



**HAL**  
open science

## L'énumération des faces d'un solide

Évie Croizet, Marine Dauphin

► **To cite this version:**

Évie Croizet, Marine Dauphin. L'énumération des faces d'un solide. Education. 2017. dumas-01576208

**HAL Id: dumas-01576208**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01576208>**

Submitted on 22 Aug 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

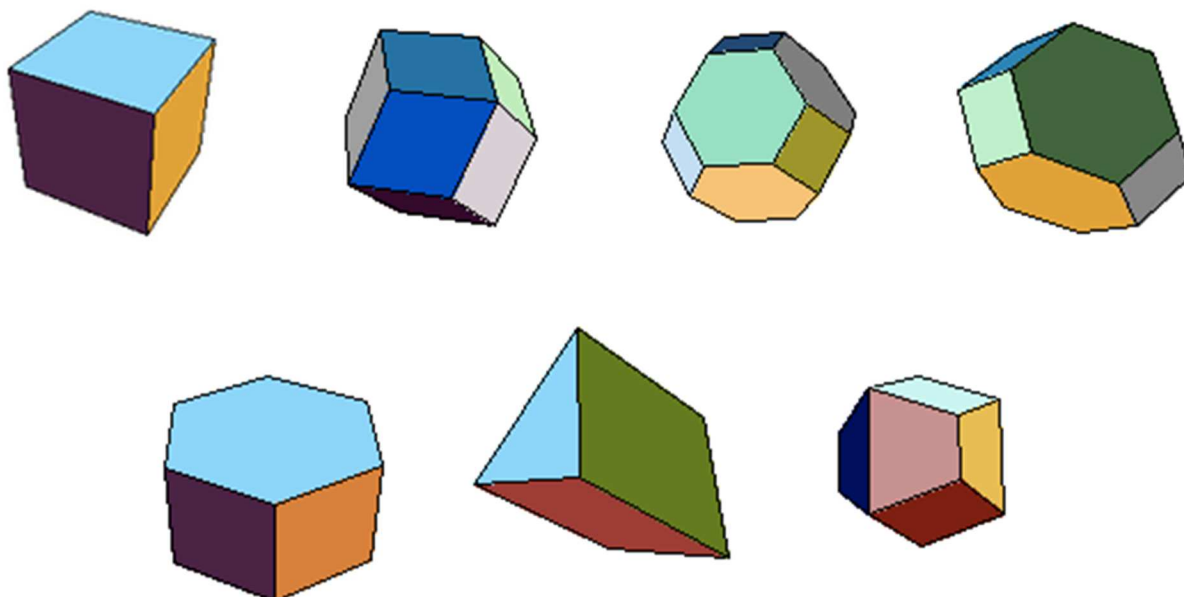


Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

**Master Métiers de l'enseignement et de l'éducation et de la formation**

**Mention 1 – MASTER 2**

## **L'énumération des faces d'un solide**



**Mémoire présenté en vue de l'obtention du Grade de Master soutenu par**

Marine DAUPHIN

et

Evie CROIZET

**Directeur de mémoire : Olivier RIVIERE**

**Année universitaire 2016-2017**

## **REMERCIEMENTS**

Nous tenons tout d'abord à remercier notre directeur de mémoire, Monsieur Olivier RIVIERE, Professeur de mathématiques à l'ESPE, pour son expertise, ses conseils avisés, sa disponibilité et son engagement tout au long de notre mémoire.

Pour leurs témoignages, conseils et présence lors des différents cours de préparation pour le mémoire nous remercions, Madame Annie CARIAT et Madame Eva GILBERT.

Nous tenons à remercier l'enseignante de la classe dans laquelle a eu lieu l'expérimentation pour les adaptations d'emploi du temps réalisées afin que l'on puisse mettre en œuvre notre expérimentation sur l'énumération avec ses élèves, ainsi que pour ses précieux conseils.

Enfin, nous terminerons en remerciant nos camarades, collègues et professeurs pour leur soutien, l'aide apportée tout au long de ce travail et plus globalement sur les deux années de Master.

## Table des matières

Introduction.....	4
I. Cadre théorique :.....	5
1. Compter et dénombrer : quelles significations ? .....	5
2. L'énumération .....	6
3. Dénombrement, énumération et géométrie dans l'espace dans les programmes .....	13
4. Situation de dénombrement dans le plan ou en 3D : Un rapport d'analogie.....	14
5. Evolution de la problématique .....	17
II. Expérimentation .....	17
1. Déroulement .....	17
2. Résultats .....	19
<b>a) Cube et pyramides pour les enfants.....</b>	<b>20</b>
<b>b) Solides complexes pour les adultes .....</b>	<b>23</b>
3. Analyse des résultats.....	26
<b>a) Le cheminement mental.....</b>	<b>27</b>
<b>b) Partitionnement .....</b>	<b>27</b>
<b>c) Le marquage .....</b>	<b>29</b>
4. Discussion .....	30
Conclusion .....	32
BIBLIOGRAPHIE .....	34

## INTRODUCTION

Dans le cadre de nos cours de préparation pour le mémoire, une situation faisant appel à des compétences d'organisation lors d'un dénombrement nous a été présentée. Trois étudiantes ont dû dénombrer une collection de points dans un plan. Nous avons pu observer que chaque étudiante avait une organisation différente. Cette situation a été notre première approche avec l'importance de l'énumération dans une situation de dénombrement. Nous avons étudié l'article de Briand (1999), qui a mis en lumière les problèmes d'organisation que peuvent rencontrer les élèves lors d'une énumération. Au travers de la situation des sucres, de Margolinas (2012) nous découvrons que l'énumération permet d'analyser les difficultés des élèves dans de très nombreux cas, pas seulement en « mathématiques », pourtant, au regard des programmes de 2015, on remarque que l'énumération ne fait jamais l'objet d'un apprentissage.

La diversité des situations et l'importance des problèmes d'organisation lors de situations d'énumération nous ont amené à nous interroger sur des situations problématiques similaires que nous avons pu rencontrer. A la lumière de nos nouvelles connaissances, un souvenir d'observation réalisé en classe de CM1 est apparu. Une étudiante menait une séance sur les polyèdres (solides dont les faces sont des polygones). Un exercice de cette séance était de compter les faces d'un cube que les élèves avaient dans les mains. Cet exercice qui paraît simple ne l'a pas été pour tous. Certains élèves n'avaient aucune stratégie pour identifier quelles faces avaient déjà été traitées ou non. Ainsi, des élèves ont compté plusieurs fois la même face et/ou n'ont pas traité toutes les faces. Cette situation faisant émerger un grand nombre de questions, nous avons décidé de l'utiliser comme base pour ce mémoire.

L'étude de cette situation nécessitait que l'on s'appuie sur nos connaissances de l'énumération. Ainsi, lorsque nous avons voulu transférer nos connaissances acquises grâce à la situation des points dans le plan, à notre situation des solides, nous nous sommes demandées :

Dans quelle mesure tout ce que l'on sait sur l'énumération d'une collection dans le plan va être encore robuste dans un espace 3D ?

Ce mémoire est constitué d'une première partie théorique dans laquelle seront exposées nos connaissances sur l'énumération, une analyse succincte des programmes

d'enseignement et d'un premier point sur notre problématique la situation que l'on propose. La seconde partie sera consacrée à la situation de dénombrement des faces d'un solide que nous proposons, une description du dispositif mis en place, les résultats observés et leur analyse.

## **I. CADRE THÉORIQUE :**

### **1. Compter et dénombrer : quelles significations ?**

Nous allons, dans un premier temps, définir certains mots de vocabulaire importants pour la suite de notre étude. Le comptage et le dénombrement sont deux notions dont la signification est proche mais une nuance existe entre les deux.

**Le comptage (ROCHEL) :** chaque objet de la collection à compter doit être apparié à un mot de la "comptine numérique». Compter les objets d'une collection, c'est chercher à en exprimer la quantité au moyen d'un nombre.

Le terme " comptage " est souvent utilisé avec la même signification que le terme "dénombrement ", il nous semble donc utile de distinguer ces deux termes.

**Le dénombrement :** dénombrer une collection d'objets signifie pouvoir dire combien cette collection comporte d'objets. Le dénombrement d'une quantité d'objets peut être réalisé par deux grandes catégories de procédures :

- Celles qui s'appuient sur la suite orale des nombres : on associe alors un mot de la suite " un, deux, trois... " à chaque objet (on utilise alors le comptage de un en un) ou encore on organise d'abord les objets par paquets et on utilise la suite orale " de deux en deux ", " de cinq en cinq "... (comptage de deux en deux, de cinq en cinq...); Le terme " comptage " est utilisé pour désigner toute procédure qui s'appuie sur la suite des nombres.

- Celles qui s'appuient sur le calcul : ainsi, pour dénombrer le nombre de fauteuils d'une salle qui comporte 15 rangées de 24 fauteuils, on peut utiliser le calcul du produit  $24 \times 15$ .

Le comptage peut être utilisé comme procédure de dénombrement.

**Nommer** : activité parallèle au comptage qui consiste à produire l'écriture du nombre.

## **2. L'énumération**

L'énumération est la désignation exhaustive de tous les éléments d'une collection une fois et une seule (Margolinas et Laparra, 2016)

Brousseau (1984) publie un texte qui regroupe une catégorie de connaissances sous le terme d'énumération. Il part de situations de dénombrement, qui témoignent d'un déséquilibre et donc de connaissances erronées ou absentes dans certaines situations. Ces situations sont rencontrées dans différents niveaux, à l'université, dans l'enseignement secondaire mais aussi à l'école élémentaire et en première année d'école primaire :

*3) À l'école élémentaire certains élèves n'arrivent pas à savoir quelle opération il convient de faire dans les problèmes même si les manipulations évoquées leur sont familières et s'il est clair qu'ils les conçoivent parfaitement.*

*4) En première année d'école primaire on peut observer des enfants qui « savent compter » mais qui ne mettent pas en œuvre ce savoir pour effectuer des tâches qu'ils comprennent bien et qui requièrent le comptage : Ils ne comptent qu'en réponse à une demande sociale bien précise et n'ont aucune idée de ce à quoi cette tâche sert ni ce qu'elle permet de maîtriser. (Brousseau, 1984, p.2)*

Il procède alors à une comparaison de ces difficultés :

*« Quoique assez différents, ces divers problèmes peuvent être rapprochés intuitivement, il s'agit chaque fois de dénombrer mentalement un ensemble qui n'est pas concrètement présent ou réalisé. ».*  
*(Brousseau, 1984, p.3)*

L'étude de ces situations lui permet de donner une définition mathématique de ce qu'il appelle l'énumération :

*Une énumération d'un ensemble est une injection de cet ensemble sur une section commençante de  $\mathbb{N}$ . Ce serait donc la possibilité de produire et de contrôler la production effective de telles énumérations qui ferait défaut aux élèves en difficultés sur les questions évoquées plus haut.*  
*(Brousseau, 1984,p.4)*

Il formule alors les hypothèses suivantes :

*I) Les élèves doivent passer très brutalement d'un contrôle perceptif de l'énumération de petites collections d'objets petits déplaçables mais immobiles à un contrôle complètement mental et verbal d'ensembles quelconques.*

*II) Les professeurs ne disposent pas de situations d'enseignement qui leur permettraient de faire développer par leurs élèves des savoir-faire, des anticipations, des stratégies dans des rapports expérimentaux avec le milieu. Ils ne disposent pas non plus de ce fait de moyens de négocier avec eux des contrats didactiques raisonnables à propos de ces questions ni même d'évoquer avec eux ce genre de difficultés.*

*III) Ces conditions seraient une cause principale des difficultés observées. (Brousseau, 1984, p.5)*

En s'appuyant sur les hypothèses de Brousseau, Briand (1993) étend l'énumération du dénombrement au « mesurage des collections ».

Briand (1999) donne une situation très simple de dénombrement, dans laquelle il s'agit de dénombrer des arbres identiques imprimés sur une feuille, répartis aléatoirement sur une feuille blanche. On demande aux élèves de trouver combien il y a d'arbres sur cette feuille. Afin de répondre à cette question, l'élève peut dessiner librement sur la feuille qui lui est donnée.

Pour parvenir au résultat, les élèves développent des stratégies variées :



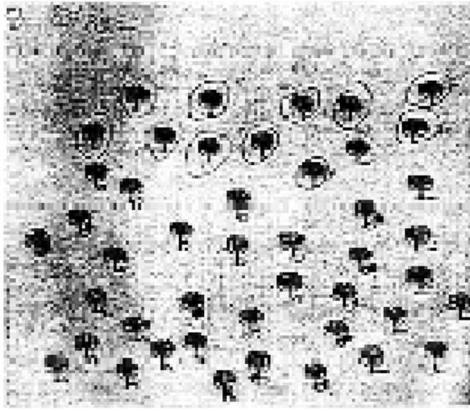


Figure 1 : extrait (Briand, 1999)

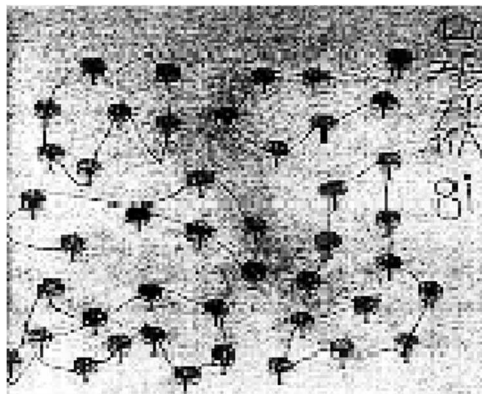


Figure 2 : extrait (Briand, 1999)

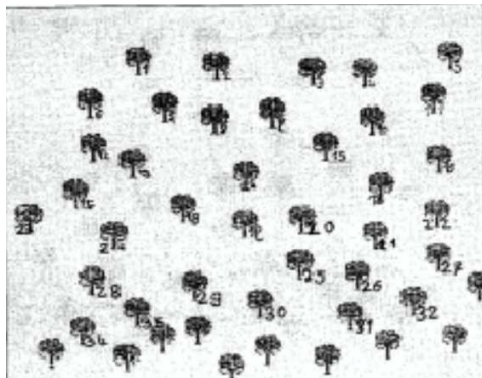


Figure 3 : extrait (Briand, 1999)

E1 : construit des sous-ensembles d'arbres, tout en comptant (sans écrire) et en effectuant un marquage différent auprès de chaque arbre pour signifier le sous-ensemble. Il effectue une partition de l'ensemble des arbres. Ensuite, il construit l'écriture 8 8 8 8 8 2. L'erreur vient sans doute de la non-prise en compte du sous-ensemble désigné par un rond doublé d'une croix.

E2 : relie quelques arbres pour constituer un sous-ensemble et effectue une partition de l'ensemble des arbres. Il construit en même temps une désignation de chaque sous-ensemble par une lettre. Il construit ensuite le couple : (nombre, signe du sous-ensemble).

E3 : explore la collection en ligne. Les nombres sont inscrits, mais l'élève s'arrête lors du choix du 36ième élément parce que la structure en ligne devient difficile à contrôler. (Dans l'observation, on s'est assuré que l'élève savait énoncer la suite des nombres bien au-delà de 35).

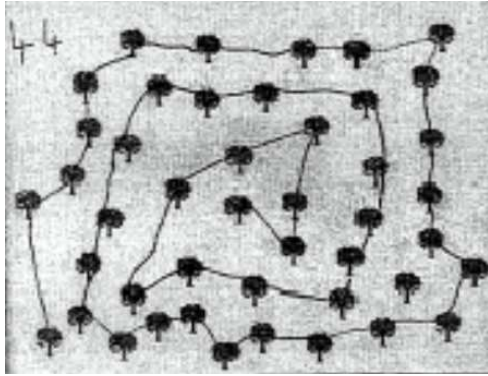


Figure 4 : extrait (Briand, 1999)

E4 : organise un chemin "en escargot" qui facilitera le comptage. L'élève trouve 44 parce qu'il a compté le nombre de "sauts" et non pas le nombre d'arbres. On constate que les élèves développent des stratégies différentes.

Dans ces quatre travaux on constate que E1 et E2 structurent la collection en sous-collections, selon des procédures différentes, et que E3 et E4 structurent la collection en y établissant un ordre, là aussi selon des procédures différentes.

Grâce à cette situation Briand a montré que « pour contrôler une situation de comptage, l'enfant doit faire fonctionner une connaissance (l'énumération) qui se réfère à l'exploration de la collection et qui conditionne complètement le bon déroulement de l'activité. [...] ». (Briand, 1993, p8)

Voici l'algorithme tel qu'il est décrit par Briand (1993, p21) :

- 1- Être capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.
- 2- Choisir un élément d'une collection.
- 3- Énoncer un mot nombre. (« un » ou le successeur du précédent dans une suite de mot nombres).
- 4- Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis.
- 5- Concevoir la collection des objets non encore choisis.
- 6- Recommencer (pour la collection des objets non encore choisis) 2-3-4-5 tant que la collection des objets à choisir n'est pas vide.
- 7- Savoir que l'on a choisi le dernier élément.
- 8- Énoncer le dernier mot nombre. »

Cet algorithme se présente sous la forme d'une série d'instructions qui doivent être réalisées pas à pas et qui donnent une description du processus de production du cardinal de

l'ensemble. Dans cette liste d'actions nécessaires, seules les étapes 3 et 8 font référence à la suite numérique, toutes les étapes en italiques (1, 2, 4, 5, 6, 7) nécessitent de parcourir la collection de manière à passer en revue chaque élément une fois et une seule, l'énumération est le nom donné à la connaissance qui permet de contrôler ce parcours en situation.

Énumérer une collection, c'est donc traiter une fois et une seule chaque élément de cette collection. Pour que cette contrainte (une fois et une seule) soit réalisée, il va falloir que l'élève s'organise.

Alors que Brousseau plaçait les difficultés principales de l'énumération du côté du dénombrement mental d'un ensemble qui n'était pas concrètement présent ou réalisé, Briand a montré que des difficultés d'énumération existaient même quand l'ensemble était représenté et même quand l'élève était autorisé à tracer un chemin dessiné sur la collection représentée.

Margolinas, Rivière et Wozniak (2006) développent une nouvelle situation d'énumération d'une collection d'objet appelée "les chapeaux" ou "les sucres". C'est une situation qui fait intervenir l'énumération et non le comptage : le traitement des éléments de cette collection n'est pas de nature numérique.

Pour cette situation, ils ont décidé de placer un objet (un sucre) sur chaque rond. Le traitement d'un rond consistera à enlever le sucre qui est posé sur ce rond. Traiter la collection des ronds consiste donc à enlever tous les sucres posés sur des ronds. Si, à la fin du traitement, tous les sucres sont enlevés, cela signifiera bien que tous les ronds ont été traités, et donc que la collection des ronds a bien été énumérée.

Pour que cette situation soit une situation d'énumération, chaque élément de la collection des ronds doit être traité une fois et une seule. Il ne faut donc pas que le sujet puisse discriminer visuellement les éléments qu'il a déjà traité de ceux qu'il n'a pas encore traité ; ou en tout cas pas pendant l'énumération. Chaque rond (et donc chaque sucre) et donc caché, recouvert par un petit chapeau. Le traitement va donc consister à lever le chapeau, enlever le sucre qui est posé sur le rond et remettre le chapeau sur le rond. De cette manière, on ne pourra pas voir plus d'un rond à la fois. La situation se présente donc de la manière suivante : sur une feuille est disposé une collection de chapeaux. Sous chaque chapeau il y a un sucre et sous chaque sucre il y a un rond dessiné sur une feuille.

La consigne est la suivante :

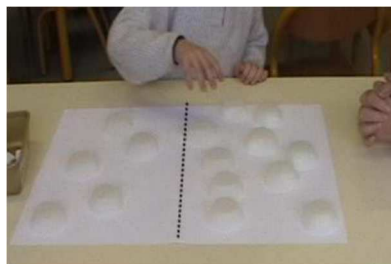
*Sur cette grande feuille, il y a des ronds. Sur chaque rond nous allons mettre un sucre [cette action est réalisée avec l'aide des élèves]. Vous voyez ce bol à côté de la feuille, pour réussir il va falloir déposer tous les sucres dans ce bol. Mais c'est trop facile ! Pour que ça soit un peu plus intéressant, nous allons cacher les sucres avec des chapeaux [l'expérimentateur et les élèves posent un chapeau sur chaque sucre]. Alors voilà comment ça va se passer : vous devez soulever le chapeau, prendre le sucre, le déposer dans le bol et tout de suite remettre le chapeau sur le rond [l'expérimentateur montre l'action en utilisant une petite feuille sur laquelle il y a seulement un rond, un sucre et un chapeau, le sucre est déposé dans le bol]. Qu'est-ce qui peut se passer ? Il se peut que quand on soulève un chapeau [l'expérimentateur le fait] il n'y ait pas de sucre ! Et oui, il est déjà là [montre le bol]. Dans ce cas, le jeu s'arrête et on a perdu. Quand vous pensez avoir fini, vous devez le dire, on enlèvera alors tous les chapeaux, si vous avez mis tous les sucres dans le bol, vous avez gagné. (Margolinas, 2012, p.6)*



*La situation des sucres (Margolinas, 2012)*

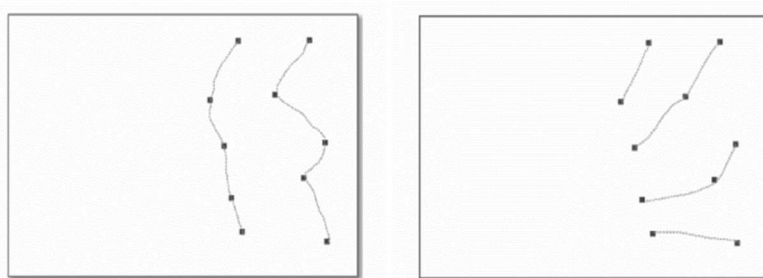
Les procédures des élèves ont été filmées pour ensuite les analyser. Voici ce qui a été observé :

Premièrement, ils constatent que les élèves identifient des sous-collections. Les élèves qui ont réussi ont tous identifié une sous-collection de cinq éléments, à gauche sur la photo ci-dessous.



*Partition en deux (Margolinas, 2012)*

L'énumération de cette sous-collection est simple car les éléments sont peu nombreux, il reste donc à énumérer la sous-collection de droite, qui comprend dix éléments. Parmi les élèves, une élève prend les premiers sucres dans des endroits très éloignés de la feuille, on ne peut pas identifier d'organisation dans son parcours, elle échoue. Ils montrent également une élève qui, après avoir pris les cinq éléments de gauche, s'arrête et demande si elle doit prendre aussi les autres, ce qui montre qu'elle identifie bien deux sous-collections. Après avoir énuméré facilement la sous-collection des cinq éléments, les élèves qui réussissent organisent l'énumération de la sous-collection de dix éléments selon des parcours réguliers. Les auteurs montrent deux élèves qui réussissent, en dessinant les parcours obtenus que voici.



Pour décrire les stratégies, il faut se rappeler la définition de l'énumération. Pour être efficace, il faut pouvoir ordonner et contrôler. Mais les deux actions ne sont pas dissociées, la façon dont sont choisis l'élément et son successeur intègre déjà la contrainte de la mémorisation et du contrôle du parcours. Autrement dit, il faut pouvoir ordonner et contrôler en même temps. Les stratégies principales de parcours d'une collection reposent sur des organisations-type, basées sur les lignes et les colonnes.

*Pour faire un chemin, il faut organiser mentalement la collection des objets à parcourir. Les stratégies que nous avons présentées reprennent des organisations spatiales très générales lignes - colonnes, qui peuvent s'appliquer à toute collection, mais plus ou moins bien selon ce qui va pouvoir en conséquence apparaître comme des variables. (Margolinas,, Wozniak, Canivenc, De Redon, Rivière, 2007, p.8)*

### 3. Dénombrement, énumération et géométrie dans l'espace dans les programmes

Si l'on regarde de plus près les instructions officielles de 2015, on constate que les programmes accordent une grande importance à l'apprentissage du dénombrement dès la maternelle. Or, ils ne prennent pas ou très peu en compte une composante du dénombrement qui est pourtant essentielle : l'énumération.

#### CYCLE 1

##### « Dénombrer

Les activités de dénombrement doivent éviter le comptage-numérotage et faire apparaître, lors de l'énumération de la collection, que chacun des noms de nombres désigne la quantité qui vient d'être formée (l'enfant doit comprendre que montrer trois doigts, ce n'est pas la même chose que montrer le troisième doigt de la main). Ultérieurement, au-delà de cinq, la même attention doit être portée à l'élaboration progressive des quantités et de leurs relations aux nombres sous les différents codes. Les enfants doivent comprendre que toute quantité s'obtient en ajoutant un à la quantité précédente (ou en enlevant un à la quantité supérieure) et que sa dénomination s'obtient en avançant de un dans la suite des noms de nombres ou de leur écriture avec des chiffres.

Pour dénombrer une collection d'objets, l'enfant doit être capable de synchroniser la récitation de la suite des mots-nombres avec le pointage des objets à dénombrer. Cette capacité doit être enseignée selon différentes modalités en faisant varier la nature des collections et leur organisation spatiale car les stratégies ne sont pas les mêmes selon que les objets sont déplaçables ou non (mettre dans une boîte, poser sur une autre table), et selon leur disposition (collection organisée dans l'espace ou non, collection organisée-alignée sur une feuille ou pas). »

#### CYCLE 2

Attendus de fin de cycle	
<ul style="list-style-type: none"><li>- Comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer, comparer.</li><li>- Nommer, lire, écrire, représenter des nombres entiers.</li><li>- Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul.</li><li>- Calculer avec des nombres entiers.</li></ul>	
Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
<b>Comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer, comparer</b>	
Dénombrer, constituer et comparer des collections. Utiliser diverses stratégies de dénombrement. <ul style="list-style-type: none"><li>- Procédures de dénombrement (décompositions/recompositions additives ou multiplicatives, utilisations d'unités intermédiaires : dizaines, centaines, en relation ou non avec des groupements).</li></ul> Repérer un rang ou une position dans une file ou sur une piste.	Dénombrer des collections en les organisant et désigner leur nombre d'éléments (écritures additives ou multiplicatives, écritures en unités de numération, écriture usuelle). Une importance particulière est accordée aux regroupements par dizaines, centaines, milliers.

L'énumération n'est à aucun moment traitée comme un objet d'enseignement.

Concernant les solides, on remarque que les élèves sont peu dans la manipulation et qu'un passage rapide s'effectue vers la représentation mentale.

#### CYCLE 1 :

“Ils apprennent progressivement à reconnaître, distinguer des solides puis des formes planes. Ils commencent à appréhender la notion d'alignement qu'ils peuvent aussi expérimenter dans les séances d'activités physiques. L'enseignant est attentif au fait que l'appréhension des formes planes est plus abstraite que celle des solides et que certains termes prêtent à confusion (carré/cube).”

##### “Ce qui est attendu des enfants en fin d'école maternelle

- Classer des objets en fonction de caractéristiques liées à leur forme. Savoir nommer quelques formes planes



(carré, triangle, cercle ou disque, rectangle) et reconnaître quelques solides (cube, pyramide, boule, cylindre).  
 - Classer ou ranger des objets selon un critère de longueur ou de masse ou de contenance.”

## CYCLE 2 :

Reconnaitre, nommer, décrire, reproduire quelques solides	
Reconnaitre et trier les solides usuels parmi des solides variés. Décrire et comparer des solides en utilisant le vocabulaire approprié. Reproduire des solides. Fabriquer un cube à partir d'un patron fourni. - Vocabulaire approprié pour : o nommer des solides (boule, cylindre, cône, cube, pavé droit, pyramide) ; o décrire des polyèdres (face, sommet, arête). - Les faces d'un cube sont des carrés. - Les faces d'un pavé droit sont des rectangles (qui peuvent être des carrés).	Trier, reconnaître et nommer les solides à travers des activités de tri parmi des solides variés, des jeux (portrait, Kim...). Réaliser et reproduire des assemblages de cubes et pavés droits. Associer de tels assemblages à divers types de représentations (photos, vues, ...) Commander le matériel juste nécessaire pour fabriquer un cube à partir de ses faces. Observer, compter le nombre de faces et de sommets d'un cube. Initiation à l'usage d'un logiciel permettant de représenter les solides et de les déplacer pour les voir sous différents angles.

## CYCLE 3 :

Reconnaitre, nommer, décrire, reproduire, représenter, construire quelques solides et figures géométriques	
Reconnaitre, nommer, comparer, vérifier, décrire : - des figures simples ou complexes (assemblages de figures simples) ; - des solides simples ou des assemblages de solides simples à partir de certaines de leurs propriétés. - Figures planes et solides, premières caractérisations : - triangles dont les triangles particuliers (triangle rectangle, triangle isocèle, triangle équilatéral) ; - quadrilatères dont les quadrilatères particuliers (carré, rectangle, losange, première approche du parallélogramme) ; - cercle (comme ensemble des points situés à une distance donnée d'un point donné). - Vocabulaire approprié pour nommer les solides : pavé droit, cube, prisme droit, pyramide régulière, cylindre, cône, boule. Reproduire, représenter, construire : - des figures simples ou complexes (assemblages de figures simples) - des solides simples ou des assemblages de solides simples sous forme de maquettes ou de dessins ou à partir d'un patron (donné, dans le cas d'un prisme ou d'une pyramide, ou à construire dans le cas d'un pavé droit). Réaliser, compléter et rédiger un programme de construction.	Situations de reproduction ou de construction mobilisant des gestes élémentaires de mesurage et de tracé et des connaissances sur les figures usuelles Reproduire (à l'échelle ou non) une figure à partir d'un modèle et d'éléments déjà tracés. Utiliser des représentations planes de solides (patrons, perspectives, vues de face, de côté, de dessus, ...) et représenter des figures planes en traçant des figures à main levée. Les éléments de vocabulaire associés aux objets et à leurs propriétés (solide, polyèdre, face, arête, polygone, côté, sommet, angle, demi droite, segment, cercle, rayon, diamètre, milieu, médiatrice, hauteur, etc.) sont introduits et utilisés en contexte pour en préciser le sens : jeu du portrait, échange de messages, jeux d'associations (figures, désignations, propriétés, représentations).

Nous constatons qu'en aucun cas il n'est demandé aux élèves de savoir énumérer une collection d'objets, de plus, la manipulation de solide laisse rapidement place à une représentation sur le plan du solide.

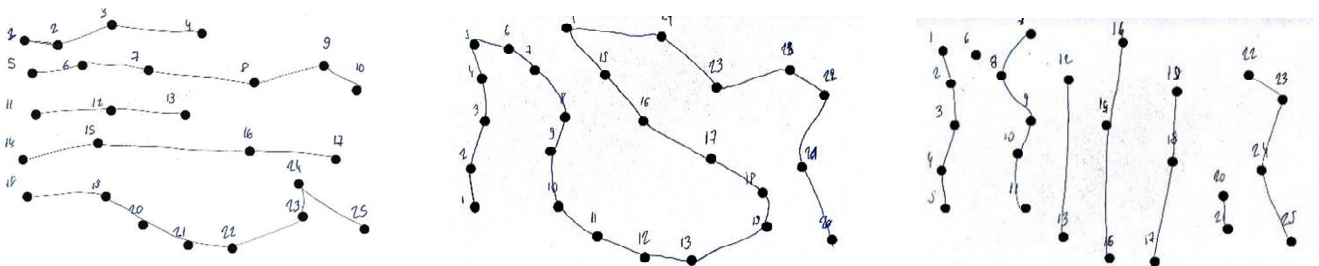
### ***4. Situation de dénombrement dans le plan ou en 3D : Un rapport d'analogie***

Lors de notre premier cours de MIR, trois étudiantes ont été confrontées à une situation d'énumération. Elles sont sorties de classe le temps pour notre formateur d'exposer

la situation et les consignes d'observation aux étudiants restés en classe. Elles sont entrées une par une en classe pour faire l'exercice demandé.

Au tableau était projeté un fond blanc avec une collection de point noirs répartis en désordre. Chaque étudiante devait dire combien il y avait de points, en pointant à l'aide d'une règle, chaque point compté. Chaque élément devait être compté une fois et une seule, sans en oublier aucun. Les observateurs avaient sous les yeux la même collection imprimée en format A5 et devaient tracer le chemin qu'utilisait l'étudiante pour énumérer les points.

Les trois étudiantes ont énuméré les points de gauche à droite (dans le sens de lecture) mais avec un cheminement propre à chacune.



Cette situation ressemble à celle des arbres de Briand exposée plus haut mais ici il était impossible de marquer les éléments déjà comptés.

La situation que nous proposons de travailler dans ce mémoire immerge le sujet dans un espace 3D où les éléments ne sont plus des points mais des faces. Le but de cette situation est de dénombrer les faces d'un solide.

Nous sommes dans un rapport d'analogie avec la situation des points vécue en classe. En effet, une analogie est un processus par lequel on remarque une similitude de forme entre deux choses, par ailleurs de différentes natures ou classes.

Si l'on applique le modèle de l'énumération en pensant l'objet comme une collection, un solide est alors une collection de faces. La différence est donc que les objets de base que l'on cherche à dénombrer ne sont plus des points mais des faces organisées non pas dans le plan mais dans l'espace.

Dans la situation vécue en classe, la collection est composée de points projetés au tableau ou imprimés sur une feuille. On caractérise cette collection de « non déplaçable ». Dans notre situation, la collection est composée des faces d'un solide. Les faces sont non



déplaçables...entre elles ! En analysant la collection de faces il nous a paru important de ré-affiner le modèle de l'énumération dans le plan. En effet, une collection entière peut-être déplaçable, la feuille sur laquelle est imprimée la collection est déplaçable. On peut donc préciser que les objets de ces collections sont non déplaçables les uns par rapport aux autres. Le solide 3D est déplaçable mais les faces de ce solide sont non déplaçables entre elles. Nous sommes donc dans une configuration que l'on appelle : non modifiable.

*Les configurations jouent un rôle de « macro-variables » : à partir de la situation fondamentale de l'énumération (désigner une fois et une seule chaque élément d'un ensemble), elles déterminent deux catégories de situations très différentes. Si l'on peut modifier la configuration (ex : les jetons), il est possible de développer des stratégies qui reposent sur la distinction des partitions successives par des positions dans l'espace. Si l'on ne peut pas modifier la configuration (ex : les chapeaux, situations dans laquelle les chapeaux et les sucres sont bien mobiles, mais la configuration imposée par la place des points sur la feuille ne l'est pas), alors il faut mémoriser un chemin qui permet de distinguer au fur et mesure du parcours les objets non traités et les objets traités. Ces deux situations sont très différentes, bien qu'elles relèvent toutes les deux de l'énumération, les variables qui affectent chacune de ces deux situations seront également très différentes : la taille de la table n'a pas d'importance dans la situation des chapeaux pourvu que la feuille et le bol puisse tenir sur celle-ci, alors cette taille a une importance dans la situation des jetons marqués, parce qu'elle sert d'espace de travail et peut plus ou moins bien se reconfigurer. (Margolinas, 2012, p.9)*

Dénombrer les faces d'un solide est donc un problème d'énumération : les connaissances d'énumération en jeu sont similaires à celles utilisées lorsque l'on dénombre une collection de points dessinés sur une feuille.

L'intérêt sera donc de faire une analyse par analogie qui va nous permettre de voir comment évolue notre réflexion suite à la comparaison entre ce que l'on nous a appris sur la situation de référence et ce qui se passe dans la situation observée. En effet le raisonnement par analogie est la recherche d'une conclusion à partir de cette mise en relation.

## **5. Evolution de la problématique**

Au début de notre travail, nous nous interrogeons sur les différences de capacités des élèves à dénombrer les faces d'un solide. Ainsi notre problématique tournait autour d'une expérience que l'on acquerrait avec l'âge et qui nous permettrait d'accroître notre capacité à s'organiser : pourquoi les problèmes d'organisation lors de l'énumération des faces d'un solide se réduisent-elles avec l'âge ?

Mais nous avons rapidement compris que cette vision est erronée puisque certains adultes ne parviennent pas à réaliser cet exercice, et a contrario, on peut rencontrer des stratégies expertes chez des élèves plus jeunes. Ainsi, pour pouvoir étudier ces stratégies de réussite ou ces échecs nous avons choisi d'adapter la complexité du solide en fonction de l'âge.

En étudiant une nouvelle fois les articles et les cours que nous avons eu sur l'énumération nous avons vu la possibilité de faire une analogie entre la situation des points dans le plan (décrite précédemment) et celle de notre sujet de mémoire. Aussi notre problématique s'est transformée : dans quelle mesure tout ce que l'on sait sur l'énumération d'une collection dans le plan va être encore robuste dans un espace 3D ?

On constatera, au moment des analyses des résultats, que nous n'envisageons pas tous les aspects de la réflexion qu'engendre cette problématique.

## **II. EXPÉRIMENTATION**

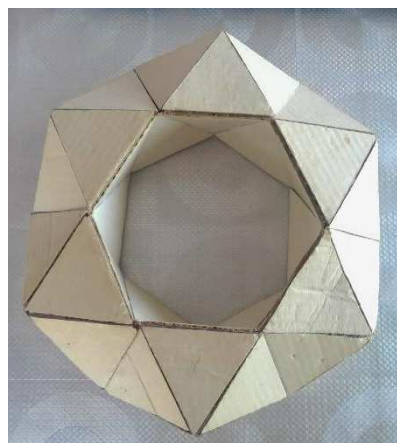
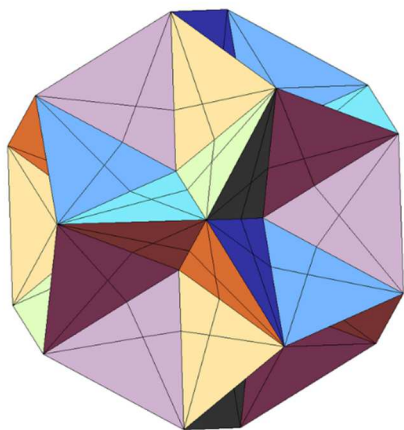
### **1. Déroulement**

Lors de notre dernier stage en cycle 1 nous avons pu recueillir quelques données en prenant comme sujets des élèves de grande et moyenne section. Quatorze élèves sont venus un par un pour compter les faces de trois solides différents : cube, pyramide à base carré et à base triangulaire. Nous avons fait le choix de construire ces solides en papier, cela nous a permis d'en construire en grande quantité de façon à ce qu'ils puissent écrire dessus ou coller des gommettes.

Pour l'expérimentation nous avons suivi le même déroulé pour chaque enfant : dans un premier temps nous avons posé sur la table un cube ou une pyramide à base triangulaire,

ces deux solides sont des polyèdres réguliers, leurs faces sont identiques. Après avoir nommé le solide, nous avons pris le temps de montrer qu'il est composé de plusieurs carrés ou triangles, en fonction du solide, et nous avons demandé à chaque enfant de nous montrer sur le solide, un carré ou un triangle. Nous avons fait le choix d'employer le mot "face" lors de la description du solide mais la première consigne donnée aux enfants est de nous dire combien il y a de carrés ou triangles sur le solide qu'il avait devant lui. Nous leur avons demandé de compter les "faces" pour le dernier solide, la pyramide à base rectangulaire. Les enfants étaient libres d'utiliser la technique qu'ils souhaitaient. En cas d'échec nous apportions une remédiation avec l'utilisation du feutre pour marquer les faces déjà comptées.

Parallèlement à cette observation, nous avons demandé à 6 adultes de compter les faces de solides plus complexes. L'ESPE a mis à notre disposition deux solides en cartons :



*Troisième stellation de l'icosaèdre*

Le premier est constitué de 60 faces et le second de 48 faces.

Pour recueillir les données, nous avons fait le choix de filmer l'ensemble des sujets ce qui nous a permis de pouvoir revoir leurs gestes et d'en déduire leurs procédures.

Pour notre situation, nous avons fait le choix des contraintes didactiques suivantes :

V1. La nature des objets matériels : espace sensible usuel, permet de manipuler des objets et d'être dans l'action.

V2. La « position relative » de l'élève vis à vis du support : position libre, l'élève/l'adulte peut se déplacer librement autour du support, cela lui permet d'appréhender l'espace de

travail librement.

V3. La configuration de la collection : Configuration non modifiable, les objets à énumérer sont fixes, cela implique que les sujets trouvent une stratégie pour mémoriser les objets déjà énumérés des objets non énumérés.

V4. La disposition spatiale des objets à énumérer dans leur espace englobant : collection organisée spatialement, les objets sont disposés de façon structurée formant un solide.

V5. La mise à disposition d'éléments de marquage : présence d'outils permettant le marquage (feutres et gommettes) : mise à disposition sur la table de jeu. La possibilité de marquage permet de ne pas encombrer la mémoire des élèves et permet donc de faciliter l'énumération. Le marquage donne une permanence visuelle à l'énumération, c'est-à-dire, qu'à tout moment l'élève peut distinguer les objets déjà énumérés des objets restant à énumérer.

V6. Le mode de travail : individuel

V7 : la « taille » de la collection des objets à énumérer : taille de la collection « mémorisable » : le sujet a la capacité de mémoriser une partie de la collection qui a déjà été énumérée, du reste, sans isoler spatialement ces objets, ou les marquer.

Avant d'expérimenter cette situation, nos hypothèses étaient les suivantes :

**Hypothèse 1** : Si le marquage est possible, les sujets vont favoriser cette méthode car elle est peu coûteuse cognitivement et permet un contrôle des faces énumérées.

**Hypothèse 2** : Si le marquage écrit n'est pas possible, les sujets vont organiser un cheminement pour compter les faces des solides comme ils le feraient dans une situation dans le plan.


## ***2. Résultats***

Que ce soit la situation proposée aux élèves ou celle proposée aux adultes, nous avons observé une grande variété de stratégies pour répondre à la consigne.

En premier, nous allons exposer les principaux comportements rencontrés avec des élèves de maternelle.


## a) Cube et pyramides pour les enfants

Certains enfants ont réalisé une rotation aléatoire du solide et comptaient plusieurs fois la même face ou oubliaient une face. :

	<p>Prend le cube avec une main qui sert de support, fait tourner le solide pour compter les faces. La main support ne change pas de place et l'enfant énumère les faces en les touchant avec son doigt. Il énonce le bon nombre : 6 faces. Cependant avec cette stratégie il compte plusieurs fois la même face et en oublie une.</p>
---	---


Sans cheminement dans la rotation et le traitement des faces, les élèves n'arrivent pas à produire une stratégie efficace.


### - *Marquage corporel avec les doigts :*


	<p>Pose un doigt sur chaque face comptée, ne vérifie pas s'il y a une face "vide" → Compte 4 faces "-Comment tu sais que tu n'as pas oublié de face ou que tu n'en as pas compté deux fois ? - parce que j'ai mis les doigts comme ça - et celle-là ? - ah oui !"</p> <p>Nouvel essai : pose des doigts, vérification visuelle → elle compte 6 faces</p>
---	--

### - *Cheminement sans marquage :*

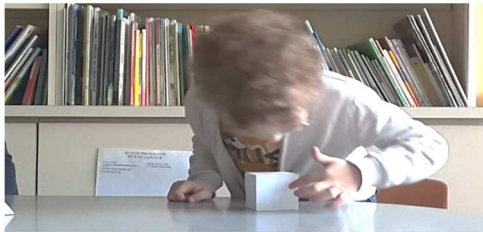
Beaucoup d'élèves ont opéré un cheminement. Pour le cube, par exemple, les élèves ont majoritairement commencé par les faces du tour, puis celle du haut et enfin celle du dessous. Un autre cheminement est observé, ils commencent par les faces qui leurs sont visibles puis celles derrière et sous le solide.

	<p>Après lui avoir demandé de recommencer il décide de poser le cube sur la table et de compter en touchant avec son doigt les faces. Il lève le cube pour toucher la face du dessous. Il obtient de nouveau 6 faces mais cette fois-ci sans compter plusieurs fois la même face et sans en oublier une.</p>
---	--


	<p>Il utilise la même technique pour compter les faces de la pyramide à base triangulaire : ne pas bouger le solide et le lever seulement pour compter la face du dessous. Cette face est toujours comptée en dernière. Il énonce le bon nombre : 4 faces.</p>
---	--

	<p>Ne bouge pas le cube qui est posé sur la table. Lorsqu'elle compte les faces elle commence par celle face à elle puis celle du haut puis compte celle de gauche, droite et termine par celle du fond. Ne compte pas la face du bas. → Elle en énonce que 5.</p>
--	--

Des élèves tournent autour du solide, comme T. :

	<p>Cube : Compte chaque face en la touchant avec son doigt. Il laisse le cube posé sur la table, ne marque pas son point de départ mais tourne autour. Compte la face du dessous en dernier. Il énonce bien 6 faces.</p>
---	--

D'autres élèves ne touchent pas au solide, comme K. :


	<p>Observe le cube de loin et pointe du doigt, sans les toucher, les faces. Elle pointe aussi celle du dessous. En silence dans sa tête. Elle énonce le bon nombre : 6 faces.</p>
---	---

Son cheminement est mental, nous lui avons demandé de nous expliquer sa technique, elle nous a expliqué qu'elle imaginait le solide dans sa tête et comptait toutes les faces. On



peut supposer qu'en imaginant le solide il n'y a plus de face non visible. Elle a déjà acquis une stratégie d'expert.

- **Avec marquage écrit :**

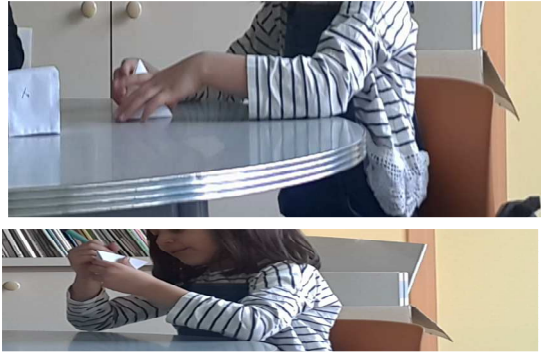

Cette solution, n'a jamais été faite à l'initiative des élèves. Elle a toujours été amenée par l'une de nous deux mais s'est révélée efficace pour la plupart, comme par exemple avec W. :

	<p>Suite à notre proposition d'utiliser le marquage, il utilise le feutre. Trace un trait sur les faces énumérées, lève le solide pour tracer un trait sur la face du dessous puis vérifie si toutes les faces ont des traits. Cette fois-ci l'énumération des faces est juste : 6 faces.</p>
---	---

Le marquage n'a pas été efficace avec N. qui comptait d'abord les faces sans les marquer et oubliait celle du dessous. Lorsque nous lui proposons le marquage elle s'arrête au nombre de faces énoncées précédemment et ne vérifiait pas si toutes les faces étaient marquées :

	<p>Il ne bouge pas le cube qui est posé sur la table. Lorsqu'elle compte les faces elle commence par celle face à elle puis celle du haut puis compte celle de gauche, droite et termine par celle du fond. Ne compte pas la face du bas. → Elle n'en énonce que 5.</p>
	<p>"est-ce que tu peux vérifier, à l'aide de gommettes ou de feutres, que tu as compté toutes les faces ?" → prend le cube dans sa main, marque celle du dessus, puis fait le tour et en compte encore 5. → On peut se demander si elle ne s'arrête pas de compter à 5 pour confirmer le premier résultat.</p>



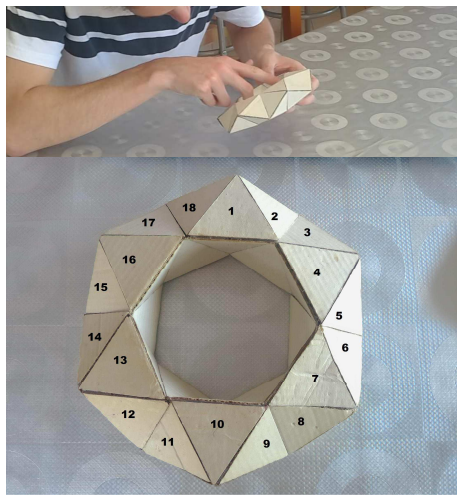
	<p>Pyramide à base triangulaire :</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) pose le feutre. Ne compte que les faces visibles → 3</li> <li>2) lorsqu'on lui dit d'utiliser le feutre elle prend le solide dans sa main et compte 3 faces.</li> </ol> <p>→ Lorsqu'elle fait un marquage elle ne vérifie pas</p>
	<p>Nouvel essai avec le cube mais en utilisant le feutre dès le début : elle marque les faces et vérifie qu'elle les a toutes comptées en tournant le cube.</p> <p>→ On peut se demander si elle vérifie car elle n'a pas de réponse en tête. Le fait de tenir le cube dans sa main "enlève" la "face du dessous" qu'elle ne pensait pas à compter</p>

## b) Solides complexes pour les adultes

Les adultes ont eu à dénombrer les faces d'un des deux solides présentés précédemment.

Voici les différentes stratégies que nous avons pu observer :

### - *Cheminement :*

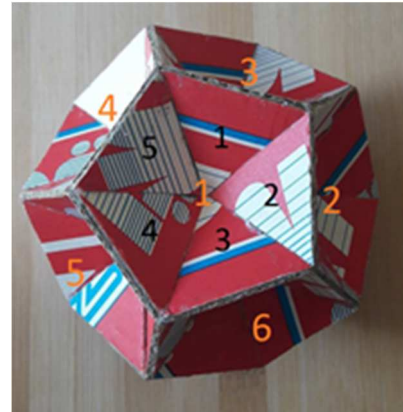
	<p>1er essai :</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) Compte les faces d'un côté</li> <li>2) Retourne le solide, continue de compter, marque la première face comptée avec un doigt</li> </ol> <p>→ Oublie les faces intérieures</p> <p>2ème essai :</p> <p>Même méthode et compte en dernier les faces "intérieures"</p>
---	--

### - *Partitionnement de l'espace :*

Les sujets ont remarqué que les deux solides proposés pouvaient se décomposer en deux parties symétriques et ces deux parties en plusieurs sous-parties :



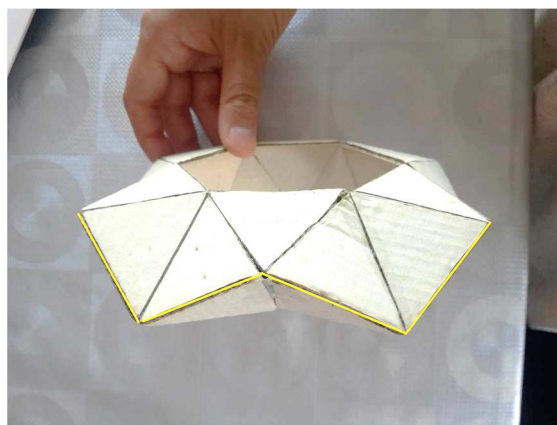
Par exemple le solide de 60 faces (si dessous) a été appréhendé comme un solide constitué de 2 parties de 6 creux, constitués eux-mêmes de 5 faces chacun.



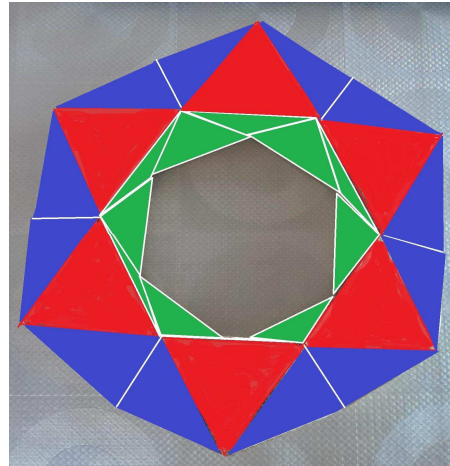
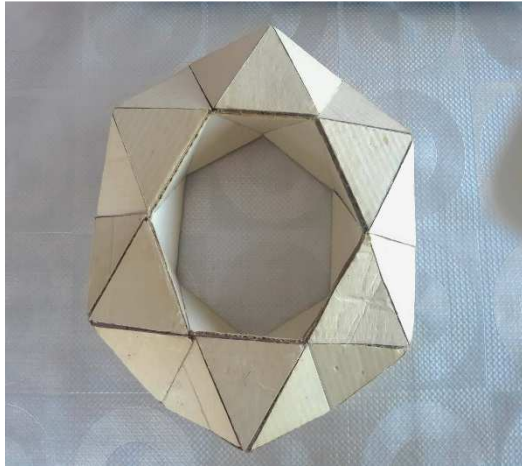
Tous les sujets l'ayant étudié ont commencé par compter le nombre de faces dans un creux, puis ont compté combien il y a de creux dans une des deux parties symétriques, pour en déduire le nombre de faces.

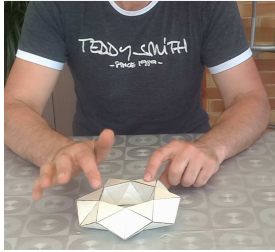
	<p>Divise le solide en deux parties symétriques. Compte le nombre de creux d'un côté du solide en marquant avec les doigts : 6 creux          Double le nombre de creux et multiplie par le nombre de face : <math>6 \times 2 = 12</math> creux ; <math>12 \times 5</math> faces = 60 faces.</p>
--	--

La 2eme figure peut aussi se diviser visuellement en deux : le nombre de faces d'un côté est le même que l'autre.




Pour le comptage des faces du premier côté, le solide a été décomposé en 3 zones :





	<p>Compte les faces de la zone rouge. Marquage de la première face comptée avec le doigt          Compte le nombre de faces de la zone bleue.          Marquage de la première face comptée avec le doigt.          Ajoute les deux et multiplie les résultats par deux          Compte les faces de l'intérieur et fait la somme.</p>
--	--

On remarque qu'il utilise ses doigts pour marquer la première face énumérée, cela lui permet de savoir quand s'arrêter car les parties sont disposées en forme de cercle.

En utilisant une stratégie de partitionnement, on constate que certains adultes ont utilisé le marquage manuel des faces ou zones énumérée.

	<p>Pose un doigt dans chaque creux du dessus. Elle en compte 6 et donc multiplie le nombre de creux au nombre de faces : <math>6 \times 5 = 30</math> faces au-dessus. Puis elle vérifie la symétrie en comptant combien de creux sans marquage il reste. Elle valide la symétrie donc multiplie le nombre de faces par 2 : <math>30 \times 2 = 60</math> faces.</p>
---	--

Le marquage corporel lui sert à identifier les éléments déjà pris en compte.

	<p>Elle énumère 6 creux sur le haut du solide, en les pointant avec ses doigts. A chaque creux elle additionne 5 : "5, 10, 15, 20, 25, 30"</p>
	<p>Elle utilise sa première main comme aide pour situer le niveau des faces encore non traitées. Puis elle continue de compter de 5 en 5 : "35, 40, 45, 50, 55, 60"</p>

Pour ce sujet, le marquage corporel lui sert de repère pour l'origine des faces énumérées.

Une personne n'a pas eu une réussite immédiate mais n'a pas été filmée. Elle a eu le même problème que certains élèves de maternelle, elle n'a pas établi de cheminement pour énumérer les creux et s'est rapidement perdue entre face traitée et non traitée.

Avec ces solides tous on eut besoin de pointer les faces ou creux puisqu'ils ne font pas parti des solides fréquemment rencontrés. Il ne peut donc exister une vision mentale préconstruite sur laquelle ils peuvent s'appuyer. Cependant ils ont presque tous identifié ces solides comme la composition de deux parties identiques et n'ont pas eu besoin de pointer la totalité des faces.

### ***3. Analyse des résultats***

L'intérêt maintenant est donc de faire une analyse par analogie pour comparer ce que l'on nous a appris sur la situation de référence et ce qu'il s'est passé dans la situation observée.

Notre problématique étant : "Dans quelle mesure tout ce que l'on sait sur l'énumération d'une collection dans le plan va être encore robuste dans un espace 3D ?" nous pouvons à présent mettre au même plan les stratégies utilisées par les enfants et celles des adultes.

## **a) Le cheminement mental**

Pour être efficace dans l'énumération lorsqu'aucun marquage n'est possible, il faut pouvoir ordonner et contrôler. Mais les deux actions ne sont pas dissociées, autrement dit il faut pouvoir ordonner et contrôler en même temps. Les stratégies principales de parcours d'une collection dans le plan reposent sur des organisations-type, basées sur des lignes, des colonnes ou de proche-en-proche comme dans la situation vue en MIR. Or, cette organisation basée sur les lignes et colonnes n'est pas possible dans l'espace 3D cependant on remarque que les participants ont créé un chemin, un parcours mental, autour des solides afin de dénombrer leurs faces. La stratégie de cheminement mental est donc constante dans le plan et dans un espace 3D. Les participants peuvent toutefois dans une situation 2D ou 3D faire des erreurs d'énumération : compter deux fois un élément ou en oublier. Dans le cas de la situation 3D certains enfants oublient ou ne voient pas la face posée sur la table, la face du dessous. Une des caractéristiques de la situation des faces d'un solide est que tous les éléments de la collection ne sont pas visibles en même temps. Les adultes ont pu également oublier de compter des faces mais ces oublis étaient moins fréquents car la stratégie principale utilisée par les adultes était le partitionnement de l'espace.

## **b) Partitionnement**

Qu'elles soient dans le plan ou dans l'espace, les collections ont des propriétés spatiales. Pour dénombrer une collection, les participants ont fait des partitions successives de la collection, mais la principale difficulté est la matérialisation de ces partitions. Il s'agit d'une autre façon de décrire les opérations 4 et 5 de Briand :

4. Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis.
5. Concevoir la collection des objets non encore choisis.

Dans la situation de Briand avec les arbres ou dans la situation des sucres, certains élèves ont partitionné la collection en sous-ensemble.

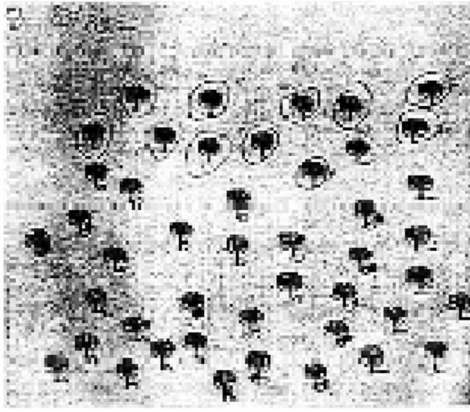


Figure 5 : extrait (Briand, 1999)

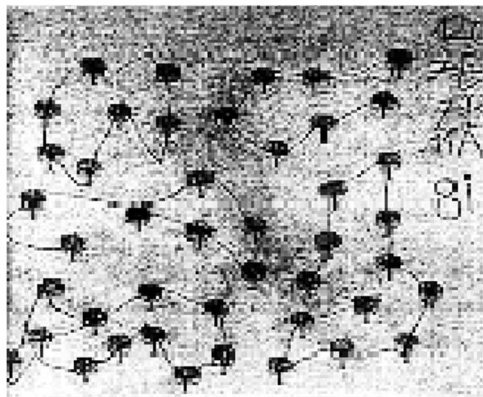
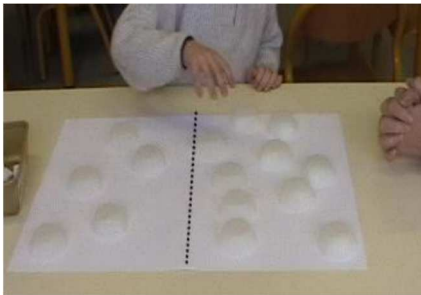


Figure 6 : extrait (Briand, 1999)

E1 : construit des sous-ensembles d'arbres, tout en comptant (sans écrire) et en effectuant un marquage différent auprès de chaque arbre pour signifier le sous-ensemble. Il effectue une partition de l'ensemble des arbres. Ensuite, il construit l'écriture 8 8 8 8 2. L'erreur vient sans doute de la non-prise en compte du sous-ensemble désigné par un rond doublé d'une croix.

E2 : relie quelques arbres pour constituer un sous-ensemble et effectue une partition de l'ensemble des arbres. Il construit en même temps une désignation de chaque sous-ensemble par une lettre. Il construit ensuite le couple : (nombre, signe du sous-ensemble).



Partition en deux (Margolinas, 2012)

Dans la situation des sucres les élèves ont identifié une sous-collection de cinq éléments, à gauche puis une seconde à droite.

Dans la situation 3D, les adultes ont également partitionnés l'espace en sous-ensemble distincts. Les solides possédant 48 et 60 faces, compter toutes les faces une par une prend beaucoup de temps et demande beaucoup de concentration. En s'appuyant sur leurs connaissances en symétrie, plusieurs participants ont divisé les solides en deux espaces symétriques. Compter les faces d'une partie revient à compter les faces de l'autre. Après avoir divisé le solide en deux ils ont encore décomposé le solide en sous-parties. Pour les solides proposés aux enfants, aucune symétrie n'était possible. On peut toutefois se demander si un

début de partitionnement n'était pas mis en place lorsque la dernière face comptée était toujours la face du dessous, comme si deux sous-ensembles existaient : partie visible et non-visible. Ceci n'est qu'une hypothèse, rien ne nous permet de le prouver. Conserver la mémoire peut être une opération mentale (quand il n'y a aucun marquage écrit) mais elle peut être aussi une opération physique : déplacer les objets pour créer plusieurs espaces. Dans ces deux situations, que ce soit dans le plan ou dans l'espace 3D, les éléments de la collection n'étaient pas déplaçables entre eux. Ainsi la seule autre possibilité restante pour garder la mémoire reste le marquage.

### **c) Le marquage**

- *marquage corporel* : Le marquage corporel est une stratégie mise en place par les enfants et les adultes. Cette stratégie consiste à poser un doigt sur une face ou un sous-ensemble énuméré. D'après les écrits, cette stratégie n'est pas mise en place dans des situations d'énumération dans le plan. Toucher un élément pendant l'énumération n'est pas synonyme de marquage, ce geste permet de soutenir le regard dans le comptage. De plus, le nombre d'éléments, des collections dans le plan que nous avons décrites, est systématiquement supérieur au nombre de doigts. Le marquage avec les doigts perd alors son intérêt et devient inefficace.

- *marquage écrit* : alors qu'il est régulièrement utilisé dans la classe de notre expérimentation, il n'a jamais été utilisé spontanément par les élèves. Leur maîtresse a conscience de l'importance de l'apprentissage de l'énumération. En classe leur a appris, par exemple, à rayer les éléments au fur et à mesure qu'ils étaient utilisés, que ce soit en maths ou en français. On peut supposer que le passage au 3D a bloqué le transfert de cette capacité qu'ils ont pourtant acquise. Il faut relever cependant que peu d'enfants ont eu besoin du marquage pour réussir. Quant aux adultes, aucun n'est passé par le marquage écrit. Mais c'est en étudiant l'utilisation erronée de ce marquage que l'on a découvert une nouvelle source de divergence entre nos deux situations d'analogie. Lorsque la collection est dans le plan, le marquage permet de vérifier visuellement que l'on a bien énuméré tous les éléments de la collection (recherche de vérification ou comportement inconscient). Pour l'énumération des faces d'un solide, si on ne cherche pas consciemment à vérifier que l'on a tout compté, on peut omettre des faces qui ne sont pas marquées car on ne les voit pas. Nous avons observé cela chez une élève. En effet suite à un échec d'énumération des faces du cube, nous lui avons

proposé une remédiation grâce au marquage. Elle met bien un trait par face mais oublie de nouveau une face. Elle réitère cette erreur pour les deux autres solides proposés (les deux pyramides). La face qui n'est pas prise en compte est toujours celle sous le solide. Lorsqu'elle passe par la vérification avec le marquage, elle s'arrête toujours au nombre qu'elle a énoncé au premier essai. On découvre alors que, sur un objet 3D, le marquage perd son intérêt si le sujet ne fait pas l'effort de vérifier que tous les éléments sont marqués.

#### **4. Discussion**

Avec le recul, nous avons eu confirmation que l'évolution de notre problématique était essentielle. Suite à notre expérimentation nous avons pu observer que les stratégies utilisées par les enfants et les adultes sont de même nature.

La situation d'analogie nous a permis de dépasser le stade de simple observation et nous a amené à réfléchir plus finement aux processus en jeu lors du dénombrement. Si l'on se réfère à nos hypothèses de départ, l'hypothèse 1 n'est pas validée. En effet nous pensions que si le marquage était possible, les sujets allaient favoriser cette méthode car elle est peu coûteuse cognitivement et permet un contrôle des faces énumérées, or, aucun de nos sujets n'a spontanément utilisé le matériel proposé (gommettes, stylo). Nous pensions que le marquage assurait la réussite. Lorsque nous proposons aux élèves de maternelle une remédiation avec marquage, tous ont réussi excepté une élève qui nous a prouvé que le marquage n'a pas la même évidence que dans une situation dans le plan.

Notre seconde hypothèse peut être validée mais reste à compléter. En effet nous pensions que dans le cas où le marquage écrit ne serait pas possible, les sujets organiseraient un cheminement pour compter les faces des solides comme ils le feraient dans une situation dans le plan. Cette stratégie a été mise en place par beaucoup de sujet. Le chemin ici n'est plus un chemin en 2D comme des lignes ou des colonnes mais un chemin en 3D. Cette stratégie a aussi été complétée par un partitionnement de l'espace, comme dans la situation des sucres.

Toutes les faces d'un solide ne sont pas visibles. Cette variable, qui paraît logique, remet en question nos connaissances sur l'énumération dans le plan. Ce qu'il manque pour réussir, c'est une vision globale de tous les éléments à énumérer. En effet, la vérification devient obligatoire lorsque l'on décide d'utiliser le marquage, car contrairement à un

marquage dans le plan, si la vérification n'est pas consciente, la réussite n'est pas assurée. Sans marquage on peut oublier de compter des faces simplement car nous ne les voyons pas. Les sujets les plus performants sont ceux qui sont parvenus à avoir cette vision globale de l'objet, mentalement, comme K, en maternelle, qui n'a pas eu besoin de toucher le solide ou bien certains adultes, qui, en quelques secondes ont réussi à partitionner le solide en 2 parties identiques.

On peut supposer que les enfants de maternelle qui ont réussi l'exercice n'ont pas réussi car le solide avait peu de faces mais plutôt car, en fréquentant souvent les solides que nous leur avons proposé, ils ont pu rapidement se créer une image mentale et ne pas oublier la face du bas, même lorsque le solide était posé. La vision globale des faces était mentale. Nous aurions pu tester cette nouvelle hypothèse en leur présentant des solides complexes et observer leurs comportements.

Pour les adultes, ils se sont servis de leurs connaissances en symétries, puis en addition ou multiplication, ce qui leur a permis rapidement de dénombrer les faces sans surcharge.



## CONCLUSION

Ce mémoire nous a permis de découvrir le concept d'énumération dans toute sa complexité. Même si cela nous semblait très vague au début, nous parvenons de mieux en mieux à repérer des situations d'énumération dans de nombreuses activités, jusqu'aux plus quotidiennes comme par exemple, organiser sa liste de courses pour permettre une fois dans le magasin de traiter les articles une fois et une seule ou encore le travail d'une caissière qui crée un nouvel espace pour identifier les éléments déjà traités.

C. Margolinas et M. Laparra montrent que l'énumération intervient à différents niveaux lors d'une activité autour de la reconstitution des étapes d'une recette. Cette activité est une activité de français et pourtant elle nécessite la capacité d'énumérer. Un premier tri s'opère après le découpage des étiquettes. Il nécessite la création de trois espaces : celui appelé "la collection d'origine" avec le mélange d'étiquettes et d'"épluchures" de papier, celui avec les étiquettes triées et celui avec les épluchures de papier triées. L'énumération est nécessaire puisqu'il faut que les élèves passent en revue tous les morceaux de papiers et qu'ils pensent à les séparer une fois qu'ils sont traités. Si l'élève ne sépare pas le papier identifié comme une étiquette et qu'il le remet dans la collection d'origine, il n'a aucun moyen de savoir qu'il a déjà été traité. Ainsi les élèves seront amenés à traiter plusieurs fois les mêmes éléments. Alors qu'un papier identifié comme une épluchure est plus naturellement séparé car il sera mis à la poubelle. Pour pousser les élèves à créer ces espaces le professeur peut leur donner une barquette pour y déposer les étiquettes. Cela reste efficace uniquement si l'élève pense à retourner les étiquettes qui sont du mauvais côté (côté blanc) au lieu de les considérer comme des épluchures. La deuxième situation qui montre l'importance de l'énumération apparaît lors de la mise en ordre des étapes de la recette par rapport au modèle. Très souvent, quand l'élève choisit une ligne de la recette à retrouver parmi ses étiquettes, il prend une étiquette et si elle ne correspond pas il la remet avec les autres étiquettes. Il ne construit pas les espaces nécessaires au tri. De ce fait il n'identifie pas l'étiquette comme déjà traitée et perd en efficacité en la traitant plusieurs fois par la suite.

Par les différentes recherches et études réalisées pour ce mémoire nous avons découvert l'importance qu'a l'énumération, mais aussi le peu de place qu'elle prend dans les apprentissages. Pourtant, plusieurs recherches ont déjà souligné ces aspects.

En tant que futures professeures des écoles. Cela nous permet d'avoir aujourd'hui un

regard éclairé sur les aides et enseignements à apporter aux élèves pour que l'énumération ne devienne pas un obstacle à la réussite de l'élève. Rendre plus explicites les problèmes liés à l'énumération et leurs solutions peut suffire, pour beaucoup d'élèves, à mieux les surmonter. Ces connaissances vont aussi pouvoir nous servir pour neutraliser certaines difficultés d'énumération quand on ne souhaite pas les travailler. Cela passera par des aides, par exemple, durant la passation de consigne : apprendre à rayer les éléments déjà utilisés lors d'un exercice à trous, apprendre à créer un nouvel espace pour les éléments déjà énumérés, créer des espaces "poubelle" sur les fiches pour y coller les étiquettes non utiles à l'exercice mais qui ne sont pas à considérer au même niveau que les épluchures...

## BIBLIOGRAPHIE

Briand J. (1993), *L'énumération dans le mesurage des collections*, Thèse, Bordeaux I.

Briand J., Lacave, Luciani, Harvouet, Bedere, Goua de baix (1999-2000), Enseigner l'énumération en moyenne section, *GRAND N*, N°66 PP : 7 à 22.

Briand, J., Loubet, M., & Salin, M.-H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle*. Paris: Hatier.

Brousseau, G. (1984). L'enseignement de l'énumération. Paper presented at the *International Congress on Mathematical Education*. <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/02/84-6-Enum%C3%A9ration.pdf>

Brousseau G. (1998a), *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage éditions.

Margolinas, C. (2002). Situations, milieux, connaissances: Analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 141-156). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Margolinas C., Laparra M., Analyse de situations et production des inégalités scolaires. Leutenegger, F., Schubauer-Leoni, M., Ligozat, F., Lambiel, N., Forget, A., Audigier, F., Fluckiger, A., Rickenmann, R., Thévenaz-Christen, T. *Premier colloque de didactique comparée: Où va la didactique comparée?*, Jan 2009, Genève, Suisse. Université de Genève FPSE-SSSED& ARCD, pp.1-12, 2010.





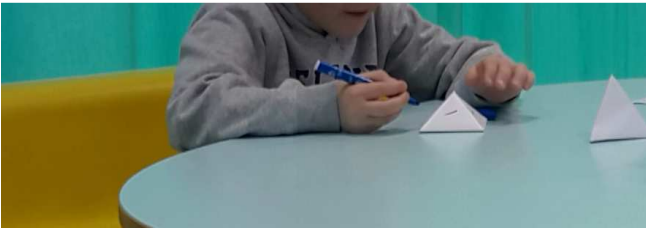
Margolinas C., Des savoirs à la maternelle. Oui, mais lesquels? *XXXIX COLLOQUE COPIRELEM*, Jun 2012, Quimper, France




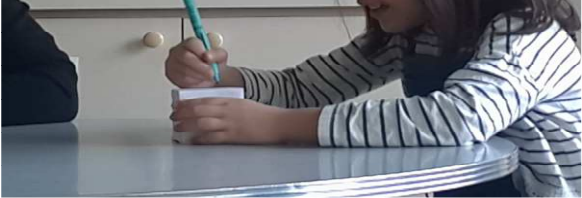

Margolinas, C., Wozniak, F., & Rivière, O. (2015). Situations d'énumération et organisation des collections. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 35(2), 183-220.

Ripoll T. (1992), La recherche sur le raisonnement par analogie : objectifs, difficultés et solutions, *L'année psychologique*, vol. 92, n°2. pp. 263-288.

Rivière O., Une situation pour mieux s'organiser quand on compte. Bessot, Annie; Margolinas, Claire; Le Van Tien. *Des mathématiques à l'école maternelle*, Ecole Normale Supérieure Centrale d'Ho Chi Minh-ville, pp.32-62, 2015.

ANNEXE 1 : Observations élèves cycle 1 :

M.	
	<p>Prend le cube avec une main qui sert de support, rotationne le solide pour compter les faces. La main support ne change pas de place et l'enfant énumère les faces en les touchant avec son doigt. Il énonce le bon nombre : 6 faces. Cependant avec cette stratégie il compte plusieurs fois la même face et en oublie une.</p>
	<p>Après lui avoir demandé de recommencer il décide de poser le cube sur la table et de compter en touchant avec son doigt les faces. Il lève le cube pour toucher la face du dessous. Il obtient de nouveau 6 faces mais cette fois-ci sans compter plusieurs fois la même face et sans en oublier une.</p>
	<p>Il utilise la même technique pour compter les faces de la pyramide à base triangulaire : ne pas bouger le solide et le lever seulement pour compter la face du dessous. Cette face est toujours comptée en dernière. Il énonce le bon nombre : 4 faces.</p>
	<p>Pour la pyramide à base rectangulaire il se précipite et compte trois faces et une dessous.</p>
	<p>On lui propose de s'aider d'un feutre pour compter les faces. Il énonce alors le bon nombre : 5 faces.</p>

K.	
	Observe le cube de loin et pointe du doigt, sans les toucher, les faces. Elle pointe aussi celle du dessous. En silence dans sa tête. Elle énonce le bon nombre : 6 faces.
	Même technique pour les pyramides à base triangulaire et à base carrée. Elle énonce à chaque fois le bon nombre de faces. → Elle sait qu'elle a compté toutes les faces car elle imagine les solides dans sa tête
N.	
	Ne bouge pas le cube qui est posé sur la table. Lorsqu'elle compte les faces elle commence par celle face à elle puis celle du haut puis compte celle de gauche, droite et termine par celle du fond. Ne compte pas la face du bas. → Elle n'en énonce que 5.
	"est-ce que tu peux vérifier, à l'aide de gommettes ou de feutres, que tu as compté toutes les faces ?" → Elle ne prend pas le cube dans ses mains. En marquant avec un feutre elle fait le même chemin et ne pense toujours pas à la face du dessous.
	Réessaye en faisant de nouvelles marques : prend le cube dans sa main, marque celle du dessus, puis fait le tour et en compte encore 5. → On peut se demander si elle ne s'arrête pas de compter à 5 pour confirmer le premier résultat



Pyramide à base triangulaire :

1) pose le feutre. Ne compte que les faces visibles  
→ 3

2) lorsqu'on lui dit d'utiliser le feutre elle prend le solide dans sa main mais ne marque pas la face du dessous.

→ impression qu'elle compte jusqu'à trois car elle en a compté trois avant.

→ Lorsqu'elle fait un marquage elle ne vérifie pas

→ IDEM pour pyramide à base rectangulaire



Nouvel essai avec le cube mais en utilisant le feutre dès le début : elle marque les faces et vérifie qu'elle les a toutes compté en tournant le cube.

→ Elle vérifie car elle n'a pas de réponse en tête et le fait de tenir le cube dans sa main "enlève" la "face du dessous" quelle ne pensait pas à compter

→ si elle ne vérifie pas qu'elle a marqué toute les faces, le marquage n'est pas utile.

E.



Pose un doigt sur chaque face comptée, ne vérifie pas s'il y a une face "vide" → Compte 4 faces

"-Comment tu sais que tu n'as pas oublié de face ou que tu n'en a pas compté deux fois ?

-parce que j'ai mis les doigts comme ça

- et celle-là ?

- ah oui !"

Nouvel essai : pose des doigts, vérification visuelle → elle compte 6 faces







Pyramide à base rectangulaire :




pose les doigts sur les faces comptées et oublie la base

nouvel essai : compte en touchant une à une les




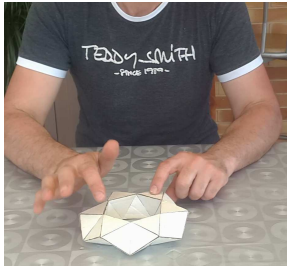
	faces mais ne se sert plus du marquage avec les doigts
	Pyramide à base triangulaire : Stratégie de marquage avec les doigts et vérification
T.	
	Cube : Compte chaque face en la touchant avec son doigt. Il laisse le cube posé sur la table, ne marque pas son point de départ mais tourne autour. Compte la face du dessous en dernier Il énonce bien 6 faces.
	Pyramides : Même technique que pour le cube

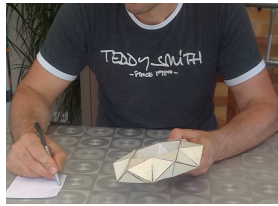
W.	
	Prend le cube avec une main qui sert de support, rotationne le solide pour compter les faces. La main support ne change pas de place et l'enfant énumère les faces en les touchant avec son doigt. Il énonce un nombre erroné à savoir 5 faces.

	<p>Suite à notre proposition d'utiliser le marquage, il utilise le feutre.</p> <p>Trace un trait sur les faces énumérées, lève le solide pour tracer un trait sur la face du dessous puis vérifie si toutes les faces ont des traits.</p> <p>Cette fois-ci l'énumération des faces est juste : 6 faces.</p>
	<p>Pyramides :</p> <p>Il pointe chaque face avec son doigt et soulève le solide pour compter celle du dessous. Il énonce à chaque fois le bon nombre.</p>
	<p>Ayant le feutre à côté de lui et se souvenant qu'il l'avait utilisé avec le cube, il décide de recompter avec marquage même si il a déjà obtenu la bonne réponse.</p> <p>Trace un trait sur les faces énumérées, lève le solide pour tracer un trait sur la face du dessous puis vérifie si toutes les faces ont des traits.</p>



Annexe 2 : Observation adultes

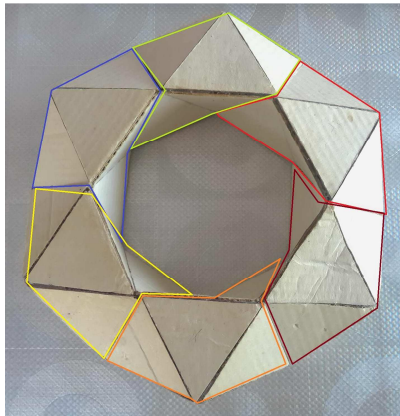
T.(1)	
	<p><u>1er essai :</u></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) Compte les faces les plus "hautes" (faces rouges) puis celles "inclinées" (faces vertes) - Marquage du début avec un doigt.</li> <li>2) Retourne le solide, continue de compter en commençant par les faces rouge puis les verte. Marquage du début avec un doigt.</li> </ol> <p>→ Oublie les faces intérieures</p> <p><u>2ème essai :</u></p> <p>Même méthode et compte en dernier les faces "intérieures"</p>
T.(2)	
	<p>Compte les faces de la zone rouge. Marquage de la première face comptée avec le doigt</p> <p>Compte le nombre de faces de la zone bleue. Marquage de la première face comptée avec le doigt.</p> <p>Ajoute les deux et multiplie les résultats par deux</p> <p>Compte les faces de l'intérieur et fait la somme.</p>



Utilisation du crayon pour noter sur un papier le nombre de face par "zone"  
Le crayon n'est pas utilisé pour le marquage mais pour garder mémoire.

Compte la zone rouge, note le nombre de face auquel il ajoute le nombre de faces de la zone bleue. il multiplie par deux et ajoute les faces de l'intérieur.

V.



- Fractionne le solide en 6 "parties".  
Chaque partie possède 8 faces.  
→ Elle multiplie les deux puis compte les faces intérieures

C.



Elle prend le solide dans sa main.

Elle commence par compter le nombre de faces dans un creux en les pointant avec son doigt. Elle en énumère 5.



Marquage manuel : un doigt dans chaque creux du dessus. Elle en compte 6 et donc multiplie le nombre de creux au nombre de faces :  $6 \times 5 = 30$  faces au dessus. Puis elle vérifie la symétrie en comptant combien de creux sans marquage il reste. Elle valide la symétrie donc multiplie le nombre de faces par 2 :  $30 \times 2 = 60$  faces.



Elle assure une vérification en utilisant ses deux mains. Elle peut ainsi effectuer un marquage avec tous ses doigts plus les deux creux sous chacune de ces paumes : 12 creux.  
 $12 \times 5 \text{ faces} = 60 \text{ faces.}$




X.



Il laisse le solide immobile sur la table.  
Il commence par compter le nombre de faces dans un creux en les pointant avec son doigt. Il en énumère 5.



Divise le solide en deux parties symétriques. Compte le nombre de creux d'un côté du solide en marquant avec les doigts : 6 creux  
Double le nombre de creux et multiplie par le nombre de face :  $6 \times 2 = 12$  creux ;  $12 \times 5 \text{ faces} = 60 \text{ faces.}$

I.	
	<p>Elle laisse le solide immobile sur la table.</p> <p>Elle commence par compter le nombre de faces dans un creux en les pointant avec son doigt. Elle en énumère 5.</p>
	<p>Elle énumère 6 creux sur le haut du solide, en les pointant avec ses doigts. A chaque creux elle additionne 5 : "5, 10, 15, 20, 25, 30"</p>
	<p>Elle utilise sa première main comme aide pour situer le niveau des faces encore non traitées. Puis elle continue de compter de 5 en 5 : "35, 40, 45, 50, 55, 60"</p>