



HAL
open science

Construire le sens des opérations à travers les problèmes au CE2

Évelyne Buffeteau, Sandra Davaze

► **To cite this version:**

Évelyne Buffeteau, Sandra Davaze. Construire le sens des opérations à travers les problèmes au CE2. Education. 2017. dumas-01615247

HAL Id: dumas-01615247

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01615247>

Submitted on 12 Oct 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0
International License

MASTER MEEF mention 1er degré
« Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation »
Mémoire de 2^{ème} année
Année universitaire 2016 - 2017

CONSTRUIRE LE SENS DES OPERATIONS A TRAVERS LES PROBLEMES AU CE2

AUTEURS

Evelyne BUFFETEAU

Sandra DAVAZE

Directeur du mémoire : Alain Bronner

Assesseur : Jean-Marc Ravier

Soutenu le 22 mai 2017

CONSTRUIRE LE SENS DES OPERATIONS A TRAVERS LES PROBLEMES AU CE2

Résumé

Le sens des opérations se construit à travers la résolution de problèmes. La maîtrise de cette notion est encore fragile chez nos élèves de CE2, nos recherches portent donc sur les types de problèmes additifs permettant de renforcer le sens des opérations. Notre expérimentation démontre l'apport des problèmes complexes et des problèmes pour chercher qui offrent des situations riches et des procédures variées. Les résultats témoignent de l'engagement des élèves dans une démarche d'investigation et de la diversification de leurs procédures. Ce travail doit être poursuivi et étendu à des problèmes multiplicatifs ou de division.

Mots-clefs : sens des opérations, problèmes, démarche d'investigation.

Resume

The meaning of operations is elaborated through problems' solving. In our class of CE2, this skill is uncertain. Our research is based on additive problems which allow the increase of problems' solving. Our testing proves that the complex problems and the problems "to seek" give a lot of situations and diversified procedures. The results show the will of the pupils to enter into a process of investigation and also into varied procedures. This task has to continue and to be extended to multiplication and division problems.

Key-words : meaning of operations, problems, process of investigation.

1 Table des matières

2	INTRODUCTION	5
3	EVOLUTION DE LA PLACE DES PROBLEMES DANS LES PROGRAMMES ET DANS LES MANUELS.....	6
3.1	Historique de la place des problèmes dans les instructions officielles	6
3.1.1	Au XIX ^e siècle	6
3.1.2	Après la Seconde Guerre mondiale	6
3.1.3	Dans les années 1970	7
3.1.4	Dans les années 1980	7
3.1.5	Dans les années 1990	8
3.1.6	Dans les années 2000	8
3.1.7	Les problèmes dans les programmes de 2016	10
3.2	Etude comparative de quelques manuels publiés dans les années 2000	11
4	PROBLEME, PROBLEME POUR CHERCHER ET SENS DES OPERATIONS	15
4.1	Qu'est-ce qu'un problème ?	15
4.2	Qu'est-ce qu'un problème ouvert / un problème pour chercher ?	17
4.3	Dispositif de mise en œuvre des problèmes ouverts dans une classe	20
4.4	Le rôle de la résolution de problèmes dans la construction des connaissances.....	21
4.5	Qu'entend-on par construire le sens des opérations ?	22
5	EXPERIMENTATION.....	25
5.1	Evaluation diagnostique	25
5.1.1	Première phase de l'évaluation diagnostique	26
5.1.2	Deuxième phase de l'évaluation diagnostique.....	28
5.1.3	Troisième phase de l'évaluation diagnostique	31
5.2	Une approche par le biais d'une situation-problème.....	35
5.2.1	Dispositif mis en place	35
5.2.2	Déroulement de la séance.....	36
5.2.3	Analyse des résultats de la situation problème	38
5.2.4	Bilan de la situation problème.....	44
5.3	Mise en œuvre d'une séance de problème pour chercher	44
5.3.1	Déroulement de la séance.....	44
5.3.2	Analyse des résultats du problème pour chercher	46
5.4	Evaluation formative	48
5.4.1	Contenu de l'évaluation formative.....	49
5.4.2	Analyse des résultats de l'évaluation formative	50
5.4.3	Bilan de l'évaluation formative	53
6	CONCLUSION	54
7	REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	55
7.1	Références en didactique des mathématiques	55
7.2	Textes officiels	56
7.3	Manuels étudiés	56
8	ANNEXES.....	57
8.1	Typologie des problèmes additifs selon G. Vergnaud	57
8.2	Partie recherche du manuel <i>La tribu des maths</i> (2008, p. 54).....	58
8.3	Exercices d'entraînement et rubrique Labo Maths du manuel <i>La tribu des maths</i> (2008, p.55)	59
8.4	Rubrique « S'entraîner à chercher » du manuel <i>La tribu des maths</i> (2008, p. 28)	60
8.5	Rubrique « S'entraîner à chercher » du manuel <i>La tribu des maths</i> (2008, p.29)	61
8.6	Extrait de la banque de problèmes du manuel <i>Cap maths</i> (2011, p. 162).....	62
8.7	Extrait du manuel <i>Maths tout terrain</i> (2016, p.14)	63
8.8	Extrait du manuel <i>Maths tout terrain</i> (2016, p.15)	64

8.9	Extrait du manuel <i>Maths tout terrain</i> (2016, p. 98)	65
8.10	Sommaire du manuel <i>Cap Maths</i> (2017, p. 4).....	66
8.11	Extrait du manuel <i>Cap maths</i> (2017, p. 36).....	67
8.12	Extrait du manuel <i>Cap Maths</i> (2017, p. 25).....	68
8.13	Extrait du manuel <i>Cap Maths</i> (2017, p. 32).....	69
8.14	Enoncé du problème « Le Parc des oiseaux »	70
8.15	Grille d'analyse des résultats de l'évaluation diagnostique	71
8.16	Grille d'analyse des résultats de la situation-problème	72
8.17	Grille d'analyse des résultats de l'évaluation formative	73

2 INTRODUCTION

Nous sommes parties d'un constat fait dans la classe de CE2 d'Evelyne qui est qu'une partie des élèves rencontrent des difficultés persistantes en résolution de problèmes ce qui se traduit chez certains par des craintes et des réticences à travailler sur des problèmes en mathématiques. Nous nous sommes également rendues compte que parmi les élèves en réussite certains sont en incapacité d'expliquer leur raisonnement : il semble qu'ils sont guidés par des automatismes de calculs et une volonté de plaquer des opérations sur un énoncé sans réfléchir au sens de cet énoncé. Les acquis des élèves sont encore fragiles sur le plan du sens des opérations. Au moment de répondre à la question posée, force est de constater que beaucoup d'élèves perdent de vue ce qu'ils cherchent, ils sont alors obligés de relire l'énoncé pour retrouver ce qu'ils recherchent et pouvoir ainsi formuler leur réponse. Nous avons rapproché ces constatations faites auprès des élèves des conclusions tirées par Stella Baruk (1985) qui souligne que la stérilité des énoncés de certains problèmes posés dans les manuels se traduit par une perte de sens dans les activités de résolution de problèmes. Selon elle, le choix de l'énoncé d'un problème se révèle primordial car certains énoncés induisent de manière trop automatique le recours à certaines opérations ce qui fausse le travail de réflexion que doivent mener les élèves. Ainsi, les énoncés qui proposent des questions intermédiaires stérilisent le raisonnement car ils impliquent le recours automatique à des opérations. Certains mots inducteurs donnent trop d'indices aux élèves ou risquent au contraire de les induire en erreur : le mot « reste » implique par exemple le recours à une soustraction.

Or, quand il résout un problème, l'élève doit réussir à faire le lien entre ce qu'il sait des opérations et le sens qu'il donne à l'énoncé du problème, entrent donc en jeu des compétences langagières liées à la compréhension de l'écrit mais aussi des connaissances sur le sens des opérations. Nous souhaitons concentrer nos recherches sur la manière de renforcer le sens des opérations, encore fragile chez certains de nos élèves. Nous faisons l'hypothèse que la pratique des problèmes complexes et des problèmes pour chercher contribue à construire le sens des opérations.

La problématique qui nous guidera tout au long de notre travail de recherche est la suivante : **quels sont les types de problèmes qui permettent de renforcer le sens des opérations chez les élèves de CE2 ?**

Nous retracerons d'abord l'évolution de la place des problèmes dans les programmes et dans les manuels puis nous définirons ce qu'est un problème, un problème pour chercher et quel est leur lien avec le sens des opérations, nous présenterons enfin l'expérimentation menée dans notre classe.

3 EVOLUTION DE LA PLACE DES PROBLEMES DANS LES PROGRAMMES ET DANS LES MANUELS

3.1 Historique de la place des problèmes dans les instructions officielles

3.1.1 Au XIX^e siècle

La place occupée par la résolution de problèmes de mathématiques a beaucoup évolué dans les programmes de l'école primaire. Notre propos s'appuie sur les recherches de Maryvonne Priolet et Jean-Claude Régnier pour les programmes parus avant les années 2000. (Priolet, Régnier, 2012)

A partir du milieu du XIX^e siècle, le lire-écrire-compter s'enseigne simultanément. Du milieu du XIX^e siècle jusqu'à la fin de la seconde guerre mondiale, les problèmes s'appuyaient sur des situations concrètes en lien étroit avec la vie quotidienne car le but était de préparer les enfants à leur avenir social et professionnel. Les problèmes portaient sur les monnaies, les changes ou la mesure des surfaces par exemple.

D'après Priolet et Régnier, à la fin du XIX^{ème} siècle, les énoncés des problèmes sont « un moyen pour l'Etat républicain de véhiculer auprès du peuple l'image d'une certaine société ». L'idée est aussi d'amener les élèves à une certaine forme d'abstraction, « à raisonner sans le secours d'exemples matériels ». (Priolet, Régnier, 2012, p.72)

3.1.2 Après la Seconde Guerre mondiale

Les programmes de 1945 mettent toujours l'accent sur « la nécessité d'ancrer les problèmes proposés sur des situations de la vie quotidienne » (Priolet, Régnier, 2012, p.73). Cela passe par exemple par le calcul de masses de blé et de farine ou le calcul du prix de parcelles. La résolution de problèmes est alors perçue comme une activité d'application qui intervient en fin d'apprentissage d'une notion afin d'en contrôler les acquis. Comme les années 1950 marquent le début de la démocratisation de l'accès à l'enseignement secondaire, il s'agit d'acquérir à l'école primaire une culture ouvrant la voie à des études longues. L'enseignement des mathématiques va alors connaître de profondes transformations. Les travaux de Polya font avancer la réflexion sur l'enseignement de la résolution de problèmes. Il estime que pour résoudre un problème, il faut d'abord comprendre le problème puis concevoir un plan de résolution, mettre le plan à exécution et enfin examiner la solution obtenue. (Polya G., 1945).

3.1.3 Dans les années 1970

De grands changements interviennent dans l'enseignement des mathématiques dans les années soixante-dix avec la naissance de la didactique des mathématiques. Dans les programmes de 1970, la résolution de problèmes est considérée comme une « activité privilégiée » car elle « affermit la pensée mathématique des élèves » et leur permet de mieux prendre « conscience du pouvoir qu'elle leur donne sur le monde extérieur ». (MEN, 1970). Le but ne consiste donc plus seulement à préparer les élèves à la vie active en les entraînant à résoudre des problèmes de la vie courante mais il s'agit aussi de leur donner « une formation mathématique véritable » (M.E.N., 1970) en les amenant à s'approprier des concepts mathématiques fondamentaux dans des situations variées. On s'attache prioritairement à la compréhension de l'élève. D'après Priolet et Régnier, les travaux des didacticiens en mathématiques mettent en avant :

le rôle déterminant de l'enseignant dans le choix et la mise en œuvre de situations visant la dévolution à l'élève de l'élaboration de ses connaissances mathématiques. » (Priolet, Régnier, 2012, p.77)

L'élève doit devenir acteur de ses savoirs. Dans les années 1970, la notion de problème est considérée comme centrale dans les activités mathématiques à l'école primaire. Les programmes de 1978 mettent en avant une nouveauté, « les situations-problèmes » qui sont « utilisées pour l'approche et la construction de nouveaux outils mathématiques. » (M.E.N., 1978) Les situations-problèmes doivent aussi permettre aux élèves de réinvestir leurs connaissances et « d'en percevoir les limites d'utilisation ». Enfin, l'enseignant s'appuie sur les situations-problèmes pour évaluer les acquis. On peut donc distinguer trois types de situations-problèmes :

celles qui permettent d'introduire des notions nouvelles et qui vont se situer en début d'apprentissage, celles qui vont permettre d'évaluer les connaissances acquises et enfin celles, plus complexes et plus globales, qui visent à développer des attitudes de recherche et à favoriser la créativité de l'élève. (M.E.N., 1978)

Les situations-problèmes jouent donc un rôle central dans l'apprentissage des connaissances mathématiques par les élèves.

3.1.4 Dans les années 1980

Les programmes de 1985 mettent aussi l'accent sur la résolution de problèmes et soulignent que « l'objectif de l'enseignement des mathématiques vise à développer le raisonnement et à cultiver chez les élèves les possibilités d'abstraction ». (M.E.N., 1985) Les programmes de 1985 distinguent encore trois types de problèmes :

Ceux qui permettent la construction de nouveaux outils mathématiques ; ceux qui invitent à utiliser des acquis, à en percevoir éventuellement les limites d'utilisation et donc à évaluer le degré de maîtrise des connaissances ; ceux qui sont liés à une véritable recherche. (M.E.N., 1985)

Les problèmes de recherche font leur apparition. Résoudre des problèmes suppose que l'élève s'approprie des méthodes et maîtrise certains outils numériques et géométriques. Les textes officiels insistent aussi sur la nécessité pour les élèves de maîtriser le langage mathématique en communiquant sur leurs démarches à l'oral comme à l'écrit.

3.1.5 Dans les années 1990

Les programmes de 1995 du cycle des approfondissements reflètent l'influence des travaux de recherche en didactique comme ceux de Charnay qui insiste sur la construction du sens par l'élève et sur « le choix d'une stratégie d'apprentissage » par l'enseignant. (Charnay, 1988, p.22) Les programmes de 1995 soulignent que « la résolution de problème occupe une place centrale dans l'apprentissage par les élèves des connaissances mathématiques. » (M.E.N., 1995) L'idée est que les notions peuvent être « élaborées par les élèves » comme des outils pertinents pour résoudre des problèmes nouveaux avant que ces notions ne soient « étudiées pour elles-mêmes et réinvesties dans d'autres situations ». Ces programmes insistent sur la nécessité de confronter les élèves à de véritables problèmes de recherche définis comme « un problème pour lequel on ne dispose d'aucune solution déjà éprouvée ». (M.E.N., 1995) Ils estiment que les activités de résolution de problèmes favorisent le développement de compétences méthodologiques qui passent par le tri et l'organisation des données, la formulation de sa démarche et de ses résultats, l'argumentation à propos de la validité d'une solution, l'élaboration de procédures originales et l'élaboration d'un questionnement à partir d'un ensemble de données.

Coppé et Houdement (2002, p.55) soulignent certaines dérives résultant de ces programmes en particulier le fait que la résolution de problème soit considérée comme un objet d'enseignement qui amène à confronter les élèves à des activités purement méthodologiques au cours desquelles ils doivent réfléchir à ce que sont les problèmes et à la manière de les résoudre sans pour autant les résoudre concrètement. Cela se traduit dans les manuels par des activités redondantes du CP au CM2 sur le tri d'informations ce qui réduit la résolution de problèmes à la lecture et au traitement de données.

3.1.6 Dans les années 2000

Les programmes de 2002 insistent sur la place privilégiée à accorder à la résolution de problèmes :

La résolution de problèmes est au centre des activités mathématiques et permet de donner leur signification à toutes les connaissances qui y sont travaillées. (M.E.N., 2002).

Ils soulignent que « le sens des opérations doit être au centre des préoccupations » et créent un nouveau domaine, l' « exploitation de données numériques » qui « recouvre l'ensemble des

problèmes dans lesquels les nombres et le calcul interviennent comme outils pour traiter une situation, c'est-à-dire pour organiser, prévoir, choisir, décider. » (M.E.N., 2002)

Ce qui est intéressant ici c'est l'idée selon laquelle les mathématiques permettent à l'élève d'anticiper une situation. En 2002, les programmes vont dans le sens des recherches menées par Gérard Vergnaud dans la mesure où ils font référence à la mobilisation de connaissances antérieures pour résoudre de nouveaux problèmes ce qui rejoint la notion d'activation d'un schéma mental.

Ainsi Vergnaud considère que :

le savoir se forme à partir de problèmes à résoudre, c'est-à-dire de situations à maîtriser. [...] Les conceptions des élèves sont façonnées par les situations qu'ils rencontrent. (Vergnaud, 1986)

On comprend ainsi la nécessité de confronter les élèves à des situations variées.

Les textes officiels de 2002 font la distinction entre les procédures personnelles élaborées par les élèves et les procédures expertes qui correspondent aux démarches mises en œuvre par un expert confronté au même problème. Les programmes de 2002 sont complétés par des documents d'application et un document d'accompagnement consacré aux problèmes pour chercher. D'après les programmes de 2002, les enjeux de l'enseignement des mathématiques peuvent se résumer ainsi : « les connaissances et les savoir-faire [...] doivent contribuer au développement d'une pensée rationnelle. » (M.E.N., 2002) Le socle commun des connaissances et compétences de 2006 souligne le rôle joué par la résolution de problèmes dans l'acquisition d'une culture mathématique :

la maîtrise des principaux éléments de mathématiques s'acquiert et s'exerce essentiellement par la résolution de problèmes, notamment à partir de situations proches de la réalité. (M.E.N., 2006)

Les compétences visées par la résolution de problèmes pour la fin du cycle 3 se résument ainsi :

1) rechercher, extraire et organiser l'information utile ; 2) réaliser, manipuler, mesurer, calculer, appliquer des consignes ; 3) raisonner, argumenter, pratiquer une démarche expérimentale ; 4) présenter la démarche suivie, les résultats obtenus à l'aide de langages ou d'outils scientifiques et technologiques. (M.E.N., 2006)

Il nous paraît intéressant de relever que la démarche expérimentale doit être mise en œuvre par les élèves ce qui implique de les confronter à des situations dans lesquelles ils sont amenés à formuler des hypothèses qu'ils vont ensuite tester.

Dans les programmes du cycle 2 de 2008, la construction du sens des opérations est toujours mise en avant :

la résolution de problèmes fait l'objet d'un apprentissage progressif qui contribue à construire le sens des opérations. [...] L'acquisition des mécanismes en mathématiques est toujours associée à une intelligence de leur signification. (M.E.N., 2008)

Au cycle 3, le lien entre résolution de problèmes et maîtrise des concepts mathématiques n'est plus aussi marqué qu'avant :

Du CE2 au CM2, dans les quatre domaines du programme, l'élève enrichit ses connaissances, acquiert de nouveaux outils, et continue d'apprendre à résoudre des problèmes. (M.E.N., 2008)

Cette formulation met en avant l'aspect transversal de la résolution de problèmes qui intervient dans les quatre domaines mathématiques à savoir nombres et calculs, géométrie, grandeurs et mesures et organisation et gestion de données. Alors qu'en 2002 la résolution de problèmes était perçue comme un enjeu fondamental qui se traduit par l'encouragement de pratiques innovantes chez les maîtres comme la mise en œuvre de problèmes pour chercher et par l'incitation des élèves à élaborer des procédures de résolution originales, 2008 marque un retour à une conception plus traditionnelle des problèmes comme application d'une connaissance qui permet de trouver la bonne opération et où les aspects méthodologiques sont mis en avant. Or, la résolution de problèmes a plusieurs finalités : développer une posture de recherche, mobiliser des connaissances diverses pour résoudre des tâches complexes, mais aussi et c'est fondamental, participer à la construction du sens de la numération et des opérations arithmétiques. Il est important d'habituer les élèves à prendre des initiatives, à chercher par eux-mêmes, à essayer une solution, à la rejeter pour une autre ou à l'adapter après l'avoir testée d'où l'intérêt de pratiquer les problèmes complexes et les problèmes ouverts.

3.1.7 Les problèmes dans les programmes de 2016

Les programmes de 2016 mettent toujours l'accent sur la résolution de problèmes qu'ils placent « au centre de l'activité mathématique des élèves » dans l'optique de « développer leurs capacités à chercher, raisonner, communiquer ». Les problèmes sont abordés sous différents angles puisqu'ils « permettent d'aborder de nouvelles notions, de consolider des acquisitions, de provoquer des questionnements ». (M.E.N., 2015)

En 2016, les instructions officielles soulignent le caractère transversal des problèmes qui peuvent être :

issus de situations de vie de classe ou de situations rencontrées [dans d'autres domaines], notamment questionner le monde. (MEN, 2015).

Les textes insistent sur le fait que ces problèmes doivent conduire à « des recherches avec tâtonnements » et ne pas se réduire à des situations d'application. Ils invitent à jouer sur le caractère ludique pour donner aux élèves le goût de chercher et au-delà le plaisir de faire des mathématiques. Les programmes de 2016 rappellent l'étroite corrélation entre construction du sens des opérations et résolution de problèmes :

Les quatre opérations (addition, soustraction, multiplication, division) sont étudiées à partir de problèmes qui contribuent à leur donner du sens. (MEN, 2015).

Du point de vue des connaissances travaillées, résoudre des problèmes implique de :

chercher [de] s'engager dans une démarche de résolution de problèmes en observant, en posant des questions, en manipulant, en expérimentant, en émettant des hypothèses. (MEN, 2015).

Nous percevons bien ici le lien avec la démarche d'investigation. Apprendre à chercher se traduit par « tester, essayer plusieurs pistes », ce qui implique de procéder par essais / erreurs. Il s'agit aussi de « modéliser » en utilisant « des outils mathématiques pour résoudre des problèmes concrets » ce qui implique de catégoriser les problèmes, de :

réaliser que certains problèmes relèvent de situations additives, d'autres de situations multiplicatives, de partages ou de groupements. (MEN, 2015).

Il nous paraît intéressant de relever que les programmes de 2016 se réfèrent à la typologie des problèmes de Vergnaud lorsqu'ils font la distinction entre des problèmes qui relèvent de situations additives, multiplicatives, de partages ou de groupements.

Résoudre des problèmes implique également de « représenter » par le biais de différents systèmes de représentations tels que les dessins, les schémas, les arbres de calculs, etc. Résoudre un problème c'est aussi calculer et être capable de valider ou d'invalidier son résultat. Résoudre un problème c'est bien sûr « raisonner » en anticipant le résultat d'une manipulation, d'un calcul, ou d'une mesure et en tenant compte de différents éléments comme les « arguments d'autrui, les résultats d'une expérience pour modifier son jugement ». (M.E.N., 2015). Cela suppose aussi d'argumenter pour expliciter la procédure suivie et justifier son raisonnement donc de « communiquer » en maîtrisant les codes du langage mathématique (représentations, symboles...). Cette dimension communication nous renvoie à l'intérêt d'organiser au sein de la classe une mise en commun pendant laquelle les élèves sont amenés à défendre leur démarche en avançant des arguments mathématiques. Le lien entre activités mathématiques et langage est renforcé car l'élève doit apprendre à communiquer en explicitant sa démarche et à débattre en défendant son raisonnement par des arguments solides.

3.2 Etude comparative de quelques manuels publiés dans les années 2000

Les manuels scolaires constituent un outil pédagogique tant pour l'enseignant que pour l'élève sur lequel il est possible de s'appuyer pour organiser les apprentissages. Nous estimons que l'étude des manuels scolaires selon la typologie des problèmes de Vergnaud et de leur adéquation avec les programmes peut donner des indications pertinentes pour le choix de ces outils.

Ainsi, *La tribu des maths* publié aux éditions Magnard se dit conforme aux programmes de 2008. Ce manuel s'organise le plus souvent de la manière suivante : tout d'abord une phase dite de « recherche » sous forme de bande dessinée ou de dessins, sans énoncé, accompagnés d'une question. (Annexe 8.2 p.58) L'élève s'appuie sur les dessins et ses connaissances mathématiques antérieures afin de trouver la démarche qui lui permettra de répondre. Puis une partie « application » permet à l'élève d'approcher la notion mathématique dont traite la double-page avant de le guider vers une forme plus experte à l'aide d'explications. Généralement s'en suit une série

d'exercices d'application jusqu'à l'encart « Labo Maths » qui fait la spécificité de ce manuel scolaire. (Annexe 8.3 p.59) En effet, la rubrique « Labo Maths » permet de réfléchir seul ou à plusieurs, de débattre, d'expérimenter plusieurs solutions possibles dans le but de résoudre une situation proposée. Il s'agit là de problèmes ouverts qui s'inscrivent donc pleinement dans les attendus des programmes de 2002. Chaque double page est variée avec différents types de problèmes qu'il est possible de classer selon la typologie de Vergnaud. Elle est assez complète et progressive quant au degré de difficulté. Enfin, à plusieurs reprises dans ce manuel se trouvent des pages intitulées « S'entraîner à chercher ». (Annexe 8.4 et 8.5 p.60-61) Elles sont composées de problèmes ouverts sous formes d'énoncés succincts ou de dessins. Il est précisé s'il existe une ou plusieurs solutions mais les élèves demeurent libres d'élaborer leurs procédures de résolution dans le sens où ils ne sont pas influencés par les exercices précédents ou les titres en début de page qui pourraient les induire vers une opération spécifique. En résumé, le manuel *La tribu des maths* propose régulièrement des problèmes complexes et ouverts dans les parties « Labo maths » et « S'entraîner à chercher ». Il s'inscrit pleinement dans le cadre des programmes de 2002 et 2008 et oriente les élèves vers l'acquisition d'une méthodologie de résolution de problèmes efficace par la confrontation à des situations variées.

Notre étude porte sur un second manuel, *Cap Maths* (2011) publié aux éditions Hatier qui a l'intérêt de présenter une « banque de problèmes » placée à la fin du manuel afin d'éviter que l'élève ne se conforme à la notion travaillée dans la double-page pour choisir une démarche de résolution. (Annexe 8.6 p.62) Les problèmes sont ainsi proposés non pas comme une application des notions abordées en classe mais comme de véritables situations de recherche. L'élève est alors amené à apprendre à chercher car plusieurs procédures de résolution sont possibles. Il s'agit donc dans l'ensemble de problèmes pour chercher, mais aussi de problèmes complexes pour certains. Par ailleurs, il semble que les auteurs aient porté une attention particulière au lexique afin d'induire le moins possible une démarche plutôt qu'une autre. Mise à part cette « banque de problème », les titres des doubles pages demeurent très inductifs par rapport aux procédures de résolution possibles. L'un des titres est par exemple, « faire des groupements par 10 et par 100 », les problèmes qui y sont proposés se rapprochent alors de simples exercices d'entraînement. Cette partie du manuel laisse donc assez peu de place aux activités de recherche ce qui se rapproche des attentes des programmes de 2008 qui sont marqués par un retour à une conception plus traditionnelle des problèmes comme activités d'application d'une connaissance qui permet de trouver la bonne opération. Le manuel *Cap Maths* est intéressant pour sa banque de problèmes qui propose des situations riches et variées.

La nouveauté des programmes de 2016 a laissé peu de temps et quasiment aucun recul aux éditeurs pour publier des manuels scolaires comme *Maths tout terrain* (2016) aux éditions Bordas. Dans l'avant-propos, il est souligné que « la résolution de problèmes intervient [...] pour réinvestir les notions et s'assurer de l'appropriation des savoirs par l'élève comme de son autonomie ». (*Maths tout terrain*, 2016, p.2) Ce manuel est celui qui est à disposition dans la classe de CE2 dans laquelle nous menons nos expérimentations. Tout d'abord, à la page 14 intitulée « Résoudre des problèmes additifs et soustractifs », l'objectif affiché est « d'acquérir une méthodologie générale de résolution de problèmes ». (Annexe 8.7 p.63) Le manuel explique comment résoudre un problème dans l'encadré « Je comprends » au début de la double page. Cet encadré donne une méthode pour repérer la/les question(s) et les données utiles en les soulignant selon un code couleur. Les étapes données pour la résolution semblent pertinentes car il s'agit de comprendre l'énoncé, la question demandée, de reformuler le problème ou de se l'approprier à l'aide d'un dessin ou d'un schéma puis de « choisir » une opération, l'effectuer et enfin écrire une phrase réponse. Cette méthodologie est illustrée à l'aide d'un exemple. Les exercices proposés sont ordonnés par niveau de difficulté. La résolution est extrêmement guidée (avec les lettres et les verbes mis en couleur et en gras). Les élèves semblent peu libres dans leur réflexion. Aux pages 14 et 15, les exercices 1 et 3 portent sur la composition de deux états avec recherche du composé. (Annexe 8.8 p.64) L'exercice 2 est une comparaison d'états avec recherche d'un des états. L'exercice 4 est une comparaison de deux états avec recherche de la transformation. L'exercice 5 est une composition de deux états avec recherche d'une partie. L'exercice 6 est une transformation d'un état avec recherche de l'état initial. Enfin l'exercice 7 consiste à inventer un problème à l'aide de deux éléments de l'énoncé et d'une opération posée en ligne. Il s'agit d'un problème relevant d'une composition d'états avec recherche du composé. Bien que ce dernier travail soit très guidé, il permet d'avoir une autre approche du problème en mathématiques intéressante pour étayer la construction du sens des opérations. Ainsi, les exercices du manuel *Maths tout terrain* travaillent effectivement sur les différents sens des opérations en s'appuyant sur des problèmes de composition, de transformation et de comparaison tels qu'ils sont distingués par la typologie de Vergnaud. Néanmoins, l'objectif d'acquérir une méthodologie est-il atteint ? Tout au long de la double page, les élèves sont très guidés ce qui rend l'acquisition d'une méthodologie de résolution de problèmes difficile à évaluer. Peu de place est laissée à la réflexion. Le manuel devrait présenter une progression avec des énoncés moins guidés qui permettraient de constater comment les élèves s'approprient le problème et le résolvent. Comme les problèmes sont à chaque fois accompagnés d'indications sur les procédures de résolution, il n'est pas possible de s'en servir pour évaluer l'acquisition d'une méthodologie de résolution de problèmes. L'objectif réalisable serait plutôt de découvrir une méthodologie générale

de résolution de problèmes. Le manuel *Maths tout terrain* conserve la même structure tout au long des pages. Ainsi, on retrouve toujours le même encadré de compréhension trop guidé à la page 98. (Annexe 8.9 p.65) La procédure de résolution est donnée, l'élève n'a plus qu'à appliquer les différentes étapes proposées. L'objectif est ici différent puisqu'il s'agit de « résoudre des problèmes faisant intervenir des conversions (temps, mesure, longueur). » L'exercice 1 est une comparaison de deux états. Les élèves sont aidés, il leur est notamment rappelé qu'ils doivent convertir les minutes en secondes. Il n'est pas laissé à l'élève la possibilité d'expérimenter quitte à se tromper. La procédure de résolution est donnée et laisse très peu de place à la réflexion ce qui est contraire aux programmes de 2016 qui mettent en avant la démarche d'essais par tâtonnements. Le manuel *Maths Tout Terrain* apparaît donc en demi-teinte. Les types de problèmes semblent variés et il est même proposé aux élèves des activités intéressantes de rédaction d'énoncés. Cependant, que ce soit en début ou en fin d'année, les exercices restent extrêmement guidés. Peut-être aurait-il été plus judicieux de proposer un aide-mémoire en début ou en fin de manuel auquel les élèves pourraient se référer lorsqu'ils rencontrent des difficultés lors de la résolution de problèmes plutôt que de les accompagner ainsi pas à pas de manière systématique et rébarbative tout au long du manuel. Nous estimons que ce parti pris de l'éditeur ne favorise pas le renforcement du sens des opérations et ne donne pas aux élèves le goût de la recherche, ce que préconisent pourtant les instructions officielles de 2016. Les activités de résolution de problèmes proposées ne remplissent pas les conditions pour expérimenter la démarche d'investigation. Ce manuel ne propose quasiment aucun problème pour chercher et les étapes des problèmes complexes sont trop balisées ce qui empêche l'élève de devenir autonome dans la résolution de problèmes.

Il nous a semblé pertinent de comparer le manuel *Maths Tout Terrain* avec celui de *Cap Maths* (2016) dont la collection est placée sous la direction de R.Charnay. Dans la table des matières (Annexe 8.10 p.66), le domaine intitulé « Problèmes, gestion de données, sens des opérations » se subdivise en différentes rubriques telles que « apprendre à chercher », « sens de l'addition et de la soustraction », « sens de la multiplication », etc. Une distinction est faite entre les situations qui mettent en jeu de nouveaux apprentissages, celles qui relèvent d'une révision ou encore d'une consolidation, ce qui est intéressant pour aider l'enseignant à bâtir une progression. Si en 2011, les auteurs de *Cap Maths* avaient judicieusement placé une banque unique de problèmes à la fin du manuel, en 2016, chaque unité du manuel se conclut par une banque de problèmes. Il s'agit pour la plupart de problèmes de recherche pour lesquels plusieurs démarches de résolution sont possibles. L'inconvénient est que les élèves peuvent être tentés de se référer aux notions abordées dans l'unité pour en déduire une démarche de résolution. Par ailleurs, les problèmes proposés dans les rubriques en bleu au fil des pages permettent aux élèves de revoir d'anciennes notions qui ne sont pas

abordées sur la même page. Par exemple, dans l'unité 3 à la page 36 (Annexe 8.11 p.67), les problèmes multiplicatifs côtoient des exercices qui abordent la soustraction en ligne ou en colonnes. Le sommaire détaille les différents types de problèmes qui sont abordés lesquels font référence à la typologie de Vergnaud. Ainsi, l'unité 8 aborde le sens de l'addition et de la soustraction par le biais d'un problème de comparaison d'états. L'unité 2 traite du lien entre questions et données dans un problème. Dans ce cadre, l'exercice 1 page 25 (Annexe 8.12 p.68) est un problème de transformation d'état avec recherche de l'état final qui se focalise sur les données nécessaires à sa résolution. L'exercice 2 implique de créer trois énoncés en fonction des réponses données. Construire des énoncés permet d'aborder d'une autre manière le lien entre les données, la question posée et le traitement des données, ce type d'activité peut contribuer à renforcer le sens des opérations. Le plus du manuel *Cap Maths* est qu'il propose des situations variées, qu'il confronte les élèves à différents types de supports (texte, illustration, tableau, graphique, carte) et qu'il ne leur donne pas de pistes de résolution. Certains problèmes sont proposés en début d'apprentissage car acquérir un nouveau savoir est porteur de sens pour l'élève si ce savoir lui sert d'outil pour répondre à des questions ou pour résoudre de nouveaux problèmes. Par exemple, la situation de disposition rectangulaire proposée à la page 32 (Annexe 8.13 p.69) donne du sens à la multiplication. Les situations de recherche donnent l'occasion aux élèves de s'approprier de nouvelles notions.

4 PROBLEME, PROBLEME POUR CHERCHER ET SENS DES OPERATIONS

4.1 Qu'est-ce qu'un problème ?

Selon Gérard Vergnaud, « Le savoir se forme à partir de problèmes à résoudre, c'est-à-dire de situations à maîtriser ». (Vergnaud, 1989-1990, p.52) Il définit un problème comme :

toute situation dans laquelle il faut découvrir des relations, développer des activités d'exploration, d'hypothèse et de vérification, pour produire une solution. (Vergnaud G., 1989-1990, p.52)

Le chercheur en psychologie cognitive Jean Brun définit quant à lui le problème comme :

une situation initiale avec un but à atteindre, demandant au sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème que dans un rapport sujet/situation, où la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. (Brun J., 1990)

Ainsi, un problème peut être considéré par quelqu'un comme un problème alors qu'il ne le sera pas pour une autre personne, en fonction du degré de développement intellectuel de chacun et des connaissances mobilisables. La résolution de problèmes fait intervenir les connaissances antérieures, la possibilité de récupérer des faits mémorisés mais aussi la capacité de réflexion et la créativité, la gestion des données et des procédures. On ne peut pas résoudre un problème d'emblée, il est nécessaire de chercher. Ainsi, pour l'équipe d'Ermel :

il y a problème dès qu'il y a réellement quelque-chose à chercher, que ce soit au niveau des données ou du traitement et qu'il n'est pas possible de mettre en jeu la mémoire seule. (Ermel, 2005).

Parmi les problèmes, il faut distinguer les problèmes d'application des problèmes de recherche. Dans les problèmes d'application ou d'entraînement, l'élève peut identifier le modèle de résolution qu'il connaît puis effectuer le traitement choisi. Dans ce cas, le processus de résolution n'oblige pas l'élève à vérifier ses résultats ou sa méthode. Ce type de situation n'incite pas à valider sa production. En revanche, lorsque l'élève est confronté à un véritable problème de recherche, il ne dispose pas d'un modèle de résolution qui lui a été enseigné, ce qui implique qu'il doit apprendre à gérer en même temps plusieurs tâches : élaborer une procédure de résolution (faire des hypothèses, des essais,...) et comparer ses résultats au but à atteindre pour contrôler la démarche suivie. L'élève doit donc s'engager en même temps dans des tâches de résolution et des tâches de contrôle. Lorsque l'élève confronte les résultats produits aux buts visés, il doit réajuster sa démarche, voire si besoin remettre en cause la méthode de résolution qu'il a choisie pour orienter ses recherches dans une autre direction.

D'après les chercheurs en didactique du groupe Ermel (2005), « faire des mathématiques c'est élaborer et s'approprier des outils qui permettent de résoudre des problèmes. » Apprendre en mathématiques c'est donc confronter ses connaissances à des problèmes dont la résolution résiste à ces connaissances. C'est ainsi que les élèves vont prendre conscience de l'insuffisance de leurs connaissances et de la nécessité de les adapter ou d'en acquérir de nouvelles. Ce travail est intéressant à mener par l'élève en confrontation avec ses pairs.

Roland Charnay distingue six grands types de problèmes selon les objectifs d'apprentissage qui sont poursuivis. Il parle de « situations-problèmes » (Charnay, 1992-1993, p.78) lorsque l'objectif est de construire des connaissances nouvelles. « Les problèmes de réinvestissement » permettent de réinvestir des connaissances déjà étudiées et d'en vérifier le degré d'acquisition. Charnay évoque les « problèmes de transfert » qui sont destinés à étendre le « champ d'utilisation d'une notion déjà étudiée ». Lorsque les élèves sont amenés à « utiliser conjointement plusieurs catégories de connaissances », on parle de « problèmes d'intégration ou de synthèse ». Grâce aux « problèmes d'évaluation », l'enseignant peut dresser un bilan de la maîtrise des connaissances par ses élèves. Enfin, Charnay évoque les « problèmes ouverts » qui sont « destinés à mettre l'élève en situation de recherche et donc de développer des compétences plus méthodologiques. » L'auteur fait cependant remarquer que cette typologie des problèmes comporte des limites dans la mesure où un même énoncé de problème peut relever d'un type de problème ou d'un autre selon le moment où ce problème est proposé et selon les connaissances qui sont mobilisables par les élèves.

Il s'avère qu'en classe les activités de résolution de problèmes poursuivent en effet des objectifs divers : permettre la construction et l'appropriation de nouvelles connaissances, réinvestir des acquis

et en contrôler la maîtrise, développer les capacités à chercher. Or, pour de nombreux élèves, résoudre un problème se réduit à faire un calcul avec les nombres de l'énoncé, ou à appliquer ce qui vient d'être étudié en classe, puis, une fois le résultat produit, attendre que le maître valide ou invalide la démarche suivie plutôt que de chercher par soi-même à vérifier la plausibilité du résultat. Il faut donc que l'enseignant crée les conditions nécessaires à la mise en place d'un nouveau type de contrat didactique dans lequel l'élève est plus actif et s'engage dans de véritables activités de recherches.

C'est en ce sens que la résolution de problèmes est l'activité mathématique par excellence. Le travail du mathématicien consiste à résoudre des problèmes qui n'ont pas encore de solution, cela passe par la formulation de conjectures, d'hypothèses, et par l'élaboration de méthodes de démonstration. Ce travail peut aboutir à la construction de nouvelles notions ou déboucher sur de nouveaux problèmes. Il est donc important que les élèves comprennent que faire des mathématiques c'est avant tout chercher des solutions à des problèmes. Les élèves doivent donc apprendre à chercher.

4.2 Qu'est-ce qu'un problème ouvert / un problème pour chercher ?

Selon Roland Charnay, les problèmes ouverts ou problèmes pour chercher sont :

des problèmes destinés à mettre en route, avec les élèves, une démarche scientifique : faire des essais, conjecturer, tester, prouver. (Charnay R., 1992-1993, p.79)

Dans le même esprit, les documents d'accompagnement sur les problèmes pour chercher (2002) soulignent que dans les activités de résolution de problèmes, les élèves :

doivent être mis en situation de prendre en charge les différentes tâches associées à la résolution d'un problème : faire des hypothèses et les tester ; élaborer une démarche pertinente afin de produire une solution personnelle [...] ; vérifier par eux-mêmes les résultats obtenus ; formuler une réponse dans les termes du problème ; expliquer leurs méthodes, les mettre en débat, argumenter. (MEN, 2002)

On retrouve donc dans un problème pour chercher toutes les étapes de la démarche d'investigation puisque les élèves sont amenés à s'approprier la situation qui pose problème au cours d'une phase de compréhension qui passe par la reformulation. Ils partent ensuite d'un questionnement, d'une observation puis s'appuient sur des essais donc des expérimentations qui vont les amener à formuler des conjectures, avant d'échanger autour de leurs propositions de résolution.

Charnay décrit les principales caractéristiques d'un problème pour chercher telles qu'elles ont été définies par l'IREM de Lyon. Il s'agit d'un problème qui s'appuie sur un énoncé court qui « n'induit ni la méthode ni la solution », cela implique que l'énoncé ne comporte « pas de questions intermédiaires du type montrer que ». (Charnay, 1992-1993, p.77) L'élève ne peut pas résoudre le problème en appliquant des notions qui ont fait l'objet de la dernière leçon. L'énoncé du problème est suffisamment familier de l'élève pour qu'il puisse « prendre facilement possession de la situation

et s'engager dans des essais ». (Charnay, 1992-1993, p.77) Il peut s'agir d'un énoncé qui se présente sous une forme non écrite par exemple par le biais d'un dessin ou d'une présentation orale ou encore d'une situation mimée, ce qui permet de dépasser l'obstacle de la compréhension de l'écrit.

Ainsi, comme le soulignent les documents d'accompagnement (2002), la difficulté du problème pour chercher ne repose pas sur la compréhension de la situation mais plutôt sur les compétences à mobiliser pour répondre à la question posée. Un problème ouvert est une sorte de défi que l'élève doit relever. Présenter le problème comme un défi est facteur de motivation pour les élèves, cela favorise leur entrée dans la phase de recherche. L'élève est confronté à un problème qui lui demande de chercher, de tâtonner pour trouver une procédure de résolution. L'enfant peut être amené à raisonner par essais-erreurs ce qui rapproche bien le problème pour chercher de la démarche d'investigation.

Du point de vue étymologique, la démarche d'investigation est l'action de suivre à la trace, de rechercher attentivement. Si l'on se réfère aux programmes de 2002, la démarche d'investigation implique de pratiquer des démarches scientifiques qui passent par le questionnement, l'observation, l'expérimentation, la description, le raisonnement qui dégage des relations de cause à effet, la synthèse. Daniel Perrin présente les différentes phases de la démarche expérimentale en mathématiques à savoir l'expérience, l'observation de l'expérience, la formulation de conjectures, la tentative de preuve, la contre-expérience qui peut produire éventuellement des contre-exemples, la formulation de nouvelles conjectures et enfin une nouvelle tentative de preuve. (Perrin D., 2007, p.10) Or, lorsqu'il est confronté à un problème pour chercher, l'élève émet des hypothèses, il les teste en faisant des essais successifs, il élabore ensuite une solution originale qu'il doit soumettre en argumentant à la validation de ses pairs lors de la phase de mise en commun. Démarche d'investigation et problème pour chercher sont donc très liés.

Roland Charnay insiste sur le caractère particulier du problème ouvert qui a pour objectif d'apprendre aux élèves à chercher et à acquérir des méthodes de recherche qui passent par « faire et gérer des essais, faire des hypothèses, imaginer des solutions, éprouver leur validité, argumenter. » (Charnay, 1992-1993, p.79) En somme, la pratique des problèmes ouverts est ce qui rapproche le plus l'élève du travail du mathématicien puisque l'élève est aux prises avec des problèmes qu'il n'a pas appris à résoudre ce qui le pousse à mobiliser sa créativité pour élaborer une solution originale en s'appuyant sur les connaissances dont il dispose. L'intérêt des problèmes pour chercher selon les auteurs des documents d'accompagnement (2002) est qu'ils « développe[nt] la capacité de l'élève à faire face à des situations inédites ». Etre confronté à ce type de problème favorise également chez l'élève une prise de « conscience de la puissance de ses connaissances ». (MEN, 2002). L'élève est

amené à comprendre que ses connaissances même modestes lui permettent de résoudre des problèmes qui lui paraissaient difficiles au premier abord.

D'après Roland Charnay, le problème ouvert permet à l'élève d'acquérir une méthodologie de résolution de problèmes qui s'appuie sur des essais qu'il faut organiser, une solution originale dont l'élève doit rechercher la validité et enfin sur la communication autour de sa procédure qui est confrontée à celle des autres lors d'une phase de mise en commun. Selon lui, comme les énoncés de problèmes ouverts admettent plusieurs démarches de résolution, pratiquer les problèmes ouverts valorise « les différences entre élèves » dont les diverses solutions sont débattues lors de la mise en commun. (Charnay, 1992-1993, p.81)

Enfin, la pratique des problèmes pour chercher installe un type de contrat didactique différent au sein de la classe dans lequel l'enseignant n'est plus le seul détenteur du savoir et dans lequel les élèves sont encouragés à prendre des initiatives et à endosser la responsabilité de la validation des solutions. Guy Brousseau définit le contrat didactique en ces termes :

l'ensemble des comportements spécifiques du maître qui sont attendus de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus du maître. (Brousseau G., 1986)

Il souligne que c'est ce contrat didactique qui se noue la plupart du temps de manière implicite entre le maître et l'élève qui détermine :

ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre. » (Brousseau G., 1986)

Traditionnellement, lors des activités mathématiques, un type de contrat didactique implicite se noue entre l'enseignant et ses élèves suivant lequel c'est l'enseignant qui est responsable de la cohérence de l'énoncé de problème qu'il propose, le problème a une réponse unique qui est obtenue grâce à l'utilisation de toutes les données du problème et la solution nécessite de réinvestir des connaissances qui ont déjà été enseignées aux élèves. Or, lors d'un problème pour chercher, les fonctions qui incombent à l'enseignant et à l'élève changent dans la mesure où l'élève est davantage acteur ce qui lui confère la responsabilité notamment de la validation de la réponse. Lorsque l'enseignant met en place des problèmes pour chercher dans sa classe, il doit veiller à ce que Guy Brousseau appelle « le milieu pour la validation » (Brousseau, 1986) c'est-à-dire que le maître doit réunir les conditions qui donnent la possibilité aux élèves de vérifier par eux-mêmes si leur procédure est correcte. Lors de la phase de mise en commun, les échanges entre élèves ont pour objectif d'établir ensemble la validité des solutions proposées. Les élèves débattent pour confronter leurs avis et s'accorder au fur et à mesure en échangeant des arguments scientifiques. La pratique des problèmes ouverts favorise donc le développement de la capacité à argumenter.

Les documents d'accompagnement (2002) mettent en avant le caractère civique de la pratique des problèmes pour chercher dans la mesure où ils se pratiquent le plus souvent en groupe et

favorisent donc la coopération et l'entraide entre les élèves. Ainsi, le groupe peut s'appuyer sur les erreurs des uns pour les dépasser et avancer car certaines conceptions erronées peuvent nourrir la réflexion de tout le groupe. De plus, les phases de mise en commun développent les interactions au sein de la classe et permettent d'apprendre l'écoute, la prise en compte des arguments des autres et le respect des différences.

4.3 Dispositif de mise en œuvre des problèmes ouverts dans une classe

Comme les problèmes ouverts sont des problèmes qui opposent une certaine résistance, ils se prêtent davantage à une mise en œuvre en petits groupes. Il n'empêche que la première phase d'appropriation de la situation se fait plutôt de manière individuelle afin que les élèves réfléchissent d'abord au problème pendant quelques minutes tous seuls avant de faire leurs recherches en groupe. En principe, l'énoncé d'un problème pour chercher est rédigé de telle manière que son appropriation par les élèves soit facile car l'énoncé est court et la situation décrite leur est familière. La place de l'enseignant lors de la mise en œuvre des problèmes pour chercher s'apparente à celle d'un observateur neutre dans le sens où il doit éviter de valider des procédures lors de la phase de travail en groupe. Il ne doit pas apporter d'aide à la résolution. L'enseignant est là pour motiver les élèves, pour les encourager et pour aider les élèves à comprendre l'énoncé. Pendant la phase de travail en groupe, l'enseignant circule dans les rangs pour repérer les renseignements (procédures originales, erronées...) qui lui seront utiles pour organiser ensuite la phase de mise en commun.

Cette phase de mise en commun est très importante car il s'agit pour les élèves d'échanger et de débattre autour des différentes procédures de résolution présentées par les différents groupes. Cela suppose que les élèves soient capables de résumer leur démarche en présentant aux autres élèves, sous la forme d'une affiche par exemple, les différentes étapes du raisonnement qu'ils ont élaboré dans leur groupe ainsi que la solution à laquelle ils ont abouti. Les documents d'accompagnement de 2002 présentent dans le détail le dispositif de mise en œuvre d'une séance de problèmes pour chercher en classe. Ils précisent que, lors de la mise en commun, un rapporteur est désigné dans chaque groupe pour dresser le bilan des recherches de son groupe de travail et présenter leur méthode de résolution. Le rôle de l'enseignant consiste alors à réguler les échanges au sein de la classe en favorisant les interactions entre élèves, en les amenant à réagir de manière argumentée par rapport aux démarches qui leur sont présentées. La responsabilité de la validation des procédures de résolution est confiée au groupe classe. Une phase de synthèse intervient en fin de séance. Les documents d'accompagnement précisent qu'il s'agit :

de valoriser les qualités observées, de dénoncer les défauts, d'ancrer les comportements essentiels et les procédures intéressantes qui pourront être réinvesties. (MEN, 2002, p.6)

La synthèse a donc pour objectif de faire le point sur les différentes procédures mises au jour pendant la mise en commun et de garder une trace des démarches les mieux adaptées à la situation. Elle met également en exergue des méthodes et des attitudes de recherche que les élèves pourront réinvestir ultérieurement. Il est d'ailleurs préconisé dans ces mêmes textes officiels de proposer en prolongement une séance au cours de laquelle des problèmes du même type seront proposés aux élèves en différenciant les données en fonction du degré de maîtrise des élèves afin de donner aux élèves l'occasion de remobiliser le même type de procédures.

4.4 Le rôle de la résolution de problèmes dans la construction des connaissances

Un enfant peut très bien connaître les résultats d'une table de multiplication sans que cela garantisse qu'il pourra reconnaître les situations dans lesquelles ces résultats peuvent être utiles. Ainsi, ces connaissances restent vides de sens tant qu'elles n'ont pas endossé le statut d'outil pour résoudre des problèmes ou qu'elles ne sont pas reliées à d'autres connaissances. Gérard Vergnaud affirme que :

le savoir se forme à partir de problèmes à résoudre, c'est-à-dire de situations à maîtriser. [...] Les conceptions des élèves sont façonnées par les situations qu'ils ont rencontrées. (Vergnaud, 1991)

Confronter les élèves à de véritables problèmes de recherche donne du sens aux notions mathématiques. C'est pourquoi Charnay souligne que l'enseignement des mathématiques est porteur de sens lorsque les notions mathématiques sont présentées comme des « outils pour résoudre des problèmes. » (Charnay, 1988) Il affirme également que :

L'élève doit non seulement être capable de redire ou de refaire, mais aussi de réinvestir dans des situations nouvelles, d'adapter, de transférer ses connaissances pour résoudre des problèmes nouveaux. (Charnay, 1988, p.22)

L'activité mathématique consiste à anticiper sur l'action concrète, c'est-à-dire à construire mentalement une solution qui va dispenser de la manipulation des objets réels, soit parce que les objets ne sont pas disponibles, soit parce qu'ils sont trop nombreux, soit parce que leur utilisation amènerait de trop nombreuses manipulations chronophages. L'activité s'enracine dans des manipulations réelles antérieures qui peuvent être évoquées mentalement ou verbalement par le sujet mais elle se distingue des manipulations elles-mêmes. D'après les chercheurs d'Ermel,

la solution mathématique (l'action mathématique) s'oppose à la solution pratique (l'action sur le réel) car l'action sur le réel amène à faire un constat de la réponse alors que l'action mathématique [...] se situe au niveau d'une anticipation de cette réponse. (Ermel, 2005)

Cela ne veut bien entendu pas dire que les manipulations n'ont pas leur place dans les apprentissages, bien au contraire ! Souvent, les manipulations permettent à l'élève de s'appropriier un problème, de comprendre la nature de la question à laquelle il doit répondre, de se faire une image de la situation voire d'envisager une procédure de résolution possible. Par exemple, pour travailler sur une situation où la transformation s'opère sur un état initial qui est inconnu, certains enfants ont

besoin de voir la boîte dans laquelle le maître explique qu'il a mis des cubes auxquels il ajoute en les montrant 5 cubes en annonçant qu'il y en a maintenant 20. La présence de la boîte au début de la phase de recherche permet aux élèves de s'appropriier la situation, même s'il leur est interdit d'ouvrir cette boîte. La manipulation c'est-à-dire l'action sur les objets réels mis en scène par la situation proposée, permet aux élèves de construire des représentations qui pourront être réalisées (par un dessin) ou seulement évoquées mentalement lors de situations analogues et permettront de passer à des actions au sens mathématique comme la construction de schémas, de raisonnements, de calculs... Il est important que la manipulation ne soit qu'un des moyens de valider une solution et que l'élève apprenne à se servir de procédures de calcul et de raisonnement pour valider sa démarche. Les activités mathématiques doivent avoir un sens pour l'élève, il est primordial qu'il comprenne la finalité de tel ou tel calcul. L'élève ne doit pas perdre de vue le but à atteindre, la question à laquelle il doit répondre sinon il va avoir tendance à mettre en œuvre n'importe quel calcul qui utilise toutes les données du problème.

4.5 Qu'entend-on par construire le sens des opérations ?

Construire le sens d'une opération signifie apprendre aux élèves à utiliser à bon escient cette opération pour résoudre un problème. Il serait plus juste de parler des différents sens d'une opération dans la mesure où une même opération peut être sollicitée pour résoudre une grande variété de problèmes comme l'attestent les travaux de Gérard Vergnaud. On ne peut pas restreindre un problème à l'opération qui permet de le résoudre. Il faut tenir compte du caractère sémantique de l'énoncé car comme le souligne Vergnaud :

des problèmes impliquant la même opération arithmétique mais appartenant à des catégories sémantiques différentes sont de niveau de difficulté différent. (Vergnaud, 1989-1990)

Ainsi, la soustraction permet de résoudre différents types de problèmes. Au début, pour de nombreux élèves, la soustraction est l'opération qui permet de trouver ce qui reste à la suite d'une diminution. Ainsi, soustraire, c'est enlever. Si ce sens de la soustraction est compris très tôt, il peut aussi devenir un obstacle pour accéder aux autres sens de la soustraction. La soustraction sert en effet à trouver un complément, calculer un écart ou une différence, calculer une distance entre deux repères, calculer une valeur initiale, calculer la valeur d'une augmentation ou d'une diminution.

Selon Vergnaud, un des objectifs prioritaires de la recherche en didactique est de classer les situations-problèmes qui donnent à un concept sa signification et sa fonction. Or, il estime que « les conceptions des élèves sont façonnées par les situations qu'ils ont rencontrées » (Vergnaud, 1989-1990, p 52) d'où la nécessité de confronter les élèves à des problèmes variés. Ainsi, un jeune enfant a comme première conception de la soustraction la diminution de la quantité initiale, il va donc falloir lui proposer des situations qui lui permettront de comprendre la soustraction comme

recherche d'un complément, comme l'inverse d'une augmentation, comme une différence entre états successifs, comme une relation de comparaison, comme une différence entre transformations... Si les élèves ne rencontrent pas de problèmes suffisamment variés pour découvrir tous les sens de la soustraction, ils sont en difficulté pour étendre la signification de la soustraction à ces différents cas car ils s'enferment dans une conception primitive de la soustraction comme « diminution ». Les élèves doivent comprendre qu'une même opération arithmétique peut résoudre des problèmes dont les relations entre les données sont très différentes.

Gérard Vergnaud est parti du principe qu'un problème possède une structure mathématique qui correspond aux relations qui lient la question posée et les données de l'énoncé. Les énoncés qui relèvent d'une même structure mathématique appartiennent à un même type de problèmes. Un type de problèmes se divise en plusieurs catégories en fonction de la nature de l'inconnue. Un problème additif est un problème ternaire car il repose sur trois nombres dont l'un est inconnu. Il peut être résolu à l'aide d'une addition ou d'une soustraction. Les travaux de Vergnaud (1991) ont mis en évidence une typologie (Annexe 8.1 p.57) basée sur quatre types de problèmes additifs différents :

- **La composition de deux états** : cela correspond à deux entités que l'on met ensemble afin d'en former une troisième. Les problèmes qui relèvent de la composition d'états peuvent porter sur la recherche du composé ou sur la recherche d'une partie.
- **La transformation d'états** : cela correspond à une entité à laquelle on va apporter une modification afin d'aboutir à l'entité transformée. Les problèmes de ce type peuvent porter sur la recherche de l'état final, de l'état initial ou de la transformation en elle-même.
- **La comparaison d'états** : deux entités distinctes sont rapprochées dans le but de les comparer. Le plus souvent ces problèmes correspondent aux expressions « de plus que » ou « de moins que ». Ils peuvent porter sur la recherche de l'un des états ou sur la comparaison.
- **La composition de transformations** : une entité subit une transformation pour atteindre un état intermédiaire avant de subir une nouvelle transformation pour arriver à l'état final. Les problèmes de ce type sont parmi les plus difficiles à résoudre et à identifier. Ils peuvent porter sur la recherche de la transformation composée autrement dit sur l'ensemble de la transformation subie par l'entité. Ils peuvent également traiter de la recherche de l'une des composantes c'est-à-dire la transformation opérée entre l'état initial et l'état intermédiaire ou entre l'état intermédiaire et l'état final.

Pour l'enseignant, connaître les typologies de problèmes donne une clef de lecture des énoncés. C'est un outil qui permet de proposer des situations les plus diversifiées possibles. Lorsque les élèves sont confrontés à des situations variées, ils construisent progressivement des catégories de problèmes pour lesquels ils s'approprient des procédures de résolution. C'est ce que Jean Julo

appelle des « schémas de problèmes ». (Julo, 2002, p.35) Au fil des situations qu'il rencontre, l'élève élabore « une bibliothèque de cas » (Julo, 2002, p.36) qui regroupe des problèmes similaires.

Traditionnellement, l'addition et la soustraction étaient étudiées séparément. Or, les travaux de Vergnaud ont montré que les problèmes additifs et les problèmes soustractifs appartiennent à la même famille et que les difficultés rencontrées par les élèves dans les problèmes additifs sont liées aux relations à établir entre les données plutôt qu'à l'opération impliquée dans la résolution de ces problèmes. D'après l'équipe de chercheurs d'Ermel, si l'on a comme objectif principal la maîtrise de la résolution de problèmes additifs, il est plus pertinent d'enseigner simultanément l'addition et la soustraction. (Ermel, 2005) Le groupe Ermel a fait le choix didactique d'introduire progressivement les différents types de problèmes de la typologie de Vergnaud en fonction de leur degré de difficulté avec comme objectif d'enrichir progressivement le catalogue de situations rencontrées par les élèves.

Pour notre expérimentation, nous avons choisi de nous concentrer sur les problèmes additifs en essayant de déterminer quels sont les types de problèmes qui posent le plus de difficultés à nos élèves. Nous avons constaté que le sens des opérations est encore fragile chez beaucoup de nos élèves c'est pourquoi nous avons axé nos recherches sur les types de problèmes permettant de renforcer le sens des opérations.

A la lumière de nos lectures, nous sommes parties de l'hypothèse selon laquelle la diversité des situations rencontrées par le biais de problèmes complexes et de problèmes pour chercher contribue au renforcement du sens des opérations. Il nous a été possible de mener plusieurs séances dans le temps imparti mais il nous paraît évident que cette expérimentation n'est que l'amorce d'un travail plus vaste autour des problèmes complexes et des problèmes pour chercher qui doit être poursuivi jusqu'à la fin de l'année de CE2 et approfondi encore tout au long du cycle 3.

Notre expérimentation s'articule en quatre temps :

- Une évaluation diagnostique basée sur des problèmes standards et des problèmes complexes qui s'inspirent de la typologie de Vergnaud. Le but de cette évaluation diagnostique est de mettre en évidence les difficultés des élèves.
- Une séance menée autour d'une situation problème qui porte sur les problèmes de transformations car ceux-ci ont posé des difficultés aux élèves.
- Une séance de problème pour chercher mise en œuvre selon les principes de la démarche d'investigation.
- Une évaluation formative afin de mesurer les progrès réalisés dans la mobilisation de procédures de résolution grâce à la diversité des situations rencontrées.

5 EXPERIMENTATION

Nous avons décidé de mener notre expérimentation sur les problèmes qui visent à renforcer le sens des opérations dans la classe de CE2 d'Evelyne Buffeteau qui compte 23 élèves. Elle est située à Lunel-Viel dans une école élémentaire de 11 classes qui est sortie de REP il y a trois ans. La classe se caractérise par une certaine mixité sociale dans le sens où certains élèves sont issus de milieux populaires, la plupart appartiennent à la classe moyenne et quelques élèves sont issus de milieux aisés.

Comme Evelyne exerce à mi-temps, elle n'est pas en charge de tous les domaines des mathématiques, la partie numération et calcul est assurée par sa collègue titulaire de la classe. Les situations proposées en résolution de problèmes ne sont donc pas en lien direct avec les notions abordées au même moment par les élèves en mathématiques. Il s'agit donc davantage de situations de réinvestissement et de recherche que de situations d'application.

Dans notre expérimentation, nous avons mis l'accent sur le renforcement du sens des opérations car nous estimons, comme les concepteurs des programmes de 2002, que « le sens des opérations doit être au cœur des préoccupations » (MEN, 2002) lorsque l'on met en œuvre des activités de résolution de problèmes.

5.1 Evaluation diagnostique

Notre plan d'étude consiste à mener tout d'abord une évaluation diagnostique afin de dresser un état des lieux des compétences des élèves du point de vue de la compréhension de l'énoncé, du tri de données et de la résolution de problèmes en général. Les énoncés que nous avons proposés aux élèves lors de l'évaluation diagnostique ont été classés suivant la typologie de Vergnaud. Notre travail d'expérimentation va se baser sur un aller-retour entre analyse a priori et analyse a posteriori des activités de résolution de problèmes auxquelles les élèves ont été confrontés. L'analyse a priori consiste à présenter les objectifs des situations proposées, les difficultés pressenties, les procédures attendues. Les réussites et les difficultés rencontrées par les élèves, les procédures originales sont mises en avant par l'analyse a posteriori. Pour exploiter les résultats, nous avons élaboré une **grille d'analyse** (Annexe 8.15 p.71) sous la forme d'un tableau qui confronte les différents types de problèmes et le choix de l'inconnue avec le traitement des données et la démarche suivie. Pour chaque travail d'élève, nous avons noté la présence d'un schéma, si le schéma est adapté ou non, quel est le type de procédure suivie, si le choix des opérations est approprié, si l'opération est bien effectuée, si la phrase réponse est adaptée, si le résultat est correct. Nous avons gardé le même modèle de grille d'analyse pour exploiter les travaux réalisés par les élèves lors des autres phases de notre expérimentation.

5.1.1 Première phase de l'évaluation diagnostique

La première phase de notre expérimentation consiste à proposer aux élèves des problèmes additifs standards qui font appel à la soustraction et à l'addition dans leurs différents sens. Le support soumis aux élèves se présentait sous la forme de fiches d'exercices comportant suffisamment d'espace pour faire des recherches afin que nous puissions garder une trace des essais successifs réalisés par les élèves. Lors de cette évaluation diagnostique, le travail s'est fait en individuel après une lecture des énoncés en collectif et une reformulation par deux élèves pour s'assurer d'une bonne compréhension de l'énoncé.

Lors de la première phase de notre évaluation diagnostique, trois problèmes additifs standards ont été proposés aux élèves. **Le premier problème** relevait d'une composition de deux états avec recherche d'une partie. Nous avons préféré choisir un énoncé qui implique la recherche d'une partie plutôt que de nous contenter de la recherche d'un composé qui nous paraissait trop basique pour des élèves de CE2. L'énoncé était le suivant :

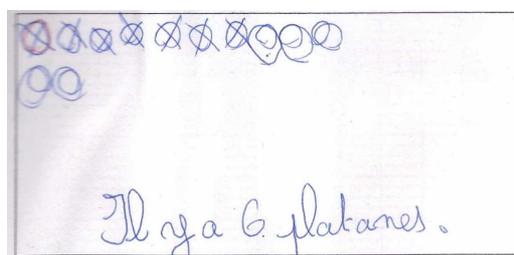
Dans notre cour, il y a 12 arbres. 7 arbres sont des chênes, les autres sont des platanes. Combien y a-t-il de platanes ?

L'énoncé ne comportait pas de difficulté particulière et s'inscrivait dans un contexte familier puisque la situation faisait référence à la cour de l'école. Les nombres choisis laissent la porte ouverte à des procédures de comptage du fait de leur petite taille. Nous avons estimé que ce problème ne devrait pas poser de difficulté à nos élèves. Nous avons pressenti que plusieurs élèves s'appuieraient sur des procédures de type addition à trou plutôt que de passer par la procédure experte de la soustraction car ils ne sont pas encore assez aguerris pour reconnaître une situation qui requiert le recours à la soustraction dans la recherche d'une partie.

Après analyse des résultats des élèves, il ressort que ce problème de composition de deux états avec recherche d'une partie a été globalement très bien réussi par les élèves puisque 87% des élèves ont trouvé un résultat correct. (Voir les résultats en annexe 8.15 p.71). 6 élèves ont réalisé un schéma, d'ailleurs trois élèves se sont servis du schéma pour y lire le résultat sans passer par une quelconque opération.

Cette procédure de lecture du résultat sur le schéma a été source d'erreur pour deux élèves, c'est le cas de Lola qui a dessiné le bon nombre d'arbres au total (12) mais a fait une erreur lors du dénombrement des platanes pour trouver finalement 6 platanes au lieu des 5 matérialisés sur son schéma.

Production de Lola.



Seul un élève n'a pas perçu derrière l'énoncé le sens de recherche d'une différence et a effectué une addition. La procédure experte impliquait d'avoir recours à la soustraction, ce qu'ont fait 48% des élèves. 17% des élèves sont passés par un « pour aller à » et 17% ont utilisé l'addition à trou. L'utilisation de l'addition à trou et du « pour aller à » est classique chez des élèves de CE2 car ils n'ont pas encore intégré les différents sens de la soustraction.

Le second problème relevait de la transformation d'un état et impliquait la recherche de l'état initial. Nous savons que cette situation dans laquelle l'état initial n'est pas connu peut parfois être déstabilisante pour certains élèves. Néanmoins c'est un problème qui reste très accessible pour des élèves de CE2 car ils peuvent le rapprocher d'une situation de diminution ce qui est le sens premier de la soustraction. Les nombres utilisés permettent le recours aux schémas et aux procédures de comptage.

Voici l'énoncé proposé aux élèves :

J'ajoute 5 bonbons dans la boîte. Maintenant j'en ai 23.

Combien la boîte contenait-elle de bonbons au départ ?

Ce problème de transformation d'un état avec recherche de l'état initial a été très bien réussi par nos élèves puisque 91% ont trouvé un résultat correct. (Annexe 8.15 p.70) La plupart des élèves ont eu recours à la procédure experte de la soustraction (87%) ce qui implique qu'ils ont perçu la recherche d'une différence. Un élève a lu le résultat sur son schéma, un autre a utilisé une addition à trou. L'un des deux élèves qui s'est trompé dans ce problème a eu recours à l'addition et est arrivé à un résultat de 28 bonbons. Séléna est parvenue à un résultat erroné du fait de sa méconnaissance de la technique de la soustraction posée, on s'en rend compte en observant son travail.

$$\begin{array}{r} 23 \\ - 5 \\ \hline 28 \end{array}$$

Il y avait 22 bonbons au départ

Production de Séléna

Le troisième problème proposé dans cette première phase d'évaluation diagnostique relevait d'une comparaison de deux états avec recherche de la comparaison. Nous avons choisi ce problème car, contrairement à beaucoup de problèmes relevant de cette catégorie, il ne comporte pas de mots inducteurs de type « de plus » ou « de moins » qui risqueraient de trop guider ou au contraire d'induire les élèves en erreur. La proximité des deux états n'exclut pas le recours au surcomptage et permet d'utiliser un schéma représentant la file numérique. Ce problème additif standard nous a semblé ne pas poser de difficulté particulière aux élèves à condition que ceux-ci soient familiers du

jeu de l'oie ce qui n'est plus aussi évident qu'avant car les familles actuelles ne jouent plus autant aux jeux de société traditionnels.

Voici l'énoncé proposé aux élèves :

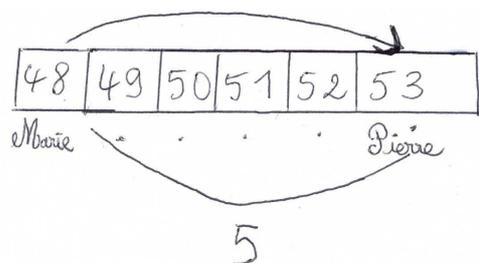
Pierre et Marie jouent au jeu de l'oie. Marie dit à Pierre : « Mon pion se trouve sur la case 53 et le tien sur la case 48. » Combien de cases séparent les deux pions ?

Lors de la lecture de l'énoncé en collectif, il s'est avéré que plusieurs élèves de la classe ne connaissaient pas le jeu de l'oie, ce léger handicap lié à une situation non familière a été levé par une description des principes du jeu par les élèves le connaissant.

Ce problème a également été très bien réussi par les élèves puisque 91% sont parvenus à un résultat correct. Cependant, seuls 17% des élèves ont eu recours à la procédure experte de la soustraction. La démarche la plus utilisée a été un « pour aller à » qui a été utilisée par 65% des élèves. Cela montre que nos élèves n'ont pas encore été confrontés à suffisamment de situations variées leur permettant de reconnaître les différents sens de la soustraction. Maud a eu recours à une file numérique.

*Production de
Maud.*

Les cases séparent de 5.



Les nombres de l'énoncé étant assez proches, deux élèves se sont tournés vers des procédures de comptage : le surcomptage comme en témoigne le travail de Joan ci-dessous et le compte à rebours pour un autre élève. Quelques élèves ont éprouvé, comme Maud et Joan, des difficultés à formuler leur phrase réponse.

<p><i>Le pion séparent 5 cases</i></p>	<p><i>48 → 53</i> <i>49 - 50 - 51 - 52 - 53</i></p>
--	---

Production de Joan

Les deux élèves ayant fait des erreurs dans ce problème de comparaison d'états ont effectué une addition et n'ont donc pas perçu le sens de recherche d'un écart.

5.1.2 Deuxième phase de l'évaluation diagnostique

Pendant notre seconde phase d'évaluation diagnostique, nous avons confronté les élèves à des problèmes complexes. **Le premier problème** portait sur une composition d'états impliquant la recherche du composé. L'énoncé comportait des données inutiles, l'objectif était de voir si les

élèves étaient capables de faire le tri pour ne retenir que les données utiles à sa résolution. L'enjeu était une compréhension fine de l'énoncé et en particulier de ce qui était recherché. Nous avons pressenti que la formulation « avec ce qu'elle possède » pouvait induire les élèves en erreur car elle suggérait une étape intermédiaire consistant à calculer le montant de l'argent que possédait Lucie alors que ce n'était pas demandé par la question posée. De plus, ce type de problème renvoie les élèves à un type de problème du même genre qui demande de calculer l'argent restant alors que ce n'est pas le cas ici. Cet énoncé renvoie à la notion de contrat didactique qui se traduit chez les élèves par la conviction qu'il faut utiliser toutes les données d'un problème pour le résoudre. Nous avons anticipé le fait que certains élèves risquaient de ne pas répondre à la question posée en allant plus loin pour rechercher le reste.

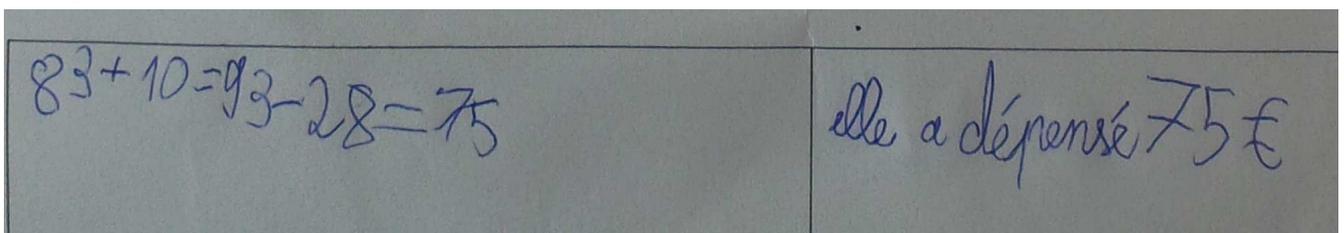
L'énoncé proposé aux élèves était le suivant :

Lucie possède 83€ d'économies. Elle reçoit 10€ pour son anniversaire. Avec ce qu'elle possède, elle décide d'acheter un CD à 15€, un jeu de cartes à 7€ et un magazine à 6€.

Combien Lucie a-t-elle dépensé ?

Comme nous nous y attendions, ce problème a été nettement moins bien réussi que ceux proposés lors de la première phase d'évaluation. (Annexe 8.15 p.71) En effet, seuls 30% des élèves ont obtenu un résultat correct.

Les élèves qui ont bien résolu le problème ont compris que ce qui était recherché était le composé et ont donc eu recours à une addition. Les élèves qui se sont trompés ont quant à eux mal interprété l'énoncé et se sont lancés dans la recherche d'un état final par le biais d'une soustraction supplémentaire après avoir calculé correctement le composé. C'est le cas de Louis dont la démarche est reproduite ci-dessous.

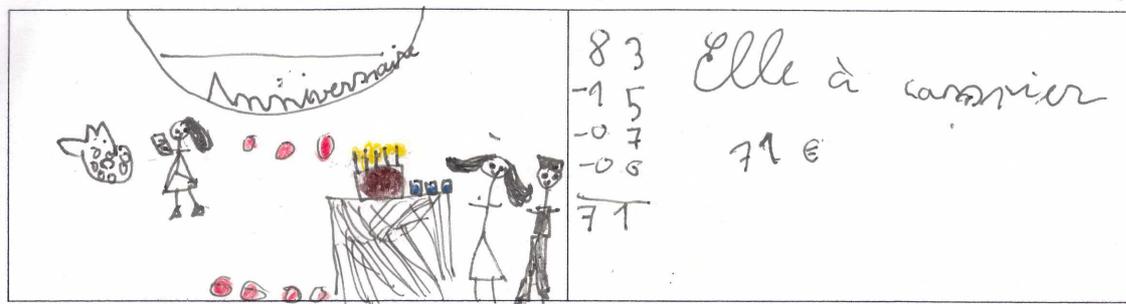


The image shows a student's handwritten work on a piece of paper. On the left side, there is a calculation: $83 + 10 = 93 - 28 = 75$. On the right side, there is a sentence: "elle a dépensé 75 €".

Production de Louis

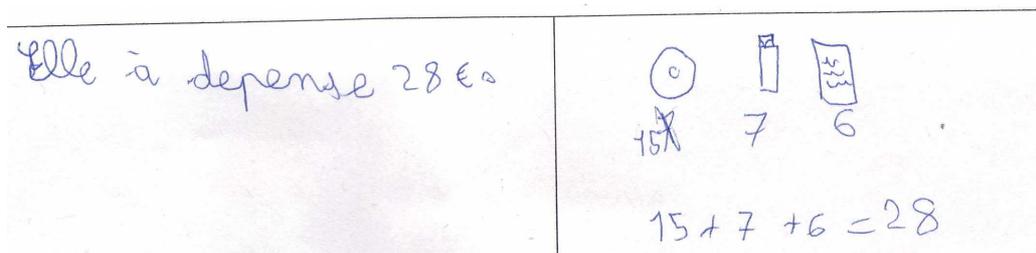
Le nombre conséquent d'élèves ayant mal interprété l'énoncé à savoir 70% nous renvoie à l'idée de contrat didactique. Il est vraisemblable que la volonté d'utiliser toutes les données de l'énoncé pour résoudre le problème ait joué un rôle majeur dans les erreurs commises. La majorité des élèves n'a pas su faire le tri parmi les données inutiles sans doute car ils ont l'habitude que dans les problèmes qu'ils rencontrent toutes les données dont ils disposent leur sont utiles. Deux élèves ont fait un schéma pour se représenter la situation du problème. Nous avons reproduit ici celui de Cassandra qui n'est absolument pas adapté dans la mesure où il s'agit d'une illustration purement

figurative de l'énoncé. Cassandra a eu recours à la soustraction pour calculer le montant de l'argent restant à Lucie une fois ses achats effectués mais elle n'a pas réussi car elle a tenté de calculer plusieurs soustractions en une seule soustraction posée. Elle en conclut à tort que Lucie a « gaspillé » 71 euros.



Production de Cassandra

Le travail de Mathis montre en revanche un schéma bien moins figuratif et plus adapté à la situation. Il a simplement dessiné de manière très sommaire les trois articles achetés par Lucie accompagnés à chaque fois de leur prix. Mathis a ensuite calculé la somme du prix des articles de son schéma.



Production de Mathys

Le second problème intitulé *Le parc des oiseaux* avait pour objectif de travailler sur la recherche d'informations sur des supports divers. Nous avons choisi ce problème car il permettait de s'appuyer sur des supports différents des énoncés verbaux classiques, en l'occurrence un tableau et un plan. (Voir l'énoncé en annexe 8.14 p.70)

La réponse à la première question posée s'obtenait par simple lecture du tableau et n'a pas posé de difficulté aux élèves ainsi que nous nous y attendions.

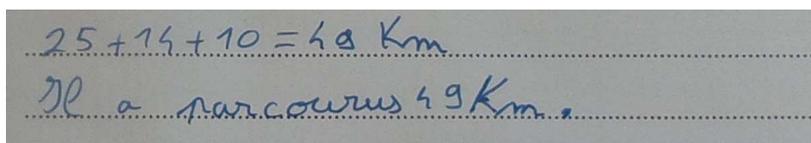
La seconde question portait sur une comparaison d'états avec recherche de la comparaison. Les nombres proposés étant inférieurs à 10, cela n'excluait pas le recours à des procédures de surcomptage et nous avons estimé a priori que cette question ne poserait pas problème à nos élèves. La seule difficulté était de bien lire le tableau pour travailler avec les bonnes données.

La troisième question relevait d'une composition d'état avec recherche du composé ce qui fait appel à une addition comme procédure experte. Le sens de l'addition étant bien maîtrisé par des élèves de CE2, nous avons pensé que cette question serait globalement bien résolue par les élèves. Une mauvaise lecture de l'itinéraire à emprunter sur le plan pouvait entraîner des erreurs car il y avait

deux possibilités pour rejoindre la ville de Villars-les-Dombes mais l'énoncé précisait expressément d'emprunter l'itinéraire le plus court sans passer par Saint-Trivier-sur-Moignans. Tout l'enjeu de ce problème résidait donc dans une bonne lecture des supports proposés à savoir un tableau et un plan.

La question 2 portant sur une comparaison d'états avec recherche de la comparaison a été très bien réussie par les élèves puisque 91% d'entre eux ont présenté un résultat correct. 91% d'entre eux ont eu recours à la procédure du « pour aller à » et non pas à la soustraction qui était l'opération experte, utilisée par deux élèves seulement. Le recours massif à cette procédure personnelle montre que la soustraction n'est pas encore bien maîtrisée par les élèves en particulier dans son sens de recherche d'un écart.

La troisième question portant sur la composition d'états avec recherche d'un composé a été globalement bien réussie même si elle a provoqué davantage d'erreurs que la question précédente. (Annexe 8.15 p.71) 78% des élèves sont parvenus à un résultat correct. Les erreurs recensées ne sont pas liées à l'emploi d'une opération inappropriée dans la mesure où tous les élèves ont choisi de faire une addition mais plutôt à une mauvaise interprétation des données figurant sur le plan. Ainsi, les élèves qui se sont trompés sont passés par l'itinéraire le plus long au lieu d'emprunter celui qui était donné dans l'énoncé. Leurs erreurs résultent donc d'une mauvaise lecture de l'énoncé et du plan plutôt que de l'incapacité à rechercher un composé. Ainsi, Eléna a calculé le parcours pour aller à Saint-Trivier-sur-Moignans alors que l'énoncé précisait justement de ne pas passer par cette ville. Il s'agit vraisemblablement d'une erreur liée à une mauvaise compréhension de l'énoncé. Elle trouve donc 49 km au lieu de 39 km.



25 + 14 + 10 = 49 km
Il a parcouru 49 km.

Production d'Eléna

5.1.3 Troisième phase de l'évaluation diagnostique

La dernière partie de notre évaluation diagnostique s'articule autour de deux problèmes complexes à plusieurs étapes. **Le premier problème** est un problème multiplicatif que nous avons choisi afin de varier les types d'opérations que devaient mobiliser les élèves.

L'énoncé proposé aux élèves était le suivant :

Tu vas dans une animalerie et tu achètes un petit chien qui coûte 55€. Tu achètes aussi 5 paquets de 10 kg de nourriture pour chien à 3€.

Combien as-tu acheté de kg de nourriture pour chien ? Combien vas-tu payer ?

Dans la première partie, l'opération experte à mobiliser était la multiplication. La seconde question relevait d'un problème de composition d'états avec recherche du composé. L'énoncé

présentait des données relevant de deux grandeurs : des masses et des prix en euros. Nous avons pressenti que cela risquait d'entraîner des confusions chez quelques élèves qui ont tendance à se lancer dans des opérations sans savoir réellement ce qu'ils cherchent. L'un des intérêts de ce problème est de montrer l'importance des unités. La difficulté réside dans le fait que plusieurs grandeurs différentes interviennent en même temps. Les nombres en jeu n'étant pas très grands, la possibilité d'avoir recours à l'addition réitérée au lieu de la multiplication restait ouverte.

Ce problème multiplicatif a été globalement bien réussi par les élèves puisque 18 élèves soit 78% ont obtenu un résultat correct. (Annexe 8.15 p.71) Ces élèves ont tous eu recours à la multiplication et aucun ne s'est servi de l'addition réitérée contrairement à nos attentes, ce qui montre qu'ils ont bien saisi le sens de cette opération.

Parmi les élèves qui se sont trompés, quatre d'entre eux ont confondu les masses et les prix. C'est le cas d'Eléna dont le travail est reproduit ci-dessous. Dans un premier temps, Eléna a bien calculé d'une part la masse de croquettes achetée et d'autre part le montant dépensé pour l'achat du chien et des croquettes. Cependant, elle a ensuite fait la somme de la masse des croquettes et du prix du chien et des croquettes. Cette erreur montre une méconnaissance du fait qu'un composé ne peut réunir deux unités différentes puisque cette élève a fait la somme de deux types de grandeurs : des masses et des prix. Aucun élève n'a eu recours à un schéma dans ce problème, ce qui est dommage car un schéma aurait peut-être été un moyen d'éviter la tentation de faire la somme d'une mesure qui correspond à la grandeur prix (70 €) et d'une mesure qui correspond à la masse (50 kg). Ces erreurs viennent du fait que les élèves travaillent sur les valeurs et non sur les grandeurs.

Production d'Eléna

$3 \times 5 = 15$
 $15 + 55 = 70$
 $5 \times 10 = 50$
 $70 + 50 = 120$

J'ai acheté 50 kg de nourriture.
 Je vais payer 120€.

Le second problème était un problème du champ additif avec plusieurs étapes intermédiaires. Il relève de la transformation d'un état impliquant la recherche de l'état final. En fait, c'est un problème au cours duquel un état subit plusieurs transformations. Dans cet énoncé, les transformations sont à la fois négatives et positives.

L'énoncé se présentait ainsi :

Jules note tous ses résultats au jeu de billes :

« Lundi, j'avais 163 billes à la maison et j'en ai gagné 8.

Mardi, j'en ai perdu 2.

Mercredi, j'ai gagné 18 billes le matin mais j'en ai perdu 13 l'après-midi.

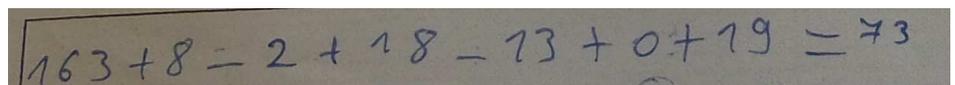
Jeudi, je n'ai pas joué.

Vendredi, j'ai gagné 19 billes. »

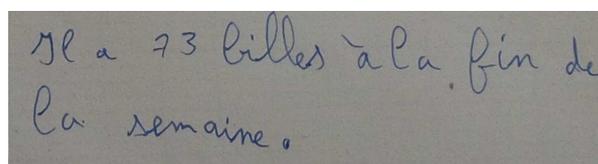
Combien Jules a-t-il de billes à la fin de la semaine ?

L'intérêt de ce problème réside dans le fait que plusieurs procédures sont possibles. Les élèves peuvent choisir de calculer les états intermédiaires au fur et à mesure jusqu'à obtenir l'état final ou de calculer séparément les gains et les pertes, ou encore de calculer le composé des différentes transformations et de l'appliquer ensuite à l'état initial pour trouver l'état final. Ce problème est donc assez ouvert. Nous avons choisi un énoncé où l'on recherche l'état final car il nous semblait plus accessible à des élèves de CE2 que la recherche de l'état initial ou de la transformation. Par ailleurs, la présence de mots inducteurs tels que « gagner » ou « perdre » qui impliquent à bon escient le recours tantôt à une addition ou tantôt à une soustraction nous a semblé être une aide. La situation présentée est familière des élèves puisqu'il s'agit du jeu de billes qui est courant dans les cours de récréation, il est donc facile pour eux de s'approprier la situation. Cependant, nous avons pressenti que la succession des différentes transformations risquait d'entraîner des confusions chez les élèves qui ne se montreraient pas suffisamment rigoureux dans leur démarche de résolution. En outre, la succession d'opérations nous a paru multiplier le risque d'erreurs liées aux calculs, erreurs qui sont lourdes de conséquences puisque les opérations se font en cascade. De plus, les nombres en jeu sont relativement grands, ce qui exclut le recours à des procédures de comptage ou à la manipulation directe.

Ainsi que nous l'avions anticipé, ce problème a posé des difficultés à nos élèves. C'est un des problèmes qui a été le moins bien réussi parmi les huit problèmes composant l'évaluation diagnostique. Seuls 52 % des élèves sont parvenus à un résultat correct. Pourtant, 91% des élèves ont eu recours aux opérations expertes pour résoudre ce problème à savoir l'addition et la soustraction. Les erreurs ont été provoquées comme nous nous y attendions par l'enchaînement des opérations. Beaucoup d'élèves ont manqué de rigueur dans le traitement des opérations en effectuant une seule opération en ligne mêlant additions et soustractions en suivant l'ordre chronologique de l'énoncé. Il s'en est suivi des erreurs de calcul comme dans le travail d'Eléna que nous présentons ci-dessous.


$$163 + 8 = 2 + 18 - 73 + 0 + 79 = 73$$

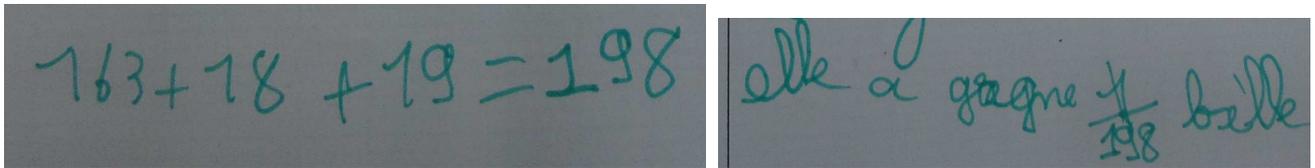
Production d'Eléna



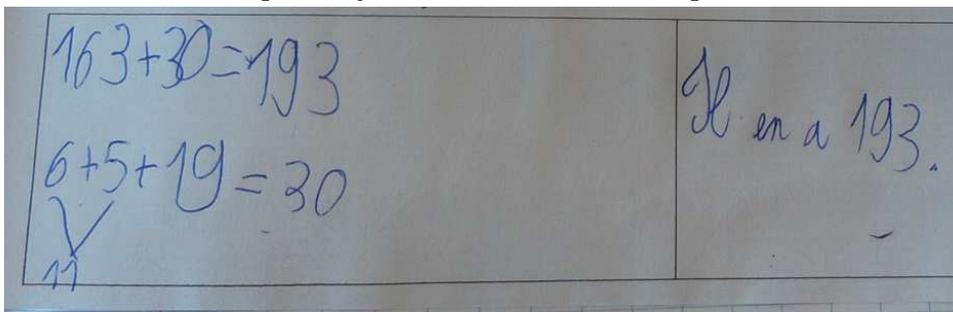
Il a 73 billes à la fin de la semaine.

Quelques élèves comme Jérémie ont uniquement tenu compte dans leur démarche des billes gagnées ce qui implique vraisemblablement une mauvaise compréhension de la question posée.

Production de Jérémie



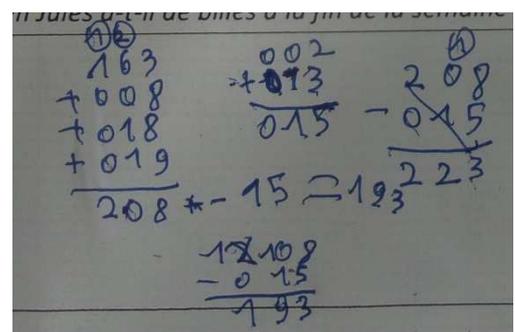
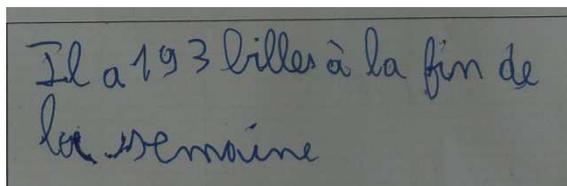
Parmi les élèves qui ont bien résolu le problème, Louis a procédé en simplifiant les transformations successives, ainsi il a couplé le gain de 8 billes du lundi avec la perte de 2 billes du mardi pour aboutir à un gain de 6 billes. Il a également obtenu un gain de 5 billes pour le mercredi en retranchant aux 18 billes gagnées du matin les 13 billes perdues de l'après-midi. Il en a déduit un gain total de 30 billes qu'il a ajouté aux 163 billes du départ.



Production de Louis

De son côté, Paul a mis en place une procédure différente : il a regroupé tous les gains qu'il a ajoutés aux 163 billes du départ. Il a calculé le total des billes perdues (15) puis il a retranché les pertes cumulées pour obtenir lui aussi les 193 billes de la situation finale.

Production de Paul



Du fait de la possibilité de mettre en place des procédures de résolution diverses et de la nécessité de définir une stratégie réfléchie pour bien gérer les opérations successives, ce problème de billes se rapproche d'un problème ouvert.

Comme la moitié de la classe a rencontré des difficultés à résoudre ce problème de transformation d'un état avec recherche de l'état final, nous avons décidé de proposer aux élèves une situation-problème du même type afin de confronter nos élèves au même type de situation mais dans un contexte différent.

5.2 Une approche par le biais d'une situation-problème

5.2.1 Dispositif mis en place

Après analyse des résultats de l'évaluation diagnostique, nous constatons que l'un des problèmes qui a causé le plus de difficultés à nos élèves est un problème de transformation dans lequel un état initial subit plusieurs transformations et où la recherche porte sur l'état final. La moitié des élèves a éprouvé des difficultés à gérer les transformations successives car celles-ci étaient à la fois positives et négatives. Nous avons donc choisi de proposer aux élèves une situation-problème qui permette de retravailler sur ce type de problèmes.

La situation-problème qui sert de point de départ s'intitule « La bataille ». Voici l'énoncé proposé aux élèves :

Louis joue à la bataille avec un jeu de 52 cartes. Il a fait plusieurs parties et a noté ses résultats. « Au départ, j'avais 26 cartes. Lors de la première partie, j'ai gagné 7 cartes. J'ai rejoué une seconde partie pendant laquelle j'ai perdu 12 cartes. Puis j'ai gagné 9 cartes lors de la troisième partie. Ensuite, j'ai gagné encore 6 cartes lors de la quatrième partie. Enfin, lors de la dernière partie, j'ai perdu 13 cartes. »

Quel est le nombre de cartes de Louis à la fin du jeu ?

Le problème posé est un problème de transformation dans lequel un état initial subit plusieurs transformations et où la recherche porte sur l'état final. La résolution de ce problème admet plusieurs démarches : le passage par des états intermédiaires en suivant le fil chronologique des transformations ; le calcul séparé des transformations positives et des transformations négatives ; la recherche du composé des transformations que l'on applique ensuite à l'état initial pour obtenir l'état final. Les élèves doivent faire preuve de rigueur pour éviter d'oublier une transformation ou de changer une transformation négative en transformation positive sachant que la quantité de transformations à gérer est conséquente pour des élèves de CE2. Les élèves travailleront en groupes de quatre élèves et disposeront d'un jeu de 52 cartes par groupe comme outil de manipulation.

Nous avons décidé d'imposer aux élèves de **faire un schéma** pour résoudre ce problème. Les travaux d'Alain Bronner et Sylvie Laureys montrent que si :

les schémas ne sont ni nécessaires, ni indispensables à une bonne réussite de la résolution de problème, [ils] constituent une aide efficace à la représentation et à la résolution de problèmes standards difficiles ou de problèmes complexes [...]. (Bronner, Laureys, 1999, p. 165)

Nous pensons, comme Alain Bronner et Sylvie Laureys (1999), que le schéma peut aider les élèves à se faire une « représentation mentale » de l'énoncé, à éclaircir le statut de chaque donnée (Est-ce

un état, une transformation ou un écart ?) pour renvoyer de manière implicite à un certain type de problème additif (composition, transformation, comparaison).

5.2.2 Déroulement de la séance

La situation-problème se déroule en plusieurs phases

- **Présentation de la situation de départ**

Le premier temps consiste à présenter la situation-problème qui est proposée aux élèves sous la forme d'un énoncé écrit. L'énoncé est lu en collectif puis reformulé par plusieurs élèves pour s'assurer de sa bonne compréhension. Les élèves disposent d'objets concrets à manipuler pour qu'ils puissent se représenter la situation et identifier le problème à résoudre. Les élèves doivent d'abord s'approprier la situation pour comprendre ce qu'ils cherchent.

- **Phase de recherche individuelle**

Le temps de recherche individuel est assez court, il n'excède pas cinq minutes mais il est important pour que chaque élève s'approprie l'énoncé et entre dans une démarche de réflexion en s'appuyant sur ses connaissances préalables.

- **Phase de recherche en groupe**

Des groupes de quatre élèves sont constitués. Les élèves doivent chercher en groupe une démarche de résolution du problème. Ils doivent élaborer une trace écrite sous la forme d'une affiche pour communiquer au reste de la classe le résultat de leurs recherches. Pendant cette phase de recherche, l'enseignant va circuler dans les différents groupes pour recueillir des informations qui lui seront utiles pour organiser la phase de mise en commun : procédures originales ou erronées, schémas intéressants ou inadaptés...Le temps de recherche doit être suffisamment long pour être productif mais ne doit pas être trop long pour garder les élèves en activité. Une durée de 15 minutes nous paraît adaptée.

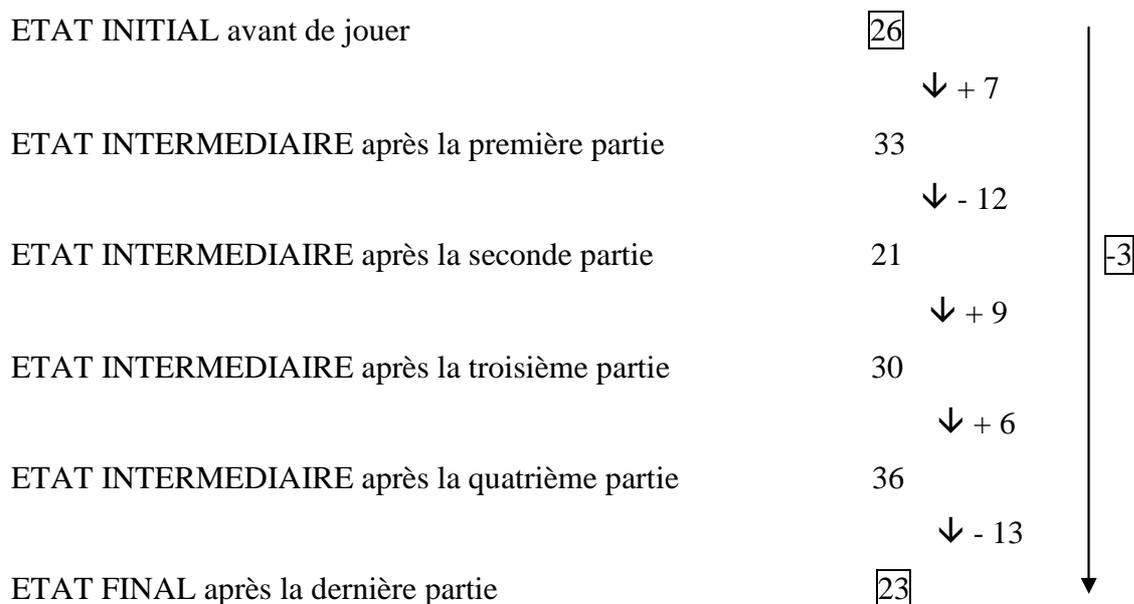
- **Phase de mise en commun**

Lors de la mise en commun, chaque groupe présente au reste de la classe sa démarche de résolution. L'objectif est de favoriser les échanges et d'apprendre à communiquer sur son travail en justifiant ses choix. Le rôle de l'enseignant est d'organiser la mise en commun en s'appuyant sur les observations qu'il a réalisées lors de la phase de recherche en rapprochant les procédures identiques, en confrontant celles qui sont différentes et en analysant les procédures erronées. La responsabilité de la validation des procédures présentées incombe aux élèves. Lors de la mise en commun, nous demandons aux élèves si le schéma les a aidés ou non dans la résolution du problème. L'enseignant affiche au tableau des schémas qu'il a sélectionnés. Les élèves expliquent leur schéma et le reste de la classe débat pour savoir si le schéma est utile ou non. Les schémas qui

sont trop détaillés, trop longs à réaliser, trop figuratifs ou qui comprennent des informations inutiles à la résolution du problème sont écartés.

- **Phase de synthèse**

Suite à la mise en commun, un temps de synthèse permet de comparer les différents types de procédures utilisés en distinguant celles qui permettent de résoudre le problème de la manière la plus efficace c'est-à-dire la moins coûteuse en temps et en manipulations. L'enseignant amène les élèves à déterminer quelle est la procédure qui permet de faire le moins d'erreurs. Il peut s'agir de la démarche qui implique le moins d'opérations car cela diminue le risque d'erreurs liées aux calculs. Une affiche est alors réalisée en collectif comme référence pour résoudre un certain type de problème. Cette affiche s'appuie sur un schéma qui permet de donner un réel statut d'opérateur à la transformation et peut donc aider à distinguer état et transformation. Le schéma a pour objectif de présenter les deux procédures de résolution en montrant leur réciprocity c'est pourquoi il présente les démarches en parallèle.



Les élèves réfléchissent ensuite aux critères de définition d'un schéma pour construire ensemble une trace écrite qui fixe dans le cahier de leçon comment faire un schéma efficace. Nous avons conclu qu'un schéma est un dessin simple et rapide à faire qui explique l'énoncé et qui aide à résoudre le problème, il doit donc comporter uniquement les données utiles pour trouver la solution. Nous avons ensuite construit un schéma standard qui pourra servir d'outil d'aide à la résolution des problèmes de transformation.

- **Phase d'entraînement**

Une autre séance est dédiée à l'entraînement en proposant aux élèves un problème d'application qui relève de la même catégorie que celui de la situation-problème. L'objectif est d'amener les élèves à mobiliser leurs nouvelles compétences dans un autre contexte. Il s'agit de faire rencontrer à l'élève

des situations variées qui vont lui permettre de se construire des représentations qui vont enrichir son réseau de problèmes pour élaborer des « schémas de problèmes » au sens de Julo. (2002, p.35) L'élève construit un réseau de problèmes quand il regroupe les problèmes qui ont une structure proche pour les associer à des démarches de résolution possibles. L'élève est alors capable de reconnaître le même type de situation dans un autre contexte ce qui l'aide à mobiliser une démarche de résolution.

Le problème d'application que nous avons choisi est un problème de transformation dans lequel un état initial subit plusieurs transformations et où la recherche porte sur l'état final mais qui se situe dans un contexte différent.

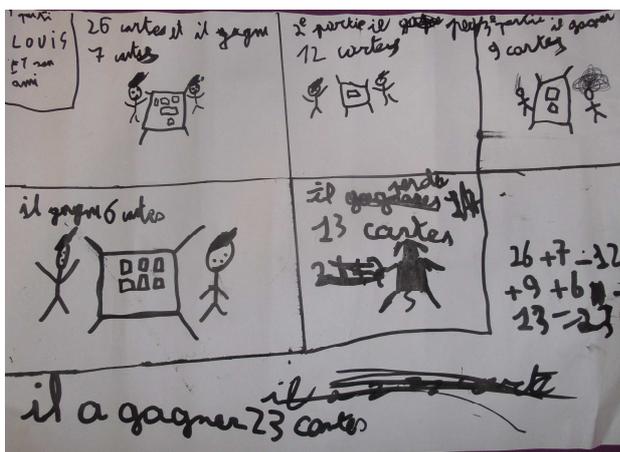
5.2.3 Analyse des résultats de la situation problème

5.2.3.1 La bataille

Il ressort de l'analyse des résultats des élèves que ce problème de transformation avec recherche de l'état final a été très bien réussi puisque 91 % des élèves ont obtenu un résultat correct. (Voir la grille d'analyse des résultats de la situation problème en annexe 8.16 p.72).

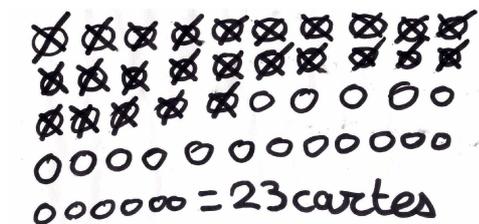
Il avait été expressément demandé aux élèves de produire un schéma c'est pourquoi le taux de schéma s'élève à 78 % contre 8 % lors de l'évaluation diagnostique. Cinq élèves n'ont pas fait de schéma malgré la consigne de l'enseignant, trois d'entre eux estimaient ne pas en avoir besoin et les deux autres ne savaient pas quoi faire comme schéma. Seuls 6 élèves ont d'ailleurs estimé que le schéma leur avait été utile pour résoudre le problème. Il est important de noter que seuls 61 % se sont révélés être des schémas adaptés c'est pourquoi il nous a paru indispensable de faire le point avec l'ensemble de la classe lors de la phase de synthèse sur la manière de faire un schéma.

Ainsi, lors de la phase de recherche, l'un des groupes a produit une sorte de bande dessinée qui retrace la situation avec des personnages qui jouent aux cartes autour d'une table. Ce dessin les a peut-être aidés à se représenter la situation proposée mais il n'apporte pas de plus-value au raisonnement mathématique.



Production du groupe de Harûn.

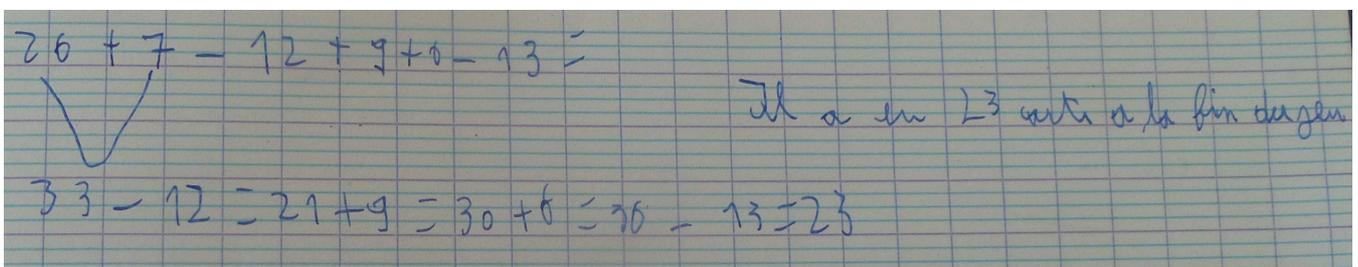
En ce qui concerne le type de procédure utilisée, 17 % des élèves se sont servis du schéma pour y lire le résultat sans passer par une quelconque opération. C'est le cas du groupe de Sofia qui a d'ailleurs trouvé la bonne réponse à savoir 23 cartes. Leur démarche consiste à dessiner toutes les cartes gagnées puis à barrer les cartes perdues. Le nombre restreint d'élèves ayant lu la réponse sur le schéma s'explique par la valeur des données en présence qui rend la procédure périlleuse et chronophage.



Production du groupe de Sofia.

Louis a 23 cartes à la fin du jeu

61 % des élèves ont eu recours à une procédure qui s'appuie sur des additions et des soustractions successives pour calculer le résultat des transformations au fil de l'énoncé. C'est le cas du groupe de Joan qui a calculé le résultat des transformations de manière chronologique et a trouvé la réponse attendue de 23 cartes à la fin du jeu. Joan a minimisé le risque d'erreurs de calcul en s'appuyant sur des étapes intermédiaires.



Production du groupe de Joan.

Seuls 22 % des élèves ont calculé séparément les transformations positives et les transformations négatives avant de les appliquer à la situation initiale pour obtenir la situation finale, ce qui n'est pas étonnant car c'est une procédure complexe à imaginer par les élèves. Ainsi, la procédure du groupe de Louis est remarquable. Il a récapitulé de manière chronologique les transformations apportées par les différentes parties. Son schéma présente des représentations chiffrées de la situation proposée par le problème, ce qui témoigne d'un certain degré d'abstraction. Sa démarche repose sur le calcul des transformations en séparant les gains et les pertes. Il a d'abord calculé ce qu'il appelle « les - » c'est-à-dire les cartes perdues. Il a ensuite calculé « les + » c'est-à-dire le nombre de cartes gagnées. A l'état initial, le groupe de Louis a appliqué les gains pour obtenir un

état intermédiaire de 48 cartes. Ensuite, il a appliqué les pertes à l'état intermédiaire pour obtenir l'état final de 23 cartes.

Début	26	$13 + 12 = 25$ (les -)
P1	+7	
P2	-12	(les +) $7 + 9 + 6 = 22$
P3	+9	
P4	+6	$26 + 22 = 48$
P5	-13	$48 - 25 = 23$
Fin	23	Louis a 23 cartes à la fin.

Production du groupe
de Louis

Le groupe de Paul a procédé en appliquant toutes les transformations positives à l'état initial pour atteindre l'état intermédiaire de 48 cartes. Il a ensuite retranché les pertes de 12 puis de 13 cartes pour obtenir l'état final de 23 cartes.

$$\begin{array}{r} \textcircled{2} \\ 26 \\ +07 \\ +09 \\ +06 \\ \hline 48 \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \\ -12 \\ -13 \\ \hline 23 \end{array}$$

Production du groupe de Paul.

Le nombre de cartes est de 23.

5.2.3.2 Le bus

Voici l'énoncé proposé aux élèves :

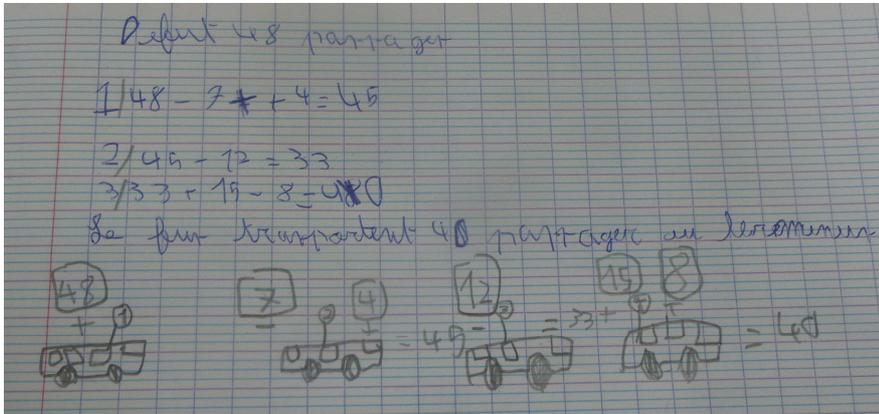
Le bus.

Un bus quitte son premier arrêt avec 48 passagers à son bord. Lorsqu'il arrive au second arrêt, 7 passagers descendent et 4 passagers montent dans le bus. Au troisième arrêt, 12 personnes descendent et aucune ne monte. Lors du quatrième arrêt 15 passagers montent dans le bus et 8 en descendent.

Combien le bus transporte-t-il de passagers lorsqu'il arrive à son terminus ?

Ce problème a été posé pour réinvestir les connaissances acquises dans la situation de la bataille en proposant toujours aux élèves un problème de transformation dans lequel un état initial subit plusieurs transformations et où la recherche porte sur l'état final mais en variant le contexte. On retrouve ici un taux élevé de schémas présents (78 %) ce qui s'explique par la volonté de répondre à la demande de l'enseignant. La réflexion menée sur les schémas lors de la phase de synthèse semble avoir porté ses fruits puisque le taux de schémas adaptés atteint les 78 % contre 61% lors de la précédente situation. (Annexe 8.16 p.72) La question du contrat didactique se pose pourtant lorsque

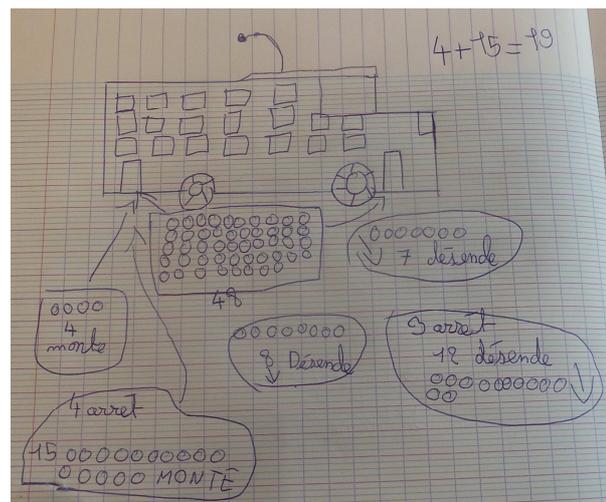
l'on observe certains schémas qui ne sont manifestement réalisés que dans le but de répondre à la commande de l'enseignant dans la mesure où ils n'apportent aucune plus-value au niveau de la résolution du problème. C'est le cas de Rémi qui a manifestement dessiné son schéma après avoir résolu le problème.



Production de Rémi

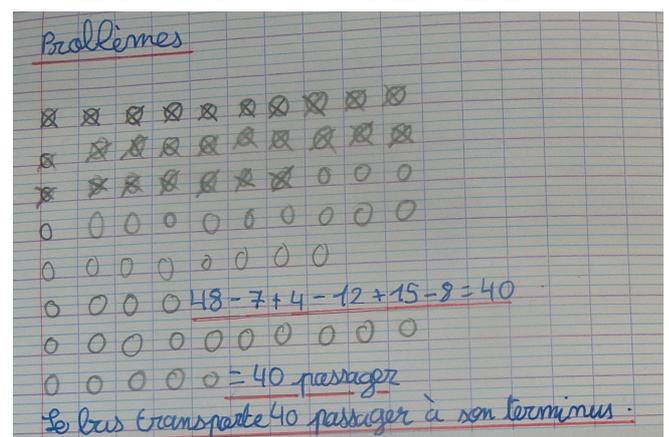
Parmi les 22 % de schémas inadaptés, celui de Lola comporte tellement de données que l'on s'y perd. Ce qui explique qu'elle ait trouvé 19 passagers au lieu de 40.

Production de Lola

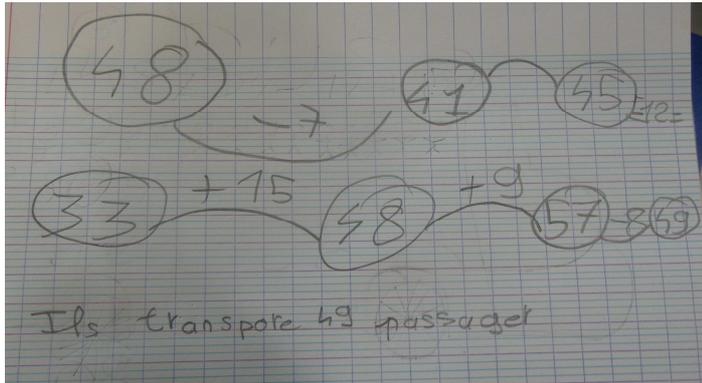


Parmi les 78 % de schémas adaptés, on en distingue deux types. Certains schémas s'appuient sur une transcription graphique de la situation avec des symboles représentant les passagers qui sont barrés au fur et à mesure que les personnes descendent du bus. Ce type de schéma montre ses limites car il est chronophage du fait des 48 symboles à dessiner. C'est le cas du schéma d'Eléna.

Production d'Eléna



D'autres schémas se basent sur une transcription des différentes étapes de la situation en s'appuyant sur des données chiffrées comme l'a fait Camille. Son schéma est opérationnel : elle résout le



problème en suivant son schéma sans effectuer d'autre opération. Elle n'a cependant pas atteint le résultat correct car elle a ajouté 9 passagers qui ne sont pas mentionnés dans l'énoncé.

Production de Camille

Au final, ce problème a été nettement moins bien réussi par les élèves que le précédent puisque seuls 57 % des élèves ont obtenu un résultat correct contre 91 % pour la bataille. (Annexe 8.16 p.72) Pourtant, ce problème présente les mêmes caractéristiques que le précédent avec un état initial qui subit cinq transformations successives.

Une première analyse des résultats montre que 17 % des élèves ont lu la réponse sur le schéma soit autant que lors du problème de la bataille. Or, les nombres en présence ne sont pas du même ordre puisque l'état initial s'élève à 48 passagers contre 26 cartes pour la bataille. Il semble que cela ait entraîné davantage d'erreurs puisque sur les 6 élèves ayant utilisé cette démarche un seul est parvenu à un résultat correct. Cela s'explique par le côté périlleux de la procédure dans laquelle le risque de se tromper augmente avec la taille des nombres en jeu puisque plus le nombre de symboles à dessiner est grand, plus le risque d'en oublier est élevé et plus le risque d'erreurs dans le dénombrement augmente.

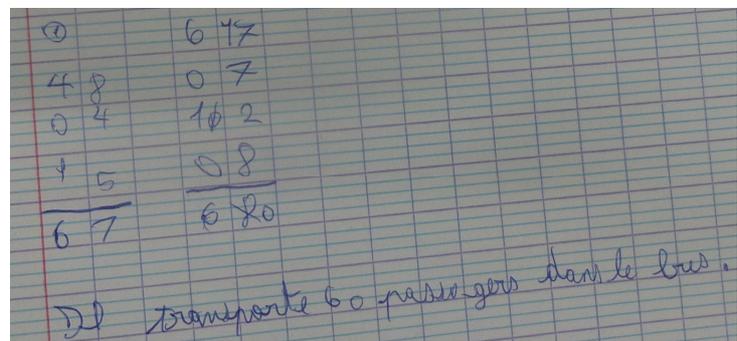
La moindre réussite est aussi liée au changement de modalités de travail : dans la situation de « la bataille », les élèves coopèrent en groupe dans une phase de recherche tandis que dans la situation du bus les élèves résolvent le problème en individuel. Le critère du changement de contexte peut également entrer en ligne de compte : les élèves se représentent mieux certains contextes que d'autres qui leur sont moins familiers c'est pourquoi Jean Julo préconise, comme aide à la résolution de problèmes, « la multiprésentation ». (Julo, 2002, p.45) « La multiprésentation » consiste à proposer l'énoncé d'un problème de manière simultanée avec deux autres énoncés ressemblants, c'est-à-dire présentant la même structure et des données numériques identiques. Julo parle de problèmes « strictement isomorphes ». Par contre, le contexte varie autrement dit la situation évoquée par le problème est différente mais il s'agit du même type de problèmes avec des données identiques.

Si l'on se réfère à notre expérimentation, il semblerait que les allers et venues des passagers d'un bus relèvent d'un contexte moins familier aux élèves que les gains et les pertes d'un jeu de cartes.

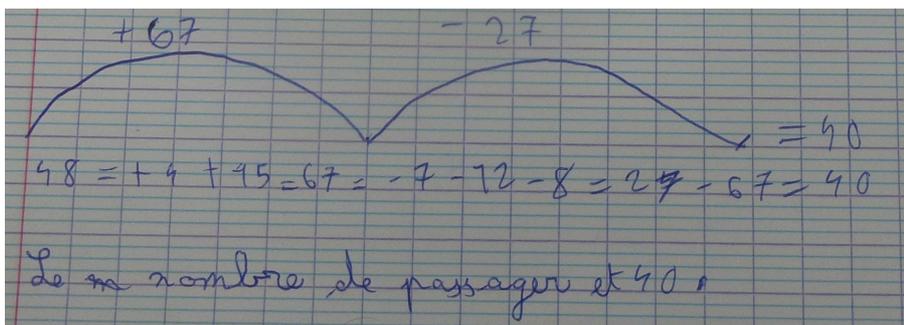
L'analyse des résultats montre que le choix des opérations reste judicieux à hauteur de 74 % contre 91 % pour la bataille mais que les erreurs dans les opérations ont été plus nombreuses puisque 74 % des opérations ont été bien effectuées contre 96 % pour la bataille. Ceci est sans doute lié aux données numériques qui ne sont pas du même ordre et au grand nombre de transformations (cinq) qui se succèdent. Ainsi, certains élèves ont perdu le fil comme Camille qui a ajouté une transformation (+9) qui n'apparaît pas dans l'énoncé. (Voir production de Camille à la page 42)

De son côté, Mylann s'est trompé en essayant de poser en une seule soustraction toutes les transformations négatives.

Production de Mylann



En ce qui concerne les procédures utilisées, on constate que les élèves se sont davantage tournés vers le calcul séparé des transformations positives puis des transformations négatives : cela concerne 48 % des élèves contre 22 % dans le problème de la bataille. Nous attribuons le recours plus fréquent à cette procédure pourtant jugée complexe au fait qu'il s'agit d'une situation d'application et que cette démarche a été présentée lors de la mise en commun de la séance précédente. Ainsi, Mathys a choisi de calculer dans un premier temps le gain de passagers pour obtenir un état intermédiaire de 67 passagers avant de calculer le nombre de passagers qui descendent (27) pour obtenir finalement le résultat correct de 40 passagers au terminus.



Production de Mathys

5.2.4 Bilan de la situation problème

Nous avons choisi de proposer une situation problème qui s'appuie sur un problème de transformation dans lequel un état initial subit plusieurs transformations et où la recherche porte sur l'état final car nous avons constaté que les élèves éprouvaient des difficultés à gérer les transformations successives. Nous avons posé la question de l'intérêt du schéma et conclu avec les élèves que le schéma est utile s'il s'agit d'un dessin simple qui explique l'énoncé et qui aide à trouver la solution et s'il ne comporte que les données utiles pour résoudre le problème. Les élèves ont commencé à comprendre l'intérêt du schéma même si certains restent prisonniers de dessins trop figuratifs qui n'apportent pas de plus-value à la démarche suivie. Le passage par un schéma a aidé plusieurs élèves à gérer les transformations successives de l'état initial en les matérialisant pour ne pas en oublier. Les situations proposées démontrent leur richesse par la grande diversité des procédures mises en œuvre par les élèves qui témoignent d'un renforcement du sens des opérations en lien avec les divers contextes évoqués.

Si l'on dresse un bilan de ce travail, on constate que les élèves ont progressé puisque 91 % ont réussi le problème de « la bataille » contre 52 % sur un problème du même type lors de l'évaluation diagnostique. Ces acquis demeurent cependant fragiles puisque le taux de réussite tombe à 57 % pour « le bus » car ils sont tributaires du contexte de la situation qui est moins familier aux élèves, du dispositif de travail et de la nature des données. Il apparaît que les élèves réussissent bien mieux lorsqu'ils travaillent en groupe, c'est pourquoi nous avons décidé de maintenir un dispositif de travail en groupe pour la suite de notre expérimentation qui porte sur un problème pour chercher.

5.3 Mise en œuvre d'une séance de problème pour chercher

5.3.1 Déroulement de la séance

Notre séance de problème pour chercher reprend le même déroulé que la situation problème proposée précédemment et se déroule donc en différentes phases :

- La présentation de la situation de départ
- Une phase de recherche individuelle
- Une phase de recherche en groupe
- Une phase de mise en commun
- Une phase de synthèse

Le problème est d'abord lu en collectif puis reformulé par deux élèves pour vérifier que la situation est bien comprise. Il s'agit d'un problème pour chercher ce qui se traduit par un énoncé court et dont la situation est assez familière pour que les élèves puissent se l'approprier aisément. L'énoncé

ne comporte pas de questions intermédiaires qui pourraient induire une procédure de résolution. En confrontant les élèves à ce type de problème, nous avons pour objectif de leur apprendre à chercher, à entrer dans une démarche d'investigation en faisant des hypothèses qu'ils vont devoir tester en gérant des essais successifs. Leurs essais sont soumis aux critères de validation qu'ils vont définir au sein de chaque groupe.

Voici l'énoncé du problème proposé :

Une question d'âge.

Pablo et Claire ont ensemble 45 ans. Pablo a 17 ans de plus que Claire. Quel est l'âge de chacun ?

Le problème proposé est un problème mixte puisqu'il s'agit à la fois d'un problème de comparaison entre l'âge des deux personnes et d'un problème de réunion puisque l'on sait que les deux personnes ont ensemble 45 ans. Il comporte deux inconnues : l'âge de Pablo et l'âge de Claire. C'est un problème qui peut se résoudre de façon experte par une équation mais qui demande à des élèves de CE2 de trouver une solution originale pour le résoudre, ce qui en fait un problème pour chercher. Il s'agit d'un problème difficile pour nos élèves c'est pourquoi nous avons opté pour un dispositif de travail en groupes de quatre élèves qui leur permet de mutualiser leurs connaissances et d'enrichir leur démarche grâce aux interactions entre pairs. Nous avons donc réparti la classe en 5 groupes de 4 élèves et un groupe de 3 élèves. Les groupes ont été constitués par l'enseignant de manière à ce qu'ils rassemblent des élèves de niveau hétérogène.

Au moment de la mise en commun, l'enseignant incite les élèves à justifier leurs propositions et à développer des arguments en faveur d'une solution ou pour mettre en défaut la proposition d'un autre groupe. Les documents d'accompagnement des programmes de 2002 précisent que dans une situation de problèmes pour chercher les élèves doivent « vérifier par eux-mêmes les résultats obtenus ». (MEN, 2002) Le maître doit créer les conditions qui donnent la possibilité aux élèves de vérifier si leur procédure est correcte. L'enseignant doit donc amener les élèves à dégager les critères de validation qui leur permettront d'évaluer la pertinence de leurs essais. Dans cette situation, il faut d'une part que la somme de l'âge de Claire et de l'âge de Pablo soit égale à 45 ans et d'autre part que la différence d'âge s'élève à 17 ans. Dans cette séance de problème pour chercher, les élèves sont encouragés à prendre des initiatives et à être acteurs de leurs apprentissages dans la mesure où ils valident eux-mêmes les solutions proposées à l'aide des critères qu'ils ont définis. L'enseignant n'est plus perçu comme étant le seul détenteur du savoir. On s'attend à ce que certains élèves élaborent une stratégie de résolution en partant de la moitié de 45 comme ils ont 45 ans à eux deux puis en ajustant pour s'approcher de l'écart de 17 ans. Quelques-uns peuvent dans un premier temps identifier le problème comme étant un problème standard et risquent de se laisser piéger par les mots inducteurs « de plus » en faisant $45 + 17$ ou un « pour aller

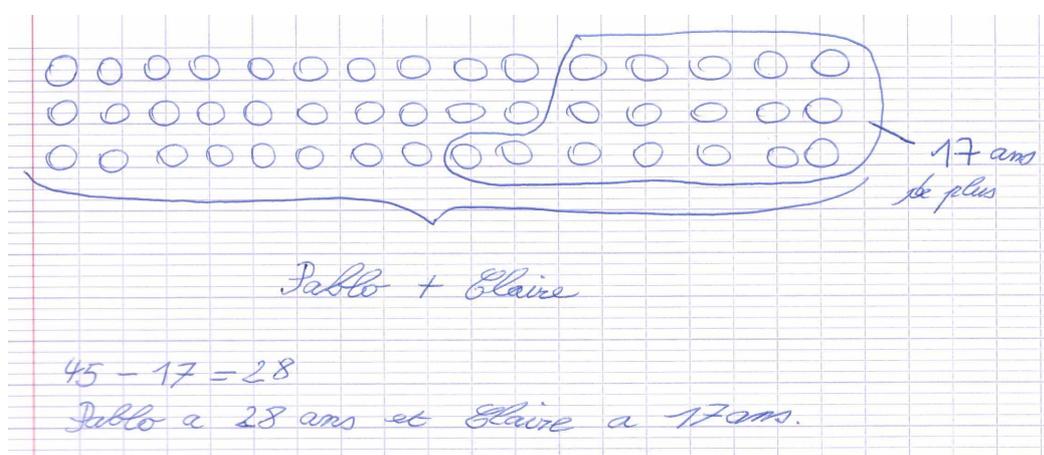
à » 17 → 45. D'où l'intérêt de garder une trace des essais/ erreurs qui permet de se rendre compte de la complexité du problème et d'entrer dans une véritable démarche d'investigation. Face à un problème pour chercher, l'élève doit accepter qu'il ne dispose pas d'un modèle de résolution déjà connu et qu'il doit s'en détacher pour construire un nouveau modèle adapté à cette situation inédite. Les élèves risquent d'être déstabilisés et découragés face à leurs tentatives infructueuses.

5.3.2 Analyse des résultats du problème pour chercher

Lors de la présentation de la situation, l'enseignant explique aux élèves qu'il s'agit d'un type de problème particulier, un problème pour chercher et qu'ils vont devoir faire des essais pour arriver à élaborer une solution. Il est demandé aux élèves de garder une trace dans chaque groupe des différents essais effectués. L'enseignant demande aux élèves de réfléchir à la manière de valider leur solution mais il laisse la liberté à chaque groupe de définir des critères pour vérifier la pertinence de leurs essais.

La plupart des groupes ont formulé deux critères de validation : la somme des deux nombres doit faire 45 et l'écart entre les deux nombres doit être égal à 17.

Contrairement à ce que nous avons craint a priori, peu d'élèves se sont laissés piéger par les mots inducteurs « de plus », ce qui témoigne des progrès accomplis. Sur les six groupes, un seul n'est pas parvenu à un résultat correct. Il s'agit du groupe d'Océane qui a trouvé 28 ans pour Pablo et 17 ans pour Claire. Ces élèves ont fait une simple soustraction car ils ont perçu cette situation comme relevant d'un problème de composition standard. Ils ont interprété « 17 ans de plus » comme un état et non comme une transformation. Ils se sont appuyés sur un schéma qui témoigne de leur représentation erronée de la situation. Ils ne se sont pas aperçus que la situation était plus complexe car ils n'ont pas établi de critères de validation fiables. De plus, ils ont fait une confusion entre la différence d'âge donnée par l'énoncé et l'âge de Claire ce qui démontre une mauvaise compréhension de l'énoncé.



Production du groupe d'Océane.

Les cinq autres groupes sont tous parvenus à un résultat correct. Leurs démarches sont assez proches puisqu'ils ont tous procédé par des essais/erreurs qui les ont conduit à des ajustements jusqu'à obtenir 14 ans pour Claire et 31 ans pour Pablo. Ils ont procédé en cherchant des nombres dont la somme est égale à 45 puis ont vérifié leurs tentatives à l'aune des 17 ans d'écart. Ainsi, une relation les a guidés dans le choix de leurs essais et l'autre a servi de moyen de contrôle.

Les démarches suivies sont plus ou moins longues en fonction des nombres choisis au départ. C'est dans le choix du point de départ des essais que les procédures divergent.

Le groupe de Louane est parti d'une soustraction $45-17=28$ en constatant que cela impliquait 11 ans d'écart. Ils ont ensuite fait l'essai avec 16 ans et 29 ans puis 15 ans et 30 ans pour parvenir enfin à 14 et 31 ans. D'autres groupes ont suivi le même type de démarche en faisant davantage d'essais, c'est le cas du groupe de Keylian.

$\begin{array}{r} 45 \\ - 17 \\ \hline 28 \end{array}$ <p>→ Il y a 11 ans d'écart</p> <p>$16 + 29 = 45$</p> <p>→ Il y a 13 ans d'écart</p> <p>$15 + 30 = 45$</p> <p>→ Il y a 15 ans d'écart</p> <p>$14 + 31 = 45$</p> <p>→ Il y a 17 ans d'écart</p> <p>Pablo a 31 ans et Claire a 14 ans.</p>	<table border="0"> <tr><td>$18 + 27 = 45$</td><td>Ecart = 9 ans</td></tr> <tr><td>$19 + 26 = 45$</td><td>Ecart = 7 ans</td></tr> <tr><td>$20 + 25 = 45$</td><td>Ecart = 5 ans</td></tr> <tr><td>$17 + 28 = 45$</td><td>Ecart = 11 ans</td></tr> <tr><td>$16 + 29 = 45$</td><td>Ecart = 13 ans</td></tr> <tr><td>$15 + 30 = 45$</td><td>Ecart = 15 ans</td></tr> <tr><td>$14 + 31 = 45$</td><td>Ecart = 17 ans</td></tr> </table> <p>Pablo a 31 ans . Claire a 14 ans.</p>	$18 + 27 = 45$	Ecart = 9 ans	$19 + 26 = 45$	Ecart = 7 ans	$20 + 25 = 45$	Ecart = 5 ans	$17 + 28 = 45$	Ecart = 11 ans	$16 + 29 = 45$	Ecart = 13 ans	$15 + 30 = 45$	Ecart = 15 ans	$14 + 31 = 45$	Ecart = 17 ans
$18 + 27 = 45$	Ecart = 9 ans														
$19 + 26 = 45$	Ecart = 7 ans														
$20 + 25 = 45$	Ecart = 5 ans														
$17 + 28 = 45$	Ecart = 11 ans														
$16 + 29 = 45$	Ecart = 13 ans														
$15 + 30 = 45$	Ecart = 15 ans														
$14 + 31 = 45$	Ecart = 17 ans														

Production du groupe de Keylian

Production du groupe de Louane

Le groupe de Louane est quant à lui parti d'un partage des 45 ans en deux parts égales ce qui est guidé par leur compréhension des « 45 ans à eux deux ». Leur premier essai de 22 ans et 23 ans aboutit au faible écart d'un an.

Lors de la mise en commun, les élèves ont expliqué qu'ils ont vu qu'ils étaient très loin de l'écart de 17 ans entre Pablo et Claire. C'est pourquoi ils ont ensuite tenté 33 et 12 et opté pour des essais plus efficaces au point de parvenir en quatre tentatives au résultat correct

$45 \div 2 = 22,5$	$22 \xrightarrow{1 \text{ an}} 23$
$23 + 22 = 45$	
$33 + 12 = 45$	$12 \xrightarrow{2 \text{ ans}} 33$
$32 + 13 = 45$	$13 \xrightarrow{19 \text{ ans}} 32$
$31 + 14 = 45$	$14 \xrightarrow{17 \text{ ans}} 31$
Claire a 14 ans. Pablo a 31 ans.	

Production du groupe de Louna.

A la lumière de ces résultats, il apparaît que la consigne de définir des critères de validation a eu des effets positifs sur le travail des élèves. Tous les élèves qui ont bien résolu le problème se sont appuyés sur le fait que la somme des âges de Pablo et Claire devait être égale à 45 ans. Ils ont vérifié chacun de leurs essais en comparant la différence entre les nombres trouvés et l'écart de 17 ans donné dans l'énoncé. Leurs démarches relèvent d'une démarche d'investigation car ils sont partis d'hypothèses qu'ils ont soumises systématiquement aux critères de validation qu'ils avaient définis au préalable.

Lors de la mise en commun, les élèves ont souligné la difficulté du problème. Plusieurs enfants ont avoué que la situation leur a paru de prime abord impossible à résoudre. Ce constat renforce la fierté des élèves qui l'ont résolu et leur permet de prendre confiance dans leurs capacités. Ce type de problème permet aux élèves de prendre conscience de la puissance de leurs connaissances. Ce problème pour chercher est intéressant car il change le rapport au problème puisque les élèves se sont engagés dans une démarche de recherche plus longue que celles dont ils sont coutumiers. Il s'agit d'une véritable démarche d'investigation avec des essais qu'ils doivent valider ou invalider de manière autonome en s'appuyant sur des critères qu'ils ont définis au départ. Ils ont réussi à gérer de multiples essais sans se décourager du fait de l'effet stimulant du travail en groupe.

Etant donnée la difficulté du problème, il est très satisfaisant de constater qu'il a été globalement très bien réussi puisque 83 % des élèves sont parvenus à un résultat correct.

5.4 Evaluation formative

Pour conclure notre expérimentation nous souhaitons faire un bilan des acquis des élèves.

Comme l'évaluation diagnostique a révélé que la moitié des élèves éprouvaient des difficultés face à un problème de transformation dans lequel un état initial subit plusieurs transformations et où la recherche porte sur l'état final, nous avons décidé de proposer à nouveau ce même type de

problème dans un autre contexte. L'objectif est de mesurer les progrès accomplis après le travail effectué lors de la séance de situation-problème et de celle de problème pour chercher.

Nous avons pensé qu'il serait intéressant de confronter également les élèves au même type de problème avec un changement d'inconnue : à savoir la recherche de la transformation à la place de la recherche de l'état final. Il s'agit là d'une difficulté supplémentaire mais l'objectif est de constater si les élèves sont capables de transposer leurs compétences à d'autres situations.

5.4.1 Contenu de l'évaluation formative

Comme il s'agit d'une évaluation formative, le dispositif choisi repose sur un travail individuel.

Le premier problème proposé est un problème de transformation d'un état dans lequel on recherche l'état final. Plusieurs procédures sont possibles : suivre le fil de l'énoncé pour calculer les transformations au fur et à mesure, calculer séparément les transformations positives et négatives et les appliquer à l'état initial pour obtenir l'état final ou calculer le composé des transformations.

L'énoncé donné aux élèves est le suivant :

L'ascenseur

Lorsque l'ascenseur quitte le rez-de-chaussée de l'immeuble, il abrite 19 personnes.

Au premier étage, l'ascenseur s'arrête pour laisser sortir 5 personnes.

Au deuxième étage, 7 personnes descendent et 2 personnes montent dans l'ascenseur.

Au troisième étage, 11 personnes entrent dans l'ascenseur et 6 personnes en sortent.

Combien y a-t-il de personnes dans l'ascenseur lorsqu'il arrive au quatrième étage ?

Le **second problème** est un problème de composition de transformations dans lequel on recherche la transformation composée. Le risque est que les élèves ne s'aperçoivent pas de la différence et le traitent comme un problème de transformation où l'inconnue porte sur l'état final. Plusieurs démarches sont là aussi possibles : calculer la transformation composée au fur et à mesure de l'énoncé ou calculer d'une part les transformations positives et d'autre part les transformations négatives avant d'en obtenir la composition.

Voici l'énoncé proposé aux élèves :

Le jeu de l'oie

Nolan joue à un jeu de l'oie géant. Il commence à la case 87.

Voici ses différents tours de jeu :

Au premier tour, il recule de 6 cases.

Au second tour, il avance de 9 cases puis recule de 12 cases.

Au tour suivant, il avance de 17 cases.

Au quatrième tour, il recule de 5 cases.

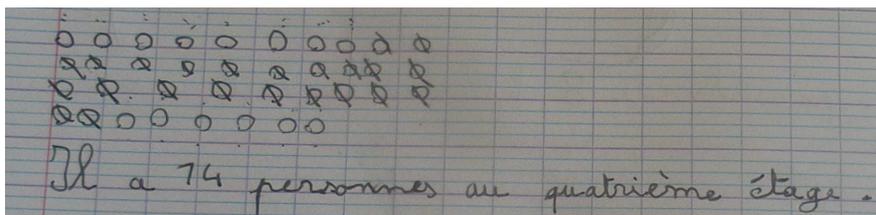
Enfin au dernier tour, il avance de 8 cases et recule de 1 case.

A la fin de la partie, de combien de cases Nolan a-t-il avancé ou reculé par rapport au point de départ ?

5.4.2 Analyse des résultats de l'évaluation formative

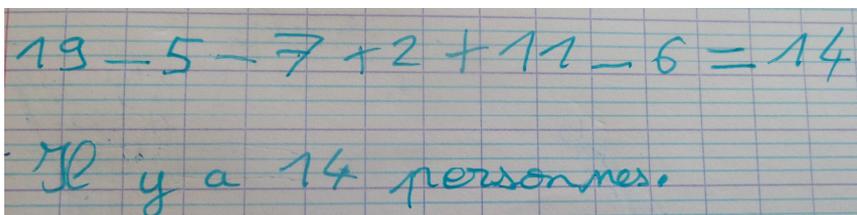
Pour analyser les résultats des élèves, nous nous servons d'une grille qui comporte les mêmes critères que lors de l'évaluation diagnostique afin que la comparaison soit plus parlante. (Annexe 8.17 p.73) Le **premier problème** a été très bien réussi par les élèves puisque 87 % ont abouti au résultat correct de 14 personnes. Les progrès sont conséquents car seuls 52 % des élèves avaient réussi le même type de problème lors de l'évaluation diagnostique.

Nos élèves ne sont toujours pas très adeptes du schéma puisque seuls 22 % d'entre eux en ont fait un. Ce sont les mêmes 22 % qui ont lu la réponse directement sur leur schéma sans effectuer d'opération. C'est le cas de Louane qui a dessiné des symboles pour figurer les personnes dans l'ascenseur et a barré au fur et à mesure les personnes qui en sont sorties.



Production de Louane

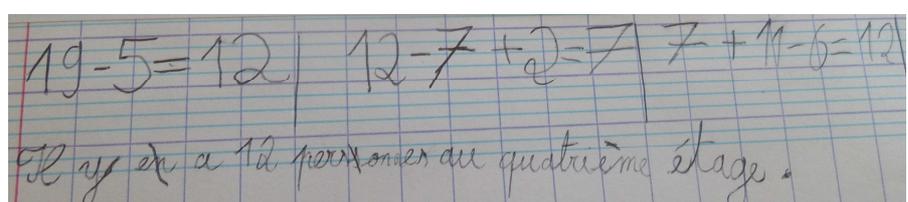
43 % des élèves ont calculé le résultat des transformations au fur et à mesure de l'énoncé. C'est le cas d'Eléna. C'est une procédure un peu fastidieuse qui multiplie le risque d'erreurs de calculs car c'est un enchaînement d'opérations réalisé souvent sans étape intermédiaire. Le point positif est que si l'on compare au problème de la bataille proposé lors de la situation problème, on constate que les élèves ont moins recours à cette procédure puisque c'était le cas de 61 % des élèves à ce moment-là.



Production d'Eléna.

En observant la démarche de Louis, on s'aperçoit qu'il a fait une erreur dans sa première soustraction qui se traduit par un résultat final erroné puisque tous ses calculs s'enchaînent.

Production de Louis



Les élèves ont eu davantage recours à la procédure qui consiste à calculer séparément les transformations positives et les transformations négatives puisqu'elle concerne 35 % des élèves contre 22 % lors de la situation de la bataille. Ainsi, Tonya a d'abord calculé le nombre de personnes qui sortent de l'ascenseur, puis le nombre de personnes qui y entrent. Elle a ensuite appliqué les transformations négatives à l'état initial et est parvenue à un état intermédiaire d'une personne. Elle a ensuite obtenu l'état final en appliquant les transformations positives à cet état intermédiaire.

$5 + 7 + 6 = 18$
 18 personnes sortent.
 $1 + 2 = 3$
 Il y a 13 qui montent.
 $13 - 18 = -5$
 $1 + 13 = 14$
 Il y a 14 personnes au 4^{ème} étage.

Procédure de Tonya

Il nous paraît intéressant de noter que deux élèves n'ont pas formulé de phrase réponse adaptée. C'est le cas de Louna qui conclut que 14 personnes montent dans l'ascenseur alors que les 14 personnes correspondent à celles qui restent dans l'ascenseur lorsqu'il atteint le 4^{ème} étage. On peut y déceler une mauvaise compréhension de ce qui est recherché.

14 personnes montent dans l'ascenseur.

Phrase réponse de Louna.

En conclusion, ce problème de transformation avec recherche de l'état final montre que les élèves ont fait des progrès sensibles puisqu'ils atteignent un taux de réussite de 87 % contre 52 % pour une situation équivalente proposée en évaluation diagnostique.

Pour nous inscrire dans une progression, il nous a paru intéressant de confronter les élèves à un problème de composition de transformations dans lequel l'inconnue ne porte plus sur l'état final mais sur la transformation. Ce **second problème** est plus complexe que le précédent car il est plus difficile pour les élèves de rechercher la valeur de la transformation.

Le second problème a également été bien réussi par nos élèves puisque 78 % sont parvenus à un résultat correct. (annexe 8.17 p.73)

Seuls 17 % des élèves ont mal compris ce qui était demandé et ont recherché l'état final. C'est le cas de Chad qui est parti de la case 87 puis a appliqué toutes les transformations négatives pour

atteindre la case 63. Au final, il a appliqué toutes les transformations positives pour conclure que Nolan a avancé jusqu'à la case 98, ce qui est erroné car il aurait dû trouver 97 comme résultat de son addition. Trois autres élèves ont eu recours à la même démarche parmi lesquels deux se sont aussi trompés dans le résultat car la succession des calculs les a conduits à faire des erreurs.

$$87 - 6 - 12 - 5 - 1 = 63$$

$$63 + 9 + 17 + 8 = 98$$

Nolan avance à la case 98.

Production de Chad

Il est intéressant de souligner qu'aucun élève n'a eu recours au schéma pour ce problème du jeu de l'oie. On peut penser que c'est la donnée de la case 87 qui les a découragés. En effet, les élèves de la classe qui se servent du schéma ont tendance à figurer tous les éléments de l'énoncé par un symbole et à lire la réponse sur leur schéma ce qui s'avérait impossible dans cette situation.

Hormis les élèves qui n'ont pas compris que la recherche portait sur la valeur de la transformation, tous les autres soit 83 % des élèves ont eu recours à la même procédure qui consistait à calculer séparément les transformations positives puis les transformations négatives avant de procéder à la composition de ces transformations. Aucun élève n'a choisi de calculer la transformation au fur et à mesure de l'énoncé.

Nous pensons que cette homogénéité des démarches est liée à la question posée qui demandait : « A la fin de la partie, de combien de cases Nolan a-t-il avancé ou reculé par rapport au point de départ ? ». D'après nous, les termes « avancé » et « reculé » présents dans la question posée ont influencé les élèves qui ont alors massivement calculé d'une part de combien de cases Nolan a-t-il avancé et d'autre-part de combien de cases a-t-il reculé.

Les seules divergences notables se situent dans l'ordre des opérations. Certains comme Maud ont d'abord calculé les transformations négatives peut-être en suivant l'ordre chronologique de l'énoncé qui commence par une transformation négative (« Il recule de 6 cases »). D'autres comme Louane ont commencé par les transformations positives en se référant peut-être à la question qui évoque d'abord les transformations positives puis les transformations négatives. Dans la production de Louane, il est intéressant de noter qu'elle a d'abord recherché l'état final pour aboutir à la case 97. Elle nous a expliqué qu'elle s'est rendue compte de son erreur au moment où elle a voulu rédiger sa phrase-réponse. Louane a ensuite modifié sa démarche avec succès puisqu'elle a trouvé que Nolan a avancé de 10 cases. Elle ne s'est pas aperçue qu'elle pouvait déduire de sa première opération de combien de cases il avait avancé puisqu'elle disposait de la case de départ (87) et de la case d'arrivée (97) ce qui lui permettait de trouver un écart de 10 cases en plus.

$6 + 12 + 5 + 1 = 24$
 Il a reculé de 24 cases.
 $17 + 9 + 5 = 34$
 Il a avancé de 34 cases.
 $24 \rightarrow 34$
 Il a avancé de 10 cases.

Production de Maud

$87 - 6 + 9 - 12 + 17 - 5 + 8 - 1 = 97$
 $9 + 17 + 8 = 34$
 $6 + 12 + 5 + 1 = 24$
 $34 - 24 = 10$
 Nolan a avancé de 10 cases.

Production de Louane

Un seul élève s'est trouvé en difficulté pour calculer les transformations négatives bien que cela soit difficile pour des élèves de CE2. Il faut dire que les élèves ont rencontré à plusieurs reprises cette situation lors de notre expérimentation. Keylian s'est trompé en calculant de combien de cases Nolan a reculé car il a tenté d'effectuer une opération avec des nombres négatifs au lieu de faire la somme des cases reculées.

$-6 - 12 - 5 = 1$
 Il a reculé de 1 case.
 $17 + 9 + 8 = 34$
 $34 - 1 = 33$
 Il a avancé de 33 cases.

Production de Keylian

5.4.3 Bilan de l'évaluation formative

Les résultats de l'évaluation formative témoignent des progrès des élèves dans la maîtrise du sens des opérations. Les élèves ont bien réussi le problème du jeu de l'oie alors même qu'ils n'avaient pas travaillé auparavant sur un problème de composition de transformations. Ils sont donc capables de réinvestir leurs compétences dans un autre contexte avec un type d'inconnue différent. Les procédures mises en œuvre gagnent en fiabilité car les élèves choisissent des démarches dans lesquelles les risques d'erreurs de calcul diminuent. Ainsi, dans un problème de transformation complexe, les élèves ont de plus en plus recours au calcul séparé des transformations positives et des transformations négatives plutôt que d'appliquer les transformations en suivant le fil de l'énoncé.

6 CONCLUSION

Les problèmes standards nous ont permis de mesurer les compétences de nos élèves lors de l'évaluation diagnostique mais leur apport reste limité à des situations d'application car ils n'admettent souvent qu'une solution unique. En revanche, les problèmes complexes et les problèmes pour chercher créent les conditions nécessaires à la mise en place d'un nouveau type de contrat didactique dans lequel l'élève est acteur puisqu'il est seul responsable de la validation de ses résultats. Le maître n'apparaît plus alors comme le seul détenteur du savoir. Ce type de problèmes favorise donc la prise d'initiative et développe l'autonomie des élèves.

Au fil de notre expérimentation, nous avons observé que nos élèves ont changé leur rapport au problème. Ils l'ont davantage perçu comme un défi à relever, ils ont appris à chercher. La séance de problème pour chercher a démontré que nos élèves sont capables de prendre un problème à bras-le-corps et de s'engager dans des essais même si le problème leur paraît difficile au premier abord. Le travail en groupe a eu un effet stimulant et a relancé certains élèves dans la recherche au moment où ils étaient découragés par leurs tentatives infructueuses. Nos élèves sont entrés dans une véritable démarche d'investigation en formulant des hypothèses qu'ils ont ensuite vérifiées à l'aune des critères de validation qu'ils avaient définis au préalable.

Les problèmes complexes et les problèmes pour chercher proposent des situations diversifiées qui sont favorables à la mise en œuvre de procédures variées. Les problèmes testés lors de la situation-problème ont ainsi montré la richesse des procédures mises en place par les élèves qui vont de la lecture du résultat sur un schéma à des représentations chiffrées très abstraites. Nos élèves ont su mobiliser leurs connaissances mathématiques et des procédures personnelles adaptées aux situations auxquelles ils étaient confrontés ce qui témoigne des progrès accomplis sur le plan du sens des opérations.

Notre étude comporte bien sûr des limites dans le sens où nous n'avons pu, par manque de temps, expérimenter qu'une seule séance de problèmes pour chercher. Elle s'appuie sur l'observation d'une seule classe qui n'est pas forcément représentative de tous les élèves de CE2. Nos travaux sur les problèmes additifs se sont concentrés sur les problèmes de transformation qui posaient le plus de difficultés à nos élèves, il faudrait prolonger cette expérimentation sur d'autres types de problèmes complexes. Par ailleurs, nous aurions souhaité avoir l'avis de nos collègues sur la question mais nous n'avons pas eu la possibilité de lancer une enquête. Notre travail doit être poursuivi et étendu à d'autres types de problèmes comme les problèmes multiplicatifs ou de division.

7 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

7.1 Références en didactique des mathématiques

- Bronner A., Laureys S. (1999). Résolution de problèmes et schématisation : le cas des problèmes additifs, *Actes du XXVI^e colloque Inter-IREM*, Copirelem, Limoges.
- Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques Vol.7.2*. La pensée sauvage, Grenoble
- Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage, Grenoble.
- Baruk S. (1985) *L'âge du capitaine*, Seuil, Paris.
- Brun J. (1990). La résolution de problèmes arithmétiques : bilan et perspectives. *Math Ecole*. n°141.
- Charnay R. (1988) Apprendre (par) la résolution de problèmes. *Grand N*. n°42, p.21-29.
- Charnay R. (1992-1993). Problème ouvert, problème pour chercher. *Grand N*. n°51, p.78.
- Coppe S., Houdement C. (2002). Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire. *Grand N*, n°69, p. 53-62
- Ermel. (2005). Apprentissages numériques et résolution de problèmes, *INRP*, Hatier, Paris.
- Julo J., (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques, un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*, Ed. P.U.R.
- Julo J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, n°69, p. 35.
- Perrin D. (2007) L'expérimentation en mathématiques. *Petit x* n° 73. p 6-34.
- Polya G. (1965). *Comment poser et résoudre un problème*, Editions Dunod, Paris.
- Prioret M., Régnier J-C. (2012). Les problèmes de mathématiques dans les instructions et programmes officiels de l'école primaire de 1833 à nos jours. *Grand N*. n°90, p. 69 à 87.
- Vergnaud G. (1989-1990). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives. *Petit x*. n°22, p.51
- Vergnaud G. (1986). Psychologie du développement cognitif et Didactique des Mathématiques. *Grand N*, n°38, p. 21-40
- Vergnaud G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des mathématiques*, Vol 10/2.3, La pensée Sauvage, Grenoble.

7.2 Textes officiels

Ministère de l'Éducation Nationale (1945). *Programmes, Instructions officielles*.

Ministère de l'Éducation Nationale (1970) *Programme et enseignement des mathématiques à l'école élémentaire*.

Ministère de l'Éducation (1978) *Horaires, objectifs et programmes du Cycle élémentaire*.

Ministère de l'Éducation Nationale. (1985) *Programmes et Instructions pour l'école élémentaire*.

Ministère de l'Éducation Nationale- Direction des écoles (1995). Programmes de l'école primaire. *CNDP*. Paris

Ministère de l'Éducation Nationale. (2002). *Programmes d'enseignement de l'école primaire*

Ministère de l'Éducation Nationale. (2002). Les problèmes pour chercher. *Les nouveaux programmes de l'École primaire, Mathématiques, Document d'accompagnement*.

Ministère de l'Éducation Nationale de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche. (2006). *Socle commun de connaissances et de compétences*.

Ministère de l'Éducation Nationale. (2008). *Les nouveaux programmes de l'école primaire*

Ministère de l'Éducation Nationale. (2015). *Programme d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2)*.

7.3 Manuels étudiés

Demagny C., Demagny J.-P., Dias T., Duplay J.-P. (2008) *La tribu des maths*, Magnard, Paris.

Amouyal X., Brun J. (2016) *Maths tout terrain*, Bordas, Paris.

Charnay, R., Combier G. (2011) *Cap Maths*, Hatier, Paris.

Charnay R. (dir.) (2017) *Cap Maths*, Hatier, Paris.

8 ANNEXES

8.1 Typologie des problèmes additifs selon G. Vergnaud

Sylvie Guffond, CPC Bonneville, 74

Classification des problèmes selon G. VERGNAUD
CHAMP ADDITIF

<p>Composition d'états : (relation partie-partie-tout)</p> <p>Schéma général : </p> <p>eeE : Recherche du composé : (Addition) Dans un bouquet, il y a 8 roses et 7 iris. Combien y a-t-il de fleurs ?</p> <p>eEe : Recherche d'une partie : (soustraction) Dans un bouquet de 15 fleurs composé de roses et d'iris, il y a 8 roses. Combien y a-t-il d'iris ?</p>	<p>Comparaison d'états :</p> <p>Schéma général : </p> <p>Ec-e ou Ec-e : Recherche de l'un des états : (+ ou -) J'ai 25 voitures, j'en ai 5 de plus que ma sœur. Combien en a-t-elle ?</p> <p>eC-e ou eC-e : Recherche de la comparaison : (-) Mon ballon vaut 13 € dans un magasin et 18€ dans un autre. De combien est-il plus cher dans le 2e magasin ?</p>
<p>Transformation d'un état :</p> <p>Schéma général : </p> <p>et-E ou et-E : Recherche de l'état final : (+ ou -) Je suis sur la case 17, je recule de 5 cases. Où vais-je arriver ?</p> <p>Et-e ou Et-e : Recherche de l'état initial : (+ ou -) J'avance de 5 cases et j'arrive sur la 17.. D'où suis-je partie ?</p> <p>eT-e ou eT-e : Recherche de la transformation : (+ ou -) J'avais 17 billes au début de la partie et maintenant, j'en ai 22. Combien en ai-je gagné ?</p>	<p>Composition de transformation :</p> <p>Schéma général : </p> <p>tTt : Recherche de la transformation composée : (+ ou -) À la première partie je gagne 7 billes, à la deuxième, j'en perds 5. En ai-je gagné ou perdu ? Combien ?</p> <p>TtT ou tTt : Recherche de l'une des composantes : (+ ou -) -Au jeu de l'oie, je joue 2 coups : au 2e, j'avance de 9. Au total, j'ai reculé de 4. Que s'est-il passé au premier coup ? -Aujourd'hui, j'ai dépensé 56€. Ce matin, j'ai dépensé 24€. Combien ai-je dépensé cet après-midi ?</p>

8.2 Partie recherche du manuel *La tribu des maths* (2008, p. 54).

17 La soustraction (1)

Je casse des paquets de 10 pour calculer

Avant de commencer

Le marchand de glaces a 2 paquets de 10 Esquimaux et 6 Esquimaux à part. 8 enfants se présentent. Chacun veut un Esquimau. Comment ferais-tu pour les servir ?



Recherche

A Le marchand de glaces a écrit :
Qu'a-t-il fait ?

$$\begin{array}{r} 26 \\ - 8 \\ \hline \end{array}$$

B Il se rend à l'usine de glaces pour acheter des Esquimaux.



Comment l'employé de l'usine va-t-il faire pour servir le marchand de glaces ?

C L'employé de l'usine écrit sur son livre de compte :
Qu'a-t-il fait ?

$$\begin{array}{r} 240 \\ - 80 \\ \hline 160 \end{array}$$



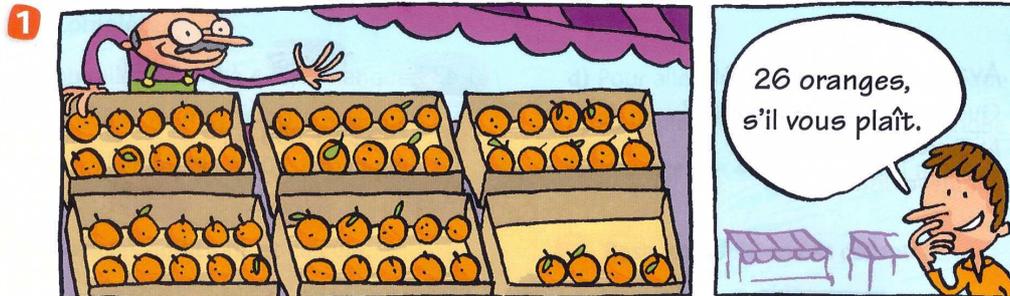
Quand fait-on une soustraction ?
Pour calculer quoi ?

Application

Gaël a pris 6 feutres dans sa boîte de 24. Combien y a-t-il de feutres dans la boîte maintenant ?
À l'oral, explique comment tu fais, puis pose une opération.

8.3 Exercices d'entraînement et rubrique Labo Maths du manuel *La tribu des maths* (2008, p.55)

Entraînement



Combien d'oranges reste-t-il au marchand après cette vente ?

Pose une opération.

2 Dans un nombre, il y a 6 dizaines et 4 unités. Écris ce nombre. On le diminue de 23. Pose une opération et trouve le résultat.

3 Regarde ce calcul : $85 + 17 = 102$.

Vérifie-le en posant l'opération.

On enlève 17 à 102. Combien trouves-tu ?

$80 + 20 = 100$,
on dit que **le complément**
de 80 à 100 est 20.

4 Trouve les compléments à 100.

Utilise la méthode de ton choix.

- a) Le complément de 75 à 100 est
- b) Le complément de 90 à 100 est
- c) Le complément de 25 à 100 est
- d) Le complément de 50 à 100 est

- e) Le complément de 99 à 100 est
- f) Le complément de 89 à 100 est
- g) Le complément de 20 à 100 est
- h) Le complément de 60 à 100 est

5 Aloïs construit une cabane en allumettes. Il a besoin de 240 allumettes. Il a 3 boîtes de 100 allumettes. En a-t-il assez ?

Explique ta réponse avec une opération.

6 Au bureau de tabac, il reste 12 paquets de 10 pétards. Un client vient d'acheter 8 paquets et Florent voudrait acheter 45 pétards. Le marchand en aura-t-il assez ?

Explique ta réponse avec une opération.

Labo Maths

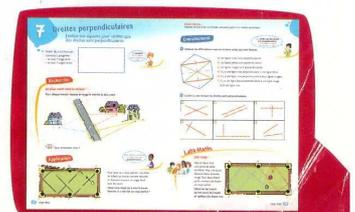
Max et Lucas gagnent des jetons au jeu des bonnes réponses. Ils décident que :

- 1 jeton ● vaut 10 jetons ● ;
- 1 jeton ● vaut 7 jetons ● ;
- 1 jeton ● vaut 5 jetons ○.

Max a gagné 2 jetons ●, 3 ●, 12 ○ et 7 ●.

Lucas a gagné 6 jetons ●, 2 ●, 9 ● et 10 ○.

Pouvez-vous dire qui a gagné ?



8

S'entraîner à chercher

Je lis des informations dans un texte ou dans un dessin

1 L'âge de la mariée

La mariée avait 26 ans quand je suis né. J'ai 10 ans.
Mon frère a cinq ans de plus que moi.
Mon oncle a quatre ans de plus que la mariée.

- a) Quel était l'âge de la mariée à ma naissance ?
- b) Quel est l'âge de mon frère ?
- c) Quelle est la différence d'âge entre mon frère et moi ?
- d) Quel âge avait la mariée quand mon frère est né ?

Pour répondre à chaque question, tu as surtout besoin de relire à chaque fois l'énoncé.



2 Vite, à la fête !

La réception du mariage a lieu au dernier étage de l'immeuble.

Qui doit monter avec qui pour faire le moins de voyages possible en ascenseur ?

Attention ! Les enfants et les chiens ne doivent pas prendre l'ascenseur sans adulte.

Trouve une première solution. Puis cherche deux autres façons de faire monter les invités dans les ascenseurs.

La calculette ne sert qu'à vérifier tes calculs.



8.5 Rubrique « S'entraîner à chercher » du manuel *La tribu des maths* (2008, p.29)

3 La valse des petits-fours

700 petits-fours sont prévus pour l'apéritif. Ils sont répartis sur des plateaux de 20 petits-fours sucrés et des plateaux de 50 petits-fours salés. Il y a autant de plateaux de petits-fours sucrés que de plateaux de petits-fours salés.

Combien de plateaux seront servis en tout ?

Cette fois, il n'y a qu'une seule solution.

4 Mission « livraison » !

Les deux livreurs doivent charger tous les paquets dans les deux chariots. Ils font un seul voyage.



Qui a raison ?

5 Tous à table !

Les mariés ont attribué une place à chacun de leurs 250 invités.

Ils les ont répartis à des tables roses de 7 places,

des tables bleues de 5 places, des tables vertes de 8 places et des tables rouges de 12 places.

La salle peut contenir 35 tables au maximum.

Combien y a-t-il de tables de chaque couleur ?

Plusieurs solutions existent. Si tu as terminé, tu peux en chercher une autre.

8.6 Extrait de la banque de problèmes du manuel *Cap maths* (2011, p. 162)

La bibliothèque

5
Unité

1 Sur l'étagère du haut, il y a 25 encyclopédies et sur celle du bas, il y a 40 livres de poche. Combien de livres y a-t-il au total sur les étagères de cette bibliothèque ?

2 La maîtresse de la classe dit : « Il y a aussi des livres dans les placards du bas. Je ne sais plus combien. Mais je me souviens que, au total, il y a 120 livres dans la bibliothèque. » Combien de livres y a-t-il dans les placards du bas ?

3 Sur l'étagère du haut, toutes les encyclopédies sont identiques. Chacune a une épaisseur de 4 cm. Quelle est la longueur de cette étagère ?

4 Chaque livre de poche a 176 pages numérotées de 1 à 176. Tim a compté tous les chiffres 6 utilisés pour écrire les numéros de page. Combien de chiffres 6 a-t-il trouvés ?

5 Qui a raison ?



BANQUE DE PROBLÈMES

7 Résoudre des problèmes additifs et soustractifs (1)

↳ Calcul mental : Compter de 10 en 10 à partir d'un nombre *du* quelconque, à l'endroit et à l'envers.

Je comprends

↳ Activité de découverte : Résolution d'un problème additif.

Pour résoudre un problème...

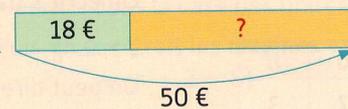
1. Comprends :

- le texte du problème (**l'énoncé**) ;
- la **question** qui est posée (souligne-la en **rouge**) et les **données utiles** (souligne-les en **bleu**).



Assia a acheté un livre à 18 €. Elle a payé avec un billet de 50 €. Combien le vendeur va-t-il lui rendre ?

- ### 2. Si tu veux, tu peux faire un schéma pour représenter la situation.



- ### 3. Choisis l'opération à effectuer, puis calcule.

Il faut faire une soustraction.

$$50 - 18 = ?$$

$50 - 10 = 40$	ou	$5 \quad 1 \quad 0$									
$40 - 8 = 32$		<table style="border-collapse: collapse; margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">5</td> <td style="padding: 0 5px;">1</td> <td style="padding: 0 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">- 1</td> <td style="padding: 0 5px;">8</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">3</td> <td style="padding: 0 5px;">2</td> <td></td> </tr> </table>	5	1	0	- 1	8		3	2	
5	1	0									
- 1	8										
3	2										

- ### 4. Écris ta phrase réponse.

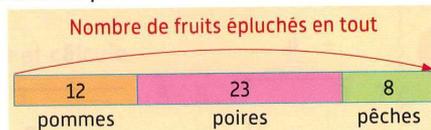
Le vendeur va rendre **32 €** à Assia.



Je m'entraîne

- 1** * Pour préparer une salade de fruits, Pablo a épluché **12** pommes, **23** poires et **8** pêches. **Combien** de fruits a-t-il épluchés en tout ?

- a. **Repère** la question et les données utiles.
b. Ce schéma peut t'aider :



- c. **Choisis** ta méthode et **écris** l'opération que tu vas faire, puis **calcule**.
d. **Écris** ta phrase réponse.

- 2** * Lucie connaît **85** départements français, Kofi en connaît **17** de moins. **Combien** de départements connaît Kofi ?

- a. **Repère** la question et les données utiles.
b. Tu peux dessiner un schéma sur ton cahier.
c. **Écris** en ligne l'opération que tu vas faire, puis **calcule**.
d. **Écris** ta phrase réponse.



8.8 Extrait du manuel *Maths tout terrain* (2016, p.15)

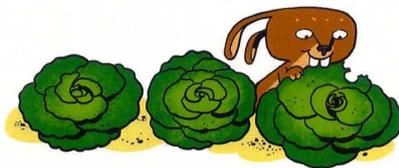
3 * Pour la compétition de basket, les enfants sont venus de toute la France. **21** enfants sont venus de Limoges, **25** de Paris, **19** d'Antibes et **18** de Pau.

Combien d'enfants y a-t-il en tout ?

- Repère la question et les données utiles.
- Tu peux dessiner un schéma sur ton cahier.
- Écris en ligne l'opération que tu vas faire, puis calcule.
- Écris ta phrase réponse.



4 ** Grand-père a planté **55** choux dans son potager. Mais, cette nuit, les lapins en ont grignoté. Il reste **17** choux entiers. Combien de choux les lapins ont-ils mangés ?



- Repère la question et les données utiles.
- Tu peux dessiner un schéma sur ton cahier.
- Écris en ligne l'opération que tu vas faire, puis calcule.
- Écris ta phrase réponse.

5 ** Le musée du Louvre vient d'acquérir **73** œuvres : **42** œuvres viennent d'Europe et les œuvres restantes viennent d'Afrique. Combien d'œuvres viennent d'Afrique ?

- Repère la question et les données utiles.
- Tu peux dessiner un schéma sur ton cahier.
- Écris en ligne l'opération que tu vas faire, puis calcule.
- Écris ta phrase réponse.



6 ** Le propriétaire d'un verger a vendu **79** pommes au marché. Il lui reste **19** pommes. Combien de pommes avait-il au départ ?



- Repère la question et les données utiles.
- Tu peux dessiner un schéma sur ton cahier.
- Écris en ligne l'opération que tu vas faire, puis calcule.
- Écris ta phrase réponse.

7 ** **Invente** un énoncé de problème avec les étiquettes suivantes :

un car de touristes

34 Italiens, 12 Allemands, 7 Français

$34 + 12 + 7$

Écris l'énoncé de ce problème, puis effectue l'opération et écris ta phrase réponse.

66

Résoudre des problèmes additifs et soustractifs (3)

Résoudre des problèmes

↳ Calcul mental : Multiplier une dizaine entière par 2 ou par 3.
Ex. : $60 \times 2 = ?$; $3 \times 50 = ?$

Je comprends

↳ Activité de découverte : Problèmes de longueurs et de contenances.

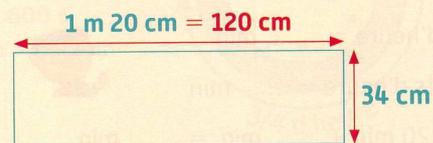
Pour résoudre un problème où les données sont dans des unités différentes...

1. Lis le problème attentivement.
Souligne la question en **rouge** et les données utiles en **bleu**.

Jade répare un cadre de **1 m 20 cm de long** et de **34 cm de large** en l'entourant avec du ruban adhésif.

De quelle longueur de ruban a-t-elle besoin ?

2. Si tu veux, tu peux faire un schéma pour **représenter** la situation.



3. Choisis ta méthode, puis **calcule**.
Attention : **lorsque tu calcules, toutes les données doivent être dans la même unité.**

• Il faut **calculer le périmètre** du cadre :
c'est $1\text{ m }20\text{ cm} + 34\text{ cm} + 1\text{ m }20\text{ cm} + 34\text{ cm}$.

• On écrit les données en cm :

$$1\text{ m }20\text{ cm} = 120\text{ cm}$$

• On calcule :

$$120\text{ cm} + 34\text{ cm} + 120\text{ cm} + 34\text{ cm}$$

$$\begin{array}{r} \underbrace{\phantom{120\text{ cm} + 34\text{ cm}}}_{154\text{ cm}} + \underbrace{\phantom{120\text{ cm} + 34\text{ cm}}}_{154\text{ cm}} = 308\text{ cm} \end{array}$$



4. **Écris** ta phrase réponse.

La longueur du ruban adhésif doit être de 308 cm ou 3 m 8 cm.



Je m'entraîne

1 Leila et Lucie ont fait la course de l'école à la boulangerie.
Leila a mis **2 minutes** et Lucie a mis **130 secondes**.

Qui est arrivé en premier ? Avec combien de temps d'avance ?



Pour comparer les durées, il faut qu'elles soient écrites dans la même unité.

a. **Écris** en **secondes** le temps qu'a mis Leila :

Leila a mis 2 minutes ou secondes.

b. **Calcule** combien de temps d'avance avait la première.

c. **Écris** ta phrase réponse.



↳ Objectif : Résoudre des problèmes faisant intervenir des conversions.

8.10 Sommaire du manuel *Cap Maths* (2017, p. 4)

► **Problèmes, gestion de données, sens des opérations**

■ Nouveaux apprentissages
 ■ Révision
 ■ Consolidation
 ■ Banque de problèmes
 ■ Joue avec Flip

Unité 1	<p>Apprendre à chercher</p> <ul style="list-style-type: none"> Rechercher toutes les possibilités 8, 9, 16 <p>Sens de l'addition et de la soustraction</p> <ul style="list-style-type: none"> Augmentation : état final et état initial 12 <p>Banque de problèmes :</p> <p>« Le parc des oiseaux » 18</p>
Unité 2	<p>Utilisation des unités de numération</p> <ul style="list-style-type: none"> Dizaines et centaines 20, 24 <p>Sens de la multiplication</p> <ul style="list-style-type: none"> Groupements réguliers 23, 24, 29 <p>Apprendre à chercher</p> <ul style="list-style-type: none"> Lien entre questions et données 25, 29 <p>Banque de problèmes :</p> <p>« À la douzaine ou à la dizaine » 30</p>
Unité 3	<p>Sens de la multiplication</p> <ul style="list-style-type: none"> Groupements réguliers 32, 33, 36 Disposition rectangulaire 32, 40 <p>Joue avec Flip :</p> <p>« La multiplication avec les doigts » 42</p>
Unité 4	<p>Sens de l'addition et de la soustraction</p> <ul style="list-style-type: none"> Compléments à 100 44, 48 <p>Utilisation des unités de numération</p> <ul style="list-style-type: none"> Dizaines, centaines 51 <p>Banque de problèmes :</p> <p>« Les images d'animaux » 54</p>
Unité 5	<p>Apprendre à chercher</p> <ul style="list-style-type: none"> Problèmes à étapes 56, 60, 65 <p>Sens de la multiplication</p> <ul style="list-style-type: none"> Groupements réguliers 56 <p>Sens de l'addition et de la soustraction</p> <ul style="list-style-type: none"> Compléments et soustraction 58, 59, 64, 65 <p>Banques de problèmes :</p> <p>« La cible » 66</p>
Unité 6	<p>Sens de l'addition et de la soustraction</p> <ul style="list-style-type: none"> Sommes, valeur avant augmentation (monnaie), reste 68, 73 Décompositions avec 2, 5 et 10 (monnaie) 72 <p>Apprendre à chercher</p> <ul style="list-style-type: none"> Résolution par essais et ajustements 73, 77 <p>Joue avec Flip :</p> <p>« Comme les Mayas, il y a 1 500 ans » 78</p>
Unité 7	<p>Sens de l'addition et de la soustraction</p> <ul style="list-style-type: none"> Compléments à 100 80, 84 Écarts, différences et soustraction 81, 88 Distances et soustractions 82, 89 <p>Apprendre à chercher</p> <ul style="list-style-type: none"> Problèmes à étapes 80, 88 <p>Banque de problèmes : « Au cinéma » 90</p>
Unité 8	<p>Sens de la multiplication et de la division</p> <ul style="list-style-type: none"> Décomposition d'une quantité en groupements identiques 92, 96 Partage équitable 96, 97, 101 <p>Organiser et gérer des données</p> <ul style="list-style-type: none"> Tableaux, graphiques 92, 100 <p>Sens de l'addition et de la soustraction</p> <ul style="list-style-type: none"> Comparaisons 93 Distances 94 Augmentation, diminution 94, 101 <p>Banque de problèmes :</p> <p>« Le goûter d'anniversaire » 102</p>
Unité 9	<p>Sens de la multiplication et de la division</p> <ul style="list-style-type: none"> Partage équitable 104 Groupements réguliers 106, 107, 112, 113 Calcul d'une facture 107 <p>Apprendre à chercher</p> <ul style="list-style-type: none"> Déductions 104, 105, 112 Égalisation de quantités 109 <p>Sens de l'addition et de la soustraction</p> <ul style="list-style-type: none"> Déplacements sur une piste numérotée 108 <p>Joue avec Flip : « Avec des allumettes » 114</p>
Unité 10	<p>Sens de la multiplication et de la division</p> <ul style="list-style-type: none"> Groupements réguliers 116, 120 Déplacements réguliers sur une piste numérotée 117, 118, 125 <p>Apprendre à chercher</p> <ul style="list-style-type: none"> Sélection d'informations 116, 121, 124 <p>Banque de problèmes :</p> <p>« Je pense à des nombres » 126</p>

8.11 Extrait du manuel *Cap maths* (2017, p. 36)

UNITÉ 3

GUIDE page 81 ▶ SÉANCE 5		COLLECTIF	INDIVIDUEL
ACTIVITÉS			
Problèmes dictés	Multiplication: groupements	✓	✓
Réviser	Multiplication: groupements		A à C
Apprendre	Soustraction: calcul posé (nombres <100)	Recherche	1 à 8

Résoudre des problèmes



- A** Sam a acheté 7 packs de bouteilles d'eau comme celui-ci :
Combien de bouteilles d'eau Sam a-t-il ?
- B** Les 25 élèves de la classe de Lou se regroupent en équipes de 5 élèves.
Combien y a-t-il d'équipes ?
- C** Sam collectionne les cartes de footballeurs. Il en a déjà 105 et sa mamie lui donne 5 paquets de cartes. Dans chaque paquet il y a 8 cartes.
Combien Sam a-t-il maintenant de cartes de foot ?

19 Soustraire en ligne ou en colonnes

1 Calcule ces soustractions en colonne.

$$\begin{array}{r} 78 \\ - 25 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 82 \\ - 18 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 90 \\ - 45 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ - 7 \\ \hline \end{array}$$

Dans les exercices 2 et 3, pour chaque calcul, choisis entre les deux méthodes proposées.

2 Calcule en ligne ou en colonnes.

a. $69 - 45$

d. $90 - 67$

b. $78 - 19$

e. $84 - 8$

c. $95 - 37$

f. $92 - 35$

3 Calcule en ligne ou en colonnes.

a. $75 - 30$

d. $75 - 25$

b. $75 - 68$

e. $75 - 19$

c. $75 - 47$

f. $75 - 26$

4 Dans la vitrine de la boulangerie, 64 petits gâteaux sont présentés. Il y a 18 millefeuilles et 28 éclairs au chocolat. Les autres gâteaux sont des souris à la vanille. Combien y a-t-il de souris à la vanille ?



5 Lou a choisi un nombre. Elle lui a soustrait 45. Elle a trouvé 455. Quel nombre Lou a-t-elle choisi ?

6 Sam a choisi un nombre. Il lui a soustrait 101. Il a trouvé 808. Quel nombre Sam a-t-il choisi ?

7 Flip a choisi un nombre. Il lui a soustrait 355. Il a trouvé 400. Quel nombre Flip a-t-il choisi ?

8 Pok a choisi un nombre. Il lui a soustrait 899. Il a trouvé 1. Quel nombre Pok a-t-il choisi ?

8.12 Extrait du manuel *Cap Maths* (2017, p. 25)

UNITÉ 2

GUIDE page 52 ▶ SÉANCE 6			
ACTIVITÉS		COLLECTIF	INDIVIDUEL
Calcul mental	Addition, soustraction de dizaines et de centaines	✓	✓
Réviser	Addition posée ou en ligne		A à D
Apprendre	Résolution de problèmes : données et questions	Recherche	1 2

Calculer en ligne ou en colonnes

Pour les exercices A à D, utilise ce dessin :



- A** a. Choisis trois objets, puis calcule le prix total.
b. Recommence avec trois autres objets.
- B** Trouve le lot de trois objets qui coûte exactement 150 €.
- C** Sam possède 100 €. Il veut acheter deux objets. Trouve le lot ou les lots de deux objets que Sam peut acheter.
- D** Quelle somme d'argent faut-il pour acheter les quatre objets ?

Résoudre des problèmes

- 1** a. Lis ce problème :



Ce matin, Lou a joué aux billes pendant la récréation. Elle a d'abord perdu 5 billes, puis elle en a gagné 4. Combien a-t-elle de billes à la fin de la récréation ?

- b. Parmi ces données, recopie celle qui est utile pour répondre à la question.

Lou a 10 ans.

Hier, Lou a perdu 7 billes.

Au début de la récréation, Lou avait 12 billes.

- c. Réponds à la question.

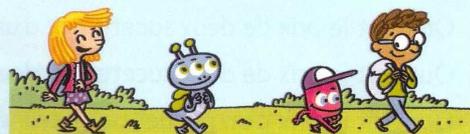
- 2** Utilise le dessin pour écrire un énoncé de problème qui correspond à chaque réponse.



- a. Réponse : $45 + 55 = 100$
b. Réponse : $50 \times 4 = 200$
c. Réponse : 1 euro



Lou, Sam, Flip et Pok sont partis en randonnée. Au total, ils ont bu 8 litres d'eau, ils ont mangé 12 fruits secs, ils ont marché pendant 1 heure et à eux quatre, ils ont parcouru 20 kilomètres. Quelle est la longueur de la randonnée ?



8.13 Extrait du manuel *Cap Maths* (2017, p. 32)

UNITÉ 3

GUIDE page 70 ▶ SÉANCE 1		COLLECTIF	INDIVIDUEL
ACTIVITÉS			
Problèmes dictés	Multiplication: groupements	✓	✓
Réviser	Multiplication: groupements		🔊 🗣️
Apprendre	Multiplication: disposition rectangulaire d'objets	Recherche	🔍 1 3 4

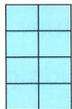
4 ▶ Fiches matériel, voir p. 2

Résoudre des problèmes

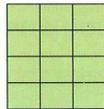
- A** Dans la bibliothèque de Lou, il y a 4 étagères. Sur chaque étagère, Lou a rangé 8 livres. Combien de livres a-t-elle ?
- B** Sam possède 30 livres. Il les range en faisant des piles de 5 livres. Combien de piles de livres peut-il faire ?
- C** Flip compte ses livres. Il a 5 collections de bandes dessinées et 3 collections de romans d'aventure. Chaque collection a 8 livres. Combien de livres Flip a-t-il au total ?
- D** Pok a découvert dans un grenier des cartons de livres: 5 petits et 4 grands. Les petits cartons contiennent 5 livres. Pok a trouvé au total 65 livres. Combien y-a-t-il de livres dans les grands cartons ?

Dénombrer des objets disposés en rectangle

1 Combien de carreaux y a-t-il dans chaque rectangle ?



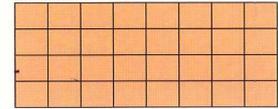
A



B



C



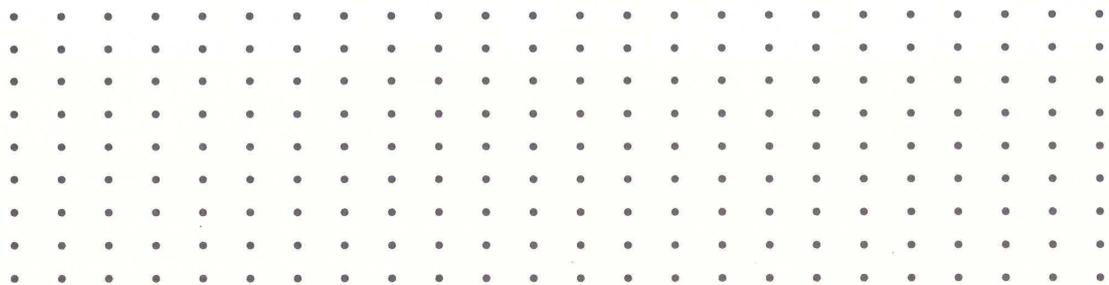
D

- 2 a. Réponds à la question de Lou.
b. Si on ajoute une colonne de 8 quilles, combien y aura-t-il de quilles au total ?



3 Sam a posé le cache sur une grille de points. Il compte 7 colonnes et 5 lignes de points. Combien de points voit-il ?

- 4 Sur la grille de points de ta fiche:
 - a. colorie en bleu deux rectangles qui contiennent 18 points ;
 - b. colorie en vert deux autres rectangles qui contiennent 24 points.
 À l'aide de ta calculatrice, **trouve** combien il y a de points dans cette grille.



8.14 Enoncé du problème « Le Parc des oiseaux »

Le Parc des oiseaux

- 1) Quel est le prix de l'entrée au parc pour un élève de CE2 ?
- 2) Combien un lycéen paie-t-il de plus qu'un élève de CE2 pour entrer au Parc des oiseaux ?
- 3) Le car part de Bourg-en-Bresse et se rend à Villars-les-Dombes sans passer par Saint-Trivier-sur-Moignans. Combien de km le car a-t-il parcourus pour rejoindre le parc ?

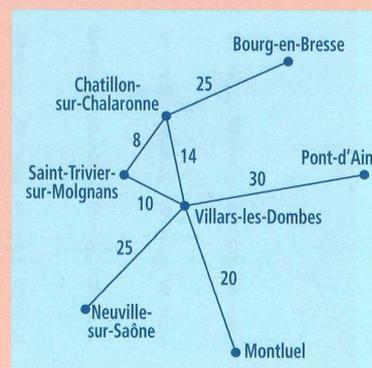
Prépare ton premier tour du monde à vol d'oiseau.

Le Parc des Oiseaux est ouvert tous les jours, jusqu'à 18 h 30, sauf en été (21 h 30).

RD 1083 • 01 Villars-les-Dombes. www.parcdesoiseaux.com

TARIFS SCOLAIRES - Saison 2010

Maternelles (Avec 1 gratuité accompagnateur pour 8 entrées payantes)	6 €
Primaires (Élémentaires) (Avec 1 gratuité accompagnateur pour 10 entrées payantes)	7 €
Collégiens (Avec 1 gratuité accompagnateur pour 12 entrées payantes)	8 €
Lycéens (Avec 1 gratuité accompagnateur pour 15 entrées payantes)	9 €
Étudiants (Avec 1 gratuité accompagnateur pour 20 entrées payantes)	10 €
Accompagnateur supplémentaire	8 € 50 c



8.15 Grille d'analyse des résultats de l'évaluation diagnostique

Type de problème	Type de procédure utilisée		Phase 1 : Problèmes additifs standards						Phase 2 : Problèmes complexes.						Phase 3 : Problèmes complexes à plusieurs étapes.						TOTAL	POURCENTAGE
	Schéma présent	Schéma adapté	Composition de deux états	Transformation d'un état	Comparaison d'états	Recherche de l'état initial.	Recherche de la comparaison.	Composition d'états	Recherche du composé.	Recherche de la comparaison.	Composition d'états	Recherche du composé.	Problème multiplicatif.	Problème additif avec plusieurs étapes intermédiaires.	Problème de transformation d'un état	Recherche de l'état final.						
Schéma présent	Oui		6	3	2	2	9%	2	0	0	0	0	1	1	4%	15	8%					
	non		17	20	21	21	91%	21	23	100%	23	100%	22	22	96%	169	82%					
Schéma adapté	Oui		5	2	1	1	50%	1					0	0	0	9	60%					
	non		1	1	1	1	50%	1					1	1	100%	6	40%					
Type de procédure utilisée	Réponse lue sur le schéma	Reponse lue sur le schéma	3	1	4%	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	2%					
		Surcomptage	0	0	4%	1	4%	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,5%					
		Compte à rebours	0	0	4%	1	4%	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,5%					
		« pour aller à »	4	0	15	15	65%	0	21	91%	0	0	0	0	0	40	22%					
		Addition	1	1	4%	1	4%	0	0	0	0	0	0	0	0	44	24%					
		Addition à trou	4	1	4%	1	4%	0	0	0	0	0	0	0	0	6	3%					
		soustraction	11	20	87%	4	17%	0	0	0	0	0	0	0	0	39	21%					
		Addition et soustraction	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	30	16%					
		multiplication	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	19	10%					
		Choix des opérations approprié	oui	22	96%	22	96%	22	96%	18	78%	18	78%	18	19	83%	156	85%				
non	1	4%	1	4%	1	4%	9	39%	2	9%	5	22%	5	4	17%	28	15%					
Opération bien effectuée	oui	21	91%	21	91%	22	96%	15	65%	23	100%	23	100%	19	12	52%	156	85%				
	non	2	9%	1	4%	1	4%	8	35%	0	0	0	4	11	48%	28	15%					
Phrase réponse adaptée	Oui	23	100%	23	100%	23	100%	21	91%	23	100%	23	100%	22	22	96%	180	98%				
	Non	0	0	0	0	0	0	2	9%	0	0	0	1	1	4%	4	2%					
Résultat correct	Oui	20	87%	21	91%	21	91%	7	30%	21	91%	18	78%	18	12	52%	138	75%				
	non	3	13%	2	9%	2	9%	16	70%	2	9%	5	22%	5	11	48%	46	25%				

8.16 Grille d'analyse des résultats de la situation-problème

GRILLE D'ANALYSE DES RESULTATS DE LA SITUATION PROBLEME							
Traitement des données Démarche suivie	type de problème Choix de l'inconnue	« La bataille ».		« Le bus »		total	pourcentage
		Problème de transformation. → Recherche de l'état final.	Problème de transformation. → Recherche de l'état initial.	Problème de transformation. → Recherche de l'état final.	Problème de transformation. → Recherche de l'état initial.		
Schéma présent	Oui	18	78 %	18	78 %	36	78 %
	non	5	22 %	5	22 %	10	22 %
Schéma adapté	Oui	11	61 %	14	78 %	23	64 %
	non	7	39 %	4	22 %	13	36 %
Type de procédure utilisée	Réponse lue sur le schéma	4	17 %	4	17 %	10	22 %
	Additions et soustractions. → Calcul des transformations au fur et à mesure.	14	61 %	11	48 %	25	54 %
	Additions et soustractions. → calcul séparé des transformations positives et négatives.	5	22 %	8	35 %	11	24 %
Choix des opérations approprié.	Oui	21	91 %	17	74 %	38	83 %
	non	2	9 %	6	26 %	8	17 %
Opérations bien effectuées.	Oui	22	96 %	17	74 %	39	85 %
	Non	1	4 %	6	26 %	7	15 %
Phrase réponse adaptée.	Oui	19	83 %	19	83 %	38	83 %
	Non	4	17 %	4	17 %	8	17 %
Résultat correct.	Oui	21	91 %	13	57 %	34	74 %
	non	2	9 %	10	43 %	12	26 %

8.17 Grille d'analyse des résultats de l'évaluation formative

GRILLE D'ANALYSE DES RESULTATS DE L'EVALUATION FORMATIVE									
Type de problème	« L'ascenseur »		« Le jeu de l'oie »		total	pourcentage			
Choix de l'inconnue	Problème de transformation. → Recherche de l'état final.		Problème de composition de transformations. → Recherche de la transformation composée						
Traitement des données	Problème de transformation. → Recherche de l'état final.		Problème de composition de transformations. → Recherche de la transformation composée		total	pourcentage			
Démarche suivie	Problème de transformation. → Recherche de l'état final.		Problème de composition de transformations. → Recherche de la transformation composée						
Schéma présent	Oui	5	22 %	0	5	11%			
	non	18	78 %	23	41	89%			
Schéma adapté	Oui	5	22 %	0	5	100%			
	non	0		0	0				
Type de procédure utilisée	Réponse lue sur le schéma	5	22 %	0	5	11%			
	Additions et soustractions. → Calcul des transformations au fur et à mesure.	10	43 %	0	10	22%			
	Additions et soustractions. → Calcul séparé des transformations positives et négatives.	8	35 %	19	27	58%			
Choix des opérations appropriées.	Additions et soustractions. → Recherche de l'état final.	0	**	4	4	9%			
	Oui	22	96 %	19	41	89%			
Opérations bien effectuées.	Non	1	4 %	4	5	11%			
	Oui	20	87 %	21	41	89%			
Phrase réponse adaptée.	Non	3	13 %	2	5	11%			
	Oui	21	91 %	19	40	87%			
Résultat correct.	Non	2	9 %	4	6	13%			
	Oui	20	87 %	18	38	83%			
	non	3	13 %	5	8	17%			