



L'étude de la transition à l'état chaotique de fluides d'Herschel-Bulkley en écoulement de Taylor-Couette

Valentin Jacob

► To cite this version:

Valentin Jacob. L'étude de la transition à l'état chaotique de fluides d'Herschel-Bulkley en écoulement de Taylor-Couette. Sciences pharmaceutiques. 2017. dumas-01803963

HAL Id: dumas-01803963

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01803963>

Submitted on 31 May 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE ROUEN
UFR DE MEDECINE ET DE PHARMACIE

Année 2017

THESE
pour le DIPLOME D'ETAT DE DOCTEUR EN
PHARMACIE

Présentée et soutenue publiquement le 15 décembre 2017

par

JACOB Valentin

Né(e) le 7 octobre 1992 à Rouen

L'étude de la transition à l'état chaotique de fluides d'Herschel-Bulkley en écoulement de Taylor-Couette

Présidente du jury :

SKIBA, Malika, Maitre de conférences universitaire

Membres du jury :

BOUNOURE, Frédéric, Maitre de conférences universitaire

LEMAITRE, Cécile, maitre de conférences HDR, université de lorraine

NOUAR, Chérif, Directeur de recherche, CNRS

« L'Université de Rouen et l'UFR de Médecine et de Pharmacie de Rouen n'entendent donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans cette thèse. Ces opinions sont propres à leurs auteurs. »

ANNEE UNIVERSITAIRE 2017 - 2018

U.F.R. SANTÉ DE ROUEN

DOYEN :

Professeur Pierre FREGER

ASSESSEURS :

Professeur Michel GUERBET

Professeur Benoit VEBER

Professeur Pascal JOLY

Professeur Stéphane MARRET

I - MEDECINE

PROFESSEURS DES UNIVERSITES – PRATICIENS HOSPITALIERS

Mr Frédéric ANSELME	HCN	Cardiologie
Mme Gisèle APTER	Havre	Pédopsychiatrie
Mme Isabelle AUQUIT AUCKBUR	HCN	Chirurgie plastique
Mr Fabrice BAUER	HCN	Cardiologie
Mme Soumeya BEKRI	HCN	Biochimie et biologie moléculaire
Mr Ygal BENHAMOU	HCN	Médecine interne
Mr Jacques BENICHOU	HCN	Bio statistiques et informatique médicale
Mr Olivier BOYER	UFR	Immunologie
Mme Sophie CANDON	HCN	Immunologie
Mr François CARON	HCN	Maladies infectieuses et tropicales
Mr Philippe CHASSAGNE (<i>détachement</i>)	HCN	Médecine interne (gériatrie) – Détachement
Mr Vincent COMPERE	HCN	Anesthésiologie et réanimation chirurgicale
Mr Jean-Nicolas CORNU	HCN	Urologie
Mr Antoine CUVELIER	HB	Pneumologie
Mr Pierre CZERNICHOW (<i>sumombre</i>)	HCH	Epidémiologie, économie de la santé
Mr Jean-Nicolas DACHER	HCN	Radiologie et imagerie médicale
Mr Stéfan DARMONI	HCN	Informatique médicale et techniques de communication
Mr Pierre DECHELOTTE	HCN	Nutrition
Mr Stéphane DERREY	HCN	Neurochirurgie

Mr Frédéric DI FIORE	CB	Cancérologie
Mr Fabien DOGUET	HCN	Chirurgie Cardio Vasculaire
Mr Jean DOUCET	SJ	Thérapeutique - Médecine interne et gériatrie
Mr Bernard DUBRAY	CB	Radiothérapie
Mr Philippe DUCROTTE	HCN	Hépto-gastro-entérologie
Mr Frank DUJARDIN	HCN	Chirurgie orthopédique - Traumatologique
Mr Fabrice DUPARC	HCN	Anatomie - Chirurgie orthopédique et traumatologique
Mr Eric DURAND	HCN	Cardiologie
Mr Bertrand DUREUIL	HCN	Anesthésiologie et réanimation chirurgicale
Mme Hélène ELTCHANINOFF	HCN	Cardiologie
Mr Manuel ETIENNE	HCN	Maladies infectieuses et tropicales
Mr Thierry FREBOURG	UFR	Génétique
Mr Pierre FREGER	HCN	Anatomie - Neurochirurgie
Mr Jean François GEHANNO	HCN	Médecine et santé au travail
Mr Emmanuel GERARDIN	HCN	Imagerie médicale
Mme Priscille GERARDIN	HCN	Pédopsychiatrie
M. Guillaume GOURCEROL	HCN	Physiologie
Mr Dominique GUERROT	HCN	Néphrologie
Mr Olivier GULLIN	HCN	Psychiatrie Adultes
Mr Didier HANNEQUIN	HCN	Neurologie
Mr Fabrice JARDIN	CB	Hématologie
Mr Luc-Marie JOLY	HCN	Médecine d'urgence
Mr Pascal JOLY	HCN	Dermato – Vénéréologie
Mme Bouchra LAMIA	Havre	Pneumologie
Mme Annie LAQUERRIERE	HCN	Anatomie et cytologie pathologiques
Mr Vincent LAUDENBACH	HCN	Anesthésie et réanimation chirurgicale
Mr Joël LECHEVALLIER	HCN	Chirurgie infantile
Mr Hervé LEFEBVRE	HB	Endocrinologie et maladies métaboliques
Mr Thierry LEQUERRE	HB	Rhumatologie
Mme Anne-Marie LEROI	HCN	Physiologie
Mr Hervé LEVESQUE	HB	Médecine interne
Mme Agnès LIARD-ZMUDA	HCN	Chirurgie Infantile
Mr Pierre Yves LITZLER	HCN	Chirurgie cardiaque
Mr Bertrand MACE	HCN	Histologie, embryologie, cytogénétique
M. David MALTETE	HCN	Neurologie
Mr Christophe MARGUET	HCN	Pédiatrie
Mme Isabelle MARIE	HB	Médecine interne
Mr Jean-Paul MARIE	HCN	Oto-rhino-laryngologie

Mr Loïc MARPEAU	HCN	Gynécologie - Obstétrique
Mr Stéphane MARRET	HCN	Pédiatrie
Mme Véronique MERLE	HCN	Epidémiologie
Mr Pierre MICHEL	HCN	Hépatogastro-entérologie
M. Benoit MISSET	HCN	Réanimation Médicale
Mr Jean-François MUIR (<i>urnombre</i>)	HB	Pneumologie
Mr Marc MURAIN	HCN	Ophtalmologie
Mr Philippe MUSETTE	HCN	Dermatologie - Vénéréologie
Mr Christophe PEILLON	HCN	Chirurgie générale
Mr Christian PFISTER	HCN	Urologie
Mr Jean-Christophe PLANTIER	HCN	Bactériologie - Virologie
Mr Didier PLISSONNIER	HCN	Chirurgie vasculaire
Mr Gaëtan PREVOST	HCN	Endocrinologie
Mr Jean-Christophe RICHARD (<i>détachement</i>)	HCN	Réanimation médicale - Médecine d'urgence
Mr Vincent RICHARD	UFR	Pharmacologie
Mme Nathalie RIVES	HCN	Biologie du développement et de la reproduction
Mr Horace ROMAN	HCN	Gynécologie - Obstétrique
Mr Jean-Christophe SABOURIN	HCN	Anatomie - Pathologie
Mr Guillaume SAVOYE	HCN	Hépatogastrologie
Mme Céline SAVOYE-COLLET	HCN	Imagerie médicale
Mme Pascale SCHNEIDER	HCN	Pédiatrie
Mr Michel SCOTTE	HCN	Chirurgie digestive
Mme Fabienne TAMION	HCN	Thérapeutique
Mr Luc THIBERVILLE	HCN	Pneumologie
Mr Christian THUILLEZ (<i>urnombre</i>)	HB	Pharmacologie
Mr Hervé TILLY	CB	Hématologie et transfusion
M. Gilles TOURNEL	HCN	Médecine Légale
Mr Olivier TROST	HCN	Chirurgie Maxillo-Faciale
Mr Jean-Jacques TUECH	HCN	Chirurgie digestive
Mr Jean-Pierre VANNIER (<i>urnombre</i>)	HCN	Pédiatrie génétique
Mr Benoît VEBER	HCN	Anesthésiologie - Réanimation chirurgicale
Mr Pierre VERA	CB	Biophysique et traitement de l'image
Mr Eric VERIN	HB	Service Santé Réadaptation
Mr Eric VERSPYCK	HCN	Gynécologie obstétrique
Mr Olivier VITTECOQ	HB	Rhumatologie
Mme Marie-Laure WELTER	HCN	Physiologie

MAITRES DE CONFERENCES DES UNIVERSITES – PRATICIENS HOSPITALIERS

Mme Noëlle BARBIER-FREBOURG	HCN	Bactériologie – Virologie
Mme Carole BRASSE LAGNEL	HCN	Biochimie
Mme Valérie BRIDOUX HUYBRECHTS	HCN	Chirurgie Vasculaire
Mr Gérard BUCHONNET	HCN	Hématologie
Mme Mireille CASTANET	HCN	Pédiatrie
Mme Nathalie CHASTAN	HCN	Neurophysiologie
Mme Sophie CLAEYSENS	HCN	Biochimie et biologie moléculaire
Mr Moïse COEFFIER	HCN	Nutrition
Mr Serge JACQUOT	UFR	Immunologie
Mr Joël LADNER	HCN	Epidémiologie, économie de la santé
Mr Jean-Baptiste LATOUCHE	UFR	Biologie cellulaire
Mr Thomas MOUREZ	HCN	Virologie
Mr Gaël NICOLAS	HCN	Génétique
Mme Muriel QUILLARD	HCN	Biochimie et biologie moléculaire
Mme Laëtitia ROLLIN	HCN	Médecine du Travail
Mr Mathieu SALAUN	HCN	Pneumologie
Mme Pascale SAUGIER-VEBER	HCN	Génétique
Mme Anne-Claire TOBENAS-DUJARDIN	HCN	Anatomie
Mr David WALLON	HCN	Neurologie

PROFESSEUR AGREGÉ OU CERTIFIÉ

Mr Thierry WABLE	UFR	Communication
Mme Mélanie AUVRAY-HAMEL	UFR	Anglais

II - PHARMACIE

PROFESSEURS

Mr Thierry BESSON	Chimie Thérapeutique
Mr Roland CAPRON (PU-PH)	Biophysique
Mr Jean COSTENTIN (Professeur émérite)	Pharmacologie
Mme Isabelle DUBUS	Biochimie
Mr Loïc FAVENNEC (PU-PH)	Parasitologie
Mr Jean Pierre GOULLE (Professeur émérite)	Toxicologie
Mr Michel GUERBET	Toxicologie
Mme Isabelle LEROUX - NICOLLET	Physiologie
Mme Christelle MONTEIL	Toxicologie
Mme Martine PESTEL-CARON (PU-PH)	Microbiologie
Mr Rémi VARIN (PU-PH)	Pharmacie clinique
Mr Jean-Marie VAUGEOIS	Pharmacologie
Mr Philippe VERITE	Chimie analytique

MAITRES DE CONFERENCES

Mme Cécile BARBOT	Chimie Générale et Minérale
Mr Jérémy BELLIEN (MCU-PH)	Pharmacologie
Mr Frédéric BOUNOURE	Pharmacie Galénique
Mr Abdeslam CHAGRAOUI	Physiologie
Mme Camille CHARBONNIER (LE CLEZIO)	Statistiques
Mme Elizabeth CHOSSON	Botanique
Mme Marie Catherine CONCE-CHEMTOB	Législation pharmaceutique et économie de la santé
Mme Cécile CORBIERE	Biochimie
Mr Eric DITTMAR	Biophysique
Mme Nathalie DOURMAP	Pharmacologie
Mme Isabelle DUBUC	Pharmacologie
Mme Dominique DUTERTE- BOUCHER	Pharmacologie
Mr Abdelhakim ELOMRI	Pharmacognosie
Mr François ESTOUR	Chimie Organique
Mr Gilles GARGALA (MCU-PH)	Parasitologie

Mme Nejla EL GHARBI-HAMZA	Chimie analytique
Mme Marie-Laure GROULT	Botanique
Mr Hervé HUE	Biophysique et mathématiques
Mme Laetitia LE GOFF	Parasitologie – Immunologie
Mme Hong LU	Biologie
M. Jérémie MARTINET (MCU-PH)	Immunologie
Mme Marine MALLETER	Toxicologie
Mme Sabine MENAGER	Chimie organique
Mme Tiphaine ROGEZ-FLORENT	Chimie analytique
Mr Mohamed SKIBA	Pharmacie galénique
Mme Malika SKIBA	Pharmacie galénique
Mme Christine THARASSE	Chimie thérapeutique
Mr Frédéric ZIEGLER	Biochimie

PROFESSEURS ASSOCIES

Mme Cécile GUERARD-DETUNCQ	Pharmacie officinale
Mr Jean-François HOUIVET	Pharmacie officinale

PROFESSEUR CERTIFIE

Mme Mathilde GUERIN	Anglais
----------------------------	---------

ASSISTANT HOSPITALO-UNIVERSITAIRE

Mme Anaïs SOARES	Bactériologie
-------------------------	---------------

ATTACHES TEMPORAIRES D'ENSEIGNEMENT ET DE RECHERCHE

Mme Anne-Sophie CHAMPY	Pharmacognosie
M. Jonathan HEDOUIN	Chimie Organique
Mme Barbara LAMY-PELLETER	Pharmacie Galénique

LISTE DES RESPONSABLES DES DISCIPLINES PHARMACEUTIQUES

Mme Cécile BARBOT	Chimie Générale et minérale
Mr Thierry BESSON	Chimie thérapeutique
Mr Roland CAPRON	Biophysique
Mme Marie-Catherine CONCE-CHEMTOB	Législation et économie de la santé
Mme Elisabeth CHOSSON	Botanique
Mme Isabelle DUBUS	Biochimie
Mr Abdelhakim ELOMRI	Pharmacognosie
Mr Loïc FAVENNEC	Parasitologie
Mr Michel GUERBET	Toxicologie
Mr François ESTOUR	Chimie organique
Mme Isabelle LEROUX-NICOLLET	Physiologie
Mme Martine PESTEL-CARON	Microbiologie
Mr Mohamed SKIBA	Pharmacie galénique
Mr Rémi VARIN	Pharmacie clinique
M. Jean-Marie VAUGEOIS	Pharmacologie
Mr Philippe VERITE	Chimie analytique

III – MEDECINE GENERALE

PROFESSEUR

Mr Jean-Loup HERMIL (PH-PH)	UFR	Médecine générale
------------------------------------	-----	-------------------

MAITRE DE CONFERENCE

Mr Matthieu SCHUERS (MCU-PH)	UFR	Médecine générale
-------------------------------------	-----	-------------------

PROFESSEURS ASSOCIES A MI-TEMPS – MEDECINS GENERALISTE

Mr Emmanuel LEFEBVRE	UFR	Médecine Générale
Mme Elisabeth MAUVIARD	UFR	Médecine générale
Mr Philippe NGUYEN THANH	UFR	Médecine générale
Mme Marie Thérèse THUEUX	UFR	Médecine générale

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE A MI-TEMPS – MEDECINS GENERALISTES

Mr Pascal BOULET	UFR	Médecine générale
Mr Emmanuel HAZARD	UFR	Médecine Générale
Mme Marianne LAINE	UFR	Médecine Générale
Mme Lucile PELLERIN	UFR	Médecine générale
Mme Yveline SEVRIN	UFR	Médecine générale

ENSEIGNANTS MONO-APPARTENANTS

PROFESSEURS

Mr Serguei FETISSOV (med)	Physiologie (ADEN)
Mr Paul MULDER (phar)	Sciences du Médicament
Mme Su RUAN (med)	Génie Informatique

MAITRES DE CONFERENCES

Mr Sahil ADRIOUCH (med)	Biochimie et biologie moléculaire (Unité Inserm 905)
Mme Gaëlle BOUGEARD-DENOYELLE (med)	Biochimie et biologie moléculaire (UMR 1079)
Mme Carine CLEREN (med)	Neurosciences (Néovasc)
M. Sylvain FRAINEAU (med)	Physiologie (Inserm U 1096)
Mme Pascaline GAILDRAT (med)	Génétique moléculaire humaine (UMR 1079)
Mr Nicolas GUEROUT (med)	Chirurgie Expérimentale
Mme Rachel LETELLIER (med)	Physiologie
Mme Christine RONDANINO (med)	Physiologie de la reproduction
Mr Antoine OUVRARD-PASCAUD (med)	Physiologie (Unité Inserm 1076)
Mr Frédéric PASQUET	Sciences du langage, orthophonie
Mme Isabelle TOURNIER (med)	Biochimie (UMR 1079)

CHEF DES SERVICES ADMINISTRATIFS : Mme Véronique DELAFONTAINE

HCN - Hôpital Charles Nicolle

HB - Hôpital de BOIS GUILLAUME

CB - Centre Henri Becquerel

CHS - Centre Hospitalier Spécialisé du Rouvray

CRMPR - Centre Régional de Médecine Physique et de Réadaptation

SJ – Saint Julien Rouen

Cette thèse a été préparée dans le cadre d'un projet de recherche et de développement au sein du Laboratoire Réactions et Génie des Procédés (LRGP), unité mixte du CNRS et de l'université de Lorraine (UMR 7274), situé à l'Ecole Nationale Supérieure des Industries Chimiques.

LRGP-ENSIC

1 rue Grandville

54000 NANCY

Remerciements

Je souhaite d'abord remercier les membres du jury qui ont accepté d'évaluer mon travail de thèse d'exercice:

A Madame Cécile LEMAITRE, un grand merci pour tout ! Merci de votre implication dans ce projet, de votre disponibilité, de vos précieux conseils, ainsi que votre engagement au sein de ce jury. Je vous suis sincèrement reconnaissant.

A Madame Malika SKIBA, Pour votre disponibilité et pour avoir accepté de prendre la présidence de ce jury, soyez assuré de ma sincère gratitude.

A Monsieur Chérif NOUAR, Pour votre accueil au sein de votre laboratoire, vos conseils tout au long de mes travaux et pour votre engagement au sein de ce jury.

A Monsieur Frédéric BOUNOURE, pour avoir accepté de juger cette thèse, veuillez trouver ici mes sincères remerciements.

Je tiens à remercier également ma famille qui a toujours été présente pour moi et sans qui je n'aurais pu faire les études que j'ai faites.

Je remercie Louise PIRON pour le soutien précieux qu'elle m'a apporté tout au long de mes études de pharmacie.

Merci à Valentina BUITRAGO QUINTERO pour la patience dont elle a fait preuve, notamment lors de la rédaction de ce document, et de son soutien.

J'aimerais également remercier mes amis, parmi eux des étudiants de la faculté Rouen, ainsi que de l'ENSIC, pour les bons moments passés et ceux à venir.

Table des matières

1	INTRODUCTION.....	19
2	DEFINITION.....	21
2.1	Viscosité.....	21
2.2	Loi de Newton	21
2.3	Fluides complexes.....	23
2.3.1	Structure interne des fluides complexes	24
2.4	Autres cas de fluides complexes	27
2.5	Comportement des fluides à seuil et fluides rhéofluidifiants.....	27
2.6	Intérêt des fluides à seuil.....	28
2.7	La turbulence	29
3	INTERET INDUSTRIEL.....	30
3.1	Types et exemples de mélanges.....	31
3.2	Mécanismes de mélange.....	32
3.3	Mélange laminaire	32
3.4	Mélange turbulent	33
3.5	Schéma d'écoulement.....	35
3.6	1ère classe d'agitateurs	35
3.6.1	Les hélices	36
3.6.2	Les turbines	36
3.6.3	Caractéristiques des agitateurs de classe I	37
3.7	2ème classe d'agitateurs.....	39
3.8	3ème classe d'agitateurs.....	39
3.9	Choix du matériel d'agitation	41
3.9.1	Opération à réaliser.....	41
3.9.2	Nature du ou des produit(s).....	42
3.9.3	Caractéristiques du mobile d'agitation	43
3.9.4	Conditions opératoires	45
3.9.5	Choix final du système d'agitation	45
3.10	Analogie de Couette.....	45
4	ETUDE EXPERIMENTALE DE L'ECOULEMENT DU CARBOPOL® DANS UN RHEOMETRE DE COUETTE.....	47
4.1	Principe de l'expérience	47
4.2	Notion de couple	47
4.3	Principe de fonctionnement du rhéomètre	47
4.4	Résultats de l'expérience	48

4.5	Limites de l'expérience	51
5	ANALYSE DE STABILITE LINEAIRE DE L'ECOULEMENT TAYLOR-COUPETTE D'UN FLUIDE HERSCHEL-BULKLEY	52
5.1	Description du problème et équations	52
5.1.1	Description du problème	52
5.1.2	Equations gouvernant l'écoulement.....	52
5.1.3	Comportement rhéologique du fluide.....	55
5.2	Ecoulement laminaire à faible vitesse de rotation	57
5.2.1	Détermination de la limite entre les 2 cas	59
5.2.2	Etat de base dans le cas totalement cisailé	60
5.2.3	Etat de base dans le cas partiellement cisailé	62
5.3	Méthode suivie pour l'intégration numérique	62
5.4	Perturbation de l'écoulement laminaire de base	63
6	VALIDATION DU PROGRAMME	65
6.1	Validation numérique du programme.....	65
6.1.1	Comparaison du programme Herschel-Bulkley avec le programme de la loi de puissance	65
6.1.2	Comparaison du programme Herschel-Bulkley avec le programme de Bingham	68
7	EXPLOITATION DU PROGRAMME.....	71
7.1	Simulations pour $\eta=0,4$	72
7.2	Commentaires des simulations pour $\eta = 0,4$	74
7.3	Simulations pour $\eta=0,9$	74
7.4	Commentaires des simulations pour $\eta = 0,9$	76
8	CONCLUSION	77
9	BIBLIOGRAPHIE.....	79
10	ANNEXES	81
10.1	Annexe 1 : Résolution numérique des équations de l'état de base	81
10.1.1	Cas d'un cisaillement total.....	81
10.1.2	Cas d'un cisaillement partiel :	82
10.2	Annexe 2 : Détail des calculs conduisant aux équations aux perturbation	84
10.3	Annexe 3 : Méthode numérique pour la résolution des équations aux perturbations	96
10.3.1	Conditions aux limites :	98

Table des figures

Figure 1 - Ecoulement de Couette plan (Bacchin, 2009).....	22
Figure 2 - Viscosité des fluides en fonction du taux de cisaillement et de la contrainte (MANNEVILLE, 2011)	23
Figure 3 - Réarrangement des hématies (Taberlet, 2011)	26
Figure 4 - Comportements du fluide lorsqu'il subit le cisaillement « shear flow » et l'étirement laminaire « extensional flow » (Howard A. Barnes).....	33
Figure 5 - Cascade turbulente du transfert d'énergie et de la matière dans un mélangeur (Schwartzentruber, 2009)	34
Figure 6 - Ecoulement au sein d'une cuve munie d'une hélice : (a) vue en coupe ; (b) vue en section.....	36
Figure 7 - Hélice marine (ROUSTAN, 2005).....	36
Figure 8 - Hélice à profil mince (ROUSTAN, 2005).....	36
Figure 9 - Ecoulement au sein d'une cuve munie d'une turbine : (a) vue en coupe ; (b) vue en section.....	37
Figure 10 - Turbine Rushton (ROUSTAN, 2005)	37
Figure 11 - Turbine à pâles incurvées (ROUSTAN, 2005)	37
Figure 12 - Ancre (ROUSTAN, 2005)	39
Figure 13 - Agitateur à barrières (ROUSTAN, 2005)	39
Figure 14 - Ruban hélicoïdal (ROUSTAN, 2005)	40
Figure 15 - Vis hélicoïdale (ROUSTAN, 2005).....	40
Figure 16 - Mélangeur à lame sigma (Prism Pharma Machinery, 2013)	40
Figure 17 - Processus de sélection d'un système d'agitation	41
Figure 18 - Dispositif de Taylor-Couette (Nabila Ait-Moussa, 2015).....	46
Figure 19 - Moment d'une force.....	47
Figure 20 - Rhéomètre HAAKE™	49
Figure 21 - Courbes du couple des solutions de Carbopol® en fonction de la vitesse angulaire du cylindre interne.....	50
Figure 22 - Géométrie étudiée.....	52
Figure 23 - Comparaison des nombres de Reynolds critique Re_{1c} obtenus pour la loi de puissance (programmes antérieurs) et pour la loi de Herschel-Bulkley, avec $B' = 0$ (programmes développés lors de cette thèse) pour $\eta=0,4$	66
Figure 24 - Comparaison des nombres de Reynolds critique Re_{1c} obtenus pour la loi de puissance (programmes antérieurs) et pour la loi de Herschel-Bulkley, avec $B' = 0$ (programmes développés lors de cette thèse) pour $\eta=0,9$	66

Figure 25 - Comparaison des nombres d'onde axiaux critique k_c obtenus pour la loi de puissance (programmes antérieurs) et pour la loi de Herschel-Bulkley, avec $B' = 0$ (programmes développés lors de cette thèse) pour $\eta=0,4$	67
Figure 26 - Comparaison des nombres d'onde axiaux critique k_c obtenus pour la loi de puissance (programmes antérieurs) et pour la loi de Herschel-Bulkley, avec $B' = 0$ (programmes développés lors de cette thèse) pour $\eta=0,9$	67
Figure 27 - Comparaison des nombres de Reynolds critique Re_{1c} obtenus pour la loi de Bingham (programmes antérieurs) et pour la loi de Herschel-Bulkley, avec $n = 1$ (programmes développés lors de cette thèse) pour $\eta=0,4$	68
Figure 28 - Comparaison des nombres de Reynolds critique Re_{1c} obtenus pour la loi de Bingham (programmes antérieurs) et pour la loi de Herschel-Bulkley, avec $n = 1$ (programmes développés lors de cette thèse) pour $\eta=0,9$	69
Figure 29 - Comparaison des nombres d'onde axiaux critique k_c obtenus pour la loi de Bingham (programmes antérieurs) et pour la loi de Herschel-Bulkley, avec $n = 1$ (programmes développés lors de cette thèse) pour $\eta=0,4$	69
Figure 30 - Comparaison des nombres d'onde axiaux critique k_c obtenus pour la loi de Bingham (programmes antérieurs) et pour la loi de Herschel-Bulkley, avec $n = 1$ (programmes développés lors de cette thèse) pour $\eta=0,9$	70
Figure 31 - Evolution du nombre de Reynolds critique Re_{1c} pour un fluide de Herschel-Bulkley en fonction du seuil B' pour des indices d'écoulement entre $n = 0,6$ et $n = 0,9$, pour un rapport de rayon $\eta = 0,4$	72
Figure 32 - Evolution du nombre de Reynolds critique Re_{1c} pour un fluide de Herschel-Bulkley en fonction du seuil B' pour des indices d'écoulement entre $n = 0,2$ et $n = 0,5$, pour un rapport de rayon $\eta = 0,4$	72
Figure 33 - Evolution du nombre d'onde axial critique k_c pour un fluide de Herschel-Bulkley en fonction du seuil B' pour des indices d'écoulement entre $n=0,6$ et $n=0,9$, pour un rapport de rayon $\eta = 0,4$	73
Figure 34 - Evolution du nombre d'onde axial critique k_c pour un fluide de Herschel-Bulkley en fonction du seuil B' pour des indices d'écoulement entre $n=0,2$ et $n=0,5$, pour un rapport de rayon $\eta = 0,4$	73
Figure 35 - Evolution du nombre de Reynolds critique Re_{1c} pour un fluide de Herschel-Bulkley en fonction du seuil B' pour des indices d'écoulement entre $n=0,6$ et $n=0,9$, pour un rapport de rayon $\eta = 0,9$	74
Figure 36 - Evolution du nombre de Reynolds critique Re_{1c} pour un fluide de Herschel-Bulkley en fonction du seuil B' pour des indices d'écoulement entre $n=0,2$ et $n=0,5$, pour un rapport de rayon $\eta = 0,9$	75
Figure 37 - Evolution du nombre d'onde axial critique k_c pour un fluide de Herschel-Bulkley en fonction du seuil B' pour des indices d'écoulement entre $n=0,6$ et $n=0,9$, pour un rapport de rayon $\eta = 0,9$	75
Figure 38 - Evolution du nombre d'onde axial k_c pour un fluide de Herschel-Bulkley en fonction du seuil B' pour des indices d'écoulement entre $n=0,2$ et $n=0,5$, pour un rapport de rayon $\eta = 0,9$	76

Liste des tableaux

Tableau 1 - Les différents types de mélange	31
Tableau 2 - Critères de choix d'un mobile d'agitation.....	43
Tableau 3 - Paramètres rhéologiques des solutions	50
Tableau 4 - échelles de dimensionnement	55
Tableau 5 - Comparaison des lois de Herschel-Bulkley (HB) dimensionnelle et adimensionnelle	57

1 Introduction

Les fluides à seuil sont des fluides non-newtoniens, complexes ou structurés. Ils sont communément rencontrés dans de nombreuses applications industrielles utilisant leurs caractéristiques et leurs propriétés physiques exceptionnelles (plastifiants, stabilisateurs, épaississants,...). Ainsi de nombreux excipients de l'industrie pharmaceutique sont de tels fluides. La plupart des fluides corporels en font partie, le sang notamment. L'étude de leur comportement et de leur écoulement est une problématique transverse dont découlent de très nombreuses applications. Les fluides complexes présentent des propriétés mécaniques qui dépendent non linéairement de l'énergie mécanique qui leur est appliquée et du temps. Leur viscosité n'est pas une constante à pression et température données, contrairement au cas des fluides dits « simples » ou newtoniens.

La rhéologie est la science qui étudie le comportement macroscopique des matériaux en écoulement, sous l'action de contraintes en déterminant leur viscosité et leur déformabilité. La caractérisation rhéologique des fluides à seuil, est indispensable à la modélisation des procédés qui les font intervenir, ainsi qu'en formulation galénique.

Osborne Reynolds a observé au XIX^{ème} siècle que lorsque l'on augmente la vitesse d'écoulement d'eau en conduite, on passe du régime laminaire (écoulement ordonné) au régime turbulent (écoulement désordonné, chaotique). Ce phénomène est lié à la fois aux propriétés intrinsèques du fluide ainsi qu'à la géométrie du système. Le nombre adimensionnel qui pilote ce phénomène porte son nom (le nombre de Reynolds). La survenue de l'état chaotique bouleverse l'écoulement. Ainsi une prédiction du changement de régime est une donnée primordiale en génie chimique mais aussi dans toute application dans lesquelles les fluides sont transportés et/ou mis en agitation (mise en suspension de poudres, ...). Les écoulements turbulents sont fréquemment rencontrés dans l'industrie, ceux-ci correspondent à des écoulements à grande vitesse répondant aux contraintes de productivité industrielle. Ils peuvent également être privilégiés dans des procédés industriels puisqu'ils permettent un meilleur transfert de chaleur et de matière. Par contre, en présence de produits fragiles, l'écoulement laminaire peut être privilégié en vue de préserver leur intégrité, d'où l'intérêt de mieux comprendre le passage d'un régime d'écoulement à l'autre. De plus, les fluides non newtoniens ou complexes sont souvent très visqueux et les mettre en œuvre en régime turbulent supposerait une énergie trop élevée et serait trop coûteux.

De nombreuses géométries sont utilisées en rhéologie, mais l'écoulement de Taylor-Couette est celui qui a été retenu pour cette étude. En effet cette géométrie constitue une représentation simplifiée des écoulements rotationnels rencontrés dans l'industrie lors des opérations de mélange (réalisation de solutions ou de suspensions au sein de cuves agitées), ou au sein de pompes. Du fait de l'ancienneté de cette géométrie, de nombreuses études ont déjà été menées pour des fluides newtoniens, mais aussi non newtoniens. De plus, elle est simple à mettre en œuvre et permet d'observer diverses instabilités.

L'objet de cette thèse est d'aborder les problématiques de la transition à la turbulence des fluides rhéofluidifiants à seuil. Pour cela, diverses approches sont employées. Premièrement nous commencerons par introduire le sujet afin de définir les fluides rhéofluidifiants à seuil. Ensuite, nous présenterons les enjeux industriels que représente une meilleure compréhension du comportement de ces fluides. Enfin, les travaux de recherche menés lors de cette thèse au sein du LRGP (Laboratoire Réactions et Génie des Procédés) et du LEMTA (Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée) seront présentés. Dans l'ordre, l'approche expérimentale sera d'abord introduite. Puis, une approche à la fois théorique et numérique sera exposée.

2 Définition

2.1 Viscosité

Dans le langage courant, on définit par visqueux ce qui n'est ni liquide, ni solide. Il s'agit en fait d'une caractéristique de la matière. Cette caractéristique s'applique à la matière sous tous ses états fluides (liquide et gazeux). La viscosité d'un solide étant infinie.

Vers l'an 1713 (DEVILLERS, 2017), Newton précise le rôle de la viscosité et donne son expression analytique fondée sur une hypothèse généralisée ensuite par Lamé : « à température et à pression données, il y a proportionnalité de la tension visqueuse à la vitesse de déformation pure, suivant une même direction. » Il utilise le terme de viscosité pour faire référence à ce coefficient de proportionnalité. La plupart des fluides dits « simples » répondent à ce principe. Ils sont qualifiés de newtoniens.

2.2 Loi de Newton

Un fluide est dit simple ou newtonien (en hommage à Isaac Newton) lorsque sa viscosité est une constante par rapport à la sollicitation imposée. Leur comportement en écoulement est ainsi aisément prédictible. En effet, la loi de Newton relie la viscosité au taux de cisaillement et à la contrainte subie par le fluide. Elle établit que le taux de cisaillement est proportionnel à la contrainte et que le degré de cette proportionnalité est la viscosité.

Pour illustrer ces concepts, prenons l'exemple d'un écoulement de Couette plan, où deux plaques sont disposées parallèlement, entre lesquelles nous introduisons un fluide. Si une plaque est mise en mouvement elle entraîne avec elle le fluide qui est en contact avec elle. Le fluide étant à la même vitesse que celle de la plaque avec laquelle il est en contact (condition d'adhérence), un gradient de vitesse (c'est-à-dire une variation de vitesse dans l'espace) s'opère entre la plaque fixe et celle qui est mobile. Ce gradient de vitesse est également appelé taux de cisaillement. Si la vitesse de la plaque en mouvement est constante, la vitesse du fluide elle aussi l'est. L'écoulement est dit stationnaire (les propriétés de l'écoulement sont indépendantes du temps).

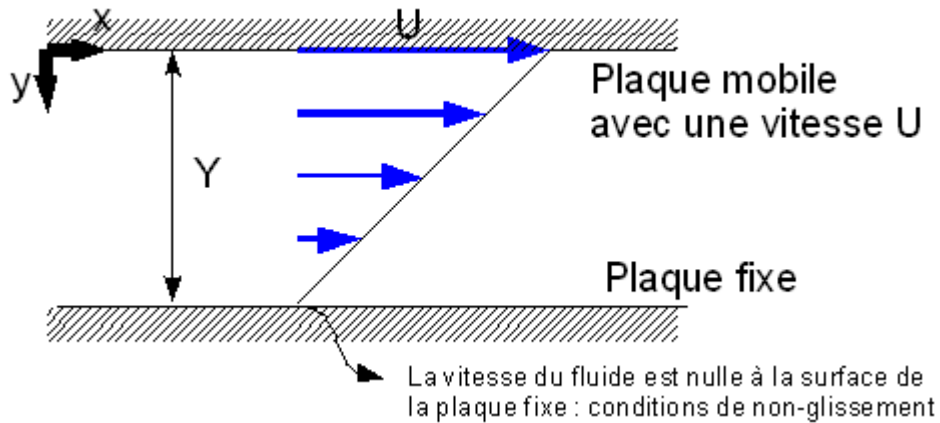


Figure 1 - Ecoulement de Couette plan (Bacchin, 2009)

La distance Y sur la figure 1, c'est-à-dire la distance entre les deux plaques, est appelée entrefer. Les différentes flèches bleues représentent les vecteurs vitesses à différentes positions dans l'entrefer. Comme l'on peut le voir, la vitesse du fluide est maximale au contact de la paroi mobile, et minimale au contact de la paroi fixe.

Soit S , la surface d'une plaque.

$$S = l \times L$$

Avec l la longueur des plaques et L leur largeur.

Nous utiliserons le repère orthonormé cartésien présenté sur la figure 1. Pour amener la plaque mobile à se déplacer dans la direction Ox à une vitesse U , une force tangentielle F doit être appliquée dans cette direction. Expérimentalement, pour des fluides newtoniens, il est observé que la force F à appliquer est proportionnelle à la vitesse de la plaque, U et à la surface des plaques S et inversement proportionnelle à l'entrefer, Y . Il est donc possible d'écrire la relation suivante :

$$\frac{F}{S} = \mu \frac{U}{Y}$$

où μ est le coefficient de proportionnalité entre les différentes grandeurs énumérées. Il s'agit de la viscosité du fluide. Plus la viscosité est élevée, plus la force à fournir pour déplacer la plaque à la vitesse U est importante.

L'équation 1 est appelée loi de Newton et est plus souvent présentée sous la forme suivante :

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du_x}{dy}$$

avec :

τ_{yx} la contrainte de cisaillement (en Pa) équivalente au terme $\frac{F}{S}$

μ la viscosité du fluide (en Pa.s)

$\frac{du_x}{dy}$ le taux de cisaillement (en s^{-1}), ou dérivée de la vitesse par rapport à l'espace.

2.3 Fluides complexes

On parle de fluides complexes pour désigner un ensemble très vaste de systèmes divisés liquides ayant des propriétés physiques et mécaniques intermédiaires entre un liquide et un solide. Ce sont des systèmes dispersés tels que les suspensions, émulsions ou solutions de macromolécules. Ils sont souvent multi-ingrédients et polyphasiques. La viscosité de tels fluides varie avec la sollicitation (ou force) qu'on leur impose. Ils sont dits non-newtoniens, mais aussi « complexes », par opposition aux fluides « simples ».

Les fluides non-newtoniens présentent une grande variété de comportements en écoulement. A température et pression données, leur viscosité n'est pas une constante et peut varier en fonction de la sollicitation imposée (taux de cisaillement ou contrainte imposée). Leur viscosité peut aussi varier au cours du temps (fluides thixotropes).

La figure ci-dessous présente l'évolution de la contrainte visqueuse en fonction du taux de cisaillement :

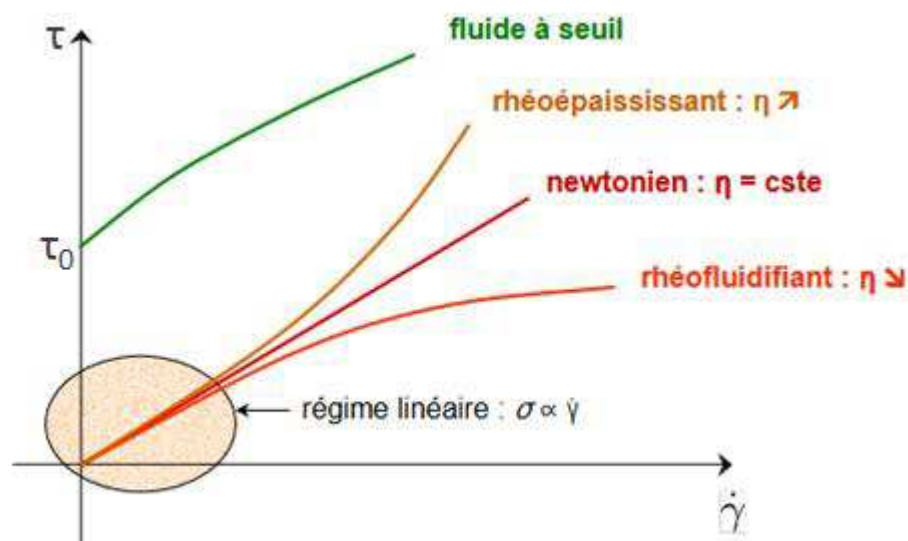


Figure 2 - Viscosité des fluides en fonction du taux de cisaillement et de la contrainte (MANNEVILLE, 2011)

Comme l'illustre la figure 2, l'évolution de la contrainte d'un fluide newtonien en fonction du taux de cisaillement est une droite. Il s'agit d'une fonction linéaire qui n'est autre que la loi de Newton. Le coefficient directeur de cette fonction est la viscosité, qui est une constante.

Quant au fluide rhéoépaississant, on observe que la viscosité augmente avec le taux de cisaillement.

A l'inverse, pour le fluide rhéofluidifiant, la viscosité décroît avec le taux de cisaillement. La plupart des fluides complexes sont rhéofluidifiants.

Ce que cette figure illustre aussi, c'est que pour de faibles taux de cisaillement, les comportements rhéoépaississant et rhéofluidifiants ne sont pas très prononcés. Ceci s'explique par le fait qu'ils sont dus à des phénomènes de réorganisation de la structure interne du matériau, phénomènes qui ne sont pas instantanés et qui donc deviennent non négligeables pour des valeurs significatives de cisaillement.

Quant au fluide à seuil, on observe que le cisaillement est nul, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'écoulement, tant que l'on n'a pas atteint une contrainte minimale. Il s'agit de la contrainte seuil. Au-delà de celle-ci, le fluide s'écoule.

Les fluides complexes peuvent également posséder des propriétés visco-élastiques : ils se comportent alors comme des solides ou comme des fluides en fonction de la sollicitation imposée. Les exemples les plus courants sont les polymères fondus ou les polymères en solution. Soumises à une sollicitation rapide, les molécules polymères n'auront pas le temps de se désenchevêtrer et s'opposeront à la déformation comme un solide élastique. Si la sollicitation est lente, les molécules pourront se désenchevêtrer et le matériau s'écoulera tel un liquide visqueux.

2.3.1 Structure interne des fluides complexes

L'origine du comportement non-linéaire des fluides complexes proviendrait d'une modification de l'organisation interne de ces milieux sous l'effet de la contrainte et/ou du temps. La taille des particules, leur concentration ainsi que leurs interactions, leur éventuelle orientation collective expliqueraient le comportement propre de chaque produit. C'est pourquoi il est nécessaire de connaître les structures internes afin de prédire leurs impacts sur le comportement du fluide dans des conditions opératoires déterminées.

Pour aborder cette partie, je me suis appuyé sur l'ouvrage « la matière dans tous ses états » de Philippe COUSSOT (COUSSOT, 2012).

Les phases d'un fluide complexe peuvent avoir des natures très différentes. La phase dispersée est constituée d'éléments caractérisables par leur taille, leur forme, les interactions qu'ils développent entre eux, ... D'une manière générale, plus les éléments sont dispersés plus les propriétés d'écoulement de l'ensemble sont proches de la phase dispersante. A mesure, que la concentration des éléments dispersés augmente et/ou dès lors qu'ils interagissent entre eux, le comportement du mélange diffère.

2.3.1.1 Impact de la concentration

Un système dispersé n'est pas nécessairement complexe. En effet, pour des particules dispersées isotropes, tant que leur distribution est identique dans toutes les directions et constante, le mélange homogène d'un liquide newtonien et de particules isotropes est lui aussi newtonien. L'effet essentiel de la présence des particules sur l'hydrodynamique du milieu provient du fait qu'elles entravent l'écoulement. Ainsi, il est souvent plus difficile de faire s'écouler une suspension que le fluide seul. La viscosité augmente avec la quantité de particules en suspension.

2.3.1.2 Impact de la taille des particules

L'aire interfaciale de ces milieux dispersés est d'autant plus importante que la granulométrie est fine. Ainsi, plus les particules sont petites, plus la viscosité augmente, ceci s'explique également par l'apparition d'interactions colloïdales qui s'ajoutent aux interactions hydrodynamiques. Ces interactions colloïdales sont d'autant plus fortes que la taille des particules est faible.

La distribution de taille des particules a également un impact : Plus leur taille est distribuée, plus la viscosité diminue. En effet, à la différence de particules de taille homogène, les particules de tailles dispersées peuvent s'intercaler les unes entre les autres, diminuant la contrainte qu'elles opposent au mouvement et donc la viscosité.

2.3.1.3 Impact de la forme des particules

L'anisotropie des particules dispersées peut aussi être responsable des propriétés rhéofluidifiantes des fluides. En effet, les particules vont s'orienter dans le sens du mouvement, facilitant le mouvement relatif des couches les unes par rapport aux autres, c'est-à-dire le cisaillement. Ceci a pour conséquence de diminuer la viscosité du milieu. Pour des concentrations volumiques plus importantes les particules s'alignent plus difficilement, ainsi la viscosité du mélange est plus importante que celui d'un mélange à même concentration de

particules sphériques. La viscosité est une fonction croissante du rapport d'aspect (rapport du grand axe et du petit axe). Cet effet joue par exemple un rôle crucial dans le cas du sang, lorsque les globules s'agrègent pour former des rouleaux anisotropes. En effet, le sang est une suspension composée principalement de globules rouges, assimilables à des particules et de plasma.

Du fait de la concentration élevée des globules rouges dans le sang, ils contribuent pour beaucoup à sa viscosité. Le rapport d'aspect des hématies étant élevé, le sang se comporte comme un fluide rhéofluidifiant. Ainsi, dans les vaisseaux de grande taille, le cisaillement étant plus faible les hématies sont orientées de façon aléatoire, tandis que dans les capillaires plus étroits, où le taux de cisaillements est plus important, les effets non-newtonien sont plus marqués car les globules s'orientent, facilitant ainsi l'écoulement du sang. Cette propriété très importante, permet une auto-régulation de la pression sanguine, un meilleur écoulement du sang et donc permet au cœur de fournir une énergie moins importante.

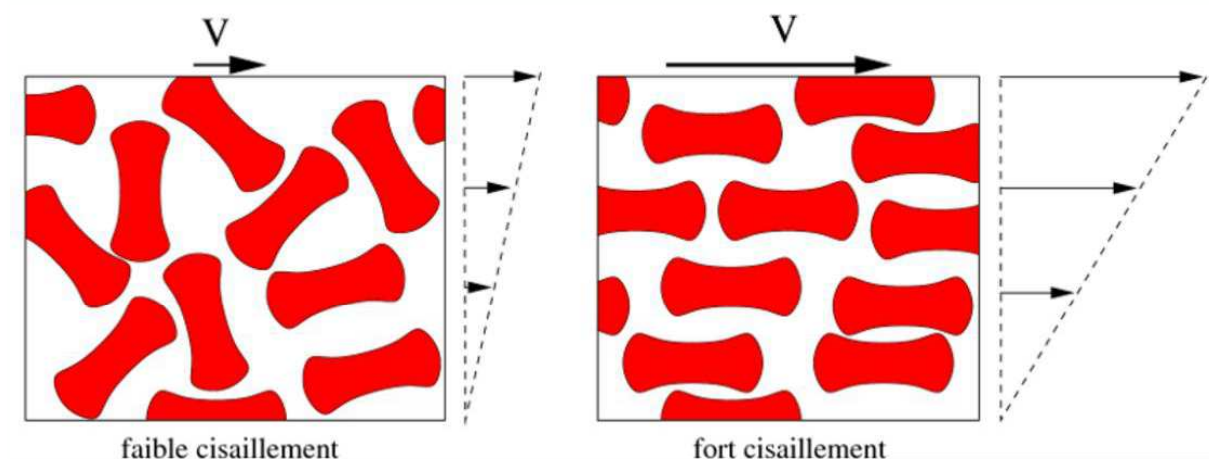


Figure 3 - Réarrangement des hématies (Taberlet, 2011)

2.3.1.4 Cas des solutions colloïdales :

Les dispersions colloïdales, sont des suspensions dans lesquels les particules sont de tailles très faibles ($<1 \mu\text{m}$). Dans ce cas, les particules développent des interactions à distance appelées interactions colloïdales, principalement des forces de Van der Waals. Ces interactions tendent à faire s'agréger les particules ensemble, ce qui produit une augmentation de la viscosité car du fluide se retrouve piégé au sein de ces agrégats. Toute la difficulté lors de la formulation de médicaments sous forme de suspensions colloïdales réside dans le maintien d'une dispersion homogène des particules en insérant des forces répulsives entre les particules (adsorption d'ions en surface : répulsions électro-statiques, utilisation de polymère qui de par leur encombrement maintiennent les particules à distances, ...). Dans Fungizone®,

par exemple, la dispersion de l'amphotéricine B est assurée par le sodium deoxycholate (clzg/ceft, 2010).

2.3.1.5 Cas des solutions de polymères :

Les polymères sont des macromolécules formées par la juxtaposition de nombreuses sous-unités. On parle de chaînes de polymères. Ces chaînes de polymère peuvent se présenter sous de très nombreuses formes dans l'espace : sous forme étirée, partiellement repliée, complètement recroquevillée. Cette structure n'est pas figée : elle évolue dans le temps sous l'effet du mouvement Brownien ou agitation thermique. La forme statistiquement la plus probable est la pelote statistique, qui correspond à des chaînes polymères repliées sur elles-mêmes en boule. De plus, sous l'action de contraintes extérieures, ces chaînes sont amenées à se réorienter : les pelotes statistiques vont prendre une forme oblongue sous l'effet du cisaillement. Cette capacité à se déformer est responsable de leur plasticité et élasticité. Dans de nombreuses applications industrielles on disperse des polymères. L'effet de la présence du polymère en suspension dépend de l'affinité que celui-ci a pour le liquide, autrement dit, l'énergie d'interaction. Si l'affinité du polymère pour la phase continue est importante, celui-ci occupe un volume apparent important. En revanche, si l'affinité du polymère pour la phase continue est faible, celui-ci tend à avoir une structure plus compacte. La viscosité du mélange augmente avec la concentration de polymère beaucoup plus rapidement que pour d'autres types de suspensions à même concentration. Cet effet est utilisé dans divers domaines industriels pour épaissir des solutions. Les solutions de polymère sont rhéofluidifiantes. Ceci provient directement des propriétés structurales de ces chaînes. Celles-ci s'allongent et s'orientent avec la contrainte.

2.4 Autres cas de fluides complexes

Les autres types de fluides complexes non explicités ici peuvent être composés de phases solide-gaz, comme les milieux granulaires, liquide-gaz, comme les mousses ou encore liquide-liquide comme les émulsions.

2.5 Comportement des fluides à seuil et fluides rhéofluidifiants

Lorsque la concentration est suffisamment élevée, les particules forment un réseau continu. Ainsi, au repos, la viscosité de la suspension tend vers l'infini, si bien qu'elle est de nature solide. Il faut appliquer une contrainte suffisamment importante pour briser le réseau,

supérieure à une valeur critique appelée valeur seuil. Cette transition est réversible, si la contrainte redevient inférieure à la valeur seuil, la suspension redevient solide.

Les fluides à seuil sont des fluides complexes dont la viscosité décroît en outre pour des contraintes croissantes. On parle de fluides rhéofluidifiants à seuil de contrainte.

C'est ce type de fluides qui a été étudié dans ce projet.

Il s'agit souvent de suspensions concentrées, de mousses, de gels, ou encore des émulsions concentrées. Du fait de leur concentration élevée, des liaisons physiques (liaison de Van der Waals ou liaison ioniques) apparaissent entre les particules. Ce qui fait que le fluide présente une structure solide au repos. Le mucus est un exemple de fluide à seuil rhéofluidifiant (FAVIER, 2016). Il est constitué principalement d'eau (95%), et de macro-molécules (mucines principalement). Cette composition lui confère ses propriétés spécifiques qui sont tantôt celle d'un solide, tantôt celle d'un liquide lui permettant d'assurer son rôle protecteur.

2.6 Intérêt des fluides à seuil

L'effet de seuil d'écoulement est recherché en pharmacie. Certains modulateurs de viscosité utilisés en tant excipients dans des formulations médicamenteuses apportent cette propriété.

De nombreuses formes médicamenteuses utilisent cette propriété, on citera pour exemple les pommades, les crèmes, les sirops, les suspensions buvables.

En ce qui concerne, les pommades et les crèmes, le seuil d'écoulement permet de les modeler et de leur donner une nouvelle forme qu'elles conserveront après leur application.

En effet, lorsque l'on les étale sur la peau, la contrainte qu'on leur impose permet de rompre leur structure solide et de les fluidifier. Mais dès lors que la contrainte cesse, la pommade ou la crème étalée se solidifie et conserve la forme que nous lui avons imposée, et ce en dépit de la gravité.

Cette propriété est également utilisée pour les sirops et les suspensions buvables. Au repos, celles-ci se comportent comme des solides, si bien que les phénomènes de sédimentation et de crémage sont limités. Mais il faut bien que ces produits soient faciles à boire et à agiter. Cette double faculté permet de fabriquer et de stocker ces médicaments en conservant l'homogénéité tout en assurant une administration aisée.

Le Carbopol® est un exemple de viscosifiant apportant cette propriété de seuil d'écoulement.

2.7 La turbulence

Le régime laminaire désigne des écoulements existant à faible vitesse, c'est-à-dire pour des nombres de Reynolds faibles. Dans ce cas, les forces de viscosité sont plus importantes que les forces d'inertie dans le fluide. L'écoulement est ordonné, avec des lignes de courant parallèles entre elles et parallèles aux parois qui confinent le fluide.

La turbulence est le régime d'écoulement qui se met en place aux vitesses élevées, c'est-à-dire pour des nombres de Reynolds importants. Dans ce cas, les forces d'inertie dominent les forces de viscosité au sein du fluide. Il s'agit d'un état chaotique : la vitesse et la pression du fluide varient de manière aléatoire dans l'espace et dans le temps. L'écoulement est composé d'un grand nombre de tourbillons dont la taille varie depuis la taille du réacteur jusqu'à des tailles microscopiques.

La compréhension et la modélisation de la turbulence sont très difficiles. Un scénario d'apparition de la turbulence est la complexification progressive de l'écoulement, à partir de l'état laminaire, sous l'effet d'instabilités hydrodynamiques successives. Lorsqu'on augmente la vitesse de l'écoulement, l'écoulement laminaire disparaît, il devient instable, au profit d'un écoulement plus complexe. Si on continue à augmenter la vitesse, une autre instabilité agit et un nouvel écoulement apparaît, un peu plus complexe. Des d'écoulements de plus en plus complexes se succèdent ainsi jusqu'à atteindre la turbulence.

Pour mieux appréhender la turbulence, il est donc important d'étudier les instabilités hydrodynamiques des écoulements. La transition à la turbulence est par ailleurs modifiée par le caractère potentiellement non newtonien du fluide. Dans ce manuscrit, nous nous intéresserons plus particulièrement à la première instabilité de l'écoulement de Taylor-Couette d'un fluide de Herschel-Bulkley.

3 Intérêt industriel

Pour la rédaction de cette partie je me suis inspiré du livre de P.J. Carreau et R. P. Chhabra (P. J. Carreau, 1997).

Une meilleure connaissance de l'écoulement des fluides rhéofluidifiants à seuil de contrainte présente un intérêt pour les industriels, notamment dans les problématiques d'agitation et de mélange.

Toutes les formes pharmaceutiques présentent dans leurs procédés de fabrication le mélange. Cette opération unitaire vise à obtenir une association homogène de constituants qui est indispensable pour assurer un dosage constant en principe actif dans chaque unité de prise. L'homogénéité des lots est une problématique importante dans l'industrie pharmaceutique.

De nombreux procédés pharmaceutiques sont confrontés à des problèmes d'inhomogénéité de leurs lots, conduisant à leur non-libération. Pour les médicaments faisant intervenir des fluides complexes, il est nécessaire de connaître leurs propriétés d'écoulement afin de prévoir des équipements adaptés en vue de les mélanger de manière optimale.

L'agitation et le mélange sont des opérations unitaires requises à différents stades des procédés de fabrication. On citera pour exemple les étapes de mise en contact, réaction et de séparation, qui sont des opérations très courantes. La plupart du temps, ces opérations sont réalisées à l'aide d'un agitateur mécanique dont la rotation s'effectue autour d'un arbre placé dans une cuve.

Qu'est-ce que le mélange ?

Il s'agit de l'homogénéisation d'espèces miscibles formant un milieu fluide (CARRIERE, 2008).

Un fluide est formé de n espèces : $A_1, A_2, \dots$

Un fluide est homogène si en tout point sa constitution est identique. Dans ce cas, la masse volumique sera une constante de l'espace :

$$\forall \vec{x} \quad \rho_l(\vec{x}, t) = \bar{\rho}_l(t) = \frac{M_l}{V}$$

Ce raisonnement peut aussi s'effectuer avec la concentration :

$$\forall \vec{x} \quad C_l(\vec{x}, t) = \bar{C}_l(t) = \frac{M_l}{M}, \text{ avec } M = \sum_{j=1}^{j=n} M_j$$

Ainsi, on peut mesurer le degré d'inhomogénéité avec : $\sum_{j=1}^{j=n} \|C_j - \bar{C}_j\|$

L'agitateur a vocation à mettre en mouvement le liquide par convection forcée afin de diminuer le degré d'inhomogénéité.

3.1 Types et exemples de mélanges

Il convient de distinguer les différents types de mélange que nous pouvons retrouver :

Tableau 1 - Les différents types de mélange

Type de mélange	Exemples	Remarques
Liquide seul	Mélange de produits solubles, agitation afin de favoriser le transfert de chaleur et/ou de matière	Les liquides très visqueux et les liquides non newtoniens sont plus difficiles à mélanger
Liquide/liquide	Il s'agit de liquides immiscibles que l'on peut rencontrer lors d'extraction liquide-liquide, dans les émulsions, lors des procédés de brassage (très fréquent en biotechnologies)	L'objectif principal de ce type d'opération est d'augmenter l'aire interfaciale
Liquide-solide	Suspensions de particules dans des liquides de faible viscosité par simple agitation	Cas où les forces surfaciques particulières jouent un rôle important
Gaz-liquide-solide	Les mousses, réacteurs avec catalyseurs en suspension	Un bon mélange est nécessaire
Solide-solide	Mélange de poudres	La qualité du mélange dépend fortement de la taille et de la forme des particules, ainsi que de leurs propriétés de surface

3.2 Mécanismes de mélange

Afin d'assurer un mélange de bonne qualité, il est nécessaire de remplir deux conditions. Premièrement, il faut qu'il n'y ait pas de zones stagnantes, l'ensemble du milieu doit être en mouvement. Deuxièmement, il faut qu'il y ait une zone de fort cisaillement dans laquelle les hétérogénéités sont progressivement réduites. Pour remplir chacune de ces deux conditions, il faut apporter de l'énergie mécanique, qui sera dissipée sous forme de chaleur. Les parts respectives d'énergie consommée pour remplir chacune de ces conditions varient d'une application à l'autre.

Il est nécessaire de définir le mélange en fonction de l'échelle à laquelle nous nous plaçons pour l'observer. Ainsi, on distingue le macromélange du micromélange :

- On parle de macromélange lorsque que l'on se place à l'échelle du récipient qui le contient.
- On parle de micromélange à l'échelle moléculaire. Le micromélange est obtenu par réduction progressive des éléments de fluide, par déformation et fragmentation jusqu'à obtenir une homogénéité au niveau moléculaire (Pierre Trambouze, 2002).

En fonction des propriétés du fluide (principalement la viscosité), l'écoulement lors du mélange peut être laminaire, turbulent ou dans un état intermédiaire. Bien souvent, au sein d'un réacteur de mélange, les deux écoulements coexistent.

Par souci de simplicité, nous considérons souvent ces deux types de mélange séparément.

3.3 Mélange laminaire

Ce type de mélange se retrouve lorsque les liquides à mélanger sont newtoniens et dont la viscosité est très élevée ($\eta > 10 \text{ Pa.s}$) ou pour des liquides non-newtoniens. Dans ce type de système, les forces inertielles sont négligeables, ainsi l'agitateur doit couvrir une surface significative au sein du réacteur pour provoquer un mouvement d'ensemble. Les éléments à proximité de la pale se déforment et s'étirent progressivement et continuellement en devenant de plus en plus fins après chaque passage dans la zone de fort cisaillement.

Dans ce type de mélange deux mécanismes sont impliqués : le cisaillement (au contact au contact de l'agitateur) et l'étirement laminaire

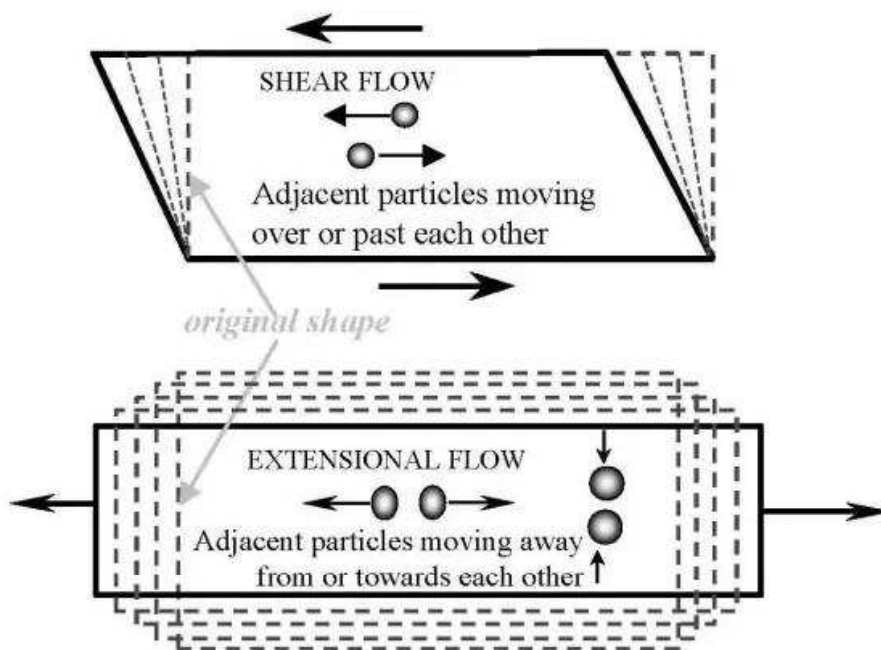


Figure 4 - Comportements du fluide lorsqu'il subit le cisaillement « shear flow » et l'étirement laminaire « extensional flow » (Howard A. Barnes)

Le fluide subit le cisaillement induit par le passage des pâles, c'est-à-dire que chacune de ses faces est soumise à un vecteur de force de même direction mais de sens opposé. L'étirement laminaire est provoqué par le fait que les pâles poussent le fluide de manière centrifuge alors que la partie du fluide qui n'est pas en contact direct des pâles oppose une résistance à ce mouvement. Le fluide se trouve donc affiné et allongé comme l'illustre la figure 4.

Finalement, l'homogénéisation ultime s'obtient avec le phénomène de diffusion moléculaire (gouverné par la loi de Fick), on parle ainsi de micromélange. Ce phénomène est lent, d'autant plus pour les fluides visqueux. Lorsque les homogénéités sont devenues suffisamment fines, ce mécanisme est le seul qui permet de poursuivre l'homogénéisation.

Le mélange de liquides très visqueux est assuré par divers mécanismes, qui progressivement réduisent la taille et l'échelle des hétérogénéités et les distribuent dans le solvant. La diffusion moléculaire, d'abord négligeable, devient le mécanisme le plus important en fin de mélange.

3.4 Mélange turbulent

Pour les liquides de faible viscosité ($\eta < 10$ mPa.s), l'écoulement provoqué par l'agitateur est turbulent. L'inertie induite est suffisante pour provoquer l'écoulement du fluide à travers le réacteur et son retour jusqu'à l'agitateur. Cet écoulement turbulent est caractérisé par la présence de tourbillons, notamment à proximité de l'agitateur. Ces tourbillons facilitent le mélange et expliquent que le mélange en régime turbulent se fait beaucoup plus rapidement

qu'en régime laminaire. Mais l'homogénéisation complète s'obtient toujours par diffusion moléculaire.

L'écoulement turbulent est complexe. Dans un mélangeur, on peut considérer que les tourbillons primaires (dont la taille est proche du diamètre de l'agitateur) provoquent de grandes fluctuations de vitesses mais de basse fréquence. Les interactions entre ces tourbillons primaires et le liquide se déplaçant à faible vitesse induisent la formation de tourbillons plus petits dont la fréquence est plus élevée, qui participent au mélange avant de progressivement se désintégrer et de dissiper leur énergie sous forme de chaleur. Durant tout ce processus de désintégration, l'énergie cinétique est transmise des grands tourbillons vers les petits. Ces phénomènes sont résumés dans la figure ci-dessous :

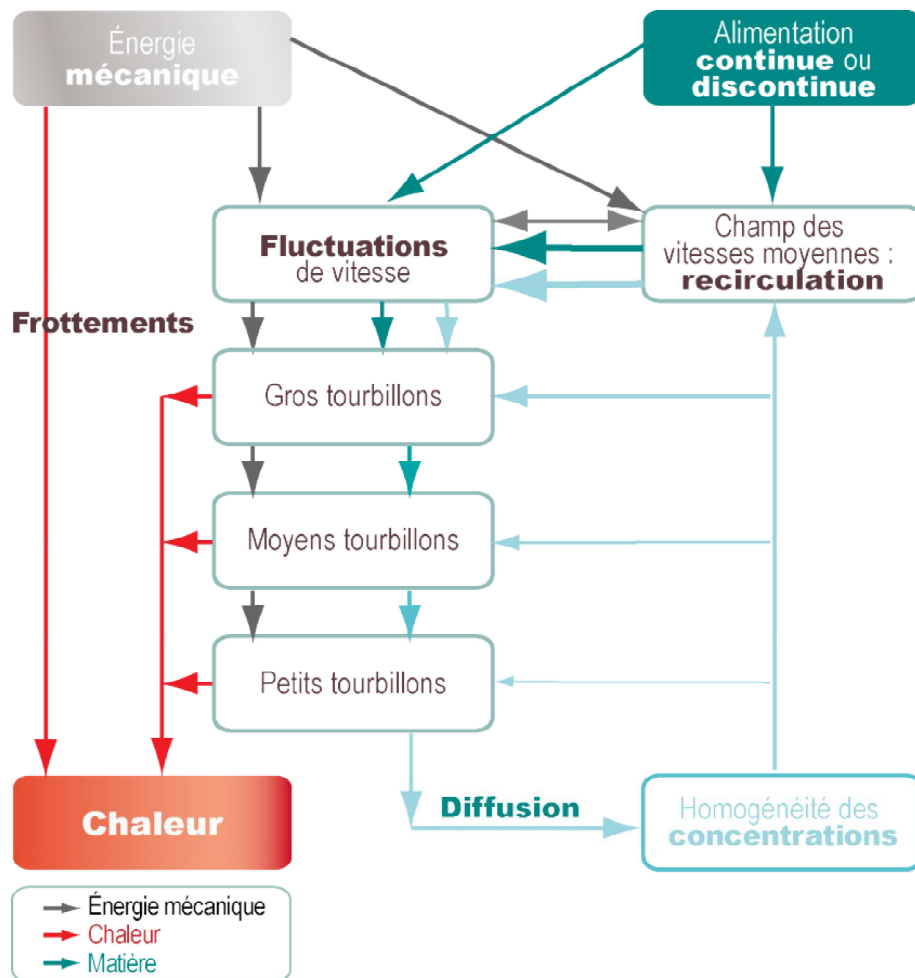


Figure 5 - Cascade turbulente du transfert d'énergie et de la matière dans un mélangeur (Schwartzentruber, 2009)

Cette approche qualitative des phénomènes rencontrés dans ce type de mélange est très simplifiée mais néanmoins, elle illustre assez bien les phénomènes rencontrés dans ce type d'écoulement.

Des résultats quantitatifs sur l'impact de la taille des tourbillons et de la structure des écoulements turbulents dans des cuves agitées sont disponibles dans la littérature (Banerjee, 1992).

3.5 Schéma d'écoulement

La connaissance qualitative du comportement des différentes matières en écoulement dans une cuve agitée est utile afin de savoir s'il existe des zones stagnantes. Le schéma d'écoulement dépend grandement du type d'agitateur utilisé avec des fluides non-newtoniens. On en distingue trois classes :

- La première classe d'agitateur opère à des vitesses relativement élevées, produisant un haut taux de déformation dans son voisinage tout en permettant un transport global du liquide. Des exemples typiques de ce type d'agitateur sont les turbines et les hélices
- La deuxième classe d'agitateur est caractérisée par le faible espace entre l'extrémité de l'agitateur et la paroi de la cuve, comme les agitateurs à barrière et les ancres, qui permettent au fluide d'atteindre les coins éloignés directement. Ils sont particulièrement utiles lorsque la viscosité du fluide est élevée, où les forces d'inertie sont insuffisantes pour entraîner le fluide dans un mouvement d'ensemble jusque dans ces angles.
- La troisième classe comprend des agitateurs à faible vitesse de rotation, qui ne produisent pas un haut taux de déformation mais possèdent une bonne capacité de pompage qui leur permet d'atteindre tous les coins de la cuve. Classiquement, on peut prendre pour exemple les rubans hélicoïdaux et les vis hélicoïdales.

3.6 1ère classe d'agitateurs

Ce type d'agitateur est utilisé pour des fluides peu visqueux, ils sont employés à des vitesses angulaires élevées et provoquent beaucoup de cisaillement. Le régime du mélange est largement turbulent et le mécanisme principal sur lequel repose le mélange est la recirculation du fluide.

Du fait de la turbulence, un vortex –creusement de la surface libre autour de l'arbre d'agitation sous l'effet de la force centrifuge- est susceptible de se former. Ce phénomène est délétère pour le mélange car il induit un mouvement d'ensemble dits « en blocs ». Pour éviter son apparition, des chicanes sont placées sur la paroi des cuves ou contre-pâles.

3.6.1 Les hélices

L'hélice est un mobile à débit axial, la figure ci-dessous présente l'écoulement au sein d'une cuve munie d'une hélice et de chicanes (baffle) :

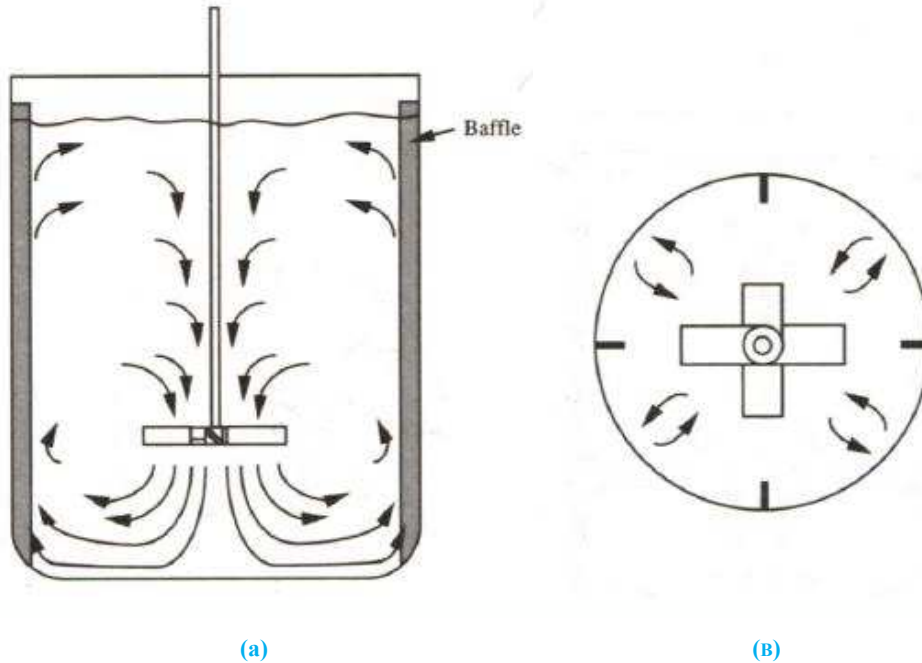


Figure 6 - Ecoulement au sein d'une cuve munie d'une hélice : (a) vue en coupe ; (b) vue en section

On pourra citer pour exemple, l'hélice marine et l'hélice à profil mince :



Figure 7 - Hélice marine (ROUSTAN, 2005)

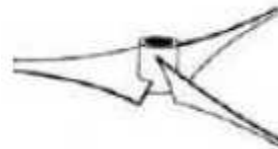


Figure 8 - Hélice à profil mince (ROUSTAN, 2005)

3.6.2 Les turbines

La turbine est un mobile produisant un débit radial, la figure ci-dessous présente l'écoulement au sein d'une cuve munie d'une turbine et de chicanes :

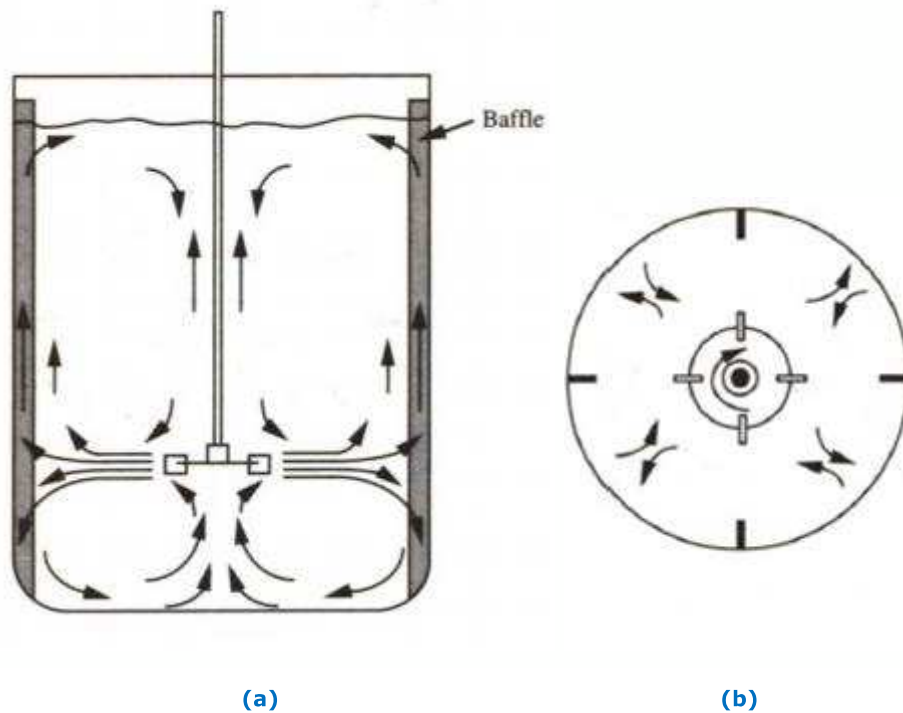


Figure 9 - Ecoulement au sein d'une cuve munie d'une turbine : (a) vue en coupe ; (b) vue en section

On pourra citer pour exemple, la turbine Rushton et la turbine à pâles incurvées :

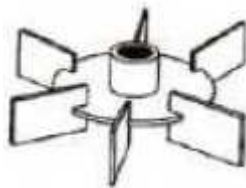


Figure 10 - Turbine Rushton (ROUSTAN, 2005)



Figure 11 - Turbine à pâles incurvées (ROUSTAN, 2005)

3.6.3 Caractéristiques des agitateurs de classe I

Dans la littérature, on peut accéder aux résultats de nombreux travaux effectués avec ce type d'agitateur : Metzner et Otto (1957), Godleski et Smith (1962), Wichterle et Wein (1981) et Elson (1990), formant ainsi une base de données importante pour les fluides newtoniens, rhéofluidifiants et rhéoépaississants.

Il est communément admis qu'avec le haut taux de déformation induit par ces agitateurs, les fluides rhéofluidifiants connaissent un fort taux de cisaillement au contact de l'agitateur mais leur cisaillement diminue très rapidement en s'éloignant de celui-ci. Cette décroissance du

cisaillement en fonction de l'éloignement de l'agitateur est beaucoup plus importante que pour les fluides newtoniens. Pour les fluides rhéoépaississants le comportement est inverse.

Wichterle and Wein (1981) ont identifié la frontière entre les régions cisillées ou non pour les fluides rhéofluidifiants agités dans une cuve à l'aide de turbines et d'hélices. Leurs études montrent que la région mélangée se limite à la taille du diamètre de l'agitateur en régime d'écoulement visqueux mais s'accroît pour des nombres de Reynolds croissants.

Ils expriment leurs résultats de la façon suivante :

$$\frac{D_c}{d} = 1, \text{ pour } Re < \frac{1}{a^2}$$

Et

$$\frac{D_c}{d} = a(Re)^{0.5} \text{ pour } Re > \frac{1}{a^2}$$

Où $a=0,3$ pour les hélices et $a=0,6$ pour les turbines and $a \approx 0,375 (Po_t)^{0.333}$ pour n'importe quel agitateur, où Po_t est la valeur du nombre de puissance dans la région turbulente.

Ainsi, la qualité du mélange avec ce type d'agitateur pour des fluides rhéofluidifiants est fonction du nombre de Reynolds. Celui-ci doit être important afin d'assurer un mélange convenable pour ce type de fluides, provoquant une consommation énergétique importante. Ce qui n'en fait pas une classe d'agitateur de choix pour les fluides rhéofluidifiants qui sont l'objet de cette thèse.

3.7 2ème classe d'agitateurs

Cette classe est principalement représentée par les ancres et les agitateurs à barrières :

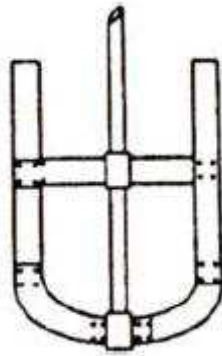


Figure 12 - Ancre (ROUSTAN, 2005)

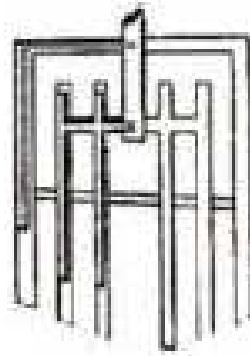


Figure 13 - Agitateur à barrières (ROUSTAN, 2005)

Alors que les ancrs et les agitateurs à barrière sont connus pour ne produire qu'une faible circulation axiale, l'étude de Peters et Smith (1967) suggère que le caractère viscoélastique d'un fluide favorise l'écoulement axial.

Ils augmentent la vitesse du fluide à proximité de la paroi mais celui-ci a tendance à stagner au centre de la cuve. Du fait de la faible circulation axiale, un gradient de concentration existe verticalement dans la cuve. Ce problème peut être réduit en ajoutant un ruban hélicoïdal ou une vis hélicoïdale à l'arbre de l'agitateur.

3.8 3ème classe d'agitateurs

Cette dernière classe est celle qui est la plus pertinente pour agiter et mélanger des fluides à seuil d'autant plus s'ils sont rhéofluidifiants. Leur consommation énergétique est modérée, et leur capacité de pompage permet de brasser l'ensemble de la cuve malgré des viscosités élevées.

Cette classe est principalement représentée par les rubans hélicoïdaux et les vis hélicoïdales :

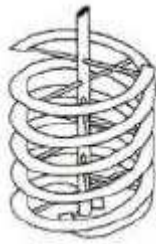


Figure 14 - Ruban hélicoïdal (ROUSTAN, 2005)



Figure 15 - Vis hélicoïdale (ROUSTAN, 2005)

L'écoulement principal pour ce type d'agitateur se fait axialement, de haut en bas, c'est cet écoulement qui est principalement responsable du mélange. Le cisaillement produit par les rubans s'opère à l'intérieur et à l'extérieur des lames, tandis qu'il existe également un cisaillement contre la paroi de la cuve. Il n'y a quasiment pas de flux radial de matière excepté à la base et au sommet de la cuve.

Des écoulements secondaires s'opèrent pour des vitesses élevées de l'agitateur.

Concernant les vis hélicoïdales, elles peuvent être munies d'un tube d'aspiration présentant des perforations qui permettent un écoulement transversal du fluide au travers de sa paroi. De plus, la vis hélicoïdale présente de bonnes capacités de pompage axial. Ses performances en agitation et en mélange, sont comparables voir surpassent celles des rubans hélicoïdaux (voir par exemple Chavan et Ulbrecht (1973 b), Carreau et al. (1992).

Au-delà de ces trois classes d'agitateurs, d'autres dispositifs d'agitation sont employés pour mélanger des pâtes épaisses dont les comportements rhéologiques sont complexes. On citera pour exemple les mélangeurs à lame sigma :



Figure 16 - Mélangeur à lame sigma (Prism Pharma Machinery, 2013)

Ce type de dispositif présente une épaisse lame en forme de S ou de Z. Généralement ils sont disposés par paire dans le mélangeur et tournent en sens opposé à des vitesses différentes. Earle, 1959 ; Hall et Godfrey, 1968 ; Kapel, 1979 fournissent des informations sur ce type d'agitateur.

3.9 Choix du matériel d'agitation

Pour la rédaction de cette partie, je me suis appuyé sur un article de « Procédés chimie - bio - agro | Opérations unitaires. Génie de la réaction chimique (Michel ROUSTAN, Jean-Claude PHARAMOND, Alain LINE, 1999).

Le choix du type d'agitateur que l'on souhaite réaliser dépend du type d'opérations que l'on souhaite réaliser, de la nature des fluides et des caractéristiques du mobile d'agitation. Sur la base de ces trois premières étapes on sélectionne les mobiles d'agitation qui pourraient correspondre à notre besoin. Ensuite, en fonction des conditions opératoires et économiques on procède au choix final.

Le logigramme ci-dessous résume la démarche :

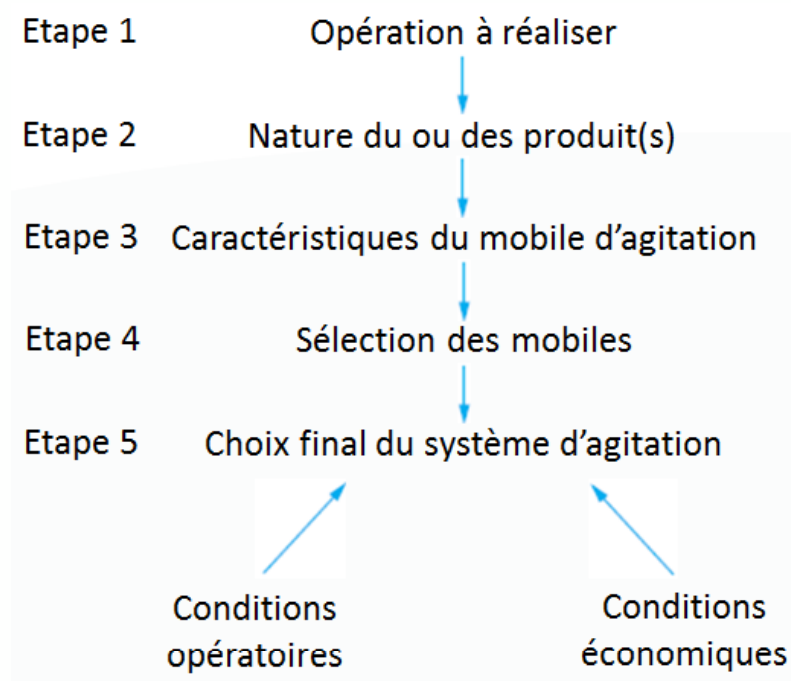


Figure 17 - Processus de sélection d'un système d'agitation

3.9.1 Opération à réaliser

Le type d'opérations à réaliser influence naturellement sur le choix de l'agitateur.

On citera pour exemples les opérations suivantes :

- mise et/ou maintien en suspension
- dissolution, cristallisation
- extraction liquide-solide
- dispersion
- émulsion

- mélange
- homogénéisation, circulation
- transfert thermique
- dilution
- neutralisation
- réaction chimique
- extraction liquide-liquide
- absorption, désorption
- fermentation
- ...

3.9.2 Nature du ou des produit(s)

Selon la phase sous laquelle se trouvent les espèces, les critères physiques suivants auront un impact sur les systèmes d'agitation qui seront retenus :

Solides :

- nature
- teneur
- densité
- granulométrie
- vitesse limite de chute (décantation)
- mouillabilité
- solubilité

Liquides :

- densité
- viscosité
- teneur
- températures initiale et finale
- comportement rhéologique du fluide (newtonien, visco-élastique, rhéofluidifiant, ...)

Gaz :

- nature
- débit
- pression
- solubilité

3.9.3 Caractéristiques du mobile d'agitation

Comme nous l'avons vu précédemment, les mobiles se distinguent par les trois critères suivants :

- cisaillement fort, moyen, faible
- turbulence forte, moyenne, faible
- pompage fort, moyen, faible

Tableau 2 - Critères de choix d'un mobile d'agitation

Opération à réaliser	Caractéristiques des espèces utiles pour définir le procédé	Propriétés de l'agitateur	Type d'agitateur
Mélange liquide-solide			
Mise et maintien en suspension	— concentration — granulométrie — densité — vitesse de décantation des solides — mouillabilité — sensibilité au cisaillement — degré d'homogénéité — viscosité	— faible cisaillement — faible turbulence — très bon pompage	— Hélice marine à 3 ou 4 pales — Turbine à pâles inclinées — Hélice à profil mince — Mobile à disque et à 3 pales inclinées à 45° à leur extrémité refoulant le liquide de bas en haut (utilisé pour l'agitation de fond de cuve) — Agitateur submersible multidirectionnel — Turbine fermée aspirant axialement et refoulant radialement — Agitateur à barrière, à flux tangentiel pour agitation douce
Dissolution Cristallisation	— concentration — granulométrie — masse volumique — vitesse de décantation des solides — mouillabilité et solubilité — sensibilité au cisaillement — viscosité	— cisaillement moyen — turbulence moyenne — bon pompage	— Hélice marine à 3 ou 4 pales — Turbine à pâles inclinées — Hélice à double flux — Hélice à profil mince — Mobile à disque et à 3 pales inclinées à 45° à leur extrémité refoulant le liquide de bas en haut (utilisé pour l'agitation de fond de cuve) — Turbine fermée aspirant axialement et refoulant radialement
Dispersion de solides ou poudres dans des liquides	— concentration — granulométrie — masse volumique — vitesse de décantation des solides ou poudres — nature des fluides — variation de la viscosité — mouillabilité	— cisaillement important — faible capacité de mélange	— Turbine fermée aspirant axialement et refoulant radialement — Mobile de dispersion
Mélange liquide-liquide			

a) liquides miscibles			
Homogénéisation-mélange Dilution Transfert thermique Réaction chimique	— viscosité des fluides — évolution de la viscosité dans le temps — nature des fluides — temps de mélange	— faible cisaillement — faible turbulence — très bon pompage mobile à flux axial avec ou sans composante radiale	— Hélice marine à 3 ou 4 pales — Turbine à pâles inclinées — Hélice à double flux — Hélice à profil mince — Mobile pour fluide visqueux (Turbine hélicoïdale, Ruban simple ou double avec ou sans vis intérieure) — Mobile à disque et à 3 pales inclinées à 45° à leur extrémité refoulant le liquide de bas en haut (utilisé pour l'agitation de fond de cuve) — Agitateur à ancre (ou cadre), à flux tangentiel pour milieux visqueux et raclage de paroi — Agitateur à barrière, à flux tangentiel pour agitation douce
Mélange liquide-liquide b) liquides non miscibles			
Extraction liquide-liquide Dispersion Réaction chimique Émulsions	— pourcentage des différents liquides — taille des gouttes dispersées — degré de stabilité de l'émulsion	— fort cisaillement — forte turbulence — circulation moyenne mobile à flux radial	— Hélico-mélangeur — Multiplan tripale — Turbine à disque type Rushton à pâles droites, inclinées, incurvées, ou concaves — Turbine à pales droites ou incurvées — Turbine fermée aspirant axialement et refoulant radialement — Turbine fermée à disque et à pales courbes avec ou sans contre-pièces fixes Turbine à pales courbes avec un système de contre-pièces fixes — Mobile de dispersion
Mélange liquide-gaz			
Dispersion d'un gaz dans un liquide Réaction chimique Absorption Désorption Fermentation	— débit gazeux — viscosité — variation de la viscosité dans le temps — sensibilité des micro-organismes au cisaillement	— forte turbulence — fort cisaillement — bonne circulation	— Turbine à pâles inclinées — Hélice à double flux — Hélice à np pales à profil mince — Turbine à disque type Rushton à pâles droites, inclinées, incurvées, ou concaves — Turbine à pales droites ou incurvées

3.9.4 Conditions opératoires

Une fois la sélection des agitateurs potentiels effectuée on prend en compte les conditions opératoires :

- Le type de fonctionnement en continu, discontinu (le plus courant en industrie pharmaceutique)
- Les débits à traiter
- Temps de mélange souhaité
- Mode d'évacuation du mélange prévu

Conditions économiques

Le choix des industriels est basé sur des caractères techniques mais aussi économiques. L'étude économique prend en compte les CAPEX¹ et les OPEX² après consultation de plusieurs fabricants. Mais pour que ceux-ci fournissent un chiffrage, il faut qu'au préalable les conditions opératoires soient clairement définies.

3.9.5 Choix final du système d'agitation

Ce n'est qu'après cette étude globale que l'on peut déterminer le système d'agitation le plus adapté à notre besoin. Comme nous l'avons vu dans ce chapitre, les caractéristiques des fluides jouent un rôle prépondérant dans le choix du mobile d'agitation, notamment la viscosité. Ceci justifie l'intérêt porté à une meilleure connaissance de l'écoulement des fluides complexes.

3.10 Analogie de Couette

L'écoulement de Couette cylindrique est similaire à celui d'un Couette plan, présenté en dans la partie 1.2. Dans cette géométrie, Figure 18, du fluide est placé entre 2 cylindres concentriques. Le cylindre intérieur tourne, alors que le cylindre extérieur est fixe. Cette configuration est l'archétype des écoulements tournants.

¹ CAPEX : « Capital EXpenditures » ou coût d'investissement

² OPEX : « OPerational Expenditure » ou coût de fonctionnement (maintenance comprise)

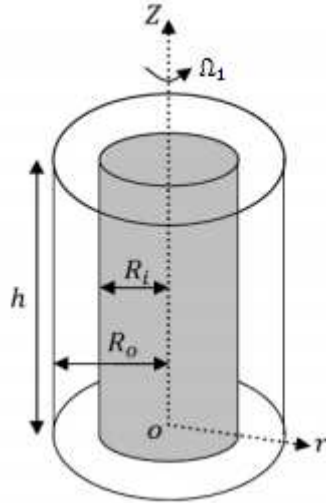


Figure 18 - Dispositif de Taylor-Couette (Nabila Ait-Moussa, 2015)

Elle présente un double intérêt industriel. En effet, on la retrouve d'une part dans les dispositifs de caractérisation rhéologique, les rhéomètres rotatifs, qui utilisent fréquemment cette géométrie ; ce sera le cas lors des mesures rhéologiques réalisées dans la section suivante.

D'autre part, elle constitue une représentation simplifiée des dispositifs d'agitation/mélange dans lesquels un rotor (agitateur) tourne à l'intérieur d'une cuve statique. Il a ainsi été démontré que l'on peut définir une géométrie de Couette équivalente à tout système d'agitation (Lionel CHOPLIN, Philippe MARCHAL, Cristophe BARAVIAN, Dominique LANGEVIN, 2010). Cette démarche, appelée analogie de Couette, a été largement utilisée notamment pour estimer la puissance consommée pour l'agitation et le mélange de fluides non newtoniens au sein de cuves.

4 Etude expérimentale de l'écoulement du Carbopol® dans un rhéomètre de Couette

4.1 Principe de l'expérience

Afin de déterminer les propriétés d'écoulement de fluides rhéofluidifiants à seuil de contrainte, une étude expérimentale utilisant la géométrie de Couette a été menée.

Cette étude a été réalisée avec des solutions de Carbopol® de concentrations différentes.

Le Carbopol® est un polymère hydrophile d'acide acrylique appartenant aux carbomères. C'est un excipient pharmaceutique retrouvé dans de nombreuses formulations.

Nous avons étudié son comportement en solution dans l'eau à l'aide d'un rhéomètre de Couette.

4.2 Notion de couple

Afin de comprendre le couple, il convient de définir préalablement le moment d'une force. Le moment d'une force est produit d'une force et du bras de levier (la distance entre l'axe de cette force et l'axe de rotation de l'objet sur lequel elle s'exerce).

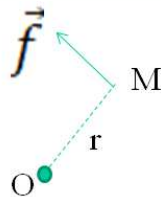


Figure 19 - Moment d'une force

$$M(\vec{f}) = \vec{f} \times \vec{r}$$

Le couple est le moment d'un ensemble de forces dont la résultante est nulle. Leur moment, lui, est non nul.

Dans notre cas, pour mettre en rotation le cylindre interne le moteur du rhéomètre de Couette doit développer un couple suffisamment important pour combattre les forces de frottements induites par le fluide sur la paroi du cylindre. Ces forces de frottements sont d'origine visqueuse.

4.3 Principe de fonctionnement du rhéomètre

Le couple C est proportionnel à la contrainte τ imposée au fluide

$$\tau = A C$$

Par ailleurs, la vitesse angulaire de rotation Ω du cylindre intérieur est proportionnelle au taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ subi par le fluide

$$\dot{\gamma} = B \Omega$$

Dans l'hypothèse d'un entrefer étroit (rayons des cylindres intérieur et extérieur proches), les constantes A et B , dites constantes d'appareil sont égales à

$$A = \frac{1}{2\pi R_1^2 H} \quad \text{et} \quad B = \frac{2}{1 - \eta^2}$$

où $\eta = R_1/R_2$ est le rapport des rayons des cylindres intérieur et extérieur respectivement et H est la hauteur des cylindre.

Le couple étant proportionnel à la contrainte, et la vitesse angulaire proportionnelle au cisaillement, une connaissance de ces deux grandeurs permet d'accéder à la viscosité du fluide. En effet, la viscosité est reliée à ces deux grandeurs par la formule suivante :

$$\tau = \mu \dot{\gamma}$$

En isolant la viscosité dynamique :

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{AC}{B\Omega}$$

Lorsque le fluide est Newtonien, un seul point expérimental suffit. La viscosité dynamique étant une constante, la fonction $\tau = \mu \dot{\gamma}$ est une droite passant par l'origine.

Pour les fluides complexes, il est nécessaire de mesurer la contrainte pour différents taux de cisaillement afin de connaître l'évolution de la viscosité du fluide.

Le rhéomètre de Couette peut fonctionner selon deux modes :

- à cisaillement imposé, c'est-à-dire mesurer le couple en faisant varier la vitesse de rotation du cylindre intérieur
- à contrainte imposée, c'est-à-dire mesurer la vitesse angulaire du cylindre intérieur en faisant varier le couple

4.4 Résultats de l'expérience

Quatre solutions de Carbopol[®] ont été fabriquées, ayant pour concentrations massique : 0,2%, 0,15%, 0,1% et 0,05%.

L'expérience a été réalisée avec un rhéomètre de Couette HAAK, de modèle MARS :



Figure 20 - Rhéomètre HAAKE™

Ses dimensions sont les suivantes :

- rayon du cylindre interne : 2cm
- rayon du cylindre externe : 5cm
- hauteur de l'entrefer : 16cm

Quant au cylindre interne, il se trouve à 2 mm du fond. Il est creusé de sorte à ce qu'une bulle d'air y reste coincé et atténue les frottements de ce cylindre sur le fond, ceci afin de diminuer les effets de bord.

Préalablement à la réalisation de l'expérience, nous avons déterminé les paramètres rhéologiques des solutions. Ils sont résumés dans le tableau 3.

Tableau 3 - Paramètres rhéologiques des solutions

	0,2%	0,15%	0,10%	0,05%
Seuil de contrainte (Pa)	38	18	5	0,1
Indice d'écoulement (n)	0,69	0,69	0,0075	0,0023
Consistance (Pa.s) ⁿ	1,25	0,97	4,38	0,52

Nous avons mené l'expérience en mode cisaillement imposé. Le cylindre extérieur du rhéomètre étant immobile, les solutions ont été soumises à un taux de cisaillement allant croissant avec l'augmentation de la vitesse angulaire du cylindre intérieur. Le couple opposé par le fluide à la rotation du cylindre interne a été enregistré.

Les résultats de cette expérience figurent sur le graphique ci-dessous :

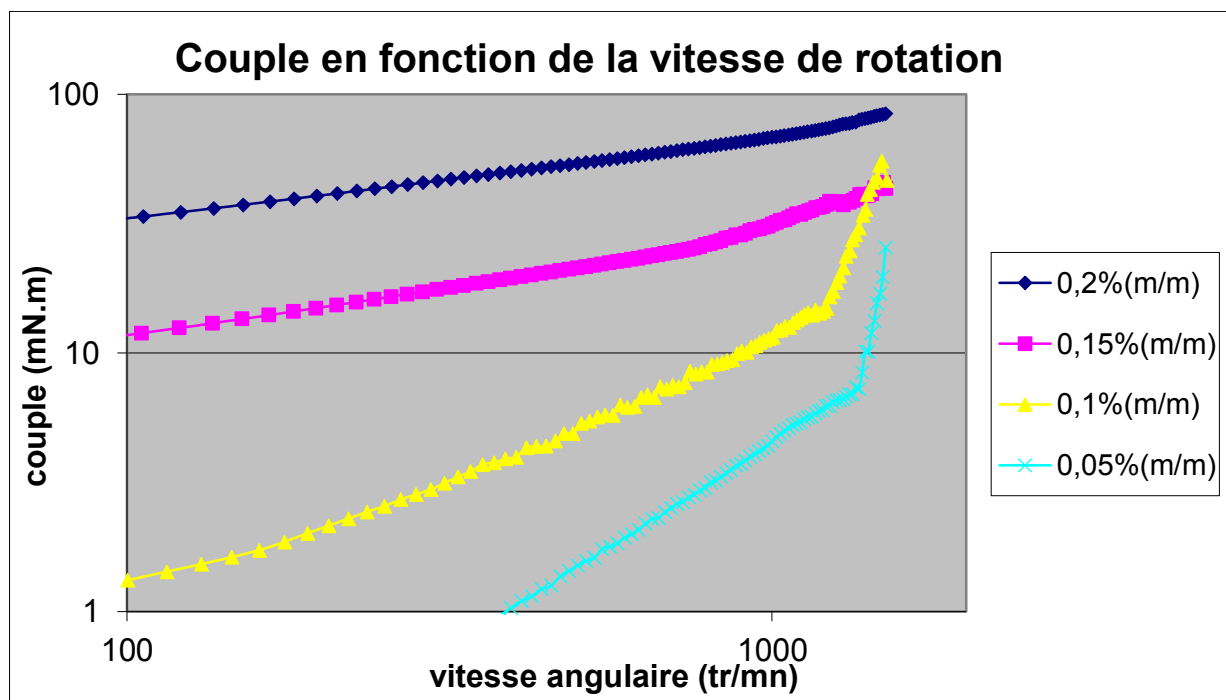


Figure 21 - Courbes du couple des solutions de Carbopol® en fonction de la vitesse angulaire du cylindre interne

Pour les deux concentrations les plus élevées en Carbopol®, une augmentation proportionnelle (En coordonnées logarithmiques) du couple avec la vitesse de rotation du cylindre interne est

observée. Néanmoins, à 800 tr/min, on observe une cassure dans la pente de la courbe à 0,15%. Le couple croît plus rapidement avec la vitesse angulaire. Ceci s'explique par une transition à la turbulence et l'apparition concomitante de tourbillons de Taylor venant perturber l'écoulement et opposer une résistance supplémentaire au mouvement.

Pour les deux solutions de plus faibles concentrations, la cassure est nette, l'écoulement turbulent est clairement atteint et avec lui, les tourbillons de Taylor amenant une contrainte supplémentaire s'opposant à la rotation du cylindre intérieur, responsable de la croissance rapide du couple en fonction du cisaillement.

4.5 Limites de l'expérience

L'expérience réalisée ici présente des limites pour 3 raisons:

La première concerne les dimensions de l'équipement. Le rhéomètre présente un rapport d'aspect trop faible, qui ne permet pas de négliger les effets de bords.

Deuxièmement, il a été observé pour des vitesses angulaires élevées l'incorporation de bulles d'air en surface venant perturber l'écoulement dans la partie supérieure de l'entrefer, ce qui pourrait expliquer l'augmentation plus importante du couple pour les vitesses de rotation les plus élevées.

Pour déterminer, la viscosité à partir du couple mesuré et du cisaillement imposé, on suppose que le fluide ne glisse pas sur les parois. Or, aucun traitant anti-glissement n'a été appliqué sur celles-ci. Ce qui rend le phénomène de glissement non négligeable.

5 Analyse de stabilité linéaire de l'écoulement Taylor-Couette d'un fluide Herschel-Bulkley

Dans ce chapitre sont exposées les bases mathématiques concernant l'écoulement d'un fluide rhéofluidifiant à seuil en géométrie de Taylor-Couette.

Mathématiquement, nous avons fait le choix d'étudier les fluides rhéofluidifiants à seuils de contrainte répondant à la loi de Herschel-Bulkley.

5.1 Description du problème et équations

5.1.1 Description du problème

On considère l'écoulement d'un fluide incompressible dans l'espace annulaire situé entre 2 cylindres infinis concentriques de rayons $\hat{R}_1$ et $\hat{R}_2$, **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** Le cylindre intérieur tourne à une vitesse angulaire $\hat{\Omega}_1$ et le cylindre extérieur est immobile.

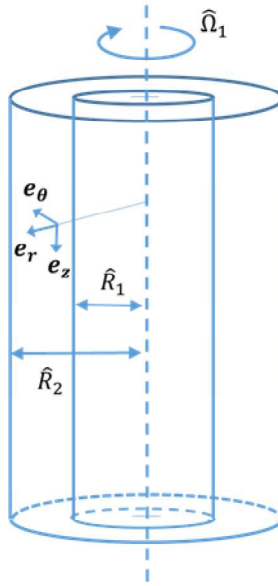


Figure 22 - Géométrie étudiée

5.1.2 Equations gouvernant l'écoulement

L'écoulement laminaire de base est gouverné par les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{U}} = 0, \quad (1.1)$$

$$\hat{\rho} \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} + (\hat{\mathbf{U}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{U}} \right] = -\nabla \hat{P} + \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}, \quad (1.2)$$

où $\hat{U} = \hat{U} e_r + \hat{V} e_\theta + \hat{W} e_z$ est le vecteur vitesse exprimé en coordonnées cylindriques $(\hat{r}, \theta, \hat{z})$, $\hat{P}$ est la pression. Les grandeurs portant un chapeau (^) sont dimensionnelles.

Pour décrire les forces visqueuses s'exerçant sur une surface quelconque immergée dans le matériau, il faut une matrice, appelé tenseur des contraintes visqueuses :

$$\bar{\bar{\tau}} = \begin{pmatrix} \hat{\tau}_{rr} & \hat{\tau}_{r\theta} & \hat{\tau}_{rz} \\ \hat{\tau}_{\theta r} & \hat{\tau}_{\theta\theta} & \hat{\tau}_{\theta z} \\ \hat{\tau}_{zr} & \hat{\tau}_{z\theta} & \hat{\tau}_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

En effet, la surface dS , de normale n peut être orientée dans les 3 directions de l'espace et la force visqueuse $d\hat{f}$ possède 3 composantes. La force est calculée en multipliant le tenseur $\bar{\bar{\tau}}$ et le vecteur normal n ,

$$d\hat{f} = \bar{\bar{\tau}} \cdot n dS \quad (1.4)$$

Le tenseur des contraintes visqueuses s'exprime en fonction du taux de cisaillement (encore appelé vitesse de cisaillement, vitesse de déformation ou gradient de vitesse) selon la loi de Newton :

$$\bar{\bar{\tau}} = \hat{\mu} \bar{\bar{\gamma}} \quad (1.5)$$

Dans le cas le plus général, le taux de cisaillement $\bar{\bar{\gamma}}$ est une matrice ou tenseur des taux de cisaillement :

$$\bar{\bar{\gamma}} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{rr} & \hat{\gamma}_{r\theta} & \hat{\gamma}_{rz} \\ \hat{\gamma}_{\theta r} & \hat{\gamma}_{\theta\theta} & \hat{\gamma}_{\theta z} \\ \hat{\gamma}_{zr} & \hat{\gamma}_{z\theta} & \hat{\gamma}_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Il est calculé à partir du gradient de vitesse :

$$\bar{\bar{\gamma}} = \nabla \hat{U} + \nabla \hat{U}^T = \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial \hat{U}}{\partial r} & r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\hat{V}}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \theta} & \frac{\partial \hat{U}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{W}}{\partial r} \\ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\hat{V}}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \theta} & 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \theta} + \frac{\hat{U}}{r} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \theta} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{U}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{W}}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \theta} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial z} & 2 \frac{\partial \hat{W}}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Les conditions aux limites associées aux équations 1.1. et 1.2 sont :

$$\hat{U}(\hat{R}_1) = \hat{R}_1 \hat{\Omega}_1 e_\theta \quad \text{et} \quad \hat{U}(\hat{R}_2) = 0$$

En effet, le fluide est supposé adhérer aux parois des cylindres intérieur et extérieur.

Les équations 1.1 et 1.2 sont adimensionnées grâce aux échelles caractéristiques données dans le Tableau 4.

Tableau 4 - échelles de dimensionnement

Echelle caractéristique de longueur	$r = \frac{\hat{r}}{\hat{d}}$ avec $\hat{d} = \widehat{R}_2 - \widehat{R}_1$
Echelle caractéristique de vitesse	$u = \frac{\hat{u}}{\widehat{R}_1 \widehat{\Omega}_1}$
Echelle caractéristique temporelle (temps de diffusion visqueuse)	$t = \frac{\hat{t}}{\widehat{\rho} \frac{\hat{d}^2}{\widehat{\mu}_{ref}}}$
Echelle caractéristique pour la pression	$P = \frac{\widehat{P}}{\widehat{\mu}_{ref} \frac{\widehat{R}_1 \widehat{\Omega}_1}{\hat{d}}}$
Echelle caractéristique pour les contraintes	$\hat{\tau} = \frac{\widehat{\mu}_{ref} \widehat{R}_1 \widehat{\Omega}_1}{\hat{d}} \tau$
Echelle caractéristique de cisaillement	$\hat{\gamma} = \frac{\widehat{R}_1 \widehat{\Omega}_1}{\hat{d}} \dot{\gamma}$

On obtient alors les équations de conservation adimensionnelles :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + Re_1 (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (1.9)$$

où l'on a introduit le nombre de Reynolds :

$$Re_1 = \frac{\widehat{\rho} \widehat{R}_1 \widehat{\Omega}_1 \hat{d}}{\widehat{\mu}_{ref}}. \quad (1.10)$$

Les grandeurs sans chapeau (^) sont adimensionnelles.

Les conditions aux limites adimensionnelles s'écrivent :

$$\mathbf{U}(R_1) = R_1 \Omega_1 \mathbf{e}_\theta \quad \text{et} \quad \mathbf{U}(R_2) = \mathbf{0}$$

5.1.3 Comportement rhéologique du fluide

Le fluide considéré est un fluide rhéofluidifiant à seuil, suivant la loi de Herschel-Bulkley.

$$\text{Si } \widehat{\tau}_{II} \leq \hat{\tau}_y : \hat{\gamma}_{II} = 0 \quad (1.11)$$

$$\text{Si } \widehat{\tau}_{II} \geq \hat{\tau}_y : \bar{\bar{\tau}} = \hat{\mu} \times \bar{\bar{\gamma}} = \left(\widehat{m} \hat{\gamma}_{II}^{n-1} + \frac{\widehat{\tau}_y}{\hat{\gamma}_{II}} \right) \times \bar{\bar{\gamma}} \quad (1.12)$$

Avec $\widehat{\tau}_y$ la contrainte seuil. Le facteur $\widehat{m} \widehat{\gamma}_{II}^{n-1}$ est homogène à une viscosité. Ainsi $\widehat{m}$ est dimensionnel et son unité dépend de la valeur de n, l'indice d'écoulement.

Physiquement le paramètre n est toujours positif. Il dépend des caractéristiques du fluide :

$n < 1$: rhéofluidifiant

$n > 1$: rhéoépaississant

Dans cette étude Ainsi les fluides concernés par cette étude ont leur coefficient n qui est inférieur à l'unité.

Le second invariant du tenseur des contraintes $\widehat{\tau}_{II}$ donne l'intensité locale de la contrainte et est défini par

$$\widehat{\tau}_{II} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \widehat{\tau}_{ij}^2} = \sqrt{\frac{1}{2} (\widehat{\tau}_{rr}^2 + \widehat{\tau}_{r\theta}^2 + \widehat{\tau}_{rz}^2 + \widehat{\tau}_{\theta r}^2 + \widehat{\tau}_{\theta\theta}^2 + \widehat{\tau}_{\theta z}^2 + \widehat{\tau}_{zr}^2 + \widehat{\tau}_{z\theta}^2 + \widehat{\tau}_{zz}^2)}$$

De même, le second invariant du tenseur des taux de cisaillement $\widehat{\gamma}_{II}$ donne l'intensité locale du taux de cisaillement et est défini par

$$\widehat{\gamma}_{II} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \widehat{\gamma}_{ij}^2} = \sqrt{\frac{1}{2} (\widehat{\gamma}_{rr}^2 + \widehat{\gamma}_{r\theta}^2 + \widehat{\gamma}_{rz}^2 + \widehat{\gamma}_{\theta r}^2 + \widehat{\gamma}_{\theta\theta}^2 + \widehat{\gamma}_{\theta z}^2 + \widehat{\gamma}_{zr}^2 + \widehat{\gamma}_{z\theta}^2 + \widehat{\gamma}_{zz}^2)}$$

La loi de Herschel-Bulkley est adimensionnée avec les échelles données dans le tableau 4 pour obtenir

$$\text{Si } \tau_{II} \leq B' : \dot{\gamma}_{II} = 0 \quad (1.13)$$

$$\text{Si } \tau_{II} \geq B' : \bar{\tau} = \left(\dot{\gamma}_{II}^{n-1} + \frac{B'}{\dot{\gamma}_{II}} \right) \bar{\dot{\gamma}} \quad (1.14)$$

$$\text{où } B' = \frac{\widehat{\tau}_y \widehat{d}}{\widehat{R}_1 \widehat{\Omega}_1 \widehat{\mu}_{ref}}$$

Dans le cas d'un fluide de Herschel-Bulkley, la viscosité de référence est construite avec les paramètres du terme en loi de puissance, m et n

$$\widehat{\mu}_{ref} = \widehat{m} \left(\frac{\widehat{R}_1 \widehat{\Omega}_1}{\widehat{d}} \right)^{n-1} \quad (1.15)$$

Tableau 5 - Comparaison des lois de Herschel-Bulkley (HB) dimensionnelle et adimensionnelle

Loi HB dimensionnelle	Loi HB adimensionnelle
$\bar{\tau} = \left(\hat{m} \hat{\dot{\gamma}}_{II}^{n-1} + \frac{\hat{\tau}_y}{\hat{\dot{\gamma}}_{II}} \right) \times \bar{\dot{\gamma}}$	$\bar{\tau} = \left(\dot{\gamma}_{II}^{n-1} + \frac{B'}{\dot{\gamma}_{II}} \right) \bar{\dot{\gamma}}$

5.2 Ecoulement laminaire à faible vitesse de rotation

Nous étudions cette loi dans le cadre d'un écoulement de Taylor-Couette. Nous nous intéressons d'abord à l'écoulement laminaire à faible vitesse de rotation du cylindre intérieur. Cet écoulement est appelé état de base. Il est rhéométrique, c'est-à-dire que le vecteur vitesse ne présente qu'une seule composante fonction d'une seule variable de l'espace transverse. C'est ainsi que le vecteur de vitesse $\mathbf{U}^b$ s'écrit :

$$\mathbf{U}^b = V^b(r) \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ V^b(r) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

L'état de base satisfait aux équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. L'équation de conservation de la masse :

$$\nabla \cdot \mathbf{U}^b = 0 \quad (1.17)$$

est trivialement respectée compte-tenu de la forme rhéométrique de la vitesse de base :

$$\mathbf{U}^b = V^b(r) \mathbf{e}_\theta \quad (1.18)$$

La conservation de la quantité de mouvement pour un fluide incompressible s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{U}^b}{\partial t} + Re_1 (\mathbf{U}^b \cdot \nabla) \mathbf{U}^b = -\nabla P^b + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}^b \quad (1.19)$$

Les conditions aux limites s'expriment :

$$\mathbf{U}^b(R_1) = R_1 \Omega_1 \mathbf{e}_\theta \quad \text{et} \quad \mathbf{U}^b(R_2) = \mathbf{0}$$

Le tenseur des contraintes de l'état de base s'exprime en fonction du tenseur des taux de cisaillement par la loi de Newton

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^b = \mu \bar{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}^b \quad (1.20)$$

Le tenseur des taux de cisaillement s'exprime dans le cas de l'état de base :

$$\overline{\overline{\dot{\gamma}^b}} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma}_{r\theta}^b & 0 \\ \dot{\gamma}_{r\theta}^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

avec $\dot{\gamma}_{r\theta}^b = r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_b}{r} \right)$ (Cécile LEMAITRE, 2011).

Ainsi on peut exprimer le tenseur des contraintes par la loi de Newton :

$$\overline{\overline{\tau^b}} = \mu \overline{\overline{\dot{\gamma}^b}} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{r\theta}^b & 0 \\ \tau_{r\theta}^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

avec $\tau_{r\theta}^b = \mu r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_b}{r} \right)$

Compte-tenu de la forme rhéométrique de la vitesse de base, la conservation de la quantité de mouvement exprimée en coordonnées cylindrique se simplifie en :

$$\text{Suivant la direction (r)} : -Re_1 \left[\frac{v^{b^2}}{r} \right] = -\frac{dP^b}{dr}$$

$$\text{Suivant la direction (\theta)} : 0 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \tau_{r\theta}^b)$$

$$\text{Suivant la direction (z)} : 0 = 0$$

Intégrons l'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée suivant θ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \tau_{r\theta}^b) = 0 \quad (1.23)$$

$$\frac{d}{dr} (r^2 \tau_{r\theta}^b) = 0 \quad (1.24)$$

$$r^2 \tau_{r\theta}^b = C_1 \quad (1.25)$$

Pour déterminer la constante d'intégration C_1 il faut utiliser des conditions aux limites. Mais les conditions aux limites dont nous disposons portent sur la vitesse et seront exploitées ultérieurement. Néanmoins, l'intégration de la quantité de mouvement selon θ nous a fourni une information très importante. En effet, tous les produits du rayon multiplié par la contrainte qui s'exerce sur le fluide à ce rayon, sont égaux. A condition que le fluide soit cisailé, c'est-à-dire que la contrainte qui lui est imposée est supérieure à la contrainte seuil.

L'équation de Herschel-Bulkley s'écrit pour l'état de base :

$$\text{Si } \tau_{II} \leq B' : \dot{\gamma}_{II} = 0 \quad (1.26)$$

$$\text{Si } \tau_{II} \geq B' : \bar{\tau} = \left(\dot{\gamma}_{II}^{n-1} + \frac{B'}{\dot{\gamma}_{II}} \right) \bar{\dot{\gamma}} \quad (1.27)$$

Le second invariant du tenseur des taux de cisaillements pour l'état de base, $\dot{\gamma}_{II}^b$ se réduit à :

$$\dot{\gamma}_{II}^b = \sqrt{\frac{1}{2} (\dot{\gamma}_{r\theta}^{b\ 2} + \dot{\gamma}_{\theta r}^{b\ 2})} = |\dot{\gamma}_{r\theta}^b| \quad (1.28)$$

$$\text{car } \dot{\gamma}_{rr}^{b\ 2} = \dot{\gamma}_{rz}^{b\ 2} = \dot{\gamma}_{\theta\theta}^{b\ 2} = \dot{\gamma}_{\theta z}^{b\ 2} = \dot{\gamma}_{zr}^{b\ 2} = \dot{\gamma}_{z\theta}^{b\ 2} = \dot{\gamma}_{zz}^{b\ 2} = 0$$

De même, le second invariant du tenseur des contraintes pour l'état de base, τ_{II}^b s'écrit :

$$\tau_{II}^b = \sqrt{\frac{1}{2} (\tau_{r\theta}^{b\ 2} + \tau_{\theta r}^{b\ 2})} = |\tau_{r\theta}^b| \quad (1.29)$$

Ainsi, on peut écrire pour $\tau_{II}^b \geq B'$

$$\Rightarrow \tau_{r\theta}^b = \left(|\dot{\gamma}_{r\theta}^b|^{n-1} + \frac{B'}{|\dot{\gamma}_{r\theta}^b|} \right) \dot{\gamma}_{r\theta}^b \quad (1.30)$$

$$\boxed{\Rightarrow \tau_{r\theta}^b = (|\dot{\gamma}_{r\theta}^b|^n + B') \times \text{signe}(\dot{\gamma}_{r\theta}^b)} \quad (1.31)$$

$$\text{or, } r^2 \tau_{r\theta}^b = C_1$$

$$\text{donc, } \frac{C_1}{r^2} = (|\dot{\gamma}_{r\theta}^b|^n + B') \times \text{signe}(\dot{\gamma}_{r\theta}^b)$$

Nous allons maintenant distinguer 2 cas différents :

- Le cas où tout le fluide est cisailé, c'est-à-dire que tout le fluide est en écoulement.
- Le cas où seule une partie du fluide est cisailé. Dans ce cas, une seule une partie du fluide s'écoule, celle qui est en contact avec le cylindre intérieur. Dans la partie la plus extérieure du fluide, au contact du cylindre extérieur, la contrainte seuil n'est pas atteinte et le fluide se comporte comme un solide.

5.2.1 Détermination de la limite entre les 2 cas

Cas totalement cisailé

Tout le fluide s'écoule car en tout point de l'entrefer, la contrainte est supérieure au seuil,

$$\forall r, |\tau_{r\theta}^b(r)| \geq B'$$

De plus, on a :

$$R_1^2 \tau_1 = R_2^2 \tau_2 = C_1 \quad (1.32)$$

avec $\tau_1 = \tau_{r\theta}^b(R_1)$ et $\tau_2 = \tau_{r\theta}^b(R_2)$ les contraintes au niveau des cylindres intérieur et extérieur respectivement.

Le taux de cisaillement $\dot{\gamma}_{r\theta}^b$ est toujours négatif, en effet :

$$\dot{\gamma}_{r\theta} = \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r}, \text{ avec } \frac{dV}{dr} < 0 \text{ donc } \dot{\gamma}_{r\theta} < 0$$

Si bien que le taux de contraintes $\tau_{r\theta}$ est lui aussi négatif, puisque la viscosité est toujours positive. Ainsi on écrit :

$$R_1^2 |\tau_1| = R_2^2 |\tau_2| \geq R_2^2 B' \quad (1.33)$$

$\frac{ \tau_1 }{B'} \geq \left(\frac{1}{\eta}\right)^2, \text{ Cas n°1, tout l'espace annulaire est cisailé}$
--

avec $\eta = \frac{R_1}{R_2}$

Cas partiellement cisailé

Dans ce cas, le fluide au contact du cylindre intérieur présente une contrainte supérieure au seuil et s'écoule, alors que le fluide au contact du cylindre extérieur présente une contrainte inférieure au seuil et ne s'écoule donc pas.

Il existe R_0 tel que $\left| \tau_{r\theta}^b \right|_{R_0} = B'$

$$R_1^2 |\tau_1| = R_0^2 \left| \tau_{r\theta}^b \right|_{R_0} = R_0^2 B' \quad (1.34)$$

$$\Rightarrow \frac{|\tau_1|}{B'} = \frac{R_0^2}{R_1^2} \quad (1.35)$$

Or, $R_1 \leq R_0 \leq R_2$ donc $R_1^2 \leq R_0^2 \leq R_2^2 \Rightarrow 1 \leq \frac{R_0^2}{R_1^2} \leq \left(\frac{1}{\eta}\right)^2$

Ainsi : $1 \leq \frac{ \tau_1 }{B'} \leq \left(\frac{1}{\eta}\right)^2, \text{ cas n°2, l'espace annulaire est partiellement cisailé}$
--

5.2.2 Etat de base dans le cas totalement cisailé

Avec $r \in [R_1 ; R_2]$

$$r^2 \tau_{r\theta}^b = R_1^2 \tau_1 \quad (1.36)$$

$$\tau_{r\theta}^b = \tau_1 \left(\frac{R_1}{r} \right)^2 \quad (1.37)$$

$$\Leftrightarrow \mu \dot{\gamma}_{r\theta}^b = \tau_1 \left(\frac{R_1}{r} \right)^2 \quad (1.38)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon \left[\left| \dot{\gamma}_{r\theta}^b \right|^n + B' \right] = \tau_1 \left(\frac{R_1}{r} \right)^2 \quad (1.39)$$

Avec $\varepsilon = \text{signe}(\dot{\gamma}_{r\theta}^b)$. Lorsque seul le cylindre intérieur tourne, on $\varepsilon = -1$. En effet :

$$\dot{\gamma}_{r\theta}^b = r \frac{d}{dr} \left(\frac{V^b}{r} \right) = \frac{dV^b}{dr} - \frac{V^b}{r} \quad (1.40)$$

Le premier terme est négatif car la vitesse décroît de $R_1 \Omega_1$ au contact du cylindre intérieur à 0 au contact du cylindre extérieur. Le second terme étant également négatif ($V^b > 0$), $\dot{\gamma}_{r\theta}^b$ est donc négatif.

On remplace l'expression de $\dot{\gamma}_{r\theta}^b$ dans l'équation (1.40) :

$$\varepsilon \left[\left| r \frac{d}{dr} \left(\frac{V^b}{r} \right) \right|^n + B' \right] = \tau_1 \left(\frac{R_1}{r} \right)^2 \quad (1.41)$$

$$\Leftrightarrow \left| r \frac{d}{dr} \left(\frac{V^b}{r} \right) \right|^n = \frac{\tau_1}{\varepsilon} \left(\frac{R_1}{r} \right)^2 - B' \quad (1.42)$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{d}{dr} \left(\frac{V^b}{r} \right) \right|^n = \varepsilon \tau_1 \frac{R_1^2}{r^{2+n}} - \frac{B'}{r^n} \text{ avec } \varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \quad (1.43)$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{d}{dr} \left(\frac{V^b}{r} \right) \right| = \left(\varepsilon \tau_1 \frac{R_1^2}{r^{2+n}} - \frac{B'}{r^n} \right)^{1/n} \quad (1.44)$$

La grandeur $\frac{d}{dr} \left(\frac{V^b}{r} \right)$ est du même signe ε que $\dot{\gamma}_{r\theta}^b = r \frac{d}{dr} \left(\frac{V^b}{r} \right)$ car $r > 0$, de sorte que :

$$\left| \frac{d}{dr} \left(\frac{V^b}{r} \right) \right| = \varepsilon \frac{d}{dr} \left(\frac{V^b}{r} \right) \quad (1.45)$$

$$\Leftrightarrow \int_r^{R_2} \varepsilon \frac{d}{dr} \left(\frac{V^b}{r} \right) dr = \int_r^{R_2} \left(\varepsilon \tau_1 \frac{R_1^2}{r^{2+n}} - \frac{B'}{r^n} \right)^{1/n} dr \quad (1.46)$$

On intègre le membre de gauche :

$$\varepsilon \left[\frac{0}{R_2} - \frac{V^b(r)}{r} \right] = \int_r^{R_2} \left(\varepsilon \tau_1 \frac{R_1^2}{r^{2+n}} - \frac{B'}{r^n} \right)^{1/n} dr \quad (1.47)$$

$$V^b(r) = -\varepsilon r \int_r^{R_2} \left(\varepsilon \tau_1 \frac{R_1^2}{r^{2+n}} - \frac{B'}{r^n} \right)^{1/n} dr \quad (1.48)$$

A ce stade, la contrainte à la paroi intérieure τ_1 est inconnue. Pour la déterminer, on écrit l'équation ci-dessus pour $r = R_1$ et on utilise la condition aux limites $V_b(R_1) = 1$, ce qui conduit à :

$$1 = -\varepsilon r \int_r^{R_2} \left(\varepsilon \tau_1 \frac{R_1^2}{r^{2+n}} - \frac{B'}{r^n} \right)^{1/n} dr \quad (1.49)$$

La contrainte τ_1 est solution de cette équation, qui est résolue numériquement, comme décrit dans l'annexe 10.1.

L'équation (1.48) est alors résolue, elle aussi par calcul numérique, pour obtenir le profil de vitesse (détail dans l'annexe 10.1).

5.2.3 Etat de base dans le cas partiellement cisailé

Avec $r \in [R_1 ; R_0]$

$$r^2 \tau_{r\theta} = R_1^2 \tau_1 \quad (1.50)$$

Un raisonnement similaire à celui du paragraphe précédent (5.2.2.) conduit à :

$$V^b(r) = -\varepsilon r \int_r^{R_0} \left(\varepsilon \tau_1 \frac{R_1^2}{r^{2+n}} - \frac{B'}{r^n} \right)^{1/n} dr \quad (1.51)$$

la contrainte τ_1 étant déterminée préalablement par résolution numérique de l'équation :

$$1 = -\varepsilon r \int_r^{R_0} \left(\varepsilon \tau_1 \frac{R_1^2}{r^{2+n}} - \frac{B'}{r^n} \right)^{1/n} dr \quad (1.52)$$

5.3 Méthode suivie pour l'intégration numérique

Dans ce chapitre, sont exposées les bases mathématiques sur lesquelles repose le programme informatique élaboré afin de simuler des écoulements de fluides rhéofluidifiants à seuil de contrainte. L'ensemble du développement se trouve en annexe 10.2. Le lecteur pourra s'y reporter s'il souhaite comprendre le modèle sur la base duquel sont effectuées les simulations

5.4 Perturbation de l'écoulement laminaire de base

Pour étudier la stabilité linéaire de l'écoulement au sein du procédé, on superpose à l'écoulement de base une perturbation infinitésimale :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^b + \epsilon \mathbf{u}' \quad (1.53)$$

$$P = P^b + \epsilon p' \quad (1.54)$$

avec $\epsilon \ll 1$

Les grandeurs $\mathbf{U}$ et P satisfont aussi aux équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + Re_1(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} \quad (1.56)$$

Après linéarisation des équations et soustraction des équations satisfaites par l'état de base (1.17 et 1.19), on obtient les équations qui gouvernent la perturbation :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (1.57)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + Re_1[\mathbf{U}^b \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{U}^b] = -\nabla p' + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}' \quad (1.58)$$

avec la perturbation du tenseur des contraintes :

$$\bar{\bar{\tau}}' = \frac{1}{\epsilon} [\bar{\bar{\tau}}(\mathbf{U}^b + \epsilon \mathbf{u}') - \bar{\bar{\tau}}(\mathbf{U}^b)] = \dot{\bar{\gamma}}^b \mu' + \mu^b \dot{\bar{\gamma}}' \quad (1.59)$$

avec :

$$\mu^b = \mu(\mathbf{U}^b) \quad \text{et} \quad \mu' = 2 \dot{\gamma}'_{r\theta} \left. \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{r\theta}} \right|_{\mathbf{U}^b} \quad (1.60)$$

$$\dot{\bar{\gamma}}^b = \dot{\bar{\gamma}}(\mathbf{U}^b) \quad \text{et} \quad \dot{\bar{\gamma}}' = \dot{\bar{\gamma}}(\mathbf{u}') \quad (1.61)$$

Les conditions aux limites se réduisent à :

$$\forall \theta, z \quad u'(R_1, \theta, z) = u'(R_2, \theta, z) = 0 \quad (1.62)$$

Le système linéaire est homogène dans les directions axiale et azimutale. La solution peut donc être recherchée sous la forme d'une superposition de modes normaux :

$$\{u', p'\} = \{\tilde{u}(r), \tilde{p}(r)\} \exp[\sigma t + i(m\theta + kz)] + \text{c.c.} \quad (1.63)$$

avec $\tilde{u}(r) = u(r) e_r + v(r) e_\theta + w(r) e_z$, $k \in \mathbb{R}$ le nombre d'onde axial et $m \in \mathbb{N}$ le nombre d'onde azimutal.

Nous avons supposé une évolution exponentielle de la perturbation au cours du temps. La grandeur $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ est le taux de croissance complexe. Sa partie réelle est le taux d'amplification temporel de la perturbation. Si $\sigma_r < 0$, la perturbation tend vers zéro au cours du temps et l'écoulement de base est stable. Si $\sigma_r > 0$, la perturbation tend vers l'infini et l'écoulement est instable. Le cas particulier $\sigma_r = 0$ est appelé cas de stabilité marginale. La partie imaginaire du taux de croissance σ_i est la fréquence d'oscillation de la perturbation et le rapport σ_i/k sa vitesse de phase.

Les conditions de stabilité marginale, c'est-à-dire la plus petite valeur du nombre de Reynolds Re_{1c} conduisant à $\sigma_r = 0$, et les nombres d'onde axial et azimutal correspondant k_c et m_c , ont alors été calculées pour des valeurs de η , B' et n données.

Pour cela une méthode spectrale de collocation basée sur les polynômes de Chebyshev évalués en $N + 1$ points de Gauss-Lobatto a été mise en œuvre avec le logiciel Matlab[®]. Elle est détaillée dans l'annexe 10.3.

6 Validation du programme

6.1 Validation numérique du programme

Nous avons dans un premier temps cherché à valider le programme pour des cas simplifiés dont les résultats sont connus.

Pour ce faire, nous avons utilisés les propriétés de la loi de Herschel-Bulkley. En effet, pour des fluides sans seuil de contrainte ($B'=0$), la loi de Herschel-Bulkley est similaire à la loi de Puissance :

$$\mu = K \dot{\gamma}^{n-1}$$

Pour des fluides à seuil de contrainte mais non rhéofluidifiant ($n=1$), la loi de Herschel-Bulkley est similaire à celle de Bingham :

$$\mu = 1 + \frac{B}{\dot{\gamma}}$$

Du fait de l'existence de programmes validés expérimentalement permettant de simuler des écoulements de Taylor-Couette avec les lois de puissance et de Bingham, les résultats fournis par notre programme et ceux obtenus avec les programmes existants ont pu être comparés.

A cette fin, deux paramètres ont été comparés entre les programmes existants et le nôtre : le nombre de Reynolds critique au niveau de la paroi du cylindre intérieur et le nombre d'onde axial k_c . Le nombre d'onde axial est indicatif de la taille des tourbillons ; en effet, leur hauteur est inversement proportionnelle à k_c .

6.1.1 Comparaison du programme Herschel-Bulkley avec le programme de la loi de puissance

Afin de pouvoir comparer notre programme avec celui utilisant la loi de puissance, nous nous sommes placés dans des situations où ces deux programmes peuvent être employés. Nous, nous sommes placés dans le cas de fluide ne requérant pas de contrainte seuil pour s'écouler. Nous avons donc effectué des simulations où B' (la contrainte seuil) est nul. Ces simulations ont été réalisées pour une gamme de n , l'indice d'écoulement, allant de 0,2 à 0,9. Les mêmes points ont été simulés avec le programme de la loi de Puissance. Ci-dessous figurent sur les mêmes graphes, les Reynolds critiques (pour un rayon égal à celui du cylindre interne) calculés par les deux programmes dans deux configurations :

- $\eta = 0,4$, le rayon du cylindre intérieur égal à 40 % de celui du cylindre extérieur

- $\eta = 0,9$, le rayon du cylindre intérieur égal à 90 % de celui du cylindre extérieur

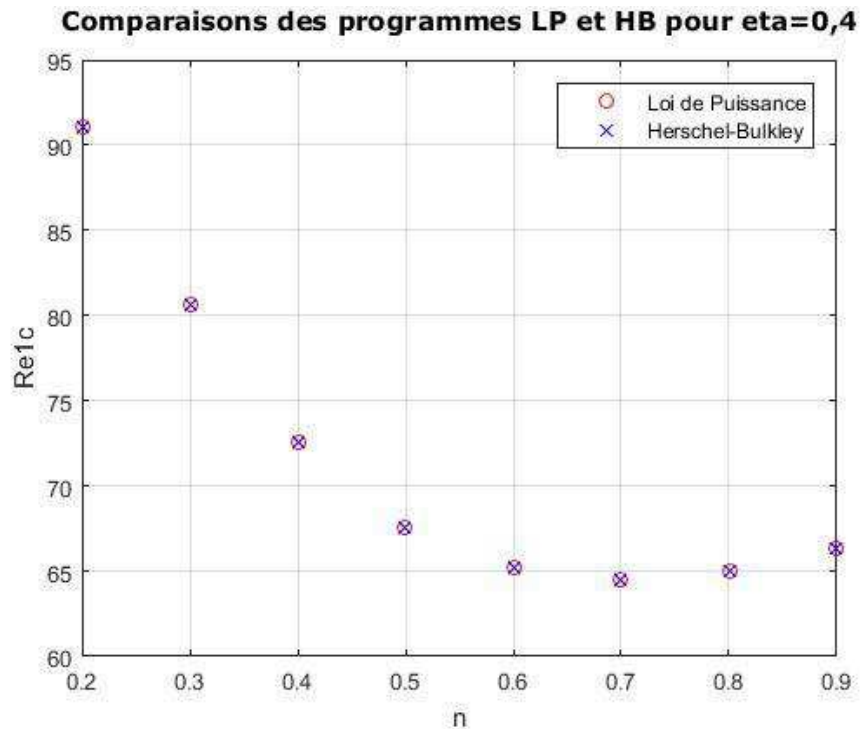


Figure 23 - Comparaison des nombres de Reynolds critique Re_{1c} obtenus pour la loi de puissance (programmes antérieurs) et pour la loi de Herschel-Bulkley, avec $B' = 0$ (programmes développés lors de cette thèse) pour $\eta=0,4$

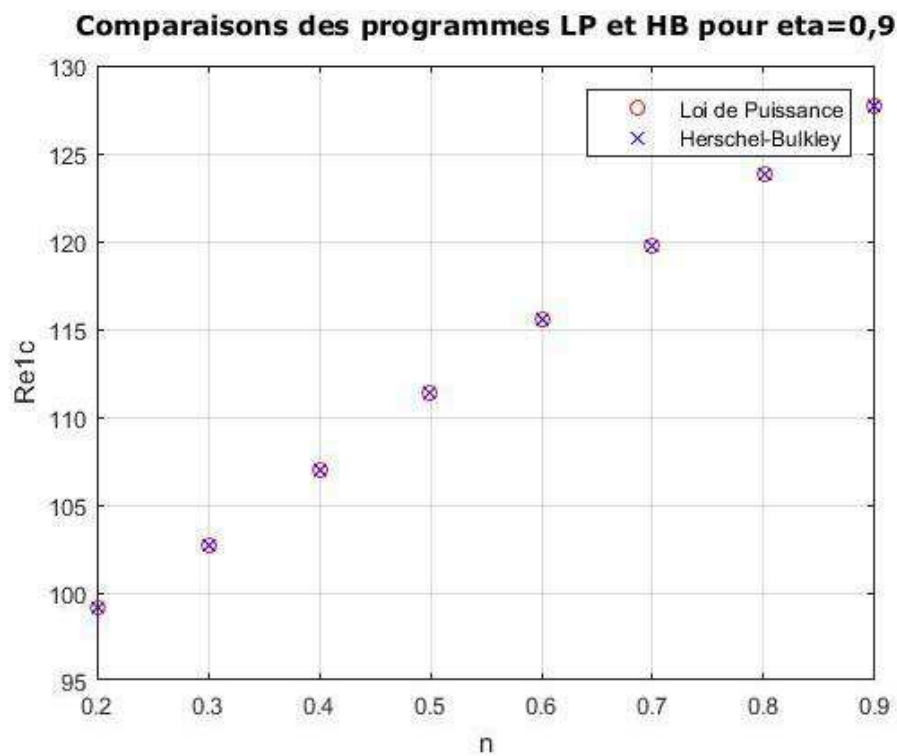


Figure 24 - Comparaison des nombres de Reynolds critique Re_{1c} obtenus pour la loi de puissance (programmes antérieurs) et pour la loi de Herschel-Bulkley, avec $B' = 0$ (programmes développés lors de cette thèse) pour $\eta=0,9$

On observe bien que l'ensemble des points calculés par les deux programmes se superposent parfaitement. Ceci témoigne de la fiabilité du programme pour prédire la transition à la turbulence de fluides rhéofluidifiants en écoulement de Taylor-Couette.

Ci-dessous figurent sur les mêmes graphes, les nombres d'onde axiaux k_c calculés par les deux programmes dans les deux configurations. On observe encore une superposition parfaite des points calculés par les deux programmes.

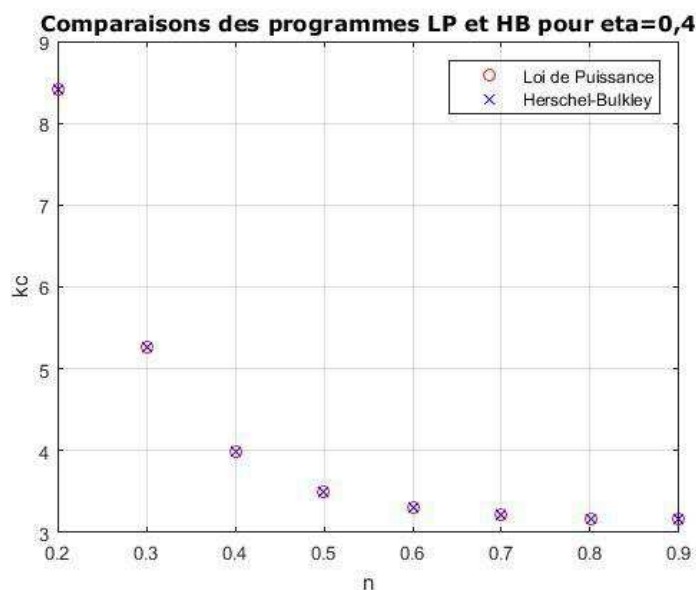


Figure 25 - Comparaison des nombres d'onde axiaux critique k_c obtenus pour la loi de puissance (programmes antérieurs) et pour la loi de Herschel-Bulkley, avec $B' = 0$ (programmes développés lors de cette thèse) pour $\eta=0,4$

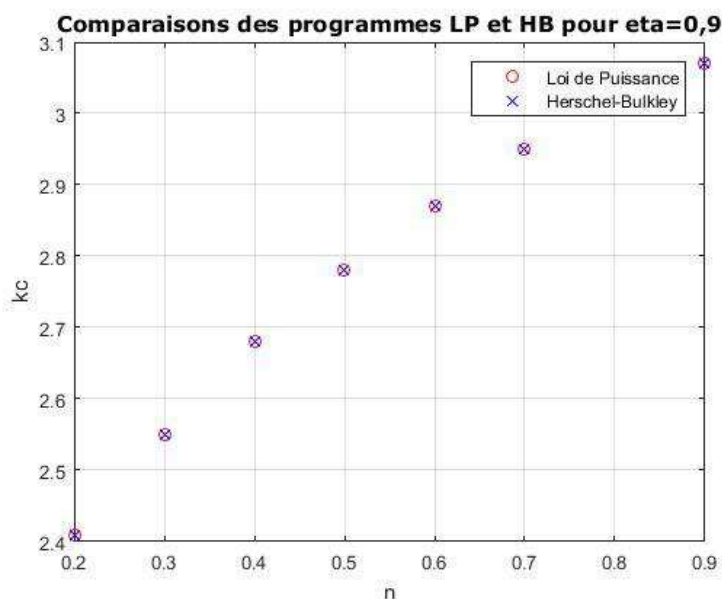


Figure 26 - Comparaison des nombres d'onde axiaux critique k_c obtenus pour la loi de puissance (programmes antérieurs) et pour la loi de Herschel-Bulkley, avec $B' = 0$ (programmes développés lors de cette thèse) pour $\eta=0,9$

6.1.2 Comparaison du programme Herschel-Bulkley avec le programme de Bingham

A nouveau nous nous sommes placés dans des situations pour lesquelles les deux programmes pourraient être utilisés. La loi de Bingham est faite pour étudier des fluides à seuil de contrainte mais qui s'écoulent comme des fluides newtoniens une fois le seuil dépassé (la viscosité est invariable avec le taux de cisaillement). Nous avons donc effectué les simulations, en prenant un indice d'écoulement égal à l'unité ($n=1$).

Ces simulations ont été réalisées pour une gamme de nombre de Bingham ou B' (son équivalent dans la loi Herschel-Bulkley) allant de 0 à 200.

Ci-dessous figurent sur les mêmes graphes, les Reynolds critiques (pour un rayon égal à celui du cylindre interne) calculés par les deux programmes dans les deux géométries étudiées ($\eta=0,4$ et $\eta=0,9$). Nous observons une superposition des points calculés par les deux programmes. Cette superposition témoigne de la fiabilité du programme pour prédire la transition à la turbulence des fluides à seuil de contrainte.

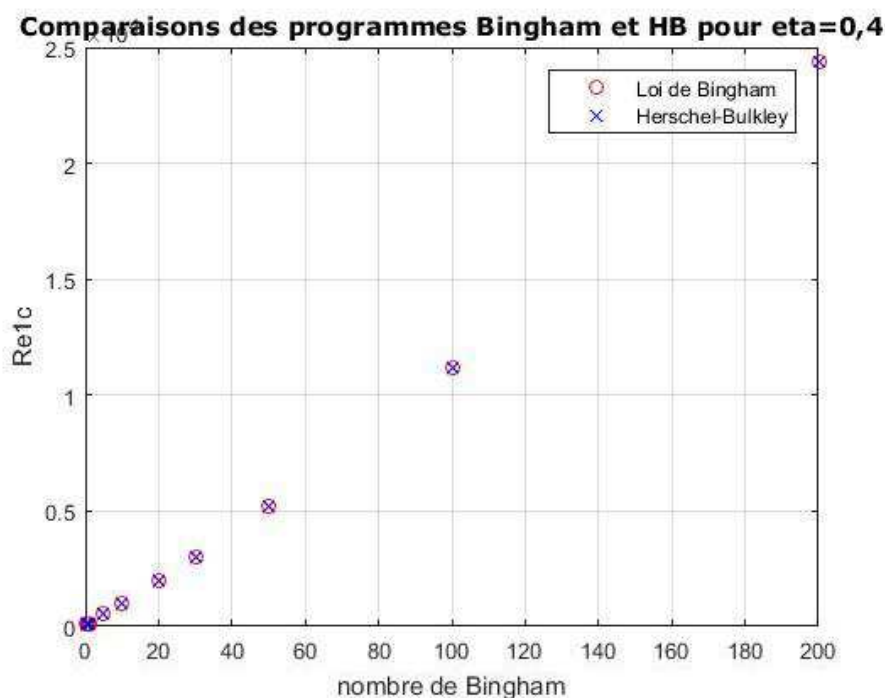


Figure 27 - Comparaison des nombres de Reynolds critique Re_{1c} obtenus pour la loi de Bingham (programmes antérieurs) et pour la loi de Herschel-Bulkley, avec $n = 1$ (programmes développés lors de cette thèse) pour $\eta=0,4$

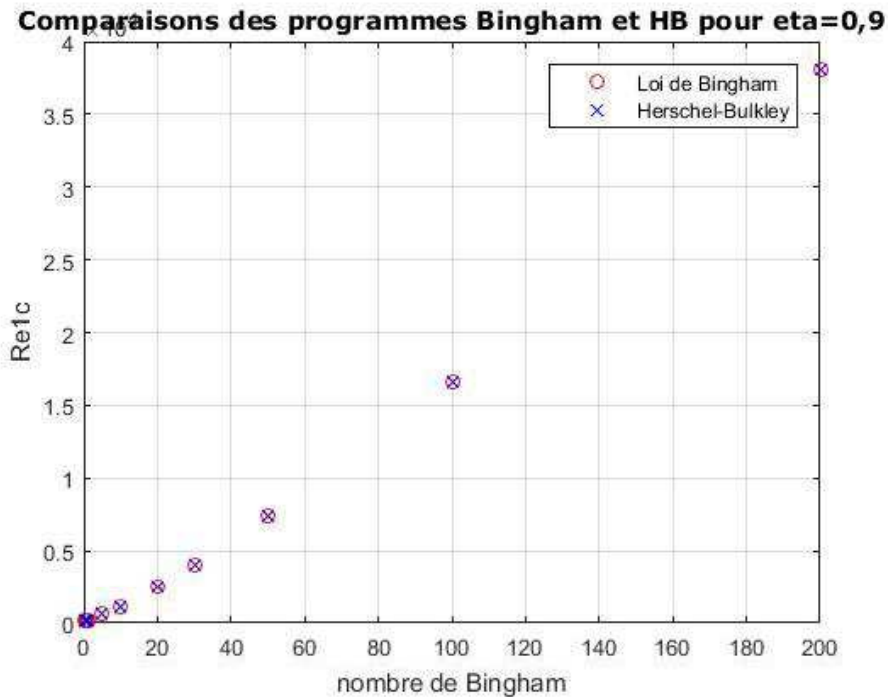


Figure 28 - Comparaison des nombres de Reynolds critique Re_{1c} obtenus pour la loi de Bingham (programmes antérieurs) et pour la loi de Herschel-Bulkley, avec $n = 1$ (programmes développés lors de cette thèse) pour $\eta=0,9$

Ci-dessous figurent sur les mêmes graphes, les nombres d'onde critiques calculés par les deux programmes dans les deux géométries étudiées. A nouveau, nous observons une superposition des points calculés par les deux programmes. Cette superposition témoigne de la fiabilité du programme pour représenter la taille et la forme des tourbillons.

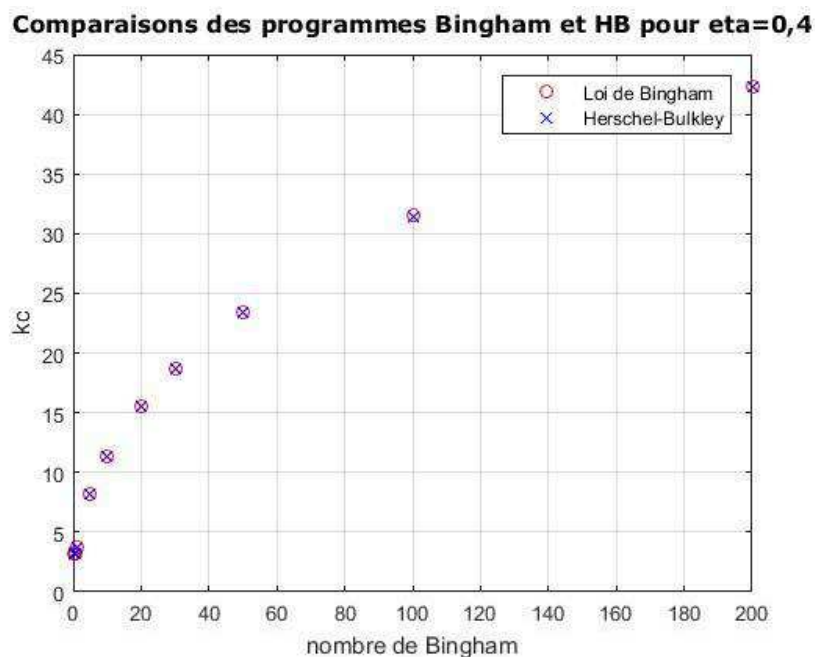


Figure 29 - Comparaison des nombres d'onde axiaux critique k_c obtenus pour la loi de Bingham (programmes antérieurs) et pour la loi de Herschel-Bulkley, avec $n = 1$ (programmes développés lors de cette thèse) pour $\eta=0,4$

Comparaisons des programmes Bingham et HB pour $\eta=0,9$

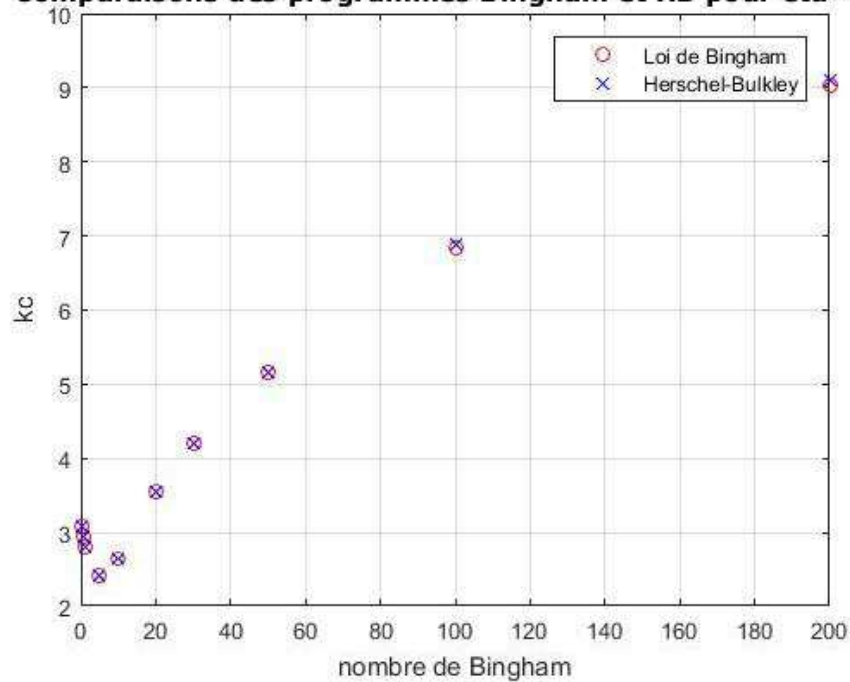


Figure 30 - Comparaison des nombres d'onde axiaux critique k_c obtenus pour la loi de Bingham (programmes antérieurs) et pour la loi de Herschel-Bulkley, avec $n = 1$ (programmes développés lors de cette thèse) pour $\eta=0,9$

Après avoir validé nos programmes en comparant les résultats obtenus des fluides purement rhéofluidifiants (loi rhéologique de puissance) et des fluides à seuil (loi de Bingham) aux résultats issus de programmes antérieurs, nous nous intéressons dans la section suivante au cas de fluides de Herschel-Bulkley.

7 Exploitation du programme

Une fois ces validations faites, nous avons entamé l'exploitation du programme afin de déterminer les caractéristiques des fluides rhéofluidifiants à seuil de contrainte suivant une loi rhéologique de Herschel-Bulkley. Ainsi, nous avons effectué des simulations pour des valeurs d'indice d'écoulement comprises entre 0,2 et 0,9 et des valeurs de seuil de contrainte entre 0 et 200.

Très rapidement nous avons rencontré une difficulté. En effet, notre programme fonctionnant avec la loi de Herschel-Bulkley ne converge pas lorsque l'entrefer n'est pas totalement cisailé.

Mathématiquement cela s'explique de la façon suivante :

Comme il l'est expliqué dans le chapitre 4, la détermination de τ_1 (la contrainte au niveau de la paroi du cylindre interne) passe par l'intégration suivante :

$$\int_{R_1}^{R_2} \left(\varepsilon \tau_1 \frac{R_1^2}{r^{2+n}} - \frac{B'}{r^n} \right)^{1/n} dr$$

Cette intégration est effectuée numériquement par Matlab. Or, il se trouve que lorsque le terme $\frac{B'}{r^n}$ est supérieur à $\varepsilon \tau_1 \frac{R_1^2}{r^{2+n}}$, la détermination passe par l'intégration d'une racine nième d'un terme négatif. Ce qui est une forme indéterminée en mathématiques.

Lors de la comparaison de notre programme avec celui de la loi de puissance, ce problème n'est pas survenu, ceci s'explique par le fait que dans ce cas $B'=0$, si bien que la racine nième à réaliser est positive.

Ce problème n'est pas non plus survenu lorsque la comparaison avec le programme de Bingham a été effectuée. En effet, il s'agit d'un autre cas limite, où $n=1$ ce qui revient à annuler la racine.

Mais pour les cas où n est différent de 1 et B' non nul, les seuls cas que nous avons pu traiter sont ceux où $\frac{B'}{r^n}$ est inférieur à $\varepsilon \tau_1 \frac{R_1^2}{r^{2+n}}$ qui correspondent à des entrefers partiellement cisailés.

Ainsi pour $\eta = 0,4$ seulement trois points ont pu être calculés par le programme sur la gamme choisie. Quant à $\eta = 0,9$, cinq points ont pu être calculés.

7.1 Simulations pour $\eta=0,4$

Par souci de lisibilité, les nombres de Reynolds critiques et les nombres d'onde axiaux critique sont présentés sur deux graphes pour les différents indices d'écoulement des fluides étudiés.

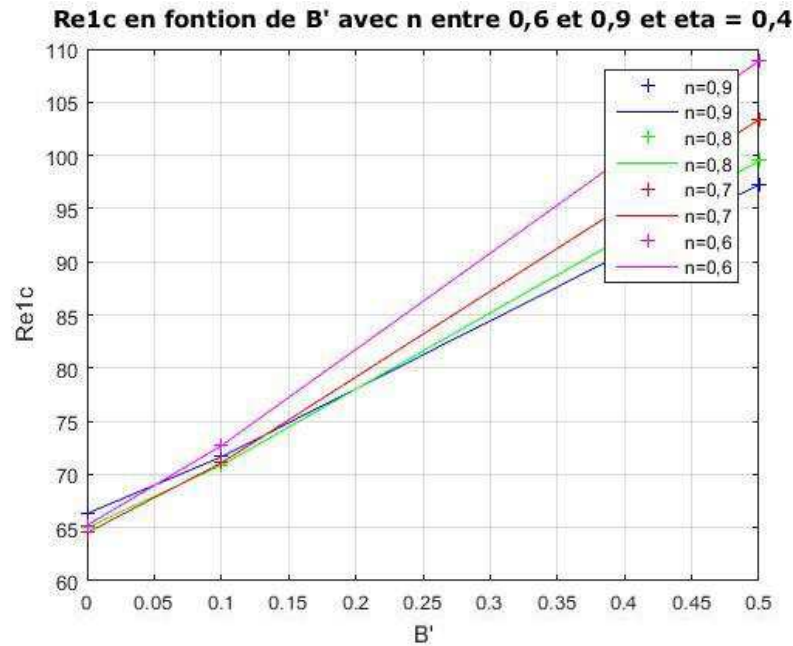


Figure 31 - Evolution du nombre de Reynolds critique Re_{1c} pour un fluide de Herschel-Bulkley en fonction du seuil B' pour des indices d'écoulement entre $n = 0,6$ et $n = 0,9$, pour un rapport de rayon $\eta = 0,4$.

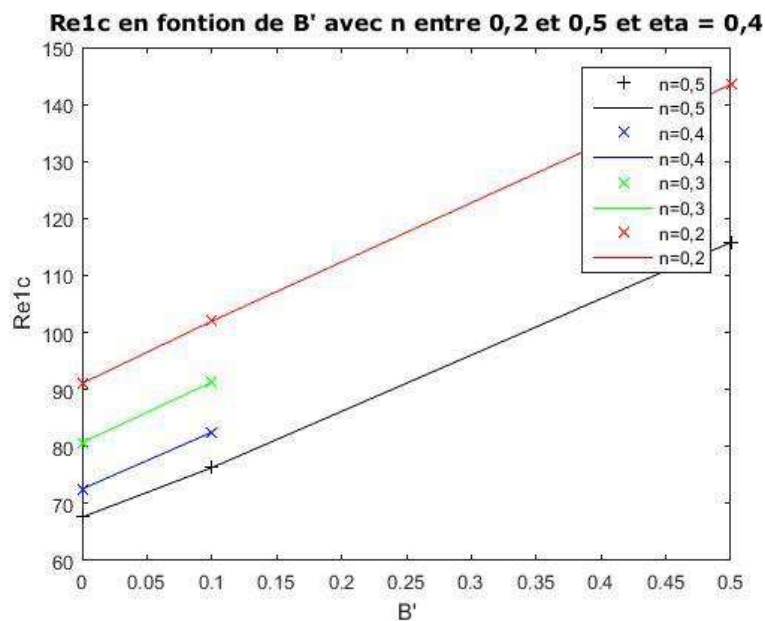


Figure 32 - Evolution du nombre de Reynolds critique Re_{1c} pour un fluide de Herschel-Bulkley en fonction du seuil B' pour des indices d'écoulement entre $n = 0,2$ et $n = 0,5$, pour un rapport de rayon $\eta = 0,4$.

Comme nous pouvons le voir sur la figure 9, nous n'avons pas pu déterminer de nombres Reynolds critiques pour les cas où $B' = 0.5$ et $n = 0.3$ et $n = 0.4$. En effet, le programme ne convergait pas pour ces deux points.

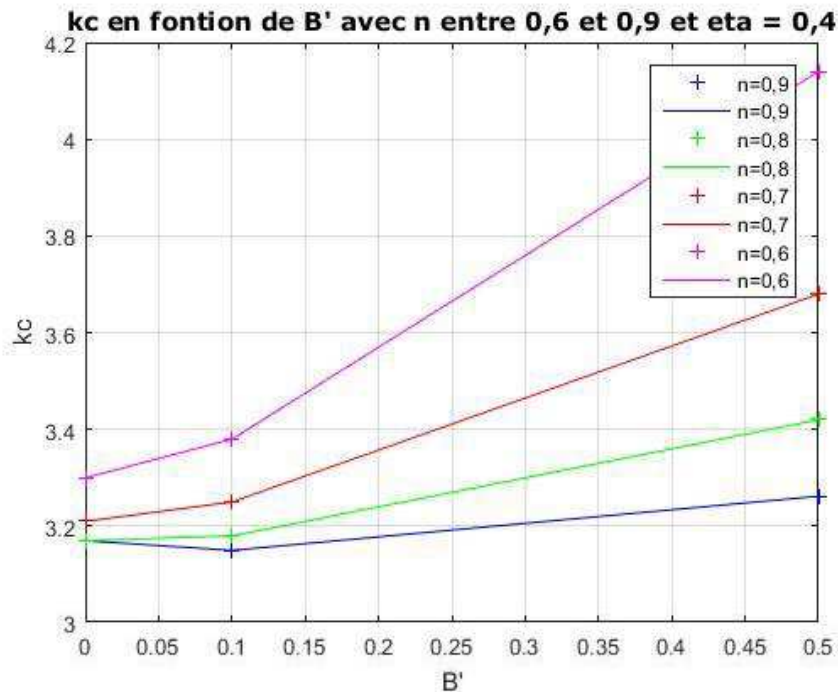


Figure 33 - Evolution du nombre d'onde axial critique k_c pour un fluide de Herschel-Bulkley en fonction du seuil B' pour des indices d'écoulement entre $n=0,6$ et $n=0,9$, pour un rapport de rayon $\eta = 0,4$.

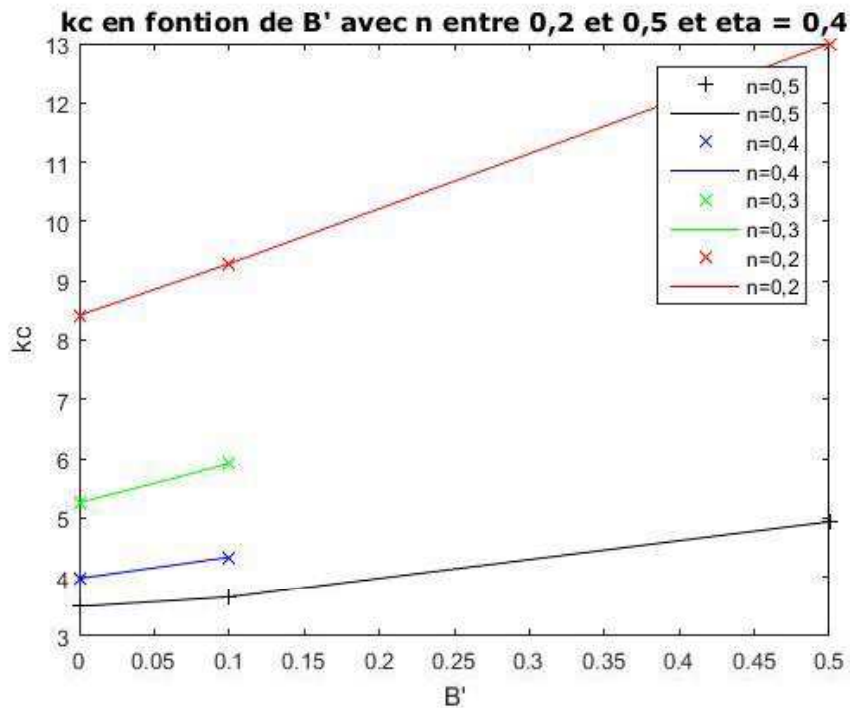


Figure 34 - Evolution du nombre d'onde axial critique k_c pour un fluide de Herschel-Bulkley en fonction du seuil B' pour des indices d'écoulement entre $n=0,2$ et $n=0,5$, pour un rapport de rayon $\eta = 0,4$.

7.2 Commentaires des simulations pour $\eta = 0,4$

Il est difficile de commenter les figures 29 et 31, du fait du nombre faible de points exploitables. En revanche, sur la figure 8 on peut remarquer l'effet stabilisant du seuil sur l'écoulement. En effet, Re_{1c} est croissant avec B' , ce qui signifie qu'il faut imposer des vitesses d'autant plus élevées que le nombre de Bingham est élevé pour produire l'instabilité. Le nombre d'onde k_c augmente globalement avec B' , c'est-à-dire que les tourbillons diminuent en taille sous l'effet du seuil. Pour les cas partiellement cisailés, ceci peut-être expliqué par une réduction de la largeur effective de l'entrefer puisque la zone externe du fluide se comporte comme un solide.

L'indice d'écoulement quant à lui n'a pas toujours le même effet. Lorsque n diminue, donc que le caractère rhéofluidifiant augmente, il y a déstabilisation pour des valeurs de seuil faibles (B' inférieure à 0,1). A contrario, il y a stabilisation de l'écoulement pour des valeurs de B' plus importantes. Le nombre d'onde augmente lui aussi lorsque n diminue : le caractère rhéofluidifiant produit lui aussi une réduction des tourbillons.

7.3 Simulations pour $\eta=0,9$

A nouveau, par souci de lisibilité, j'ai choisi de représenter sur deux graphes différents les résultats des simulations pour les différents indices d'écoulement des fluides étudiés.

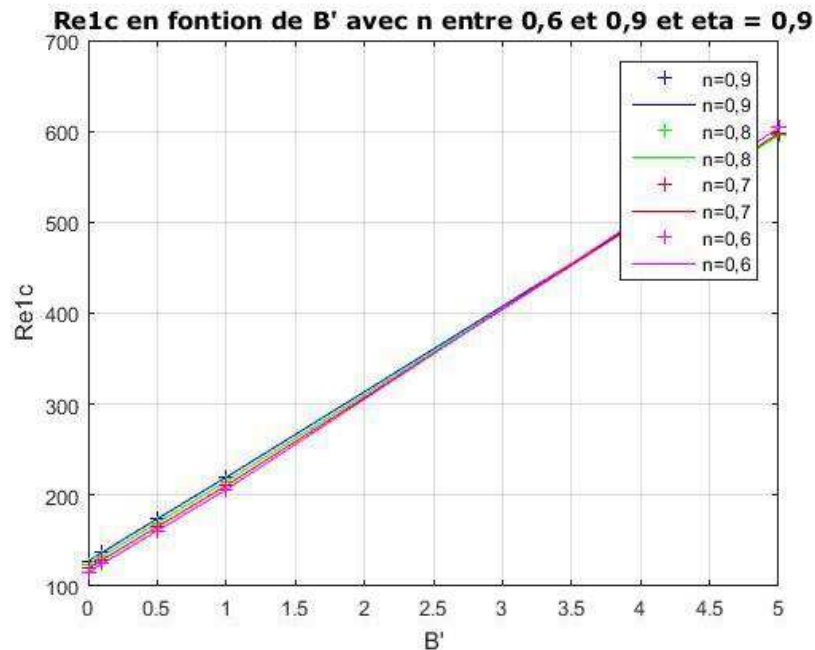


Figure 35 - Evolution du nombre de Reynolds critique Re_{1c} pour un fluide de Herschel-Bulkley en fonction du seuil B' pour des indices d'écoulement entre $n=0,6$ et $n=0,9$, pour un rapport de rayon $\eta = 0,9$.

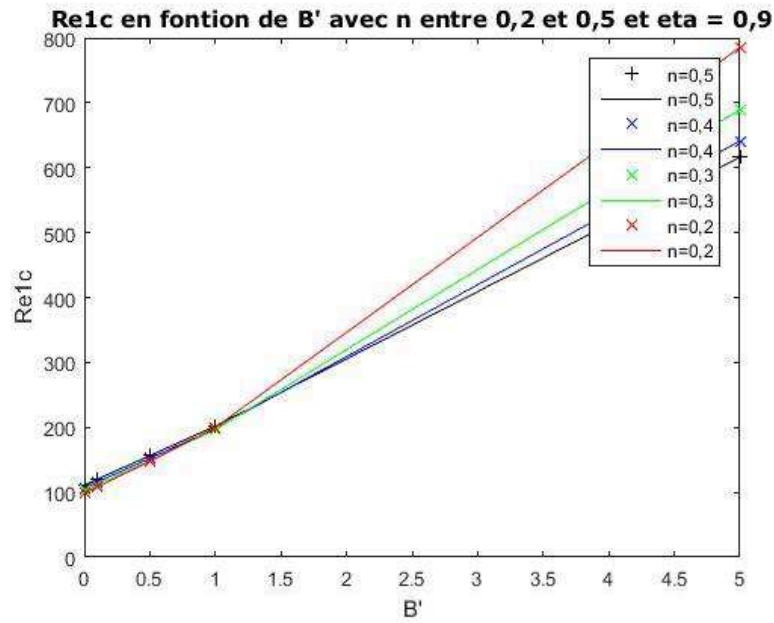


Figure 36 - Evolution du nombre de Reynolds critique Re_{1c} pour un fluide de Herschel-Bulkley en fonction du seuil B' pour des indices d'écoulement entre $n=0,2$ et $n=0,5$, pour un rapport de rayon $\eta = 0,9$.

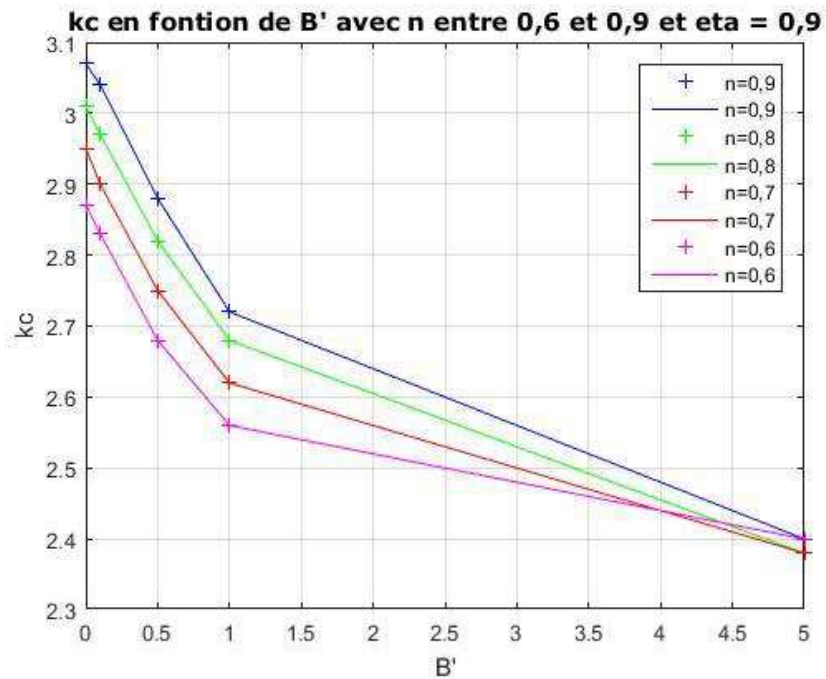


Figure 37 - Evolution du nombre d'onde axial critique k_c pour un fluide de Herschel-Bulkley en fonction du seuil B' pour des indices d'écoulement entre $n=0,6$ et $n=0,9$, pour un rapport de rayon $\eta = 0,9$.

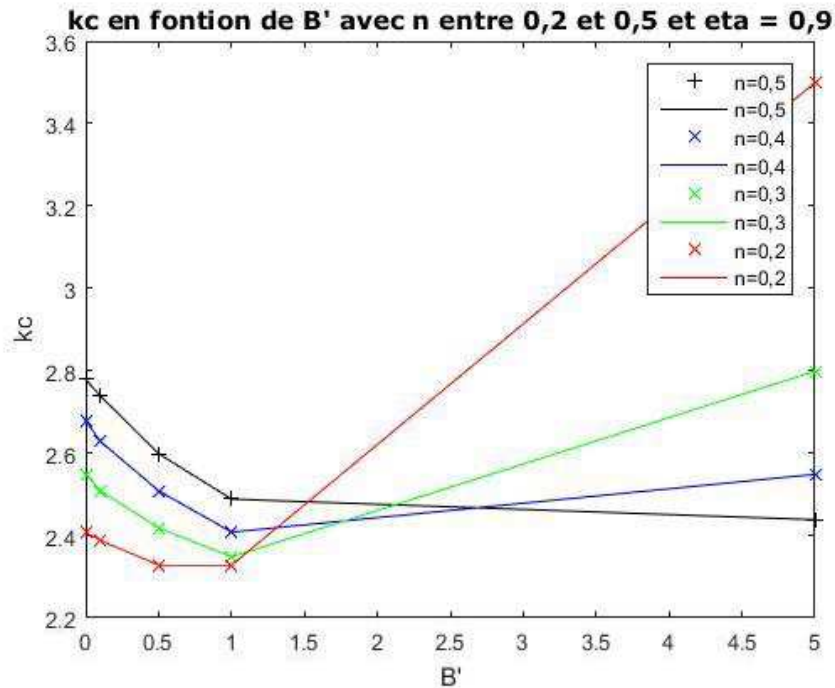


Figure 38 - Evolution du nombre d'onde axial k_c pour un fluide de Herschel-Bulkley en fonction du seuil B' pour des indices d'écoulement entre $n=0,2$ et $n=0,5$, pour un rapport de rayon $\eta = 0,9$.

7.4 Commentaires des simulations pour $\eta = 0,9$

Le seuil d'écoulement a un effet stabilisant sur l'écoulement, en effet Re_{1c} est toujours croissant avec B' . En revanche, le nombre d'onde diminue (la taille des tourbillons augmente) avec B' pour $n \geq 0,4$, alors qu'il est successivement décroissant puis croissant avec B' pour $n \leq 0,3$.

L'indice d'écoulement quant à lui n'a pas toujours le même effet. Il a peu d'effet sur le Reynolds critique pour $n \geq 0,5$. Pour $n \leq 0,4$, l'écoulement est stabilisé lorsque n diminue. Le nombre d'onde k_c diminue (la taille des tourbillons augmente) quand n diminue pour $n \geq 0,7$. Pour $n \leq 0,6$, k_c diminue quand n diminue pour les valeurs faibles de B' , mais k_c augmente pour les valeurs de B' plus élevées.

8 Conclusion

Les fluides rhéofluidifiants à seuil de contrainte sont couramment utilisés en pharmacie industrielle. Ils interviennent dans la fabrication de nombreux médicaments, notamment ceux destinés à être appliqués par voie cutanée et les suspensions buvables.

Ils interviennent comme modulateur de viscosité, apportant aux produits thérapeutiques leurs caractéristiques physiques exceptionnelles, permettant une application des crèmes, pommades, gel, et lotion, et leur maintien après application. Ils permettent également de combattre les phénomènes de sédimentation ou de floculation des suspensions.

Leur complexité rhéologique qui fait leur intérêt rend leurs propriétés d'écoulement difficiles à prévoir sans une étude approfondie. Pourtant la connaissance de ces propriétés est nécessaire à la fabrication de médicaments qui les font intervenir.

Une étape critique de leur fabrication est le mélange des excipients et principe(s) actif(s). La maîtrise de cette opération requiert la connaissance du comportement en écoulement des différentes espèces en présence pour s'assurer que le degré d'homogénéité désiré est obtenu à la fin de l'opération.

Afin de choisir les systèmes de mélange adaptés, il convient de connaître les propriétés des fluides à mélanger. C'est dans ce sens que ce travail s'est inscrit, il a porté sur l'étude de la transition de l'écoulement de base à la turbulence de fluide d'Herschel-Bulkley dans une géométrie de Taylor-Couette, à travers une approche à la fois expérimentale et théorique. Le choix de cette géométrie s'explique par le fait qu'elle est une représentation simplifiée des écoulements rotationnels rencontrés dans l'industrie, lors des opérations de mélange par exemple.

Un programme simulant de tels écoulements, basé sur la loi d'Herschel-Bulkley a été réalisé. En y renseignant les paramètres rhéologiques du fluide étudié ainsi que l'entrefer entre les deux cylindres, ce programme permet déterminer les conditions d'apparitions de tourbillons de Taylor, qui constituent la première étape vers l'apparition de la turbulence. Il a permis de mettre en évidence le caractère stabilisant du seuil sur l'écoulement. Nous avons également observé que le nombre d'onde croît avec le seuil et avec le caractère rhéofluidifiant.

Ce programme donne des indications mais ne permet pas à lui seul d'orienter sur un choix de type de mélangeur pour un fluide en particulier. En effet, ce programme se nourrit des

paramètres rhéologiques des fluides que l'on souhaite étudier. Or, ces paramètres ne pouvant être obtenus que par l'expérience, il convient de mener des études rhéologiques préliminairement à l'utilisation de celui-ci. De plus, une fois les simulations effectuées. Il est important de se rappeler que les résultats sont obtenus pour une géométrie de Taylor-Couette et que toutes les précautions doivent être prises si l'on souhaite les extrapoler.

9 Bibliographie

- Michel ROUSTAN, Jean-Claude PHARAMOND, Alain LINE. (1999, Juin 10). Agitation. Mélange - Concepts théoriques de base. *Procédés chimie - bio - agro | Opérations unitaires. Génie de la réaction chimique*.
- Bacchin, P. (2009, Février). *1A_newton_cours*. Récupéré sur <http://patricebacchin.fr/>: http://patricebacchin.fr/cours/phenomene_transport/co/1A_newton_cours.html
- CARRIERE, P. (2008, Juin 16-17). Mélange chaotique laminaire en écoulement tridimensionnel - I. Ecoulements fermés. Lyon, Rhône, France.
- Cécile LEMAITRE, A. G. (2011). Initiation à la rhéologie. Nancy, France: ENSIC - flière I2C.
- clzg/ceft. (2010, mai 25). *utilismedic*. Récupéré sur <https://pharmacie.hug-ge.ch/>: https://pharmacie.hug-ge.ch/infomedic/utilismedic/forme_gal_par.pdf
- COUSSOT, P. (2012). *La matière dans tous ses états*. (e. sciences, Éd.) Les Ulis, Essonne, FRANCE: CNRS EDITIONS.
- Dabir S. Viswanath, T. G. (2007). *Viscosity of Liquids: Theory, Estimation, Experiment, and Data*. Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- DEVILLERS, J.-F. (2017, Septembre 7). *VISCOSITÉ*. Récupéré sur www.universalis.fr: <http://www.universalis.fr/encyclopedie/viscosite/>
- FAVIER, J. (2016, novembre 16). Modélisation et simulation numérique d'écoulements au voisinage de parois biologiques ciliées et de revêtements aéronautiques bioinspirés.
- Howard A. Barnes, J. M. (s.d.). *RHEOLOGY - Vol. I - Rheometry*. Récupéré sur http://www.eolss.net: <http://www.eolss.net/sample-chapters/c06/E6-197-10-00.pdf>
- Lionel CHOPLIN, Philippe MARCHAL, Cristophe BARAVIAN, Dominique LANGEVIN. (2010). *Rheologie et Produits Formules Complexes*. Editions T.I.
- Machinery, P. P. (2013). *sigma-mixer-z-blade-dough-mixer.html*. Récupéré sur <http://www.mixerblenderdryer.com/>: <http://www.mixerblenderdryer.com/sigma-mixer-z-blade-dough-mixer.html>
- MANNEVILLE, S. (2011, août 18). *Sebastien_Manneville*. Récupéré sur <http://perso.ens-lyon.fr/>: http://perso.ens-lyon.fr/sebastien.manneville/Sebastien_Manneville/Teaching_files/FC_loindeleq.pdf
- Nabila Ait-Moussa, S. P. (2015). Numerical Simulations of Co- and Counter-Taylor-Couette Flows: Influence of the Cavity Radius Ratio on the Appearance of Taylor Vortices. *American Journal of Fluid Dynamics*, 17-22.
- P. J. Carreau, R. P. (1997). *Rheology of Polymeric Systems : Principles and applications*. Hanser Gardner Publications.
- Pierre Trambouze, J.-P. E. (2002). *Réacteurs chimiques (Les)*.

- Prism Pharma Machinery. (2013). *sigma-mixer-z-blade-dough-mixer.html*. Récupéré sur <http://www.mixerblenderdryer.com>: <http://www.mixerblenderdryer.com/sigma-mixer-z-blade-dough-mixer.html>
- ROUSTAN, M. (2005, mars 10). *mobiles-d-agitation-nombre-de-puissance-npo-et-nombre-de-pompage-nqp-j3802forniv10001.html*. Récupéré sur www.techniques-ingenieur.fr: <https://www.techniques-ingenieur.fr/bases-doc.univ-lorraine.fr/base-documentaire/procedes-chimie-bio-agro-th2/operations-unitaires-agitation-et-melange-42486210/agitation-melange-j3802/mobiles-d-agitation-nombre-de-puissance-npo-et-nombre-de-pompage-nqp-j>
- Schwartzentruber, J. (2009, novembre 5). *uc_InteractionAgitationMelange.html#footnotesN10309*. Récupéré sur <http://nte.mines-albi.fr>: http://nte.mines-albi.fr/CristalGemme/co/uc_InteractionAgitationMelange.html#footnotesN10309
- Taberlet, N. (2011, Avril 11). *Comment les fluides coulent-ils ?* Récupéré sur <http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr>: <http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/comment-coulent-les-fluides.xml>
- Teychené, S. (2004, décembre 15). *Maîtrise du Polymorphisme dans les Procédés de Cristallisation de Produits d'Intérêts Pharmaceutiques : Application à La Cristallisation de l'Eflucimibe*. Toulouse.

10 Annexes

10.1 Annexe 1 : Résolution numérique des équations de l'état de base

Cette partie présente la démarche qui a été suivie pour réaliser les intégrations numériques afin de déterminer le taux de contrainte à la paroi du cylindre interne, τ_1 et le profil des vitesses de l'état de base $V_b(r)$

10.1.1 Cas d'un cisaillement total

10.1.1.1 Obtention de τ_1

$$\int_{R_1}^{R_2} \left| \frac{d}{dr} \left(\frac{V_b}{r} \right) \right| dr = \int_{R_1}^{R_2} \left(\varepsilon \tau_1 \frac{R_1^2}{r^{2+n}} - \frac{B'}{r^n} \right)^{1/n} dr$$

Or, $\frac{d}{dr} \left(\frac{\widehat{V_b}}{\widehat{r}} \right) < 0$, en effet, $\widehat{Y}_{r\theta} = \widehat{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{\widehat{V_b}}{\widehat{r}} \right) < 0$, avec $\widehat{r} > 1$

$$\text{Ainsi } \int_{R_1}^{R_2} \left| \frac{d}{dr} \left(\frac{V_b}{r} \right) \right| dr = \left[\varepsilon \frac{V_b}{r} \right]_{R_1}^{R_2} = \varepsilon \left(\frac{V_b(R_2)}{R_2} - \frac{V_b(R_1)}{R_1} \right) = \varepsilon \left(\frac{0}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$\varepsilon \left(\frac{0}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = f_I(\tau_1)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{R_1} = f_I(\tau_1)$$

$$\Leftrightarrow -1 = \frac{R_1}{\varepsilon} f_I(\tau_1)$$

$$\Leftrightarrow -1 = \varepsilon R_1 f_I(\tau_1)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \varepsilon R_1 f_I(\tau_1) = 0 \quad (3)$$

n et B' sont des paramètres fixés pour un fluide donné

τ_1 est la solution de l'équation : $1 + \varepsilon R_1 f_I(\tau_1) = 0$ (on cherche pour quelle valeur de τ_1 l'équation (3) est vérifiée).

Ainsi, numériquement, on trouve la racine de la fonction : $\text{FONC_I} = 1 + \varepsilon R_1 f_I(\tau_1)$, cette racine est τ_1 .

Fonction	$\left(\varepsilon \tau_1 \frac{R_1^2}{r^{2+n}} - \frac{B'}{r^n} \right)^{1/n}$	$1 + \varepsilon R_1 f_I(\tau_1)$
Nom de la fonction dans le programme	FoncInteg	FONC_I

10.1.1.2 Obtention de $V_b(r)$

$$\int_r^{R_2} \left| \frac{d}{dr} \left(\frac{V_b}{r} \right) \right| dr = \int_r^{R_2} \left(\varepsilon \tau_1 \frac{R_1^2}{r^{2+n}} - \frac{B'}{r^n} \right)^{1/n} dr$$

$$\varepsilon \left(\frac{0}{R_2} - \frac{V_b(r)}{r} \right) = g_I(r)$$

$$V_b(r) = -\varepsilon r g_I(r)$$

10.1.2 Cas d'un cisaillement partiel :

10.1.2.1 Obtention de τ_1

$$\int_{R_1}^{R_0} \left| \frac{d}{dr} \left(\frac{V_b}{r} \right) \right| dr = \int_{R_1}^{R_0} \left(\varepsilon \tau_1 \frac{R_1^2}{r^{2+n}} - \frac{B'}{r^n} \right)^{1/n} dr$$

$$\Leftrightarrow \text{avec } R_0 = \sqrt{\frac{|\tau_1|}{B'}} \times R_1$$

$$\varepsilon \left(\frac{0}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right) = f_{II}(\tau_1)$$

n et B' sont des paramètres fixés pour un fluide donné

τ_1 est la solution de l'équation ci-dessous

$$1 + \varepsilon R_1 f_{II}(\tau_1) = 0$$

Fonction	$\left(\varepsilon \tau_1 \frac{R_1^2}{r^{2+n}} - \frac{B'}{r^n} \right)^{\frac{1}{n}}$	$1 + \varepsilon R_1 f_{II}(\tau_1)$
Nom de la fonction dans le programme	FoncInteg	FONC_II

10.1.2.2 Obtention de $V_b(r)$

$$\int_r^{R_0} \left| \frac{d}{dr} \left(\frac{V_b}{r} \right) \right| dr = \int_r^{R_0} \left(\varepsilon \tau_1 \frac{R_1^2}{r^{2+n}} - \frac{B'}{r^n} \right)^{1/n} dr$$

$$\varepsilon \left(\frac{0}{R_0} - \frac{V_b(r)}{r} \right) = g_{II}(r)$$

$$V_b(r) = -\varepsilon r g_{II}(r)$$

$$\text{NB : } R_1 = \frac{\widehat{R}_1}{\widehat{a}} \text{ \& } R_2 = \frac{\widehat{R}_2}{\widehat{a}}, \text{ ainsi : } R_1 = \frac{\widehat{R}_1}{\widehat{R}_2 - \widehat{R}_1} = \frac{\widehat{R}_1 / \widehat{R}_2}{1 - \frac{\widehat{R}_1}{\widehat{R}_2}} = \frac{\eta}{1 - \eta}$$

$$R_1 = \frac{\eta}{1 - \eta}$$

$$R_2 = \frac{\widehat{R_2}}{\widehat{R_2} - \widehat{R_1}} = \frac{1}{1 - \eta} = R_1 + 1$$

$$R_2 = R_1 + 1$$

10.2 Annexe 2 : Détail des calculs conduisant aux équations aux perturbation

Dans cette section nous nous intéressons à la transition de l'écoulement de Taylor-Couette depuis le régime laminaire au régime turbulent.

Mathématiquement cela revient à ajouter une perturbation à l'écoulement et à étudier le comportement du système par la suite.

Si l'écoulement tend à redevenir stable, alors la turbulence n'est pas atteinte, alors que si une perturbation minime entraîne l'instabilité alors la zone critique est atteinte.

Mathématiquement cela prend la forme :

$$\vec{U} = \vec{U}^b + \epsilon \vec{u}' \text{ Avec } \epsilon \ll 1,$$

Pour étudier l'instabilité il nous est nécessaire de réécrire les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement en y ajoutant les perturbations :

Sous forme vectorielle :

$$(1) \nabla \vec{U} = 0 \text{ (équation de conservation de la masse)}$$

$$(2) \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \text{Re}_1 (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\nabla P + \nabla \cdot \tau (\vec{U}) \text{ (éq. de conservation de la quantité de mouvement)}$$

$$(1) \nabla \cdot (\vec{U}^b + \epsilon \vec{u}') = 0$$

$$(2) \frac{\partial (\vec{U}^b + \epsilon \vec{u}')}{\partial t} + \text{Re}_1 \left((\vec{U}^b + \epsilon \vec{u}') \cdot \nabla \right) (\vec{U}^b + \epsilon \vec{u}') = -\nabla (P^b + \epsilon p') + \nabla \cdot \left(\overline{\tau} (\vec{U}^b + \epsilon \vec{u}') \right)$$

$$(1) \nabla \cdot \vec{U}^b + \epsilon \nabla \cdot \vec{u}' = 0$$

$$(2) \frac{\partial \vec{U}^b}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + \text{Re}_1 \left[(\vec{U}^b \cdot \nabla + \epsilon \vec{u}' \cdot \nabla) (\vec{U}^b + \epsilon \vec{u}') \right] = -\nabla P^b - \epsilon \nabla p' + \nabla \cdot \left(\overline{\tau} (\vec{U}^b + \epsilon \vec{u}') \right)$$

$$(2) \frac{\partial \vec{U}^b}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + \text{Re}_1 \left[(\vec{U}^b \cdot \nabla \vec{U}^b + \epsilon^2 \vec{u}' \cdot \nabla \vec{u}' + \vec{U}^b \cdot \nabla \epsilon \vec{u}' + \epsilon \vec{u}' \cdot \nabla \vec{U}^b) \right] = -\nabla P^b - \epsilon \nabla p' + \nabla \cdot \left(\overline{\tau} (\vec{U}^b + \epsilon \vec{u}') \right)$$

Nous sommes très proches de l'instabilité, donc l'état de base est une solution de ce système d'équations :

$$(2) \nabla \cdot \vec{U}^b = 0 \text{ (équation de conservation de la masse)}$$

$$(2) \frac{\partial U^b}{\partial t} + Re_1(U^b \cdot \nabla)U^b = -\nabla P^b + \nabla \tau(U^b) \text{ (  q. de conservation de la quantité du mouvement)}$$

$$(1) - (3) : \nabla \cdot U^b + \epsilon \nabla \cdot u' - \nabla \cdot U^b = 0$$

$$(1) - (3) : \boxed{\nabla u' = 0}$$

$$(2) - (4) : \epsilon \frac{\partial u'}{\partial t} + Re_1[\epsilon^2 u' \cdot \nabla u' + U^b \cdot \nabla \epsilon u' + \epsilon u' \cdot \nabla U^b] = -\epsilon \nabla p' + \nabla \cdot \left[\bar{\bar{\tau}}(\overrightarrow{U^b} + \epsilon u') - \bar{\bar{\tau}}(U^b) \right]$$

$\epsilon^2 u' \cdot \nabla u'$ est négligeable

$$(2) - (4) : \frac{\partial u'}{\partial t} + Re_1[U^b \cdot \nabla u' + u' \cdot \nabla U^b] = -\nabla p' + \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \left[\bar{\bar{\tau}}(\overrightarrow{U^b} + \epsilon u') - \bar{\bar{\tau}}(U^b) \right]$$

$$(2) - (4) : \frac{\partial u'}{\partial t} + Re_1[U^b \cdot \nabla u' + u' \cdot \nabla U^b] = -\nabla p' + \nabla \cdot \left[\frac{1}{\epsilon} \left(\bar{\bar{\tau}}(\overrightarrow{U^b} + \epsilon u') - \bar{\bar{\tau}}(U^b) \right) \right]$$

$$(2) - (4) : \boxed{\frac{\partial u'}{\partial t} + Re_1[U^b \cdot \nabla u' + u' \cdot \nabla U^b] = -\nabla p' + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}'}$$

Ainsi, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement correspondant aux perturbations sont de la forme :

$$(2) \nabla u' = 0$$

$$(3) \frac{\partial u'}{\partial t} + Re_1[U^b \cdot \nabla u' + u' \cdot \nabla U^b] = -\nabla p' + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}'$$

A l'aide du polycopié de rhéologie (Cécile LEMAITRE, 2011) on peut réécrire les équations

$$(1) \text{ et } (2), \text{ exprimées dans le système de coordonnées cylindriques, sachant que } \overrightarrow{u'} = \begin{pmatrix} u'_r \\ u'_\theta \\ u'_z \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{U^b} = \begin{pmatrix} 0 \\ V^b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^b \\ V^b \\ W^b \end{pmatrix} \text{ on obtient les équations simplifiées suivantes :}$$

Equation de conservation de la masse :

$$(7) \Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(ru')}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

Equation de conservation du mouvement :

$$\text{Sur } r : \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \rho g_r$$

En reprenant notre système de notation :

$$\rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{V^2}{r} + W \frac{\partial U}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \rho g_r$$

En posant :

- $U = U^b + \epsilon u'$
- $V = V^b + \epsilon v'$
- $W = W^b + \epsilon w'$
- $P = P^b + \epsilon p'$
- $\tau_{rr} = \tau_{rr}^b + \epsilon \tau_{rr}'$
- etc ...

On réécrit l'équation du mouvement selon la coordonnée r :

$$\begin{aligned}
& \rho \left(\frac{\partial(U^b + \epsilon u')}{\partial t} + (U^b + \epsilon u') \frac{\partial(U^b + \epsilon u')}{\partial r} + \frac{(V^b + \epsilon v')}{r} \frac{\partial(U^b + \epsilon u')}{\partial \theta} - \frac{(V^b + \epsilon v')^2}{r} \right. \\
& \quad \left. + (W^b + \epsilon w') \frac{\partial(U^b + \epsilon u')}{\partial z} \right) \\
& = - \frac{\partial(P^b + \epsilon p')}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(\tau_{rr}^b + \epsilon \tau_{rr}')) + \frac{1}{r} \frac{\partial(\tau_{r\theta}^b + \epsilon \tau_{r\theta}')}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}^b + \epsilon \tau_{\theta\theta}'}{r} \\
& \quad + \frac{\partial(\tau_{rz}^b + \epsilon \tau_{rz}')}{\partial z} + \rho g_r \\
& \Leftrightarrow \rho \left(\frac{\partial U^b}{\partial t} + \frac{\epsilon \partial u'}{\partial t} + U^b \frac{\partial U^b}{\partial r} + \epsilon U^b \frac{\partial u'}{\partial r} + \epsilon u' \frac{\partial U^b}{\partial r} + \epsilon^2 u' \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{V^b}{r} \frac{\partial U^b}{\partial \theta} + \epsilon \frac{V^b}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} + \frac{\epsilon v'}{r} \frac{\partial U^b}{\partial \theta} + \right. \\
& \quad \left. \frac{\epsilon^2 v'}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - \left(\frac{V^{b^2}}{r} + \frac{2\epsilon V^b v'}{r} + \frac{\epsilon^2 v'^2}{r} \right) + W^b \frac{\partial U^b}{\partial z} + \epsilon W^b \frac{\partial u'}{\partial z} + \epsilon w' \frac{\partial U^b}{\partial z} + \epsilon^2 w' \frac{\partial u'}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P^b}{\partial r} - \\
& \quad \epsilon \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \tau_{rr}^b)}{\partial r} + \frac{\epsilon}{r} \frac{\partial(r \tau_{rr}')}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^b}{\partial \theta} + \frac{\epsilon}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}'}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}^b}{r} - \epsilon \frac{\tau_{\theta\theta}'}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}^b}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial \tau_{rz}'}{\partial z} + \rho g_r
\end{aligned}$$

On peut d'ores et déjà supprimer les termes en ϵ^2 qui sont négligeables, l'équation ci-dessus prend la forme :

$$\begin{aligned}
& \rho \left(\frac{\partial U^b}{\partial t} + \frac{\epsilon \partial u'}{\partial t} + U^b \frac{\partial U^b}{\partial r} + \epsilon U^b \frac{\partial u'}{\partial r} + \epsilon u' \frac{\partial U^b}{\partial r} + \frac{V^b}{r} \frac{\partial U^b}{\partial \theta} + \epsilon \frac{V^b}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} + \frac{\epsilon v'}{r} \frac{\partial U^b}{\partial \theta} - \left(\frac{V^{b^2}}{r} + \frac{2\epsilon V^b v'}{r} \right) + \right. \\
& \quad \left. W^b \frac{\partial U^b}{\partial z} + \epsilon W^b \frac{\partial u'}{\partial z} + \epsilon w' \frac{\partial U^b}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P^b}{\partial r} - \epsilon \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \tau_{rr}^b)}{\partial r} + \frac{\epsilon}{r} \frac{\partial(r \tau_{rr}')}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^b}{\partial \theta} + \frac{\epsilon}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}'}{\partial \theta} - \\
& \quad \frac{\tau_{\theta\theta}^b}{r} - \epsilon \frac{\tau_{\theta\theta}'}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}^b}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial \tau_{rz}'}{\partial z} + \rho g_r \quad (8)
\end{aligned}$$

Pour l'état de base cette équation prend la forme :

$$\begin{aligned}
& \rho \left(\frac{\partial U^b}{\partial t} + U^b \frac{\partial U^b}{\partial r} + \frac{V^b}{r} \frac{\partial U^b}{\partial \theta} - \frac{V^{b^2}}{r} + W^b \frac{\partial U^b}{\partial z} \right) \\
& = - \frac{\partial P^b}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \tau_{rr}^b)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^b}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}^b}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}^b}{\partial z} + \rho g_r
\end{aligned}$$

On soustrayant l'état de base à notre équation, on obtient l'équation ci-dessous :

$$\begin{aligned}
& \rho \left(\epsilon \frac{\partial u'}{\partial t} + \epsilon U^b \frac{\partial u'}{\partial r} + \epsilon u' \frac{\partial U^b}{\partial r} + \epsilon \frac{V^b}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} + \frac{\epsilon v'}{r} \frac{\partial U^b}{\partial \theta} - \left(\frac{2\epsilon V^b v'}{r} \right) + \epsilon W^b \frac{\partial u'}{\partial z} + \epsilon w' \frac{\partial U^b}{\partial z} \right) \\
& = - \epsilon \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{\epsilon}{r} \frac{\partial(r \tau_{rr}')}{\partial r} + \frac{\epsilon}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}'}{\partial \theta} - \epsilon \frac{\tau_{\theta\theta}'}{r} + \epsilon \frac{\partial \tau_{rz}'}{\partial z}
\end{aligned}$$

Puis en divisant par ϵ :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + U^b \frac{\partial u'}{\partial r} + u' \frac{\partial U^b}{\partial r} + \frac{V^b}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} + \frac{v'}{r} \frac{\partial U^b}{\partial \theta} - \left(\frac{2V^b v'}{r} \right) + W^b \frac{\partial u'}{\partial z} + w' \frac{\partial U^b}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau'_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau'_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau'_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial\tau'_{rz}}{\partial z} \end{aligned}$$

Le même raisonnement est appliqué pour les deux autres équations du mouvement, on obtient donc les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (8) \Leftrightarrow * \frac{\partial u'}{\partial t} + Re_1 \left\{ u' \frac{\partial U^b}{\partial r} + \frac{v'}{r} \frac{\partial U^b}{\partial \theta} - \frac{v' V^b}{r} + w' \frac{\partial U^b}{\partial z} + U^b \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{V^b}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - V^b \frac{v'}{r} + W^b \frac{\partial u'}{\partial z} \right\} = \\ -\frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau'_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau'_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau'_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial\tau'_{rz}}{\partial z} \\ * \frac{\partial v'}{\partial t} + Re_1 \left\{ u' \frac{\partial V^b}{\partial r} + \frac{v'}{r} \frac{\partial V^b}{\partial \theta} + \frac{u' V^b}{r} + w' \frac{\partial V^b}{\partial z} + U^b \frac{\partial v'}{\partial r} + \frac{V^b}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{U^b v'}{r} + W^b \frac{\partial v'}{\partial z} \right\} \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \tau'_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau'_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau'_{\theta z}}{\partial z} \\ * \frac{\partial w'}{\partial t} + Re_1 \left\{ u' \frac{\partial W^b}{\partial r} + \frac{v'}{r} \frac{\partial W^b}{\partial \theta} + w' \frac{\partial W^b}{\partial z} + U^b \frac{\partial w'}{\partial r} + \frac{V^b}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} + w' \frac{\partial W^b}{\partial z} \right\} \\ = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau'_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\tau'_{\theta z})}{\partial \theta} + \frac{\partial(\tau'_{zz})}{\partial z} \end{aligned}$$

Le tenseur des contraintes a pour expression :

$$\bar{\bar{\tau}}' = \frac{1}{\epsilon} \left[\bar{\tau} (\vec{U}^b + \epsilon \vec{u}') - \bar{\tau} (\vec{U}^b) \right]$$

$$\text{Avec } \bar{\tau} (\vec{U}^b + \epsilon \vec{u}') = \mu (\vec{U}^b + \epsilon \vec{u}') \times \bar{\gamma} (\vec{U}^b + \epsilon \vec{u}')$$

Démonstration :

$$\boxed{\text{Loi d'Herschel-Bulkley : } \mu = \dot{\gamma}_{II}^{n-1} + \left(\frac{B'}{\dot{\gamma}_{II}} \right) = \left(\sqrt{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^2} \right)^{n-1} + \left(\frac{B'}{\sqrt{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^2}} \right)}$$

$$\text{Avec, } \dot{\gamma}_{II} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^2}$$

$$\text{Pour l'état de base ça donnerait : } \mu_b = \dot{\gamma}_{II_b}^{n-1} + \left(\frac{B'}{\dot{\gamma}_{II_b}} \right)$$

On remarque que cette expression de la viscosité n'est pas linéaire, mais est une fonction de la

$$\text{forme : } \mu = f(\dot{\gamma}_{ij}(\vec{u}))$$

$\bar{\bar{\gamma}} = \nabla \vec{U} + \nabla \vec{U}^T$, $\nabla \vec{U}$ comprend la déformation et la rotation, ainsi en ajoutant $\nabla \vec{U}^T$ on soustrait la rotation du système, ceci afin d'obtenir le tenseur des taux de cisaillement correspondant uniquement à la déformation.

Ainsi :

$$\bar{\bar{\gamma}}(\vec{U^b} + \epsilon \vec{u'}) = \nabla(\vec{U^b} + \epsilon \vec{u'}) + \nabla(\vec{U^b} + \epsilon \vec{u'})^T$$

$$\bar{\bar{\gamma}}(\vec{U^b} + \epsilon \vec{u'}) = \nabla \vec{U^b} + \epsilon \nabla \vec{u'} + \nabla \vec{U^b}^T + \epsilon \nabla \vec{u'}^T$$

$$\bar{\bar{\gamma}}(\vec{U^b} + \epsilon \vec{u'}) = \bar{\bar{\gamma}}(\vec{U^b}) + \epsilon \bar{\bar{\gamma}}(\vec{u'})$$

$$\bar{\bar{\gamma}}(\vec{U^b} + \epsilon \vec{u'}) = \bar{\bar{\gamma}}^b + \epsilon \bar{\bar{\gamma}}'$$

Et $\forall i,j: \dot{\gamma}_{ij}(\vec{U^b} + \epsilon \vec{u'}) = \dot{\gamma}_{ij}(\vec{U^b}) + \epsilon \dot{\gamma}_{ij}(\vec{u'})$, avec $i = r, \theta, z$ et $j = r, \theta, z$

$$\text{Ainsi : } \mu(\vec{U^b} + \epsilon \vec{u'}) = \mu(\dot{\gamma}_{ij}(\vec{U^b} + \epsilon \vec{u'})) = \mu(\dot{\gamma}_{ij}(\vec{U^b}) + \epsilon \dot{\gamma}_{ij}(\vec{u'}))$$

Avec le terme $\dot{\gamma}_{ij}(\vec{U^b})$ qui est grand, et qui est petit $\epsilon \dot{\gamma}_{ij}(\vec{u'})$

Quant au terme de viscosité, celui-ci n'étant pas linéaire, on linéarise avec un développement limité :

Rappel mathématique sur le DL de Taylor :

Pour $f(x_0, y_0)$ une fonction à deux variables, le DL donne :

$$f(x_0 + \epsilon h, y_0 + \epsilon k) = f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} \epsilon h + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y_0} \epsilon k$$

Dans notre cas, la viscosité est une fonction de 9 variables :

$$\mu(\dot{\gamma}_{r\theta}, \dot{\gamma}_{\theta r}, \dot{\gamma}_{rr}, \dot{\gamma}_{\theta\theta}, \dot{\gamma}_{zz}, \dot{\gamma}_{z\theta}, \dot{\gamma}_{\theta z}, \dot{\gamma}_{zr}, \dot{\gamma}_{rz})$$

Avec pour chaque variable $x_0 = \dot{\gamma}_{r\theta}^b$ & $\epsilon h = \epsilon \dot{\gamma}_{r\theta}'$

$$\mu(\vec{U^b} + \epsilon \vec{u'}) = \mu(\dot{\gamma}_{ij}(\vec{U^b})) + \sum_i \sum_j \epsilon \dot{\gamma}_{ij}(\vec{u'}) \left. \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \right|_{U^b}$$

Avec

$$\mu^b = \mu(\dot{\gamma}_{ij}(\vec{U^b}))$$

$$\mu' = \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}(\vec{u'}) \left. \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \right|_{U^b}$$

$$\mu(\vec{U^b} + \epsilon \vec{u'}) = \mu^b + \epsilon \mu'$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\bar{\tau}(\vec{U}^b + \epsilon \vec{u}') &= \mu(\vec{U}^b + \epsilon \vec{u}') \bar{\gamma}(\vec{U}^b + \epsilon \vec{u}') = (\mu^b + \epsilon \mu')(\bar{\gamma}^b + \epsilon \bar{\gamma}') \\ \bar{\tau}(\vec{U}^b + \epsilon \vec{u}') &= \mu(\vec{U}^b) \bar{\gamma}(\vec{U}^b) + \epsilon \mu(\vec{u}') \bar{\gamma}(\vec{U}^b) + \epsilon \mu(\vec{U}^b) \bar{\gamma}(\vec{u}') + \epsilon^2 \mu(\vec{u}') \bar{\gamma}(\vec{u}') \\ \bar{\tau}(\vec{U}^b + \epsilon \vec{u}') &= \mu^b \bar{\gamma}^b + \epsilon \mu' \bar{\gamma}^b + \epsilon \mu^b \bar{\gamma}' + \epsilon^2 \mu' \bar{\gamma}'\end{aligned}$$

Avec $\epsilon^2 \mu' \bar{\gamma}'$ négligeable :

$$\bar{\tau}(\vec{U}^b + \epsilon \vec{u}') = \mu^b \bar{\gamma}^b + \epsilon \mu' \bar{\gamma}^b + \epsilon \mu^b \bar{\gamma}'$$

Avec :

$$\begin{aligned}\bar{\tau}(\vec{U}^b) &= \mu^b \bar{\gamma}^b \\ \bar{\tau}(\vec{U}^b + \epsilon \vec{u}') &= \bar{\tau}(\vec{U}^b) + \epsilon \mu' \bar{\gamma}^b + \epsilon \mu^b \bar{\gamma}'\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\bar{\tau}' = \frac{1}{\epsilon} [\bar{\tau}(\vec{U}^b + \epsilon \vec{u}') - \bar{\tau}(\vec{U}^b)] = \bar{\gamma}^b \mu' + \mu^b \bar{\gamma}'$$

Pour rappel, voici les équations de conservation de l'énergie et de la masse en coordonnées cylindriques :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(ru')}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

$$(2) * \frac{\partial u'}{\partial t} + Re_1 \left\{ -\frac{v' v^b}{r} + \frac{v^b}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - V^b \frac{v'}{r} \right\} = -\frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau'_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau'_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau'_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau'_{rz}}{\partial z}$$

$$* \frac{\partial v'}{\partial t} + Re_1 \left\{ u' \frac{\partial v^b}{\partial r} + \frac{v'}{r} \frac{\partial v^b}{\partial \theta} + \frac{u' V^b}{r} + w' \frac{\partial v^b}{\partial z} + \frac{V^b}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right\} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \tau'_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau'_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau'_{\theta z}}{\partial z}$$

$$* \frac{\partial w'}{\partial t} + Re_1 \left\{ \frac{V^b}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} \right\} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau'_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\tau'_{\theta z})}{\partial \theta} + \frac{\partial(\tau'_{zz})}{\partial z}$$

On met le vecteur vitesse sous la forme de mode normal :

$$\vec{u}' = \vec{u}(r) \times \exp(\sigma t + ikz + im\theta)$$

σ est la valeur propre. Dans le programme nous définissons des valeurs propres spurieuses, c'est-à-dire qu'elles sont non physiques.

Où k & m sont des constantes de périodicité dans le plan z & θ

m est le nombre azimutale et k

Pour le cas où $\Omega^2 = 0$, $m = 0$ est la valeur du nombre d'ondes la plus instable (cf thèse de Yao). Ainsi nous prendrons cette valeur lors de nos simulations.

$$\text{Avec } \vec{u}(r) = \begin{pmatrix} u(r) \\ v(r) \\ w(r) \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(r)\exp(\sigma t + ikz + im\theta) \\ v(r)\exp(\sigma t + ikz + im\theta) \\ w(r)\exp(\sigma t + ikz + im\theta) \end{pmatrix}$$

Par souci de simplification, on notera $u(r) = u$, $v(r) = v$ et $w(r) = w$:

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u * \exp(\sigma t + ikz + im\theta) \\ v * \exp(\sigma t + ikz + im\theta) \\ w * \exp(\sigma t + ikz + im\theta) \end{pmatrix}$$

La composante liée à la perturbation du vecteur pression sous forme de mode normal s'écrit :

$$p' = p \times \exp(\sigma t + ikz + im\theta)$$

Equation de conservation de la masse réécrite :

$$(1) \quad \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} \exp(\sigma t + ikz + im\theta) + \frac{im}{r} v \times \exp(\sigma t + ikz + im\theta) + ikw \times \exp(\sigma t + ikz + im\theta) = 0$$

On divise par $\exp(\sigma t + ikz + im\theta)$:

$$(1) \quad \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} + \frac{im}{r} v + ikw = 0$$

Réécriture des équations de conservation de la quantité de mouvement :

Calculs préliminaires à la réécriture des équations de quantité de mouvement :

Afin de pouvoir réexprimer les équations aux perturbations en exprimant les éléments du tenseur des contraintes, nous allons exprimer ce tenseur et le mettre sous la forme :

$$\bar{\bar{\tau}} = \overline{\overline{g(r)}} \times \exp(\sigma t + ikz + im\theta)$$

$$\bar{\bar{\tau}}' = \bar{\bar{\gamma}}^b \mu' + \mu^b \bar{\bar{\gamma}}'$$

$$\mu' = \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}(\vec{u}') \left. \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \right|_{u^b} = \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}' \left. \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \right|_{u^b}$$

Expression du tenseur $\bar{\bar{\gamma}}'$:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}' &= \begin{pmatrix} \frac{2\partial u'}{\partial r} & r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v'}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u'}{\partial \theta} & \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial r} \\ r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v'}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u'}{\partial \theta} & 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{u'}{r}\right) & \frac{1}{r}\frac{\partial w'}{\partial \theta} + \frac{\partial v'}{\partial z} \\ \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial w'}{\partial \theta} + \frac{\partial v'}{\partial z} & 2\frac{\partial w'}{\partial z} \end{pmatrix} \\ \bar{\gamma}' &= \begin{pmatrix} 2\frac{du}{dr} & r\frac{d}{dr}\left(\frac{v}{r}\right) + \frac{imu}{r} & iku + \frac{dw}{dr} \\ r\frac{d}{dr}\left(\frac{v}{r}\right) + \frac{imu}{r} & 2\left(\frac{imv}{r} + \frac{u}{r}\right) & \frac{imw}{r} + ikv \\ iku + \frac{dw}{dr} & \frac{imw}{r} + ikv & 2ikw \end{pmatrix} \times \exp(\sigma t + ikz + im\theta) \\ &= \bar{f}(r) \times \exp(\sigma t + ikz + im\theta)\end{aligned}$$

Quant au tenseur des taux de cisaillement de l'état de base, il a pour expression :

$$\bar{\gamma}^b = \begin{pmatrix} 0 & r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v^b}{r}\right) & 0 \\ r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v^b}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu' = \mu_p(r) \exp(\sigma t + ikz + im\theta)$$

Cherchons à exprimer μ' :

$$\mu' = \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}' \left. \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \right|_{U^b}$$

1. Exprimons les $\left. \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \right|_{U^b}$:

$$1.1. \left. \frac{d\mu}{d\dot{\gamma}_{rr}} \right|_{U^b} :$$

$$\begin{aligned}\mu &= \left\{ \sqrt{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^2} \right\}^{n-1} + \left(\frac{B'}{\sqrt{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^2}} \right) \\ \mu &= \left\{ \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^2 \right\}^{\frac{n-1}{2}} + \left(\frac{B'}{\sqrt{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^2}} \right)\end{aligned}$$

On découpe l'expression en 2 parties :

$$A = \left\{ \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^2 \right\}^{\frac{n-1}{2}} \text{ et } B = \left(\frac{B'}{\sqrt{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^2}} \right)$$

Calcul de $\frac{dA}{d(\dot{\gamma}_{rr})}$:

Rappel : $(f \circ g)' = g' \times f' \circ g$

$$f = x^{\frac{n-1}{2}} \text{ \& } g = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^2$$

$$\text{or, } \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^2 = \frac{1}{2} (\dot{\gamma}_{rr}^2 + \dot{\gamma}_{\theta\theta}^2 + \dot{\gamma}_{zz}^2) + \dot{\gamma}_{r\theta}^2 + \dot{\gamma}_{rz}^2 + \dot{\gamma}_{\theta z}^2$$

$$\text{Avec, } (f \circ g)' = \dot{\gamma}_{rr} \times \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^2 \right)^{\frac{n-3}{2}}$$

$$\text{Ainsi, } \frac{dA}{d(\dot{\gamma}_{rr})} = \dot{\gamma}_{rr} \times \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^2 \right)^{\frac{n-3}{2}}$$

$$\text{De la même façon } \frac{dB}{d(\dot{\gamma}_{rr})} = \dot{\gamma}_{rr} \times B' \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^2 \right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dB}{d(\dot{\gamma}_{rr})} = \dot{\gamma}_{rr} \times B' \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^2 \right)^{-3}$$

$$\text{Ainsi, } \frac{d\mu}{d\dot{\gamma}_{rr}} \Big|_{U^b} = \dot{\gamma}_{rr}^b \times \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{\frac{n-3}{2}} + \dot{\gamma}_{rr}^b \times B' \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{-3}$$

$$\frac{d\mu}{d\dot{\gamma}_{rr}} \Big|_{U^b} = \dot{\gamma}_{rr}^b \left[\frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{\frac{n-3}{2}} + B' \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{-3} \right] = 0$$

1.2. Autres dérivées :

$$\frac{d\mu}{d\dot{\gamma}_{\theta\theta}} \Big|_{U^b} = \dot{\gamma}_{\theta\theta}^b \left[\frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{\frac{n-3}{2}} + B' \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{-3} \right] = 0$$

$$\frac{d\mu}{d\dot{\gamma}_{zz}} \Big|_{U^b} = \dot{\gamma}_{zz}^b \left[\frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{\frac{n-3}{2}} + B' \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{-3} \right] = 0$$

$$\frac{d\mu}{d\dot{\gamma}_{r\theta}} \Big|_{U^b} = 2\dot{\gamma}_{r\theta}^b \left[\frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{\frac{n-3}{2}} + B' \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{-3} \right]$$

$$\frac{d\mu}{d\dot{\gamma}_{rz}} \Big|_{U^b} = 2\dot{\gamma}_{rz}^b \left[\frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{\frac{n-3}{2}} + B' \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{-3} \right] = 0$$

$$\left. \frac{d\mu}{d\dot{\gamma}_{\theta z}} \right|_{U^b} = 2\dot{\gamma}_{rz}^b \left[\frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{n-3} + B' \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{-3} \right] = 0$$

Ainsi on peut écrire μ' :

$$\begin{aligned} \mu' = & \left(2 \frac{du}{dr} \times \dot{\gamma}_{rz}^b \left[\frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{n-3} + B' \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{-3} \right] + \left(r \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{imu}{r} \right) \times 2\dot{\gamma}_{r\theta}^b \left[\frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{n-3} + B' \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{-3} \right] + \left(iku + \frac{dw}{dr} \right) \right. \\ & \times 2\dot{\gamma}_{rz}^b \left[\frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{n-3} + B' \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{-3} \right] + \left(r \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{imu}{r} \right) \times 2\dot{\gamma}_{\theta r}^b \left[\frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{n-3} + B' \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{-3} \right] + 2 \left(\frac{imv}{r} + \frac{u}{r} \right) \\ & \times \dot{\gamma}_{\theta\theta}^b \left[\frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{n-3} + B' \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{-3} \right] + \left(\frac{imw}{r} + ikv \right) \times 2\dot{\gamma}_{\theta z}^b \left[\frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{n-3} + B' \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{-3} \right] + \left(iku + \frac{dw}{dr} \right) \\ & \times 2\dot{\gamma}_{rz}^b \left[\frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{n-3} + B' \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{-3} \right] + \left(\frac{imw}{r} + ikv \right) \times 2\dot{\gamma}_{\theta\theta}^b \left[\frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{n-3} + B' \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{-3} \right] + 2ikw \\ & \left. \times \dot{\gamma}_{zz}^b \left[\frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{n-3} + B' \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \dot{\gamma}_{ij}^b \right)^{-3} \right] \right) \times \exp(\sigma t + ikz + im\theta) \end{aligned}$$

Dans notre cas, $u=w=0$, les seuls $\dot{\gamma}_{ij}$ différents de 0 sont : $\dot{\gamma}_{r\theta}$ et $\dot{\gamma}_{\theta r}$, ainsi :

$$\begin{aligned} \mu' = & \left(\left(r \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{imu}{r} \right) \times 2\dot{\gamma}_{r\theta}^b \left[\frac{n-1}{2} (\dot{\gamma}_{r\theta}^b)^{n-3} + B' \left(-\frac{1}{2} \right) \dot{\gamma}_{r\theta}^{b-3} \right] + \left(r \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{imu}{r} \right) \right. \\ & \left. \times 2\dot{\gamma}_{\theta r}^b \left[\frac{n-1}{2} (\dot{\gamma}_{\theta r}^b)^{n-3} + B' \left(-\frac{1}{2} \right) \dot{\gamma}_{\theta r}^{b-3} \right] \right) \times \exp(\sigma t + ikz + im\theta) \\ \mu' = & \left(\left(r \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{imu}{r} \right) \times 4\dot{\gamma}_{\theta r}^b \left[\frac{n-1}{2} (\dot{\gamma}_{\theta r}^b)^{n-3} + B' \left(-\frac{1}{2} \right) \dot{\gamma}_{\theta r}^{b-3} \right] \right) \times \exp(\sigma t + ikz + im\theta) \\ \mu_P(r) = & \left(\left(r \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{imu}{r} \right) \times 4\dot{\gamma}_{\theta r}^b \left[\frac{n-1}{2} (\dot{\gamma}_{\theta r}^b)^{n-3} + B' \left(-\frac{1}{2} \right) \dot{\gamma}_{\theta r}^{b-3} \right] \right) \end{aligned}$$

$$\bar{\tau}' = \bar{\gamma}^b \mu' + \mu^b \bar{\gamma}' = \mu_P(r) \bar{\gamma}^b(r) \times \exp(\sigma t + ikz + im\theta) + \mu^b(r) \bar{f}(r) \times \exp(\sigma t + ikz + im\theta)$$

$$\bar{\tau}' = \left(\mu_P(r) \bar{\gamma}^b(r) + \mu^b(r) \bar{f}(r) \right) \times \exp(\sigma t + ikz + im\theta)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}' = & \left(\mu_P(r) \begin{pmatrix} 0 & r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V^b}{r} \right) & 0 \\ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V^b}{r} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu^b(r) \begin{pmatrix} 2 \frac{du}{dr} & r \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{imu}{r} & iku + \frac{dw}{dr} \\ r \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{imu}{r} & 2 \left(\frac{imv}{r} + \frac{u}{r} \right) & \frac{imw}{r} + ikv \\ iku + \frac{dw}{dr} & \frac{imw}{r} + ikv & 2ikw \end{pmatrix} \right) \\ & \times \exp(\sigma t + ikz + im\theta) \end{aligned}$$

$$\bar{\bar{\tau}}' = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mu_p(r) \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V^b}{r} \right) \right) & 0 \\ \mu_p(r) \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V^b}{r} \right) \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} \mu^b(r) \left(2 \frac{du}{dr} \right) & \mu^b(r) \left(r \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{imu}{r} \right) & \mu^b(r) \left(iku + \frac{dw}{dr}\right) \\ \mu^b(r) \left(r \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{imu}{r} \right) & \mu^b(r) \left(2 \left(\frac{imv}{r} + \frac{u}{r} \right) \right) & \mu^b(r) \left(\frac{imw}{r} + ikv \right) \\ \mu^b(r) \left(iku + \frac{dw}{dr}\right) & \mu^b(r) \left(\frac{imw}{r} + ikv \right) & \mu^b(r) 2ikw \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \times \exp(\sigma t + ikz + im\theta) \\ \bar{\bar{\tau}}' = \bar{\bar{g}}(r) \times \exp(\sigma t + ikz + im\theta)$$

$$\bar{\bar{g}}(r) = \mu_p(r) \bar{\bar{\gamma}}^b + \mu^b \bar{\bar{f}}(r)$$

Ainsi, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$(1) \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} + \frac{im}{r} v + ikw = 0$$

$$(2) \quad \sigma \times u + \text{Re}_1 \left\{ -\frac{v^* V^b}{r} + \frac{V^b}{r} \text{im} * u - V^b \frac{v}{r} \right\} = -\frac{dp}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d(r g_{rr})}{dr} + \frac{1}{r} \text{im} g_{r\theta} - \frac{g_{\theta\theta}}{r} + ik g_{rz}$$

$$\sigma \times v + \text{Re}_1 \left\{ u \frac{dV^b}{dr} + \frac{u V^b}{r} + \frac{V^b}{r} \text{im} v \right\} = -\frac{1}{r} \text{im} p + \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 g_{r\theta})}{dr} + \frac{\text{im} g_{\theta\theta}}{r} + ik g_{\theta z}$$

$$\sigma \times w + \text{Re}_1 \left\{ \frac{V^b}{r} \text{im} w \right\} = -ikp + \frac{1}{r} \frac{d(r g_{rz})}{dr} + \frac{\text{im} g_{\theta z}}{r} + ik g_{zz}$$

Conditions aux limites :

Avec :

$$(1) \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} + \frac{im}{r} v + ikw = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{u}{r} + \frac{du}{dr} + \frac{im}{r} v + ikw = 0$$

Au niveau des parois $u, v \& w = 0$ ainsi au regard de l'équation (1) on en déduit que $\frac{du}{dr} = 0$

Ainsi nous sommes en présence de 8 conditions aux limites :

$$u(R1)=u(R2)=0$$

$$v(R1)=v(R2)=0$$

$$w(R1)=w(R2)=0$$

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{R1} = \left. \frac{du}{dr} \right|_{R2} = 0$$

Comparaison entre nos équations et le programme :

Nous	Le programme
$\bar{\tau}' = \bar{\gamma}^b \mu' + \mu^b \bar{\gamma}'$ $\mu' = \dot{\gamma}'_{r\theta} \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}'_{r\theta}} \Big _{U^b} + \dot{\gamma}'_{\theta r} \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}'_{r\theta}} \Big _{U^b}$ $\mu' = 2 \dot{\gamma}'_{r\theta} \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}'_{r\theta}} \Big _{U^b}$ $\bar{\gamma}^b = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma}^b_{r\theta} & 0 \\ \dot{\gamma}^b_{r\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\mu' \bar{\gamma}^b = 2 \dot{\gamma}'_{r\theta} \dot{\gamma}^b_{r\theta} \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}'_{r\theta}} \Big _{U^b} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\bar{\tau}' = (\mu_t - \mu_b) \bar{A} + \mu^b \bar{\gamma}'$ $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma}'_{r\theta} & 0 \\ \dot{\gamma}'_{r\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\mu_t - \mu_b = 2 \dot{\gamma}^b_{r\theta} \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}'_{r\theta}} \Big _{U^b}$ $\mu_t = 2 \frac{\partial \mu}{\partial r \theta} \Big _{U^b} \dot{\gamma}^b_{r\theta} + \mu^b$ $(\mu_t - \mu_b) \bar{A} = 2 \dot{\gamma}'_{r\theta} \dot{\gamma}^b_{r\theta} \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}'_{r\theta}} \Big _{U^b} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

10.3 Annexe 3 : Méthode numérique pour la résolution des équations aux perturbations

Ce système d'équations peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} + \frac{im}{r} v + ikw = 0 \\
 (2) \quad & -\frac{dp}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d(rg_{rr})}{dr} + \frac{1}{r} img_{r\theta} - \frac{g_{\theta\theta}}{r} + ikg_{rz} - \text{Re}_1 \left\{ -\frac{v^* v^b}{r} + \frac{v^b}{r} im * u - V^b \frac{v}{r} \right\} = \sigma \times u \\
 & -\frac{1}{r} imp + \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 g_{r\theta})}{dr} + \frac{img_{\theta\theta}}{r} + ikg_{\theta z} - \text{Re}_1 \left\{ u \frac{dV^b}{dr} + \frac{uV^b}{r} + \frac{V^b}{r} imv \right\} = \sigma \times v \\
 & -ikp + \frac{1}{r} \frac{d(rg_{rz})}{dr} + \frac{img_{\theta z}}{r} + ikg_{zz} - \text{Re}_1 \left\{ \frac{V^b}{r} imw \right\} = \sigma \times w
 \end{aligned}$$

Ce qui revient mathématiquement à mettre les équations sous la forme :

$$f_0(u, v, w) = 0$$

$$f_1(u, v, w, p) = \sigma u$$

$$f_2(u, v, w, p) = \sigma v$$

$$f_3(u, v, w, p) = \sigma w$$

Nous sommes en présence de 4 opérateurs linéaires fonctions de 4 variables (u,v,w,P) et d'un paramètre inconnu : σ , qui correspond au taux de croissance de la perturbation.

$$A_0 \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix} = \sigma B_0 \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix}$$

$$\text{En posant } \vec{q}_0 = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{bmatrix}, \text{ le problème peut s'écrire : } A_0 \vec{q}_0 = \sigma B_0 \vec{q}_0$$

En explicitant chacun des termes, le problème s'écrit :

$$A_0 \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{bmatrix}$$

La première ligne de B0 pose problème. Du coup astuce :

On passe à 2 équations à 2 inconnus : u & v

Pour simplifier ce système nous réintroduisons 2 équations dans 2 autres :

Dans (1) on isole w , on le réintroduit dans les 3 autres. Nous isolons p de l'équation de conservation de la quantité de mouvement selon la coordonnée z et on la réintroduit dans les deux autres.

Méthode numérique de colocation : le principe est de visualiser une fonction comme une somme de n polynômes, avec n le nombre de point de discrétisation.

Le problème peut être défini de la façon suivante : $A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sigma B \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

A et B étant les opérateurs : $A = \begin{bmatrix} L & C1 \\ C2 & S \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} B11 & B12 \\ B21 & B22 \end{bmatrix}$

Implicitement A et B contiennent 2 équations. Ce sont des matrices carrées de dimension $2(n+1)$.

La première ligne de A ne contient que des 0 car u et $v = 0$ en R2. Au_1 et $Av_1=0$.

$\sigma \leq 0$ si stable, note intérêt se porte sur le cas limite où $\sigma = 0$

$$\sigma = f(A, B) = g(U^b, k, m, Re_1, \eta, B', n)$$

f et g étant deux fonctions. Pour η , B' et n donnés on fixe un Re_1 et on fait varier k & m .

Il y'aura donc $k \times m \times 2(n + 1)$ σ différents. On cherche le couple k & m pour lequel la valeur de σ est maximale. Ensuite on s'intéresse au signe de σ , si celui-ci est négatif on augmente Re_1 , si celui-ci est positif on diminue Re_1 . C'est ainsi que l'on cherche à approcher le Re_1 critique. Si le couple k & m optimal est sur une borne de l'intervalle on fait un test de butée afin de vérifier que l'optimum ne soit pas sur un autre intervalle.

Mettre en annexe expression des matrices d'opérateurs A & B.

Discrétisation de l'entrefer en $n+1$ points de Gauss-Lobatto :

Ces points sont définis dans l'intervalle $[-1 : 1]$

Ils sont définis de la façon suivante : $y_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right)$; $j = 0, 1, \dots, N$

Le domaine de définition est vérifié :

Si $j=0$, $y_N = \cos\left(\frac{0\pi}{N}\right) = \cos(0) = 1$

Si $j=N$, $y_N = \cos\left(\frac{N\pi}{N}\right) = \cos(\pi) = -1$

On aura $N+1$ points concentrés au voisinage des parois où les variations sont plus rapides.

Ainsi la position radiale sera représentée de la façon suivante : $r=ay+b$ avec y le vecteur des points de Gauss-Lobatto.

Si bien que si $y=-1$: $r=-a+b=R1$

Ainsi, $R1=-a+b$ & $R2=a+b$

En sommant ces deux équations on trouve $b = \frac{R1+R2}{2}$

En soustrayant $R2$ à $R1$, on trouve $a = \frac{R2-R1}{2}$, or $R2 = \frac{1}{1-\eta}$ et $R1 = \frac{\eta}{1-\eta}$, ainsi $a = \frac{1}{2}$ et $R2=R1-1$

Ainsi $\boxed{r_j = \frac{1}{2}y_j + \frac{1+\eta}{1-\eta}}$ avec $y \in [-1 ; 1]$

Un changement de variable est ainsi nécessaire après l'application de la méthode numérique pour se ramener à des points compris $R1$ & $R2$.

Fonctions u & v sont définis comme une somme des polynômes de Chebychev à $n+1$ termes.

10.3.1 Conditions aux limites :

Dans cette partie sont présentées les façons dont le programme fonctionne aux conditions limites.

Loi de HB : $\mu^{HB} = \dot{\gamma}_{II}^{n-1} + \frac{B'}{\dot{\gamma}_{II}}$

or quand $n=1$, $\mu^{HB} = 1 + \frac{B'}{\dot{\gamma}_{II}} =$ loi de Bingham

Quand $n \neq 1$ et $B'=0$, $\mu^{HB} = \dot{\gamma}_{II}^{n-1} =$ loi de puissance

On peut écrire :

$$\mu_b^{HB} = \mu_b^{LP} + (\mu_b^{BIN} - 1)$$

Avec

$$\mu_b^{LP} = \dot{\gamma}_{II}^{n-1LP}$$

$$(\mu_b^{BIN} - 1) = \frac{BIN}{\dot{\gamma}_{II}^{BIN}}$$

Ainsi la loi de Herschel-Bulkley est un mix des deux lois de Bingham et de puissance nous utilisons cette propriété pour traiter les cas limites :

1) Quand $\dot{\gamma}_{II}$ tend vers 0

Si $\dot{\gamma}_{II}$ tend vers 0, $\frac{B'}{\dot{\gamma}_{II}}$ est le terme qui domine car il tend vers $+\infty$

Bingham

$$\mu_b^{BIN} = 1 + \frac{BIN}{\dot{\gamma}_{II}}$$

Quand $\dot{\gamma}_{II}^{BIN}$ tend vers 0, $\mu_b^{BIN} \sim \frac{BIN}{\dot{\gamma}_{II}^{BIN}}$

Herschel Bulkely

$$\mu_b^{HB} = \dot{\gamma}_{II}^{n-1} + \frac{B'}{\dot{\gamma}_{II}^{HB}}$$

Quand $\dot{\gamma}_{II}$ tend vers 0, $\mu_b^{HB} \sim \frac{B'}{\dot{\gamma}_{II}^{HB}}$, pour $n > 0$

Quand $\dot{\gamma}_{II}$ tend vers 0, $\mu_b^{BIN} \sim \mu_b^{HB}$

Or, la loi de Bingham est calculable analytiquement contrairement à celle de Herschel-Bulkley dont les intégrations sont calculées numériquement. Donc pour des viscosités tendant vers l'infini (quand $\dot{\gamma}_{II}$ tend vers 0) on utilisera la loi de Bingham qui est plus précise.

2) Quand B' tend vers 0

Si B' tend vers 0, ou Si $\dot{\gamma}_{II}$ tend vers 0 mais que B' tend plus vite vers 0, le terme $\dot{\gamma}_{II}^{n-1}$ domine

Loi de puissance :

$$\mu_b^{LP} = \dot{\gamma}_{II}^{n-1LP} = \frac{1}{\dot{\gamma}_{II}^{1-nLP}}$$

Herschel-Bulkley :

$$\mu_b^{HB} = \dot{\gamma}_{II}^{n-1HB} + \frac{B'}{\dot{\gamma}_{II}^{HB}}$$

$$\mu_b^{HB} \sim \dot{\gamma}_{II}^{n-1HB}$$

Ainsi, si $\dot{\gamma}_{II}$ tend vers 0, $\mu_b^{HB} \sim \frac{1}{\dot{\gamma}_{II}^{1-n^{LP}}} \sim \mu_b^{LP}$

Ainsi pour le cas où B' et $\dot{\gamma}_{II}$ tendent tous les deux vers 0, l'utilisation de la loi de puissance permet d'éviter une FI.

Graphiquement, μ_b est évalué en mesurant l'angle à l'origine, donc quand $\dot{\gamma}_{II}$ tend vers 0, μ_b tend vers l'infini

SERMENT DE GALIEN

Je jure d'honorer ceux qui m'ont instruit dans les préceptes de mon art et de leur témoigner ma reconnaissance en restant fidèle à leur enseignement.

D'exercer dans l'intérêt de la Santé publique ma profession avec conscience et de respecter non seulement la législation en vigueur mais aussi les règles de l'Honneur, de la Probité et du Désintéressement.

De ne jamais oublier ma responsabilité et mes devoirs envers le malade et sa dignité humaine.

De ne dévoiler à personne les secrets qui m'auraient été confiés ou dont j'aurais eu connaissance dans l'exercice de ma Profession.

En aucun cas, je ne consentirai à utiliser mes connaissances et mon état pour corrompre les mœurs et favoriser les actes criminels.

Que les hommes m'accordent leur estime si je suis fidèle à mes promesses.

Que je sois méprisé de mes Confrères si je manque à mes engagements.



JACOB Valentin

L'étude de la transition à l'état chaotique de fluides d'Herschel-Bulkley en écoulement de Taylor-Couette

Th. D. Pharm., Rouen, 2017, 102 p.

RESUME

Les fluides à seuil sont des fluides non-newtoniens, complexes ou structurés. Ils sont communément rencontrés dans de nombreuses applications industrielles utilisant leurs caractéristiques et leurs propriétés physiques exceptionnelles (plastifiants, stabilisateurs, épaississants,...). Ainsi de nombreux excipients de l'industrie pharmaceutique sont de tels fluides. La plupart des fluides corporels en font partie, le sang notamment. L'étude de leur comportement et de leur écoulement est une problématique transverse dont découlent de très nombreuses applications. Osborne Reynolds a observé au XIX^{ème} siècle que lorsque l'on augmente la vitesse d'écoulement d'eau en conduite, on passe du régime laminaire (écoulement ordonné) au régime turbulent (écoulement désordonné, chaotique). Ce phénomène est lié à la fois aux propriétés intrinsèques du fluide ainsi qu'à la géométrie du système. La survenue de l'état chaotique bouleverse l'écoulement. Ainsi une prédiction du changement de régime est une donnée primordiale en génie chimique mais aussi dans toute application dans lesquelles les fluides sont transportés et/ou mis en agitation (mise en suspension de poudres, ...). Les écoulements turbulents sont fréquemment rencontrés dans l'industrie, ceux-ci correspondent à des écoulements à grande vitesse répondant aux contraintes de productivité industrielle. Ils peuvent également être privilégiés dans des procédés industriels puisqu'ils permettent un meilleur transfert de chaleur et de matière. Par contre, en présence de produits fragiles, l'écoulement laminaire peut être privilégié en vue de préserver leur intégrité, d'où l'intérêt de mieux comprendre le passage d'un régime d'écoulement à l'autre. De plus, les fluides non newtoniens ou complexes sont souvent très visqueux et les mettre en œuvre en régime turbulent supposerait une énergie trop élevée et serait trop coûteux. Afin d'étudier la survenue de cet état chaotique, une étude expérimentale a été effectuée, et un programme simulant de tels écoulements, basé sur la loi d'Herschel-Bulkley a été réalisé. Il permet de déterminer les conditions d'apparitions de tourbillons de Taylor, qui constituent la première étape vers l'apparition de la turbulence. A travers ces travaux, il a été mis en évidence le caractère stabilisant du seuil sur l'écoulement. Il a également été observé que le nombre d'onde croît avec le seuil et avec le caractère rhéofluidifiant du fluide.

MOTS CLES : Rhéologie – turbulence – Taylor – Herschel-Bulkley – contrainte

JURY

Président : Mme SKIBA Malika, Maître de conférences

Membres : M. BOUNOURE Frédéric, Maître de Conférences

Membres : Mme LEMAITRE Cécile, Maître de Conférences HDR, université de Lorraine

Membres : M. NOUAR Chérif, Directeur de recherches, CNRS

DATE DE SOUTENANCE : 15 décembre 2017