successivement ; mais cette différenciation ne figure pas explicitement dans ces programmes. A ce niveau, une confusion peut encore exister ; en revanche, elle doit être franchement dénoncée chez un élève de sixième.

L'objectif visé par la situation-problème, est principalement que les élèves se construisent par eux-mêmes un nouveau système de connaissances où périmètre et aire sont deux grandeurs bien distinctes.

Différentes questions sur ce thème seront proposées dans la situation-problème.

---

<sup>12</sup> Légende de la fondation de Carthage page 1

[www.ac-grenoble.fr/...fondationcarthage/FondationdeCarthage.html](http://www.ac-grenoble.fr/...fondationcarthage/FondationdeCarthage.html)

<sup>13</sup> DEFTRASNE *Récits tirés de l'histoire de Rome* Nathan page 16

Dans un premier temps, la recherche sera individuelle. Les élèves seront questionnés sur des figures ayant des aires égales, ils devront trouver que les périmètres ne sont pas nécessairement égaux. De la même façon, des figures ayant des périmètres égaux n'ont pas forcément des aires égales.

Ensuite la recherche se fera par petits groupes. Après discussion, chaque groupe devra d'abord donner son avis sur les questions précédentes du travail individuel, puis il lui est proposé une question plus difficile satisfaisant l'objectif suivant du programme :

*Certaines activités proposées conduisent les élèves à comprendre notamment que périmètre et aire ne varient pas toujours dans le même sens.*

Dans l'analyse a priori qui va suivre, nous présenterons les questions de la situation-problème proposée et nous étudierons les raisons pour lesquelles elles ont été choisies ainsi que les attentes dans le cadre de leur présentation. On étudiera d'abord la partie où la recherche est faite individuellement, puis celle où les élèves sont en groupe, enfin nous verrons comment se fera l'institutionnalisation des résultats et nous préciserons les derniers travaux qui sont liés à cette situation-problème.

### **3.1.1. Recherche individuelle**

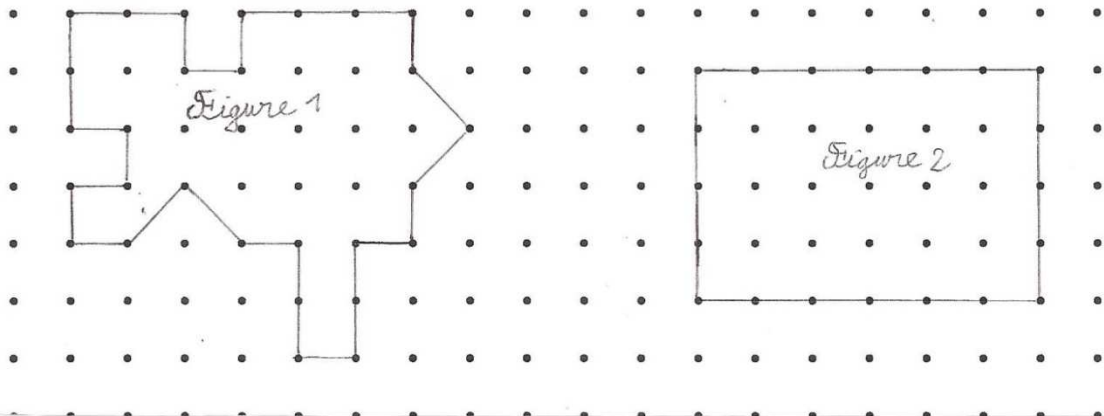
En premier lieu, il faut expliquer aux élèves le déroulement des séances qui vont suivre afin que leur travail de recherche se fasse dans les meilleures conditions. Il faut leur dire que le travail ne sera pas noté : ce n'est pas un devoir en classe. Il faut aussi leur expliquer ce qu'on attend d'eux : une recherche, d'abord individuellement puis en groupe. L'essentiel n'est pas tellement de trouver, mais avant tout de chercher et de noter ses réflexions.

Ensuite, deux fiches intitulées énoncé 1 et énoncé 2 sont distribuées à chaque élève. La fiche du premier énoncé est donnée ci-dessous. Elle présente deux figures simples dont une est un rectangle. Elles ne sont pas superposables et sont représentées sur une feuille de papier pointée, le découpage se faisant par carrés de 1 cm de côté. Cette présentation permet de comparer aisément les aires et les périmètres des figures et d'atteindre sans grosses difficultés l'objectif principal de ce premier énoncé : deux figures ayant la même aire n'ont pas toujours le même périmètre. Effectivement, c'est le cas pour les figures 1 et 2 données.



Enoncé 1 (Fiche individuelle)

Nom de l'élève : .....



a/ Explique pourquoi les deux figures ont la même aire.

b/ Les deux figures ont-elles le même périmètre ? Explique bien pourquoi.

c/ Anaïs, une élève de 6<sup>ème</sup> qui a examiné les deux figures dit : « **Deux figures de formes différentes peuvent avoir la même aire** ». Es-tu d'accord avec Anaïs ? Explique bien pourquoi.

d/ Anaïs dit maintenant : « **Lorsque deux figures ont la même aire, elles ont toujours le même périmètre** ». Es-tu d'accord avec cette nouvelle affirmation d'Anaïs ? Explique bien pourquoi.

La première question concerne l'aire identique des deux figures. Deux procédures de réponses sont possibles.

Une procédure par schématisation où l'élève pourra se rendre compte qu'en compensant les parties saillantes de la première figure par les parties rentrantes, on obtient exactement le rectangle de la deuxième figure. Il pourra exprimer cette compensation à son gré par un jeu de flèches ou en coloriant avec des couleurs différentes les parties saillantes et rentrantes.

La procédure calculatoire consiste à calculer en carreaux ou en  $\text{cm}^2$  les aires de chaque figure. L'aire des parties saillantes et rentrantes de la première figure, en forme de triangle faisant un carreau ( $1\text{cm}^2$ ), cette procédure est aussi possible pour l'élève.

Ainsi, cette première question ne devrait pas être infranchissable par l'élève. La possibilité d'obtenir la réponse de deux façons différentes correspond aussi parfaitement aux principes de construction d'une situation-problème, que nous nous sommes imposés.

La deuxième question concerne les périmètres des deux figures. Elle correspond à la compétence suivante du programme :

*Comparer géométriquement des périmètres. La comparaison de périmètres sans avoir recours aux formules est particulièrement importante pour affermir le sens de cette notion.*

Effectivement, la mesure exacte du périmètre de la figure 1 par l'élève n'est pas possible car il ignore la longueur d'une diagonale pour un carré de 1 cm de côté. En revanche, il peut construire un processus arrivant à la conclusion souhaitée : le périmètre de la figure 1 est supérieur à celui de la figure 2. Par exemple, même sans compter les parties diagonales, le périmètre de la figure 1 est déjà supérieur à celui de la figure 2.

*Raisonnement logique* est une compétence attendue à la fin de la sixième. Les deux questions suivantes portent sur la validation ou l'invalidation de conjectures, par des exemples et des contre-exemples. Par souci de mettre les élèves en confiance et d'entretenir chez eux l'idée que le problème est à leur portée, les conjectures sont formulées dans le texte par une certaine Anaïs, une élève de sixième qui a examiné les deux figures. La première conjecture est énoncée de telle manière que l'exemple des deux figures suffit pour la valider. Cette validation devrait motiver chaque élève à continuer. En revanche, les deux figures constituent un contre-exemple pour la deuxième conjecture.

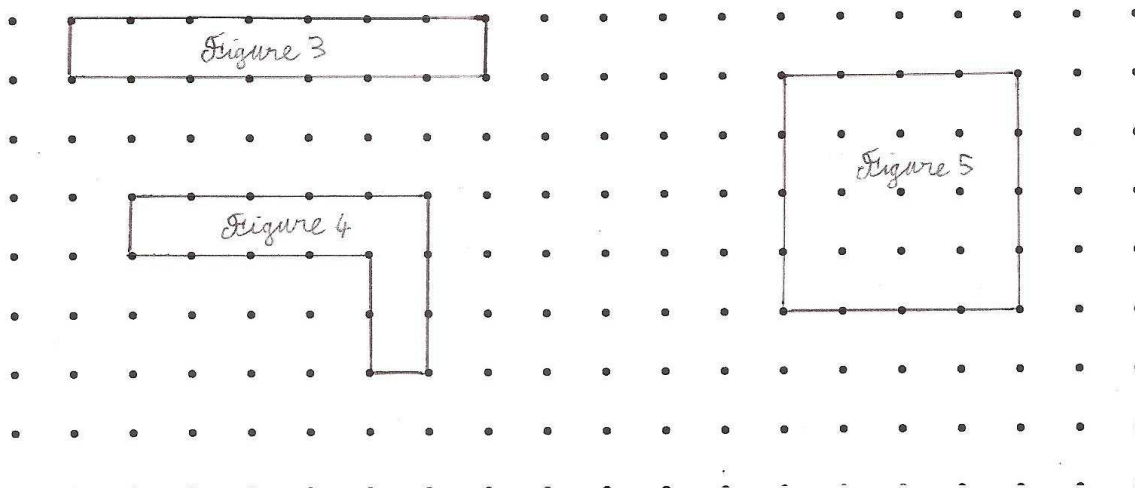
La fiche du second énoncé est donnée ci-dessous ; elle présente trois figures simples non superposables. Les trois périmètres sont égaux, les aires des deux premières le sont, mais celle de la troisième est nettement plus élevée.

Énoncé 2 (Fiche individuelle)

Nom de l'élève : .....

Un autre élève de 6<sup>ème</sup>, Paul dit : « Lorsque deux figures ont le même périmètre, elles ont toujours la même aire ».

On lui montre alors les trois figures suivantes :



Après avoir bien examiné les figures présentées, Paul ne change pas d'avis. Es-tu d'accord avec Paul ? Explique bien pourquoi.

La question est beaucoup plus ouverte que les précédentes. L'élève doit d'abord comparer par lui-même les périmètres et les aires avant d'infirmer ou de confirmer une conjecture d'un autre élève de sixième prénommé Paul. En plus du résultat visé sur les périmètres et les aires, le problème cherche de nouveau à développer la compétence : *Raisonnement logique*. En effet, l'exemple des deux premières figures ne permet pas de confirmer la conjecture. En revanche, un contre-exemple prenant deux des trois figures suffit pour la réfuter. Le même processus, décrit ci-dessus, vers un nouvel équilibre de connaissances est attendu.

Après cette première partie, les feuilles seront ramassées. Elles permettront de constater l'avancement de la recherche de chaque élève lorsqu'il est seul et de comparer ses conclusions à celles qu'il fera en groupe puisque des questions seront reprises.

Dans la pratique, une première séance devra être consacrée à la recherche individuelle de cette première partie. En effet, on peut estimer à un peu plus de 30 minutes la durée de travail nécessaire aux élèves pour les deux énoncés présentés. La durée restante du cours sera occupée par des activités mathématiques dans une autre partie du programme, afin de ne pas perturber le déroulement de la situation-problème.

### **3.1.2. Recherche en groupe**

Comme on vient de le voir, cette recherche en groupe doit se faire lors d'une deuxième séance. Un premier écueil se présente : les élèves ne vont-ils pas tout simplement oublier leur premier travail de recherche entre les deux séances et briser ainsi l'unité de la situation-problème, d'autant plus que certaines questions de la première partie vont être reprises. Mon emploi du temps le permettant, les deux séances seront effectuées le même jour.

La composition des groupes est évidemment essentielle, chacune a ses avantages et ses inconvénients : groupes de niveau, groupes par affinité, groupes hétérogènes. Il semble préférable pour cette étude de prendre des groupes hétérogènes qui reflètent mieux la réalité à laquelle les élèves seront confrontés au cours de leurs futurs travaux de groupe. Au demeurant, la classe elle-même est un groupe hétérogène. Le nombre d'élèves au sein de chaque groupe est aussi un facteur déterminant : un nombre trop élevé d'élèves dans un groupe nuirait à la communication entre ses éléments, la probabilité de l'exclusion d'un membre du groupe serait aussi accrue.

Pour ces raisons, des groupes hétérogènes de trois ou quatre élèves ont été choisis. La classe comptant 25 élèves, il y aura : 7 groupes de trois élèves et 1 groupe de quatre élèves.

La fiche de l'énoncé 3 que recevra chaque groupe est donnée ci-dessous. Les groupes auront en plus à leur disposition les énoncés 1 et 2 de la séance précédente pour rappeler leur contenu exact. En effet, les deux premières questions de l'énoncé 3 ont déjà été posées dans les mêmes termes, mais elles s'adressent maintenant au groupe. Des feuilles pointées vierges seront aussi distribuées pour que les élèves puissent s'exercer lors de la résolution de la dernière question.

Enoncé 3 (Fiche de groupe)

Groupe : .....

a/ Discutez de la seconde affirmation d'Anaïs : « **Lorsque deux figures ont la même aire, elles ont toujours le même périmètre** ».

Quel est l'avis du groupe ? Expliquez pourquoi. Les élèves qui ne sont pas d'accord avec l'avis du groupe, écrivent leur nom dans la colonne « Pas d'accord ».

Pas d'accord

b/ Discutez de l'affirmation de Paul : « **Lorsque deux figures ont le même périmètre, elles ont toujours la même aire** ».

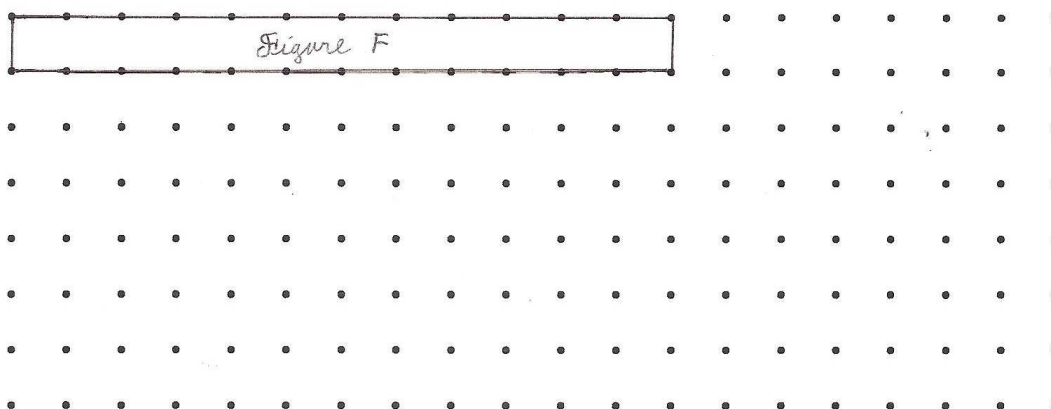
Quel est l'avis du groupe ? Expliquez pourquoi. Les élèves qui ne sont pas d'accord avec l'avis du groupe, écrivent leur nom dans la colonne « Pas d'accord ».

Pas d'accord

c/ Peut-on construire une figure G qui vérifie les deux conditions suivantes :

- 1/ le périmètre de G est plus petit que celui de F
- 2/ l'aire de G est plus grande que celle de F

Discutez bien. Si vous pensez que c'est impossible marquez simplement IMPOSSIBLE. Si vous pensez que c'est possible construire une figure G telle qu'il en soit ainsi.



Les deux premières questions invitent les membres de chaque groupe à discuter sur la seconde conjecture d'Anaïs, puis sur celle de Paul. L'avis majoritaire du groupe doit être formulé avec son explication par un rapporteur. Dans le cas où certains élèves seraient contre l'avis majoritaire exprimé, il est demandé de mentionner leur nom. En revenant ainsi avec le groupe sur des questions précédemment posées dans une recherche individuelle, il devrait être

possible de mesurer les bénéfices d'une telle forme de travail où les conflits sociocognitifs sont maintenant possibles. Bien sûr les résultats de ces mesures devront être tempérés car un élève ayant une forte personnalité peut influencer son groupe ; a contrario, un élève timide aura peut-être des difficultés à écrire son nom, montrant ainsi qu'il est contre l'avis majoritaire.

La troisième question adressée au groupe devrait heurter l'ancien système de connaissance de bon nombre d'élèves : est-il possible de construire deux figures telles que leurs périmètres et leurs aires ne varient pas dans le même sens ? On rejoint pleinement les instructions du programme :

*Certaines activités proposées conduisent les élèves à comprendre notamment que périmètre et aire ne varient pas toujours dans le même sens.*

La figure F présentée est un rectangle ayant une grande longueur (12 cm), mais une faible largeur (1 cm). La question est très ouverte puisque le groupe doit construire une figure G de périmètre inférieur à celui de F et d'aire supérieure à celle de F. Après discussion, le groupe peut aussi affirmer l'impossibilité d'une telle construction, ses membres ayant vainement essayé de dessiner une figure G convenable sur les feuilles pointées vierges à leur disposition. On le voit, cette dernière question est assez difficile, mais elle ne devrait pas être insurmontable car d'une part, elle s'adresse au groupe et d'autre part, elle prolonge un travail de recherche qui a déjà été effectué sur les périmètres et les aires.

### **3.1.3. L'institutionnalisation et les derniers travaux**

Pour des questions de durée, l'institutionnalisation ne peut être faite que dans une séance ultérieure. J'aurai donc la possibilité d'analyser au préalable, d'une part le travail personnel de recherche de chaque élève et son évolution après le regroupement, d'autre part le travail des groupes.

Une synthèse des travaux sera faite avec les représentants de chaque groupe. Elle doit conduire à consigner par écrit, les résultats essentiels qu'il faut retenir, à mettre en évidence la différence entre les grandeurs périmètre et aire, prouvée grâce à un jeu d'exemples et de contre-exemples, enfin à mettre en évidence les méthodes pour faire des mathématiques, qui ont été développées au cours de la situation-problème.

Pour le travail individuel, grâce au contre-exemple des deux figures l'erreur de la seconde conjecture d'Anaïs doit devenir évidente pour tous les élèves ; ils écriront ensuite : « la

conjecture selon laquelle si les aires sont égales, alors les périmètres sont égaux, est fausse comme le montre le contre-exemple des figures 1 et 2 ».

De la même façon, les élèves devront être convaincus que la conjecture de Paul est fausse puisque le contre-exemple des figures 3 et 5 le prouve ; en revanche, les figures 3 et 4 forment seulement un exemple qui ne démontre rien. Les élèves écriront : « la conjecture selon laquelle si les périmètres sont égaux, alors les aires sont égales, est fausse comme le montre le contre-exemple des figures 3 et 5. L'exemple des figures 3 et 4 ne prouve rien ».

Pour le travail effectué en groupe, la figure F accompagnée d'une figure G correcte construite par un groupe, sera présentée aux élèves. Les périmètres et les aires des deux figures seront calculés. Les variations contraires des périmètres et des aires de F et de G seront explicitées à l'aide d'un tableau :

F		G
périmètre	>	périmètre
aire	<	aire

Un élève sera invité à lire le tableau dans l'ordre F et G : le périmètre de F est plus grand que le périmètre de G et l'aire de F est plus petite que l'aire de G. Un autre élève devra faire la lecture dans l'ordre G et F : le périmètre de G est plus petit que le périmètre de F et l'aire de G est plus grande que l'aire de F.

Les élèves écriront enfin : « Pour deux figures, les périmètres et les aires ne varient pas toujours dans le même sens ».

Ensuite, une discussion sera enclenchée sur la méthode de faire des mathématiques, qui a été employée au cours des deux séances. Elle pourra être animée par un jeu de questions posées par les élèves ou par moi-même. Par exemple, Connaissez-vous tous les résultats trouvés ? Est-ce que je vous ai donné des indications ? Qu'en déduit-on ?

Il est attendu de cette discussion que les élèves se rendent compte qu'ils peuvent en mathématiques trouver et prouver par eux-mêmes de nouveaux résultats.

En dernier lieu, les figures G exactes des différents groupes pourront être projetées et il sera proposé à la classe de mesurer en cm leur périmètre et leur aire en  $\text{cm}^2$ . Cet exercice mettra en valeur le travail de recherche des groupes qui ont réussi et amorcera la familiarisation les élèves avec les nouveaux acquis qu'ils se sont construits au cours de cette situation-problème. Cette familiarisation par des exercices sera poursuivie au cours de séances ultérieures. Enfin,

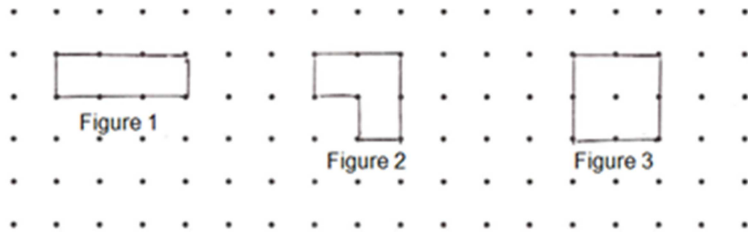
après une longue période incluant les vacances de printemps, un test court sera proposé aux élèves afin d'étudier ce qu'il reste de ces nouveaux acquis. Il sera le suivant :

1/ La phrase suivante est-elle vraie ou fausse ?

Lorsque deux figures ont le même périmètre, elles ont toujours la même aire.

VRAIE FAUSSE

Prouve ta réponse en t'aidant des figures suivantes :



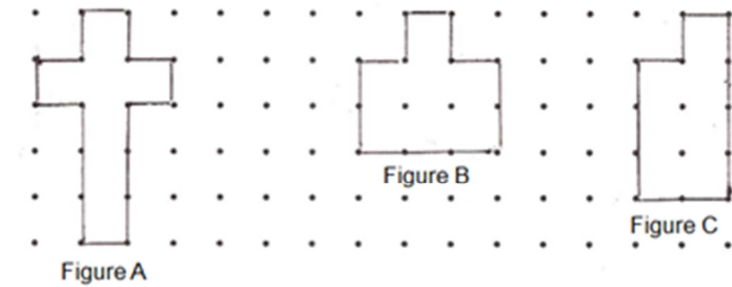
.....  
.....  
.....

2/ La phrase suivante est-elle vraie ou fausse ?

Lorsque deux figures ont la même aire, elles ont toujours le même périmètre.

VRAIE FAUSSE

Prouve ta réponse en t'aidant des figures suivantes :



.....  
.....  
.....



### **3.2. ANALYSE A POSTERIORI. Introduction**

Mon emploi du temps prévoyant deux heures le jeudi avec ma classe de sixième, la situation-problème a été proposée le jeudi 31 mars. Le matin, les élèves ont effectué la partie individuelle durant environ 30 minutes (le reste de la séance a été consacré à des activités sur d'autres sujets) ; l'après-midi, le travail en groupes a nécessité environ 40 minutes. La séance concernant l'institutionnalisation s'est déroulée le cours suivant.

Avec la situation-problème, les élèves abordaient pour la première fois de leur année de sixième, les notions de périmètre et aire. On sait qu'elles ont été étudiées à l'école élémentaire, mais cette école doit représenter un passé bien révolu pour un élève de sixième qui a effectué plus de la moitié d'une année au collège où de profonds bouleversements ont eu lieu dans l'enseignement qu'il reçoit. De plus, les élèves se sont trouvés d'emblée dans une situation adidactique où ils devaient eux-mêmes construire un nouveau système de connaissances sur les notions de périmètre et d'aire. Le risque était donc grand que certains élèves, déroutés, renoncent très rapidement à répondre aux questions, malgré tout le soin apporté dans leur élaboration qui suit une difficulté progressive. J'ai été moi-même surpris de constater qu'il n'en n'a rien été. Dans leur immense majorité les élèves ont participé à la totalité de la situation-problème, que ce soit le matin lors du travail individuel, ou l'après-midi lors de celui en groupe. Et j'ai même pu observer l'intérêt qu'ils portaient à leur travail. Les résultats le montrent : l'après-midi, tous les groupes ont répondu à toutes les questions ; le matin, pour cette classe comptant 25 élèves, seulement un élève a délaissé trois questions, et deux autres n'ont pas répondu à une seule question.

On peut donc considérer que l'on disposera d'éléments assez riches pour l'analyse a posteriori. Le plus simple est d'examiner dans l'ordre les questions posées et de confronter chaque fois les résultats obtenus à l'attente formulée dans l'analyse a priori. On reprendra donc le plan adopté dans cette analyse a priori.

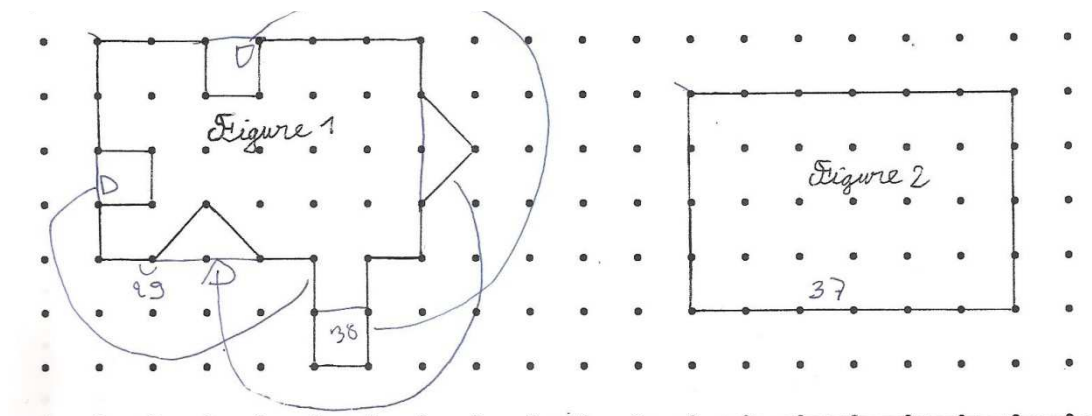
#### **3.2.1. Recherche individuelle**

Enoncé 1a/ Explique pourquoi les deux figures ont la même aire.

Cette première question a été particulièrement bien réussie puisque 22 élèves soit 88% de la classe ont donné une réponse satisfaisante.

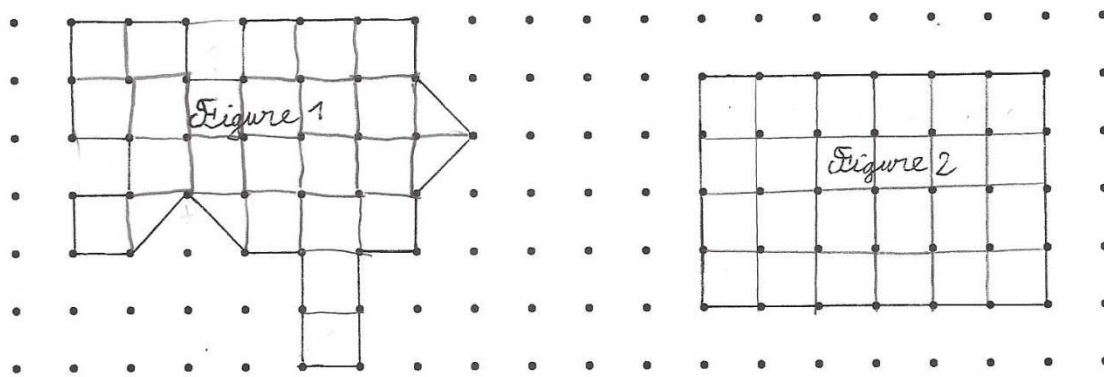
Deux procédures de réponses étaient attendues. La moitié de ces 22 élèves a opté pour une procédure calculatoire, montrant ainsi qu'ils avaient saisi la notion de mesure d'une aire et l'intérêt de son utilisation, même si la formulation laisse parfois à désirer comme par

exemple : « car ils (pour les figures) ont 24 carreaux chacun ». L'autre moitié a préféré une procédure en schématisant, par un jeu de flèches ou avec des couleurs, la compensation des parties rentrantes par les saillantes de la figure 1, ce qui permet d'obtenir la figure 2. Ce procédé vient sans doute plus immédiatement à l'esprit ; de plus, les explications peuvent être données en se dispensant d'une formulation verbale précise, domaine où beaucoup d'élèves ont de sérieuses difficultés. Voici les réponses de trois élèves :



a/ Explique pourquoi les deux figures ont la même aire.

parce que si on remplit les trous de la figure 1 avec ses parties en trop on forme exactement la même figure que la 2.



a/ Explique pourquoi les deux figures ont la même aire.

Elle ont la même aire car elle ont le même nombre de "carrés" (24) c'est à dire 24 cm<sup>2</sup>.

a/ Explique pourquoi les deux figures ont la même aire.

car ils sont la même surface

Le premier élève suit une procédure qui schématise par un habile jeu de flèches la compensation des parties rentrantes de la figure 1 par ses parties saillantes. De plus, il explique bien que l'on obtient ainsi la figure 2. Le deuxième suit une procédure calculatoire, l'élève a parfaitement mesuré l'aire de chaque figure :  $24 \text{ cm}^2$ . Le troisième élève fait partie des trois qui n'ont pas su justifier la question. Sa réponse montre qu'il n'a pas compris ce qu'est une explication. Un autre de ces trois élèves a même écrit : « car il y a la même aire entre les deux figures ».

Enoncé 1b/ Les deux figures ont-elles le même périmètre ? Explique bien pourquoi.

64% des élèves donnent une réponse exacte : les deux périmètres sont différents ; en revanche, seulement 32% arrivent à en donner une explication satisfaisante. Comme on pouvait s'y attendre, les élèves ont assez bien vu le résultat mais ont de grosses difficultés à formuler des explications. Certains ont carrément renoncé et n'en donnent aucune, c'est le cas pour 16% des élèves. On observe aussi à ce stade, chez certains élèves, une confusion entre périmètres et aires ; c'est précisément ce que se propose de corriger la situation-problème. Ainsi, contrairement à la plupart des élèves, Hélène a l'avantage de pouvoir exprimer sa pensée avec une certaine aisance, mais sa réponse à cette question est : « Oui, car au final on obtient 2 rectangles qui ont la même aire et si elles ont la même aire, elles ont forcément le même périmètre ». Il faut lui reconnaître de la cohérence dans sa pensée car elle répondra positivement à la seconde conjecture d'Anaïs qui est fausse.

Enoncé 1c/ Anaïs dit : « Deux figures de formes différentes peuvent avoir la même aire ». Es-tu d'accord avec Anaïs ? Explique bien pourquoi.

Tous les élèves ont un résultat juste à la première question sauf Brigitte qui n'y a pas répondu. C'est la seule élève de la classe qui a renoncé à réfléchir sur la situation-problème : n'écrivant rien le plus souvent, elle n'a au total qu'une réponse exacte. En revanche, elle a bien colorié les figures sans commentaires, voulant peut-être montrer inconsciemment que l'art de la décoration est plus important à ses yeux qu'une recherche mathématique... 60% des élèves ont réussi à formuler correctement des explications à leur réponse exacte. 52% pensent à se référer à l'exemple des figures 1 et 2, montrant ainsi une relative maîtrise de l'ensemble du texte, et 8% donnent un autre exemple prouvant la conjecture d'Anaïs. Les 40% restants ne mentionnent pas du tout les figures 1 et 2 et se contentent d'une affirmation générale non démontrée et exprimée parfois dans un langage phonétique : « oui, car se n'ai pas la forme qui compte ».

Enoncé 1d/ Anaïs dit maintenant : « Lorsque deux figures ont la même aire, elles ont toujours le même périmètre ». Es-tu d'accord avec cette nouvelle affirmation d'Anaïs ? Explique bien pourquoi.

Les 68% d'élèves ayant déclaré ne pas être d'accord avec Anaïs se décomposent de la manière suivante :

- 36% se réfèrent au contre-exemple des figures 1 et 2 et donnent ainsi une explication satisfaisante.
- 32% n'en donnent aucune ou pensent en donner une : « Non car elle n'a pas la même forme » ou répètent simplement la négation : « Non, ce n'est pas obligatoire, elles peuvent avoir la même aire mais pas le même périmètre » ou même : « Non, parce que non »...

On se heurte donc de nouveau au fait que certains élèves de sixième ne savent pas encore ce qu'est une explication ; ils en sont restés au stade enfantin qui se satisfait parfaitement d'une réponse du type : « c'est comme ça, parce que c'est comme ça ». Une autre difficulté majeure est la faiblesse du niveau en expression française : des élèves ayant une difficulté énorme à formuler leur pensée, reculent devant toute rédaction. On peut sans doute ranger dans cette catégorie la plupart des élèves n'ayant donné aucune explication.

Enoncé 2/ Paul dit : « Lorsque deux figures ont le même périmètre, elles ont toujours la même aire ». Es-tu d'accord avec Paul ? Explique bien pourquoi.

La question était plus ouverte que la conjecture précédente d'Anaïs puisqu'il fallait au préalable comparer les périmètres et les aires des trois figures. Le raisonnement était aussi plus subtil puisqu'il y avait un exemple qui ne prouvait rien et des contre-exemples permettant de réfuter la conjecture. Pourtant, les résultats sont meilleurs puisque 80% des élèves ne sont pas d'accord avec la conjecture de Paul et plus de la moitié, 56%, en donnent une explication satisfaisante. L'interprétation de ce progrès est délicate. La proximité dans l'énoncé 2 entre les figures et les deux questions explique peut-être en partie ces meilleurs résultats. Les élèves se seraient mieux concentrés sur les figures pour réfuter la conjecture de Paul alors que dans l'énoncé 1, perturbés par les questions intermédiaires, ils auraient oublié de se référer aux figures qui constituent un contre-exemple de la seconde conjecture d'Anaïs. Deux exemples de réponse sont donnés ci-dessous. L'un montre la confusion qui existe encore dans l'esprit de l'élève entre périmètre et aire. L'autre au contraire répond parfaitement à la question en la justifiant par un contre-exemple.

Oui, je suis d'accord parce que si il y a le même périmètre c'est forcément le même aire.

Non car la Figure 3 et 4 ont la même aire et même périmètre mais la Figure 5 a le même périmètre que les deux autres mais pas la même aire.

Les résultats de cette question montrent que plus de la moitié des élèves ont été capables de raisonner correctement avec un contre-exemple sans se laisser influencer par l'exemple des figures 3 et 4 qui ne prouvait rien. Par ailleurs, on peut noter la bonne marche du déroulement de la situation-problème dans cette première partie où le matin, les élèves faisaient un travail individuel.

### 3.2.2. Recherche en groupe

L'après-midi, les 25 élèves de la classe ont été répartis en huit groupes hétérogènes de travail : sept de trois élèves et un de quatre. La séance a duré 40 minutes.

Énoncé 3a/ Après discussion entre les élèves, le groupe devait donner son avis et ses explications sur la seconde conjecture d'Anaïs : « Lorsque deux figures ont la même aire, elles ont le même périmètre ». Bien entendu, l'énoncé du matin avait été distribué avec l'énoncé 3.

Sur les 8 groupes, 7 ont rejeté la conjecture d'Anaïs. Comme des désaccords au sein des groupes ont été mentionnés, on compte maintenant 80% des élèves ayant une bonne réponse, contre 68% le matin. La discussion en petits groupes semble donc améliorer significativement la part de bonnes réponses. Il faut toutefois rester prudent sur le bénéfice du travail en petits groupes avec en particulier ses conflits sociocognitifs. En effet, d'abord il y a toujours la possibilité incontrôlable que certains élèves timides n'aient pas mentionné leur désaccord avec le groupe. Par ailleurs, d'une part le groupe considérant à tort que la conjecture d'Anaïs est juste est constitué de trois élèves qui avaient tous une réponse exacte le matin ; d'autre part Alain, qui le matin, avait une bonne réponse (sans justification), a maintenant faux puisqu'il est en désaccord avec la réponse exacte de son groupe. De plus, cette réponse est très bien justifiée grâce à un nouveau contre-exemple élaboré par le groupe...

Quatre groupes sur les huit donnent des explications satisfaisantes concernant leur avis. Si l'on prend pour hypothèse que chaque élève adhère pleinement aux explications du groupe, il y a encore un progrès significatif par rapport au matin puisqu'il n'y avait dans ce cas que 8 élèves, soit 32% de la classe. Mais peut-on réellement admettre l'hypothèse précédente ? Par ailleurs, se pose le problème du lien entre la rédaction de ces explications par un rapporteur du groupe et celles qu'en aurait faite chaque membre.

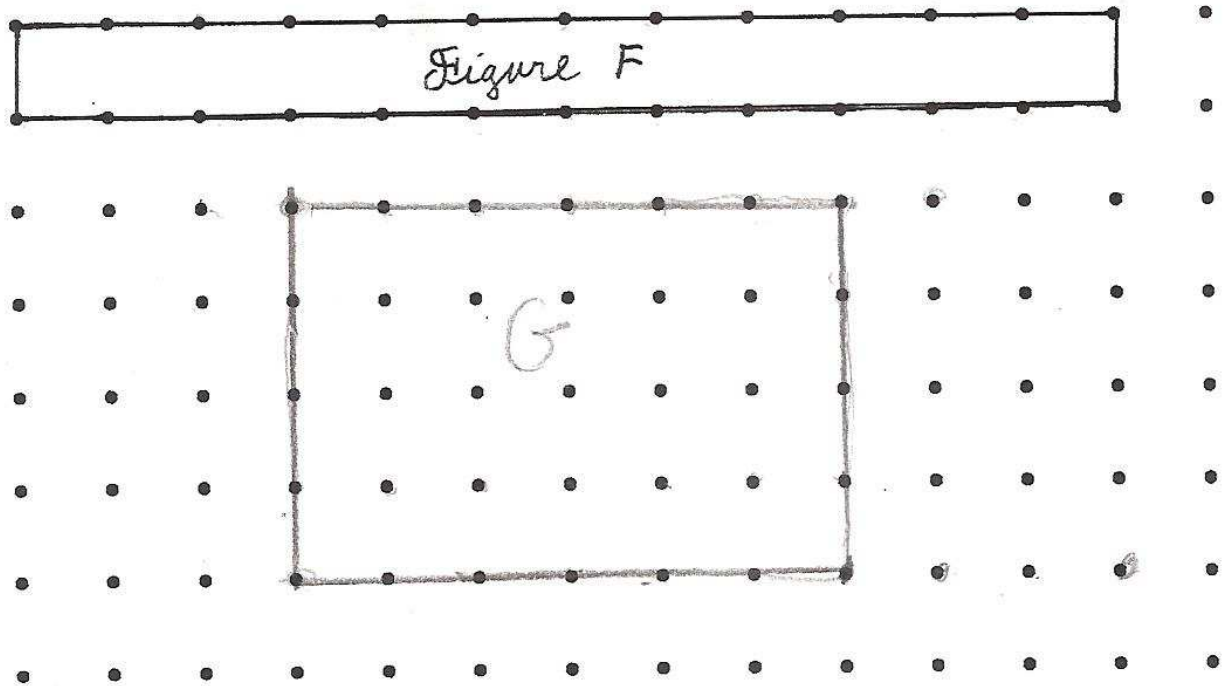
Enoncé 3b/ Même question avec la conjecture de Paul : « Lorsque deux figures ont le même périmètre, elles ont la même aire ».

Là encore un seul groupe ne donne pas la bonne réponse, mais ce n'est pas le même que ci-dessus. Comme il s'agit du groupe de 4 élèves et qu'il n'y a aucun désaccord au sein des groupes, cela fait 84% de bonnes réponses contre 80% le matin. Il y a donc peu d'évolution en dehors du fait que trois des quatre élèves du groupe ayant faux avaient paradoxalement donné une bonne réponse le matin... Seulement 3 groupes donnent une explication satisfaisante ce qui représente une régression par rapport au matin : 36% des élèves contre 56%... Ces résultats, ajoutés aux précédents, permettent peut-être de tempérer l'idée souvent avancée, d'une supériorité pédagogique évidente du travail en petits groupes par rapport à un travail individuel.

Enoncé 3c/ Une figure F est donnée. C'est un rectangle allongé de périmètre 26 cm et d'aire 12 cm<sup>2</sup>. La question demande au groupe de construire une autre figure G de périmètre plus petit que celui de F et d'aire plus grande que celle de F.

La question est difficile. D'une part elle est très ouverte, d'autre part son énoncé s'oppose à l'expérience de la vie quotidienne qui nous fait la plupart du temps, traiter des cas où les aires et les périmètres augmentent simultanément. Il est fort probable que beaucoup d'élèves portaient a priori avec une idée contraire à celle qu'ils devaient prouver.

Il est remarquable de constater qu'un seul groupe a écrit : IMPOSSIBLE. Les sept autres ont parfaitement réussi à construire une figure G vérifiant les conditions demandées. En voici une :



Ces bons résultats ont donc dû exiger de la part des élèves un travail de recherche conséquent. Avec cette ultime question, on constate que, pour la plupart des élèves, la situation-problème s'est déroulée en conformité avec les attentes formulées dans l'analyse a priori.

### 3.2.3. L'institutionnalisation et les derniers travaux

L'institutionnalisation a été faite le cours suivant, ce qui m'a permis d'étudier au préalable les travaux que m'avaient rendus les élèves et les groupes. M'étant rendu compte que la situation-problème s'était dans l'ensemble passée selon le plan prévu, il n'y avait pas lieu de modifier le déroulement de l'institutionnalisation tel qu'il a été décrit dans l'analyse a priori. Il y a donc peu de faits nouveaux à rapporter : la synthèse a été faite, les résultats qu'il faut retenir ont été écrits, le rôle essentiel des contre-exemples dans certains raisonnements a été mis en évidence, une réflexion a été menée sur les méthodes pour faire des mathématiques, qui ont été développées au cours de la situation-problème. En particulier, les très bons résultats de la dernière question : 7 figures G correctes sur un total de 8 groupes, ont corroboré le fait qu'en cherchant et en réfléchissant, les élèves pouvaient par eux-mêmes résoudre une question particulièrement difficile.

### 3.3. RESULTATS DU TEST ET CONCLUSION

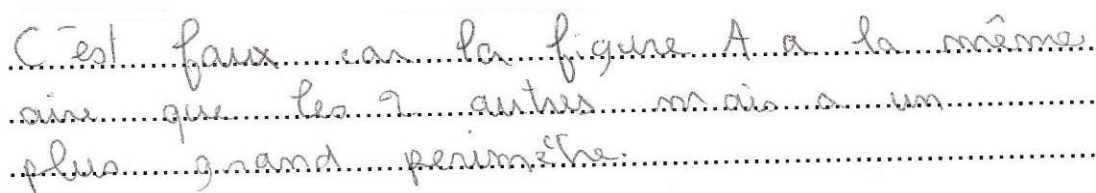
Avant de conclure, il est indispensable d'étudier les résultats du test final. Son contenu se trouve à la fin de l'analyse a priori. Le test a été présenté aux élèves longtemps après le déroulement de la situation-problème. En reprenant des conjectures formulées lors de la

situation-problème et en demandant de prouver les réponses, le test avait pour but d'observer ce qu'il restait des nouvelles connaissances acquises et de suivre l'évolution des élèves dans le raisonnement à l'aide de contre-exemples.

La première conjecture était : « Lorsque deux figures ont le même périmètre, elles ont toujours la même aire ». 24 élèves sur les 25 de la classe ont bien répondu qu'elle est fausse, soit 96% contre 80% lors de la situation-problème. Brigitte qui s'est trompée n'a qu'une réponse exacte sur les quatre du test. Pour cette élève, qui d'habitude a des résultats convenables, la situation-problème semble être un échec, mais elle nous avait signifié dès le début son désintérêt pour ce travail, car elle s'était contentée de colorier les figures en ne donnant qu'une seule bonne réponse.

76% contre 56% donnent maintenant une preuve correcte à l'aide d'un contre-exemple explicite, mais parfois maladroitement. Les autres n'écrivent rien ou pensent prouver la question en écrivant par exemple : « faux car on peut avoir le même périmètre sans la même aire ». Un élève dessine aussi une autre figure qui, à ses yeux, a le même périmètre que celui des figures données ; mais c'est faux : il n'y a pas contre-exemple. On pourrait toutefois ranger cet élève parmi ceux qui ont compris le rôle d'un contre-exemple pour une telle preuve. On atteindrait alors 80% de bonnes réponses à cette question.

La seconde conjecture était : « Lorsque deux figures ont la même aire, elles ont toujours le même périmètre ». Les résultats sont aussi significativement supérieurs à ceux de la situation-problème : 92% des élèves contre 68% ont une bonne réponse et 68% contre 36% donnent une preuve correcte par contre-exemple. Illustrons simplement cette seconde conjecture avec le cas d'Hélène. Lors de la situation-problème, elle affirmait à propos des figures : « si elles ont la même aire, elles ont forcément le même périmètre ». Après avoir donné les mesures des aires et des périmètres sous les trois figures A, B, C, sa réponse est maintenant :



C'est faux car la figure A a la même aire que les 2 autres mais a un plus grand périmètre.

La problématique que nous avons choisie dans la première partie est : quel éclairage pédagogique l'expérimentation d'une situation-problème peut-elle apporter dans l'apprentissage d'un thème mathématique ?



Le cas d'Hélène semble significatif pour donner un premier point d'éclairage. L'aisance dans l'expression écrite d'Hélène a déjà été soulignée. A coup sûr, cette aisance l'a aidée à clarifier sa pensée, à arriver à un très bon maniement d'un raisonnement par contre-exemple et à l'exprimer d'une façon excellente. A contrario, beaucoup d'élèves s'expriment d'une façon moins claire et leurs explications peuvent être parfois sujettes à plusieurs interprétations, quelquefois contradictoires ; l'écriture parfois phonétique n'arrange rien. Seule une interprétation bienveillante du professeur leur permet d'avoir une réponse juste, mais peuvent-ils arriver dans ces conditions à structurer leur propre pensée ? Ainsi une première conclusion s'impose, peut-être paradoxalement, après cette étude sur un thème mathématique : il est primordial pour un élève de travailler l'expression française.

Un deuxième point est apparu avec l'analyse a posteriori. Malgré les bons résultats de la question montrant que les aires et les périmètres ne varient pas toujours dans le même sens, la supériorité, souvent prônée, du travail en petits groupes par rapport à un travail individuel est loin d'apparaître pleinement dans cette étude : trop d'inconvénients ont été observés. Il s'agit simplement d'un mode différent de travail qu'il ne faut pas généraliser.

Enfin, il faut mentionner que la partie expérimentale a mis en évidence des résultats satisfaisants et que les copies traduisent un intérêt assez vif des élèves, si l'on excepte le cas de Brigitte. Le test a confirmé que le niveau de connaissances des élèves était dans l'ensemble nettement supérieur en fin de travail à celui du début, sur les notions de périmètre et d'aire. Toutefois, cette situation-problème n'est qu'un modeste exemple parmi tant d'autres, et le succès de son déroulement, ne permet nullement de prouver l'excellence de ce mode d'enseignement. Au demeurant, la durée de préparation d'une situation-problème est immense, si on l'estime avec celle de cette étude. Lorsqu'on a la responsabilité de plusieurs classes, cette durée ne permet pas de proposer un très grand nombre de situations-problèmes, simplement pour des raisons pratiques. En revanche, on peut affirmer sans crainte de se tromper que ce mémoire ne constitue en aucun cas un contre-exemple du bien-fondé de l'enseignement par situation-problème...

## Bibliographie

G. ARSAC, G. GERMAIN, M. MANTES *Problème ouvert et situation-problème* Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques Académie de Lyon Université Claude Bernard Lyon

G. BACHELARD *La formation de l'esprit scientifique* Ed. VRIN

D. BARATAUD *Aire et Périmètre*

[cache.media.eduscol.education.fr/file/...et.../introduction\\_115057.pdf](http://cache.media.eduscol.education.fr/file/...et.../introduction_115057.pdf)

J. BRETTE *Promenade mathématique en Mésopotamie*

2013images.**math**.cnrs.fr/**Promenade-mathematique**-en.html

G. BROUSSEAU *Théorie des situations didactiques* Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield Ed. La pensée sauvage

G. BROUSSEAU *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques* [http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire\\_V5.pdf](http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf)

J. DEFTRASNE *Récits tirés de l'histoire de Rome* Fernand Nathan, Editeur Paris

A. GIORDAN *L'agir et le faire*

[www.andregiordan.com/articles/apprendre/agirrfaire.html](http://www.andregiordan.com/articles/apprendre/agirrfaire.html)

IREM de Montpellier *Périmètres et aires*

[www.math.univ-montp2.fr/sfodem/BibliothequeSfodem/.../perim\\_aires.p...](http://www.math.univ-montp2.fr/sfodem/BibliothequeSfodem/.../perim_aires.p...)

*Légende de la fondation de Carthage*

[www.ac-grenoble.fr/...fondationcarthage/FondationdeCarthage.html](http://www.ac-grenoble.fr/...fondationcarthage/FondationdeCarthage.html)

M.J. PERRIN-GLORIAN *L'aire et la mesure*

[www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue\\_x/fic/24/24x1.pdf](http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/24/24x1.pdf).

M.J. PERRIN GLORIAN *Que nous apprennent les élèves en difficultés en mathématiques ?*  
Repères IREM N° 29 Octobre 1997

J. ROBINET *De l'ingénierie didactique* Cahier de didactique des mathématiques numéro1  
IREM Université Paris VII

## Année universitaire 2015-2016

Master Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation

Mention : Mathématiques

Parcours (2<sup>nd</sup> degré)

Titre du mémoire :

Auteur : Guillaume PERMINGEAT

### Résumé :

L'enseignement par situation-problème est sans doute classique, mais reste toujours difficile. Les deux stagiaires, Guillaume Lebrat et Guillaume Permingeat, ont voulu expérimenter ce mode d'enseignement dans les classes qui leur ont été confiées. La première partie de ce mémoire est commune aux deux stagiaires ; elle étudie les bases théoriques sur lesquelles ils s'appuieront pour construire leur propre situation-problème. La seconde partie est une étude expérimentale. Guillaume Permingeat présente la situation-problème qu'il a proposée à sa classe de sixième et analyse les résultats. La situation-problème porte sur les délicates notions de périmètre et d'aire.

**Mots clés :** enseignement des mathématiques, situation-problème, élève, périmètre, aire.

### Summary :

Problem situation based teaching is surely classic, but difficult. The two trainees, Guillaume Permingeat and Guillaume Lebrat, wanted to experiment with these forms of teaching and learning in their classes. The first part of this essay is a joint work. It studies the theoretical bases to build their own problem situation. The second part is the experimental report. Guillaume Permingeat shows the problem situation he gave his sixth-grade classe ; then the results are analysed. The problem situation is about the difficult notion of perimeter and area.

**Key words :** teaching mathematics, problem situation, pupil, perimeter, area.