



HAL
open science

Le calcul vectoriel en classe de seconde

Guillaume Vouters, Marc-Antoine Saglio

► **To cite this version:**

Guillaume Vouters, Marc-Antoine Saglio. Le calcul vectoriel en classe de seconde. Education. 2017. dumas-01625057

HAL Id: dumas-01625057

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01625057>

Submitted on 5 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École supérieure
du professorat
et de l'éducation
Académie de Paris



Année universitaire 2016-2017

Mémoire

LE CALCUL VECTORIEL EN CLASSE DE SECONDE

Présenté par : M. Guillaume Vouters & M. Marc-Antoine Saglio

Encadré par : M. Yves Martinez-Maure

Mots Clefs : Vecteur, Introduction, Géométrie, Seconde, Enseignement

Table des matières

Introduction.....	2
1. Fiche de lecture.....	3
a) Présentation de l'auteur.....	3
b) Présentation générale de l'article.....	3
c) Analyse de la seconde partie.....	3
d) Conclusion.....	4
2. Programme sur les vecteurs.....	4
a) Programme actuel.....	4
b) Remarques sur le programme.....	5
3. Les difficultés classiques des élèves.....	7
a) Erreur d'application directe de la relation de Chasles.....	7
b) Utilisation à bon escient de la relation de Chasles.....	9
c) Entraînement au calcul vectoriel.....	13
d) Calcul vectoriel dans les problèmes ouverts.....	13
e) Résumé des difficultés rencontrées.....	16
4. Les exercices de calcul vectoriel.....	17
a) Analyse critique d'un exercice.....	17
b) Modification de l'énoncé.....	19
5. Pistes pour améliorer la compréhension du calcul vectoriel.....	20
Conclusion.....	21
Annexe – Extraits de manuels.....	22
Bibliographie.....	23

Introduction

L'enquête PISA 2015 de l'OCDE a récemment pointé du doigt les carences des élèves français en mathématiques. Seuls 8 % des élèves possèdent « suffisamment de connaissances et de compétences scientifiques pour les appliquer de manière créative et autonome dans un large éventail de situations, y compris des situations qui ne leur sont pas familières ».

Introduire des notions auxquels les élèves ne sont pas familiers est donc une tâche extrêmement ardue pour l'enseignant et d'autant plus difficile que la notion est abstraite.

L'introduction de la notion de vecteurs dans le plan en classe de seconde ne semble pas échapper à ce constat. Aux dires de nos collègues expérimentés, ce chapitre est l'un des plus difficile de la classe de seconde et le moins facilement compris des élèves : ces derniers paraissent comprendre plus ou moins aisément la notion de translation, cependant la notion de calcul vectoriel et l'utilisation de la relation de Chasles est souvent mal comprise, appliquée avec beaucoup de difficulté et rarement à bon escient. En effet une bonne compréhension de ce chapitre nécessite des qualités d'abstraction aux élèves.

Afin d'enseigner au mieux le calcul vectoriel, il nous est paru fondamental de comprendre les difficultés des élèves.

L'objectif de ce mémoire est ainsi d'essayer de répondre à la problématique suivante :

- **D'où viennent les difficultés des élèves dans le calcul vectoriel ?**
- **Comment faire en sorte que les élèves maîtrisent au mieux le calcul vectoriel ?**

Afin de nourrir notre réflexion, nous avons étudié les deux articles suivants : « *Les vecteurs à l'issue de la seconde. Une analyse des manuels et de quelques difficultés d'élèves* » de Marilena BITTAR (« Petit x », 2000) et « *Aperçu historique de l'évolution de l'enseignement des vecteurs en France depuis la fin du XIX^e siècle* » de Cissé BA et Jean-Luc DORIER (« L'Ouvert », 2006). La date de parution de ces articles offre une perspective historique intéressante sur une problématique qui est aussi ancienne que l'enseignement des vecteurs et permet des comparaisons avec l'approche actuelle imposée par les programmes.

Nous présenterons ainsi dans une première partie une fiche de lecture de l'article de M. BITTAR. Dans une deuxième partie, nous rappellerons le contenu du programme actuel de seconde sur le calcul vectoriel et nous ferons quelques remarques à son sujet. Dans un troisième temps, nous décrirons et analyserons quelques extraits de traces écrites de nos élèves pour comprendre d'où viennent leurs difficultés. Ensuite, nous analyserons l'énoncé d'un exercice extrait d'un manuel de seconde et rechercherons si une modification de l'énoncé peut permettre de répondre mieux aux objectifs du programme et améliorer la compréhension du calcul vectoriel par les élèves. Finalement, avant de conclure, nous proposerons des pistes permettant de faciliter l'apprentissage et la maîtrise du calcul vectoriel par les élèves.

1. Fiche de lecture

Titre : « Les vecteurs à l'issue de la seconde. Une analyse des manuels et de quelques difficultés d'élèves », issu de *Petit x*, n° 53, pp. 49-68.

Auteur : Marilena BITTAR

Editeur : IREM de Grenoble, Grenoble, 2000

Format : A4, ISSN : 0759-9188

a) Présentation de l'auteur

Marilena BITTAR est docteur en sciences de l'éducation, spécialisée dans la didactique des mathématiques, professeur à l'Université de Mato Grosso do Sul (Brésil). Elle a collaboré à plusieurs articles avec des chercheurs de l'université Joseph Fourier (Grenoble). Le présent article est issu d'une recherche de Mme BITTAR menée au sein du laboratoire Leibniz (CNRS / université Joseph Fourier). La base de données Publimath recense deux autres articles publiés par Mme BITTAR, qui portent sur l'enseignement des vecteurs dans le secondaire et l'apport des calculatrices symboliques ou des logiciels. Les recherches récentes de Mme BITTAR ont d'ailleurs pour thème, de manière générale, l'intérêt des logiciels et de la technologie dans l'enseignement des mathématiques.

b) Présentation générale de l'article

L'article analyse dans une première partie les savoirs à enseigner sur les vecteurs dans le secondaire, notamment au travers des manuels scolaires, de la quatrième à la seconde, en détaillant particulièrement le niveau de seconde. On notera en effet, et c'est une des leçons intéressantes de cet article au regard de la situation actuelle, que les vecteurs étaient introduits auprès des élèves dès la quatrième, jusqu'au début des années 2000. Dans sa seconde partie, l'article cherche à identifier les difficultés que cet enseignement peut engendrer chez les élèves.

c) Analyse de la seconde partie

Afin d'étudier les difficultés des élèves, l'auteur tente de mesurer la disponibilité (au sens d'un outil disponible pour la résolution d'un problème) et l'efficacité (au sens de la réussite dans la résolution d'un problème) de l'outil vectoriel. Un exercice est ainsi soumis à des élèves d'une classe de première S. Ce problème est classique et peut être résolu avec différentes méthodes. L'énoncé du problème est écrit avec l'objectif d'éviter les automatismes créés par l'enseignement du calcul vectoriel : plutôt que de demander de montrer que trois points A, E et C sont alignés (ce qui devrait inciter les élèves à utiliser la notion de colinéarité de vecteurs), il est demandé de prouver que E appartient au segment [AC].

L'expérience montre qu'environ la moitié des élèves pensent d'eux-mêmes à l'outil vectoriel pour résoudre le problème qui leur est soumis. Sur ces copies, environ un quart réussit à démontrer le résultat demandé, les autres commettant des erreurs ou ne parvenant pas à aboutir à la conclusion. Cette expérience est une illustration d'une difficulté majeure des élèves dans leurs débuts avec le calcul vectoriel, sur laquelle nous reviendrons dans ce mémoire : l'absence de stratégie de résolution. Les élèves connaissent ainsi la relation de Chasles mais ne savent souvent pas l'utiliser à bon escient (n'ayant, en particulier, pas de notion de décomposition dans une base vectorielle).

d) Conclusion

L'article conclut à une disponibilité plutôt correcte du calcul vectoriel parmi les élèves testés. Mais à un constat plus inquiétant en matière d'efficacité. Les vecteurs sont vus comme un outil par les élèves, mais ils n'en maîtrisent pas l'efficacité : ces derniers savent effectuer des substitution avec la relation de Chasles, mais leur réussite à montrer le résultat recherché est d'une certaine manière dûe au hasard (celui qui réussit est celui qui a eu la chance de faire les bonnes substitutions). Cette difficulté n'a rien perdu de son actualité dans l'enseignement des vecteurs en seconde en 2017. Elle a été au cœur de notre réflexion d'enseignant cette année et constitue un des principaux sujets de ce mémoire.

2. Programme sur les vecteurs

a) Programme actuel

D'après le bulletin officiel n°30 du 23 juillet 2009, le programme actuel sur les vecteurs est le suivant :

CONTENUS	CAPACITES ATTENDUES	COMMENTAIRES
<p>Vecteurs</p> <p>Définition de la translation qui transforme un point A du plan en un point B.</p> <p>Vecteur \vec{AB} associé.</p> <p>Egalité de deux vecteurs : $\vec{u} = \vec{AB} = \vec{CD}$</p> <p>Coordonnées d'un vecteur dans un repère.</p> <p>Somme de deux vecteurs</p> <p>Produit d'un vecteur par un nombre réel.</p> <p>Relation de Chasles</p>	<ul style="list-style-type: none"> Savoir que $\vec{AB} = \vec{CD}$ équivaut à ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati Connaître les coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$ du vecteur \vec{AB} Calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs Utiliser la notation $\lambda \vec{u}$ Établir la colinéarité de deux vecteurs Construire géométriquement la somme de deux vecteurs Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs 	<p>A tout point C du plan, on associe, par translation qui transforme A en B, l'unique point D tel que [AD] et [BC] ont même milieu</p> <p>La somme des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur \vec{u} et de vecteur \vec{v}</p> <p>Pour le vecteur \vec{u} de coordonnées (a;b) dans un repère, le vecteur $\lambda \vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(\lambda a; \lambda b)$ dans le même repère. Le vecteur $\lambda \vec{u}$ ainsi défini est indépendant du repère.</p>

b) Remarques sur le programme

Progression

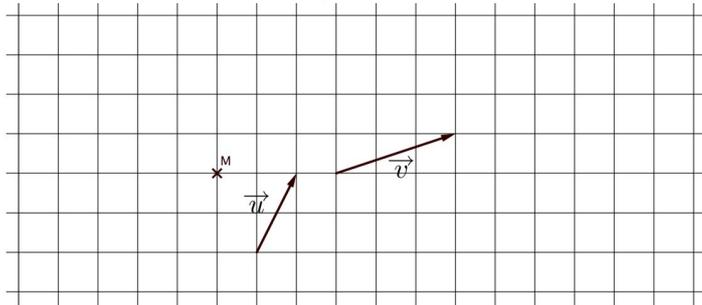
Comme pour les autres thèmes du programme, celui-ci ne suggère pas de progression à l'intérieur de la séquence d'enseignement des vecteurs. Or il nous semble que ce thème, nouveau et dense, exige une attention précise afin d'aboutir à une construction progressive et logique du nouvel outil vectoriel auprès des élèves, en abordant successivement la définition des vecteurs, les aspects géométriques, les aspects numériques et les applications. Une lecture mot-à-mot du programme pourrait laisser penser que la relation de Chasles intervient par exemple après l'introduction des coordonnées ou que la construction géométrique de deux vecteurs est présentée tard dans la séquence ce qui serait, dans un cas comme dans l'autre, dans notre opinion, très confus pour les élèves.

Nous avons ainsi veillé à introduire les coordonnées des vecteurs tardivement, après avoir largement utilisé l'aspect purement géométrique des vecteurs. Nous anticipions en effet que le cadre numérique des coordonnées aurait tendance à se substituer au cadre géométrique initial, c'est-à-dire que dès que les coordonnées seraient introduites, les élèves auraient tendance à vouloir les utiliser systématiquement. Cela s'est vérifié chez quelques-uns, mais, à notre avis, moins que si nous n'avions pas fait plusieurs séances purement « géométriques », sans la notion de coordonnées d'un vecteur. Ainsi, lors d'un DS final, à l'exercice suivant :

Exercice 4. 3 points

On considère les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ainsi que le point M placés sur la figure ci-dessous.

1. Placez sur cette figure le vecteur $-\frac{3}{2}\vec{u}$.
2. Soit N le point tel que $\overrightarrow{NM} = \vec{v} - 2\vec{u}$. Exprimez \overrightarrow{MN} en fonction de \vec{u} et de \vec{v} .
3. Placez sur cette figure le point N (laisser visibles les traits de construction utiles).



seulement trois élèves (sur trente-cinq) ont introduit les coordonnées des vecteurs \vec{u} et \vec{v} , comme dans la copie suivante :

2. $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{NM} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

C'est juste mais à condition d'avoir défini un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) ou le système.

Et ce n'était pas la question ici (non corrigé).

Afin de bien « ancrer » les vecteurs dans un cadre géométrique, nous avons également demandé aux élèves d'utiliser leur compas « du collège » en leur apprenant à construire, à la règle et au compas, la somme de deux vecteurs puis nous avons réalisé plusieurs exercices sur ce thème. Enfin, nous avons profité d'un cours d'accompagnement personnalisé pour faire quelques exercices de construction à la règle et au compas comme la construction de perpendiculaires, la construction de

parallèles, la division d'un segment en « n » morceaux (que peu d'élèves, voire aucun, ne connaissait)...

Pour appuyer sur le cadre géométrique des vecteurs, l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique est bien sûr très utile. Nous avons donc souvent employé des vidéoprojections avec Geogebra au début de notre séquence sur les vecteurs. A titre d'exemple, on trouvera ici <http://bit.ly/2nRgD60> un fichier Geogebra utilisé pour illustrer la notion de translation (*les points A et B étant donnés et M étant un point quelconque, l'image de M par la translation de vecteur \overrightarrow{AB} est le symétrique de A par rapport au milieu de [MB], c'est-à-dire le point N tel que ABNM est un parallélogramme*).

Enfin, dans la progression de la séquence sur les vecteurs, une difficulté provient du fait que les vraies applications des vecteurs apparaissent à la toute fin du cours, après l'apprentissage de l'outil, qui est long (somme de vecteurs, relation de Chasles, multiplication par un scalaire, calcul vectoriel...).

L'outil vectoriel reste ainsi « stérile » pendant longtemps aux yeux des élèves. A une exception : la démonstration qu'un quadrilatère est un parallélogramme (en utilisant que ABDC est un parallélogramme s.s.i. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$), qui est beaucoup plus rapide avec l'utilisation des vecteurs qu'avec le calcul des coordonnées des milieux des diagonales, méthode apprise vers le début d'année de seconde. Il est donc intéressant d'insister sur ce point, tout d'abord avec des exemples sans coordonnées. Un exercice « canonique » est la configuration utilisée pour la somme de deux vecteurs : soient ABCD et CEFD deux parallélogrammes, montrons que ABEF est un parallélogramme. La résolution de cet exercice sans l'outil vectoriel est laborieuse (mais instructive). Elle utilise la propriété des milieux dans les triangles BDE et ACF. La résolution de cet exercice avec les vecteurs est immédiate. Quelques séances plus tard, une fois les coordonnées des vecteurs connues, il faut revenir à ce type d'exercice en utilisant cette fois les coordonnées. Cela ouvre le champ à deux catégories d'exercices : vérification qu'un quadrilatère dont les coordonnées des sommets sont connues est un parallélogramme (avec des variables didactiques bien choisies qui rendraient compliqué le calcul des coordonnées des milieux des diagonales) et recherche des coordonnées d'un point qui constitue le quatrième sommet d'un parallélogramme. Ce dernier exercice est utile car il mobilise chez les élèves la notion d'inconnue (ici l'abscisse et l'ordonnée du point) et de résolution d'équation, qu'il est important de pratiquer sans relâche.

Quelle démonstration faire devant les élèves ?

L'introduction des vecteurs par la notion de translation, elle-même définie par un algorithme consistant tout d'abord à construire le milieu d'un segment puis à construire le symétrique d'un point par rapport à ce milieu¹, est difficile pour les élèves. Peut-être cela sera-t-il plus facile au cours des prochaines années, car la réforme des programmes du collège a été marquée par le retour des transformations du plan au collège, dont la translation.

Quoi qu'il en soit, cette étape est importante car elle donne une définition précise à la notion de vecteur (comme l'indique le programme, le vecteur \overrightarrow{AB} est associé à l'unique translation qui transforme A en B). Cette définition permet de démontrer rigoureusement les premiers résultats de la séquence (égalité vectorielle, somme de deux vecteurs...). Mais cette rigueur échappe peut-être aux élèves. De surcroît, le revers de cette définition des vecteurs est qu'on y revient peu ensuite. Dès la somme de deux vecteurs obtenue ainsi que la relation de Chasles, on utilise peu l'idée de translation et encore moins le petit algorithme permettant d'obtenir l'image d'un point par une translation. On constatera, par ailleurs, que les notions de direction-sens-longueur, qui introduisaient la notion de vecteur en classe de quatrième jusqu'à la fin des années 1990, cf. BITTAR, ont

¹ Cf. programme, colonne « commentaires » : A tout point C du plan, on associe, par translation qui transforme A en B, l'unique point D tel que [AD] et [BC] ont même milieu.

complètement disparu des programmes aujourd'hui ! Alors que la notion de direction d'un vecteur pourrait être utile jusque tardivement dans la séquence (par exemple lors de la présentation de la colinéarité : deux vecteurs sont colinéaires s.s.i ils ont la même direction).

On notera que le programme est, comme toujours, muet sur les démonstrations qu'il est recommandé de faire aux élèves. Et, comme souvent, il se produit, à la fin d'une démonstration, l'échange suivant avec les élèves : « faut-il savoir le refaire (élèves) ? Ce n'est pas exigé mais c'est utile pour bien comprendre le cours (professeur) » ...

Nous avons ainsi estimé qu'il était intéressant de présenter quelques autres démonstrations devant les élèves, notamment la formule des coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} connaissant les coordonnées des points A et B (mais pas la formule des coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ connaissant les coordonnées de chacun des vecteurs, bien qu'elle ne soit pas beaucoup plus difficile) et l'équivalence entre colinéarité de deux vecteurs et égalité du produit en croix de leurs coordonnées.

Notion de barycentre

On remarque que le mot « barycentre » n'apparaît pas dans le programme. En fait la notion de barycentre a totalement disparu des programmes de lycée série S à la dernière réforme.

Comme l'utilité du calcul vectoriel et l'utilisation de la relation de Chasles apparaissent de façon assez naturelle dans l'étude des barycentres, nous n'avons pas pu nous priver de cette notion que nous avons introduite, sans la nommer, au travers d'exemples simples : centre de gravité de trois points ou, un peu plus généralement, barycentre de trois points à coefficients positifs et entiers.

D'ailleurs au cours de nos recherches sur le sujet, nous avons trouvé de nombreux exemples d'exercices sur la notion de barycentre, la relation de Chasles y trouvant une application directe.

En annexe se trouve un certain nombre d'exemples d'exercices sur la notion de barycentre que nous avons trouvé dans les ouvrages suivants : Déclic 2nde (Hachette), Transmath 2nde (Nathan) et Odyssée 2nde (Hatier)

3. Les difficultés classiques des élèves

a) Erreur d'application directe de la relation de Chasles

Afin de tester si les élèves avaient correctement assimilé la relation de Chasles, nous avons demandé aux élèves de rechercher l'exercice 1 suivant : (Déclic 2nde, Hachette)

Dans un repère, on donne les 3 sommets du triangle ABC : A(2 ; 3), B(-4 ; 2) et C(3;-7).

1. Calculer les coordonnées du point G tel que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

2. Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [AC] et [BC].

a) Calculer les coordonnées des points I, J et K

b) Démontrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BJ}$; $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CI}$

c) Reconnaître le point G

Modalités :

- L'exercice a été donné en devoir maison
- Chaque élève a disposé d'une semaine pour rendre sa copie

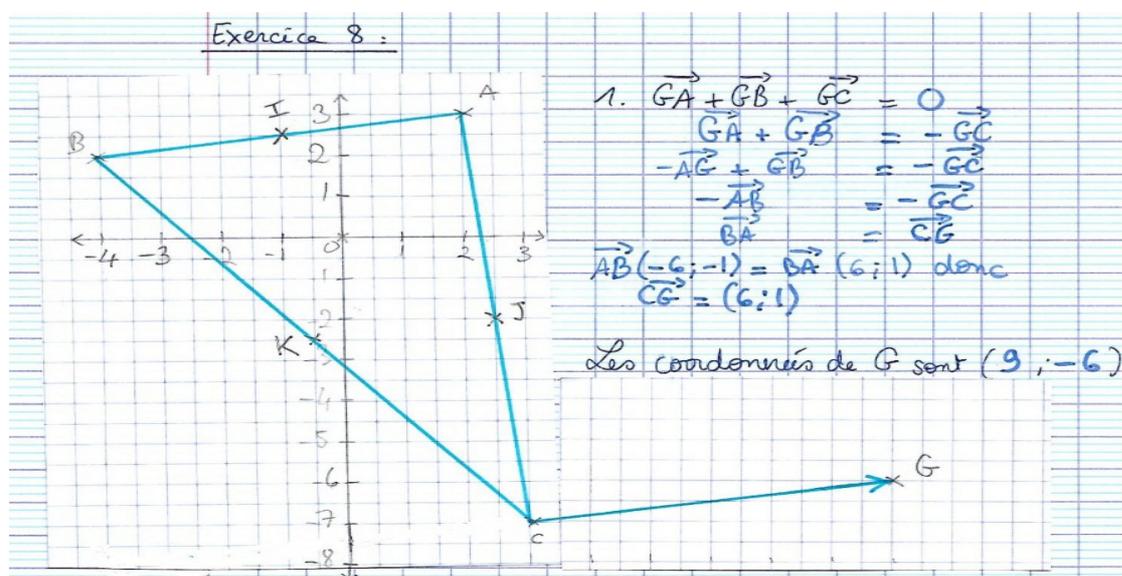
- Une note a été attribuée au devoir maison, cette note comptant dans la moyenne avec un coefficient peu élevé

Résultats :

Après une semaine de cours sur la relation de Chasles, nous avons constaté que la relation de Chasles n'était pas encore suffisamment bien comprise et n'était pas bien appliquée.

A la question 1 : « calculer les coordonnées du point G tel que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ »

une erreur classique fut de transformer la relation de Chasles $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ en la relation $-\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. Dans la copie suivant, l'élève commet cette erreur en ligne 3 :



Cette erreur que nous n'attendions pas forcément fut assez fréquente comme le montre le tableau suivant :

Nombre total de copies d'élèves	34
Nombres d'élèves ayant abordé cette question	33
Nombre d'élèves ayant commis cette erreur	12

Ainsi plus du tiers des élèves ont écrit une égalité du type $-\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

A la lumière de cela, nous avons revu avec les élèves la relation de Chasles et ré-expliqué sa règle d'utilisation.

Malgré ces mises en garde, des erreurs du même type ont à nouveau été commises dans l'évaluation de fin de chapitre. Nous en avons relevé 6 parmi les 34 copies, ce qui montre tout de même une certaine amélioration.

Si l'on résume les difficultés des élèves dans leur appropriation de la relation de Chasles, celles-ci sont de deux ordres : soit ils ne remarquent pas l'existence du point pivot (extrémité du premier représentant de vecteur et origine du second) et écrivent par exemple $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{BC}$, soit ils le

voient et ne font pas attention au reste (vecteur opposé ou non, vecteur multiplié par un scalaire...). Comme la relation de Chasles est présentée lors de la définition de la somme de vecteurs, les élèves ne perçoivent pas non plus immédiatement le caractère quelconque des points qui apparaissent dans la relation. On avait ainsi fait une interrogation surprise d'une demi-heure (de quatre questions), environ trois séances après l'introduction de la relation de Chasles. L'exercice 3 ci-dessous porte sur la relation de Chasles :

Exercice 3.

1. Rappelez la relation de Chasles :

2. A, B, C et D sont des points quelconques.
 $\vec{CD} + \vec{AB} + \vec{BC}$ est égal à l'un des quatre vecteurs suivants :
 a. \vec{AB} b. \vec{AC} c. \vec{AD} d. \vec{BC}
 Lequel ? Justifiez votre réponse.

3. A quel vecteur est égal $\vec{CA} - \vec{CB} - \vec{BA}$? Justifiez votre réponse.

A la première question, la relation de Chasles a été citée correctement par 25 % des copies (« soient A, B et C trois points quelconques... »). 60 % des copies ont simplement indiqué $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ (ou $\vec{AM} + \vec{MB} = \vec{AB}$), sans quantificateur . Les copies restantes (15 %) ont reproduit la relation de Chasles avec une erreur (typiquement celle indiquée plus haut).

En conclusion, il faut insister sur le « point pivot » dans la relation de Chasles, qui est vraie pour trois points quelconques, et sur le fait que seule une somme de deux vecteurs peut être simplifiée par la relation de Chasles (i.e. la multiplication par un scalaire change tout...). Plusieurs exercices corrigés en classe sont très utiles pour améliorer l'utilisation de la relation de Chasles. Voici un exemple d'exercice fait en classe avec cet objectif (exercice corrigé par les élèves eux-même au tableau) :

Exercice 1.

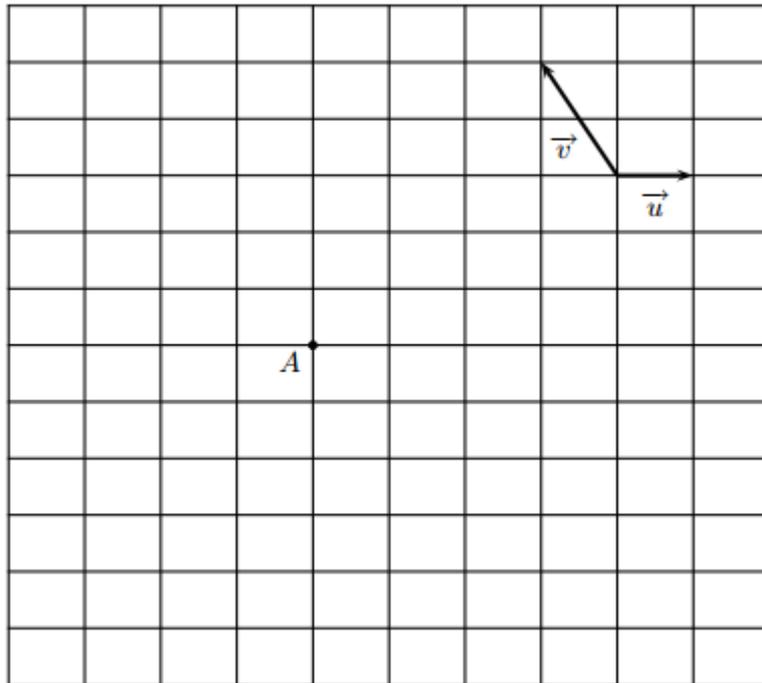
Simplifiez les expressions suivantes en utilisant la relation de Chasles :

- | | | |
|--|--------------------------------------|--|
| a. $\vec{BC} - \vec{BA} + \vec{BD} - \vec{BC}$ | b. $\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{AB}$ | c. $\vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BC} - \vec{BA}$ |
| d. $\vec{AC} + 2\vec{CB} + \vec{BA}$ | e. $2\vec{AB} - \vec{BC} - \vec{CA}$ | f. $\vec{AB} - \vec{CD} - \vec{AC} + \vec{BA}$ |

b) Utilisation à bon escient de la relation de Chasles

Afin de tester si les élèves savaient utiliser la relation de Chasles à bon escient, c'est-à-dire d'une façon qu'elle puisse leur permettre de résoudre un problème ou une question d'un exercice, nous leur avons posé le problème suivant dans lequel on s'intéresse plus particulièrement à la question 2 : « A l'aide de la relation de Chasles, exprimer les vecteurs \vec{BD} et \vec{FE} en fonction de \vec{u} et \vec{v} . Quelle est la nature du quadrilatère BDEF ? »

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs et A un point du plan représentés sur la figure ci-dessous.



1. Construire les points B , D , E et F définis par les relations vectorielles suivantes :

a) $\vec{AB} = 2\vec{u}$

b) $\vec{AD} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$

c) $\vec{AE} = -2\vec{u} + \vec{v}$

d) $\vec{AF} = -3\vec{u} - \vec{v}$

2. A l'aide de la relation de Chasles, exprimer les vecteurs \vec{BD} et \vec{FE} en fonction de \vec{u} et \vec{v} . Quelle est la nature du quadrilatère $BDEF$?

Modalités :

- Cet exercice a été posé en devoir en classe
- Ce devoir en classe intervenait à la fin du chapitre sur les vecteurs
- Cet exercice était le deuxième exercice de l'évaluation qui en comprenait six
- Un exercice similaire avait été donné une semaine auparavant en exercice à faire à la maison et avait été corrigé en classe

Résultats :

Nombre total de copies	34
Nombre d'élèves ayant abordé la question 2 de cette exercice	18
Nombre d'élèves ayant répondu correctement sans utiliser la relation de Chasles et sans justification	10
Nombre d'élèves ayant répondu correctement à la question en utilisant la relation de Chasles	4

Commentaires et analyse :

Ainsi, 10 élèves sur 17 ont indiqué sur leur copie une réponse correcte sans appliquer la relation de Chasles et sans aucune justification, comme le montre cette copie d'élève suivante :

Ex. 2
2. $\vec{BD} = \vec{u} + 2\vec{v}$ $\vec{FE} = \vec{u} + 2\vec{v}$) A prouver

Ces réponses s'expliquent probablement par un jeu de lecture graphique.

Seuls 4 élèves ont pensé à introduire le point A comme le montre la copie d'un élève ci-dessous :

2. $\vec{BA} + \vec{AD} = \vec{BD}$
 $-2\vec{u} + 3\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{BD}$
 $\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{BD}$
 $\vec{FA} + \vec{AE} = \vec{FE}$
 $3\vec{u} + \vec{v} + (-2\vec{u}) + \vec{v} = \vec{FE}$
 $\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{FE}$

ce qui leur a permis de justifier correctement la réponse à la question posée.

Il ressort de ces résultats qu'en général nos élèves ne voient pas et ne savent pas quel point introduire pour arriver à décomposer un vecteur selon d'autres vecteurs leur permettant d'obtenir la relation désirée.

C'est ce que BITTAR appelle « le risque de tourner en rond » (p. 56, p. 64, p. 65). Il est important d'essayer de donner une stratégie aux élèves pour qu'ils évitent autant que possible cette situation. Nous avons pour cela consacré une séance à l'analyse et à la résolution des exercices suivants :

Exercice 3.

A, B et C sont trois points quelconques.

D et E sont deux points tels que $\vec{AD} = \frac{3}{2}\vec{AB}$ et $\vec{DE} = \frac{3}{2}\vec{BC}$.

1. Montrez que $\vec{AE} = \frac{3}{2}\vec{AC}$
2. Que pouvez-vous en conclure ?

Exercice 4.

A, B et C sont trois points quelconques.

E et F sont deux points tels que $\vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{BC}$ et $\vec{AF} = \frac{3}{2}\vec{AC} + \vec{BA}$.

1. Montrez que $\vec{EF} = \frac{1}{2}\vec{BC}$
2. Que pouvez-vous en déduire concernant les droites (EF) et (BC) ?

Exercice 5.

A, B et C sont trois points quelconques.

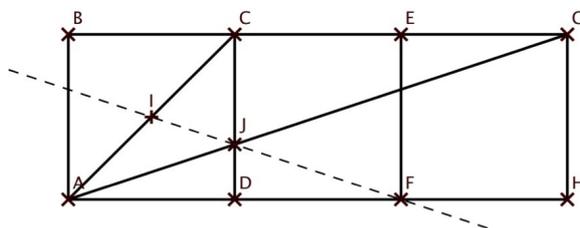
M, N et P sont trois points tels que $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{CN} = \frac{1}{3}\vec{CA}$ et $\vec{CP} = \frac{1}{3}\vec{BC}$.

1. Montrez que $\vec{MN} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$ puis que $\vec{NP} = \vec{MN}$.
2. Que pouvez-vous en conclure ?

Au cours de cette séance, nous avons tout d'abord passé une vingtaine de minutes au premier exercice en analysant l'énoncé : quels sont les points quelconques ? quels sont les points qui ont une relation de dépendance et que l'on pourra donc exprimer en fonction des autres points grâce à la relation de Chasles ? dans l'égalité à prouver : où se trouvent les points quelconques et les points dépendants ? quelles sont les différentes méthodes de démonstration d'une égalité ? Puis nous avons résolu l'exercice. Evidemment, comme le dit d'ailleurs BITTAR, la notion de décomposition dans un repère est en réalité sous-jacente à ce type de problème (on pourrait dans ces exercices tout exprimer dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$), mais il est bien sûr hors de question d'en parler aux élèves.

Nous avons constaté que les élèves réussissaient beaucoup mieux les exercices (ci-dessus n° 4 et 5) après cette analyse. L'objectif final de ce type d'exercice est d'obtenir une autonomie complète des élèves pour rechercher une colinéarité entre vecteurs qui prouve un alignement de points ou un parallélisme de droites. Comme par exemple avec l'exercice ci-dessous :

$ABCD$, $DCEF$ et $FEGH$ sont trois carrés. I est le milieu de $[AC]$ et J est le point d'intersection des droites (CD) et (AG) (cf. figure). Démontrez que les points I , J et F sont alignés.

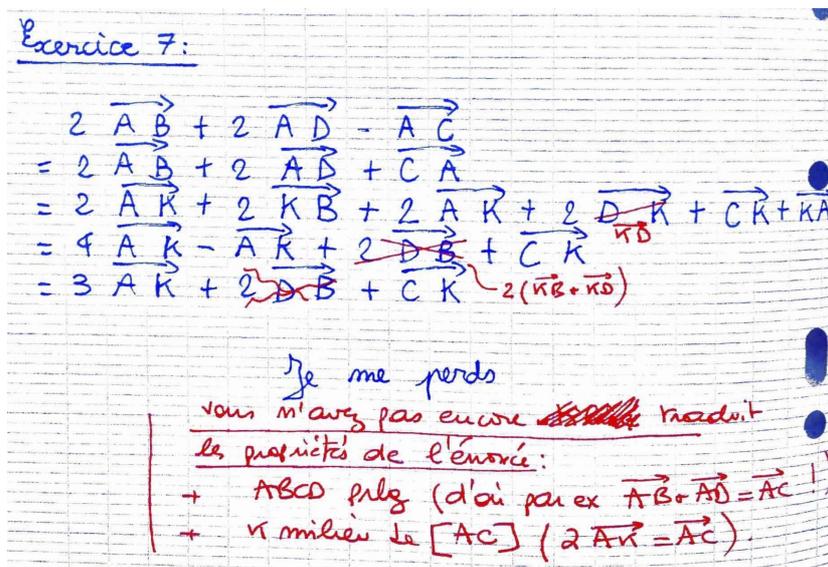


Malgré tout, on a constaté lors du DS final de la séquence Vecteurs que le risque de « tourner en rond » est toujours latent. Ainsi, l'exercice suivant (certes, le 7^e exercice du DS d'une heure) n'a été résolu que dans une copie (sur 34). Certains élèves (voir image ci-dessous) ont clairement indiqué qu'ils tournaient en rond sans trouver. Cet exercice, pourtant simple, possède une petite originalité : c'est aux élèves d'exprimer les égalités vectorielles traduisant les propriétés de la figure (ce que quasiment aucun élève n'a fait). Ainsi, les élèves n'ont pensé qu'à la relation de Chasles, sans savoir comment l'utiliser à bon escient.

Exercice 7. 2 points

Soit $ABCD$ un parallélogramme et I le milieu de ses diagonales. Démontrez que :

$$2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$$



c) Entraînement au calcul vectoriel

En seconde, le calcul vectoriel à proprement parler est constitué de la bilinéarité de la multiplication des scalaires et des vecteurs. Les élèves ne découvriront en effet le produit scalaire qu'en classe de 1ère (série scientifique). A ces relations de bilinéarité s'ajoutent éventuellement, lorsque les vecteurs s'expriment grâce à deux points (origine-extrémité), des simplifications obtenues grâce à la relation de Chasles.

Il est tout à fait indispensable d'entraîner les élèves à ces calculs (développement, factorisation, réduction d'écritures vectorielles longues...). Voici un exemple d'exercices, corrigés en cours, qui ont été réalisés dans ce but.

Exercice 2.

Développez et simplifiez les expressions suivantes :

1. $\vec{u} - 2(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{1}{3}\vec{v}$
2. $-\frac{2}{5}\vec{u} + \vec{u} - \frac{1}{4}(\vec{u} - \vec{v})$
3. $\frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) - \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v})$
4. $5\vec{u} - 3\vec{v} - (\vec{u} + \vec{v})$

Voici également un exercice de DS qui a été soumis aux élèves, sur le même thème :

Simplifiez les expressions suivantes en rappelant (lors de sa première utilisation) le nom de la propriété que vous utilisez.

1. $\vec{AD} + \vec{BC} - (\vec{AC} - \vec{DB})$
2. $2\vec{AC} - \vec{CB} + 2\vec{BA}$

On constate que les élèves réussissent plutôt bien ce type d'exercices et acquièrent ainsi rapidement une bonne maîtrise du calcul vectoriel. Les difficultés (mauvaise factorisation, erreurs d'étourderies...) sont généralement rencontrées chez les mêmes élèves que ceux qui peinent dans les exercices d'arithmétique ou de résolution d'équations. Elles sont donc, pour ces derniers, d'autant plus difficiles à combattre.

d) Calcul vectoriel dans les problèmes ouverts

Nous avons voulu tester si les élèves avaient compris l'utilité des vecteurs et du calcul vectoriel dans des problèmes de géométrie.

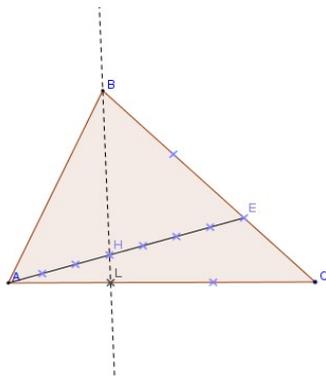
Pour cela, nous avons choisi de leur poser deux problèmes ouverts. Nous avons opté pour un problème trouvé dans Transmath, 2nde, p 245 et un autre trouvé provenant de Maths Déclic, 2nde, p 318.

L'énoncé de l'exercice de Déclic utilise des égalités vectorielles. Afin de ne pas mettre les élèves sur la voie des vecteurs et du calcul vectoriel, nous avons volontairement modifié l'énoncé afin de ne pas faire apparaître la notion de vecteur.

Nous avons donc posé les problèmes de la manière suivante :

Problème 1

Sur la figure ci-dessous, les graduations sont régulières.



Démontrez que les points B, H et L sont alignés

Problème 2

On considère un rectangle ABCD. Soient I le point de [AB] tel que $AI = \frac{3}{7}AB$ et J le point de [BC] défini par $BJ = \frac{4}{7}BC$.

Que peut-on dire des droites (IJ) et (AC) ?

Modalités :

- Ces exercices furent proposés en demi-groupe
- On a demandé aux élèves de se mettre par groupe de deux
- Les élèves devaient d'abord chercher le problème 1 et disposaient d'une heure pour leurs recherches
- On a demandé aux élèves de nous remettre une trace écrite de leurs recherches en leur précisant qu'ils seraient évalués sur la narration de leurs idées et la façon dont ils les avaient exploitées, qu'elles aient abouti ou non.
- Ces problèmes furent posés à la fin du chapitre « Vecteurs dans le plan » et la veille de l'évaluation des élèves sur ce chapitre
- Aucune indication ne fut donné pendant la séance pour résoudre l'exercice, seules des explications et clarifications des énoncés furent apportées

Résultats :

- 11 groupes sur 13 ont passé l'heure entière sur le problème 1. Un seul d'entre eux a réussi à résoudre le problème 1. Seuls deux groupes ont abordé le problème 2 après plusieurs tentatives infructueuses de résolution du problème 1. Parmi ces deux groupes, un a réussi à résoudre le problème 2 sans l'outil vectoriel, en se plaçant dans un repère orthogonal.

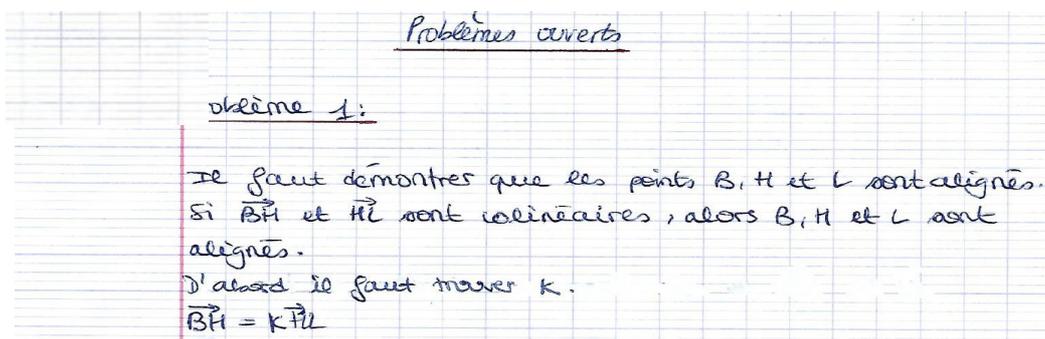
- Parmi les tentatives infructueuses :
 - deux groupes ont voulu montrer dans le problème 1 que les droites (BL) et (AC) étaient perpendiculaires en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore (alors que les droites n'étaient pas perpendiculaires).
 - deux groupes ont voulu utiliser la notion de repère, mais ont buté sur la façon dont fixer l'axe des abscisses et des ordonnées (Nota Bene : cela est à mettre en parallèle avec la remarque sur l'existence générale d'un repère sous-jacent dans de nombreux problèmes utilisant les vecteurs, montrée dans BITTAR et rappelée au paragraphe 3.b ci-dessus).
- En ce qui concerne l'utilisation de la notion de vecteurs :

Nombres de copies rendues	13
Nombres de groupes utilisant la notion de vecteurs	8
Nombres de groupes traduisant correctement l'alignement en terme de colinéarité	6
Nombre de groupes pensant à utiliser la relation de Chasles	3
Nombre de groupes arrivant à résoudre l'un des deux problèmes vectoriellement	1

Commentaires et analyse :

- Cinq groupes sur treize ne voient pas l'utilité du calcul vectoriel et ne pensent pas à l'utiliser alors que cet exercice a été donné à la fin du chapitre « Vecteurs dans le plan ».
- Parmi ceux qui utilisent la notion de vecteurs, six groupes traduisent correctement l'alignement en terme de colinéarité.

Parmi ces 6 groupes, deux groupes se sont arrêtés là ne sachant pas comment poursuivre comme le montre l'extrait ci-dessous :



Les autres tentatives infructueuses reposent essentiellement sur l'introduction d'un repère comme le montre l'exemple suivant :

504. Nous avons tout d'abord tenté de démontrer que \vec{BH} et \vec{BL} étaient colinéaires, ce qui aurait impliqué que B, H et L soient alignés. Pour ce faire, nous avons considéré le repère quelconque BHE, ce qui nous a permis de déduire les coordonnées de B (0; yB), H (0; 0) et L (0; -1). Nous avons alors cherché à utiliser la formule $x'y - xy' = 0$ en vue de démontrer cette colinéarité.
 $\vec{BH} (0; -yB)$ $\vec{BL} (0; -1-yB)$
 Cependant, nous n'avons que trop tard réalisé que $0 \times (-1-yB) - 0 \times (-yB) = 0$ ne nous répondait pas, car cela ne démontrait que que pour k nul et v non nul, $k\vec{v} = 0$.

La tentative ayant abouti a consisté a exprimé les vecteurs \vec{BH} et \vec{BL} en fonction des vecteurs \vec{BC} et \vec{CA} comme le montre l'extrait suivant :

$$\begin{aligned}
 \vec{BH} &= \vec{BE} + \vec{EH} \\
 &= \frac{2}{3}\vec{BC} + \frac{4}{7}\vec{EA} \\
 \vec{BL} &= \vec{BC} + \vec{CL} \\
 &= \vec{BC} + \frac{2}{3}\vec{CA} \\
 \vec{EA} &= \vec{EC} + \vec{CA} \\
 &= \frac{1}{3}\vec{BC} + \vec{CA} \\
 \vec{BH} &= \frac{2}{3}\vec{BC} + \frac{4}{7}\left(\frac{1}{3}\vec{BC} + \vec{CA}\right) \\
 &= \frac{2}{3}\vec{BC} + \frac{4}{7}\left(\frac{1}{3}\vec{BC} + \vec{CA}\right) \\
 &= \frac{2}{3}\vec{BC} + \frac{4}{21}\vec{BC} + \frac{4}{7}\vec{CA} \\
 &= \frac{18}{21}\vec{BC} + \frac{4}{7}\vec{CA} \\
 &= \frac{6}{7}\vec{BC} + \frac{4}{7}\vec{CA} \\
 \boxed{\vec{BH} = \frac{6}{7}\vec{BL}}
 \end{aligned}$$

Bien que cette tentative ait abouti, on peut tout de même constater un manque de recul manifeste par rapport à cette notion car il n'y a aucune justification quant au choix des vecteurs \vec{BC} et \vec{CA} pour exprimer les vecteurs \vec{BH} et \vec{BL} , si bien que l'on n'est pas certain du fait que ce choix soit intentionnel ou le fruit du hasard.

e) Résumé des difficultés rencontrées

En résumé, nos investigations ont permis de mettre en lumière trois types de difficultés d'élèves en calcul vectoriel :

1. Quelques élèves ne savent pas appliquer directement la relation de Chasles en commettant l'erreur classique, du type : $-\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

2. Certains élèves ne savent pas quels points introduire dans la relation de Chasles pour leur permettre de démontrer un résultat. Ils n'ont pas de stratégie et « tournent en rond » en espérant que le résultat finira par apparaître.

3. Certains élèves ne comprennent pas l'utilité du calcul vectoriel dans l'approche d'un problème de géométrie plane. Ils perdent de vue les deux applications majeures des vecteurs, qui sont l'objectif de cette année de seconde (preuve du parallélisme de droites et de l'alignement de points) sans oublier l'application immédiate, apprise dès la définition des vecteurs (preuve qu'un quadrilatère est un parallélogramme). Ils confondent ces applications avec les outils du calcul vectoriel (somme, multiplication par un scalaire, bilinéarité, relation de Chasles, coordonnées).

4. Les exercices de calcul vectoriel

a) Analyse critique d'un exercice

Reprenons l'exercice déjà évoqué dans le paragraphe 3 issue du manuel Décllic 2nde, Hachette :

Dans un repère, on donne les 3 sommets du triangle ABC : $A(2 ; 3)$, $B(-4 ; 2)$ et $C(3 ; -7)$.

1. Calculer les coordonnées du point G tel que : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$
2. Soient I , J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.
 - a) Calculer les coordonnées des points I, J et K
 - b) Démontrer que $\vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AK}$; $\vec{BG} = \frac{2}{3} \vec{BJ}$; $\vec{CG} = \frac{2}{3} \vec{CI}$
 - c) Reconnaître le point G

- Analysons de plus près la question 1 : « Calculer les coordonnées du point G tel que : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ »

A la réflexion, cette question nous est apparue mal formulée. En effet, à ce stade de l'exercice, rien ne permet d'affirmer qu'il existe un unique point G vérifiant la relation $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

Il aurait d'abord fallu montrer l'existence et l'unicité d'un tel point.

Ainsi se privant de résultats généraux sur les barycentres, qui ne sont plus au programme, des questions supplémentaires auraient pu/du être intégrées à cet exercice afin de lever toute interrogation/doute qu'auraient pu avoir certains élèves.

Qui plus est, ces questions supplémentaires auraient permis l'utilisation de la relation de Chasles qui est au programme de seconde.

- Analysons à présent la question 2. b) : Démontrer que $\vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AK}$; $\vec{BG} = \frac{2}{3} \vec{BJ}$; $\vec{CG} = \frac{2}{3} \vec{CI}$.

Il est demandé aux élèves de vérifier par le calcul ces trois égalités dans le cas particulier des points $A(2 ; 3)$, $B(-4 ; 2)$ et $C(3 ; -7)$, en calculant les coordonnées de vecteurs.

Le danger d'une telle formulation est que **l'élève ne réalise pas que le résultat de cet exercice est général** et qu'il est vrai indépendamment des coordonnées des points choisis.

Nous avons posé cet exercice tel que.

Modalités :

- Cet exercice fut donné en devoir maison
- Les élèves ont disposé d'une semaine pour rendre leur copie

Résultats :

- Nous avons recueillis les données ci-dessous :

Nombre total de copies d'élèves	34
Nombres d'élèves ayant abordé cette question	22
Nombre d'élèves ayant vérifié l'égalité en utilisant les coordonnées	12
Nombre d'élèves ayant vérifié l'égalité dans le cas général en utilisant la relation de Chasles	1

- Ce tableau montre en effet que la grande majorité des élèves a fait la vérification de l'égalité en utilisant les coordonnées des points. Un seul élève a pensé à démontrer cette relation dans le cas général. Vu l'énoncé de l'exercice, il est même étonnant qu'un élève y ait pensé car, **en aucun cas, l'exercice ne laissait penser que ce résultat était général.**

Ci-dessous la copie de cet élève :

b) On sait que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$
donc $\vec{GA} + \vec{GA} + \vec{AB} + \vec{GA} + \vec{AC} = \vec{0}$
 $3\vec{GA} = -\vec{AB} - \vec{AC}$
 $3\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AC}$
 $\vec{AG} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{3}$
 $\vec{AG} = \frac{\vec{AK} + 2\vec{KB} + \vec{AK} + \vec{KE}}{3}$
 $\vec{AG} = \frac{2\vec{AK} + \vec{KB} + \vec{KE}}{3}$
 \vec{KB} et \vec{KE} sont opposés donc :
Donc $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AK}$
D'un autre côté, $\vec{GB} + \vec{BA} + \vec{GB} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$
En réutilisant la même méthode : $3\vec{GB} = -\vec{BA} - \vec{BC}$
 $3\vec{BG} = \vec{BA} + \vec{BC}$
 $\vec{BG} = \frac{\vec{BA} + \vec{BC}}{3}$
 $\vec{BG} = \frac{\vec{BJ} + \vec{BI} + \vec{BJ} + \vec{BI}}{3}$
 $\vec{BG} = \frac{2\vec{BJ} + \vec{BI} + \vec{BI}}{3}$
Donc $\vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BJ}$
Enfinement, $\vec{GC} + \vec{CA} + \vec{GC} + \vec{CB} + \vec{GC} = \vec{0}$
Toujours avec la même méthode : $3\vec{GC} = -\vec{CA} - \vec{CB}$
 $3\vec{CG} = \vec{CA} + \vec{CB}$
 $\vec{CG} = \frac{\vec{CA} + \vec{CB}}{3}$
 $\vec{CG} = \frac{\vec{CI} + \vec{CI} + \vec{CI} + \vec{CI}}{3}$
 $\vec{CG} = \frac{2\vec{CI} + \vec{CI}}{3}$
Donc $\vec{CG} = \frac{2}{3}\vec{CI}$
c) G se situe aux deux tiers des trois médianes :
c'est le point de gravité!

On remarque que l'élève a pensé à introduire successivement le point K, puis le point J et le point I dans la relation de Chasles afin de prouver le résultat voulu.

b) Modification de l'énoncé

Il nous est apparu nécessaire de modifier l'énoncé de cet exercice dans le but :

- d'utiliser la relation de Chasles
- de montrer l'existence et l'unicité du point vérifiant une égalité du type $\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} = \vec{0}$ avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$
- de montrer que l'existence d'un point unique vérifiant $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ est indépendante des coordonnées des points A, B et C

Voici l'énoncé complet de l'exercice modifié :

Dans un repère $(O;I;J)$, soient 3 points A , B et C quelconques du plan. On souhaite déterminer l'ensemble des points M qui vérifient l'égalité $\vec{MA} + \vec{MB} + 4\vec{MC} = \vec{0}$

1. A l'aide de la relation de Chasles, déduire de $\vec{MA} + \vec{MB} + 4\vec{MC} = \vec{0}$ que :

$$\vec{AM} = \frac{1}{6} \vec{AB} + \frac{2}{3} \vec{AC}$$

Justifier alors l'existence d'un unique point M vérifiant cette égalité.

On se place à présent dans le cas particulier où $A(-2;0)$, $B(0;4)$ et $C(5;2)$

2. Déduire de la question 1 que les coordonnées de l'unique point M vérifiant cette égalité sont $(3;2)$

...

Modalités :

- Cet exercice a été posé en devoir en classe
- Ce devoir en classe intervenait à la fin du chapitre sur les vecteurs
- Cet exercice était le dernier exercice de l'évaluation

Résultats :

Nombre total de copies d'élèves	34
Nombres d'élèves ayant abordé la question 1 de l'exercice	11
Nombre d'élèves ayant vérifié l'égalité dans le cas particulier des points données en questions 2	3
Nombre d'élèves ayant répondu correctement à cette question	1

Commentaires et analyse :

Bien que l'énoncé de l'exercice soit plus satisfaisant et rigoureux d'un point de vue mathématique, les résultats présentés dans le tableau ci-dessous ne montrent pas d'amélioration dans la résolution de ce type d'exercices.

Cependant ces résultats sont à relativiser car seuls 11 élèves ont abordés la première question de cet exercice ce qui n'est pas étonnant puisque cet exercice figurait à la fin de l'évaluation et certains élèves n'ont pu l'aborder faute de temps.

Un seul élève a réussi à répondre correctement à la question posée :

Exercice 5:1) $\vec{MA} + \vec{MB} + 4\vec{MC} = \vec{MA} + \vec{MA} + \vec{AB} + \vec{MA} + 4\vec{AC} = 0$
 $6\vec{MA} + \vec{AB} + 3\vec{AC} = 0$
 $\vec{AB} + 3\vec{AC} = -6\vec{MA}$
 $\frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} = -\vec{MA}$
 $\frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} = \vec{AM}$

Donc $\frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} = \vec{AM}$.

Le lecteur aura peut-être remarqué au style de l'écriture que c'est le même élève qui avait répondu à une question équivalente dans le devoir maison, donc aucun autre élève ne semble avoir assimilé cette notion.

Nous avons aussi noté que certains élèves ont vérifié l'égalité avec les coordonnées des points donnés dans la question 2. Ceci est certes une bonne initiative mais peut également s'interpréter de la façon suivante : l'exercice donné à la maison et corrigé en classe leur a donné une méthode de résolution dont les élèves ne savent plus s'abstraire pour résoudre le problème dans le cas général.

5. Pistes pour améliorer la compréhension du calcul vectoriel

Plusieurs leçons peuvent être tirées de notre expérience de l'enseignement des vecteurs en seconde et des réflexions qui précèdent.

Tout d'abord, il est important de faire acquérir aux élèves une approche très méthodologique des exercices portant sur les vecteurs. Les questions qu'ils doivent se poser sont : est-ce un exercice de technique pure (calcul vectoriel, relation de Chasles...) dans lequel il est demandé de prouver une égalité par exemple, y a-t-il des hypothèses de l'énoncé à traduire vectoriellement (milieu d'un segment, parallélogramme), est-ce une application des vecteurs (recherche des coordonnées d'un quatrième point pour constituer un parallélogramme, preuve du parallélisme de droites, preuve d'un alignement de points...). L'essentiel est de posséder une stratégie pour ne pas « tourner en rond ». L'analyse de l'énoncé est essentielle, encore plus ici que dans d'autres parties du cours.

Il est important de retarder autant que possible l'introduction des coordonnées afin que les vecteurs soient bien perçus dans leur cadre géométrique et en tant qu'éléments d'un groupe (existence de l'addition, d'un opposé, d'un vecteur nul) avant d'être vus numériquement comme un couple de réels (coordonnées).

Les énoncés des exercices (qui ne soient pas juste des exercices d'entraînement mais des exercices d'approfondissement) doivent être pensés pour illustrer auprès des élèves la puissance du calcul vectoriel. A ce sujet, le thème des barycentres offre bien sûr plusieurs exercices intéressants. Mais il faut se souvenir que cette notion n'est pas du tout au programme et donc prévoir un énoncé progressif (qui commence notamment par montrer l'existence du barycentre). Nous pensons donc qu'il serait utile de prévoir un ou deux « beaux » DM récapitulatifs, qui permettraient d'obtenir un

résultat important. BITTAR propose comme illustration de cet objectif une démonstration élégante du théorème des milieux grâce aux vecteurs. Nous pouvons suggérer deux exemples de tels DM récapitulatifs : la démonstration de l'existence de la droite d'Euler d'une part et, d'autre part, trois méthodes pour résoudre le problème posé dans la seconde partie de l'article BITTAR, qui, si elles n'utilisent pas uniquement la puissance du calcul vectoriel pour arriver au résultat (et pour cause : trois méthodes seraient proposées avec des outils différents), permettent de faire le point sur de nombreux aspects de la géométrie de seconde (repères, coordonnées, longueur d'un segment, équations de droite, vecteurs, ...).

Enfin, la question se pose de diviser le cours sur les vecteurs en deux parties sur l'année de seconde. La première partie serait consacrée à la technique du calcul vectoriel, ayant pour seule application la caractérisation vectorielle d'un parallélogramme. La seconde partie, éloignée d'une ou deux séquences, aurait pour objet la colinéarité et ses applications. En effet, la séquence sur les Vecteurs nous paraît être la plus longue de l'année. Les élèves nous ont semblé se lasser vers la fin de celle-ci et nous craignons que l'enseignement, en un seul bloc, de cette séquence engendre un apprentissage moins en profondeur que si elle était transmise en deux parties séparées.

Conclusion

La séquence sur les vecteurs est probablement la plus longue et la plus difficile de l'année de seconde. De surcroît, l'introduction de cette séquence, avec la définition de la translation basée sur un algorithme qui semble compliqué aux élèves et qui est ensuite peu exploité (*A tout point C du plan, on associe, par translation qui transforme A en B, l'unique point D tel que [AD] et [BC] ont même milieu*), est difficile. Cette séquence demande donc une pédagogie poussée ainsi qu'une structuration très claire, afin que les élèves se repèrent dans les nombreuses définitions et méthodes qu'ils doivent acquérir pour utiliser avec succès l'outil vectoriel.

La lecture de l'article de M. BITTAR a révélé que, jusqu'au début des années 2000, les vecteurs et le calcul vectoriel étaient introduits sur trois ans, de la classe de quatrième (où les notions de direction-sens-longueur étaient présentées, qui ont totalement disparu aujourd'hui dans le programme de seconde), à celle de seconde. La translation était présentée également dès la quatrième. L'ensemble est aujourd'hui introduit en seconde. Cette absence de progressivité est certainement une des causes des difficultés à l'apprentissage des vecteurs, en seconde, aujourd'hui. On peut à ce titre espérer que la réapparition de la translation dans les programmes du collège, à la faveur de la réforme intervenue à la rentrée 2016, améliore la situation au lycée à partir de la rentrée 2017.

Quoi qu'il en soit, nous avons eu en tout cas le plaisir de constater que les efforts de méthodologie que nous avons conduits ont permis aux élèves de faire des progrès et d'échapper un peu au syndrome bien connu dans les vecteurs et la relation de Chasles de « tourner en rond ». Malheureusement, cette première année d'enseignement ne nous a pas permis d'éviter tous les pièges. Nous espérons pouvoir, dès l'an prochain, en divisant en deux parties l'enseignement des vecteurs et en présentant aux élèves des applications illustrant la puissance du calcul vectoriel, tout en étant très attentifs à la clarté et à la progressivité des énoncés, améliorer la compréhension et l'adhésion des élèves pour cet outil vectoriel qu'ils découvrent en seconde et dont nous ne saurions trop souligner l'importance.

Annexe – Extraits de manuels

Exemple 1 : Déclic 2nde, Hachette

85 On donne les trois sommets du triangle ABC
 $A(2; 3)$, $B(-4; 2)$ et $C(3; -7)$.

1. Calculer les coordonnées du point G tel que
 $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

2. Soient I , J et K les milieux respectifs des segments
 $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

a. Calculer les coordonnées des points I , J et K .

b. Démontrer que :

$$\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AK}; \vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BJ}; \vec{CG} = \frac{2}{3}\vec{CI}.$$

c. Reconnaître le point G .

Exemple 2 : Déclic 2nde, Hachette

107 Dans un repère (O, I, J) , on considère les points :
 $A(-2; 0)$, $B(0; 4)$ et $C(5; 2)$.

1. Déterminer les coordonnées du point M défini par :

$$\vec{MA} + \vec{MB} + 4\vec{MC} = \vec{0}.$$

2. Déterminer les coordonnées des milieux B' et C' des
segments $[AC]$ et $[AB]$.

3. a. Démontrer que M appartient à la médiane (CC')
du triangle ABC .

b. Les points O , M et B' sont-ils alignés ?

c. Les points A , M et J sont-ils alignés ?

4. Soit N un point de l'axe des ordonnées. Déterminer
l'ordonnée de N de telle sorte que le quadrilatère $ABCN$
soit un trapèze de bases $[AN]$ et $[BC]$.

Exemple 3 : Transmath 2nde, Nathan

24 On donne les points $A(5; 1)$, $B(-2; 1)$ et
 $C(0; 4)$.

1. Calculez les coordonnées $(x; y)$ du point M défini
par :

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}.$$

2. Représentez le triangle ABC et le point M .

Exemple 4 : Transmath 2nde, Nathan

25 On donne les points $A(-2; -1)$, $B(6; 0)$,
 $C(8; 5)$ et $D(0; 4)$.

1. Calculez les coordonnées des vecteurs \vec{AB} et
 \vec{DC} .

Que pouvez-vous en conclure ?

2. Calculez les coordonnées $(x; y)$ du point M défini
par :

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{0}.$$

3. Représentez le quadrilatère $ABCD$ et le point M .

Que constatez-vous ?

Exemple 5 : Odyssée 2nde, Hatier

«Donnez-moi un point d'appui et je soulèverai le monde.»

ARCHIMÈDE

Le principe du levier, découvert par Archimède (287 - 212 av. J.-C.), peut être schématisé par une tige [AB] posée sur un support faisant pivot au point O. On a posé en A un objet de masse m et en B un objet de masse m' .

Le levier est en équilibre si l'égalité suivante est vérifiée :

$$m \times OA = m' \times OB$$



Cette condition se traduit par l'égalité vectorielle :

$$m\vec{OA} + m'\vec{OB} = \vec{0}$$

1. Dans chacun des cas suivants, réaliser une figure pour obtenir l'équilibre.

a. $m = m'$

b. $m = 5 \text{ kg}$ et $m' = 2 \text{ kg}$

c. $m = 2m'$

2. a. Si $m = 2 \text{ kg}$ et $m' = 3 \text{ kg}$, démontrer que :

$$\vec{OA} = -\frac{3}{5} \vec{AB}$$

b. Si $m = 6 \text{ kg}$ et $m' = 5 \text{ kg}$, démontrer que :

$$\vec{OB} = \frac{6}{11} \vec{AB}$$

3. Expliquer la citation d'Archimède.

Bibliographie

BITTAR Marilena. Les vecteurs à l'issue de la seconde. Une analyse des manuels et de quelques difficultés d'élèves. « Petit x » n°53 (2000).

BA Cissé, DORIER Jean-Luc, Aperçu historique de l'évolution de l'enseignement des vecteurs en France depuis la fin du XIXe siècle, « L'Oouvert » n°113 (2006).