



HAL
open science

Les déterminants et contraintes de l'optimisation d'une campagne digitale en real time bidding : construction d'un process de convergence vers un optimum allocatif d'investissement RTB en condition d'endogénéité du niveau d'information disponible

Léo Parent

► To cite this version:

Léo Parent. Les déterminants et contraintes de l'optimisation d'une campagne digitale en real time bidding : construction d'un process de convergence vers un optimum allocatif d'investissement RTB en condition d'endogénéité du niveau d'information disponible. Gestion et management. 2017. dumas-01696223

HAL Id: dumas-01696223

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01696223>

Submitted on 30 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Mémoire de stage dans l'entreprise Gammed

LES DETERMINANTS ET CONTRAINTES DE L'OPTIMISATION D'UNE CAMPAGNE DIGITALE EN *REAL TIME BIDDING*

*Construction d'un process de convergence vers un optimum allocatif
d'investissement RTB en condition d'endogénéité du niveau d'information
disponible*

Présenté par : **Parent Léo**

Nom de l'entreprise : **Gammed**

Tuteur entreprise : **Daune Fabrice**

Tuteur universitaire : **Preston Perluss**

Avertissement :

Grenoble IAE, au sein de l'Université Grenoble Alpes, n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les mémoires des candidats aux masters en alternance : ces opinions doivent être considérées comme propres à leur auteur.

Tenant compte de la confidentialité des informations ayant trait à telle ou telle entreprise, une éventuelle diffusion relève de la seule responsabilité de l'auteur et ne peut être faite sans son accord.

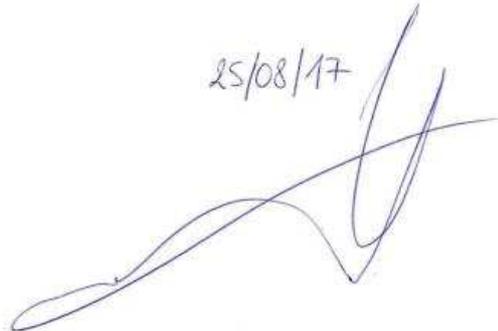
DECLARATION ANTI-PLAGIAT

Ce travail est le fruit d'un travail personnel et constitue un document original. Je sais que prétendre être l'auteur d'un travail écrit par une autre personne est une pratique sévèrement sanctionnée par la loi.

Je m'engage sur l'honneur à signaler, dans le présent mémoire, et selon les règles habituelles de citation des sources utilisées, les emprunts effectués à la littérature existante et à ne commettre ainsi aucun plagiat.

Parent Léo

25/08/17

A handwritten signature in blue ink, consisting of several fluid, overlapping strokes that form a stylized representation of the name 'Léo Parent'.

Remerciements

Je tiens à remercier toute l'équipe Trading Media de Ganned qui m'a accueillie pendant ce stage à qui je dois la découverte de l'univers du trading digital.

Je suis également particulièrement reconnaissant envers M. Fabrice Daune et M. Damien Mora de la confiance et de la latitude qu'ils m'ont accordée durant ce stage, notamment dans la constitution d'outils d'optimisation, ainsi que de leurs mises en place effective au sein de la société Ganned.

Sommaire

Remerciements	5
Introduction	8
I. Acteurs et fonctionnement de l'écosystème programmatique	10
1.1. Fonctionnement général du real time bidding	10
1.2. Les déterminants et modalités d'interactions entre les acteurs du système RTB en condition de rationalité des agents	11
1.2.1. Le versant de l'offre	11
1.2.2. Le versant de la demande	12
1.3. Les choix de l'advertiser préalables au lancement d'une campagne dans un cadre d'arbitrages rationnels	13
1.3.1. Le choix des indicateurs de performance des advertisers.....	13
1.3.2. La segmentation d'un ensemble de population : outils et contraintes d'une campagne RTB	15
II. Formalisation des ensembles du système et de leurs interactions	17
2.1. Les ensembles et topologies des ensembles du système	17
2.1.1. L'ensemble Ω des internautes cible.....	17
2.1.2. L'ensemble Y des états des internautes.....	18
2.1.3. Définition des applications comprises dans F	18
2.1.4. L'ensemble monétaire M.....	19
2.1.5. L'ensemble T des temps.....	19
2.1.6. L'ensemble V des discriminants mesurables.....	20
2.1.7. Espace topologique de séparation des singletons selon l'idempotence par F	20
2.1.8. L'espace topologique $(\Omega, \mathcal{O}_A, \emptyset)$ défini par les placements.....	21
2.2. Approche probabiliste et évolutions endogènes et exogènes des ensembles $\Omega_{I_t} \subset \Omega$ et de leurs topologies	21
2.2.1. De la nécessité d'une approche probabiliste engendrée par l'incomplétude de l'information du domaine de définition et de l'ensemble image de F	21
2.2.2. L'ensemble E des ensembles priceables.....	22
2.2.3. Evolutions endogènes des ensembles et de leurs topologies associées induites par la dimension temporelle	23
2.2.4. Modifications des topologies associées à Ω induites par les applications $f \subset F$	24

III. Détermination d'un processus de convergence vers un optimum allocatif des investissements publicitaires	26
3.1. Détermination d'un intervalle de bids optimal d'un ensemble priceable E_k	26
3.1.1. Déterminants de la formation de la matrice colonne des costs.....	26
3.1.2. La propension à payer de l'advertiser engendrée par le ROI minimal	27
3.1.3. Processus de détermination des intervalles de bid optimal	29
3.2. Déterminants et processus de segmentation optimal de l'ensemble Ω	31
3.2.1. Recouvrement pricé optimal d'un sous ensemble $A_{i,t} \subset A$: la partition	31
3.2.1.1. Lemme 1 de recouvrement optimal d'un sous ensemble $A_{i,t}$	31
3.2.1.2. Lemme 2 de recouvrement optimal d'un sous ensemble $A_{i,t}$	32
3.2.1.3. Théorème de recouvrement optimale d'un ensemble $A_{i,t} \subset A$	33
3.2.2. Attribution d'une intersection non vide d'un sous-ensemble mesurable de V avec un sous-ensemble $A_{i,t}$	33
3.2.3. De l'influence de l'information disponible sur le niveau d'optimum d'espérance de profit	33
3.2.3.1. Reformulation du nombre d'impressions obtenues comme fonction des costs effectifs	34
3.2.3.2. Décomposition du profit d'un ensemble priceable E_k en N sous-ensembles séparés	35
3.2.3.3. Variation du niveau de profit par la priceation des N sous-ensembles de E_k	36
3.3. Processus algorithmique d'apprentissage et d'affinage des topologies O_E associées à Ω par inférence semi-paramétrique	39
3.3.1. Minimisation du biais engendré par la non-stationnarité du processus par intervalle de temps quelconque	40
3.3.2. Phase d'apprentissage primaire	42
3.3.3. Phase d'apprentissage secondaire.....	42
3.3.4. Résultats du processus algorithmique d'apprentissage : une trajectoire croissante de l'espérance du profit à norme temporelle constante	43
Conclusion	45
Annexes	48
Bibliographie	49

Introduction

La théorie classique du producteur, initiée par le courant marginaliste au milieu du XIX^{ème} siècle, définit le comportement d'une entité marchande comme le corollaire de sa fonction de maximisation du profit. Dans ce cadre analytique, tout choix d'investissement d'un offreur rationnel n'a de raison d'être que lorsque l'espérance de gain net qui lui est associé est positive. Parmi ces différents arbitrages conditionnés par la maximisation du profit figure l'investissement publicitaire. Or, le calcul du profit d'une campagne publicitaire se heurte à un obstacle de taille : la mesurabilité du gain attribuable à cette campagne. De par l'essence du calcul économique, plus la mesurabilité associée au canal publicitaire est faible, plus l'efficacité d'une campagne publicitaire est aléatoire, l'allocation de son budget étant condamnée à répondre à l'arbitraire de l'intuition, ou, au mieux, à des approximations biaisées. Cette réalité était déjà décrite en 1874 par la formule fameuse de John Wanamaker : « *La moitié de l'argent que je dépense en publicité est gaspillée, mais je ne sais pas laquelle* »¹. Bien que faiblement mesurable, la part des investissements publicitaires ont continué de croître au cours du XX^{ème} siècle, dopée par l'apparition de nouveaux médias. Ces nouveaux canaux ont été accompagné, outre les spécificités propres aux formats, de leviers de segmentation de l'audience inédits. Toutefois, la persistance de la faible mesurabilité associée à ces canaux limitait les gains de ces nouveaux leviers de segmentation. Jusqu'alors, la nature impérieuse de la mesurabilité du gain attribuable à une campagne publicitaire dans la recherche d'un gain optimum écartait d'emblée toute méthodologie rigoureuse².

Cependant, la démocratisation d'internet a constitué pour les publicitaires l'émergence d'un nouveau canal capable d'introduire de la mesurabilité. Si dans un premier temps, la publicité digitale fut bornée à la transposition des modèles de campagnes publicitaires traditionnelles dans une logique de branding, les spécificités de cette technologie furent progressivement mises à profit afin de fournir des outils efficaces de mesure de performance. A leurs tours, de nouveaux modes d'achat émergèrent, avec, pour finalité, l'accroissement de l'efficacité allocative des dépenses publicitaires. C'est ainsi qu'en parallèle des marchés de gré-à-gré entre les éditeurs de contenu et les annonceurs, s'est développé un mode d'achat automatisé en temps réel : le real-time bidding (RTB). Là où les canaux traditionnels ciblent des ensembles de population prédéterminée par un cadre de diffusion, le RTB permet de s'émanciper de cette contrainte par le ciblage d'individus. Ces apports conjoints de segmentation et de mesurabilité font du RTB un outil de choix dans la maximisation du profit de l'advertiser³ par le biais de l'investissement publicitaire. De par l'essence de la publicité, la mesure de l'efficacité reste cependant postérieure à une phase d'apprentissage qui implique l'investissement. Dans ce cadre, la construction d'une stratégie

¹ Claude Cosette (2006) -*La publicité de A à Z : dictionnaire technique français-anglais*-, page 283

² Il existe certaines exceptions comme les publicités sous formes de coupons de réduction.

³ Le terme advertiser désignera dans ce mémoire une entreprise qui mène une campagne publicitaire.

optimale de campagne publicitaire RTB doit considérer l'ensemble des interactions qui conditionnent le profit de l'*advertiser*.

Ce mémoire a pour objet de formaliser les déterminantes du niveau de profit de l'advertiser associé à une campagne publicitaire en real-time bidding, afin d'établir un process maximisant la probabilité de converger vers un optimum allocatif des investissements RTB, sous contrainte d'endogénéité du niveau d'information disponible.

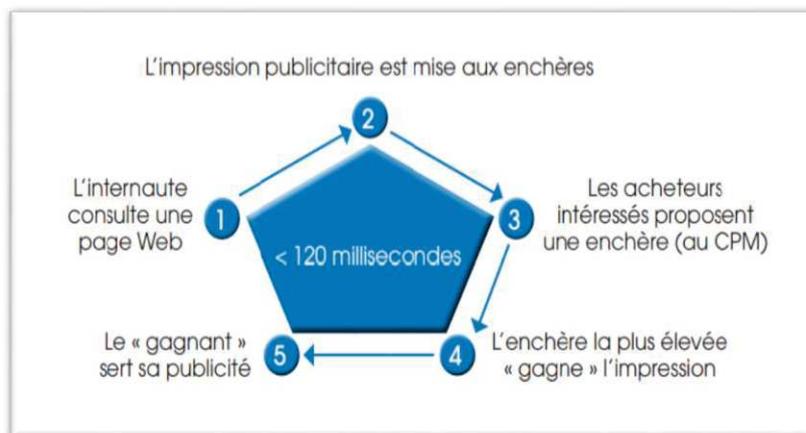
Après une description générale de l'éco-système RTB et des variables qui mettent en mouvement ses parties prenantes, l'analyse se centrera sur une catégorie des agents du système, les advertisers. Les déterminants des choix préalables au lancement d'une campagne RTB en condition de rationalité des agents et d'informations imparfaites seront alors exposés. Cette partie sera suivie d'une formalisation des différents ensembles du système et de leurs interactions qui conditionnent le niveau de profit de l'advertiser. Les différents liens causaux entre ces ensembles et le profit de l'advertiser étant modélisés, la dernière partie formalisera un process algorithmique convergeant vers une trajectoire croissante du niveau de profit de l'advertiser dans un cadre d'informations endogènes à l'investissement.

I. Acteurs et fonctionnement de l'écosystème programmatique

La formalisation du processus permettant de tendre vers un optimum de profit implique au préalable une compréhension globale du fonctionnement du RTB où une pluralité d'entités font système. Ces différentes parties prenantes entrent non seulement en interaction, mais leur qualité d'acteurs du système les définit par ces interactions. C'est pourquoi, nonobstant la problématique générale de ce mémoire centrée sur une unique catégorie d'acteurs du système, les advertisers, il convient de décrire par une approche systémique la mécanique générale du RTB.

1.1. Fonctionnement général du real time bidding

Le RTB est un sous-ensemble des modes d'achat d'espaces publicitaires programmatiques qui se définissent par leurs caractères algorithmiques et automatisés. Il se différencie cependant des autres modèles par son système de détermination des prix. Là où la structure des autres modes d'achat publicitaire positionne davantage les annonceurs comme des price takers et les éditeurs des price makers, le fonctionnement du RTB inverse partiellement ce rapport. Les prix ne sont en effet plus établis par des modalités transactionnelles fixées préalablement entre un acheteur et un vendeur, mais déterminé par un processus d'enchère en temps réel impression par impression⁴. De manière factuelle, lorsqu'un internaute arrive sur une page web qui comprend un emplacement publicitaire disponible par le système



Source : Le Trading Media, IAB, Janvier 2012

d'achat RTB, cet espace publicitaire est mis aux enchères sur une place de marché appelée ad-exchange. Tous les acteurs connectés à cette place de marché qui souhaitent obtenir cette impression communique à la plateforme leurs intervalles d'enchères (de bids) déterminés

en amont. L'éditeur de contenu propriétaire de l'emplacement peut également imposer un floor, c'est-à-dire un prix minimal pour acquérir une impression sur cet emplacement. Si aucune enchère ne majore ce floor, l'enchère n'est gagnée par aucun des participants. *A contrario*, si au moins une enchère majore le floor, cette enchère est remportée par l'advertiseur associé à cette enchère. Le prix payé pour cette impression par l'advertiseur est alors égal à la seconde plus haute enchère, majorée d'un millionième

⁴ Une impression désigne l'affichage unitaire d'un élément publicitaire.

d'unité monétaire⁵. L'advertiser affiche alors sa publicité. En cas d'égalité stricte entre le montant de la borne supérieure de l'intervalle des bids de plusieurs advertisers qui majorent le floor, l'ad-exchange procède à une attribution aléatoire équipondérée afin de désigner quel advertiser remporte l'enchère. L'ensemble de ces étapes s'effectuent dans un laps de temps inférieure à 120 millisecondes. Pour l'internaute, ces opérations sont invisibles, et le contenu publicitaire indifférenciable d'une publicité acquise via un autre système d'achat. Pour les advertisers et les publishers en revanche, la mobilité du capital permise par ce mode d'achat modifie substantiellement les modalités d'optimisation de leur profit.

1.2. Les déterminants et modalités d'interactions entre les acteurs du système RTB en condition de rationalité des agents

Comme tout marché, celui des espaces publicitaires par mode d'achat RTB est composé d'offeurs et de demandeurs. Comme il a été mentionné en introduction, l'ensembles de ces agents sont mus par la recherche de maximisation de leur profit. On suppose également que les agents respectent l'axiomatique de Von Neumann et Morgenstern⁶ et sont associés à des fonctions d'utilité de quasi-neutralité au risque. Ce niveau d'aversion au risque implique que, en cas de stricte égalité d'espérance de gain, l'option la moins risquée est strictement préférée. Dans tout autre situation d'espérance de gain ordonnable, le choix associé au gain le plus élevé est strictement préféré. Ces hypothèses posées permettent à présent de formaliser les déterminants de leurs choix, corolaires de ces axiomes, sur le marché des espaces publicitaires accessible en RTB.

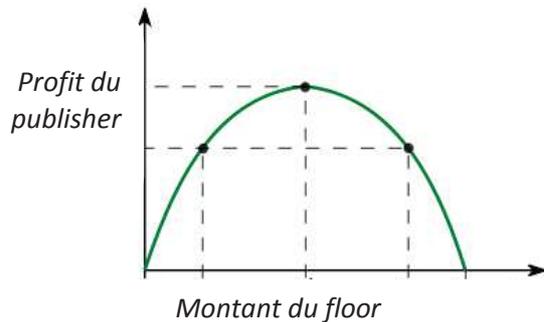
1.2.1. Le versant de l'offre

L'offre est constituée des espaces publicitaires fournies par les éditeurs de contenu communément nommés publishers. Le niveau de profit d'un publisher associé à cette offre est déterminé par le nombre d'impressions vendues sur ces espaces publicitaires, et le prix associé à chacune de ces impressions. Le volume d'impression est pour une part exogène au système RTB, et conditionné par le contenu proposé par le publisher. Pour une autre part, le montant du profit du publisher est fonction de déterminants endogènes au système RTB. En effet, si la nature du RTB positionne les publishers davantage comme des prices takers que des prices makers, ceux-ci disposent toutefois d'un levier d'action sur la variable prix afin de maximiser leur profit : le floor. La relation qui lie le niveau de profit associé à un espace

⁵ L'achat s'effectue généralement en USD.

⁶ Voir John von Neumann, Oskar Morgenstern (1944) - *Theory of Games and Economic Behavior* -

publicitaire et le montant du floor, s'apparente à la relation que suit les recettes de l'Etat et le taux d'imposition décrite par la courbe de Laffer. En effet, la modification d'un floor engendre un effet



volume et un effet prix déterminée par la fonction de demande agrégée pour cet espace. Plus le floor croît, plus le gain par impression augmente, mais plus le nombre d'impression tend à décroître. Jusqu'à un certain niveau de floor, l'effet prix compense la perte de volume. Passé ce point d'inflexion, l'augmentation du floor fait décroître le niveau de profit l'effet prix devenant inférieur à l'effet volume. Lorsque le

publisher dispose d'une information parfaite sur ces variables, le niveau du floor est déterminé par ce point d'inflexion. L'existence de ce floor, conditionne le niveau le prix d'une impression. En cela, la maximisation du profit du publisher est antagoniste à la maximisation du profit de l'advertiser.

1.2.2. Le versant de la demande

La demande d'espaces publicitaire RTB est initiée soit directement, soit de manière intermédiée, par les advertisers. Ces derniers peuvent en effet choisir d'opérer directement sur le marché des espaces publicitaires accessible en RTB, ou bien, de confier leurs campagnes marketing RTB à des trading desks extérieures à l'entreprise. Lorsque la campagne RTB d'un advertiser est menée par médiation, des biais d'optimisation apparaissent de par l'existence d'intérêts propres au trading desk. La fonction de maximisation du profit du trading desk sur la durée d'une campagne d'un advertiser client est une maximisation de son propre profit sous-contraintes d'objectifs définis par le client. Il s'agit d'une contrainte purement circonstancielle déterminée par l'influence du niveau de l'atteinte de ces objectifs sur les profits futurs du trading desk, puisqu'elle conditionne la poursuite de la collaboration entre l'advertiser et le trading desk. Autrement dit, la fonction de maximisation d'un advertiser sur un intervalle de temps non borné à droite devient un problème de maximisation de la somme de ses profits actualisés, où l'atteinte des objectifs de l'advertiser ne représente qu'une des variables. La concordance des intérêts entre un trading desk et un advertiser client est par conséquent partielle, et non superposable. Cette divergence d'intérêt est fonction de la dépendance de l'advertiser au trading desk auquel il soustraite sa campagne publicitaire. Cette dépendance est déterminée par le pouvoir de marché du trading desk. En effet, lorsque le trading desk est soumis à une forte pression concurrentielle, la substituabilité de son service par les services de trading desks concurrents accroît les exigences de performance de l'advertiser. Par conséquent, plus l'offre proposée par les trading desk est concurrentielle, plus les intérêts de l'advertiser et du trading desk tendent à devenir colinéaires. Quel que soit la typologie de cette concurrence, l'advertiser opte pour le trading desk qui maximise son espérance de profit, dès lors

qu'il choisit de sous-traiter une campagne marketing RTB. Là encore, comme toute décision économique dans un cadre de rationalité des agents, celle de l'intermédiation ou de la non-intermédiation, est fonction des anticipations du décideur relative à l'espérance de profit. Ce choix est conditionné par la structure des coûts du marketing programming composée d'importants coûts fixes initiaux, et de faibles coûts marginaux. De ce fait, le marketing programmatique s'inscrit comme une activité à forte économie d'échelles. Par conséquent, seul les advertisers qui disposent d'un important budget dédié au marketing programmatique ont intérêt à mener en interne une campagne RTB, afin de maximiser leur profit par la suppression du coût d'un intermédiaire⁷. C'est dans ce cadre désintermédié que s'inscrit la suite de ce mémoire.

1.3. Les choix de l'advertiser préalables au lancement d'une campagne dans un cadre d'arbitrages rationnels

Les jalons essentiels à la compréhension du système RTB étant posés, il convient à présent de détailler les préalables nécessaires à la maximisation du profit de l'advertiser sur lequel est centré ce mémoire. Par conséquent, cette sous-partie aborde la problématique du choix des indicateurs de performances et des variables discriminantes à l'origine de la segmentation de l'ensemble.

1.3.1. Le choix des indicateurs de performance des advertisers

Les indicateurs de performance, ou KPI (Key Performance Indicator), constituent les intermédiaires par lesquels l'advertiser opère l'optimisation d'une campagne publicitaire RTB. L'arbitrage du choix du KPI relève en effet d'un choix de maximisation de l'utilité où, en dernière analyse, cette utilité correspond au montant du profit. L'absence de mesure préalable de l'ensemble des KPIs rend irréductible le rôle de l'intuition, dès lors que la mesure du retour sur investissement associé au KPI est limitée, voire inexistante. Cependant, si l'anticipation du retour du gain monétaire associé à une action est imparfaite, elle n'en est pas pour autant laissée entièrement à l'arbitraire des affects. Il est raisonnable de supposer que cette estimation puisse être associée à un intervalle dans lequel l'espérance de gain réel est comprise. Cette hypothèse permet alors d'explicitier l'arbitrage auquel procède l'advertiser. Ainsi, pour tout advertiser rationnel, le choix du KPI est ainsi fonction de deux principaux facteurs. Le premier est la capacité de l'advertiser d'associer un gain à l'action défini par le KPI (Lead, Achat, etc), c'est-à-

⁷ Le groupe d'annonce immobilière *Seloger* qui a entamé en 2017 un processus d'internalisation de la gestion de ses campagnes publicitaires programmatique, en partenariat avec le trading desk *Gammed* en est un exemple.

dire, la variance sous-jacente de ce gain. Le second facteur est l'occurrence de cette action, qui conditionne la qualité de l'estimation de son espérance de probabilité à échantillons d'observations de taille égal⁸. Ces deux facteurs suivent généralement une relation empirique négative. Dans les deux cas, c'est la variance du gain attribuable à la campagne publicitaire qui est induite, pour le premier facteur de manière directe, pour le second, de manière dérivée. Cette variance conditionne non seulement le niveau de risque en termes de gain auquel s'expose l'advertiser, mais l'espérance du gain elle-même, de par le rôle du KPI comme outil d'arbitrage d'allocation du budget. L'obstacle relatif à la qualité de l'estimateur de l'espérance d'apparition d'un événement tend à disparaître dès lors que l'échantillon est assez étendu, sous condition d'espérance réelle constante. La relation qui lie la variance du gain associé à une action, et la taille de l'échantillon est, elle, bien moins évidente dès lors que cette action n'est pas un achat traçable. Le prix attribué à une action tel que le clic sur une bannière publicitaire de l'advertiser, ou bien, la visite de son site web, est ainsi faiblement dépendante de la taille de l'échantillon des observations. De ce fait, les acteurs rationnels du marché privilégient généralement des KPIs dont le gain monétaire est fortement mesurable, dès lors que leur budget disponible pour une campagne publicitaire RTB est suffisant pour recouvrir une phase d'apprentissage plus longue. Les principaux KPIs présentés par ordre croissant de mesurabilité de gain attribuable à l'action qui les définissent sont les suivants :

- Le Coût Pour Mille impressions (CPM) : Il s'agit d'un indicateur de coût qui exprime le rapport du media cost total sur le nombre d'impressions obtenues par l'advertiser, multiplié par mille. Une campagne guidée par ce KPI a principalement un intérêt pour les campagnes de *branding* afin d'établir ou de conforter une image de marque. Le choix de ce KPI n'a de sens que dans le cadre d'un périmètre de diffusion prédéfini (une liste de sites par exemple).
- Le Coût Par Clic (CPC) : Il s'agit du rapport du media cost total sur le nombre de clics total sur la bannière de l'advertiser. Il comprend ainsi les clics qui n'aboutissent pas à la page de redirection. Par conséquent, dès lors que le tracking des visites n'engendre pas de surcoûts, le coût par visite post-clic est un indicateur davantage pertinent.
- Le Coût Par Visite (CPV) : Le coût par visite exprime le rapport du media cost total sur le nombre de visites du site de l'advertiser attribuables à la campagne publicitaire. L'attribution de ces visites est déterminée par une fenêtre de temps qui débute après la dernière exposition de l'internaute à une bannière de l'advertiser, et se termine après un laps de temps fixé au-delà duquel, la visite n'est plus attribuée à la campagne publicitaire.

⁸ L'échantillon correspond ici aux nombres d'impressions obtenus par un advertiser pour une même campagne sur un ensemble de population fixé.

- Le Coût Par Lead (CPL) : Le coût par lead exprime le rapport du media cost total sur le nombre de contacts commerciaux qualifiés (prise de rendez-vous, demande de documentation, etc), désigné par l'anglicisme *lead*.
- Le Coût Par Acquisition (CPA) : Le coût par acquisition est le rapport du media cost total sur l'acquisition d'un nouveau client. Un nouveau client est défini comme un internaute qui procède pour la première fois à un achat sur le site de l'advertiser.

Dans la suite de ce mémoire, il sera supposé que l'optimisation d'une campagne RTB guidé par un unique KPI dont le gain monétaire associé est fixé.

1.3.2. La segmentation d'un ensemble de population : outils et contraintes d'une campagne RTB

Déterminer l'optimum de profit passe par des arbitrages d'allocations de dépenses publicitaires. En effet, la seule connaissance du KPI de l'ensemble de la population totale condamne l'advertiser à la situation décrite par John Wanamaker cité en introduction. La recherche d'un l'optimum de profit sous-tend donc l'utilisation conjointe de la mesurabilité du gain, et de la segmentation de la population cible afin de construire des sous-ensembles associables à une espérance de KPI. Plus l'ensemble cible est segmenté en sous-ensembles associables à une espérance de KPI, plus l'advertiser augmente son espérance de profit induite par la capacité de déterminer sa propension à payer pour chacun de ces sous-ensembles, selon son espérance de gain. Ainsi, plus ces variables discriminantes sont nombreuses et capables de segmenter l'ensemble total en sous-ensemble restreints, plus la latitude de maximisation du profit est forte, de par une capacité accrue dans l'allocation des dépenses entre ces ensembles. Par conséquent, un advertiser à toujours intérêt a intégrer l'ensemble des variables discriminantes à sa disposition dès lors que cette opération n'est pas génératrice de sur-coûts. La mesure des ensembles est conditionnée par la capacité de segmentation de l'advertiser via son usage des différents outils de tracking tel que les cookies ou le canvas fingerprinting⁹. Les variables discriminantes permettent de définir l'appartenance ou la non-appartenance d'un individu à un sous-ensemble de la population totale non différenciée. La nature de ces discriminants n'influe pas sur la construction de ces sous-ensembles : ils peuvent donc recouvrir des caractéristiques aussi hétérogènes que la localisation géographique de l'internaute, son historique de navigation, l'heure à laquelle il est exposé à la bannière, ainsi que toute autre caractéristique mesurable qui permet de fragmenter l'ensemble de population total en sous-ensembles associables à une espérance de gain. La segmentation la plus couramment pratiquée est celle qui distingue les internautes

⁹ Ce mémoire n'a pas pour objet de détailler les outils technologiques de tracking. Pour obtenir davantage d'informations sur ce sujet, voir *Online Tracking : A 1-million-site Measurement and Analysis*, Steven Englehart et Arvin Narayanan, 2016, Princeton University.

qui se sont déjà rendu sur le site de l'advertiser des autres internautes respectivement nommées stratégie de retargeting et de targeting. Le ciblage de cette audience qualifiée par segmentation de l'ensemble total, présente des taux de conversion supérieur de 10 à 10000 fois les taux observés sur l'ensemble de la population total¹⁰. Malgré son efficacité, cette segmentation ne diffère pas dans sa mécanique de la création d'autres sous-ensembles associables à un KPI : elle sera donc considérée dans ce mémoire comme une segmentation quelconque. Quel que soit la segmentation de l'ensemble total, l'atteinte de ses sous-ensembles de population est contrainte par une segmentation de l'ensemble auquel l'advertiser ne peut se soustraire, à savoir les espaces publicitaires sur lesquels chaque internaute est atteignable. Ces placements constituent donc une segmentation subie par l'advertiser.

Les choix de l'advertiser préalables au lancement d'une campagne RTB qui viennent d'être décrits sont essentiels dans la détermination des autres variables qui conditionnent le niveau de profit associé à une campagne RTB. Les étapes subséquentes qui visent à établir un processus rigoureux capable de tendre vers un optimum de profit font intervenir une pluralité d'éléments. Par conséquent, la suite de la description de ces étapes impose une formalisation préalable des différents ensembles et de leurs interactions qui influent sur le niveau de profit de l'advertiser.

¹⁰ Remi Lemonnier, *Application of stochastic processes to real-time bidding and diffusion processes on networks*, page 3.

II. Formalisation des ensembles du système et de leurs interactions

Cette partie vise à formaliser les ensembles compris dans le système RTB via une approche, *a priori* ensembliste et déterministe, les différentes dimensions qui font système pour un advertiser dans l'optimisation du campagne publicitaire RTB. Comme dans toutes formalisations de systèmes dynamiques faisant intervenir l'action humaine, il existe une quasi-infinité de relations causales qui impliquent nécessairement d'écarter des ensembles qui ont un impact limité et difficilement mesurables. Ces ensembles sont donc supposés indépendants du KPI. L'approche adoptée *a priori* se justifie par la conclusion de nombreuses études menées en neurosciences sur la latitude des individus dans leurs prises de décisions¹¹. Ce choix initial permet d'appréhender la modélisation probabiliste qui s'en suit, non comme la résultante d'un fonctionnement du système intrinsèquement aléatoire, mais comme une conséquence de la structure de l'information disponible nécessairement incomplète. Ce paradigme sous-jacent aux modèles d'inférences qui seront ultérieurement utilisés induit un ajustement constant des hypothèses posées, ici relatives aux probabilités de conversion et à la segmentation de l'ensemble de population ciblée par la campagne publicitaire, engendré par la croissance du niveau d'information.

2.1. Les ensembles et topologies des ensembles du système

2.1.1. L'ensemble Ω des internautes cible

On note Ω l'ensemble des internautes sur lequel va être appliquée la campagne de l'advertiser, et qui sont exposés à un espace publicitaire qui peut être acquis via le mode d'achat RTB dans un ensemble de temps T . Cet ensemble est circonscrit à une zone géographique et à un large cadre de diffusion déterminés *a priori*. Le cadre de diffusion initial se définit le plus souvent par complémentaire où sont généralement écarté d'emblé les sites extrémistes, violents, ou à caractères pornographique. Ce cadre de diffusion permet de préserver l'image de marque de l'advertiser, ce qui, en dernière analyse, revient encore à maximiser son espérance de profit. L'ensemble Ω est muni de plusieurs topologies qui constituent des sous-ensembles, déterminées pour une part par la contrainte de la structure du cadre de diffusion, pour une autre part, de l'action de l'advertiser dans la recherche d'une segmentation optimale de Ω . Ces topologies seront définies ultérieurement.

¹¹ Voir B. Libet et al., *Time of conscious intention to act in relation to onset of cerebral activity*, *Brain* 106, p.623 – 642 (1983) et C.S. Soon et al., *Unconscious determinants of free decisions in the human brain*, *Nature Neuroscience* 11, p.543 – 545 (2008)

2.1.2. L'ensemble Y des états des internautes

Etant donnée la topologie $P(\Omega)$ de Ω , un état y est une application de Ω dans Y , Y est l'ensemble d'arrivée de l'application y que l'on qualifiera d'ensemble d'états. L'espace des états permet de définir la disposition d'un internaute à réaliser l'action rechercher par une distance euclidienne, tel que l'état $y_{0,w}$ correspond à l'état initial d'un internaute w , tandis que l'état $y_{1,w}$, correspond à la réalisation d'une conversion par l'internaute w . Il s'agit d'un ensemble continue qui comprend des états transitoires. Ainsi, pour une application par y , de Ω dans Y , qui à w associe $y(w)$, on a :

$$\Omega \mapsto Y$$

$$w \mapsto y(w)$$

Pour chaque application y sur un singleton $w \in \Omega$ on associe donc un état $y_{z,w}$ où $y_{z,w} \in [y_{0,w}; y_{1,w}]$ tel que, pour un unique singleton w , $Z = \left\{ \frac{\mathbb{N}}{d_{I_t \max \text{ att}} - d_{I_t \min}} \right\}$ et $\{Z, d\}$ l'espace métrique associé. L'ensemble Z est par conséquent fonction des dimensions $d_{I_t \max \text{ att}}$ et $d_{I_t \min}$ définies sur l'ensemble temporel T , dont la nature sera explicitée ultérieurement. On suppose également que, en t_0 , $\forall w, y(w) = y_0$. L'association de Y dans permet Ω de définir l'application de A dans Y comme une application bijective. L'ensemble A et Y sont donc équipotent. Tous les éléments compris dans Z associé à un unique singleton sont des nombres rationnels de par l'impossibilité de mesurer les états transitoires sans avoir atteint l'état y_1 .

2.1.3. Définition des applications comprises dans F

On note F l'ensemble des applications existantes $\{\cup f_{i,j,t} | i, j, t \in R^+\}$, tel que $f_{i,j,t}$ est une application l'application d'une publicité j dans un placement i sur un intervalle de temps t , qui associe l'état d'un internaute à un autre état définit sur l'ensemble Y , ou à ce même état initial si celui-ci est idempotent. Cette publicité dispose d'un format déterminé à la fois par i , et par j , et d'une créative spécifique associé à j . Le changement d'une de ces variables constitue par conséquent une autre application. Pour une application $f_{i,j,t}$ de Y dans Y , qui à y associe $f_{i,j,t}(y)$, on a donc :

$$Y \mapsto Y$$

$$y \mapsto f_{i,j,t}(y)$$

De par l'impossibilité de mesurer les états transitoires définies sur l'ouvert de Y , $]y_0; y_1[$, on supposera ces fonctions linéaires réparties de manière homogène sur une dimension de temps prédéfinie. C'est

pourquoi, tout état y pour un unique singleton de Ω est associé à une métrique z , tel que z est défini sur $\mathbb{Q} \subset [0; 1]$. Cette hypothèse peut être substituer par exemple par une surpondération de la dernière application aboutissant à une conversion. Cette pondération dépend des modalités d'attributions de conversion. Sous l'hypothèse présente, il y a équipondération. Aussi, le nombre d'états compris dans $[y_0; y_1]$ pour un internaute soustrait de l'état initiale est qualifié de « pression utile ».

2.1.4. L'ensemble monétaire M

La recherche de maximisation de profit implique nécessairement l'introduction de l'ensemble monétaire. On note M cet ensemble monétaire. M est ensemble discret séparé en millionième d'unité monétaire $M = \{\frac{N}{10^6}\}$. Cet ensemble associe une application $f_{i,j,t}(y) \mapsto p$ est le plus petit majorant de la plus haute enchère, ou, si il y a absence d'enchère ou que la plus haute enchère est inférieur au floor du SSP, du plus petit majorant de ce floor.

2.1.5. L'ensemble T des temps

La dimension temporelle revêt un rôle central dans l'optimisation d'une campagne RTB. On note l'ensemble des temps l'ensemble mesurable T où $T = [t_0; t_*]$. Le nombre d'affichages est une variable de flux. Par conséquent, intégrer la dimension temporelle n'a de sens que par intervalles de temps. On pose alors les hypothèses et notations suivantes :

- On suppose qu'il existe une dimension minimale sur T , noté $d_{I_t \min}$, pour tout intervalle $I_t \min \in T$, où $d_{I_t \min} = t_1 - t_0 = \dots = t_N - t_{N-1} = \frac{I}{N}$ et $t_N = t_*$, tel que l'application F ne peut associer un internaute à une même publicité plus d'une fois pour tout $I_t \min \in T^*$. Cette hypothèse, vérifiée dans les faits, permet de définir l'ensemble Z comme finit.
- On pose $d_{I_t \max \text{ att}}$ la norme¹² maximale de temps d'attribution d'une impression à une conversion tel qu'il vérifie $d_{I_t \max \text{ att}} \geq d_{I_t \min}$. Cette norme est également qualifiée de fenêtre d'attribution.
- On note I_{t, O_E} l'intervalle de temps sur lequel Ω est muni de la topologie O_E sur un intervalle de temps tel que $I_{t, O_E} \subset T$. La topologie initiale étant la topologie grossière noté O_g , l'intervalle

¹² Puisque T est associé à un espace métrique, les notions de norme et de longueur sont équivalentes.

de temps sur laquelle Ω est muni de la topologie $\{\Omega; \emptyset\}$ est noté d_{I_t, O_g} . On suppose également que l'union des intervalles $I_{t, O_{E_i}}$ est recouvrement de T deux à deux disjoints. Ainsi, l'union des intervalles $I_{t, O_{E_i}}$ est une partition de T .

Cette segmentation du temps est nécessaire à la détermination d'un processus convergeant vers un optimum de profit, du fait que T induit des déformations des ensembles et de leurs espaces. Cette influence de T sur Ω sera traité par la suite.

2.1.6. L'ensemble V des discriminants mesurables

On note V l'ensemble des discriminants¹³ mesurables. Cet ensemble dont les parties permettent de catégorisés les singletons compris dans Ω sont conditionnés en grande partie par les outils de segmentation tel que l'adresse IP (géolocalisation par exemple), le canvas fingerprinting et les cookies. Ainsi, aussi bien la localisation géographique, la visite, que l'ajout de produits à son panier sans confirmation d'achat peuvent constituer des discriminants mesurables. Aussi, V est un recouvrement de A tel que $V \subseteq A$. En effet, les parties de A sont également des sous-ensembles mesurables. Du fait que l'union des parties de A est égal à Ω , V recouvre également Ω . Ainsi, la topologie $\{\Omega, \cup_{i=1}^N V_i\}$ que l'on note O_V est une topologie tel que $O_A \subseteq O_V$. Par conséquent, soit $O_A = O_V$, soit O_V est strictement plus fine au sens de l'inclusion. On suppose également que le complémentaire d'un sous ensemble $V_i \subset V$ de Ω peut également constituer un sous-ensemble inclus dans V .

2.1.7. Espace topologique de séparation des singletons selon l'idempotence par F

L'objectif d'une campagne programmatique est défini par son KPI. Par conséquent, la partie de l'ensemble Ω susceptible de convertir sur T . On pose donc (Ω, O_H, Y) l'espace topologique tel que $O_{H^*} = \{\emptyset, H, H^C, \Omega\}$ qui sépare l'ensemble cible H de H^C son complémentaire. L'ensemble cible est définissable par son complémentaire dans Ω tel que H^C , est l'ensemble des singletons $w \in \Omega$ qui, pour toute application $f \in F$, en tout $t \in [t_0; t_*]$, sont idempotents. Le contenu de l'ensemble cible H n'est pas connu. Sa définition servira cependant par la suite à certaines démonstrations.

¹³ Le terme « discriminant » ne revêt pas ici sa signification mathématique.

2.1.8. L'espace topologique (Ω, O_A, \emptyset) défini par les placements

L'ensemble Ω doit également être séparé en sous-ensembles selon les placements par lesquels ils peuvent être exposés à une publicité qui peut être acquise par RTB. On note ainsi (Ω, O_A, \emptyset) l'espace topologique de l'ensemble Ω , où O_A est la topologie engendrée par la prébase $\{A_1, \dots, A_n\}$ qui distinguent les espaces sur lesquels sont définies les applications de F dans l'intervalle de temps $[t_0; t_*]$. On munit donc l'ensemble Ω de la topologie $O_A = \{\emptyset, A_1, \dots, A_n, \Omega\}$. Un sous-ensemble A_i est ainsi l'ensemble des individus exposé à un placement i sur l'ensemble de temps T .

2.2. Approche probabiliste et évolutions endogènes et exogènes des ensembles $\Omega_{I_t} \subset \Omega$ et de leurs topologies

2.2.1. De la nécessité d'une approche probabiliste engendrée par l'incomplétude de l'information du domaine de définition et de l'ensemble image de F

La définition des applications déterministes de $f \in F$ se heurte à une contrainte de taille : une information incomplète sur cet ensemble d'applications déterminé par les modifications des ensembles et de leurs topologies qui ont été décrite précédemment. De ce fait, les applications $f \in F$ doivent être appréhendées comme des variables aléatoires. L'obtention d'une impression peut être alors simulé par un tirage aléatoire.

On note, F un tirage aléatoire d'une application $f \in F$, et X le processus aléatoire suivit par $(z' - z)$ engendré par l'application F qui associe un état y_z à un état $y_{z'}$, tel que $F(y_z) = y_{z'}$. X est un processus aléatoire discret, asymétrique, et non binaire défini sur l'espace probabilisé (Z, \mathcal{F}, P) . Par conséquent, on suppose que X suit une loi multinomiale à $\frac{d_{I_t} \max \text{ att}}{d_{I_t} \min}$ résultats possibles. L'utilisation de cette loi nécessite de poser l'hypothèse d'indépendance entre les tirages. Cette hypothèse est formellement erronée de par la mesure des états transitoires de z qui dépend de l'atteinte de l'état y_1 . En effet, lorsque le nombre de tirage est égal au nombre d'internautes associé à chaque tirage, X suit une loi binomiale d'évènements $z = 0$ et $z = 1$ du fait que les états transitoires définis sur l'ouvert de Y ne sont définis qu'à partir de(s) l'application(s) $f \in F$ sur un même singleton qui atteint l'état y_1 . Toutefois, le nombre de placements disponibles via l'achat RTB est significativement supérieur au nombre d'internautes¹⁴. De surcroît, la fenêtre de conversion est de dimension finie $d_{I_t} \max \text{ att}$ sur T . Par conséquent, ce biais

¹⁴ A titre d'exemple, un acteur comme *AppNexus* comptabilisait en 2015 100 milliards d'impressions de bannières publicitaires par jour.

tend à disparaître lorsque le nombre de tirage devient grand. Les variables aléatoires sont alors X_Γ , où $\Gamma = \{1, \dots, \frac{d_{I_t \max \text{ att}}}{d_{I_t \min}}\}$ avec :

$$\sum_{\Gamma=1}^{\frac{d_{I_t \max \text{ att}}}{d_{I_t \min}}} X_\Gamma$$

La fonction de probabilité s'écrit :

$$P\left(X_1 = \dots, X_{\frac{d_{I_t \max \text{ att}}}{d_{I_t \min}}} = 1\right) = \frac{n!}{n_1! \dots n_Z!} p_1^{n_1} \dots p_{\frac{d_{I_t \max \text{ att}}}{d_{I_t \min}}}^{n_Z}$$

Il est évident que le choix d'une loi multinomiale n'est plus adapté dès lors que l'on opte pour un autre mode d'attribution des conversions. La détermination de la loi suivit pas X est en essentielle, puisque celle-ci va conditionner la construction des ensembles priceables.

2.2.2. L'ensemble E des ensembles priceables

La capacité de maximiser l'espérance du profit est conditionnelle à la segmentation de Ω dont dépendent les intervalles de bids affectés à ses parties. En effet, les intervalles de bids déterminent le nombre d'impressions obtenues et le nombre d'actions déterminé par le KPI réalisé, et par ce biais l'*Investment* et le *Return*. Par conséquent, les parties dont se compose la topologie dont est muni Ω doivent être associé à une estimation de leurs espérances de gain à valeur dans l'ensemble M dépendant elle-même de l'espérance du processus aléatoire X . Jusqu'à la spécification du caractère incomplet de l'information, la notion d'ensemble priceable n'avait pas de sens, les applications $f \in F$ étant déterministe¹⁵. La dépendance de l'*Investment* et du *Return* de cette espérance exige donc non seulement une estimation de l'espérance de X , mais également la fiabilité de cet estimateur. C'est pourquoi, on nomme un sous-ensemble de Ω ensemble priceable, une intersection non vide d'au moins un ensemble mesurable V avec Ω pour laquelle, l'information disponible permet de construire un intervalle de confiance de son espérance de X d'une dimension supérieure ou égale à d_{ZC} à valeur dans \mathbb{R}^* , ayant un niveau de

¹⁵ C'est pour cette raison que la notion d'ensemble priceable n'est introduit que dans la section 2.2.

confiance minimal α^{*16} tous deux fixés *a priori*. Un ensemble priceable E_k , E_k étant un ensemble priceable quelconque, respect ainsi les propriétés suivantes :

- $E_k \subset \Omega$
- $E_k = \Omega \cap V_j$
- $E_k \neq \emptyset$
- ZC_{α^*} de $E(X|E_k)$ tel que la dimension de $|ZC_{\alpha^*}| \geq d_{ZC}$

Ces ensembles priceables deviennent ensembles pricedés dès lors que ceux-ci sont associés à un intervalle de bids propre, défini en fonction de leur espérance de conversion¹⁷. Les conditions de fixation de cet intervalle seront exposées au cours du présent mémoire. On nommera topologies pricedées, les topologies qui segmentent Ω en parties (ensembles) pricedés.

2.2.3. Evolutions endogènes des ensembles et de leurs topologies associées induites par la dimension temporelle

L'ensemble T induit une déformation des topologies associées aux ensembles $\Omega_{I_t} \subset \Omega$, indépendamment des déformations de ces topologies engendrées par les applications f de F sur les états $y \subset Y$ associés aux singletons $w \in \Omega$. La dimension temporelle influe sur les ensembles $\Omega_{I_{t_n}}$ eux-mêmes, tel que les singletons constitutifs de ses ensembles évoluent en fonction du temps. Cette mutation continue des ensembles $\Omega_{I_{t_n}}$ et de leurs sous-ensembles exprime une réalité élémentaire : les individus ne sont ni exposés à des espaces publicitaires sur internet de manière continue, ni ne sont les visiteurs d'une unique page internet comprenant un espace publicitaire accessible via l'achat RTB. Ils peuvent également être susceptible de convertir à un certain moment, et ne plus l'être à un autre. Ces déformations peuvent être considérées comme une dynamique endogène à l'ensemble Ω dès lors que l'on suppose les individus libres et munis d'une capacité d'autodétermination. Ainsi, lorsque l'on observe sur des intervalles de temps restreints, ces mouvements sur T s'apparentent davantage à une dynamique atomistique brownienne que déterministe par mouvement d'ensembles ordonnés. En revanche, une observation sur des intervalles de temps plus long (généralement une journée ou une semaine) fait apparaître une constance dans le nombre de conversions observées et le nombre d'impressions obtenues, toute chose étant égal par ailleurs. On peut donc supposer que la série

¹⁶ L'existence d'un biais induit par la mesure des états transitoires de y est minimisé lorsque α^* tend vers 1, puisqu'il suppose un plus grand nombre de tirage. *A contrario*, plus α^* est faible, plus l'intervalle de confiance est biaisé.

¹⁷ Un ensemble pricedé respectent *a minima* l'ensembles des propriétés d'un ensemble priceable.

temporelle de $X_{I_{t_n}}$ suit un processus stationnaire au sens faible par intervalle de temps I_{t_n} sur T d'une dimension définie qui intègre ces phénomènes récurrents à fréquence constante. On notera cette dimension $d_{I_{t_n}}$. La stationnarité faible de $X_{I_{t_n}}$ implique les conditions suivantes :

- $E(X_{I_{t_n}}) = E(X) \quad \forall I_{t_n} = n \times d_{I_{t_n}}, I_{t_n} \subset T, n \in \mathbb{N}^*$
- $E(X_{I_{t_n}}^2) = \sigma^2 \quad \forall I_{t_n} = n \times d_{I_{t_n}}, I_{t_n} \subset T, n \in \mathbb{N}^*$
- $Cov(X_{I_{t_n}}, X_{I_{t_n-k}}) = f(k) = p_k \quad \forall I_{t_n} = n \times d_{I_{t_n}}, I_{t_n} \subset T, \forall I_{t_n-k}, n \in \mathbb{N}^*$

Pour tout intervalle de temps inférieur à $d_{I_{t_n}}$, ces conditions ne sont pas nécessairement respectées. Cette non stationnarité définie sur des intervalles de temps restreints peut engendrer des ensembles priceables dès lors que ces changements suivent des fréquences constantes et homogène sur T (un créneau horaire particulier, un jour de la semaine, etc), et que l'ensemble V comprend des ensembles discriminants qui intègrent la périodicité.

2.2.4. Modifications des topologies associées à Ω induites par les applications $f \in F$

Si la dimension temporelle induit des modifications de la structure de $\Omega_{I_{t_n}}$ par n pour $I_{t_n} \subset T$, on suppose que les applications de l'ensemble F n'affecte pas la cardinalité de $\Omega_{I_{t_n}}$ pour tout $\Omega_{I_{t_n}} \subset \Omega$. Concrètement, cette hypothèse suppose que l'affichage d'une publicité ne conditionne pas la navigation des individus. Si la cardinalité de $\Omega_{I_{t_n}}$ pour tout $\Omega_{I_{t_n}} \subset \Omega$ et la topologie O_A est considérée comme imperméable aux applications $f \in F$, les applications f ont un impact sur les topologies O_{E_i} qui pour toutes $I_{t_n} \subset T$ séparent les ensembles selon leurs priceabilités. Contrairement à d'autres processus aléatoires comme ceux simulant l'évolution du prix des actifs financiers, l'information qui permet l'estimation des paramètres de X n'existe pas *a priori*. Une phase de collecte d'information dans ce cadre est nécessairement performative. Sans cette phase préalable, la segmentation de l'ensemble Ω ne peut ainsi être déterminée par une estimation rigoureuse des estimateurs de la variable aléatoire suivit par X . Cette nécessaire subséquence de la formation de sous-ensembles E_i à l'application de F sur des singletons de Ω , met en évidence le rôle de F comme fait générateur de la formation des topologies O_{E_i} . L'endogénéité du niveau d'information nécessaire à la formation des topologies O_{E_i} induit donc une phase initiale indépendante de cette information, sans quoi ce processus de formation se définit par autoréférence et conduit alors à un problème de références circulaires.

La formalisation des différents ensembles, des topologies dont sont munis ces ensembles, et des mouvements de corps qui les traversent a permis d'établir un socle conceptuel sur lequel va reposer la partie suivante. Cette partie vise à établir un process de détermination d'une stratégie optimale pour un advertiser.

III. Détermination d'un processus de convergence vers un optimum allocatif du budget publicitaire

La définition rigoureuse d'un ensemble priceable répond à l'impératif d'associer aux parties de Ω des intervalles de bids dans la recherche d'un optimum de profit. La formalisation des éléments constitutifs du système dans lequel l'advertiser est partie prenante ainsi que l'ajout de postulats relatifs à ces éléments, ont pour finalité l'établissement d'un processus susceptible de converger vers cet optimum sous contrainte d'information imparfaite. La formalisation de ce processus est l'objet de cette partie.

3.1. Détermination d'un intervalle de bids optimal d'un ensemble priceable E_k

3.1.1. Déterminants de la formation de la matrice colonne des costs

En condition d'informations incomplètes, la nature du mode d'achat RTB ne permet pas de fixer le prix d'une impression définit sur M avant le résultat de l'enchère, dès lors que l'intervalle des costs associé à cette impression est non vide. C'est pourquoi, il convient de formaliser les modalités de la détermination des costs dans la recherche de maximisation du profit. Puisque les estimations de l'espérance de X selon son appartenance à un sous-ensemble de Ω définit les ensembles priceables, les intervalles de bids sont également fixés par ensembles priceables. Un intervalle de bids s'applique donc à un ensemble priceable définit sur l'intervalle de temps sur lequel cet ensemble priceable est lui-même définit. On peut parler de matrice des costs d'un ensemble priceable E_k , où E_k est un ensemble priceable quelconque. On pose C_{E_k} la matrice colonne des costs à valeur dans M , pour un ensemble priceable E_k définit sur un intervalle de temps $d_{t_{E_k}}$. On peut ainsi associer un vecteur des costs pour tout ensemble priceable. La matrice colonne des cost C_{E_k} est fonction de trois grands déterminants :

- L'intervalle des bids $[b_{E_k \min}; b_{E_k \max}]$ déterminé par l'advertiser. Ainsi, pour tout cost $c \in C_{E_k}, c \in [b_{E_k \min}; b_{E_k \max}]$
- Les bids des DSP qui participent aux enchères sur les sous-ensembles A_i dont l'intersection avec l'ensemble priceable E_k est non vide
- Les floors des SSP

Sur une impression, seul la, ou les en cas d'égalité stricte entre au moins deux de ces variables, plus grande(s) valeur(s), entre les bids des advertisers et le floor du SSP, détermine(nt) le prix à payer pour obtenir une impression. Par conséquent, on peut agréger cette (ces) plus grande(s) comme une unique variable de prix. La (les) plus grande(s) valeur(s) pour une impression i , seront ainsi noté p_i , tel que $\forall i, p_i \in M$. Ainsi, pour tout $c \in [b_{i,t \min}; b_{i,t \max}]$, la détermination de c_i suit l'algorithme suivant :

- si $b_{i,t \max} > p_{i,t}$ alors $c_{i,t} = \sup(p_{i,t})$
- si $b_{i,t \max} = p_{i,t}$, alors il existe deux évènements pour c_i , $c_i = p_{i,t}$ et $c_{i,t} = 0$ auxquels sont associées les probabilités respectives : $P(c_i = p_{i,t}) = \frac{1}{n_a+1}$ et $P(c_i = 0) = 1 - \frac{1}{n_a+1}$ où n_a est le nombre d'enchères égales à $b_{i,t \max}$ pour cette même impression
- si $b_{i,t \max} < p_{i,t}$ alors $c_i = 0$
- si $b_{i,t \max} = 0$, alors C est une matrice colonne nulle

Ainsi, pour toute enchère associée à un cost c_i positif, l'impression obtenue. Le nombre d'impressions obtenues par E_k est noté Imp_{E_k} .

3.1.2. La propension à payer de l'advertiser engendrée par le ROI minimal

La fonction objectif de maximisation du profit revêt à la mesurabilité de ses composantes dans l'ensemble monétaire M , un caractère impératif. Il convient donc de décomposer le profit afin de construire des processus d'arbitrage dans le choix des intervalles de bids. Le profit total sur T peut être exprimé par l'expression suivante :

$$Profit\ Total = Return\ y_1 \times \sum y_1 - \sum_{i=1}^{n_c} c_j$$

Où :

- n_c le nombre d'enchères sur T
- c_j le cost payé pour une impression quelconque
- $Return\ y_1 \times \sum y_1$ le *Return Total*
- $\sum_{i=1}^N c_i$ l'*Investment Total*

Le ROI (retour sur investissement) d'une impression est défini par le rapport $\frac{Return}{Investement}$. On notera $Return^{y_k}$ le bénéfice net associé à un état y_k . On suppose que le $Return^{y_1}$ a valeur dans M , associé à l'état y_1 est le même pour état y_1 . Comme tout agent économique rationnel, l'advertiser n'entreprend un investissement que si le ROI de cet investissement est positif. On a supposé en outre que l'advertiser a eu fonction d'utilité de quasi-neutralité au risque. Par conséquent, tout investissement est entrepris dès lors qu'il respect la condition $E(\frac{Return}{Investement}) > 1$. Pour y_1 , il existe un ROI minimal, noté ROI^{\min} , tel que $ROI^{\min} = E(\frac{Return^{y_1}}{Investement^{y_1}}) = 1$. Puisque $Return^{y_1}$ est une constante, et que $Return^{y_1} \subset M \subset \mathbb{R}^+$, il existe une unique solution de $Investement^{y_1}$ qui respect l'égalité $Investement^{y_1} = Return^{y_1}$. On note ce montant $Investement^{Max,y_1}$. Il s'agit de la propension à payer de l'advertiser pour obtenir un état y_1 . Dans le cadre d'une attribution exclusive du $Return^{y_1}$ à la dernière impression, la propension à payer pour tout états y , tel que $y \in [y_0; y_1[$ sur l'intervalle de temps $d_{I_t \max \text{ att}}$, est nulle ces états étant eux-même associés à un gain nul. Cette hypothèse est strictement équivalente à supposer que $d_{I_t \max \text{ att}} = d_{I_t \min}$ où la loi suivit par X est alors une loi binomiale avec soit $X = 0$, soit $X = 1$. Cependant, pour tout état y associé à un singleton w aboutissant à un état y_1 en un temps t , le calcul des espérances conditionnelles de X est supposé soumis à une règle d'équirépartition entre les ensembles priceables selon le nombre d'impressions associés respectivement à ces ensembles¹⁸, pour toute impression associée à ce singleton dans un temps compris dans l'intervalle $[t - d_{I_t \max \text{ att}}; t]$. Cette règle d'attribution induit que l'espérance du $Return$ est fonction de la norme de z parcouru sur Z . Pour x ensembles priceables compris dans E , et N le nombre singletons de Ω , et sous condition de séparation des ensembles priceables pour tout placement à un instant $t \in T$ ¹⁹, la fonction objectif peut alors être exprimé comme suit :

$$Max E(Profit \cup_{k=1}^x E_k) = \sum_{k=1}^x (Return^{y_1} \times E(X|E_k) \times Imp_{E_k}) - \sum_{j=1}^{n_c} c_j$$

$$\text{Où } \sum_{k=1}^x Imp_{E_k} = n_c$$

Maximiser l'espérance de *Profit Total* revient donc à maximiser le profit des ensembles priceables pour tout $t \in T$, pour une topologie priceée $\{\Omega, E_1, \dots, E_x, \emptyset\}$ fixée.

¹⁸ D'autres modes d'attribution peuvent se substituer à celui utilisé dans le modèle présenté dans ce mémoire. Ce changement a un impact sur le calcul des espérances conditionnelles entre les différents ensembles priceables. La norme sur Z affectée aux ensembles formés à partir des discriminants mesurables peut ainsi suivre une relation décroissante de la norme sur T qui sépare la réalisation de l'évènement y_1 , de l'obtention d'une impression. De tels choix de modes d'attribution ont un impact paramétrique sur le présent modèle, mais n'affecte pas sa logique générale.

¹⁹ Cette condition de séparation, tel que $\forall (i, t), k \neq k', \nexists (E_k \cap A_{i,t} \neq \emptyset, E_{k'} \cap A_{i,t} \neq \emptyset)$ sera explicité dans la partie 3.2.

3.1.3. Processus de détermination des intervalles de bid optimal

La nouvelle expression de la fonction objectif permet d'identifier les variables permettant de tendre vers une solution. Comme il a été démontré précédemment, pour x ensembles priceables compris dans E , et N le nombre singletons de Ω , la fonction objectif peut être exprimé par :

$$E(\text{Profit Total}) = \sum_{k=1}^x (\text{Return } y_1 \times E(X|E_k) \times \text{Imp}_{E_k}) - \sum_{j=1}^{n_c} c_j$$

De cette expression de l'espérance du *Profit Total*, on déduit l'expression suivante de l'espérance du profit d'un ensemble priceable E_k associé à $n_{c_{E_k}}$ impressions :

$$E(\text{Profit } E_k) = \text{Return } y_1 \times E(X|w_i) \times n_{c_{E_k}} - \sum_{j=1}^{n_{c_{E_k}}} c_j \text{ }^{20}$$

La détermination d'un intervalle de bids optimal suppose de poser les hypothèses supplémentaires suivantes :

- H1 : Pour tout $A \subset \Omega$ la répartition des costs est indépendantes de leur idempotence par F tel que $E(c_i|H) = E(c_i|H^c)$ ²¹
- H2 : Pour tout singleton compris dans Ω , le niveau d'information ne permet pas de lever l'hypothèse d'indépendance du cost à l'espérance de conversion $E(X|c_i) = E(X)$
- H3 : L'espérance de gain sur M associé à un état y_1 est connue et constante pour tout $w \in \Omega$
- H4 : Le budget alloué à la campagne publicitaire n'est pas borné

De l'hypothèse H1 et H2, on déduit que, pour tout ensemble priceable quelconque compris dans E , la borne minimale de l'intervalle des bid, notée b_{min}^* , est nulle tel que $b_{E_k}^* \text{ min} = 0$. Toutes les impressions associées à E_k sont associées à la même espérance de gain, tel que $E(X|E_k) \times \text{Return } y_1$ est supposé constant sur $d_{I_{E_k}}$. Cette dernière hypothèse n'induit pas nécessairement une stationnarité effective du processus X sachant E_k , mais suppose que $E(X|E_k) \times \text{Return } y_1$ représente la meilleure estimation de

²⁰ La somme des costs est ici appréhendée comme une variable déterministe, ce qui revient à supposer une information parfaite des prix p_i . Cette hypothèse n'a aucune influence sur la détermination d'un intervalle optimal dès lors que l'on suppose que ces prix sont indépendants de la variable z .

²¹ Lorsque l'on lève cette hypothèse, la borne minimale de l'intervalle des bids peut être différente de 0. Voir Annexes

l'espérance de gain, étant donné le niveau d'information pour l'intervalle de temps $I_{t_{E_k}}$. On cherche alors la borne maximum de l'intervalle de bid qui, pour toute impression, est une solution du système suivant :

$$\text{Max } Imp_{E_k, I_t} \times E(X|E_k) \times \text{Return } y_1$$

s. c.

$$\forall i \frac{E(X|E_k) \times \text{Return } y_1}{c_i} \geq 1$$

L'expression à maximiser $Imp_{E_k} \times E(X|E_k) \times \text{Return } y_1$ a comme unique variable c , le cost, qui détermine le nombre d'impression, et donc par $b_{E_k}^* \text{max}$. L'espérance de conversion étant supposé indépendant du cost, de l'axiome initial de quasi-neutralité au risque, on en déduit que la borne maximale de l'intervalle des bids est par conséquent égale au plus petit majorant de l'espérance conditionnelle du *Return* d'un singleton compris dans E_k . On a alors :

$$E(X|E_k) \times \text{Return } y_1 - c = 0$$

$$\Leftrightarrow E(X|E_k) \times \text{Return } y_1 = c$$

$$\Leftrightarrow b_{E_k}^* \text{max} = \inf(E(X|E_k) \times \text{Return } y_1)$$

Ainsi, $b_{E_k}^* \text{max} = \inf(E(X|E_k) \times \text{Return } y_1)$ sur M est une solution du système. L'intervalle optimal pour tout ensemble priceable E_k est par conséquent défini par $[0 ; \inf(E(X|E_k) \times \text{Return } y_1)]$. Ce résultat sera intégré dans le process algorithmique final pour tout ensemble pricé. La section suivante vise à déterminer la segmentation optimale de l'ensemble Ω pour lesquels les intervalles de bids, dont la fixation optimale vient d'être détaillée, sont associés.

3.2. Déterminants et processus de segmentation optimal de l'ensemble Ω

3.2.1. Recouvrement pricé optimal d'un sous ensemble $A_{i,t} \subset A$: la partition

La détermination des intervalles de bids associés aux ensembles pricés qui vient d'être décrite amène à la question de la nature du recouvrement de l'union des ensembles pricés en un point quelconque de l'espace T des temps. En effet, les variables discriminantes qui forment les ensembles pricés présentent un très grand nombre d'intersections non vides, et donc, de possibles coexistences de plusieurs intervalles de bids pour une même impression. Il s'agit donc de déterminer quel recouvrement pricé permet d'optimiser le niveau de profit sur un placement donné. La section 3.1.1 a montré que le coût d'une impression c_x pour obtenir une impression x sur un placement i à un instant t est égal au plus petit majorant sur M du prix p_x associé à cette impression. A partir de cet état de fait, on en déduit le lemme suivant.

3.2.1.1. Lemme 1 de recouvrement optimal d'un sous ensemble $A_{i,t}$

On pose deux ensembles pricés, E_j et $E_{j'}$, avec comme intervalles de bids respectifs $[b_{\min x}; b_{\max x}]$ et $[b'_{\min x}; b'_{\max x}]$, tel que $b_{\max x} \leq b'_{\max x}$ et $b_{\min x} = b'_{\min x} = 0$, associés à une même impression. On pose également trois systèmes de bids maximums : $S1 : \{b_{\max x}\}$, $S2 : \{b'_{\max x}\}$ et $S3 : \{b_{\max x}, b'_{\max x}\}$ ²² où $b_{\max x}$ et $b'_{\max x}$ coexistent sur une même enchère. On a donc :

- Si $b'_{\max x} < \sup(p_x)$, pour S1, S2, S3 l'impression n'est pas obtenue, et $c_x = 0$.
- Si $b_{\max x} < \sup(p_x) < b'_{\max x}$, pour S1 l'impression n'est pas obtenue, et $c_x = 0$. Pour S2, S3 l'impression est obtenue et $c_x = \sup(p_x)$
- Si $p_x < b_{\max x} = b'_{\max x}$, pour S1, S2, S3 l'impression est obtenue et $c_x = \sup(p_x)$, avec pour S3 une équiprobabilité de 0.5 d'attribution de c_x ainsi que de l'impression x entre les deux ensembles associés aux bids $b_{\max x}$ et $b'_{\max x}$.
- Si $p_x < b_{\max x} < b'_{\max x}$, pour S1, S2 l'impression est obtenue et $c_x = \sup(p_x)$. Pour S3 l'impression est également obtenue et $c_x = \sup(b_{\max x})$, donc $c_x > \sup(p_x)$.

²² Pour $b_{\max x}$, p_x correspond à $b'_{\max x}$ lorsqu'il major le floor du SSP ainsi que les bids maximums des autres DSP, et réciproquement pour $b_{\max x}$, p_x correspond à $b'_{\max x}$ lorsqu'il répond à ces mêmes critères. Par soucis de clarté, on dissocie ici la notation p_x de $b'_{\max x}$ et $b_{\max x}$.

Par conséquent, quel que soit la valeur de p_x , pour un même événement d'obtention ou de non-obtention d'une impression x , le cost c_x associé à S2 est inférieur ou égal à S3. Par ce lemme, on démontre que la coexistence de deux bids maximaux sur une même impression, dans une situation de majoration par ces deux bids du floor du SSP ainsi que des bids maximaux des autres DSP, engendrera un cost supérieur à celui obtenu par l'existence du plus grand de ces deux bids.

3.2.1.2. Lemme 2 de recouvrement optimal d'un sous ensemble $A_{i,t}$

La fonction objectif est défini par la relation $Profit\ Total = Return\ Total - Investment\ Total$. En reprenant l'énoncé présent dans le *lemme 1*, il s'agit de déterminer, *ceteris paribus*, lequel des systèmes S1, S2, S3 maximise l'espérance du $Profit\ Total$. La situation $b_{max\ x} < sup(p_x) < b'_{max\ x}$ ne permet pas d'arbitrer entre S1, S2, S3 sans poser de conditions sur l'espérance de $Return$ associé à l'obtention de l'impression x . Pour $b_{max\ x} < sup(p_x) < b'_{max\ x}$:

- Si $E(Return\ x) < sup(p_x)$, alors $Profit\ x_{S1} > Profit\ x_{S3}$ et $Profit_{S1}\ x > Profit_{S2}$
- Si $E(Return\ x) = sup(p_x)$, alors $Profit_{S1}\ x = Profit\ x_{S2} = Profit_{S3}\ x$
- Si $E(Return\ x) > sup(p_x)$, alors $Profit\ x_{S1} < Profit\ x_{S3}$ et $Profit_{S1}\ x < Profit_{S2}$

On peut donc ordonner $Profit\ x_{S1}$ par rapport à $Profit\ x_{S2}$ et $Profit\ x_{S1}$ par rapport $Profit\ x_{S3}$ lorsque $E(Return\ x)$ est connu. L'événement d'obtention ou de non-obtention d'une impression x étant le même entre S2 et S3 pour une même valeur de p_x , on en déduit l'indépendance de l'espérance de $Return\ x$, entre les solutions S2, et S3. La relation d'ordre $Profit\ x_{S2}$ et $Profit\ x_{S3}$ dépend donc uniquement de l' $Investment\ x$. L' $Investment\ Total$ dont $Investment\ x$ est un sous-ensemble, est égal à la somme des costs $\sum_{i=1}^N c_i$: il suit donc une relation croissante de c_x . Or, le lemme 1 à démontrer que la coexistence de b_x et b'_x (S3) engendrait un cost $c_x \geq sup(p_x) \forall p_x$, tandis que S1 et S2 engendrent un cost $c_x = sup(p_x)$. Par conséquent, *ceteris paribus*, l' $Investment\ Total$ est inférieur ou égal lorsqu'il n'existe qu'une seule des bornes b_x (S1) ou b'_x (S2) à l' $Investment\ Total$ en situation de coexistence de b_x et b'_x (S3). Par conséquent :

- Si $E(Return\ x) < sup(p_x)$, alors $Profit\ x_{S1} > Profit\ x_{S2} \geq Profit\ x_{S3}$
- Si $E(Return\ x) = sup(p_x)$, alors $Profit\ x_{S1} = Profit\ x_{S2} \geq Profit\ x_{S3}$
- Si $E(Return\ x) > sup(p_x)$, alors $Profit\ x_{S2} \geq Profit\ x_{S1}$ et $Profit\ x_{S2} \geq Profit\ x_{S3}$

Ainsi, tout profit associé à une stratégie de coexistence de deux bids maximums non égaux sur une même impression est soit égal, soit majoré par le profit associé à une stratégie ne comprenant qu'un bid maximum.

3.2.1.3. Théorème de recouvrement optimale d'un ensemble $A_{i,t} \subset A$

Du second lemme, on déduit alors le théorème suivant : pour toute union d'au moins deux sous-ensembles de V avec un sous-ensemble A_i à un instant t , il existe un recouvrement optimal de $E_{j,t} \cup E_{j',t} \cup A_i$ qui soit une partition. Aussi, par extension, puisque $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N V_i$, il existe pour tout $A_{i,t} \subset A$ un recouvrement optimal de $A_{i,t}$ qui soit une partition. Pour tout $t \in T$ donc, $A_{i,t}$ peut être munie d'une topologie de Hausdorff. Par conséquent : $\forall (i, t), k \neq k', \exists (E_k \cap A_{i,t} \neq \emptyset, E_{k'} \cap A_{i,t} \neq \emptyset)$

3.2.2. Attribution d'une intersection non vide d'un sous-ensemble mesurable de V avec un sous-ensemble $A_{i,t}$

Lorsque l'intersection de deux sous-ensembles mesurables comprend une intersection non vide sur un ensemble $A_{i,t}$, la question de l'attribution de cette intersection à l'un de ces deux sous-ensembles apparaît. En effet, comme il a été montré précédemment, afin d'atteindre un optimum de profit, un ensemble $A_{i,t}$ doit être muni d'une topologie de Hausdorff. Or, cette intersection appartenant *a priori* à au moins deux ensembles mesurables, celle-ci ne constitue pas elle-même un ensemble priceable, puisque toute intersection de parties de E est différente de l'ensemble vide. L'attribution de cette intersection à un de ces sous-ensembles n'est pas bénigne puisqu'elle conditionne l'intervalle de bids appliqués à cette intersection, et donc, potentiellement, le nombre d'impressions obtenues. Puisque l'on a supposé le bid minimal nul, l'attribution de cette intersection à l'ensemble priceable qui a la borne maximale de bid la plus haute, permet d'obtenir un nombre d'impression sur cette intersection, supérieur ou égal aux autres ensembles priceables. Par conséquent, on attribue cette intersection à l'ensemble priceable dont la borne maximale de bid est la plus haute, jusqu'à ce qu'un sous-ensemble contenant une partie de cette intersection devienne à son tour un ensemble priceable.

3.2.3. De l'influence de l'information disponible sur l'optimum d'espérance de profit

Dans le cadre axiomatique précédemment posé et lorsque la fixation des intervalles de bids des ensembles de Ω suit le processus de détermination des intervalles de bid optimal détaillé dans la section 3.1., le niveau de profit dépend de la topologie qui sépare les ensembles selon leur priceation dont est munie l'ensemble Ω . Les ensembles pricés sont par définition munis d'un intervalle de bids qui

conditionne les impressions obtenues, et, par extension le niveau de profit associé. Nous avons posé précédemment la formule objectif suivante :

$$\text{Max } E(\text{Profit } E_k) = \text{Return } y_1 \times E(X|w_i) \times n_{c_{E_k}} - \sum_{j=1}^{n_{c_{E_k}}} c_j$$

Seulement, la détermination d'un prix maximal à payer influe sur le nombre d'impressions, ce qui exige une reformulation du nombre d'impressions comme fonction du cost et non comme donnée exogène, afin de quantifier l'effet d'un changement de topologie pricee sur le niveau de profit associé à cet ensemble. La sous-section suivante formalise d'impressions obtenus sur un intervalle de temps fixé sur un ensemble pricee E_k appartenant à Ω .

3.2.3.1. Reformulation du nombre d'impressions obtenues comme fonction des costs effectifs

Le nombre d'impressions obtenues est fonction du cost effectif sur l'ensemble E_k sur un intervalle de temps I_t . Il peut être noté sous la forme $\text{Imp}_{E_k, I_t}(c)$. La discontinuité de l'ensemble monétaire induite par son caractère discret, avec un pas au millionième d'unité monétaire, implique que la fonction $\text{Imp}_{E_k, I_t}(c)$ est une fonction en escalier, avec, pour un ensemble priceable E_k , la subdivision suivante :

$$\text{Supp} \left(I_{M_{E_k, I_t}} \right) = \left\{ \left[0; \frac{1}{10^6} \right], \dots, \left[b_{E_k \max} - \frac{1}{10^6}; b_{E_k \max} \right] \right\}$$

$$\Leftrightarrow \text{Supp} \left(I_{M_{E_k, I_t}} \right) = \left\{ \left[0; \frac{1}{10^6} \right], \dots, \left[\inf(E(X|E_k, I_t) \times \text{Return } y_1) - \frac{1}{10^6}; \inf(E(X|E_k, I_t) \times \text{Return } y_1) \right] \right\}$$

Le nombre impressions obtenues sur un ensemble E_k sur un intervalle de temps I_t peut ainsi être exprimé comme la fonction en escalier suivante :

$$\text{Imp}_{E_k, I_t}(c) = \sum_{j=0}^{b_{E_k, I_t} \max} \alpha_j \mathbf{1}_{\left[c_j, c_{j+\frac{1}{10^6}} \right]}(c)$$

La fonction en escalier $Imp_{E_k}(c)$ sur l'intervalle $[0; b_{E_k, I_t}^{max}]$ est une somme de Riemann qui peut s'écrire sous forme d'intégrale tel que :

$$\sum_{j=0}^{b_{E_k, I_t}^{max}} \alpha_j (c_{j+\frac{1}{10^6}} - c_j)(c) = \int_0^{b_{E_k, I_t}^{max}} Imp_{E_k, I_t}(c) dc$$

Cette expression sous forme d'intégrale permet d'appréhender intuitivement le cost payé comme une aire dans un plan. Afin d'analyser l'impact d'un changement de segmentation dont les parties sont priceables, il convient de réécrire l'expression du profit d'un ensemble E_k muni de la topologie grossière avec cette nouvelle expression du media cost, et de la comparée à une topologie séparée dont les parties sont priceées, et plus fine au sens de l'inclusion.

3.2.3.2. Décomposition du profit d'un ensemble priceable E_k en N sous-ensembles séparés

Si l'ensemble E_k est muni de la topologie priceée grossière $\{E_k, \emptyset\}$, autrement dit, associé à un unique intervalle de bid pour tous les singletons compris dans cet ensemble, l'expression du profit s'écrit :

$$E(\text{Profit } E_{E_k, I_t}) = Imp_{E_k, I_t}(c) \times \text{Return } y_1 \times E(X|E_k, I_t) - \int_0^{b_{E_k, I_t}^{max}} Imp(c) dc$$

$$\Leftrightarrow Imp_{E_k, I_t}(c) \times \text{Return } y_1 \times E(X|E_k, I_t) - \int_0^{\inf(E(X|E_k, I_t) \times \text{Return } y_1)} Imp_{E_k, I_t}(c) dc$$

Puisque $E_k, I_t = \cup_{h=1}^x E_{k_h, I_t}$ et $E(X|E_k, I_t) = \frac{E(X|E_{k_1, I_t}) \times \text{Card}(E_{k_1, I_t}) + \dots + E(X|E_{k_h, I_t}) \times \text{Card}(E_{k_h, I_t})}{\text{Card}(E_k, I_t)}$, si l'on muni l'ensemble priceé E_k d'une topologie O_{E_k} , $\{E_{k_1}, \dots, E_{k_x}, \emptyset\}$, dont les parties ne sont pas priceées, tel que $(E_k, O_{E_k}, \emptyset)$ est un espace de Hausdorff, on a :

$$E(\text{Profit } E_{E_k, I_t}) = Imp_{E_k, I_t}(c) \times \text{Return } y_1 \times E(X|E_k, I_t) - \int_0^{\inf(E(X|E_k, I_t) \times \text{Return } y_1)} Imp_{E_k, I_t}(c) dc$$

$$\Leftrightarrow \sum_{h=1}^x (Imp_{E_{k_h, I_t}}(c) \times Return y_1 \times E(X|E_{k_h, I_t})) - \sum_{k=1}^x \int_0^{b_{E_k, I_t}^{max}} Imp_{E_{k, I_t}}(c) dc \quad 23$$

$$\Leftrightarrow \sum_{h=1}^x (Return y_1 \times E(X|E_{k_h, I_t}) \times Imp_{E_{k_h, I_t}}(c) - \int_0^{inf(E(X|E_{k_h, I_t}) \times Return y_1)} Imp_{E_{k_h, I_t}}(c) dc)$$

Cette nouvelle expression permet alors de déterminer l'influence sur la variation du niveau de profit de la priceation des N sous-ensembles de E_k .

3.2.3.3. Variation du niveau de profit par la priceation des N sous-ensembles de E_k

Supposons à présent que le niveau d'information permette de pricer les N sous-ensembles séparés de E_k , c'est-à-dire, d'associé à chacun de ces ensembles une probabilité conditionnelle. Par conséquent, s'il existe un ensemble priceable E_{k_φ} , tel que $E(X|E_{k_\varphi, I_t}) < E(X|E_{k, I_t})$, il existe également un ensemble E_{k_θ} tel que $E(X|E_{k_\theta, I_t}) > E(X|E_{k, I_t})$. On note donc $\bigcup_{k_\varphi=1}^{K_\varphi} E_{k_\varphi, I_t}$ l'union des ensembles priceables dont les espérances conditionnelles sont inférieures à $E(X|E_{k, I_t})$, $\bigcup_{k_\theta=1}^{K_\theta} E_{k_\theta, I_t}$ l'union des ensembles priceables dont les espérances conditionnelles sont supérieures à $E(X|E_{k, I_t})$. Aussi, de la section 3.2.1.3, on en déduit que $Imp_{E_{k, I_t}}(c) = \sum_{k_\varphi=1}^{K_\varphi} (Imp_{E_{k_\varphi, I_t}}(c)) + \sum_{k_\theta=1}^{K_\theta} (Imp_{E_{k_\theta, I_t}}(c))$. L'évolution de l'espérance de profit comprend alors deux composantes notées $E\left(\Delta Profit_{\bigcup_{k_\varphi=1}^{K_\varphi} E_{k_\varphi, I_t}}\right)$ et $E\left(\Delta Profit_{\bigcup_{k_\theta=1}^{K_\theta} E_{k_\theta, I_t}}\right)$, où :

$$\begin{aligned} & E\left(\Delta Profit_{\bigcup_{k_\varphi=1}^{K_\varphi} E_{k_\varphi, I_t}}\right) \\ &= \sum_{k_\varphi=1}^{K_\varphi} \left(\int_{inf(E(X|E_{k_\varphi, I_t}) \times Return y_1)}^{inf(E(X) \times Return y_1)} Imp_{E_{k_\varphi, I_t}}(c) dc \right) \\ & \quad - \sum_{k_\varphi=1}^{K_\varphi} \left(E(X|E_{k_\varphi, I_t}) \times \left(\sum_{i=\frac{1}{10^6}}^{inf(E(X) \times Return y_1)} Imp_{E_{k_\varphi, I_t}}(c) - \sum_{i=\frac{1}{10^6}}^{inf(E(X|E_{k_\varphi, I_t}) \times Return y_1)} Imp_{E_{k_\varphi, I_t}}(c) \right) \right) \end{aligned}$$

²³ En effet, puisque $\bigcup_{h=1}^x E_{h, I_t}$ et que, dans la section 3.2.1.3, il a été démontré que $\forall (i, t), k \neq k', \exists (E_k \cap A_{i, t} \neq \emptyset, E_{k'} \cap A_{i, t} \neq \emptyset)$ on en déduit que $Imp_{E_{k, I_t}}(c) = \sum_h Imp_{E_{k_h, I_t}}(c)$.

Et...

$$\begin{aligned}
& E\left(\Delta Profit_{\cup_{k_\vartheta=1}^{K_\vartheta} E_{k_\vartheta}}\right) \\
&= \sum_{k_\vartheta=1}^{K_\vartheta} \left(E(X|E_{k_\vartheta}) \times \left(\sum_{i=\frac{1}{10^6}}^{\inf(E(X|E_{k_\vartheta}) \times Return y_1)} Imp_{E_{k_\vartheta}}(c) - \sum_{i=\frac{1}{10^6}}^{\inf(E(X) \times Return y_1)} Imp_{E_{k_\vartheta}}(c) \right) \right) \\
&\qquad\qquad\qquad - \sum_{k_\vartheta=1}^{K_\vartheta} \int_{\inf(E(X) \times Return y_1)}^{\inf(E(X|E_{k_\vartheta}) \times Return y_1)} Imp_{E_{k_\vartheta}}(c) dc
\end{aligned}$$

Or, la section 3.1.3 a démontré que toute partie E_k quelconque dont l'espérance du processus aléatoire X est $E(X|E_{k_\vartheta})$, a une espérance de gain positive dès lors que $b_{E_k \max} = \inf(E(X|E_k) \times Return y_1)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k_\varphi=1}^{K_\varphi} \left(\int_{\inf(E(X|E_{k_\varphi}) \times Return y_1)}^{\inf(E(X) \times Return y_1)} Imp_{E_{k_\varphi}}(c) dc \right) \\
&\leq \sum_{k_\varphi=1}^{K_\varphi} \left(E(X|E_{k_\varphi}) \times \left(\sum_{i=\frac{1}{10^6}}^{\inf(E(X) \times Return y_1)} Imp_{E_{k_\varphi, I_t}}(c) - \sum_{i=\frac{1}{10^6}}^{\inf(E(X|E_{k_\varphi, I_t}) \times Return y_1)} Imp_{E_{k_\varphi, I_t}}(c) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow E\left(\Delta Profit_{\cup_{k_\varphi=1}^{K_\varphi} E_{k_\varphi, I_t}}\right) > 0$$

Et...

$$\begin{aligned}
& \sum_{k_\vartheta=1}^{K_\vartheta} \left(E(X|E_{k_\vartheta, I_t}) \times \left(\sum_{i=\frac{1}{10^6}}^{\inf(E(X|E_{k_\vartheta, I_t}) \times Return y_1)} Imp_{E_{k_\vartheta, I_t}}(c) - \sum_{i=\frac{1}{10^6}}^{\inf(E(X) \times Return y_1)} Imp_{E_{k_\vartheta}}(c) \right) \right) \\
&\geq \sum_{k_\vartheta=1}^{K_\vartheta} \int_{\inf(E(X) \times Return y_1)}^{\inf(E(X|E_{k_\vartheta}) \times Return y_1)} Imp_{E_{k_\vartheta, I_t}}(c) dc
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow E \left(\Delta Profit_{\cup_{k \neq 1}^{K, \emptyset} E_{k, \emptyset}, I_t} \right) > 0$$

Donc :

$$E \left(\Delta Profit_{\cup_{k \neq 1}^{K, \emptyset} E_{k, \emptyset}, I_t} \right) + E \left(\Delta Profit_{\cup_{k \neq 1}^{K, \emptyset} E_{k, \emptyset}, I_t} \right) > 0$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^x (Return y_1 \times E(X|E_{k_n}) \times Imp_{E_k}(c_{E_k}) - \int_0^{\inf(E(X|E_{k_n}) \times Return y_1)} Imp_{E_k}(c_{E_k}) dc_{E_k}) \\ \geq Return y_1 \times E(X|E_k) - \int_0^{\inf(E(X|E_k) \times Return y_1)} Imp(c) dc \end{aligned}$$

Par conséquent, l'association un ensemble E à une topologie pricée par parties strictement plus fine au sens de l'inclusion engendre un optimum de profit supérieur ou égal à l'optimum de profit de ce même ensemble associé à une topologie moins fine. Aussi sur un même intervalle de temps, un ensemble E associé à une topologie pricée $\{E, \emptyset\}$ a une espérance de profit majorée par l'espérance de profit engendrée par une topologie pricée $\{E_{k_1}, \dots, E_{k_x}, \emptyset\}$.

Si l'association d'un ensemble à une topologie pricée plus fine au sens de l'inclusion permet d'accroître l'espérance de profit, la constitution de topologies nécessite un niveau d'information suffisant afin de segmenter les parties constitutives de cet ensemble en sous-ensemble pricés. Or le niveau de cette information est déterminé par l'obtention d'impressions associés aux singletons compris dans cet ensemble, ce qui induit un coût de collecte d'information. Cette propriété a pour conséquence directe d'endogénéiser la problématique de collecte d'informations à la fonction objectif de maximisation du profit. Conséquemment à cet état de fait, la maximisation du profit total associée à la campagne de l'advertiser dépend tout entière des modalités de cette collecte, dont font dépendre la capacité de segmentation et par conséquent l'espérance de profit. La section suivante va ainsi consister à déterminer un process algorithmique efficient de collecte de cette information, par modifications successifs des topologies pricées associées à Ω résultant de la croissance du niveau d'information.

3.3. Processus algorithmique d'apprentissage et d'affinage des topologies O_E associées à Ω par inférence semi-paramétrique

Les topologies de Ω sont engendrées par un processus d'apprentissage, dont la topologie précisée initiale associée à Ω est la topologie grossière $\{\Omega, \emptyset\}$. En effet, les topologies précisées que l'on associe à Ω sont déterminées par la possibilité d'associer à ses parties une espérance $E(X|E_k)$, où les tirages précédents de singletons compris dans $E_k \subset \Omega$ permet de construire une zone de confiance d'une dimension d_{ZC} , ayant un niveau de confiance minimal α^* tous deux fixés *a priori*. La fixation du couple (d_{ZC}, α^*) *a priori* ne soustrait pas cette décision de la fonction objectif de maximisation du profit, qui agrège ici une double problématique : celle de collecte d'informations sur le processus aléatoire qui détermine l'espérance de profit, et une limitation du coût de cette collecte. La conciliation de ces deux éléments revient donc à déterminer un point d'équilibre où tout autre niveau d'information dégrade le niveau de profit, soit par des biais informationnels qui influent négativement sur les décisions d'achats, soit, à l'inverse, par un surplus d'information, qui se traduit par une évolution du *return* inférieur au surcoût de sa collecte. L'absence initiale de données sur le processus aléatoire X fait dépendre ce choix de données extérieurs aux observations empiriques, autrement dit, d'anticipations *a priori*²⁴. Naturellement, la construction de ces anticipations qui déterminent le choix du couple (d_{ZC}, α^*) , nécessite de spécifier la nature de la zone de confiance choisit. Puisque le processus aléatoire X suit une loi multinomiale²⁵, on a recours à la construction d'une zone de confiance par maximisation de la vraisemblance empirique dont on doit la formalisation au statisticien de Stanford Art B. Owen²⁶. La zone de confiance pour un ensemble E_k est ainsi déterminée par l'expression suivante :

$$ZC_{\alpha,n} = \{E(X|E_k) \mid -2 \times \log(\sup\{\prod_{i=1}^n n \times q_i \mid \sum_{i=1}^n q_i = 1, \sum_{i=1}^n q_i \times X_i = E(X|E_k), \forall i \in [1; n], q_i > 0\}) \leq \alpha^*\}$$

Où q_i est une pondération et n le nombre d'impressions obtenues.

Conformément à sa définition énoncée dans la section 2.2.2, un ensemble précisé E_k a donc une norme pour $ZC_{\alpha^*,n}$ fixée, d_{ZC} , dont le niveau de confiance est supérieur à α^* , et est associée à l'intervalle des bids $[0; \inf(E(X|E_k) \times Return y_1)]$. Cependant, puisque le nombre d'impressions obtenu sur

²⁴ Après le lancement de la campagne, des ajustements d'anticipations engendrés par l'acquisition d'informations peuvent imposer une modification du couple (d_{ZC}, α^*) qui réalise l'optimum de profit.

²⁵ Voir section 2.2.1

²⁶ Voir la démonstration de A. B. Owen, *Empirical likelihood ratio confidence regions*, Annals of Statistics, pages 90–120, 1990.

l'ensemble Ω est nul en t_0 , la détermination endogène de la borne maximum de l'intervalle des bids initial devient insoluble. Cet état de fait impose l'ajout d'une phase d'apprentissage où le bid maximal est déterminé de manière exogène. On qualifiera cette phase, de phase d'apprentissage primaire, que l'on associe à un bid maximum, noté $b_{\max a}^*$, inférieur ou égal à *return* y_1 . En effet, puisque l'espérance de *return* y_1 est supposée, égale pour toute réalisation de y_1 , tout bid supérieur à *return* y_1 revient à prendre une décision contraire à l'axiome initial de neutralité au risque. Cependant, la nécessité d'obtenir un échantillon non biaisé impose de ne pas exclure *a priori* des discriminants lors de la phase primaire d'apprentissage. Par conséquent, $b_{\max a}^*$ doit prendre une valeur suffisante afin de ne pas introduire un tel biais. Cette phase permet d'engendrer des ensembles priceés qui sont soumis à une phase d'apprentissage qui sera qualifié de phase secondaire.

3.3.1. Minimisation du biais engendré par la non-stationnarité du processus par intervalle de temps quelconque

Les phases de formation d'ensembles priceables, nécessitent la prise en compte de la non-stationnarité du processus aléatoire X sur des intervalles de temps différents de la norme de stationnarité d_{I_t, S_t} , ainsi que de déterminer les modalités de fixation de cette norme²⁷. La très forte hétérogénéité présente sur l'ensemble initial Ω rend cependant délicat la détermination endogène de d_{I_t, S_t} via l'atteinte d'un seuil minimum de confiance déterminé de manière exogène par test successif de stationnarité²⁸. En effet, si la fixation endogène d'une dimension d'intervalles de temps où le processus aléatoire est stationnaire n'est pas formellement insoluble, celle-ci présente d'importants risques de surcoût engendré par une phase d'apprentissage primaire indéterminée, qui ne semblent pas justifiés au vu des écarts empiriques d'espérance de conversion engendrés par la non-stationnarité généralement observés²⁹. De plus, ces écarts tendent à disparaître via la fragmentation des ensembles en nouveaux sous-ensembles priceés, dès lors qu'un nombre suffisant de discriminants de temps ont été implémenté. Sous ces conditions, une alternative raisonnable à la fixation endogène d'une zone de stationnarité consiste en la fixation exogène de d_{I_t, S_t} associé à la phase primaire. Si la détermination exogène, et donc partiellement

²⁷ Voir la section 2.2.3.

²⁸ Dans le cadre d'une détermination endogène de d_{I_t, S_t} , le niveau de confiance peut être calculé via le test KPSS ou le test de Leybourne et McCabe.

²⁹ Une étude interne à la société Gammed, menée sur 4 campagnes associée chacune à advertiser différent, portant sur des échantillons significatifs (supérieur à deux millions d'impressions, sur des périodes supérieures à un mois, pour des événements associés à une probabilité de réalisation comprise entre 0.0002 à 0.00045) a montré que, pour 3 des 4 campagnes, les écarts de probabilité de conversion en fonction de l'heure ne permettaient pas de rejeter l'hypothèse d'une espérance de conversion égale à la moyenne empirique de l'ensemble de l'échantillon avec un seuil de confiance fixé à 95%. Les écarts de probabilité de conversion intra-hebdomadaire ont présenté des résultats sensiblement similaires, avec un unique rejet de l'hypothèse d'égales probabilités de conversion entre les jours de la semaine, engendré par une probabilité de conversion significativement plus importante le dimanche pour l'une des campagnes.

arbitraire, de $d_{I_t St}$ induit un biais, elle permet dans le même temps de réduire l'incertitude quant à la durée de la phase initiale, et par extension donc, celle de son coût. Ici, la dimension $d_{I_t St}$ sera donc considérée comme déterminée de manière exogène comme paramètre initial à définir. Les ensembles soumis à la phase secondaire d'apprentissage étant pricés, une fixation endogène de zone de stationnarité lors de la phase secondaire apparaît moins susceptible d'engendrer d'important surcoûts par biais d'estimation de l'espérance de conversion, mais réduit inexorablement la vitesse de constitution de nouvelles topologies pricées plus fines. Une option consiste à poser l'hypothèse selon laquelle tout ensemble pricé est associé à un processus stationnaire, ce qui revient formellement à laisser les zones de stationnarité se former via les ensembles discriminants de localisation temporelle des internautes, comme toute formation d'un ensemble pricé quelconque. Cette hypothèse sous-tend que les écarts d'espérance de conversion engendrés par la non-stationnarité du processus ne sont pas davantage susceptibles de produire des erreurs d'estimation que celles de tout autre variables discriminantes³⁰. C'est l'hypothèse qui sera retenue ici.

Lors de la phase primaire d'apprentissage, l'hypothèse de stationnarité par norme de temps $d_{I_t St}$ associée au processus aléatoire couplé à l'absence de détermination directe entre l'espérance de conversion (par définition) nécessite la détermination d'un budget pour cette phase pour chaque intervalle de temps $d_{I_t St}$, noté $B_{d_{I_t St}}$. L'ensemble monétaire sur lequel est défini le cost de chaque impression est discret et les costs des impressions sont inégaux. Par conséquent, une dépense homogène de ce budget par intervalle de temps $d_{I_t St}$ est biaisé. Obtenir un échantillon non biaisé nécessite la détermination d'un nombre d'impressions comme paramètre initial par intervalle de temps $d_{I_t St}$ sur lequel le tirage aléatoire des impressions est homogène. On note ce nombre d'impressions $n_{d_{I_t St}}$. Ainsi, lors de la phase primaire, la fréquence d'une enchère qui simule un tirage aléatoire d'une impression est de $n_{d_{I_t St}}$ par intervalle de temps $d_{I_t St}$, soit une séparation entre deux enchères d'une norme de $\frac{d_{I_t St}}{n_{d_{I_t St}}}$ sur l'ensemble des temps T . Le budget $B_{d_{I_t St}}$ n'est alors plus un budget fixé, mais un budget maximum égal à $b_{\max a}^* \times n_{d_{I_t St}}$. La limite de budget par intervalle de temps de taille $d_{I_t St}$ concerne uniquement la phase primaire d'apprentissage. L'absence de budget maximum dans la phase d'apprentissage secondaire qui concerne les ensembles pricés se justifie par la nature de la fixation de l'intervalle de bid fixé dans cette phase selon l'espérance de conversion.

³⁰ Néanmoins, afin d'être rigoureusement validé, cette hypothèse doit être soumise à un comparatif entre les différentes méthodes de traitement de la problématique de non-stationnarité, portant sur leur efficacité empirique propre. Un tel comparatif ne figure pas dans le présent mémoire.

3.3.2. Phase d'apprentissage primaire

La phase d'apprentissage primaire débute par un tirage aléatoire d'enchères toutes associées à un singleton compris dans Ω , dont l'obtention correspond à une application $f \in F$. Chaque enchère gagnée modifie le niveau de confiance de la zone de confiance $E(X|\Omega \cap V_k)$, de dimension fixée d_{ZC} , d'une intersection $\Omega \cap V_k$, où $V_k \subset V$. Les sous-ensembles dont l'intervalle de taille d_{ZC} atteint un niveau de confiance supérieur ou égal à α^* compris sur une dimension de temps I_{d_t} égal à $\delta \times d_{I_{t_{st}}}$, tel que $\delta \in \mathbb{N}^*$, deviennent des ensembles priceables E_1, \dots, E_n générant une topologie pricée plus fine que la topologie grossière initiale. Si l'intersection de deux sous-ensembles de E n'est pas nécessairement un ensemble vide, c'est le cas pour toute intersection de deux sous-ensembles de E avec un sous-ensemble de A^{31} . Autrement dit : $E_x \cap E_y \cap A_z = \emptyset \forall x, y, z$. On note A_{E_k} , l'ensemble des sous-ensembles de A dont l'intersection avec un ensemble $E_k \subset E$ est non vide. La phase primaire se poursuit pour l'ensemble Ω_L défini par l'égalité $\Omega_L = E_1 \cap A_{E_k}^C \cup \bigcup_{j=1}^n E_j^C$. La topologie engendrée par l'atteinte du seuil de confiance minimal α^* de la zone de confiance de $E(X|E_1)$ associé à l'ensemble E_1 est alors $\{\Omega, E_1, \dots, E_n, \Omega_L, \emptyset\}$.

3.3.3. Phase d'apprentissage secondaire

Les sous-ensembles pricés entament une phase d'apprentissage secondaire associé chacun à un nouvel intervalle de bids $[0 ; \inf(E(X|E_j) \times \text{Return } y_1)]$. Si le nouvel intervalle de bids associé à l'ensemble E_j permet de remporter des enchères et qu'il comporte au moins un sous-ensemble $E_j \cap V_{k'}$ tel que $E_j \cap V_{k'} \neq \emptyset$ et $E_j \neq V_{k'} \cap \Omega$, le niveau de confiance α associé à ces sous-ensembles converge vers α^* . Cette seconde phase d'apprentissage ne limite pas l'apparition de nouveaux ensembles pricés à des sous-ensembles inclus dans E_j . C'est pourquoi, tout sous-ensembles tel que $\Omega \cap V_{k'} \neq E_1$ et $E_1 \cap V_{k'} \cap \Omega_L \neq \emptyset$ peut également devenir un ensemble pricé. Toutefois, contrairement à la phase primaire d'apprentissage, toute intersection d'un sous-ensemble $V_{k'}$ avec au moins un ensemble pricé E_i , ne peut devenir un ensemble pricé que si l'union de $A_{E_k}^C \cup E_i$ est également priceable. Cette condition supplémentaire suppose que lorsqu'une intersection d'un sous-ensemble de V avec n ensembles pricés devient elle-même pricée, n autres sous-ensembles deviennent également des ensembles pricés. Il s'agit d'une condition de recouvrement tel que, pour tout $(t, t + 1) \in T$, l'union des ensembles pricés en t est incluse dans l'union des ensembles pricés en $t + 1$. Cette condition supplémentaire permet de restreinte le coût de la phase d'apprentissage primaire, en associant à tous les singletons $w \in \Omega$ un maximum selon leur appartenance à un ensemble priceable. Cette seconde phase d'apprentissage est itérée sur tous les

³¹ Voir la section 3.2.1.

sous-ensembles pricés séparables par intersection avec un sous-ensemble de V . En parallèle, toute nouvelle impression associée à un ensemble pricé modifie l'estimation de son espérance conditionnelle de X , et, par conséquent la borne maximale de son intervalle de bids. Puisqu'un ensemble pricé se définit par l'espérance conditionnelle de X qui lui est associée, cette phase revient à engendrer un nouvel ensemble E_i . Puisque le processus aléatoire X est supposé stationnaire par partition de temps I_{t_n} , lorsqu'un ensemble pricé n'est plus séparable par intersection avec un sous-ensemble de V l'intervalle de confiance de l'espérance converge vers un niveau de α^* égal à 1.

3.3.4. Résultats du processus algorithmique d'apprentissage : une trajectoire croissante de l'espérance du profit à norme temporelle constante

De par sa raison d'être initiale, la pertinence du processus algorithmique présenté doit se faire au regard de la dynamique du montant de profit en fonction du temps. De par les conditions de recouvrement posées dans la génération de nouveaux ensembles pricés, le processus itératif composé de la phase primaire et secondaire associée à Ω des topologies pricées de plus en plus fine sur T tel que :

$$O_{t_0} \subseteq O_{t_1} \subseteq \dots \subseteq O_{t_N}$$

Or, il a été démontré dans la section 3.2.3 que, sous les modalités de détermination des intervalles de bids associés aux ensembles pricés, un ensemble muni d'une topologie pricée plus fine au sens de l'inclusion est associé à une espérance de profit supérieur ou égal à ce même ensemble muni d'une topologie moins fine. On peut ainsi démontrer que le profit tend à croître, en posant l'hypothèse d'une cardinalité constante sur tous les ensembles V associés à un système de prix déterministe et périodique par intervalle de temps de norme $\frac{d_{I_t St}}{\gamma}$ tel que $\gamma \in \mathbb{N}^{*32}$. L'espérance du *Return* étant égal au produit scalaire du gain associé à l'état y_1 par l'espérance du processus aléatoire X , celui-ci est un processus aléatoire adapté à une filtration M et M_t mesurable sur l'espace monétaire³³. De ces éléments on en déduit alors :

$$E(\text{Profit}_{I_{t+1}} | M_t) \geq E(\text{Profit}_{I_t}) \quad \forall I_t, I_{t+1} \in T, |I_{t+1} - I_t| = d_{I_t St}$$

³² En effet, l'ensemble n'étant pas situé sur le même intervalle de temps, une modification du cardinal d'un ensemble ou/et du système de prix des impressions affecte le niveau de profit indépendamment de toute action de l'advertiser. Ces hypothèses permettent donc d'écarter les éléments pour lesquels l'advertiser n'a pas de prise directe. Elles revêtent ici la stricte équivalence fonctionnelle de la locution *ceteris paribus*.

³³ On déduit cette proposition de la propriété de linéarité des espérances conditionnelles, c'est-à-dire ici : $Imp_{E_k} \times Return_{y_1} \times E(X|E_k) = E(X \times Imp_{E_k} \times Return_{y_1} | E_k)$ à valeur dans l'espace monétaire.

Ainsi, sous les hypothèses précédemment posées, par intervalle de temps de norme $d_{I_t St}$ défini sur T , le processus aléatoire que suit le montant du profit est proche d'une sous-martingale³⁴. Par conséquent, l'association de l'espérance sur des ensembles de plus en plus restreints permet de faire croître l'efficacité des investissements et d'accroître le niveau de profit par la détermination d'espérance conditionnelles fiables par intervalles de temps de norme $d_{I_t St}$. Ainsi, sous les conditions de stationnarité de X par intervalle de temps I_t , seul des facteurs exogènes sur lesquels l'advertiser ne possèdent pas de leviers d'action sont en mesure d'engendrer une inflexion tendancielle de l'espérance du profit. Dans un cadre de stabilité de l'offre d'espaces publicitaires et du système des prix qui lui est associé, l'espérance de profit suit une trajectoire croissante.

A l'instar de l'axiomatique de concurrence pure et parfaite, les hypothèses fortes posées constituent un cadre analytique afin d'extraire les mécanismes du process algorithmique qui vise à faire croître le niveau de profit. Ces hypothèses supposent donc un lissage d'une multiplicité d'irrégularités inhérente au système, dont les lois de composition réelles s'avèrent davantage erratique. Cependant, la structure de par la réversibilité de tout ensembles prixés précédemment constitués dès lors que les conditions de recouvrement sont respectées, le process présenté permet la correction des erreurs d'estimations, ou de clustering inadéquats, engendrés par ces biais. Des concessions quant à la cohérence théorique d'ensemble ont été également faites, en particulier dans l'appréhension de la problématique de stationnarité, au profit d'une plus grande adéquation avec l'objectif de maximisation du gain monétaire. Ces choix dans la constitution du process d'optimisation, couteux en termes de rigueur, semblent davantage à même d'optimiser le niveau de profit au regard des données empiriques à disposition.

³⁴ Le *Profit* aurait été une sous-martingale sous les conditions suivantes : $E(\text{Profit}_{I_{t+1}} | M_t) \geq \text{Profit}_{I_t} \quad \forall I_t, I_{t+1} \in T,$
 $|I_{t+1} - I_t| = d_{I_t St}$

Conclusion

La formalisation, par une approche ensembliste, des différents déterminants qui interagissent sur le niveau de profit associé à une campagne marketing RTB a abouti à la construction d'un processus algorithmique qui tend vers un optimum pour l'advertiser en condition d'achat désintermédié.

Ce processus débute par le choix du KPI préalable au lancement de la campagne. Il a été démontré que le choix optimal de ce KPI est celui qui minimise la variance du gain attribuable à la campagne publicitaire. Cette variance est à la fois fonction de la capacité de l'advertiser d'associer un gain à l'action définie par le KPI, mais également de l'occurrence de cette action. Cette variance influe non seulement sur le niveau de risque, mais également sur le niveau de profit espéré, de par la dépendance des choix d'optimisations au gain associé à l'action défini par le KPI. Un gain monétaire est associé à la réalisation de cette action, selon les anticipations de l'advertiser. En parallèle de ce choix, l'advertiser doit intégrer des variables discriminantes mesurables qui vont permettre de segmenter l'ensemble de population sur laquelle la campagne publicitaire RTB va être menée. Ces variables sont mesurables et binaires au sens où, les technologies à disposition de l'advertiser permettent de déterminer pour tout internaute compris dans l'ensemble de population totale si celui-ci répond ou non à un critère défini par la variable. Une fois le KPI défini et l'ensemble des variables discriminantes intégrées, l'information relative à l'espérance de réalisation d'évènements associables à un gain monétaire n'étant pas connu a priori, l'advertiser doit définir un bid maximal associé à la phase d'apprentissage initiale où aucune partie de l'ensemble n'est discriminée. Cette même absence d'information induit une détermination partiellement arbitraire du bid maximal de la phase d'apprentissage initiale. Il doit cependant être inférieur au gain associé à la réalisation de l'action défini par le KPI, et assez élevé pour ne pas procéder à une discrimination a priori. De la même manière, un intervalle de temps où le processus aléatoire associé à la phase primaire d'apprentissage est supposé stationnaire, ainsi qu'un budget maximum pour cet intervalle doivent être tous deux déterminés comme paramètres initiaux. Ce couple de paramètres permet de minimiser le biais engendrer par les variations du processus aléatoire, tout en minimisant le risque de surcoût induit par un budget non borné. Les paramètres initiaux fixés, la phase initiale peut alors débutée. Cette phase consiste en des tirages aléatoires d'enchères sur l'ensemble initial répartis de manière homogène sur l'intervalle de stationnarité fixé, où la fréquence des tirages est déterminée par le rapport de la norme de cet intervalle sur la borne maximale de l'intervalle des bids. Les impressions obtenues permettent d'accroître le niveau d'information initialement nul et conditionnel à ce nombre d'impressions. Lorsque l'information disponible permet de construire un ensemble à partir d'une variable discriminante dont l'estimateur de l'espérance de son KPI est jugé fiable selon des critères prédéfinis par l'advertiser, cet ensemble est associé un bid maximal égal à son espérance de gain, et devient alors un ensemble priceable. Pour tout ensemble pricé, cette espérance de gain est égale au gain associé à l'action défini par le KPI pondéré de l'espérance de cet action sur cet ensemble. Cette phase

est itérée de manière à réduire la durée de la phase d'apprentissage initiale, par le recouvrement complet de l'ensemble de la population totale par des ensembles pricés. Les topologies pricés associées à cet ensemble sont ainsi de plus en plus fines, avec pour conséquence directe une croissance de l'efficacité allocative due à la croissance du nombre d'ensembles pricés. En parallèle, l'estimateur de l'espérance de tout ensemble pricé est redéfini à chaque nouvelle impression appartenant à cet ensemble, afin d'améliorer la qualité de l'estimateur et d'adapter par conséquent le montant du bid maximum. Ainsi, la structure du process permet d'associer le l'accroissement de l'information disponible à une efficacité croissante des dépenses publicitaires en fonction du temps, par la détermination ajustée d'une propension maximale à payer d'une impression, selon l'appartenance de l'internaute à un sous-ensemble de la population totale.

Comme toute modélisation, ce processus visant à atteindre un optimum, le modèle présenté dans ce mémoire repose sur un certain nombre d'hypothèses. L'une d'elles porte sur l'équipondération d'attribution des conversions entre les ensembles sur lequel un internaute a été exposé préalablement, dans un intervalle de temps prédéterminé. Or, les modèles d'attributions sont pluriels et le choix entre ces modèles fait aujourd'hui débat. En l'état, l'absence de consensus ne permet pas de déterminer la supériorité d'un modèle d'attribution sur un autre pour toute campagne publicitaire programmatique. Cependant, la loi multinomiale sur lequel repose le modèle présente une grande souplesse dans la modélisation des potentielles typologies d'attribution optimales selon les campagnes. Par conséquent, une modification paramétrique des pondérations d'attribution en fonction de l'intervalle de temps qui sépare l'affichage d'une publicité de la réalisation d'un évènement ne génère aucune modification majeure du présent modèle. Si le choix des modèles d'attribution est un objet de recherche à part entière, la très forte hétérogénéité des campagnes publicitaires rend très improbable l'existence d'un modèle universel de pondération pleinement efficient. L'ajout d'un processus de fixation endogène du système pondérations est donc à la fois envisageable et potentiellement générateur d'un accroissement du niveau de profit. Toutefois, à l'instar de la fixation des intervalles de bids, ce processus ne saurait se soustraire à une détermination initiale exogène de ces paramètres lors de la phase primaire d'apprentissage.

De la même façon, chaque élément de la population est appréhendé dans le présent modèle comme indépendant. Cette hypothèse est faiblement restrictive pour une part substantielle des campagnes publicitaires pour lesquels les interactions entre les éléments de la population occupent une part résiduelle des variations d'espérance de réalisation d'évènements. Cependant, pour les campagnes de marketing viral où la diffusion de l'information entraîne une corrélation entre les espérances de conversion associé aux individus, le processus générateur de topologies présenté dans ce mémoire n'est pas adapté. Pour cette typologie de campagne, les modèles de propagation sur les graphes comme celui

présenté dans la thèse de M. Rémi Lemonnier³⁵ permettent la captation des phénomènes viraux de diffusion ou d'inhibition, qui conditionnent l'évolution du processus aléatoire, et, par extension, les modalités de priceation optimales.

Enfin, les choix relatifs aux traitements de la stationnarité retenus dans ce mémoire admettent certaines lacunes sur le plan de la cohérence conceptuelle, afin de proposer un process davantage à même de maximiser l'espérance de profit en présence d'irrégularités inhérentes au système. Cette solution palliative est, au regard des données empiriques à disposition, le compromis le plus adéquat. Puisque ce choix repose sur le niveau d'information détenu par l'auteur, l'existence de solutions alternatives plus efficiente n'est par conséquent pas exclue.

³⁵ Rémi Lemonnier, (2016) *Application of stochastic processes to real-time bidding and diffusion processes on networks*, pages 8-13 et pages 55-77

Annexes

Intérêt d'un bid minimum non nul

Lorsque l'on lève l'hypothèse d'indépendance entre l'espérance de conversions et les costs des impressions associées à un ensemble A_i , $b_{A_i \min} = 0$ n'est pas forcément la borne optimale. La borne minimale de l'intervalle des bids, a une utilité lorsqu'il existe une distorsion de capacité de segmentation de l'audience qui implique une asymétrie d'informations et/ou de segmentations entre les advertisers. On peut illustrer l'intérêt d'un bid minimal par l'exemple suivant.

Supposons qu'il existe deux advertisers, x et y , ciblant la même audience $A_{q,d_{I_t}}$ et que l'advertiser x dispose de segments d'informations sur la population permettant d'en tirer un sous ensemble écartant des singletons idempotents sur l'intervalle de temps I . On note ce sous ensemble de $A_{q,d_{I_t}}$, $A_{q,d_{I_t}}^*$ tel que $A_{q,d_{I_t}}^* \subset A_{q,d_{I_t}}$ et $A_{q,d_{I_t}}^{*C} \cap A_{q,d_{I_t}}^* \neq \emptyset$, et $A_{q,d_{I_t}}^{*C} \cap H_I^* = \emptyset$. On suppose que les advertisers x et y sont les seuls advertisers acheteurs d'impressions sur ce placement sur l'intervalle de temps I et qu'ils ne sont pas soumis à une contrainte de budget. Si b_{\min}^y le bid minimal de l'advertiser y est inférieur au floor du SSP que l'on notera b_{\min}^f , alors l'advertiser y dépensera $\text{Card}(A_{q,d_{I_t}}^{*C}) \times \sup(b_{\min}^f)$ (unités monétaires) pour des singletons idempotents sur I . Il s'agit donc d'une perte sèche pour l'advertiser y . Par conséquent, si $b_{\min}^f < b_{\min}^x$ et $\sup(b_{\min}^f) < b_{\min}^x$, alors le bid minimal optimal pour l'advertiser y sera $b_{\min}^y = \sup(b_{\min}^f)$. Puisque $b_{\min}^f \in [0; +\infty[$, alors $\sup(b_{\min}^f) \neq 0$.

Ce cas de figure spécifique se retrouve lorsque deux trading desks sont mis en compétition par un même advertiser pour une campagne en retargeting, sans entente entre les deux compétiteurs.

Bibliographie

- ❖ Cécile Clergau (1998) - *Microéconomie, tome 2 : Théorie du producteur et de l'offre* -
- ❖ Claude Cosette (2006) - *La publicité de A à Z : dictionnaire technique français-anglais*, page 283
- ❖ IAB France (2012) - *Le Trading Media* -
- ❖ IAB France (2010) - *Les indicateurs de la publicité internet* -
- ❖ IAB France (2010) - *Le marketing à la performance* -
- ❖ G. L. De Iorio (2016) - *DynAdmic et les tailleurs de l'e-publicité : Enjeux de l'interconnexion croissante entre e-publicité et contenus éditoriaux pour un Trading Desk* -
- ❖ A. B. Owen. (1990) - *Empirical likelihood ratio confidence regions*- *Annals of Statistics*, pages 90–120
- ❖ Remi Lemonnier (2016) - *Application of stochastic processes to real-time bidding and diffusion processes on networks* -
- ❖ John von Neumann, Oskar Morgenstern (1944) - *Theory of Games and Economic Behavior* -
- ❖ B. Libet (1983) - *Time of conscious intention to act in relation to onset of cerebral activity*, *Brain 106* – pages 623 – 642
- ❖ C.S. Soon (2008) - *Unconscious determinants of free decisions in the human brain*, *Nature Neuroscience 11*, pages 543 – 545
- ❖ Francis Nier, Dragos Iftimie, - *Introduction à la Topologie* -
- ❖ Englehart et Arvin Narayanan, (2016) - *Online Tracking : A 1-million-site Measurement and Analysis*, *Steven Princeton University* –