



**HAL**  
open science

# Filtrage de Kalman à bruits corrélés pour le positionnement précis

Ulrich Mambou Kuipou

► **To cite this version:**

Ulrich Mambou Kuipou. Filtrage de Kalman à bruits corrélés pour le positionnement précis. Sciences de l'ingénieur [physics]. 2016. dumas-01804309

**HAL Id: dumas-01804309**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01804309>**

Submitted on 31 May 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET METIERS**  
**ÉCOLE SUPÉRIEURE DES GÉOMÈTRES ET TOPOGRAPHES**

---

**MÉMOIRE**

présenté en vue d'obtenir le  
**DIPLÔME D'INGÉNIEUR CNAM**

**Spécialité : Géomètre et Topographe**

par

**Ulrich MAMBOU**

---

Filtrage de Kalman à bruits corrélés pour le positionnement précis

**Soutenu le 06 Juillet 2016**

---

**JURY**

<b>PRESIDENT :</b>	<b>Monsieur Laurent MOREL</b>	<b>Président de jury</b>
<b>MEMBRES :</b>	<b>Monsieur Alexandre BROUSTE</b>	<b>Maître de stage</b>
	<b>Monsieur José CALI</b>	<b>Maître de stage</b>
	<b>Monsieur Jérôme VERDUN</b>	<b>Maître de stage</b>
	<b>Monsieur Frédéric DURAND</b>	<b>Professeur référent</b>
	<b>Monsieur Benjamin BARRAUD</b>	
	<b>Monsieur Christophe CHARLET</b>	
	<b>Monsieur Olivier CLAVEYROLE</b>	
	<b>Monsieur Jean-Michel FOLLIN</b>	
	<b>Madame Mathilde PIAU</b>	

## Remerciements

Ce travail de recherche qui aura duré cinq mois, est une expérience unique en son genre, comme un voyage, un voyage de mille lieues, qui commence toujours par un premier pas. Ce travail n'aurait pas été concevable sans l'aide apportée par de nombreuses personnes. Celles sans qui mes recherches n'auraient pas été aussi abouties lors de la rédaction de ce rapport. Ces quelques lignes ne sont que peu de choses par rapport au temps qu'ils ont bien voulu me consacrer.

Tout d'abord, je voudrais restituer le mérite de nombreuses applications mathématiques à Alexandre BROUSTE qui a été mon commanditaire et m'a assisté lors de l'écriture de scripts sur Matlab®. Grâce à lui, j'ai renoué avec l'esthétique des mathématiques.

Ensuite, j'exprime toute ma gratitude à Frédéric DURAND mon professeur référent sur ce travail, qui a porté un œil attentif sur la bonne réalisation de mes travaux.

Je remercie plus largement les personnes ayant un lien avec l'ESGT et plus particulièrement son directeur Laurent MOREL pour ses précieux conseils, Nathalie LE ROI et Sandra LINAIS pour leur disponibilité et les coups de pouces qui aident grandement les étudiants, ainsi qu'Hélène MASSOT pour son sourire et la bonne humeur qu'elle nous transmet chaque jour lorsque l'on franchit les portes de l'école.

Mes sincères remerciements à Christophe PROUDHOM, toujours à l'écoute des étudiants.

Enfin, je souhaiterais remercier tout spécialement José CALI et Jérôme VERDUN qui ont toujours été présents pour répondre à mes interrogations, leur disponibilité est sans égal. Ils auront participé grandement à la mise en œuvre de ce travail de fin d'études.

Enfin, et plus intimement, je remercie Dieudonné et Victorine. J'en profite également pour embrasser mes frères et sœurs et ma famille qui m'ont suivi de loin mais étaient pourtant si proches.

# Table des matières

Remerciements	1
Introduction	4
<b>I EXPERIENCE DE BOGATIN</b>	<b>6</b>
I.1 DESCRIPTION DE L'EXPERIENCE	6
<i>I.1.1 Analyse de l'expérience</i>	7
I.2 CHOIX DU MODELE D'EVOLUTION	7
<i>I.2.1 Processus stationnaire</i>	9
<i>I.2.2 Bruit blanc</i>	9
<i>I.2.3 Vecteur gaussien</i>	10
<i>I.2.4 Processus moyenne mobile (MA) et autorégressif (AR) d'ordre 1</i>	11
I.3 CONSEQUENCE DU CHOIX DU MODELE D'EVOLUTION	11
<i>I.3.1 Estimation des paramètres des modèles</i>	11
<i>I.3.2 Estimation de la corrélation temporelle du bruit</i>	11
I.4 FILTRAGE CLASSIQUE DE KALMAN EN TOPOGRAPHIE	13
<i>I.4.1 Prédiction</i>	14
<i>I.4.2 Mise à jour et correction</i>	14
<i>I.4.3 Validation du filtrage</i>	16
<b>II METHODE DE CALIBRATION ET RESULTAT DU FILTRAGE DE KALMAN</b>	<b>18</b>
II.1 SIMULATION DES MODELES D'EVOLUTION ET D'OBSERVATION	18
<i>II.1.1 Modèle d'évolution</i>	18
<i>II.1.2 Modèle d'observation</i>	23
II.2 AJUSTEMENT DES MODELES, NOTION DE CALIBRATION	25
<i>II.2.1 Outil de calibration : la fonction maximum de vraisemblance</i>	26
<i>II.2.2 Validation de la fonction de calibration : propriétés de l'estimateur</i>	28
<i>II.2.3 Résultats de la calibration</i>	29
II.3 RESULTAT DU FILTRAGE CLASSIQUE DE KALMAN ET SON APPLICATION EN TOPOMETRIE DE PRECISION	32
<i>II.3.1 Analyse du résultat du filtrage classique de Kalman en simulation</i>	32
<i>II.3.2 Intérêt du filtrage en Auscultation</i>	33
<b>III BRUITS CORRELES : ESTIMATION ET FILTRAGE DE KALMAN A BRUITS CORRELES.</b>	<b>36</b>
III.1 PRISE EN COMPTE DE LA CORRELATION TEMPORELLE DES MODELES	36
<i>III.1.1 Les bruits corrélés AR(1) et MA(1)</i>	38
<i>III.1.2 Simulation des bruits corrélés</i>	39
<i>III.1.3 Filtrage classique des mesures corrélées aux bruits MA(1)</i>	41
III.2 FILTRAGE DE KALMAN A BRUITS CORRELES	44
<i>III.2.1 Test d'estimation de l'intensité de la corrélation</i>	44
<i>III.2.2 Expression de la vraisemblance : filtrage de Kalman à bruits corrélés</i>	44
<i>III.2.3 Résultat de la calibration</i>	49
III.2.3.1 Mesures corrélées aux bruits MA(1)	49
III.2.3.2 Mesures corrélées aux bruits AR(1)	51
<i>III.2.4 Filtrage optimal</i>	52
III.2.4.1 Résultat du filtrage des mesures corrélées aux bruits MA(1)	53
<b>IV APPLICATION SUR DES DONNEES REELLES</b>	<b>55</b>

IV.1	CALIBRATION DES MESURES D'AUSCULTATION	55
IV.2	FILTRAGE A BRUITS CORRELES DES MESURES D'AUSCULTATION	55
	Conclusion	58
	Bibliographie	60
	Transformation de l'angle horizontal	61
	Annexe 2	62
	Kalman type filter under stationary noises	62
	Liste des figures	63

## Introduction

Réaliser des prouesses de précision, jouer de çà et là avec les centièmes de millimètre, faire ainsi des grands bons dans le domaine des sciences topométriques, les géomètres du CERN ne sont pas à leurs premières tentatives, aussi surprenant que cela puisse paraître, ils ont coutume de le faire. Il en est de même pour leurs confrères, dont l'activité quotidienne se résume à la surveillance des ouvrages (ailes d'avions, barrages, sites industriels, centrales nucléaires). Tandis que les uns positionnent des cibles à 500 kilomètres du CERN, les autres retracent historiquement le déplacement des ouvrages.

Il faut pour le moins, reconnaître le fait que l'expertise et les connaissances pointues en techniques de positionnement terrestre ou spatial, ne seraient pas de mise, n'eût été la prise en compte des phénomènes aléatoires. Des processus markoviens, dans la topométrie, n'eût été l'importance du filtre classique de Kalman qui utilisé dans l'ordinateur de navigation du programme Apollo, estima la trajectoire de la fusée en corrigeant les estimations erronées. La statistique des séries temporelles et l'informatique, ont de ce fait, une place importante dans la résolution quotidienne des problèmes de l'Homme.

L'utilisation du filtre classique de Kalman comme solution optimale récursive en topographie, est un apport estimable quant aux progrès techniques réalisés dans ce domaine. Grâce au filtre classique de Kalman, l'information utile est extraite du signal bruité, en minimisant l'erreur de filtrage.

Il réalise l'hybridation des mesures dans les systèmes mobiles de levé. En effet, dans le positionnement aérien, l'hybridation Inertie-GPS des systèmes de navigation électroniques embarqués est de mise. Les erreurs systématiques des centrales inertielles (biais, erreurs aléatoires) sont responsables de la dérive de l'estimation de la position. Pour quantifier et corriger cette dérive, on combine par filtrage de Kalman, ces estimations avec des mesures GPS. Ce système d'hybridation est utilisé en temps réel dans les systèmes de navigation.

En positionnement terrestre, cette même hybridation Inertie-GPS est rencontrée, mais cette fois ci, elle permet le contrôle et détecte le déplacement millimétrique des ouvrages d'art. C'est un cas particulier d'auscultation développé, il y a quelques années par l'IGN<sup>1</sup>. Grâce à ce système de mesure, le suivi sécuritaire et le contrôle géométrique des ouvrages sont assurés.

Dans le domaine maritime, les systèmes de navigation inertielle offrent de piètres performances dans le positionnement des sous-marins, d'où la fusion multi-capteurs par filtrage de Kalman. Une hybridation de mesures inertielles est faite avec deux types de données. La première donnée est issue du loch dit « Doppler ». Un instrument de navigation maritime. Il envoie une onde acoustique dans l'eau et mesure la position du bateau par rapport au fond marin. La deuxième donnée est la distance entre le bateau et le sous-marin. Elle est déterminée par l'onde acoustique émise par le bateau et reçue par le sous-marin. En somme, le filtre combine la position donnée par la centrale, le loch Doppler et la distance bateau sous-marin, pour positionner le sous-marin.

Le filtre de Kalman à bruits corrélés peut être considéré comme une alternative aux solutions de filtrage classique. Minutieusement conçu par des enseignants-chercheurs du Laboratoire Manceau de Mathématiques (LMM), ces derniers, pour tester son rendement ont envisagé en simulation tous les scénarii de filtrage. Ils ont par la suite cherché à l'évaluer dans des situations réelles de la vie

---

<sup>1</sup> Institut national de l'information géographique et forestière.

courante. Pour cela, il est indispensable d'avoir une trajectoire de référence. Celle-ci est obtenue par le déplacement d'un mobile sur le banc interférométrique de l'ESGT d'une longueur de 51 mètres.

En science topographique, le positionnement dynamique est aujourd'hui très apprécié, parce qu'il intègre l'utilisation de systèmes de navigation hybrides dans toutes les applications de mesures embarquées où le véhicule porteur est directement géoreféréncé. Les dites applications de mesures ne sont en réalité qu'un couplage des mesures réalisées par filtrage de Kalman classique. Les enseignants du laboratoire de mathématique, quant-à-eux veulent tester leur filtre, qui serait plus adapté que le filtre de Kalman classique. Les applications de ce nouveau filtre seraient très intéressantes pour le couplage de mesures en photogrammétrie, en télédétection aérienne, en bathymétrie et en «mobile mapping» etc ... .

Il va s'en dire que la collaboration de ces deux laboratoires ne pouvait qu'être de mise, au vu des réalisations qui en découleraient.

Mon travail de fin d'études s'inscrit dans cette logique, évaluer les performances (variance de l'erreur de filtrage) du filtre de Kalman à bruits corrélés qui améliorerait la précision du positionnement d'un mobile sur une trajectoire rectiligne.

Une première analyse a été réalisée en 2014 par Guillaume Chauveau<sup>2</sup> dans le cadre de l'obtention du diplôme Cnam ingénieur géomètre-topographe.

Cette analyse consistait à mettre en place des protocoles expérimentaux du filtrage classique à la topométrie. Ces protocoles me seront très utiles, pour la suite de mon travail. Celui-ci s'inscrit dans la thématique de l'auscultation par filtrage de Kalman à bruits corrélés.

Dans cette optique, je dois répondre à la problématique de l'estimation et du filtrage. Autrement-dit quelle méthode d'estimation vais-je utiliser pour estimer les paramètres du modèle d'évolution ? Quels paramètres du modèle vais-je estimer ? Comment réaliserai-je le filtrage dans l'objectif d'évaluer sa performance ?

Pour répondre à cette problématique, notre travail s'articule en quatre parties. De prime abord, nous présenterons l'expérience d'auscultation que nous avons réalisée. Par la suite, nous aborderons l'estimation à travers la méthode quantitative de calibration. Dans une troisième partie, nous étudierons les bruits corrélés et nous terminerons par l'application sur les données réelles.

---

<sup>2</sup> Guillaume CHAUVEAU, 2014 : *Apport du filtrage de Kalman aux systèmes de positionnement embarqués et à l'auscultation*

# I Expérience de Bogatin<sup>3</sup>

## I.1 Description de l'expérience

Un chariot se déplace le long d'un banc horizontal avec une accélération constante, une position et une vitesse initiales nulles. Pendant une durée de 85 secondes, le chariot parcourt 51 mètres. L'équation horaire du chariot est donnée par la relation (1) :

$$x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (1)$$

$x(t)$  est la distance parcourue (en mètre) en fonction de la durée  $t$  (seconde).  $a_x$  représente l'accélération du mobile suivant l'axe ( $x$ ).

Connaissant la distance parcourue et la durée de parcours, l'accélération du chariot est calculée grâce à l'expression suivante:  $a_x = \frac{2x}{t^2}$ . Cette accélération calculée, nous permet de simuler le mouvement du chariot. Il est rectiligne et uniformément accéléré.

Nous reprenons l'expérience de Bogatin, dans la salle de métrologie de l'ESGT<sup>4</sup>. Rappelons que cette expérience fut réalisée pour la première fois, par Sonja Bogatin et Dušan Kogoj au laboratoire de la Faculté de génie civil et de géodésie de l'Université de Ljubljana (Slovénie).

L'objectif de cette expérience consiste à mesurer au dixième de millimètre, à chaque instant, trois variables. La position, la vitesse et l'accélération du chariot. Nous appelons l'état du mobile, la connaissance simultanée de sa position, sa vitesse et de son accélération. Nous avons besoin d'un appareil de mesure pour effectuer une telle observation. Malheureusement, nous ne disposons pas d'appareil pour réaliser l'observation de l'état du système (chariot). Nous pouvons néanmoins mesurer à chaque instant, la position du chariot. Autrement dit, une observation partielle du mobile est possible, grâce à un tachéomètre. La figure (1) illustre l'observation partielle du mobile.

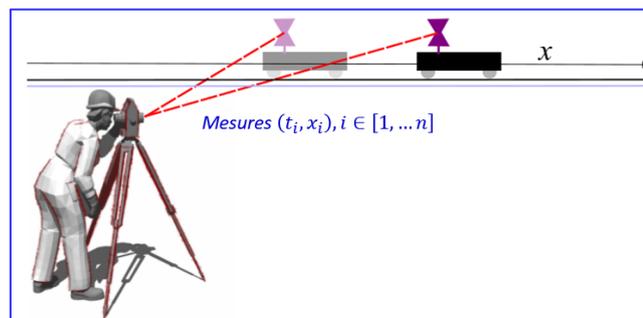


Figure 1 : Mesure des différentes positions  $X_i$  d'un mobile aux instants  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

Sur la figure (1), un géomètre mesure à chaque instant l'angle horizontal, l'angle vertical et la distance pente du mobile. Ces trois informations nous permettent de calculer dans un espace tridimensionnel la position du chariot. Un tachéomètre peut être illustré par la figure (2) ci-dessous.

<sup>3</sup> Bogatin Sonja, et al., 2008: *evaluation of linear Kalman filter processing geodetic kinematic measurements*, **Science Direct**, Measurement 41 (2008) 561-578.

<sup>4</sup> Ecole supérieure des Géomètres et Topographes du Mans.

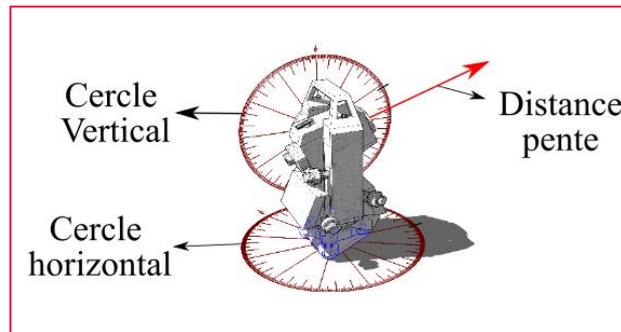


Figure 2 : Illustration d'un tachéomètre

Sur cette figure, nous avons dessiné un cercle horizontal (sur lequel la mesure l'angle horizontal est faite) un cercle vertical (mesure l'angle vertical) et une distance pente.

La loi d'évolution de l'état du mobile, dépend d'un paramètre inconnu  $\sigma \in \Omega$  (ensemble ouvert de  $\mathbb{R}$ ). Nous appelons  $X_k$ , les différents états du mobile. L'observation du système par le processus de mesures  $Y = (Y_1 \dots Y_k)$  est partielle, puisque dans ce cas précis la vitesse et l'accélération ne sont pas mesurées. Nous devons trouver un moyen de compléter cette observation pour qu'elle soit totale, afin de déterminer les différents états du mobile. Toutefois, une analyse de notre expérience est de mise.

### 1.1.1 Analyse de l'expérience

Seule la mesure tachéométrique est utilisée. Par conséquent, il n'y a pas de redondance dans les mesures. L'expérience réalisée est une auscultation. A cet effet, ces mesures d'auscultation retracent historiquement l'état du système. En auscultation, la redondance des mesures est indispensable car elle améliore la précision de points auscultés.

Il y a de la redondance dans les mesures, lorsque l'on combine plusieurs types de mesures. Par exemple, l'observation d'un point par des mesures tachéométriques (à partir de différentes stations), des mesures GPS et des mesures de nivellement.

La redondance doit être de mise dans notre expérience. Pour avoir de la redondance, modélisons l'évolution des états du mobile. La précision du tachéomètre utilisé, implique la fiabilité de la mesure. La combinaison optimale de la redondance, donnée par le modèle d'évolution et la fiabilité des valeurs mesurées nous donne le filtre de Kalman.

Le choix du modèle doit être fait. De ce fait, quel modèle allons-nous choisir ?

## 1.2 Choix du modèle d'évolution

Deux approches de modélisation s'offrent à nous : l'approche déterministe et stochastique. Autrement dit, les mécanismes à l'œuvre dans notre expérience, sont-ils de nature déterministe ou bien de nature stochastique ?

Un modèle d'évolution est déterministe, lorsque l'état instantané détermine de façon univoque<sup>5</sup> l'état ultérieur. Cela se traduit par la relation (2) :

<sup>5</sup> Se dit d'une relation logique entre deux états qui ne s'exerce que dans un sens.

$$X_{k+1} = \Theta X_k \quad \forall k = 1, \dots, n (\in \mathbb{N}) \quad (2)$$

Dans cette équation  $X_k$  représente l'état instantané et  $X_{k+1}$  l'état ultérieur.  $\Theta$  représente l'élément qui assure la transition univoque de l'état instantané à l'état ultérieur.  $\Theta$  est encore appelée la matrice de transition. La loi d'évolution de l'état du système est décrite par cette équation matricielle (l'équation 2) à règles déterministes<sup>6</sup>.

Le modèle déterministe est un cas particulier du modèle stochastique. En effet, un modèle stochastique s'exprime de la manière suivante (équation 3) :

$$X_{k+1} = \Theta X_k + W_k \quad \forall k = 1, \dots, n (\in \mathbb{N}) \quad (3)$$

Dans cette équation,  $W_k$  est une variable (composante) aléatoire. En réalité c'est le produit d'une constante par une autre variable aléatoire<sup>7</sup> à l'état  $k$ . Dans cette équation, si  $W_k = 0$  alors le modèle stochastique devient déterministe. Nous remarquons que les approches déterministes et stochastiques s'entrecroisent, suivant la valeur de  $W_k$  (nulle ou pas).

Nous avons précisé le fait que les mécanismes à l'œuvre dans notre expérience déterminent le choix de notre modèle d'évolution. Une analyse de ces mécanismes doit être de mise.

Nous nous rapprochons du domaine de la haute précision (dixième de millimètre sur une distance de 51 mètres), il existe une infime incertitude sur les conditions initiales du chariot. En outre, le processus mobile étudié, représente une série chronologique<sup>8</sup> (série temporelle) bruitée  $Y_{1:k}$  tel que  $Y_{1:k} = (Y_1 \dots Y_k)$ . Toute mesure étant entachée d'erreur, il est impossible d'effectuer des mesures rigoureusement exactes.

Bien que le mouvement soit rectiligne et uniformément accéléré, la précision des différentes positions du mobile est imprédictible sur une longue durée d'observation (par exemple 6 heures d'observation). Il en est de même de la trajectoire du mobile.

Toutes ces raisons, nous amènent à choisir un modèle d'évolution stochastique. Par conséquent, l'hypothèse fondamentale de notre expérience (l'accélération constante du chariot) est modifiée. Considérons maintenant le fait que le chariot se déplace à accélération constante à un bruit blanc près. Auquel cas, la dérivée de l'accélération est proportionnelle à un bruit blanc, ce qui se traduit par l'équation (4) :

$$\frac{d\ddot{x}}{dt} = \sigma_x \varepsilon_t \quad t > 0, \sigma_x > 0 \quad (4)$$

$\varepsilon_t$  est un bruit blanc à l'instant  $t$ ,  $\sigma_x$  un scalaire, il représente l'intensité du bruit blanc suivant l'axe des ( $x$ ).

L'observation directe de l'état dynamique du système ne peut être réalisée. Néanmoins, nous pouvons estimer les états successifs, grâce à la combinaison de deux équations. L'équation du modèle d'évolution et l'équation du modèle des observations. Cette combinaison nous donne le filtre de Kalman. Nous considérons la présence du bruit blanc dans notre modélisation. Par conséquent, nous

<sup>6</sup> Description du comportement du système par une équation différentielle ou une équation aux dérivées partielles déterministe.

<sup>7</sup> Associe une valeur numérique (comprise entre 0 et 1 par exemple)  $X(s)$  à chaque élément  $s$  de l'espace échantillon.

<sup>8</sup> Les différentes positions du mobile sont régulièrement observées au cours du temps.

distinguons, le bruit du modèle d'évolution (l'erreur de modélisation du système) et le bruit du modèle d'observation.

Ces bruits doivent être parfaitement déterminés, sinon l'utilisation du filtre de Kalman n'a guère d'intérêt. L'objectif poursuivi dans l'expérience que nous réalisons, est celui de déterminer les différents états du mobile au dixième de millimètre près au moins. Pour ce faire, nous combinons un modèle d'évolution des états et les différentes observations du mobile. Nous réalisons un filtrage des différents états grâce aux mesures. Le filtre estime les états avec une précision d'estimation à chaque état. **L'estimation est parfaite, si avant l'opération de filtrage, les bruits des modèles sont déterminés préalablement.** D'où l'intérêt de l'estimation des paramètres des modèles.

Le choix du modèle stochastique d'évolution justifie l'analyse de la composante aléatoire à travers les notions suivantes: processus stationnaire, bruit blanc, vecteur gaussien, processus moyenne mobile et autorégressif d'ordre 1.

### 1.2.1 Processus stationnaire

Une suite de variables aléatoires à valeurs réelles  $\varepsilon_{t_1:t_k} = (\varepsilon_{t_1} \dots \varepsilon_{t_k})$  est stationnaire, si ses propriétés statistiques (moyenne, variance, covariance) restent inchangées au cours du temps.

- L'espérance de chaque variable aléatoire est constante  $\mathbb{E}(\varepsilon_{t_n}) = \mu \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,
- Les covariances sont stables par translation du temps c'est-à-dire, pour tout h  
 $Cov(\varepsilon_{t_n}, \varepsilon_{t_{n+h}}) = \sigma(h) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , la covariance étant définie par la relation suivante :

$$\begin{aligned} Cov(\varepsilon_{t_n}, \varepsilon_{t_{n+h}}) &= \mathbb{E}(\varepsilon_{t_n}, \varepsilon_{t_{n+h}}) - \mathbb{E}(\varepsilon_{t_n}) \times \mathbb{E}(\varepsilon_{t_{n+h}}) \\ &= \mathbb{E}(\varepsilon_{t_n} - \mathbb{E}(\varepsilon_{t_n})) \times \mathbb{E}(\varepsilon_{t_{n+h}} - \mathbb{E}(\varepsilon_{t_{n+h}})) \end{aligned}$$

- La variance est constante ;  $var(\varepsilon_{t_n}) = \sigma(0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Si l'espérance  $\mu$  est nulle on dit que le processus est centré.

Le bruit blanc, les processus « moyennes mobiles » et autorégressifs sont des exemples classiques de processus stationnaires.

### 1.2.2 Bruit blanc

Le processus  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc, s'il forme une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées. Autrement dit, un bruit blanc est une suite de plusieurs séquences de variables aléatoires.

Pour simuler un bruit blanc de valeur moyenne nulle et d'écart-type égal à un, procédons de la manière suivante.

Définissons le nombre d'éléments d'une séquence de variables aléatoires. Pour la première séquence, prenons par exemple 1000 éléments. De ce fait, nous écrivons :

$(\varepsilon_{1:1000})_1 = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{1000})_1$  où  $\varepsilon_i$  ( $i \in [1; 1000]$ ) est un nombre aléatoire (un élément de la première séquence).

Plusieurs séquences (100 par exemple) de variables aléatoires forment le bruit blanc noté  $b_b$ ,

$$b_b = \left\{ (\varepsilon_{1:1000})_1, (\varepsilon_{1:1000})_2, (\varepsilon_{1:1000})_3 \dots (\varepsilon_{1:1000})_{100} \right\}$$

La figure (3) illustre le bruit blanc généré par 1000 tirages de 100 échantillons (100 séquences).

Il faut remarquer que les signaux (séquences) prennent des valeurs comprises entre -4 et 4

(cf figure (3)). La probabilité qu'une valeur soit en dehors de cet intervalle est extrêmement faible.

La valeur moyenne du bruit blanc oscille autour de 0. L'écart-type, quant à lui oscille autour de 1.

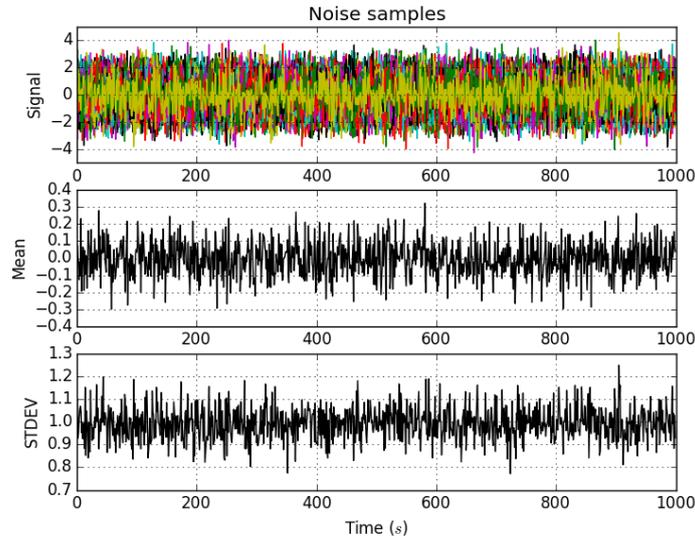


Figure 3 : Simulation d'un bruit blanc centré réduit (signal, moyenne, écart-type).

Ce processus (bruit blanc) se combine à nos différentes mesures de positions réalisées dans notre expérience. Il est dit centré si  $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$  (la valeur moyenne du bruit blanc est nulle). Il est dit réduit si  $var(\varepsilon_t) = 1$  (écart-type du bruit blanc est égal à 1).

Le bruit blanc  $(\varepsilon_t)$  est le processus de base à partir duquel tous les processus stochastiques se définissent. En effet, un processus stochastique  $X = (X_t)_{t \in T}$  est une famille de variables aléatoires  $X_t$  ( $T = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}_+$ ).

La propriété fondamentale du bruit blanc est donnée par l'équation (5) :

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_\tau) = \begin{cases} 0 & \forall t \neq \tau \\ \sigma^2 & \text{si } t = \tau \end{cases} \quad (5)$$

En effet  $\mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_\tau) = 0 \quad \forall t \neq \tau$ , cette relation traduit le fait que, si l'on considère deux séquences de variables aléatoires, par exemple  $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{1000})_1$  définie à l'instant  $t$  et  $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{1000})_2$  définie à l'instant  $\tau$ ,  $(\varepsilon_1)_1$  et  $(\varepsilon_1)_2$  sont décorrélés, par conséquent, il n'y a pas de dépendance temporelle entre les deux séquences.

$\mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_\tau) = \sigma^2$  si  $t = \tau$ , deux éléments  $(\varepsilon_t)_i$  et  $(\varepsilon_{t+h})_i$  pris dans la même série temporelle  $(\varepsilon_t \dots \varepsilon_{t+nh})_i$  n'ont aucun lien. Seule la variance est non nulle.

Il faut remarquer que les bruits blancs sont des processus stationnaires particuliers sans "mémoire". En d'autres termes, la connaissance du passé du processus ne renseigne pas la réalisation future de celui-ci. La dénomination de bruit vient du fait que ce processus ne contient aucune information. L'information étant représentée par l'autocorrélation. Ainsi, aucun signal déterministe ne peut être extrait de ce processus.

### 1.2.3 Vecteur gaussien

Un vecteur aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_n)$  est gaussien, si et seulement si toutes les combinaisons linéaires de ses coordonnées  $\langle c | X \rangle = c_1 X_1 + \dots + c_n X_n$  suivent une loi gaussienne dans  $\mathbb{R}$ , pour tout  $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}$ .

### 1.2.4 Processus moyenne mobile (MA) et autorégressif (AR) d'ordre 1

Soit  $(\varepsilon_{t_i})_{t_i=0,1,\dots,n}$  un bruit blanc centré de variance  $\sigma^2$  et  $a_1 \in ]-1, 1[$  (un paramètre fixé). Le signal  $\{(Z_{t_i})\}_{t_i=1,\dots,n}$  est la réalisation d'un processus moyenne mobile (en anglais Moving Average) d'ordre 1 si la valeur du signal à la date  $t_i$  se calcule de la manière suivante :

$$Z_{t_i} = \varepsilon_{t_i} + a_1 \varepsilon_{t_{i-1}} \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

Le signal  $\{(Z_{t_i})\}_{t_i=1,\dots,n}$  est un processus autorégressif d'ordre 1. La valeur du signal à la date  $t_i$  s'exprime par la relation suivante :

$$\begin{cases} Z_{t_1} = \varepsilon_{t_1} \\ Z_{t_i} = a_1 Z_{t_{i-1}} + \varepsilon_{t_i} \quad i = 2, \dots, n \end{cases} \quad (7)$$

Il faut remarquer que pour un processus AR(1) la valeur du signal obtenu à la date  $t_i$  dépend de la valeur prise du signal à la date  $t_{i-1}$ .

En positionnement embarqué, plusieurs systèmes étudiés, se comportent comme des processus autorégressifs. C'est par exemple, la dérive dans le temps de la mesure accélérométrique de la centrale inertielle. En modélisant l'état dynamique de la centrale comme un processus AR(1), on estime le biais de la mesure, par conséquent la stabilisation de la position inertielle est de mise.

Il convient de préciser que le choix du modèle d'évolution entraîne deux conséquences.

## 1.3 Conséquence du choix du modèle d'évolution

### 1.3.1 Estimation des paramètres des modèles

« All models are wrong, but some are useful... » (Box et Draper., 1987). Nous sommes dans le domaine de la mesure, et comme le dirent les latins, à juste titre : « Errare humanum est... ». L'erreur est humaine. L'utilité des modèles étant de mise, il faut cependant noter, cette part d'erreur associée à ces modèles, due aux différentes sources d'incertitudes. Cette erreur que nous appelons, le bruit des modèles (évolution et observation) dépend d'un ou plusieurs paramètre(s). De ce fait, les estimations des modèles dépendent de ces paramètres, des variables d'entrée et de la structure des modèles. Ces paramètres sont des valeurs numériques qui peuvent être constantes ou variables. Elles représentent l'ajustement des modèles.

### 1.3.2 Estimation de la corrélation temporelle du bruit

Les valeurs d'une série temporelle, sont en général dépendantes. C'est à dire la valeur actuelle de la série est déterminée par la valeur qui la précède et ainsi de suite. Nous avons considéré que nos mesures tachéométriques représentent une série temporelle. Il pourrait y avoir une certaine dépendance entre ces mesures. Il existe plusieurs types de corrélation (spatiale, temporelle ...). Nous nous intéressons uniquement à la corrélation temporelle.

Les variables aléatoires considérées sont des bruits gaussiens stationnaires (vecteur gaussien stationnaire). Nous parlons d'autocorrélation lorsque les variables aléatoires appartiennent à la même série et de corrélation dans le cas contraire. Les bruits affectent nos mesures. Considérons deux observations distantes de  $h$  (constante) avec leurs bruits associés  $(Y_{t-h}, \varepsilon_{t-h})$  et  $(Y_t, \varepsilon_t)$ . Lorsque nous parlons de la corrélation entre les mesures  $Y_{t-h}$  et  $Y_t$ , en réalité nous faisons allusion à la

corrélation qui existe entre les bruits  $\varepsilon_{t-h}$  et  $\varepsilon_t$ . Supposons que les bruits  $\varepsilon_{t-h}$  et  $\varepsilon_t$  gaussiens stationnaires suivent une loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

**Remarque**

Les bruits  $\varepsilon_{t-h}$  et  $\varepsilon_t$  sont stationnaires, ils ne dépendent pas du temps. On considère l'intervalle temporel qui les sépare, comme une distance (distance  $h$ ).

Ils sont dits corrélés lorsque la corrélation (l'autocorrélation) notée  $\rho(h)$  n'est pas nulle.

$$\rho(h) = \text{Corr}(\varepsilon_{t-h}, \varepsilon_t) = \frac{\text{Cov}(\varepsilon_{t-h}, \varepsilon_t)}{\sqrt{\text{var}(\varepsilon_{t-h}) \text{var}(\varepsilon_t)}} \quad (8)$$

Les bruits étant stationnaires, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \text{Cov}(\varepsilon_{t-h}, \varepsilon_t) = \sigma(h)^2 \\ \text{var}(\varepsilon_{t-h}) = \text{var}(\varepsilon_t) = \mathbb{E}(\varepsilon_t, \varepsilon_t) = \sigma(0)^2 \end{cases}$$

La covariance des bruits dépend uniquement de la distance qui sépare les bruits,

$$\Rightarrow \rho(h) = \text{Corr}(\varepsilon_{t-h}, \varepsilon_t) = \frac{\sigma(h)^2}{\sigma(0)^2}$$

En étudiant la variation de la corrélation en fonction de  $h$ , il y a lieu de constater que :

$$\begin{cases} h = 0 \Rightarrow \rho(0) = 1 \\ h \neq 0 \Rightarrow \rho \text{ décroît en fonction de } h \end{cases}$$

Si les bruits s'éloignent dans le temps, alors la distance  $h$  augmente. Lorsque  $h$  augmente,  $\rho$  décroît, autrement dit la corrélation entre les bruits diminue. Cette corrélation continue à diminuer et s'annule pour une valeur de  $h$  donnée. Il va s'en dire que les bruits seront indépendants pour cette valeur de  $h$ . La figure (4) illustre la décroissance de la corrélation temporelle.

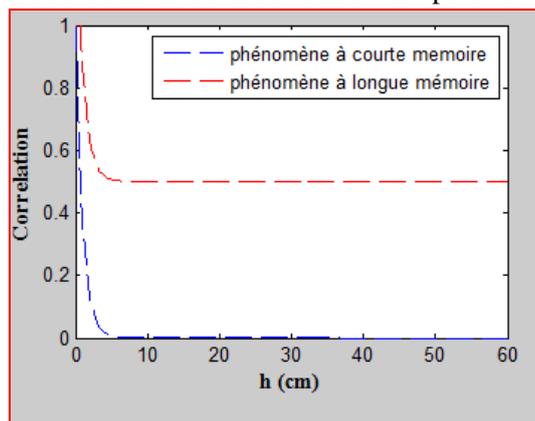


Figure 4 : Décroissance de la corrélation temporelle

Sur la figure 4, nous présentons un phénomène à « longue mémoire » et un phénomène à « courte mémoire ». Il faut remarquer que la corrélation décroît rapidement vers 0 pour un phénomène à courte mémoire. Ce qui n'est pas le cas, pour un phénomène à longue mémoire.

La longue mémoire est un phénomène observé sur des données diverses. Il faut noter que ce phénomène, a fait l'objet de plusieurs études (données hydrologiques, Hurst 1951). Les processus gaussiens étaient l'objet des premiers travaux sur la longue mémoire. A cet égard, le mouvement

brownien fractionnaire, découvert par Kolmogorov<sup>9</sup> et généralisé par Mandelbrot<sup>10</sup> forme le plus célèbre des processus gaussiens à longue mémoire.

Des observations chronologiques comme, il en existe en topographie (série de mesures en auscultation, les données GNSS<sup>11</sup> des stations du RGP<sup>12</sup> etc...) dévoilent des traces de longue mémoire.

Plusieurs définitions de la longue mémoire existent et ne sont toujours pas équivalentes. La longue mémoire d'un processus de mesure, peut être définie comme une décroissance temporelle lente vers 0 de la fonction de corrélation (ou autocorrélation). Au cours du temps, les données restent corrélées.

L'estimation de la corrélation temporelle du bruit dans les modèles est de mise. Au cas où cette corrélation est avérée, le filtre de Kalman classique devient inefficace eu égard à l'estimation des états. Le filtre de Kalman à bruits corrélés est la solution au problème de corrélation. En effet, il utilise la dite corrélation, pour améliorer la précision du positionnement.

Le choix du modèle d'évolution est fait. Les conséquences qui en découlent sont connues. Les mesures de l'expérience sont disponibles. Nous avons la redondance et la fiabilité. La combinaison optimale de ces deux composantes nous donne le filtrage de Kalman. Etudions minutieusement cette notion.

## I.4 Filtrage classique de Kalman en topographie

Considérons le processus  $\{X_k\}_{k=1,2\dots n}$  qui représente l'état non observé du chariot. A l'instant  $k$ , nous enregistrons la mesure  $Y_k$  dans un bruit blanc gaussien et disposons également de l'information suivante :

$$Y_{1:k} = (Y_1 \dots Y_k)$$

Chaque observation représente un processus autorégressif d'ordre 1. De ce fait le filtre de Kalman apparaît ainsi comme une solution optimale de ce genre de processus. Utilisé en topographie et dans bien d'autres domaines, le filtre de Kalman est devenu un outil indispensable dans l'étude des systèmes dynamiques à partir des observations partielles, bruitées. Il offre un cadre fondamental à l'estimation des états et minimise l'estimation de l'erreur de filtrage (variance de l'erreur d'estimation).

L'ensemble des observations  $Y_{1:k}$  est connu. L'estimation de l'état  $X_k$  notée  $\pi_X(k)$  est déterminée en calculant, l'espérance conditionnelle de  $X_k$  sachant  $Y_{1:k}$ :

$$\pi_X(k) = \mathbb{E}[(X_k|Y_{1:k})] \quad k = 1 \dots n \quad (9)$$

L'erreur de filtrage à l'instant  $k$  est notée  $\gamma_{XX}(k)$ . Elle est encore appelée la variance de  $\pi_X(k)$ . C'est l'espérance conditionnelle de  $(X_k - \pi_X(k))(X_k - \pi_X(k))^T$  sachant  $Y_{1:k}$ :

$$\gamma_{XX}(k) = \mathbb{E}[(X_k - \pi_X(k))(X_k - \pi_X(k))^T | Y_{1:k}] \quad (10)$$

La convergence de cette variance grâce au filtrage est toujours de mise.

<sup>9</sup> Mathématicien soviétique et russe dont les apports en mathématiques sont considérables.

<sup>10</sup> Mathématicien franco-américain. Il a développé une nouvelle classe d'objets mathématiques : les fractales.

<sup>11</sup> Global Navigation Satellite System.

<sup>12</sup> Réseau GNSS Permanent

Le filtre prédit l'état et corrige à la fois l'erreur du capteur de mesure notée  $\tilde{\Sigma}_k$ <sup>13</sup> et l'erreur du modèle  $\Sigma$  ( $\Sigma \Sigma^T$  est la variance du modèle).

Pour estimer les différents états du mobile, il faut de prime abord, modéliser l'état d'évolution du mobile (grâce à l'équation du modèle d'évolution). Dans la méthode d'estimation par moindres carrés, une simple erreur de modélisation du système entraîne directement une erreur d'estimation des paramètres d'état. La robustesse du filtre de Kalman, se justifie par cette capacité à intégrer l'incertitude liée à la modélisation du système, pour peu que l'erreur de modélisation reste définie dans un intervalle de confiance. L'équation du filtrage dans notre expérience d'auscultation, s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{cases} X_k = \Theta X_{k-1} + \Sigma \varepsilon_{k-1}, & X_0 = x, \text{ l'état initial} \\ Y_k = H X_k + \tilde{\Sigma}_k \tilde{\varepsilon}_k, & Y_1 = y, \text{ la première mesure} \end{cases} \quad (11)$$

$X_k \in \mathbb{R}^9$ , le vecteur d'état à la  $k^{\text{ième}}$  position ;  
 $Y_k \in \mathbb{R}^3$ , le vecteur d'observation de l'état à la  $k^{\text{ième}}$  position ;  
 $\Theta \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ , la matrice de transition de l'état  $X_{k-1}$  à  $X_k$  ;  
 $H \in \mathbb{R}^{3 \times 9}$ , la matrice des observations, reliant l'état  $X_k$  à l'observation  $Y_k$  ;  
 $\Sigma \Sigma^T \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ , la matrice de variance covariance du modèle d'évolution ;  
 $\tilde{\Sigma}_k \tilde{\Sigma}_k^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , la matrice de variance covariance des observations à l'instant  $k$  ;  
 $\varepsilon_k, \tilde{\varepsilon}_k$ , deux vecteurs de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (*iid*) indépendantes de  $X_k, Y_k$  ;

$X_1 = x$ , est la première estimation de l'état ( $\pi_X(1)$ ) et  $Y_1$  est la première mesure observée. Il n'y a pas de corrélation entre  $\varepsilon_k$  et  $\tilde{\varepsilon}_k$ . Le bruit lié aux états  $\varepsilon_k$  et celui des observations  $\tilde{\varepsilon}_k$  sont indépendants. En effet, une corrélation entre  $\varepsilon_k$  et  $\tilde{\varepsilon}_k$  **introduirait une singularité dans les matrices et dégraderait fortement la qualité du filtre**. La mise en œuvre du filtre comporte deux étapes : la prédiction et la mise à jour/correction que nous allons détailler ci-après.

#### 1.4.1 Prédiction

Nous faisons usage des conditions initiales:  $\pi_X(0), \gamma_{XX}(0)$ . Grâce à la matrice de transition  $\Theta$ , on passe de l'état  $X_{k-1}$  à  $X_k$ , en déterminant la prédiction de l'estimateur notée  $\tilde{\pi}_X(k)$  et la prédiction de la matrice de variance covariance de l'estimateur  $\tilde{\gamma}_{XX}(k)$  respectivement données par :

$$\begin{cases} \tilde{\pi}_X(k) = \Theta \pi_X(k-1) & k = 2, 3, \dots, n \\ \tilde{\gamma}_{XX}(k) = \Theta \gamma_{XX}(k-1) \Theta^T + \Sigma \Sigma^T \end{cases} \quad (12)$$

#### 1.4.2 Mise à jour et correction

L'observation  $Y_k$  est utilisée pour corriger l'observation prédite à partir de l'équation (13) :

$$\tilde{\pi}_Y(k) = H \Theta \pi_X(k-1) \quad (13)$$

En faisant la différence entre ces deux valeurs ( $Y_k - \tilde{\pi}_Y(k)$ ), on calcule l'innovation  $\nu_k$  par :

<sup>13</sup> C'est la précision de la mesure tachéométrique. Elle dépend de chaque état  $k$

$$v_k = Y_k - H\theta\pi_x(k-1) \quad (14)$$

Puis la matrice de variance covariance de l'innovation  $\langle v \rangle_k$  est donnée par l'équation (15) :

$$\langle v \rangle_k = H\widetilde{\gamma}_{XX}(k)H^T + \widetilde{\Sigma}_k\widetilde{\Sigma}_k^T \quad (15)$$

Pondérée par le gain de Kalman  $K_k$ , l'innovation corrige la prédiction de l'estimateur  $\widetilde{\pi}_x(k)$ . Le gain de Kalman quant à lui, est calculé en fonction de la matrice de variance covariance de l'innovation  $\langle v \rangle_k$ , de la matrice des observations  $H$  et de la prédiction de la matrice de variance covariance  $\widetilde{\gamma}_{XX}(k)$  à partir de la relation (16) :

$$K_k = \widetilde{\gamma}_{XX}(k)H^T\langle v \rangle_k^{-1} \quad (16)$$

### Remarque

D'après l'équation (14), il y a une transformation (le produit  $H\theta$ ) qui assure le passage de l'état prédit  $\widetilde{\pi}_x(k-1)$  à l'observation prédite  $\widetilde{\pi}_y(k)$ . En effet, la matrice  $\theta$  permet la transition  $\widetilde{\pi}_x(k-1) \rightarrow \widetilde{\pi}_x(k)$ . La matrice  $H$  quant à elle, transforme l'état prédit  $\widetilde{\pi}_x(k)$  en observation prédite  $\widetilde{\pi}_y(k)$  selon la transformation :

$$\widetilde{\pi}_x(k-1) \xrightarrow{\theta H} \widetilde{\pi}_y(k) \quad (17)$$

Connaissant le gain de Kalman  $K_k$ , nous déterminons l'état estimé  $\pi_x(k)$  et la matrice de variance covariance associée  $\gamma_{XX}(k)$  à partir du couple d'équation (18) :

$$\begin{cases} \pi_x(k) = \widetilde{\pi}_x(k) + K_k v_k \\ \gamma_{XX}(k) = \widetilde{\gamma}_{XX}(k) - K_k H \widetilde{\gamma}_{XX}(k) \end{cases} \quad (18)$$

L'estimation du premier état est donnée par les relations ci-dessous :

$$\begin{cases} \widetilde{\pi}_x(1) = \theta\pi_x(0) \\ \widetilde{\gamma}_{XX}(1) = \theta\gamma_{XX}(0)\theta^T + \Sigma\Sigma^T \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} v_1 = Y_1 - H\theta\pi_x(0) \\ \langle v \rangle_1 = H\widetilde{\gamma}_{XX}(1)H^T + \widetilde{\Sigma}_1\widetilde{\Sigma}_1^T \end{cases} \quad (20)$$

$$K_1 = \widetilde{\gamma}_{XX}(1)H^T\langle v \rangle_1^{-1} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \pi_x(1) = \widetilde{\pi}_x(1) + K_1 v_1 \\ \gamma_{XX}(1) = \widetilde{\gamma}_{XX}(1) - K_1 H \widetilde{\gamma}_{XX}(1) \end{cases} \quad (22)$$

La figure (5) nous dévoile une illustration simplifiée du filtre. Les informations que l'on apporte au filtre (modèle, mesures, variance des mesures, du modèle et les conditions initiales). Les résultats qu'il produit (états estimés et les variances d'estimation des états) et condition sine qua non pour que le filtrage soit optimal (décorrélation des bruits du modèle et des mesures).

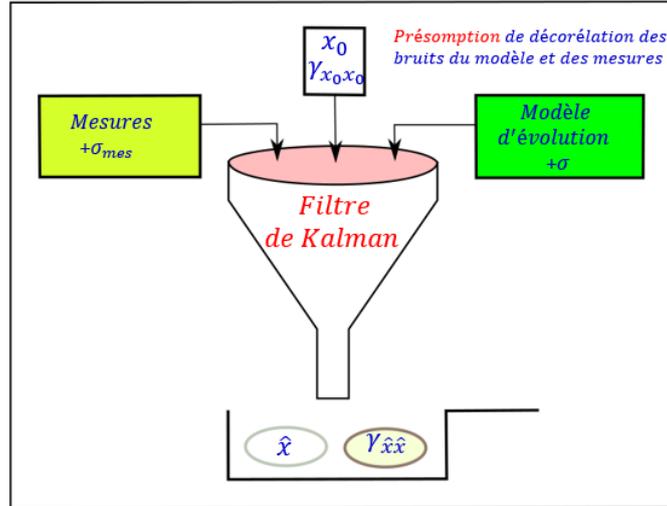


Figure 5 : Illustration simplifiée du filtre de Kalman

### 1.4.3 Validation du filtrage

Le filtre estime des états. Il faut apprécier la solution de filtrage. Autrement dit, il nous faudrait un moyen de contrôle de l'estimation donnée par le filtre. Pour notre expérience (sur des mesures réelles) nous n'avons aucun moyen de contrôler les résultats que nous donne le filtre. C'est la raison pour laquelle, il faut **réaliser des simulations pour valider le filtre de Kalman**.

Une fois que la validation est de mise, nous pouvons l'appliquer sur des mesures réelles. Dans la suite de notre travail, les différents états et observations seront simulés. Ensuite nous filtrerons les mesures simulées et calibrées afin d'estimer les états avec une meilleure précision.

Dans l'opération de filtrage, nous voulons comparer les états simulés avant filtrage, aux états estimés après filtrage. Ils doivent être identiques sinon, le filtre de Kalman ne peut être validé.

Pour valider le filtre, focalisons-nous sur la variance estimée des états. Elle est notée  $\gamma_{XX}(k)$ . Nous simulons des états  $X_{ksim}$  avant le filtrage. Calculons une variance, appelée « la variance empirique ». Elle est notée  $\gamma_{XXemp}(k)$ . Cette variance est définie de la façon suivante :

$$\forall k = 1, 2 \dots n$$

$$\gamma_{XXemp}(k) = (X_{ksim} - \pi_X(k))^2 \quad (23)$$

$X_{ksim}$  est l'état simulé avant filtrage à l'instant  $k$  et  $\pi_X(k)$  est l'état estimé après filtrage. L'expression de la variance estimée par filtrage  $\gamma_{XX}(k)$  est :

$$\gamma_{XX}(k) = \widetilde{\gamma}_{XX}(k) - K_k H \widetilde{\gamma}_{XX}(k) \quad \forall k = 1, 2 \dots n \quad (24)$$

Le filtrage est validé en simulation si et seulement si, la variance empirique  $\gamma_{XXemp}(k)$  est égale à la variance calculée  $\gamma_{XX}(k)$  de l'état estimé :

$$(X_{ksim} - \pi_X(k))^2 = \widetilde{\gamma}_{XX}(k) - K_k H \widetilde{\gamma}_{XX}(k) \quad \forall k = 1, 2 \dots n \quad (25)$$

La variance empirique représente mieux la réalité, car elle fait intervenir l'état simulé qui dans la simulation représente l'état réel du mobile. La variance calculée est celle que l'on estime (détermine).

Nous comparons la vraie valeur  $\gamma_{XX}(k)$  utilisée dans le filtre à la variance de l'erreur de filtrage empirique que nous observons sur les simulations.

L'étape de la simulation des données est fondamentale. Car sans elle, nous ne pouvons pas valider le filtrage classique de Kalman. Après la simulation des modèles d'évolution et d'observation, une estimation des paramètres de ces modèles doit être faite. D'où l'étude d'une méthode quantitative de calibration

## II Méthode de calibration et résultat du filtrage de Kalman

Plusieurs méthodes quantitatives de calibration, existent dans la littérature. La calibration est un concept de “fusion modèle-données” (*model-data fusion*) défini par (Williams et al. 2009) comme la quantification de l’incertitude associée aux données qui sont combinées à un modèle dans une série d’instructions. Certaines méthodes de calibration sont meilleures que d’autres, tout dépend des modèles que l’on désire calibrer. Le point de départ avant l’estimation des paramètres est la connaissance des modèles. Ce qui dans le cadre notre étude passe par la simulation des modèles d’évolution et d’observation.

### II.1 Simulation des modèles d’évolution et d’observation

Nous allons simuler, d’une part les différents états du chariot au cours de son déplacement (à accélération constante à un bruit blanc près) et d’autre part, son observation partielle. Les simulations que nous réalisons vont valider d’une part la procédure de calibration et d’autre part le filtrage de Kalman (classique et à bruits corrélés).

Il faut noter que le modèle d’évolution de l’état, est un modèle de Markov. En effet, le modèle de Markov se fonde sur l’hypothèse de Markov, que l’on peut résumer de la manière suivante : « *Le futur ne dépend que de l’état présent.* ». Le futur ne dépend pas de l’évolution dans le passé. Cette propriété traduit le fait que le présent ne dépend du passé qu’à travers le passé immédiat. Autrement dit, nous sommes à l’instant présent  $t_1$ . L’état d’évolution du chariot à l’instant  $t_2$  est prédit si et seulement si l’état  $t_1$  du chariot est parfaitement connu (position, vitesse et accélération sont connues). Par exemple, supposons que l’accélération n’est pas connue à l’instant  $t_1$ . Alors la prédiction de l’état  $t_2$  ne peut pas être faite, à cause de cette absence d’information (accélération). Un autre exemple, la prédiction de l’état  $t_3$  ne peut pas être de mise lorsque nous sommes à l’état  $t_1$ .

L’hypothèse de Markov, se traduit par la relation :

$$P(\{x(t_i) | x(\tau)\}; \tau < t_{i-1}) = P(\{x(t_i) | x(t_{i-1})\})$$

où  $P(\{x(t_i) | x(\tau)\})$  désigne la probabilité de l’événement  $x(t_i)$  sachant  $x(\tau)$   
où  $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_i$

Cette équation s’interprète de la sorte. La probabilité de transition à l’état  $t_i$  ne dépend pas de l’état  $t_\tau$  qui est un état antérieur à l’état  $t_{i-1}$ . Cette probabilité dépend uniquement de l’état  $t_{i-1}$ .

#### II.1.1 Modèle d’évolution

Simuler le modèle d’évolution revient à déterminer les différents états qu’occuperait un mobile au cours de son mouvement. Il va s’en dire que cette simulation n’est possible qu’eu égard à la connaissance de certains paramètres. Ainsi, présentons clairement les différentes étapes de la simulation.

En dimension 3D, le vecteur d’état à l’instant  $k$  est défini par la connaissance de ses 9 composantes :

$$X_k = (x_k \quad \dot{x}_k \quad \ddot{x}_k \quad y_k \quad \dot{y}_k \quad \ddot{y}_k \quad z_k \quad \dot{z}_k \quad \ddot{z}_k)^T \quad (26)$$

Dans l'équation (26)  $(x_k \ y_k \ z_k)^T$  désigne les coordonnées cartésiennes du chariot. L'équation du modèle est donnée par cette expression :

$$X_{k+1} = \theta X_k + \Sigma(\sigma)\varepsilon_k \quad \forall k = 1, \dots, n \quad (27)$$

$k$  varie de 1 à  $n$  où  $n$  représente le nombre de positions occupées par le mobile. Dans la deuxième partie du chapitre premier, nous avons fait le choix du modèle stochastique d'évolution. L'équation (27) est celle que nous présentons dans cette partie.  $\Sigma(\sigma)\varepsilon_k$  est la composante aléatoire de cette équation.  $\Sigma(\sigma)$  est une constante qui dépend du paramètre  $\sigma$  ( $\sigma \in \mathbb{N}$ ).  $\varepsilon_k$  est un bruit blanc que l'on obtient à l'instant  $k$ .

Pour rappel, l'équation (4), traduit l'hypothèse fondamentale de notre expérience. Cette équation exprime le fait que le chariot subit de légères variations d'accélération. En réalité, c'est l'action des frottements du mobile sur le banc. Ces légères variations d'accélération se font de manière aléatoire (présence du bruit blanc).

La connaissance de l'expression de la matrice de transition des états  $\theta$  et celle de la constante  $\Sigma(\sigma)$ , nous donne la formulation mathématique du modèle d'évolution. En d'autres termes, nous devons déterminer  $\theta$  et  $\Sigma(\sigma)$ .

Le point de départ est l'expression mathématique de l'état d'évolution du mobile, donné par l'équation (28).

$$dX_t = (FX_t + \sigma u_t)dt \quad (28)$$

$F$  est une matrice déterministe de dimension  $(9 \times 9)$ ,  $u_t$  un vecteur de dimension  $(9 \times 1)$  et  $\sigma$  un scalaire. En développant cette équation, nous obtenons la formulation mathématique de l'état d'évolution du mobile (équation 29).

$$d \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ z \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ z \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_t dt + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_t \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_t \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} dt \quad (29)$$

L'équation (29) est une équation différentielle du premier ordre. Les légères variations de l'accélération sont identiques quelle que soit la direction. Par hypothèse, l'intensité du bruit du modèle notée  $\sigma$  est identique suivant les trois axes de l'espace. La calibration du paramètre  $\sigma$  sera de mise.

L'équation (30) représente la forme générale, d'un processus continu décrit par Brown et Hwang (1992) :

$$\frac{dX_t}{dt} = FX_t + Gu_t \quad (30)$$

Dans l'équation (30)  $u_t$  est un vecteur, dont les composantes sont des bruits blancs.  $G$  est une matrice déterministe de taille  $(9 \times 9)$ . Si  $u_t = 0$ , alors l'accélération du mobile est constante. De ce fait, l'équation (30) décrit le mouvement rectiligne uniforme du mobile.

Une solution discrétisée de cette équation (30) est un processus de Markov d'expression :

$$X_{t_{k+1}} = e^{F(t_{k+1}-t_k)}X_{t_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{F(t_{k+1}-s)}G(s)u(s)ds \quad (31)$$

L'équation (31) a deux composantes. Une composante déterministe et une composante aléatoire. La composante aléatoire est donnée par l'équation (32) :

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{F(t_{k+1}-s)}G(s)u(s)ds \quad (32)$$

Posons,

$$\Sigma = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{F(t_{k+1}-s)}G(s)u(s)ds \quad (33)$$

et

$$\begin{cases} \Delta t = t_{k+1} - t_k \\ t_{k+1} = k + 1; t_k = k \end{cases} \quad (34)$$

$\Delta t$  est l'intervalle de temps qui sépare deux visées tachéométriques consécutives. La forme discrète de  $X_{t_{k+1}}$  nous donne l'équation (35) :

$$X_{k+1} = e^{F\Delta t}X_k + \Sigma \quad (35)$$

Soit  $\theta = e^{F\Delta t}$  la matrice de transition d'état.  $X_{k+1}$  équivaut à :

$$X_{k+1} = \theta X_k + \Sigma \quad (36)$$

Si  $F$  est une matrice constante, alors la matrice de transition d'état peut s'écrire comme une série exponentielle (Brown et Hwang, 1992) :

$$\theta = e^{F\Delta t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (F\Delta t)^k = I_3 + F\Delta + \frac{(F\Delta)^2}{(2)!} + 0 \quad (37)$$

car  $F$  est nilpotent d'ordre 3 ( $F^3, F^4, \dots$  sont nulles).

En 1 D :

$$\theta_{1D} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Dans l'équation (38), l'intervalle de temps  $\Delta t$  est constant entre deux mesures. En outre, nous omettons l'indice sous  $\theta$ , parce que la matrice de transition est constante à travers le processus. En 3D,  $\theta$  devient :

$$\theta_{3D} = \begin{pmatrix} \theta_{1D} & {}_30_3 & {}_30_3 \\ {}_30_3 & \theta_{1D} & {}_30_3 \\ {}_30_3 & {}_30_3 & \theta_{1D} \end{pmatrix} \quad (39)$$

Nous avons exprimé, la matrice de transition des états  $\theta$ , en 1D et en 3D. Maintenant, déterminons le bruit du modèle d'évolution  $\Sigma$ .

Soit  $\Sigma\Sigma^T$  la matrice de variance-covariance du bruit du modèle. Si  $\Sigma\Sigma^T$  est une matrice symétrique définie positive, alors il existe une matrice  $\Sigma$  triangulaire inférieure telle que :

$$\Sigma = \text{cholesky}(\Sigma\Sigma^T) \quad (40)$$

La matrice  $\Sigma$  est une « racine carrée » de la matrice  $\Sigma\Sigma^T$ . On effectue la décomposition de Cholesky de la matrice  $\Sigma\Sigma^T$  et on obtient la matrice triangulaire inférieure  $\Sigma$ .

Pour déterminer  $\Sigma$ , il faut dans un premier temps, calculer  $\Sigma\Sigma^T$ , par la suite utiliser la décomposition de Cholesky.

En effet,

$$\Sigma\Sigma^T = \mathbb{E}(\Sigma\Sigma^T) \quad (41)$$

Il vient ensuite :

$$\mathbb{E}(\Sigma\Sigma^T) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \theta(t_{k+1}, s) G(s) \mathbb{E}[u(s)u(s')^T] G(s')^T \theta(t_{k+1}, s') ds' ds \quad (42)$$

$$u(s) = (0 \quad 0 \quad \varepsilon_s)^T \quad (43)$$

En 1D, nous avons :

$$G(s) \mathbb{E}[u(s)u(s')^T] G(s')^T = \sigma^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{s-s'} \end{pmatrix} \quad (44)$$

$\theta(t_{k+1}, s) = e^{F(t_{k+1}-s)} = e^{Fx_k(s)}$ , nous avons posé :  $t_{k+1} - s = x_k(s)$

L'équation (42) devient:

$$\mathbb{E}(\Sigma\Sigma^T) = \sigma^2 \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{Fx_k(s)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{s-s'} \end{pmatrix} e^{F^T x_k(s')} ds' ds \quad (45)$$

$$\delta_{s-s'} = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq s' \\ 1 & \text{si } s = s' \end{cases} \quad (46)$$

$$\mathbb{E}(\Sigma\Sigma^T) = \sigma^2 \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{Fx_k(s)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{F^T x_k(s)} ds ds \quad (47)$$

En développant, l'expression écrite en rouge, et en remplaçant  $e^{Fx_k(s)}$  par sa valeur, comme cela a été fait, pour la détermination de l'expression de la matrice de transition, nous obtenons l'équation (48) :

$$\begin{aligned} & e^{Fx_k(s)} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times e^{F^T x_k(s)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x_k & \frac{x_k^2}{2} \\ 0 & 1 & x_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_k & 1 & 0 \\ \frac{x_k^2}{2} & x_k & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (48)$$

En faisant le produit des trois matrices, nous obtenons l'équation (49):

$$e^{Fx_k(s)} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times e^{F^T x_k(s)} = \begin{pmatrix} \frac{x_k^4}{4} & \frac{x_k^3}{2} & \frac{x_k^2}{2} \\ \frac{x_k^3}{2} & x_k^2 & x_k \\ \frac{x_k^2}{2} & x_k & 1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

En remplaçant l'expression « écrite en violet (équation 49) » par sa valeur, dans la double intégrale, nous obtenons l'équation (50) :

$$\mathbb{E}(\Sigma\Sigma^T) = \sigma^2 \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{pmatrix} \frac{x_k^4}{4} & \frac{x_k^3}{2} & \frac{x_k^2}{2} \\ \frac{x_k^3}{2} & x_k^2 & x_k \\ \frac{x_k^2}{2} & x_k & 1 \end{pmatrix} ds ds \quad (50)$$

Tous calculs faits, il vient que ;

$$\mathbb{E}(\Sigma\Sigma^T) = \sigma^2 \begin{pmatrix} \frac{\Delta t^5}{20} & \frac{\Delta t^4}{8} & \frac{\Delta t^3}{6} \\ \frac{\Delta t^4}{8} & \frac{\Delta t^3}{3} & \frac{\Delta t^2}{2} \\ \frac{\Delta t^3}{6} & \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t \end{pmatrix} \quad (51)$$

Cas : en 1 D

$$\Sigma_{1D} = \Sigma_{1D}(\sigma) = \text{cholesky} \left( \sigma^2 \begin{pmatrix} \frac{\Delta t^5}{20} & \frac{\Delta t^4}{8} & \frac{\Delta t^3}{6} \\ \frac{\Delta t^4}{8} & \frac{\Delta t^3}{3} & \frac{\Delta t^2}{2} \\ \frac{\Delta t^3}{6} & \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t \end{pmatrix} \right) \quad (52)$$

Cas : en 3D

$$\Sigma_{3D} = \Sigma_{3D}(\sigma) = \text{cholesky} \left( \sigma^2 \begin{pmatrix} \Sigma_{1D} & {}_30_3 & {}_30_3 \\ {}_30_3 & \Sigma_{1D} & {}_30_3 \\ {}_30_3 & {}_30_3 & \Sigma_{1D} \end{pmatrix} \right) \quad (53)$$

La simulation de l'état discrétisée du système, en 3D est donnée par l'équation (54) :

$$X_{k+1} = \Theta X_k + \Sigma(\sigma)\varepsilon_k \quad \forall k = 1, \dots, n \quad (54)$$

où  $\Theta = \Theta_{3D}$ ,  $\Sigma(\sigma) = \Sigma_{3D}(\sigma)$ ,

$\varepsilon_k$ , est le vecteur bruit associé à  $X_{k+1}$ , dont chacune des neuf composantes est un bruit blanc gaussien.

### Exemple de simulation

Nous avons analysé les différentes étapes de la construction de la matrice de transition et le bruit du modèle d'évolution. Remarquons que  $\Theta$  et  $\Sigma$  dépendent de  $\Delta t$ . Nous pouvons maintenant simuler les états d'un mobile se déplaçant à accélération constante à un bruit blanc près. Pour ce faire, nous devons connaître : le nombre  $n$  d'états du mobile, l'intervalle de temps  $\Delta t$  qui sépare deux mesures tachéométriques consécutives. La valeur du paramètre  $\sigma$  qui traduit l'intensité du bruit du modèle, et l'état initial  $X_1$  du mobile. Dans l'état initial du mobile, nous donnons la valeur de l'accélération initiale.

Par exemple avec les valeurs ci-dessous, nous simulons le modèle d'évolution. Comme illustrations, la figure (6) nous montre l'influence du bruit blanc sur 1  $m/s^2$  d'accélération. La figure (7) quant à elle, nous présente les différents états occupés par le mobile au cours de son déplacement. Sur la figure (6) nous observons l'influence du bruit blanc sur une accélération constante.

En effet, le bruit blanc fait varier cette accélération de  $1 \text{ m/s}^2$  à  $1,6 \text{ m/s}^2$  au cours du temps avec à chaque fois de petites fluctuations de l'accélération. Sur la figure (7), nous observons la représentation d'un mouvement rectiligne et uniformément accéléré.

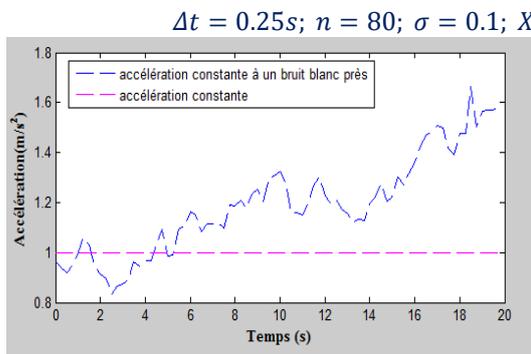


Figure 6 : Simulation de l'accélération du chariot constante à un bruit blanc près

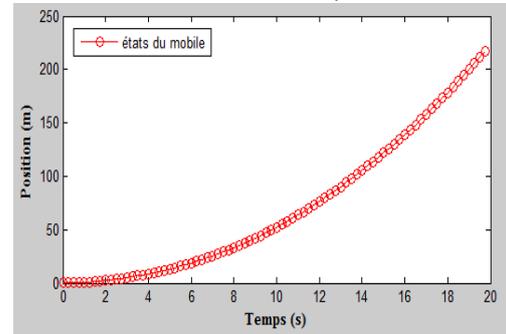


Figure 7 : Simulation de la trajectoire du chariot se déplaçant le long d'un banc rectiligne

### II.1.2 Modèle d'observation

Simuler le modèle d'observation revient à déterminer les différentes mesures d'un tachéomètre qui mesurerait les différentes positions du mobile. Les observations et les états simulés seront combinés dans le filtrage de Kalman. Nous rappelons que la validation du filtrage passe par cette étape de simulation.

Nous appelons  $Z_k$  la mesure tachéométrique à la  $k^{\text{ième}}$  position  $Z_k = (Hz_k \ V_k \ d_k)^T$ . Une mesure réalisée, nous donne: l'angle horizontal  $HZ_k$ , l'angle vertical  $V_k$  et la distance pente  $d_k$ . La matrice de variance associée aux différentes mesures tachéométriques est donnée par l'équation (55) ci-après :

$$R_l = \begin{pmatrix} \sigma_{Hz}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_V^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_d^2 \end{pmatrix} \quad (55)$$

$\sigma_{Hz}, \sigma_V, \sigma_d$ , sont les précisions du tachéomètre. Transformées en coordonnées cartésiennes, nous obtenons l'équation (56):

$$Y_k = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} d_k \cdot \sin(V_k) \cdot \sin(Hz_k) \\ d_k \cdot \sin(V_k) \cdot \cos(Hz_k) \\ d_k \cdot \cos(V_k) \end{pmatrix} \quad (56)$$

Les différentes positions simulées sont calculées grâce à l'équation (57) :

$$Y_k = HX_k + \tilde{\Sigma}_k(X_k)\tilde{\epsilon}_k \quad \forall k = 1, \dots, n \quad (57)$$

Dans cette équation,  $\tilde{\Sigma}_k(X_k)\tilde{\epsilon}_k$  représente la composante aléatoire. C'est l'écart-type de la mesure  $Y_k$ . Cet écart-type dépend de l'état  $X_k$ , de ce fait  $\tilde{\Sigma}_k(X_k)$  n'est pas constant.  $\tilde{\epsilon}_k$  est un bruit blanc.

$H$  est la matrice d'observation qui s'exprime par :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (58)$$

Pour déterminer l'expression de  $\tilde{\Sigma}_k(X_k)$ , nous nous servons de la décomposition de Cholesky. En effet, connaissant  $\tilde{\Sigma}_k(X_k)\tilde{\Sigma}_k(X_k)^T$  la matrice de variance covariance de la mesure  $Y_k$ , nous déterminons  $\tilde{\Sigma}_k(X_k)$  en faisant usage de la décomposition de Cholesky de cette matrice. Nous calculons  $\tilde{\Sigma}_k(X_k)\tilde{\Sigma}_k(X_k)^T$  grâce à l'équation (59) ce qui donne :

$$\tilde{\Sigma}_k(X_k)\tilde{\Sigma}_k(X_k)^T = D_k \cdot R_l \cdot D_k^T \quad (59)$$

Nous connaissons la matrice  $R_l$  grâce à l'équation (55), déterminons l'expression de la matrice  $D_k$ . Les écarts-types  $\sigma_{x_k}, \sigma_{y_k}, \sigma_{z_k}$  associés à la position  $Y_k$  sont déterminés, grâce à la matrice Jacobienne  $D_k$  de passage :  $(Hz_k \ V_k \ d_k)^T \xrightarrow{D_k} (x_k \ y_k \ z_k)^T$   
La matrice Jacobienne de passage est donnée par la relation (60) :

$$D_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_k}{\partial Hz_k} & \frac{\partial x_k}{\partial V_k} & \frac{\partial x_k}{\partial d_k} \\ \frac{\partial y_k}{\partial Hz_k} & \frac{\partial y_k}{\partial V_k} & \frac{\partial y_k}{\partial d_k} \\ \frac{\partial z_k}{\partial Hz_k} & \frac{\partial z_k}{\partial V_k} & \frac{\partial z_k}{\partial d_k} \end{pmatrix} \quad (60)$$

Soit après avoir explicité les dérivées :

$$D_k = \begin{pmatrix} d_k \cdot \sin(V_k) \cdot \cos(Hz_k) & d_k \cdot \cos(V_k) \cdot \sin(Hz_k) & \sin(V_k) \cdot \sin(Hz_k) \\ -d_k \cdot \sin(V_k) \cdot \sin(Hz_k) & d_k \cdot \cos(V_k) \cdot \cos(Hz_k) & \sin(V_k) \cdot \cos(Hz_k) \\ 0 & -d_k \cdot \sin(V_k) & \cos(V_k) \end{pmatrix} \quad (61)$$

L'équation (56) lie les positions  $Y_k \ k = 1,2, \dots, n$  aux mesures  $Z_k$ . Du coup, nous calculons aisément les termes de la matrice de l'équation (60). De ce fait, nous obtenons l'équation (61). Il faut remarquer que la détermination de  $D_k$  à partir de l'équation (61) nécessite les mesures simulées  $Z_k$ .

- **Simulation des mesures  $Z_k$**

Dans la simulation des états, l'équation (26) nous donne l'expression du vecteur d'état :

$$X_k = (x_k \ \dot{x}_k \ \ddot{x}_k \ y_k \ \dot{y}_k \ \ddot{y}_k \ z_k \ \dot{z}_k \ \ddot{z}_k)^T$$

Dans cette équation (26),  $(x_k \ y_k \ z_k)^T$  représente la position  $\tilde{X}_k$  du mobile. A ne pas confondre avec  $Y_k$  qui est l'observation partielle du mobile (connaissance de la position du mobile) et  $X_k$  qui est l'observation totale du mobile (connaissance de la position, vitesse et accélération du mobile) qui ne peut être observée.

Pour tout  $k$  compris entre 1 et  $n$ , connaissant les positions  $\tilde{X}_k$ , nous pouvons déterminer les observations tachéométriques  $Z_k$  en utilisant les relations de l'équation (62) :

$$\begin{cases} d_k = \sqrt{(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)} \\ V_k = \cos^{-1}\left(\frac{z_k}{d_k}\right) \\ Hz_k = \tan^{-1}\left(\frac{x_k}{y_k}\right) \end{cases} \quad (62)$$

**Remarque**

La fonction tangente est définie dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . En appliquant l'équation (62), nous obtenons des valeurs de  $Hz_k$  appartenant à l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . En réalité, la mesure des angles  $(Hz_k, V_k)$  donnée par un tachéomètre est comprise dans  $]0, 2\pi[$ . Du coup, pour que notre simulation soit conforme à la réalité, nous avons appliqué un code Matlab<sup>14</sup>, qui nous permet de passer d'un angle défini dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  à un angle défini dans  $]0, 2\pi[$ .

Une fois que nous avons les observations simulées  $Z_k$ , nous calculons la matrice  $D_k$  donnée par l'équation (61).

La matrice de covariance des observations  $Y_k$  notée  $\tilde{\Sigma}_k(X_k)\tilde{\Sigma}_k(X_k)^T$  est calculée à chaque instant  $k$  grâce à la relation (59). Tous les éléments de l'équation (59) sont connus, nous déterminons  $\tilde{\Sigma}_k(X_k)$ .

$$\tilde{\Sigma}_k(X_k) = \text{cholesky}\{\tilde{\Sigma}_k(X_k)\tilde{\Sigma}_k(X_k)^T\}$$

$$\tilde{\Sigma}_k(X_k) = \text{cholesky}\{D_k \cdot R_l \cdot D_k^T\}$$

La simulation des mesures d'observation est donnée par l'expression discrétisée suivante :

$$Y_k = HX_k + \tilde{\Sigma}_k(X_k)\tilde{\varepsilon}_k \quad \forall k = 1, \dots, n$$

$\tilde{\varepsilon}_k$  est le vecteur bruit associé à  $Y_k$  de taille  $(3 \times 1)$  donc chacune de ses composantes est un bruit blanc gaussien.  $\tilde{\Sigma}_k(X_k)\tilde{\varepsilon}_k$  modélise l'erreur d'observation. **Nous avons remarqué que le modèle d'évolution que nous avons construit, dépend d'un paramètre  $\sigma$ , qui n'est malheureusement pas connu. Voilà pourquoi, nous déterminerons une valeur approchée  $\hat{\sigma}$  de ce paramètre.** Cette valeur approchée sera déterminée de manière expérimentale.

**Remarque :**

Nous avons simulé des mesures tachéométriques d'un tachéomètre de précisions suivantes :

$$\sigma_{Hz} = \sigma_V = 5 \text{ dmgon}, \sigma_d = 1 \text{ mm}.$$

## II.2 Ajustement des modèles, notion de calibration

Nous concevons la calibration, comme une série de procédures combinant des données avec un modèle, en quantifiant l'incertitude liée aux données et au modèle. Les paramètres à calibrer, représentent une source importante d'incertitude qui affecte les résultats du modèle. Plus le nombre de paramètres d'un modèle est important, plus grande est l'incertitude. L'objectif de l'étape de calibration vise à déterminer une valeur approchée et vraisemblable des paramètres du modèle à

<sup>14</sup> Donné en annexe 1

partir des données observées. Voilà pourquoi, nous utilisons comme outil de calibration, la fonction maximum de vraisemblance.

### II.2.1 Outil de calibration : la fonction maximum de vraisemblance

La fonction maximum de vraisemblance permet de construire l'estimateur du maximum de vraisemblance. L'estimateur du maximum de vraisemblance présente de bonnes propriétés sous des hypothèses relativement générales dites de régularité.

Nous partons du principe selon lequel, **les états étudiés et les positions observées suivent la même loi de probabilité  $\vartheta$** . Cette loi de probabilité  $\vartheta$  traduit le comportement aléatoire de la mesure. Nous l'appelons « la loi de la mesure ». Il faut remarquer que la mesure est toujours liée à une précision. Les paramètres  $\sigma, \sigma_{HZ}, \sigma_V, \sigma_d$  qui caractérisent cette loi de la mesure, sont inconnus. Il y a donc un intérêt à calibrer les modèles dans le but de déterminer les paramètres de la loi.

Pour les géomètres que nous sommes, estimer la précision d'un tachéomètre a une certaine importance. D'une part, le constructeur nous donne la précision associée à un tachéomètre :  $\sigma_{HZ}, \sigma_V, \sigma_d$ . C'est une précision a priori. Elle doit être vérifiée par la pratique. Par conséquent, il faut calibrer le tachéomètre pour contrôler la précision donnée par le constructeur. L'opération de calibration, est d'ailleurs utilisée chez les géomètres spécialisés dans les travaux d'auscultation. Ils le font dans l'optique de dimensionner la précision du réseau d'auscultation. D'autre part, dans une certaine mesure, on pourrait se retrouver dans une situation, où il n'y a pas la documentation technique de l'appareil. De ce fait, aucune information eu égard à la précision. Là encore, la calibration, nous permettrait de déterminer la précision de l'appareil.

Les paramètres de calibration, ne peuvent pas être observés directement, lors d'une campagne de mesures. La combinaison des modèles (la recherche de la fiabilité et de la redondance) permet l'estimation des paramètres  $\sigma, \sigma_{HZ}, \sigma_V, \sigma_d$  par le maximum de vraisemblance :

$$\begin{cases} X_{k+1} = \theta X_k + \Sigma(\sigma)\varepsilon_k \\ Y_k = HX_k + \tilde{\Sigma}_k(\sigma_{HZ}, \sigma_V, \sigma_d)\tilde{\varepsilon}_k \end{cases} \quad \forall k = 1, \dots, n \quad X_1 = x > 0 \quad (63)$$

L'estimation de ces paramètres, se fait par le calcul de la vraisemblance. La vraisemblance mesure la probabilité que notre série d'observations provient de la loi de la mesure, de paramètres à estimer. Les paramètres maximisant cette vraisemblance sont les estimateurs du maximum de vraisemblance.

La fonction de vraisemblance de notre suite d'observations  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  est le produit des densités de probabilité de la suite d'innovation  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  des mesures.

Comme une séquence de bruits blancs gaussiens, une suite d'innovation de mesures est identiquement distribuée. C'est la raison pour laquelle, une suite d'innovation va toujours suivre, comme une séquence de bruits blancs, une loi normale. L'innovation  $v_i$  représente la différence entre une mesure effectuée  $Y_i$  et une mesure prédite  $\tilde{\pi}_Y(i)$  à l'instant  $i$ <sup>15</sup>.

La suite d'innovations  $v_i$  ( $\forall i = 1, \dots, n$ ) où  $\langle v \rangle_i$  est la variance associée à chacune des innovations, est estimée par filtrage de Kalman. Après son estimation, elle est utilisée dans le calcul de la vraisemblance.

<sup>15</sup> Confère l'équation (64)

Rappelons qu'elle s'exprime par le couple d'équation (64) :

$$\begin{cases} v_i = Y_i - H\theta\pi_X(i-1) \\ \langle v \rangle_i = H\theta\gamma_{XX}(i-1)\theta^T H^T + H\Sigma\Sigma^T H^T + \tilde{\Sigma}\tilde{\Sigma}^T \end{cases} \quad (64)$$

La fonction de vraisemblance peut être définie par l'équation (65) :

$$L(Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \vartheta) = \prod_{i=1}^n f_{Y_i, \vartheta}(v_i, \langle v \rangle_i) \quad (65)$$

Lorsque nous calibrons juste le modèle d'évolution  $\vartheta$  ne dépendra que de  $\sigma$ . Par ailleurs, pour une calibration conjointe du modèle d'évolution et d'observation  $\vartheta = (\sigma, \sigma_{HZ}, \sigma_V, \sigma_d)^T$ .

Pierre-Simon de Laplace<sup>16</sup> a montré que l'on obtient la courbe gaussienne de manière universelle, pas seulement pour les jeux de pile ou face, mais pour n'importe quelle expérience aléatoire répétée un très grand nombre de fois à l'identique, avec à chaque fois des essais indépendants. Cette loi gaussienne s'applique également dans les différentes simulations aléatoires réalisées. L'innovation  $v_i$  ( $\forall i = 1, \dots, n$ ) suit la loi normale gaussienne. Par conséquent, chaque densité de probabilité  $f_{Y_i, \vartheta}(v_i, \langle v \rangle_i)$  de la mesure  $Y_i$  suit une distribution normale  $\mathcal{N}(v_i, \langle v \rangle_i)$ . La densité de probabilité de toutes les mesures est donnée par l'équation (66) :

$$f_{Y_i, \vartheta}(v_i, \langle v \rangle_i) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{\det \langle v \rangle_i}} e^{-\frac{1}{2}(v_i^T \langle v \rangle_i^{-1} v_i)} \quad (66)$$

où  $m$  représente le nombre de composantes du vecteur  $v_i$ .

$L(Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \vartheta)$  devient :

$$L(Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \vartheta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{\det \langle v \rangle_i}} e^{-\frac{1}{2}(v_i^T \langle v \rangle_i^{-1} v_i)} \quad (67)$$

On se sert plus généralement du Logarithme de la fonction de vraisemblance. Ce Logarithme transforme le produit de la fonction de vraisemblance en somme, ce qui est bien plus pratique pour les calculs :

$$\ln L(Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \vartheta) = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \times \left( (m \times \ln(2\pi) + \ln(\det \langle v \rangle_i) + (v_i^T \langle v \rangle_i^{-1} v_i)) \right) \quad (68)$$

Nous cherchons les paramètres de  $\vartheta$  qui maximisent la fonction  $\ln L(Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \vartheta^{(Y)})$ . Cette fonction dépend du couple  $(v_i, \langle v \rangle_i)$ . Il est estimé par filtrage.

L'innovation nous donne un moyen de représenter les observations en conservant uniquement la « partie de la mesure » qui ne peut être prédite linéairement par son passé.

$$v_i = v_i(\vartheta), \langle v \rangle_i = \langle v \rangle_i(\vartheta) \quad (69)$$

La fonction de calibration<sup>17</sup> que nous réalisons a comme paramètre d'entrée le vecteur  $(\vartheta)$ . Elle nous retourne la valeur maximale de la vraisemblance calculée par la relation (70) :

$$vraisemblance_{max} = - \sum_{i=1}^n \ln L(Y_i, \vartheta) \quad (70)$$

<sup>16</sup> Mathématicien, astronome, physicien et homme politique français. Il a apporté des contributions fondamentales dans les différents champs des mathématiques, et de la théorie de la probabilité.

<sup>17</sup> Fonction qui calcule la valeur maximale de la vraisemblance

La fonction de calibration a besoin de la série d'observations bruitées  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ . A chaque état  $i$ , elle estime par filtrage le couple  $(v_i, \langle v \rangle_i)$ . Après cette estimation, le maximum de vraisemblance est calculé.

La figure (8) présente de manière synthétique, l'estimation du vecteur des paramètres  $\vartheta$  ci-après :

$$\vartheta = (\sigma, \sigma_{HZ}, \sigma_V, \sigma_d)^T$$

Nous sommes en mesure de simuler des mesures tachéométriques (cf simulation des modèles d'évolution et d'observation) en fonction de  $\sigma_0$  (valeurs particulières de  $\vartheta$  utilisées pour la simulation). L'intérêt d'une telle simulation, est la validation de la procédure d'estimation. En effet, la procédure d'estimation par Maximum de vraisemblance se comprend facilement.

Il y a deux étapes dans la procédure. La première est le calcul de la vraisemblance maximale (la fonction de calibration appelée « fonction Maximum de vraisemblance » calcule la vraisemblance maximale). Nous rappelons que la fonction de vraisemblance dépend de  $\vartheta$ . La deuxième étape est la recherche du vecteur « extremum maximum » de la fonction de calibration. Cette opération est réalisée avec l'usage de la fonction de maximisation.

La fonction de maximisation appartient à la bibliothèque d'optimisation des langages de programmation. L'extrémum maximum  $\sigma_{max}$  déterminé par la fonction de maximisation est en réalité le vecteur  $\sigma_0$  (des paramètres) qui simule les observations.

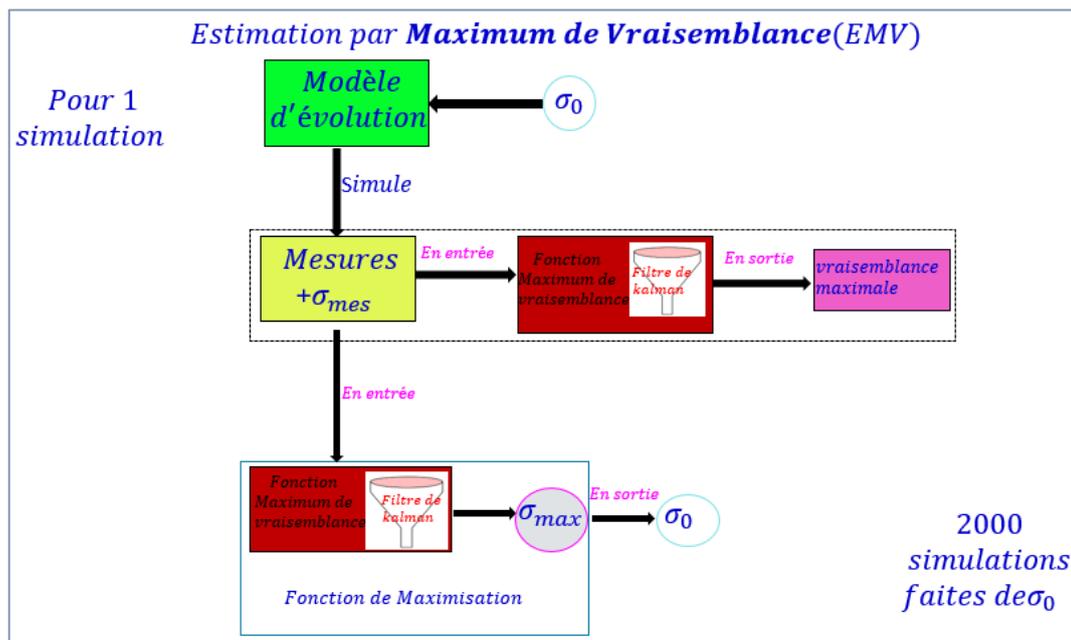


Figure 8 : Schéma synthétique de la procédure d'estimation par le maximum de vraisemblance

La simulation des mesures tachéométriques est faite 2000 fois. De ce fait, nous parlons des simulations de Monte Carlo. Elles contribuent à la validation de la fonction de calibration.

### II.2.2 Validation de la fonction de calibration : propriétés de l'estimateur

- **Simulations de Monte Carlo**

Nous effectuons un grand nombre de simulations en générant un grand nombre d'événements aléatoires dans l'optique d'en tirer des observations statistiques. On donne des valeurs aux composantes de  $\vartheta$ . On simule des mesures. Ensuite on utilise la procédure d'estimation pour

retrouver les valeurs approchées  $\hat{\vartheta}$  des composantes de  $\vartheta$  qui ont été utilisées pour simuler les mesures tachéométriques.

$$\hat{\vartheta} = \hat{\sigma}, \hat{\sigma}_{Hz}, \hat{\sigma}_V, \hat{\sigma}_d$$

Les simulations de Monte Carlo utilisent les échantillons discrets  $(\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2, \hat{\vartheta}_3, \dots, \hat{\vartheta}_{2000})$  (les différents résultats obtenus par la simulation) pour approcher la distribution de probabilité de la loi gaussienne. Plus le nombre de simulations est grand, meilleure sera la forme de la distribution.

• **Propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance.**

L'estimateur présente de bonnes propriétés sous les hypothèses de régularité. Les hypothèses de régularité sont les suivantes :

- ✓ convergence
- ✓ asymptotiquement non-biaisé. Plus l'échantillon sera grand, plus le biais sera négligeable.
- ✓ asymptotiquement efficace. Meilleur estimateur, comparé à l'estimateur par moindres carrés.
- ✓ asymptotiquement normalement distribué. L'estimateur a une distribution de probabilité de la loi normale. On parle également de normalité asymptotique.

On dit généralement du maximum de vraisemblance qu'il est le « *Best Unbiased Estimator (BUE)* » L'estimateur du maximum de vraisemblance est asymptotiquement normalement distribué. En effet, le biais  $(\hat{\vartheta} - \vartheta_v)$  multiplié par la vitesse de convergence  $\sqrt{n}$ , suit une loi normale d'espérance 0 et de variance  $I(\vartheta_v)^{-1}$  ce qui se traduit par :

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta} - \vartheta_v) \rightarrow \mathcal{N}(0, I(\vartheta_v)^{-1}) \tag{71}$$

$\vartheta_v$  désigne la vraie valeur du paramètre,  $n$  la taille de l'échantillon de nos mesures.  $I(\vartheta_v)$  représente la quantité d'information moyenne de Fischer évaluée au point  $\vartheta_v$  (l'écart-type de la loi normale). Les marges d'erreur des estimations, sont dues aux imprécisions associées aux incertitudes entourant le modèle. Ces marges d'erreur diminuent avec la taille de l'échantillon de mesures. Si l'échantillon des mesures tend vers l'infini, on déterminerait avec une marge d'erreur de zéro la valeur des paramètres inconnus.

II.2.3 Résultats de la calibration

Nous utilisons la routine de minimisation de MATLAB© appelée *fminsearch* (nous l'avons appelé fonction de maximisation). Nous cherchons  $\hat{\vartheta}$  tel que :

$$\hat{\vartheta} = \operatorname{argmax}_{\vartheta \in \mathbb{R}^+} (-\ln L(Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \vartheta))$$

La méthode de Monte Carlo (simulations de Monte Carlo), nous donne une estimation de l'espérance  $\mathbb{E}((\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2, \hat{\vartheta}_3, \dots, \hat{\vartheta}_n)) = \mu$  et de la variance  $\mathbb{V}((\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2, \hat{\vartheta}_3, \dots, \hat{\vartheta}_n)) = \sigma^2$  sur les différentes simulations réalisées. Le tableau numéro 1 nous présente les différents résultats de la calibration sur 2000 simulations aléatoires effectuées.

• **Estimation du paramètre  $\sigma$**

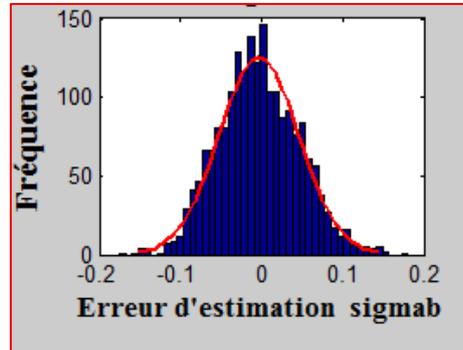
	$\sigma$ (pas d'unité)
Paramètre en entrée	$10,00 \times 10^{-2}$
Moyenne de l'estimateur	$9,96 \times 10^{-2}$
Écart-type de l'estimateur	$5,50 \times 10^{-3}$

Tableau 1 : Résultats de la calibration du paramètre  $\sigma$  sur 2000 simulations

La valeur du paramètre  $\sigma$  qui simule des mesures tachéométriques est  $10 \times 10^{-2}$ . 2000 simulations sont effectuées. Pour chaque simulation, on estime la valeur du paramètre  $\sigma$ . Par la suite, on

détermine la moyenne des valeurs estimées. On obtient  $9,96 \times 10^{-2}$ . Au vu des résultats obtenus, la calibration est une réussite. L'écart entre la valeur donnée en entrée et la valeur moyenne de l'estimateur est de  $4 \times 10^{-4}$ . Cet écart est très faible.

La valeur moyenne de l'estimateur est très proche de la valeur  $\sigma$  (qui permet la simulation des observations).



$$\sqrt{n}(\hat{\sigma} - \sigma) \rightarrow \mathcal{N}(0,33 \times 10^{-2}; (4,93 \times 10^{-2})^2)$$

Figure 9 : Normalité asymptotique du paramètre  $\sigma$  pour  $N=80$  par simulations de Monte-Carlo de l'expérience de Bogatin de  $M=2000$  tirages indépendants.

La figure (9) montre un histogramme en population des valeurs de la différence  $(\hat{\sigma} - \sigma)$ . Sur l'axe des ordonnées, nous avons la fréquence. Si l'on effectue la somme des fréquences, on trouve 2000. Ce qui correspond au nombre de simulations effectuées. Ainsi nous avons 2000 valeurs de  $(\hat{\sigma} - \sigma)$ . Ces valeurs se concentrent de plus en plus densément de façon symétrique autour d'une valeur centrale 0. La distribution de densité est une loi normale de moyenne  $0,33 \times 10^{-2}$  et d'écart-type  $4,93 \times 10^{-2}$ .

- **Estimation conjointe des paramètres  $\sigma, \sigma_{HZ}, \sigma_V, \sigma_d$**

Nous avons décidé de calibrer conjointement tous les paramètres. Toutefois, la routine *fminsearch* de MATLAB©, fonctionne parfaitement lorsqu'elle renvoie en sortie un seul paramètre estimé. Afin de l'utiliser dans ses conditions optimales, nous nous sommes inspirés de la notion de dérivée d'une fonction à plusieurs variables. Elle consiste à dériver la fonction eu égard à une variable, les autres variables étant constantes. La fonction est dérivée autant de fois, qu'elle a de variables. Dans cette estimation, la fonction de vraisemblance a quatre variables  $\sigma, \sigma_{HZ}, \sigma_V, \sigma_d$ .

Une estimation conjointe de quatre paramètres, peut être considérée comme quatre calibrations partielles de chaque paramètre. Nous faisons quatre fois appel dans la procédure de calibration à la routine *fminsearch* de MATLAB©.

**Remarque**

La routine fonctionne parfaitement lorsque le paramètre qu'elle estime n'est pas inférieure à  $10^{-6}$ . Si le paramètre qu'elle estime est inférieure à  $10^{-6}$  sachant que nous réalisons des simulations Monte Carlo (2000 simulations par exemple) alors la distribution obtenue n'aura plus la forme d'une gaussienne.

	$\sigma$ (pas d'unité)	$\sigma_{HZ}$ (rad)	$\sigma_V$ (rad)	$\sigma_d$ (m)
Paramètres en entrée	$10,00 \times 10^{-2}$	$7,85 \times 10^{-5}$	$7,85 \times 10^{-5}$	$1,00 \times 10^{-2}$
Moyenne de l'estimateur	$9,82 \times 10^{-2}$	$7,75 \times 10^{-5}$	$7,80 \times 10^{-5}$	$1,00 \times 10^{-2}$
Écart-type de l'estimateur	$0,70 \times 10^{-2}$	$1,26 \times 10^{-5}$	$1,07 \times 10^{-5}$	$9,38 \times 10^{-4}$

Tableau 2 : Résultats de la calibration des paramètres  $\sigma, \sigma_{HZ}, \sigma_V, \sigma_d$  sur 2000 simulations

D'après les résultats du tableau 2, nous estimons conjointement les paramètres  $\sigma, \sigma_{HZ}, \sigma_V, \sigma_d$ . Les figures 10, 11, 12, 13, présentent l'estimation des paramètres  $\sigma, \sigma_{HZ}, \sigma_V, \sigma_d$  par des simulations de Monte Carlo.

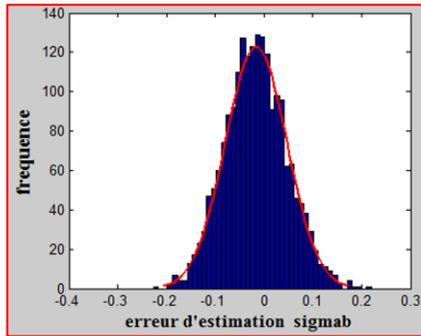


Figure 10 : Normalité asymptotique du paramètre  $\sigma$  pour N=80 par simulations de Monte-Carlo de 2000 tirages indépendants de l'expérience de Bogatin.

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma} - \sigma) \rightarrow \mathcal{N}(1,64 \times 10^{-2}; (6,31 \times 10^{-2})^2)$$

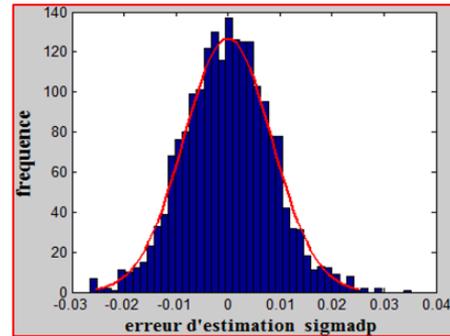


Figure 11 : Normalité asymptotique du paramètre  $\sigma_d$  pour N=80 par simulations de Monte-Carlo de 2000 tirages indépendants de l'expérience de Bogatin.

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}_d - \sigma_d) \rightarrow \mathcal{N}(3,78 \times 10^{-5}; (0,84 \times 10^{-2})^2)$$

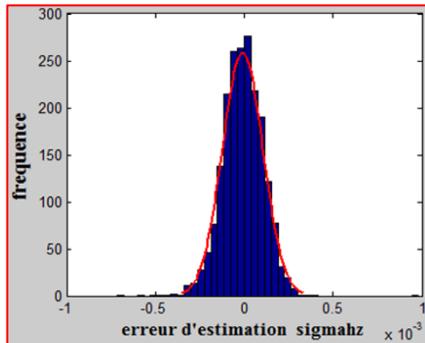


Figure 12 : Normalité asymptotique du paramètre  $\sigma_{HZ}$  pour N=80 par simulations de Monte-Carlo de 2000 tirages indépendants de l'expérience de Bogatin.

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}_{HZ} - \sigma_{HZ}) \rightarrow \mathcal{N}(8,97 \times 10^{-6}; (1,13 \times 10^{-4})^2)$$

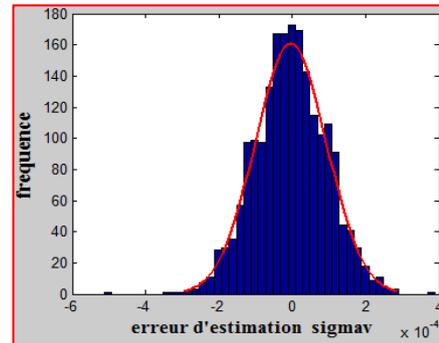


Figure 13 : Normalité asymptotique du paramètre  $\sigma_V$  pour N=80 par simulations de Monte-Carlo de 2000 tirages indépendants de l'expérience de Bogatin

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}_V - \sigma_V) \rightarrow \mathcal{N}(4,07 \times 10^{-6}; (0,97 \times 10^{-4})^2)$$

2000 simulations indépendantes, nous présentent différentes gaussiennes caractérisées chacune par une moyenne et un écart-type. Francis Galton, un homme aux multiples casquettes<sup>18</sup>, cousin de Charles Darwin, parlait de l'omniprésence de la loi gaussienne dans toute sorte de phénomène allant du niveau des océans à la variation de la taille des individus etc. Il disait de la gaussienne qu'elle est : « la loi suprême de la déraison ».

En somme, nous pouvons simuler des données tachéométriques pour une valeur  $\vartheta$  donnée. Supposer que cette valeur de  $\vartheta$  n'est pas connue. De ce fait estimer  $\vartheta$  par la fonction du maximum de vraisemblance. La valeur de  $\vartheta$  estimée (notée  $\hat{\vartheta}$ ) sera comparée à la valeur de  $\vartheta$  supposée inconnue.

<sup>18</sup> Anthropologue, explorateur, géographe, inventeur, météorologue, statisticien britannique

Les modèles simulés étant parfaitement calibrés, nous pouvons maintenant filtrer ces données simulées et analyser le résultat obtenu.

## II.3 Résultat du filtrage classique de Kalman et son application en topométrie de précision

Rappelons, ce qui a été fait jusqu'à présent. L'objectif de notre étude est d'estimer les états d'un système en mouvement rectiligne uniformément accéléré. L'estimation des états, doit être faite au moins au dixième de millimètre sur une distance de 51 mètres. Il va s'en dire que, nous nous approchons du domaine de la haute précision qui est de l'ordre de  $10^{-7}$  mètre. Nous avons modélisé l'évolution du système et nous avons estimé le(s) paramètre(s) du modèle d'évolution par la fonction du Maximum de vraisemblance. Sachant que nous effectuons une observation partielle du mobile (mesures tachéométriques) le filtrage de Kalman classique nous permettra de déterminer l'observation totale du mobile (connaissance simultanée de la position, vitesse et accélération).

Nous savons simuler les mesures tachéométriques. Nous avons étudié la procédure du filtrage. Nous devons maintenant valider notre procédure de filtrage en simulation. La validation du filtrage en simulation doit être de mise. Car lorsque la simulation se déroule parfaitement, nous avons une certitude eu égard au bon fonctionnement du filtre. De ce fait nous pouvons filtrer les données réelles afin d'analyser le résultat obtenu.

### II.3.1 Analyse du résultat du filtrage classique de Kalman en simulation

Les différents états du mobile ont été également simulés. Nous allons comparer le résultat donné par le filtrage (états estimés par filtrage) avec les états que nous avons simulés préalablement. Pour valider le filtrage, on devrait en principe retrouver les mêmes états (ceux simulés avant le filtrage supposés inconnus et ceux déterminés par filtrage).

Dans le chapitre premier, partie 4. Nous avons présenté deux notions, la variance empirique et la variance calculée (estimée par filtrage) des états. Nous rappelons que **le filtrage classique de Kalman est validé lorsque la variance empirique est égale à la variance calculée**. Ces deux variances représentent l'erreur de filtrage.

La variance empirique est calculée dans une expérience de simulation. Elle n'est pas calculée dans le filtrage des observations réelles. En effet « ce que nous déterminons par filtrage » est en réalité connu dans une expérience de simulation.

Observons l'erreur de filtrage de Kalman sur la figure (14). La variance empirique (en rouge) oscille autour de la variance calculée (courbe bleue). De 0 à 10 itérations, la variance empirique a une valeur de  $3,2 \times 10^{-7} m$ . Par la suite elle croît au fur et à mesure que le nombre d'itérations augmente.

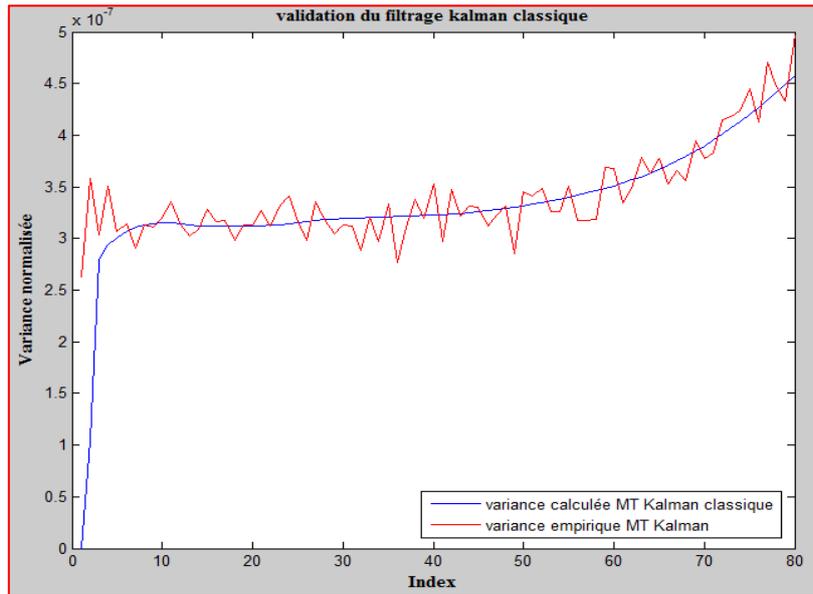


Figure 14 : Variance de l'erreur de filtrage

L'erreur de filtrage passe de  $3,2 \times 10^{-7}m$  à  $4,5 \times 10^{-7}m$ . Cette erreur est incompressible. Autrement dit, elle ne peut pas être nulle. En effet, elle est minimale, lorsqu'une calibration des modèles a été de mise avant le filtrage.

L'amplitude des oscillations de la variance empirique diminue au fur et à mesure que l'on augmente le nombre de simulations (simulations de Monte Carlo). A partir de 10 000 simulations, les deux variances sont complètement confondues. De ce fait, l'estimation représente à 99,98 % la réalité simulée.

### Remarque

A l'issue du filtrage, nous avons la variance empirique et la variance estimée. De ce fait, nous avons deux vecteurs que nous renvoie le filtre. Le premier étant par exemple la variance empirique et le deuxième la variance estimée. Une simulation de Monte Carlo, nous renvoie deux vecteurs comme nous l'avons dit. 10 000 simulations de Monte Carlo, dévoile le fait que nous réalisons le filtrage 10 000 fois. Par la suite, nous faisons la moyenne des simulations pour les deux variances. Le résultat obtenu par exemple à la figure (14) est la valeur moyenne de 2 000 simulations.

Nous pouvons valider notre algorithme de filtrage, parce que la variance empirique se superpose à la variance calculée. Autrement dit les états simulés avant le filtrage et ceux estimés sont égaux à une précision du dixième de millimètre.

### II.3.2 Intérêt du filtrage en Auscultation

Les mesures d'auscultation faites sur un système dynamique (bâtiment, pont, ouvrage d'art...) retracent historiquement le comportement tridimensionnel du système. Elles déterminent ses mouvements aussi bien absolus que relatifs. La figure (15) illustre une auscultation des rails SNCF.<sup>19</sup>

<sup>19</sup> Société nationale des chemins de fer français



Figure 15 : Suivi automatisé des mouvements altimétriques de rails SNCF (Système auscultation automatisée) Source : <http://www.auscultation-automatique.fr/> consulté le 08/05/2016.

Ces mouvements peuvent être causés par des travaux à proximité du système, mais également par les mouvements naturels du sol. La détection de ces mouvements implique une combinaison optimale des mesures GNSS et terrestres (tachéométrie et nivellement) qui facilitent le rattachement extérieur à la zone d'auscultation. De plus, la conservation de l'information tridimensionnelle des observations GNSS et terrestres n'est possible que grâce à l'ajustement de ces informations à l'aide d'un modèle de compensation 3D.

Aujourd'hui, des entreprises spécialisées en auscultation investissent de manière significative soit dans le développement d'un logiciel d'ajustement 3D des mesures topométriques (Geolab,...) soit dans l'achat de la licence du logiciel.

Il faut noter que ces investissements représentent un coût financier qui peut être réduit grâce à une solution alternative, l'auscultation par filtrage de Kalman.

Prenons par exemple, le cas de l'auscultation d'un bâtiment (mesure de la déformation du bâtiment au cours du temps). Cela implique un ensemble de mesures (série temporelle) sur une période de temps définie. Certains points du bâtiment feront l'objet d'une observation tachéométrique. Le mouvement des points mesurés doit être modélisé. L'état du système (mouvement des points) doit être défini. La série de mesures des points cibles doit être utilisée dans l'estimation des paramètres de la matrice de transition des états, le bruit du modèle d'évolution et bruit du modèle des observations. La modélisation de la déformation est tout de même une tâche ardue. Une fois que les modèles d'évolution et d'observations sont connus, on peut utiliser le filtre de Kalman pour ausculter le bâtiment (estimer sa déformation) dans un repère tridimensionnel local ou absolu.

Notons que, grâce à une hybridation des mesures inertielles et tachéométriques, nous sommes aujourd'hui capables de contrôler les déplacements et/ou les déformations millimétriques des ouvrages d'art. La figure (16) illustre un exemple de centrale inertielle miniature.

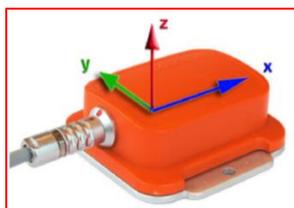


Figure 16 : Centrale inertielle MTi avec son repère associé Source : MTi and MTx User Manual and Technical Documentation p 9

L'auscultation par filtrage de Kalman présente plusieurs avantages. En effet, elle n'utilise pas la redondance sur les mesures. Toutefois une série temporelle de mesures doit être de mise. Notons que,

Les géomètres spécialisés dans les opérations d'auscultation, utilisent généralement la méthode d'ajustement par moindres carrés pour calculer la déformation du système ausculté. Cette méthode d'ajustement utilise des observations surabondantes pour déterminer la précision des points mesurés. De plus, elle suppose l'élimination des erreurs systématiques par étalonnage. Ce qui n'est pas le cas du filtrage.

Il faut remarquer que la variance calculée par filtrage nous permet d'estimer la précision du positionnement. Au dixième de millimètre (et pour des valeurs inférieures) la précision du positionnement est liée à l'influence des phénomènes aléatoires. A cet effet, la valeur de la précision du positionnement, contient une part d'incertitude du fait de la persistante des bruits. Ces bruits peuvent être caractérisés par une dépendance temporelle à court terme ou à long terme. Cette caractéristique (dépendance temporelle) signe la présence de la corrélation des bruits.

## III Bruits corrélés : estimation et filtrage de Kalman à bruits corrélés.

Dans la partie 3 du chapitre premier, nous notons qu'il y a des conséquences eu égard au choix du modèle stochastique d'évolution. Ce qui nous amène à penser qu'il pourrait y avoir de la corrélation dans les mesures effectuées et dans le modèle d'évolution choisi. Cette interrogation sur la présence ou l'absence de la corrélation peut être liée à l'ordre de la précision de notre positionnement. En effet nous nous sommes donnés comme objectif, d'estimer les différents états du mobile au dixième de millimètre, sachant pertinemment que la précision en distance du tachéomètre est millimétrique.

Nous voulons une précision de l'ordre du dixième de millimètre sur une distance de 51 mètres (le banc sur lequel, le chariot se déplace a une longueur de 51 m). Avec une telle précision, nous nous rapprochons du domaine de la haute précision où excellent fort bien les géomètres du CERN. Dans une pareille situation, le déplacement du chariot subit l'influence des effets microscopiques. Les bruits blancs perturbent l'état d'évolution du système.

Si l'on constate que ces bruits blancs sont en réalité liés les uns aux autres dans une structure de corrélation temporelle, il va s'en dire, la perturbation du système sera sans doute de plus forte intensité. D'où la prise en compte de la corrélation temporelle du bruit des modèles, si la corrélation, est de mise dans ces modèles.

### III.1 Prise en compte de la corrélation temporelle des modèles

De nombreux phénomènes naturels semblent représenter des phénomènes à longue mémoire. C'est le cas, notamment de la modélisation statistique des files d'attente. Il en est de même de la modélisation du trafic sur les réseaux Ethernet. Il faut distinguer les processus à longue mémoire des processus à courte mémoire. Ce distinguo est clairement établi, dans l'analyse de la fonction d'auto-corrélation.

La fonction d'auto-corrélation des séries à longue mémoire, possède une propriété très précise : elle suit une loi puissance de la forme :

$$c(\tau) = \tau^{-\gamma} \text{ avec } 0 < \gamma < 1$$

Les figures (17) et (18) nous présentent les représentations de la fonction d'autocorrélation d'un processus AR(1) et celle d'un processus gaussien fractionnaire (un exemple de processus à longue mémoire).

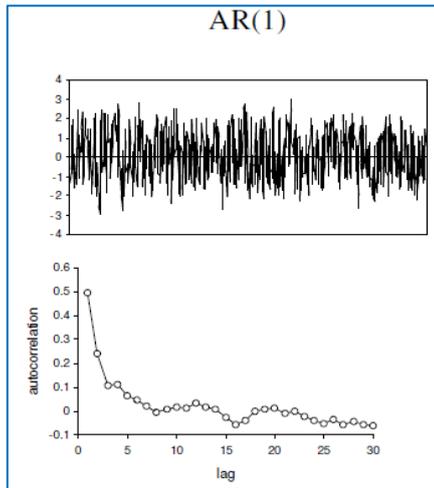


Figure 17 : Fonction d'autocorrélation d'un processus AR(1), source : document web ; **Analyse des séries temporelles, Didier Délégnières p 19**

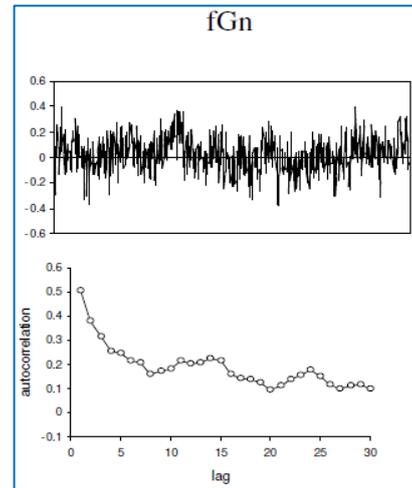


Figure 18 : Fonction d'autocorrélation d'un processus longue mémoire, source : document web ; **Analyse des séries temporelles, Didier Délégnières p 19**

L'auto-corrélation est la corrélation d'une série avec elle-même, selon un décalage (*lag*) défini. L'auto-corrélation de décalage 0 est par définition égale à 1. En analysant les figures (17) et (18) ci-dessus, nous remarquons que, la première fonction présente une extinction exponentielle de l'auto-corrélation (figure 17) alors que la seconde présente une diminution plus lente de type puissance (figure 18).

L'étude de la fonction d'auto-corrélation de ces deux processus nous permet de bien cerner la notion de bruits corrélés. Autrement dit, il existe plusieurs familles de bruits corrélés, en d'autres termes plusieurs structures de corrélation.

Nous distinguons par exemple la famille des bruits AR(1) et celle des bruits MA(1). En effet, ces deux familles n'ont pas la même structure de corrélation. Nous étudierons dans la partie dédiée à la « simulation des bruits corrélés » la structure de corrélation de ces deux familles. Nous avons aussi la famille des bruits gaussiens fractionnaires (fGn) et celles des bruits browniens fractionnaires (fBn).

Chaque famille de bruits est caractérisée par une structure de corrélation bien définie et par une fonction d'auto-corrélation. Lorsque la fonction d'auto-corrélation d'une famille présente une extinction exponentielle, alors la famille est dite à bruits corrélés, comme c'est le cas du bruit AR(1) n'est pas à longue mémoire.

Par ailleurs, si la fonction d'auto-corrélation décroît lentement dans le temps et suit le comportement d'une fonction puissance, alors là, nous pouvons affirmer sans le moindre doute, que la structure de corrélation du processus est à longue mémoire. Par exemple, nous avons la famille des bruits gaussiens fractionnaires et celles des bruits browniens fractionnaires.

Il faut remarquer que tous les bruits corrélés ne sont pas des processus à longue mémoire, et que tous les processus à longue mémoire sont nécessairement des bruits corrélés.

Nous étudierons deux familles de bruits corrélés ; les bruits de type « moyenne mobile » et autorégressif d'ordre 1.

### III.1.1 Les bruits corrélés AR(1) et MA(1)

Nous avons construit des modèles de bruits AR(1) et MA(1) qui décrivent des comportements microscopiques qui par agrégation, produisent de la corrélation. Cette corrélation affecte d'une part la mesure du positionnement tachéométrique et d'autre part l'estimation des états. La figure (19) illustre schématiquement, la corrélation, dans notre expérience d'auscultation.

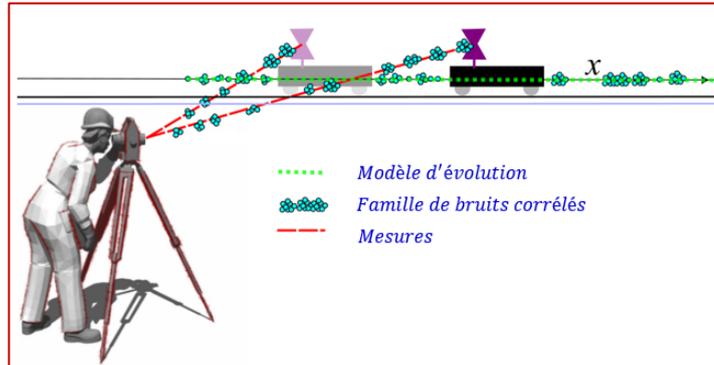


Figure 19 : Illustration de la corrélation dans une expérience d'auscultation

Un exemple concret de bruit corrélé que nous rencontrons le plus souvent en géodésie est l'erreur multi-trajet. Cette erreur se produit quand le signal GPS arrive au récepteur après plus d'un trajet à cause des différentes réflexions qu'aura effectué l'onde (cf figure 20).

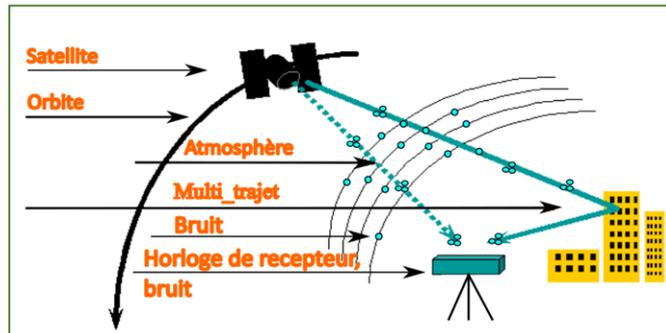


Figure 20 : Illustration de l'erreur du multi-trajet GPS

L'erreur multi-trajet affecte la mesure de positionnement donnée par GPS. Cette erreur dépend des conditions autour de l'antenne et du type d'antenne. Elle est difficile à corriger.

Il n'existe pas, à notre connaissance, de modèle d'état de propagation l'onde. Notre nouvelle solution optimale de filtrage (filtrage à bruits corrélés) pourrait estimer cette erreur si la structure de corrélation du bruit MA(1) ou du bruit AR(1) est présente dans les mesures GPS. Mais pour ce faire, il faudrait en plus de la mise en évidence de la corrélation, modéliser l'état d'évolution du signal.

Pour estimer la présence de la corrélation dans les données réelles tachéométriques, il faut passer par une étape de simulation des observations corrélées. Nous devons être capables de simuler dans un premier temps des bruits corrélés.

### III.1.2 Simulation des bruits corrélés

Nous avons implémenté une méthode de simulation des gaussiens de variance  $\Sigma$ , des bruits moyenne mobile et autorégressif d'ordre 1.

- **Bruit gaussien de variance  $\Sigma$**

Supposons que l'on voudrait simuler un bruit gaussien de variance  $\Sigma$ . Faisons le choix de la matrice de variance covariance définie positive  $\Sigma$ . Autrement dit, définissons notre matrice de variance covariance. Une fois que cela est fait, générons un vecteur. Nous générons un vecteur « epsilon » de variables aléatoires suivant une loi normale centrée réduite.

$$\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^T \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{I})$$

Autrement dit, la variance de cette série de bruits blancs est égale à l'identité. Soit  $\xi$  le vecteur gaussien que l'on voudrait simuler et qui vérifie la relation ci-après :

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \\ \xi &= (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \sim \mathcal{N}(0, \Sigma) \end{aligned}$$

Puisque nous connaissons la valeur de la matrice de variance-covariance  $\Sigma$ , nous utilisons la décomposition de Cholesky, toute matrice symétrique définie positive admet la décomposition unique donnée par :

$$\Sigma = RR^T \text{ où } R \text{ est une matrice triangulaire inférieure.}$$

En multipliant la matrice R par la séquence de bruits blancs, nous obtenons la série de vecteur gaussiens donnée par :

$$\xi = R\varepsilon$$

Nous remarquons que  $\varepsilon$  suit une loi normale centrée réduite.

$$\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{I})$$

Alors  $\xi = R\varepsilon$  suit également une loi normale centrée de variance  $\Sigma$

$$\xi \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

Toute transformation linéaire de vecteur gaussien nous donne un vecteur gaussien, dont nous pouvons calculer la variance à partir des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{var}(\xi) &= \mathbb{E}(\xi\xi^T) = \mathbb{E}(R\varepsilon\varepsilon^T R^T) \\ \text{var}(\xi) &= R \mathbb{E}(\varepsilon\varepsilon^T) R^T \\ \text{var}(\xi) &= R \mathbb{I} R^T = \Sigma \end{aligned}$$

- **Bruit moyenne mobile (MA(1))**

La séquence  $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  définie une famille de bruits moyenne mobile. La relation de récurrence qui lie le bruit blanc gaussien et le bruit corrélé est donnée par l'équation (72) :

$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} (\varepsilon_i + \alpha \varepsilon_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n, |\alpha| < 1 \quad (72)$$

Pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$   $\xi_i$  est fonction de  $\varepsilon_i$ . Pour simuler des bruits moyenne mobile d'ordre 1, générons aléatoirement une séquence  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  de bruits blancs gaussiens centrés, réduits et indépendants tel que  $\varepsilon_i$  soit de même taille que l'état ( $X_i$ ) ou la mesure ( $Y_i$ ). Ensuite calculons la séquence  $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  dans une boucle itérative où  $\alpha, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i$  sont connus. La structure de corrélation des bruits moyennes mobiles d'ordre 1 est donnée par la relation (73) :

$$\mathbb{E}(\xi_m \xi_n) = \rho(|n - m|) = \mathbb{1}_{\{|n-m|=0\}} + \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \mathbb{1}_{\{|n-m|=1\}} \quad (73)$$

$\alpha$  représente le paramètre de la structure de la corrélation des bruits MA(1).

- **Exemple de simulation : bruit MA(1)**

Une séquence  $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  de bruits MA(1) peut être générée en faisant usage de l'équation (72). En effet, nous devons connaître le nombre  $n$  de variables de la séquence et le paramètre de la structure de corrélation  $\alpha$ . A chaque itération  $i$ , allant de 1 à  $n$ , nous calculons  $\xi_i$  en fonction d'une séquence de bruits blancs  $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ . La figure (21) illustre la simulation d'un processus moyenne mobile d'ordre 1 corrélé à 10%.

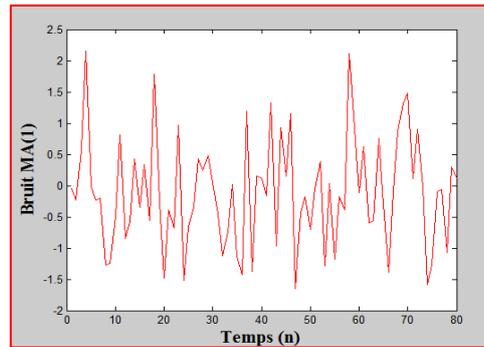


Figure 21 : Simulation d'un processus moyenne mobile d'ordre 1

- **Bruits autorégressifs (AR(1))**

La relation de récurrence (74) définit la famille de bruits autorégressifs d'ordre 1 :

$$\xi_i = \sqrt{1 - \alpha^2} \varepsilon_i + \alpha \xi_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, n, |\alpha| < 1, \xi_1 = \varepsilon_1 \quad (74)$$

La connaissance du paramètre de la structure de corrélation  $\alpha$  et la valeur du premier élément  $\xi_1$  de la séquence nous permet de calculer la séquence  $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ . La fonction de covariance des bruits AR(1) est donnée par l'équation (75) :

$$\mathbb{E}(\xi_m \xi_n) = \rho(|n - m|) = \alpha^{|n-m|} \quad (75)$$

Cette équation décrit la structure de corrélation du processus qui dépend du paramètre  $\alpha$ .

Après l'étape de la simulation des bruits, corrélons les mesures tachéométriques simulées au chapitre deux en fixant une structure de corrélation. Choisissons par exemple, la famille des bruits moyennes mobiles d'ordre 1. Ensuite analysons l'influence de cette corrélation sur le filtrage de Kalman classique.

### III.1.3 Filtrage classique des mesures corrélées aux bruits MA(1)

Nous voulons analyser l'influence du filtre classique de Kalman sur des mesures corrélées. C'est la raison pour laquelle, nous introduisons la structure de corrélation du bruit MA(1) dans les mesures.

L'hypothèse fondamentale qui justifie la meilleure qualité du filtre classique est liée à la nature des bruits qui affectent la mesure et les états. Ils doivent en effet, toujours être indépendants et identiquement distribués.

Fixer une structure de corrélation dans les mesures tachéométriques simulées, revient à considérer dans notre expérience d'auscultation, le déplacement du chariot à une accélération constante à un bruit corrélé près. A cet effet, l'équation (11) qui traduit le filtre classique de Kalman, est transformée. Ce qui change, dans cette équation, c'est la nature des bruits (comme indiqué dans l'équation (76) ci-après).

$$\begin{cases} X_{k+1} = \theta X_k + \Sigma \xi_k, k \geq 1 & X_0 = x \\ Y_k = HX_k + \tilde{\Sigma}_k \tilde{\xi}_k, k \geq 1 & Y_1 = y \end{cases} \quad (76)$$

où  $H \neq 0, \theta, \Sigma, \tilde{\Sigma}_k$  sont connus,  $x$  est une condition initiale déterministe,  $\xi_k$  et  $\tilde{\xi}_k$  des bruits gaussiens corrélés MA(1).

#### Remarque

- $\xi_k$  et  $\tilde{\xi}_k$  sont décorrés. Les deux vecteurs gaussiens sont décorrés. **Pas de corrélation entre les bruits du modèle d'évolution et les bruits du modèle d'observation.**

Par contre, la corrélation est de mise entre les différentes composantes de chaque vecteur. De cette façon, les modèles sont ainsi affectés par la même structure de corrélation, c'est-à-dire  $\xi_k$  et  $\tilde{\xi}_k$  ont la même structure de corrélation MA(1).

L'équation (76) nous donne des observations corrélées. Dans la simulation des bruits MA(1), nous avons remarqué qu'il a deux paramètres qui sont utilisés pour générer des bruits corrélés.  $\alpha$  l'intensité de la corrélation entre les variables gaussiennes et  $n$  le nombre de composantes du vecteur gaussien.

Nous allons modifier l'intensité de corrélation  $\alpha$  des mesures, et pour chaque valeur du paramètre  $\alpha$  (0,1; 0,5; 0,9) nous filtrerons les mesures. A chaque fois, nous nous intéresserons à la variance empirique du filtrage et à la variance estimée par filtrage. A priori, on s'attendrait à une superposition de ces deux variances pour justifier l'efficacité du filtre. Mais que nous dévoile les graphiques (22) et (23) ci-dessous ?

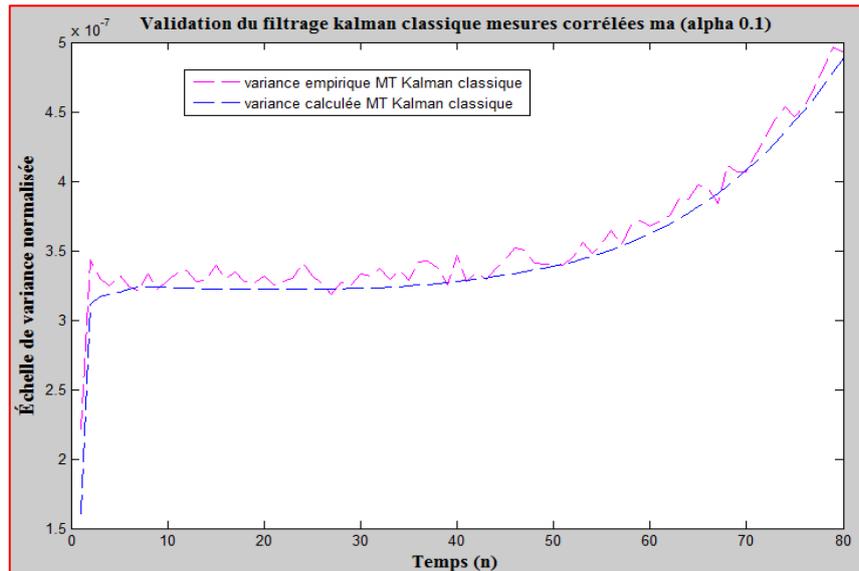


Figure 22 : Filtre classique de Kalman filtrant des mesures corrélées à 10% aux bruits MA (1), variance de l’erreur de filtrage

2000 simulations de Monte Carlo, on s’attendrait à voir sur la figure (22) une parfaite superposition des courbes de variances. Tel n’est pas le cas, à 10 % de corrélation, la variance empirique s’éloigne très faiblement de la variance calculée par filtrage. Toutefois, le phénomène n’est pas bien perceptible. Qu’en est-il de cette éloignement à 50 % de corrélation ?

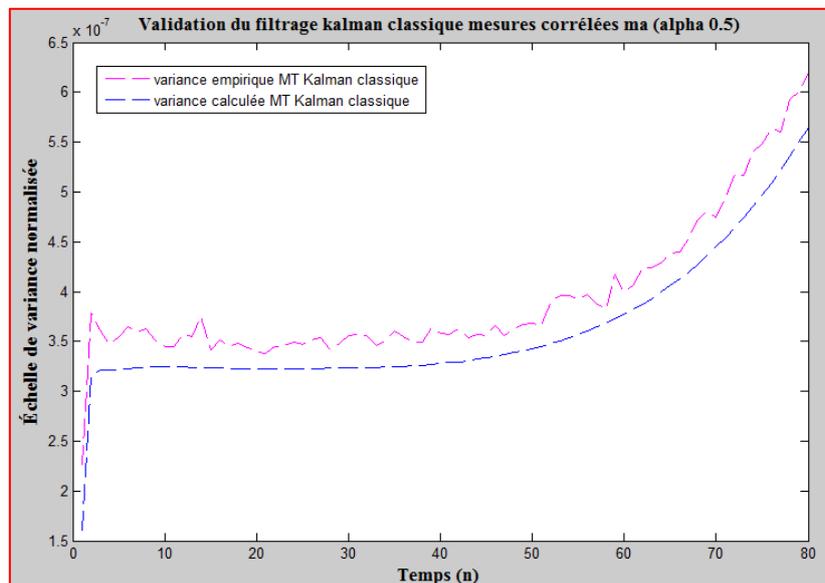


Figure 23 : Filtre classique de Kalman filtrant des mesures corrélées à 50% aux bruits MA (1), variance de l’erreur de filtrage

A 50% de corrélation, on le voit parfaitement sur la figure (23), 2000 simulations de Monte Carlo, les courbes des deux variances ne sont guère superposées, la variance empirique s’éloigne de façon considérable de la variance calculée. Il y a lieu de penser que l’écart entre les deux variances croît avec l’augmentation de la corrélation. Si ce phénomène est avéré, alors on devrait observer à 90 % de corrélation entre les mesures, un écart entre les variances supérieur à celui que l’on observe à 50 %.

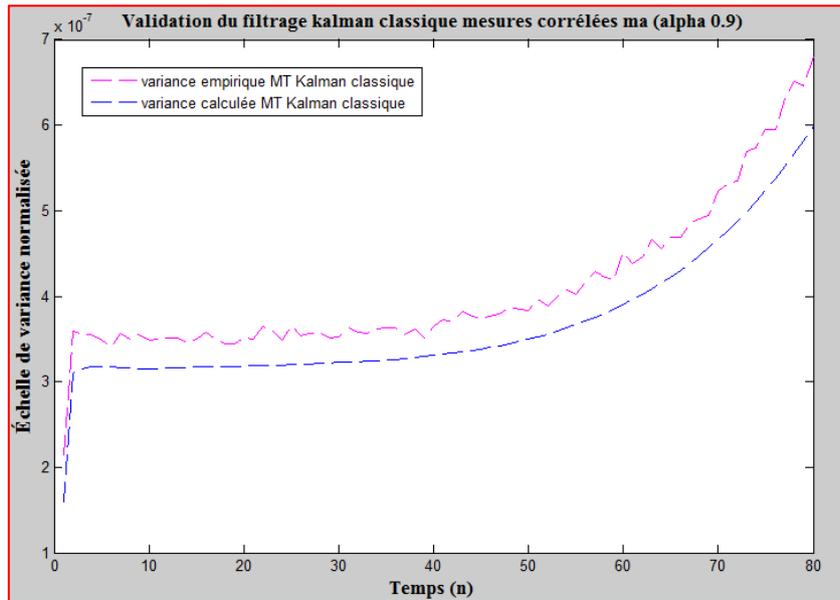


Figure 24 : Filtre classique de Kalman filtrant des mesures corrélées à 90% aux bruits MA (1), variance de l’erreur de filtrage

A 90 % de corrélation, comme le montre la figure (24), l’écart de variances a augmenté en comparaison avec celui que nous avons observé à 50 % de corrélation. **Au vu des trois courbes, nous pouvons conclure que le filtre classique n’est guère efficace quant au filtrage des mesures corrélées.**

L’hypothèse du bruit blanc des modèles devient caduque du fait de la corrélation. La variance de l’estimateur des états (variance estimée par filtrage) est biaisée, comme nous pouvons le constater sur la figure (25). En effet, les deux variances ne se superposent pas. La validation du filtrage n’est pas de mise, parce que la variance calculée par filtrage sous-estime la variance empirique.

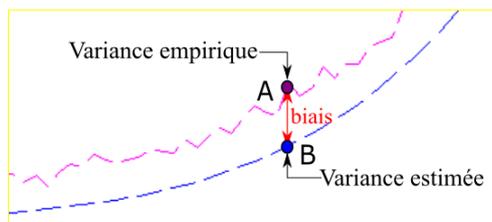


Figure 25 : Inefficacité du filtre classique de Kalman à estimer des états corrélés à 90% aux bruits MA(1)

Entre les deux variances de la figure (25), il faut noter que celle qui rend compte de la réalité, est la variance empirique parce qu’en simulation, on estime des états dont on connaît la position. L’intérêt d’une telle initiative est de pouvoir apprécier le résultat du filtrage. De ce fait, on saura si l’estimation donnée par le filtre est bonne ou mauvaise. La figure (25) nous présente clairement une fausse estimation du filtre classique.

Le filtre classique estime à un instant précis l’état du chariot. Il trouve comme résultat le point B, alors qu’en réalité le chariot se trouve au point A. Cette mauvaise estimation est due à la corrélation. Dans cette optique, le filtre tel que conçu classiquement n’est pas adapté pour filtrer des mesures corrélées. Il convient donc d’utiliser un filtre plus sophistiqué autrement dit, un filtre de Kalman à bruits corrélés.

## III.2 Filtrage de Kalman à bruits corrélés

L'estimation de la corrélation dans les mesures permet, si elle est avérée, la prise en compte du phénomène stochastique dans le filtre de Kalman à bruits corrélés. **Dans la réalité, on pourrait avoir des multiples structures de corrélation des bruits.** Toutefois dans le cadre, de ce travail de fin d'études, nous avons étudié juste deux structures de corrélation (AR(1) et MA(1)). Ainsi, nous ne pouvons estimer que la corrélation de ces deux familles de bruits.

### III.2.1 Test d'estimation de l'intensité de la corrélation

Nous parlons de test d'estimation, parce que nous sommes dans une optique de recherche de la corrélation. En d'autres termes, le test peut révéler l'existence ou non de la corrélation dans les observations. Toutefois, l'estimation est réalisée relativement à une structure précise de corrélation. Autrement dit, nous pouvons estimer l'intensité de la corrélation des observations, eu égard aux bruits AR(1) ou MA(1). A partir du moment où, nous faisons le choix d'une famille précise de bruits, alors nous fixons par la même occasion la structure de corrélation des mesures.

La structure de corrélation des bruits dépend du paramètre  $\alpha$ , l'idée recherchée est celui d'estimer conjointement  $\alpha$  et  $\sigma$  (paramètre du modèle d'évolution).

Si le résultat de l'estimation de l'intensité nous donne une valeur du paramètre alpha:

- $\alpha \neq 0$ , on arrive à estimer la corrélation dans les observations. Dans la pratique, nous testons l'appartenance de nos observations aux deux familles de bruits corrélés. Nous simulons des mesures tachéométriques. Nous fixons d'une part, la structure de corrélation MA(1) et d'autre part la structure de corrélation AR(1). De ce fait, nous avons deux séries de mesures corrélées (l'une aux bruits MA(1) et l'autre aux bruits AR(1)).
- $\alpha = 0$ , absence de corrélation. Ce qui correspond au paramètre caractéristique des processus à bruit blanc.

Nous faisons l'hypothèse selon laquelle le bruit du modèle d'évolution et celui des observations appartiennent à la même famille de corrélation. De plus, ils sont des vecteurs gaussiens stationnaires. Pour déterminer l'intensité de corrélation par l'estimation du maximum de vraisemblance, nous devons de prime abord, calculer la vraisemblance.

### III.2.2 Expression de la vraisemblance : filtrage de Kalman à bruits corrélés

L'article « *Kalman type filter under stationary noises* »<sup>20</sup> étudie le filtrage de Kalman à bruits corrélés. Nous nous sommes inspirés de cet article afin de comprendre la procédure de filtrage. Toutes les relations présentées dans cette partie proviennent de cet article.

Par définition, la vraisemblance s'exprime de la manière suivante (équation 77) :

$$L(Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \vartheta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sqrt{\det\langle v \rangle_i}} e^{-\frac{1}{2}(v_i^T \langle v \rangle_i^{-1} v_i)} \quad (77)$$

Les couples  $(v_i, \langle v \rangle_i)$   $i = 1, 2, \dots, n$  où  $v_i$  désigne l'innovation et  $\langle v \rangle_i$  la variance de l'innovation, doivent être estimés par filtrage à bruits corrélés.

<sup>20</sup> L'article sera donné en annexe 2

Rappelons l'équation (76) qui nous présente, le filtre de Kalman à bruits corrélés :

$$\begin{cases} X_{k+1} = \Theta X_k + \Sigma \xi_k, k \geq 1 & X_0 = x \\ Y_k = H X_k + \tilde{\Sigma}_k \tilde{\xi}_k, k \geq 1 & Y_1 = y \end{cases}$$

Le filtre de Kalman à bruits corrélés a la même philosophie, que le filtre de Kalman classique. Autrement dit, dans le filtrage classique, la condition sine qua non du filtrage est la décorrélation des bruits du modèle et des mesures. Nous rappelons le fait qu'une corrélation (nous parlons du filtre classique) entre  $\varepsilon_k$  et  $\tilde{\varepsilon}_k$  introduirait une singularité dans les matrices qui rendrait impossible l'estimation. Dans le filtre à bruits corrélés, cette condition est présente et fondamentale. C'est la raison pour laquelle une décorrélation des bruits avant la procédure de filtrage (à bruits corrélés) doit être réalisée.

La corrélation affecte les mesures. L'intensité de corrélation est estimée sur les mesures. On ne saurait mettre en évidence, la présence des bruits dans les mesures, sans toutefois utiliser la méthode d'estimation (car c'est l'estimation qui dévoile s'il y a de la corrélation ou pas dans les mesures). Sans une estimation préalable, on ne peut pas savoir si les mesures sont corrélées ou pas.

La décorrélation qui devrait être faite sur les bruits corrélés, est plutôt réalisée sur les mesures (la mise en évidence des bruits passe par une estimation de la corrélation dans les mesures). Nous parlons des observations modifiées pour justifier la décorrélation des mesures.

Nous appelons  $Z = (Z_n)_{n \geq 1}$  le vecteur des observations décorréelées. Il appartient à l'espace  $\mathcal{T}$  des observations modifiées. Une transformation linéaire  $\tau$  réalise la décorrélation des observations.

$$\mathbb{R}: (Y_k, \tilde{\xi}_k)^T \xrightarrow{\tau} \mathcal{T}: (Z_k, \tilde{\varepsilon}_k)^T \text{ avec } k = 1, 2, \dots, n \quad (78)$$

Nous passons de l'espace  $\mathbb{R}$  (des observations corrélées) à l'espace  $\mathcal{T}$  (des observations décorréelées) La dite transformation linéaire qui lie  $Y_k$  à  $Z_k$  s'exprime de la manière suivante :

$$Z_n = \sum_{m=1}^n k(n, m) Y_m \text{ avec } n \geq 1 \quad (79)$$

Réciproquement nous avons l'équation (80)

$$Y_n = \sum_{m=1}^n K(n, m) Z_m \quad (80)$$

Dans les équations (79) et (80), deux nouvelles variables  $k(n, m)$  et  $K(n, m)$  sont présentes.  $k(i, j)$  et  $K(i, j)$  représentent les différentes composantes des matrices  $k$  et  $K$  (matrices de passage d'un espace à un autre) de dimensions  $(n, n)$ .

$$\begin{cases} Z = kY \\ Y = KZ \end{cases}$$

La connaissance de ces matrices permet le passage de l'espace  $\mathbb{R}$  (espace des observations corrélées) à l'espace  $\mathcal{T}$  et réciproquement.

- **Détermination des matrices  $k$  et  $K$**

Soit  $\rho$  la matrice de covariance d'une des deux familles de bruits (nous étudions la structure de corrélation de deux familles de bruits). Il va s'en dire que le filtre à bruits corrélés ne concerne que les deux familles de bruits). Cette matrice de covariance définie positive, fixe la structure de corrélation des bruits.

Toute matrice symétrique définie positive admet une décomposition unique:

$$L = \text{cholesky}(\rho) \quad (81)$$

$$\rho = LL^T \text{ où } L \text{ est une matrice triangulaire inférieure.}$$

Soit  $D$  une matrice diagonale. La connaissance de la matrice  $L$  permet le calcul de la matrice  $D$

$$D(i, i) = L(i, i) \quad (82)$$

$$\begin{cases} k = DL^{-1} \\ K = D^{-1}L^T \end{cases} \quad (83)$$

$k$  est appelé « noyau » et  $K$  est le « noyau réciproque ». Les noyaux  $k$  et  $K$  déterminés sont liés à la structure de corrélation des types de bruits.

- **Etude des propriétés des vecteurs gaussiens corrélés  $\xi$  et  $\tilde{\xi}$**

D'après l'équation (76),  $\xi$  est le vecteur gaussien qui contient l'ensemble des bruits corrélés du modèle d'évolution :

$$\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$$

$\tilde{\xi}$  quant à lui, contient l'ensemble des bruits corrélés des observations.

$$\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_n)^T$$

$(\xi_n)_{n \geq 1}$  et  $(\tilde{\xi}_n)_{n \geq 1}$  représentent deux suites de variables gaussiennes centrées, stationnaires et régulières. Pour tout  $m, n \geq 1$ , supposons que la covariance  $c = (c(m, n), m, n \geq 1)$  est définie positive.

$$\begin{cases} \mathbb{E}(\xi_n) = \mathbb{E}(\tilde{\xi}_n) = 0 ; \mathbb{E}(\xi_n \tilde{\xi}_m) = 0 \\ \mathbb{E}(\xi_m \xi_n) = \mathbb{E}(\tilde{\xi}_m \tilde{\xi}_n) = c(m, n) = \rho(|n - m|), \rho(0) = 1 \end{cases} \quad (84)$$

A la suite  $\xi = (\xi_n)_{n \geq 0}$ , nous lui associons une autre suite d'« innovation »  $(\sigma_n \varepsilon_n)_{n \geq 1}$  définie par l'équation (85) :

$$\begin{cases} \sigma_1 \varepsilon_1 = \xi_1 \\ \sigma_2 \varepsilon_2 = \xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2 | \xi_1) \\ \vdots \\ \sigma_n \varepsilon_n = \xi_n - \mathbb{E}(\xi_n | \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \quad n \geq 2, \end{cases} \quad (85)$$

où  $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad n \geq 1$ , sont des variables indépendantes.

L'équation (85) traduit le fait qu'une variable gaussienne corrélée  $\xi_n$  de variance  $\sigma_n^2$  peut être définie comme étant le produit d'un bruit blanc  $\varepsilon_n$  avec « la racine carré » de sa variance  $\sigma_n$  auquel on ajoute de la corrélation  $\mathbb{E}(\xi_n | \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ .

Déterminons  $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ , pour ce faire, supposons qu'il existe un noyau déterministe (calculé précédemment)

$$k = k(n, m), n \geq 1, m \leq n \text{ tel que } k(n, n) = 1 \text{ et} \quad (86)$$

$$\sigma_n \varepsilon_n = \sum_{m=1}^n k(n, m) \xi_m$$

Pour  $n \geq 1$ , nous notons  $\beta_{n-1}$  les coefficients de corrélation partielle. La relation qui lie les coefficients de corrélation partielle aux noyaux déterministes est la suivante :

$$\beta_{n-1} = -k(n, 1) \quad (87)$$

Notons que  $\sigma_n \beta_n$  est la corrélation entre  $\xi_0$  et  $\varepsilon_n$ ,  $\sigma_n \beta_n = \mathbb{E}(\xi_0 \varepsilon_n)$ . Connaissant  $k(n, m)$  et la relation (85), nous calculons  $(\sigma_n)_{n \geq 2}$  par :

$$\sigma_1^2 = 1$$

$$\sigma_n^2 = \prod_{m=1}^{n-1} (1 - \beta_m^2) \quad (88)$$

La fonction  $c(\cdot, \cdot)$  étant définie positive, il existe également un noyau déterministe réciproque  $K = K(n, m), n \geq 1, m \leq n$  tel que :

$$\xi_n = \sum_{m=1}^n K(n, m) \sigma_m \varepsilon_m \quad (89)$$

Dans l'espace des observations décorréelées  $\mathcal{J}$ ,  $Z$  est une transformation linéaire de  $\zeta$  où  $\zeta$  est un processus autorégressif d'ordre 1. Le filtrage tel que définie dans  $\mathbb{R}$  est transformé dans l'espace  $\mathcal{J}$  par la relation (90).

$$\mathbb{R}: \begin{cases} X_{k+1} = \Theta X_k + \Sigma \xi_k \\ Y_k = H X_k + \tilde{\Sigma}_k \tilde{\xi}_k \end{cases} \xrightarrow{\tau} \mathcal{J}: \begin{cases} X_n = \sum_{m=1}^n K(n, m) b^t \zeta_m \\ Z_n = H b^t \zeta_n + \sigma_n \tilde{\Sigma}_n \tilde{\xi}_n, n \geq 1 \end{cases} \quad (90)$$

où le processus  $\zeta = (\zeta_n)_{n \geq 1}$  ( $2 \times d$ )-dimensionnel est définie par :

$$\zeta_n = A_{n-1} \zeta_{n-1} + \sigma_n b \Sigma \varepsilon_n \quad n \geq 1, \zeta_0 = b x \quad (91)$$

avec

$$A_n = \begin{pmatrix} \Theta & \beta_n \Theta \\ \beta_n I_d & I_d \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} I_d \\ 0_d \end{pmatrix} \quad (92)$$

où  $\beta_n$  est calculée grâce à l'équation (87),  $I_d$  est la matrice identité de taille  $(d \times d)$  et  $0_d$  la matrice de zéros de taille  $(d \times d)$ .

$\Theta$  la matrice de transition définie par l'équation (93):

$$\theta_{1D} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Theta = \begin{pmatrix} \theta_{1D} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \theta_{1D} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \theta_{1D} \end{pmatrix} \quad (93)$$

Dans le modèle transformé (donné par les équations 90 et 91), nous filtrons les observations modifiées (vecteur  $Z$ ). Nous estimons l'innovation et la variance de l'innovation des observations  $Z_{1:n}$ . L'innovation est fonction de l'estimateur des états  $\pi_n(\zeta)$   $n = 1, 2, \dots, n$ , du coup, nous estimons par filtrage les états  $\zeta_n$   $n = 1, 2, \dots, n$  aux différents instants, sachant que nous observons  $Z_{1:n}$ .

- **Calcul de la vraisemblance**

La vraisemblance est calculée en fonction de l'innovation et de la variance de l'innovation des observations  $Z_{1:n}$ . La vraisemblance  $L$  de  $Z_{1:n}$  est calculée en fonction des filtres de  $\zeta$  notés  $\pi_n(\zeta)$ :

$$L(Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \vartheta) = \prod_{i=1}^n f_{Z_i, \vartheta}(v_i, \langle v \rangle_i) \quad (94)$$

$$\ln L(Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \vartheta) = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \times \left( (m \times \ln(2\pi) + \ln(\det \langle v \rangle_i) + (v_i^T \langle v \rangle_i^{-1} v_i)) \right) \quad (95)$$

Brouste<sup>21</sup> montre que  $L(Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \vartheta) = L(Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \vartheta)$ . La vraisemblance calculée dans l'espace transformé est identique à celle que l'on obtient dans l'espace réel. Dans l'espace transformé, on arrive à estimer les paramètres  $\vartheta = (\sigma, \alpha)^T$  du modèle ci-dessous :

$$\begin{cases} X_{k+1} = \Theta X_k + \Sigma(\sigma) \xi_k(\alpha) \\ Y_k = H X_k + \tilde{\Sigma}_k \tilde{\xi}_k \end{cases}$$

Par conséquent, nous faisons usage des relations suivantes :

**Innovation**

$$v_m = Z_m - H b^t A_{m-1} \pi_{m-1}(\zeta) \quad m = 2, 3, \dots, n \quad (96)$$

**Variance de l'innovation**

<sup>21</sup> A. Brouste and M. Kleptsyna (2012) *Kalman type filter under stationary noises*, Systems and Control Letters, 61, 1229-1234.

$$\begin{cases} P_{m-1} = A_{m-1} \gamma_{\zeta\zeta}(m-1) A_{m-1}^t + \sigma_m^2 b \Sigma \Sigma^t b^t \\ \langle v \rangle_m = \sigma_m^2 \tilde{\Sigma}_m \tilde{\Sigma}_m^t + H b^t P_{m-1} b H^t \end{cases} \quad (97)$$

**Gain**

$$\Phi_m = I_{2d} - P_{m-1} b H^t \langle v \rangle_m^{-1} H b^t \quad (98)$$

**Estimateur d'état et l'erreur de filtrage**

$$\begin{cases} \pi_m(\zeta) = A_{m-1} \pi_{m-1}(\zeta) + P_{m-1} b H^t \langle v \rangle_m^{-1} v_m \\ \gamma_{\zeta\zeta}(m) = \Phi_m P_{m-1} \end{cases} \quad (99)$$

### III.2.3 Résultat de la calibration

Nous fixons une structure de corrélation aux mesures. Les mesures sont corrélées d'une part aux bruits MA(1) et d'autre part aux bruits AR(1). Nous simulons ces mesures en utilisant les paramètres rassemblés dans le tableau 3 ci-après.

	$\sigma$	$\alpha$
Test1	$10,00 \times 10^{-2}$	$10,00 \times 10^{-2}$
Test2	$10,00 \times 10^{-2}$	$50,00 \times 10^{-2}$

Tableau 3 : Paramètres ayant servi à la simulation des mesures corrélées aux bruits MA(1) et AR(1)

Rappelons que les paramètres utilisés lors de la simulation des mesures décorréélées sont les mêmes que ceux utilisés pour la simulation des mesures corrélées :

$$\Delta t = 0.25s; n = 80; \sigma = 0.1; X_1 = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$\sigma_{Hz} = \sigma_V = 5 \text{ dmgon}, \sigma_d = 1 \text{ mm}$$

On ajoute un paramètre supplémentaire  $\alpha$  qui fixe la structure de corrélation dans les mesures. Deux tests sont effectués. Autrement dit, nous supposons pour le premier test que  $\sigma$  est inconnu et  $\alpha$  est connu. De ce fait, pouvons-nous par estimation (calibration des mesures) retrouver la valeur de  $\sigma$  ?

#### III.2.3.1 Mesures corrélées aux bruits MA(1)

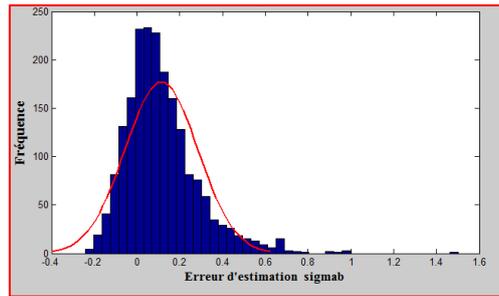
- **Estimation du paramètre  $\sigma$**

Le tableau 4 nous présente les résultats de la calibration du paramètre  $\sigma$  pour des mesures corrélées aux bruits MA(1).

	$\sigma$ (pas d'unité)
Paramètre en entrée	$10,00 \times 10^{-2}$
Moyenne de l'estimateur	$11,27 \times 10^{-2}$
Écart-type de l'estimateur	$19,1 \times 10^{-3}$

Tableau 4 : Résultats de la calibration du paramètre  $\sigma$  sur 2000 simulations

On rappelle qu'en l'absence de corrélation (voir tableau 1) le paramètre  $\sigma$  est estimé avec une meilleure précision, comparée aux résultats du tableau 4. On n'estime pas exactement la valeur du paramètre  $\sigma$ . Un biais apparaît dans l'estimation des mesures corrélées aux bruits MA(1). Sa valeur est de :  $1,31 \times 10^{-2}$  (elle est calculée en faisant la différence entre « la moyenne de l'estimateur » des mesures corrélées et « la moyenne de l'estimateur » des mesures décorrélées). Il y a lieu de penser que la corrélation a biaisée la valeur de l'estimation de  $\sigma$ . L'observation de la figure (26) nous présente le biais que l'on observe entre la distribution  $\hat{\sigma} - \sigma$  (différence entre la valeur estimée  $\hat{\sigma}$  à chaque simulation et la vraie valeur de  $\sigma$ ) et la loi normale.



$$\sqrt{n}(\hat{\sigma} - \sigma) \rightarrow \mathcal{N}(11,38 \times 10^{-2}; (17,06 \times 10^{-2})^2)$$

Figure 26 : Normalité asymptotique du paramètre  $\sigma$  pour N=80 par simulations de Monte-Carlo de l'expérience de Bogatin de M=2000 tirages indépendants.

On s'attendait à trouver une loi normale centrée (voir figure 26) comme ce fut le cas avec la figure 10. Le biais que l'on observe sur la figure (26), calculé précédemment, justifie le fait que le modèle d'évolution n'est pas parfaitement calibré du fait de la corrélation introduite dans les mesures.

• **Estimation conjointe des paramètres  $\sigma$  et  $\alpha$**

Dans le deuxième test, nous supposons que  $\sigma$  et  $\alpha$  sont inconnus. Du coup, on aimerait estimer parfaitement ces deux paramètres. Le tableau (5) nous présente les résultats obtenus.

	$\sigma$ (pas d'unité)	$\alpha$ (pas d'unité)
Paramètre en entrée	$10,00 \times 10^{-2}$	$50,00 \times 10^{-2}$
Moyenne de l'estimateur	$11,60 \times 10^{-2}$	$49,12 \times 10^{-2}$
Écart-type de l'estimateur	$20,9 \times 10^{-3}$	$125,8 \times 10^{-3}$

Tableau 5 : Résultats de la calibration des paramètres  $\sigma, \alpha$  sur 2000 simulations

Au vu des résultats que l'on obtient, on retrouve  $\alpha$  (l'intensité de la corrélation). Par contre  $\sigma$  n'est toujours pas bien estimé. Il est biaisé. La valeur du biais dans le cas présent, est égal à  $1,64 \times 10^{-2}$ . Cette valeur est plus grande que celle précédemment déterminée. Sur la figure (27), nous observons le dit biais. Il faut noter qu'au regard des courbes ci-dessous,  $\alpha$  est bien estimé comparé à  $\sigma$ .

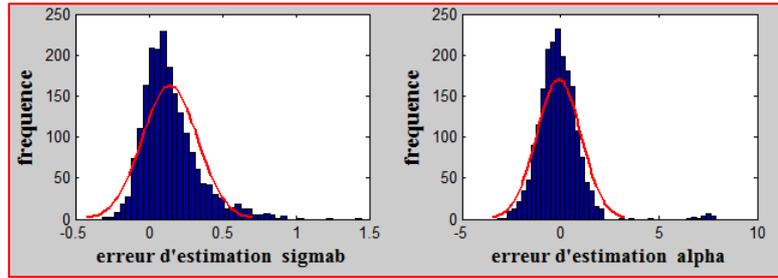


Figure 27 : Normalité asymptotique des paramètres  $\sigma$  et  $\alpha$  pour  $N=80$  par simulations de Monte-Carlo de l'expérience de Bogatin de  $M=2000$  tirages indépendants.

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma} - \sigma) \rightarrow \mathcal{N}(14,34 \times 10^{-2}; (18,73 \times 10^{-2})^2)$$

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha} - \alpha) \rightarrow \mathcal{N}(7,85 \times 10^{-2}; (12,48 \times 10^{-2})^2)$$

### III.2.3.2 Mesures corrélées aux bruits AR(1)

- **Estimation du paramètre  $\sigma$**

Le tableau 6 nous présente les résultats de la calibration du paramètre  $\sigma$  pour des mesures corrélées aux bruits AR(1).

	$\sigma$ (pas d'unité)
Paramètre en entrée	$10,00 \times 10^{-2}$
Moyenne de l'estimateur	$11,41 \times 10^{-2}$
Écart-type de l'estimateur	$20,40 \times 10^{-3}$

Tableau 6 : Résultats de la calibration du paramètre  $\sigma$  sur 2000 simulations

Un biais apparaît dans l'estimation des mesures corrélées aux bruits AR(1). Sa valeur est de  $1,45 \times 10^{-2}$ . Cette valeur de biais est supérieure à celle que l'on obtient avec des mesures corrélées aux MA(1). Pourrait-on penser que la corrélation est plus forte dans les mesures corrélées aux bruits AR(1) comparée à celles corrélées aux bruits MA(1)? L'observation de la figure (28) nous présente le biais que l'on observe entre la distribution  $\hat{\sigma} - \sigma$  et la loi normale.

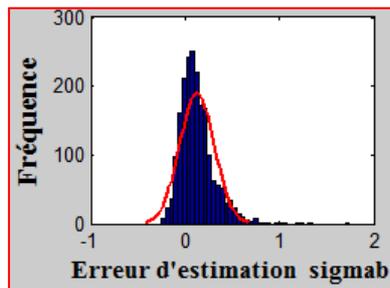


Figure 28 : Normalité asymptotique du paramètre  $\sigma$  pour  $N=80$  par simulations de Monte-Carlo de l'expérience de Bogatin de  $M=2000$  tirages indépendants.

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma} - \sigma) \rightarrow \mathcal{N}(12,62 \times 10^{-2}; (18,27 \times 10^{-2})^2)$$

Les résultats (tableau 6) nous incitent à trouver une solution pour estimer ce biais lors de la calibration de  $\sigma$ . Cette question pourrait ouvrir des perspectives dans le cadre d'un travail de fin d'études.

- **Estimation du paramètre  $\sigma$  et  $\alpha$**

Le tableau 7 nous présente les résultats de la calibration des paramètres  $\sigma$  et  $\alpha$  pour des mesures corrélées aux bruits AR(1).

	$\sigma$ (pas d'unité)	$\alpha$ (pas d'unité)
Paramètre en entrée	$10,00 \times 10^{-2}$	$50,00 \times 10^{-2}$
Moyenne de l'estimateur	$11,81 \times 10^{-2}$	$44,24 \times 10^{-2}$
Écart-type de l'estimateur	$24,4 \times 10^{-3}$	$91,5 \times 10^{-3}$

Tableau 7 : Résultats de la calibration des paramètres  $\sigma, \alpha$  sur 2000 simulations

Au vu des résultats obtenus, nous constatons que les paramètres  $\sigma, \alpha$  des mesures AR(1), ne sont pas bien estimés comparés aux paramètres  $\sigma, \alpha$  des mesures MA(1) (voir tableau 5). L'observation de la figure (29) nous montre qu'ils sont biaisés.

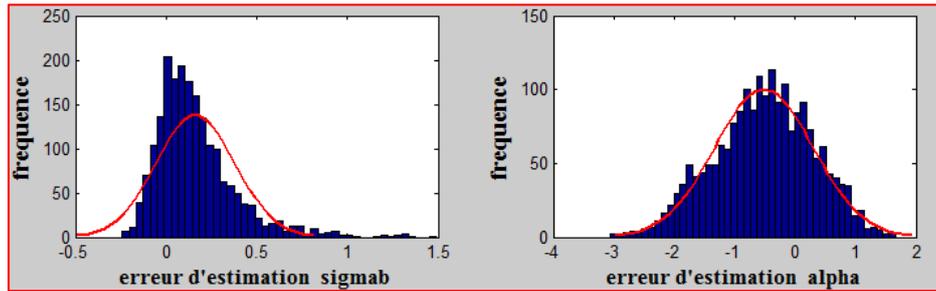


Figure 29 : Normalité asymptotique des paramètres  $\sigma$  et  $\alpha$  pour  $N=80$  par simulations de Monte-Carlo de l'expérience de Bogatin de  $M=2000$  tirages indépendants.

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma} - \sigma) \rightarrow \mathcal{N}(16,19 \times 10^{-2}; (21,82 \times 10^{-2})^2)$$

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha} - \alpha) \rightarrow \mathcal{N}(51,54 \times 10^{-2}; (81,80 \times 10^{-2})^2)$$

En somme, les résultats des deux tests de calibration nous montrent que la corrélation des mesures influence l'estimation des paramètres  $\alpha$  et  $\sigma$ . Une première approche pour diminuer la valeur du biais que l'on observe sur les paramètres alpha et sigma serait d'augmenter le nombre d'itérations. On pourrait réduire la valeur du biais que l'on observe sur les paramètres  $\alpha$  et  $\sigma$ . En utilisant 2000 simulations de Monte Carlo, pour 200 itérations, le temps de convergence serait long. Faute de temps, nous n'avons pas pu réaliser un tel calcul. En statistique, la théorie démontre qu'à partir de 75% de corrélation ( $\alpha = 0,75$ ), l'estimation du paramètre  $\alpha$  n'est pas de mise relativement à la forte corrélation des mesures.

### III.2.4 Filtrage optimal

D'après Brouste<sup>22</sup>, nous déduisons les filtres de  $X$  à partir des filtres de  $\zeta$ . Le modèle transformé a permis de réduire le système initial au problème de filtrage. L'espérance conditionnelle de  $\pi_n(X)$  de  $X_n$  sachant  $Y_n$  et la matrice de variance covariance de l'erreur de filtrage ; satisfont pour  $n \geq 1$  les relations suivantes :

<sup>22</sup> A. Brouste and M. Kleptsyna (2012) *Kalman type filter under stationary noises*, Systems and Control Letters, 61, 1229-1234.

$$\begin{aligned} \pi_m(X) &= X_0 + \sum_{s=2}^m K(m-1, s-1) b^t \pi_s(\zeta) \\ &+ \sum_{s=2}^m \gamma_{X\zeta}(m-1, s-1) A_{s-1}^t b H^t \langle v \rangle_s^{-1} v_s \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{cases} \tilde{P}(m-1, s-1) = H b^t A_{s-1} \gamma_{X\zeta}(m-1, s-1)^t \\ \gamma_{XX}(m-1, s) = \gamma_{X\zeta}(m-1, s-1) A_{s-1}^t \Phi_s^t + K(m-1, s-1) b^t \gamma_{\zeta\zeta}(s) \end{cases} \quad 1 \leq s \leq m \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{XX}(m) &= \sum_{s=2}^m K(m-1, s-1) (\gamma_{X\zeta}(m-1, s-1) b + b^t \Phi_s A_{s-1} \gamma_{X\zeta}(m-1, s-1)^t) \\ &- \tilde{P}(m-1, s-1)^t \langle v \rangle_s^{-1} \tilde{P}(m-1, s-1) \end{aligned} \quad (102)$$

### III.2.4.1 Résultat du filtrage des mesures corrélées aux bruits MA(1)

Les modèles ont été calibrés. D'une part, nous avons estimé le paramètre  $\sigma$ . D'autre part, nous avons supposé la présence de la corrélation temporelle dans les modèles. Nous avons fixé une structure de corrélation (bruits MA(1)) dans les mesures tachéométriques simulées. Par la suite, nous avons déterminé par le maximum de vraisemblance la valeur de l'intensité de la corrélation des modèles. Bien que l'estimation des paramètres  $\sigma, \alpha$  soit un peu biaisée, les résultats de l'estimation seront utilisés dans le filtrage de Kalman à bruits corrélés. Nous filtrons les mesures corrélées. Les figures (30), (31), (32) représentent la variance de la position, la vitesse et l'accélération des états estimés par filtrage des mesures corrélées.

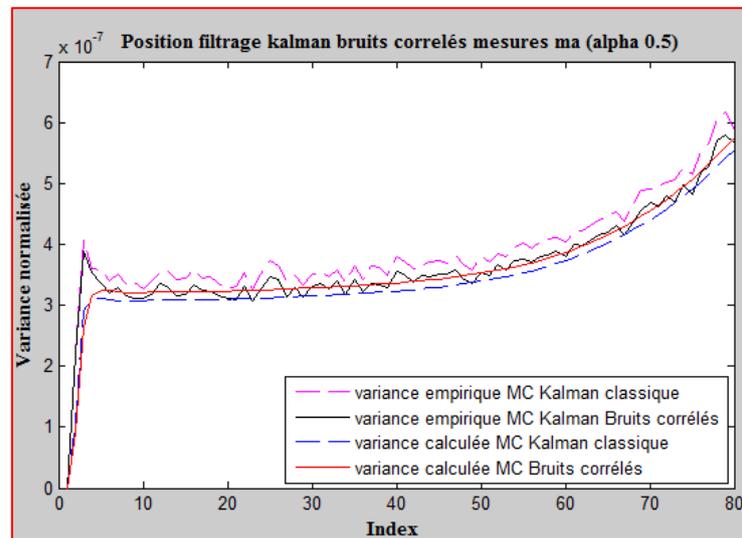


Figure 30 : Variance de la position estimée par filtrage de Kalman à bruits corrélés pour 50% aux bruits MA(1)

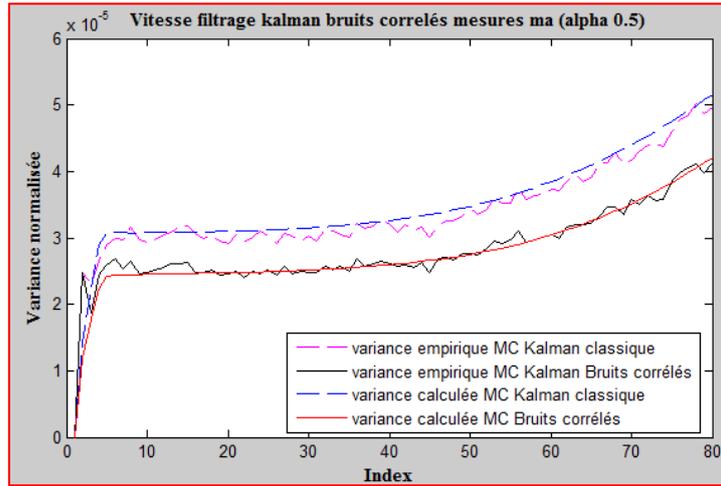


Figure 31 : Variance de la vitesse estimée par filtrage de Kalman à bruits corrélés pour 50% aux bruits MA(1)

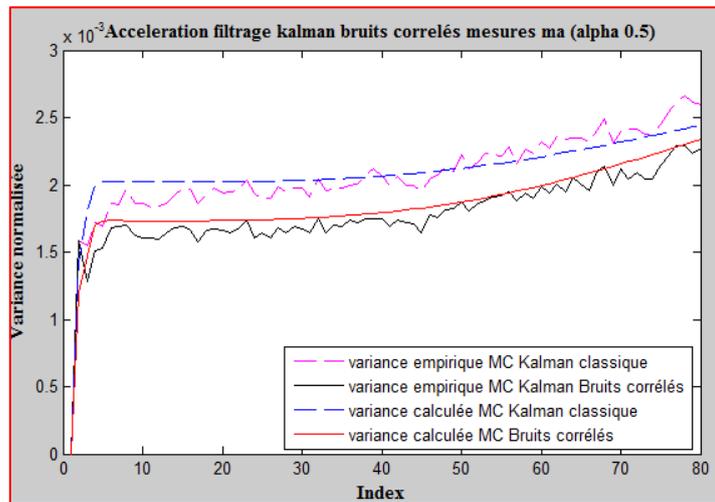


Figure 32 : Variance de l'accélération estimée par filtrage de Kalman à bruits corrélés pour 50% aux bruits MA(1)

Le filtre de Kalman à bruits corrélés filtre parfaitement les mesures simulées corrélées à 50 % aux bruits MA(1). Il est efficace car la variance empirique et la variance estimée (calculée) se superposent parfaitement à 5000 simulations de Monte Carlo.

Le filtre de Kalman à bruits corrélés nous donne une meilleure estimation de la variance des états. Autrement dit, à partir du moment, où on arrive à mettre en évidence la corrélation dans les mesures, on utilise un filtre qui nous donne une meilleure estimation de la variance des états. Comme nous pouvons l'observer sur les trois graphiques ci-dessus, la précision du positionnement est améliorée comparée au filtrage classique. Pour les mesures réelles, il faudra déterminer le gain en précision.

Il y a une différence de l'ordre de grandeur des variances de la position, de la vitesse, et de l'accélération. En effet la variance des positions est estimée à  $10^{-7}m^2$ , la variance des vitesses à  $10^{-5}m^2/s^2$ , et la variance des accélérations à  $10^{-3}m^2/s^4$ . Cela est dû au fait que les positions du mobile sont observées avec une bonne précision (tachéomètre). Les vitesses et les accélérations sont quant à elles estimées.

La fonction de calibration fonctionne parfaitement en simulation. Elle estime le paramètre  $\sigma$  du modèle d'évolution (bonne estimation en l'absence de la corrélation). De plus, pour une structure de corrélation fixée, cette fonction estime également l'intensité de corrélation des mesures (les résultats sont un peu biaisés). Lorsque la corrélation est avérée l'utilisation du filtre à bruits corrélés est de

mise. Ceci étant, nous pouvons dès à présent calibrer, nos mesures d'auscultation, réaliser un test de corrélation en fixant par exemple comme structure de corrélation le bruit MA(1). Eu égard au résultat du test de corrélation filtrer nos mesures. Par la suite, déterminer la variance des positions, des vitesses et des accélérations estimées.

## IV Application sur des données réelles

Nous avons observé le déplacement d'un chariot en mouvement rectiligne uniformément accéléré sur le banc horizontal de la salle de métrologie de l'ESGT. Il a parcouru une distance de 51 mètres pendant une durée de 85 secondes. Toutes les secondes ( $dt = 1s$ ), grâce à un tachéomètre « Trimble S8 » nous avons mesuré la position du chariot. La précision du tachéomètre est donnée par le constructeur est la suivante :

$$\sigma_{Hz} = \sigma_V = 0,5 \text{ dmgon}, \sigma_{dp} = 0,8 \text{ mm}$$

### IV.1 Calibration des mesures d'auscultation

Nous calibrons nos mesures tachéométriques. Dans un premier temps, nous supposons qu'il n'y a pas de la corrélation dans nos mesures. Par conséquent, nous estimons par le maximum de vraisemblance, le paramètre  $\sigma$ . Ensuite, nous tenons compte de la corrélation qu'il pourrait y avoir dans les mesures. La structure de corrélation fixée est celle des bruits MA(1). De ce fait, nous estimons conjointement les paramètres  $\sigma$  et  $\alpha$ . Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 8 ci-dessous.

	$\sigma$ (pas d'unité)	$\alpha$ (pas d'unité)
Mesures non corrélées	0,4367	×
Mesures corrélées aux bruits MA(1)	0,7640	0,7114

Tableau 8 : Résultat de la calibration des mesures réelles

Comme on pouvait s'y attendre, la valeur de  $\sigma$  change selon que l'on considère ou pas la corrélation. Bien évidemment, comme dans les simulations, il va s'en dire que les résultats obtenus, lorsque l'on tient compte de la corrélation des mesures, sont un peu biaisés. Qu'à cela ne tienne, considérons les résultats obtenus pour le filtrage de nos mesures. Ensuite calculons le gain en précision obtenu sur les mesures après le filtrage à bruits corrélés.

### IV.2 Filtrage à bruits corrélés des mesures d'auscultation

Nous nous intéressons à la précision avec laquelle, les états sont estimés après filtrage. Nous voulons obtenir un résultat au dixième de millimètres. Les trois graphes (33, 34 et 35) ci-dessous présentent la variance d'estimation des états.

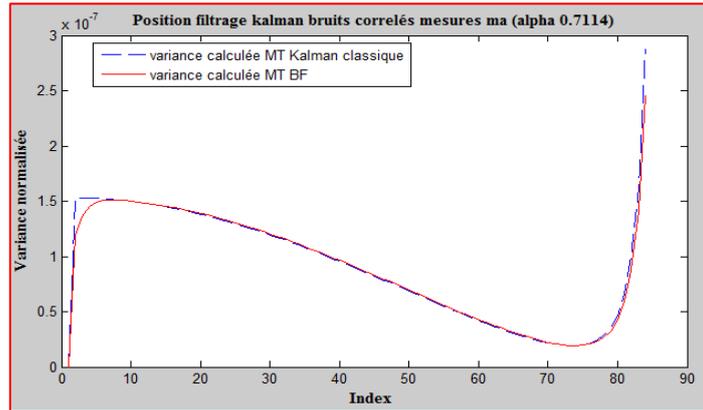


Figure 33 : Variance de la position estimée par filtrage de Kalman à bruits à bruits corrélés MA(1) à 71,14%

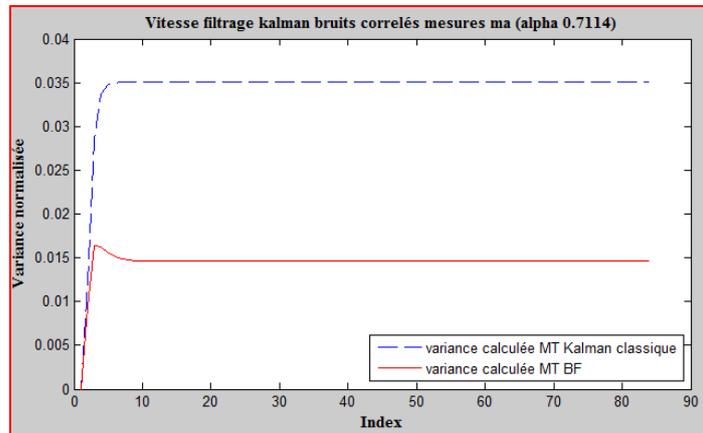


Figure 34 : Variance de la vitesse estimée par filtrage de Kalman à bruits à bruits corrélés MA(1) à 71,14%

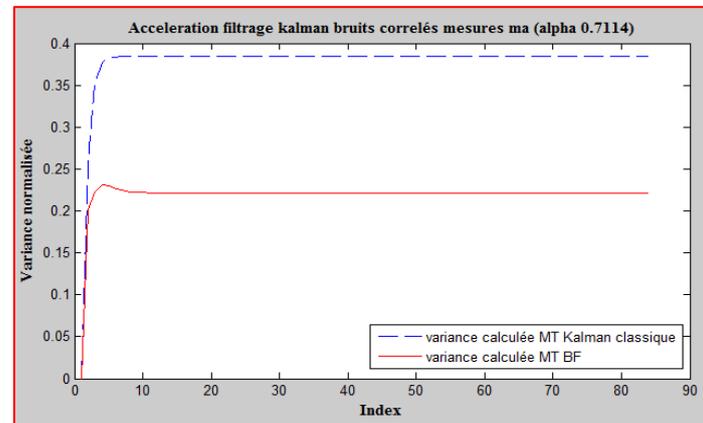


Figure 35 : Variance de l'accélération estimée par filtrage de Kalman à bruits à bruits corrélés MA(1) à 71,14%

Il faut remarquer que la variance des positions est de l'ordre de  $10^{-7}m^2$ . Ce qui n'est pas le cas de la variance des vitesses et de la variance des accélérations. Nous gardons le même raisonnement que nous avons eu lorsque l'on filtre des mesures simulées corrélées à 50% aux bruits MA(1). C'est à dire la vitesse et l'accélération n'ont pas été mesurées contrairement à la position. De plus en observant la diagonale principale de la variance du modèle d'évolution en une dimension ( $\Sigma_{1D}$  cf équation 52), il y a lieu de constater que la variance liée à la position est inférieure à celle de la vitesse. De même, la variance de la vitesse est inférieure à celle de l'accélération.

$$\Sigma_{1D} = \Sigma_{1D}(\sigma) = \text{cholesky} \left( \sigma^2 \begin{pmatrix} \frac{\Delta t^5}{20} & \frac{\Delta t^4}{8} & \frac{\Delta t^3}{6} \\ \frac{\Delta t^4}{8} & \frac{\Delta t^3}{3} & \frac{\Delta t^2}{2} \\ \frac{\Delta t^3}{6} & \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t \end{pmatrix} \right)$$

Du coup après estimation, on est plus précis en position, qu'en vitesse. Et plus précis en vitesse qu'en accélération. Le résultat du gain en variance de la position, de la vitesse, et de l'accélération, est résumé dans le tableau 9.

	<i>gain en variance</i>
Variance Position( $m^2$ )	$\sim 0,000$
Variance Vitesse( $m^2/s^2$ )	$\sim 0,018$
Variance Accélération( $m^2/s^4$ )	$\sim 0,160$

Tableau 9 : Mise en évidence de la performance du filtre à bruits corrélés (variance de l'erreur de filtrage)

Notons que le gain en variance est calculé en effectuant la différence de variance entre la position estimée par filtrage classique et celle estimée par filtrage à bruits corrélés. Le même raisonnement est valable pour la vitesse et l'accélération.

$\Sigma_{1D}$  prédit les courbes que nous observons. Autrement dit que la précision d'estimation des différentes positions du mobile est meilleure, comparée aux autres, parce que  $\frac{\Delta t^5}{20} < \frac{\Delta t^3}{3} < \Delta t$ .

$\frac{\Delta t^5}{20}, \frac{\Delta t^3}{3}, \Delta t$  sont les éléments diagonaux de la matrice de variance  $\Sigma_{1D}$ . Les différentes composantes des variances de la position, vitesse et accélération.

## Conclusion

L'objectif visé par ce travail de fin d'études, est d'évaluer les performances du filtre de Kalman à bruits corrélés dans une expérience d'auscultation. Dans l'optique de mettre en évidence, la puissance de ce filtre, il faudrait estimer par le maximum de vraisemblance d'une part la variance du modèle d'évolution et d'autre part la corrélation des modèles (une même corrélation de bruits, pour les modèles d'évolution et d'observation) en fixant au préalable une structure de corrélation aux dits modèles.

Les résultats d'estimation nous montrent que la calibration de la variance d'un modèle décorréolé, s'effectue sans ambiguïté. Ce qui n'est pas le cas, lorsque le modèle est corrélé. En effet la variance du dit modèle d'évolution présente un biais. Dans le même ordre d'idées, une estimation conjointe de la variance du modèle d'évolution et du paramètre fixant la structure de corrélation nous donne un résultat toujours un peu biaisé.

Nous avons étudié dans le cadre de ce travail de fin d'études, deux structures de corrélation, le bruit moyenne mobile et autorégressif d'ordre 1. Il peut y avoir une infinité de structures de corrélation possible. Cependant, pour identifier une famille de bruits corrélés, il faudrait être capable de concevoir d'une part une solution de filtrage qui filtrerait les observations corrélées (à la nouvelle famille de bruits) et d'autre part d'estimer l'intensité de la corrélation des bruits de la nouvelle famille.

Parmi toutes les familles de bruits corrélés qui existent, certaines sont considérées comme des phénomènes à longue mémoire (bruit gaussien fractionnaire) autrement dit, la décroissance de leur fonction d'autocorrélation s'effectue lentement dans le temps. D'autres sont considérées comme des phénomènes à mémoire courte. En d'autres termes, leur fonction d'autocorrélation suit une décroissance exponentielle.

Les paramètres du modèle d'évolution sont estimés. Si la corrélation est avérée, alors la valeur de l'intensité de la corrélation sera de mise. Le filtre de Kalman à bruits corrélés estimera les états du modèle avec une bonne précision (car il y a eu au préalable une estimation par maximum de vraisemblance). Cette précision est calculée en fonction de la valeur de l'intensité de la corrélation. Elle est meilleure comparée à celle du filtrage classique de Kalman. **Il y a lieu de penser qu'il y a un « gain en variance » sur le filtrage des données d'auscultation à condition d'avoir identifié une structure de corrélation qui pourrait exister dans ces dernières.**

Par conséquent plusieurs perspectives peuvent être envisagées. Nous avons constaté que du fait de la corrélation des mesures, pour une structure de corrélation fixée, l'estimation des paramètres  $\sigma$ ,  $\alpha$  est un peu biaisée. On pourrait imaginer, comment estimer ce biais afin d'améliorer davantage la variance de l'erreur de filtrage à bruits corrélés.

Nous savons que les bruits gaussiens fractionnaires, sont des phénomènes à longue mémoire. On pourrait, comme nous avons estimé le paramètre  $\alpha$  des bruits MA(1) et AR(1), faire de même pour le bruit gaussien fractionnaire.

On pourrait également étudier la structure de corrélation que l'on pourrait avoir sur l'erreur cyclique. Toutefois, il faudrait trouver une procédure de filtrage qui permettrait de mettre en évidence l'intensité de la corrélation.

Nous pensons également à l'utilisation de nouvelles méthodes d'auscultation, nous l'avons appelé « auscultation dynamique ». Elle consiste à modifier dans l'expérience de Bogatin, la condition qui fixe l'accélération constante à un bruit blanc près. Dans « l'auscultation dynamique » nous voulons observer un chariot qui se déplace d'un mouvement quelconque sur le banc linéaire.

Nous pensons également à l'utilisation du filtrage à bruits corrélés pour le positionnement souterrain.

Enfin, on pourrait également penser à la généralisation du filtre (à bruits corrélés) aux autres systèmes de positionnement dynamique GNSS/INS, positionnement maritime (positionnement du sous-marin), où l'on s'intéresserait aux structures de corrélation des bruits.

En somme, ce projet m'a permis de renouer avec le domaine des mathématiques, plus précisément la statistique des séries temporelles. J'ai mené un travail de longue haleine, mais l'intérêt du filtrage de Kalman à bruits corrélés est de mise, pour des problématiques plus directement liées au métier de géomètre comme l'auscultation, la photogrammétrie, la télédétection aérienne, la bathymétrie et le «mobile mapping» etc ...

## Bibliographie

- A. Brouste, C. C.** (2014). Asymptotic properties of the MLE for the autoregressive process coefficients under stationary Gaussian noise. *Mathematical Methods of Statistics*, 23(2).
- al, B. S.** (2008). evaluation of linear Kalman filter processing geodetic kinematic measurement. *Science Direct*, 561-578.
- Box, G.** (1979). Robustness in the strategy of scientific model building . *Academic press*, 201-203.
- Brouste, A.** (2010). Asymptotic properties of MLE for partially observed fractional diffusion system with dependent noise. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140,551-558.
- Cai, A. B.** (2013). Controlled drift estimation in fractional diffusion linear systems. *Stochastics and Dynamics*, 13(3).
- cern.** ( 2001, février 26). *Le bulletin du CERN*. Récupéré sur <http://cds.cern.ch/journal/CERNBulletin/2001/09/News%20Articles/44791?ln=fr>
- CHAUVEAU, G.** (2014). *Apport du filtrage de Kalman aux systèmes de positionnement embarqués et à l'auscultation* . Le Mans .
- Delignières, D.** (2016, Juin 2). *Le site de Didier Delignières* . Récupéré sur <http://didier.delignieres.perso.sfr.fr/Supports-doc/Analysetemporelle.pdf>
- Farrell, J., & Barth, M.** (1998). *The Global Positioning System & Inertial Navigation*. McGraw-Hill.
- François-Hullo, J.** (2013). *Consolidation de relevés laser d'intérieurs construits: pour une approche probabiliste initialisée par géolocalisation*. Strabourg.
- Gland, F. L.** (2016, Mars 21). *François Le Gland*. Récupéré sur <http://www.irisa.fr/aspi/legland/>
- J.J. Daudin, C. S.** (Mai 1996). *Analyse de séries chronologiques*. INA-PG, Mathématiques.
- Kasser, M.** (2007). Métrologie et auscultation d'ouvrages. *Géomètre n° 2040*, 31- 42.
- Kleptsyna, A. B.** (2012). Kalman type filter under stationary noises. *elsevier*, 1229-1234.
- Pardoux, É.** (2006). *Processus de Markov et applications Algorithmes, Réseaux, Génome et Finance*.

## *Annexe 1*

### *Transformation de l'angle horizontal*

Le code Matlab©, ci-dessous, transforme l'angle horizontal, en le faisant passer d'un angle défini dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  à un angle défini dans  $]0, 2\pi[$ .

```
for k = 1:n,  
    hzk = atan2(abs(xk),abs(yk));  
    if xk > 0 & yk > 0,  
        Hzk = hzk;  
    end,  
    if xk > 0 & yk < 0,  
        Hzk = π - hzk;  
    end,  
    if xk < 0 & yk < 0,  
        Hzk = π + hzk;  
    end,  
    if xk < 0 & yk > 0,  
        Hzk = 2π + hzk;  
    end,  
end,
```

*Annexe 2*  
*Kalman type filter under stationary noises*

L'article étudie le filtrage de Kalman à bruits corrélés. Toutes les relations présentées dans le chapitre trois sur les bruits corrélés proviennent de cet article.



# Kalman filter under stationary noises

Alexandre Brouste\*, Marina Kleptsyna

Université du Maine, France

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 5 December 2011

Received in revised form

27 June 2012

Accepted 20 September 2012

Available online 10 November 2012

### Keywords:

Kalman filter

Non-white noises

Fractional Gaussian noises

Optimal filtering

## ABSTRACT

In this paper, we are interested in finding an explicit solution to the filtering problem for a  $d$ -dimensional autoregressive signal observed through a linear channel when the noises are stationary Gaussian with the same covariance. We represent the signal–observation pair in terms of a  $2 \times d$ -dimensional autoregressive process driven by a white Gaussian noise. Simulations are given for fractional Gaussian noises (fGn), autoregressive noises (AR(1)) and moving average noises (MA) in order to analyze the performance of the filtering algorithm compared to other approaches in the literature.

© 2012 Elsevier B.V. All rights reserved.

## 1. Introduction

The classical Kalman filter (see [1–3]) is the optimal recursive solution for the filtering problem of a linear signal dynamic, observed through a linear measurement, both perturbed by independent white Gaussian noises. The Kalman theory of optimal filtering is well-known and has many applications in engineering. It has been generalized in many directions, e.g., robust square-root type [4,5] or fast Chandrasekhar type algorithms [6] have been developed. It even sometimes provides a good approximation of the solution in non-linear dynamics (Extended Kalman Filter [2], Unscented Kalman Filter [7]). But the behavior of the Kalman filter can be severely degraded when the noises do not satisfy the basic assumptions.

However, it has been observed in many practical cases of engineering, physics and finance that the noise in the observation and in the signal has a long memory correlation structure. For example, a long range dependence style fact has been noticed for the squared stock returns and exchange rates in finance [8,9] and in measurements of IP traffic and model of Local Area Network Ethernet trace [10,11]. Various extensions for colored and/or correlated noises and for Markov possibly non-Gaussian processes have received a great deal of interest over last decades (for developments in this area and further references, see [12–15]). We refer to [16,17] for filters of Markov chain with fractional ARIMA Gaussian noise in the observation. The classical techniques that have been proposed in previous works to investigate such

discrete time cases are state augmentation and/or measurement differentiating schemes (see [18,19] and references therein).

For arbitrary noises but with restrictive assumptions on the signal dynamic, optimal batch and semi-recursive filters have been proposed in [20]. For a  $p$ -dimensional observation, both algorithms require the inversion of  $kp \times kp$  matrices for  $1 \leq k \leq n$  in order to compute the state estimation at time  $n$  and so the computations become heavy and possibly unstable as  $n$  increases. It will appear that our optimal filtering algorithm, which contains principally a fully recursive procedure and needs only the inversion of  $p \times p$  matrices at each step  $k$ , is computationally more efficient.

In this paper, we consider the case when both signal and observation noises are stationary Gaussian with the same structure. This is a natural extension of the classical white noise case and covers cases of noises with long-memory. We deal with a pair  $(X_n, Y_n)_{n \geq 0}$  where  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  is a non directly observable signal in  $\mathbb{R}^d$  and  $Y = (Y_n)_{n \geq 0}$  is an observation process in  $\mathbb{R}^p$  such that

$$\begin{cases} X_n = \Theta X_{n-1} + \Lambda \xi_n, & n \geq 1, & X_0 = x, \\ Y_n = \mathcal{M} X_n + \tilde{\Lambda} \tilde{\xi}_n, & n \geq 1, & Y_0 = y, \end{cases} \quad (1)$$

where  $\Theta$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $\Lambda$  and  $\tilde{\Lambda}$  are known matrices with appropriate dimensions,  $\xi = (\xi_n)_{n \geq 1}$  and  $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_n)_{n \geq 1}$  are independent vector-valued Gaussian sequences with independent components  $\xi^i$  and  $\tilde{\xi}^j$  such that for all  $i, j$  and  $m, n \geq 1$ ,  $\mathbf{E} \xi_n^i = \mathbf{E} \tilde{\xi}_n^j = 0$ ,

$$\mathbf{E} \xi_m^i \xi_n^i = \mathbf{E} \tilde{\xi}_m^j \tilde{\xi}_n^j = c(m, n) = \rho(|n - m|), \quad \rho(0) = 1.$$

We assume that the covariance  $c(\cdot, \cdot)$  is a positive definite function. Supposing that only  $Y$  is observed but one wishes to know  $X$ , the classical problem of filtering the signal  $X$  at time  $n$  from the observation of  $Y$  up to time  $n$  occurs. The solution to this problem,

\* Corresponding author.

E-mail address: [Alexandre.Brouste@univ-lemans.fr](mailto:Alexandre.Brouste@univ-lemans.fr) (A. Brouste).

called the *optimal filter*, is the conditional distribution of  $X_n$  given the  $\sigma$ -field  $\mathcal{Y}_n = \sigma(Y_k, 1 \leq k \leq n)$ . Let us note that in the classical case when both  $\xi$  and  $\varepsilon$  are i.i.d. sequences, the solution to the filtering problem (1) is the Kalman filter. In our situation, we have neither the Markov property for the signal  $X$ , nor the simple structure of innovation for the observation  $Y$ .

The method that we present is inspired by the transformation method that has been used in the continuous case for fractional filtering in [21,22]. It gives the possibility to reduce the initial problem (1) to the classical filtering problem in a  $2 \times d$ -dimensional first order autoregression under an observation with white noise and the filtering of a linear functional of the process generated by the involved autoregression.

This paper is organized into six sections. In Section 2 we present some preliminaries about stationary Gaussian sequences and the key linear transformation of the observation process. Section 3 contains a representation theorem for the signal process and the transformed observation. Section 4 is devoted to the solution of the optimal filtering problem. Results of simulations for non-Markovian models (moving average noises, autoregressive noises and fractional Gaussian noises) are presented in Section 5. Finally, Section 6 contains the proofs of the theorems.

## 2. Preliminaries

We begin with some well known properties of stationary scalar Gaussian sequences.

### 2.1. Stationary Gaussian sequences

Let  $\xi = (\xi_n)_{n \geq 0}$  be a real valued centered stationary Gaussian sequence. Then the associated *innovation* sequence  $(\sigma_n \varepsilon_n)_{n \geq 1}$ , where  $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $n \geq 1$  are independent, is defined by the following relations

$$\sigma_1 \varepsilon_1 = \xi_1, \quad \sigma_n \varepsilon_n = \xi_n - \mathbf{E}(\xi_n | \xi_1, \dots, \xi_{n-1}), \quad n \geq 2.$$

It follows from the Theorem of Normal Correlation [15, Theorem 13.1] that there exists a deterministic kernel  $k = (k(n, m), n \geq 1, m \leq n)$  such that  $k(n, n) = 1$  and

$$\sigma_n \varepsilon_n = \sum_{m=1}^n k(n, m) \xi_m. \quad (2)$$

In the sequel, for  $n \geq 1$ , we will denote by  $\beta_{n-1}$  the partial correlation coefficient

$$\beta_{n-1} = -k(n, 1). \quad (3)$$

It is worth mentioning that  $\sigma_n \beta_n$  is nothing but the correlation between  $\xi_0$  and  $\varepsilon_n$ , namely  $\sigma_n \beta_n = \mathbf{E} \xi_0 \varepsilon_n$  (see Eq. (5)).

The following relations between  $k(\cdot, \cdot)$ ,  $\rho(\cdot)$ ,  $(\beta_n)$  and the variances of innovations  $\sigma_n^2$ ,  $n \geq 1$  hold (see Levinson–Durbin algorithm [23]):

$$\sigma_n^2 = \prod_{m=1}^{n-1} (1 - \beta_m^2), \quad (4)$$

$$\sum_{m=1}^n k(n, m) \rho(m) = \beta_n \sigma_n^2, \quad (5)$$

$$k(n+1, n+1-m) = k(n, n-m) - \beta_n k(n, m). \quad (6)$$

Since we assume the positive definiteness of the covariance  $c(\cdot, \cdot)$ , there also exists an inverse deterministic kernel  $K = (K(n, m), n \geq 1, m \leq n)$  such that

$$\xi_n = \sum_{m=1}^n K(n, m) \sigma_m \varepsilon_m. \quad (7)$$

Actually, kernels  $k$  and  $K$  are nothing but the ingredients of the Choleski decomposition of covariance and inverse of covariance matrices. Namely,

$$\Gamma_n^{-1} = k_n D_n^{-1} k_n^* \quad \text{and} \quad \Gamma_n = K_n^* D_n K_n,$$

where  $\Gamma_n(i, j) = \rho(|i - j|)$ ,  $k_n$  and  $K_n$  are  $n \times n$  lower triangular matrices with ones as diagonal entries and  $k(i, j)$  and  $K(i, j)$  as subdiagonal entries respectively (see Section 5 for specific kernels  $k$  and  $K$  corresponding to some particular models) and  $D_n$  is an  $n \times n$  diagonal matrix with  $\sigma_i^2$  as diagonal entries. Here  $*$  denotes the transposition.

### 2.2. Transformation of the observations

The main idea of this paper is to linearly transform the original observations  $(Y_k, 1 \leq k \leq n)$  in order to get a white noise in the new observation process dynamic (see [16,17,21,22]). Actually, the special structure of the new observation model implies that this drift part can be represented as a linear combination of the components of a Markov process.

Let us introduce  $Z = (Z_n)_{n \geq 1}$  such that

$$Z_n = \sum_{m=1}^n k(n, m) Y_m, \quad n \geq 1. \quad (8)$$

Then we also have that  $Y_n = \sum_{m=1}^n K(n, m) Z_m$ . Therefore the natural filtration  $(\mathcal{Z}_n)$  of  $Z$  and the natural filtration  $(\mathcal{Y}_n)$  of  $Y$  coincide.

In the sequel for a process  $\eta = (\eta_n, n \geq 1)$  such that  $\mathbf{E}|\eta_n| < +\infty$ , the notation  $\pi_n(\eta)$  is used for the conditional expectation  $\pi_n(\eta) = \mathbf{E}(\eta_n | \mathcal{Y}_n) = \mathbf{E}(\eta_n | \mathcal{Z}_n)$ .

## 3. A representation theorem

Let  $(\sigma_n \varepsilon_n, n \geq 1)$ ,  $(\sigma_n \tilde{\varepsilon}_n, n \geq 1)$  be the independent sequences of innovations for  $\xi$  and  $\tilde{\xi}$  respectively and  $(\beta_n, n \geq 1)$  be the corresponding sequence of partial correlation coefficients. Then the following representation theorem holds.

**Theorem 1.** Let  $(\zeta_n)_{n \geq 1}$  be the  $2 \times d$ -dimensional autoregressive process defined by

$$\zeta_n = A_{n-1} \zeta_{n-1} + \sigma_n b \Lambda \varepsilon_n, \quad n \geq 1, \quad \zeta_0 = b x, \quad (9)$$

with

$$A_n = \begin{pmatrix} \Theta & \beta_n \Theta \\ \beta_n \mathbf{I}_d & \mathbf{I}_d \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_d \\ \mathbf{0}_d \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$\mathbf{I}_d$  the  $d \times d$  identity matrix and  $\mathbf{0}_d$  the  $d \times d$  zero matrix. Then the following representations hold:

$$X_n = \sum_{m=1}^n K(n, m) b^* \zeta_m, \quad (11)$$

$$Z_n = \mathcal{M} b^* \zeta_n + \sigma_n \tilde{\Lambda} \tilde{\varepsilon}_n, \quad n \geq 1. \quad (12)$$

**Remark 1.** Since the signal–observation model defined by Eqs. (9) and (12) involves white noises, from the point of view of filtering it falls into the classical Kalman theory. Therefore, the optimal filter can be expressed in terms of innovations  $v_n = Z_n - \mathbf{E}(Z_n | \mathcal{Z}_{n-1})$ ,  $n \geq 1$  of  $Z$ :

$$v_n = Z_n - \mathcal{M} b^* A_{n-1} \pi_{n-1}(\zeta). \quad (13)$$

**Remark 2.** Now the conditional mean  $\pi_n(\zeta)$  of  $\zeta_n$  given  $\mathcal{Z}_n$  and the  $2d \times 2d$  covariance matrix  $\gamma_{\zeta\zeta}(n) = \mathbf{E}(\zeta_n - \pi_n(\zeta))(\zeta_n - \pi_n(\zeta))^*$  of the filtering error are given for  $n \geq 1$  by the equations:

$$\pi_n(\zeta) = A_{n-1}\pi_{n-1}(\zeta) + P_n b \mathcal{M}^* \langle v \rangle_n^{-1} v_n, \quad \pi_0(\zeta) = b x,$$

and

$$\gamma_{\zeta\zeta}(n) = \Phi_n P_n, \quad \gamma_{\zeta\zeta}(0) = 0,$$

where

$$P_n = A_{n-1} \gamma_{\zeta\zeta}(n-1) A_{n-1}^* + \sigma_n^2 b \Lambda \Lambda^* b^*, \quad (14)$$

$$\langle v \rangle_n = \sigma_n^2 \tilde{\Lambda} \tilde{\Lambda}^* + \mathcal{M} b^* P_n b \mathcal{M}^* \quad \text{and} \quad (15)$$

$$\Phi_n = \mathbf{I}_{2d} - P_n b \mathcal{M}^* \langle v \rangle_n^{-1} \mathcal{M} b^*.$$

**Remark 3.** Let us note that in the particular case, when the noises are generated by stationary ARMA(p,q) type processes, we can simplify Eq. (11). Namely, let  $\xi$  be written in the following form  $\xi_n = \sum_{j=1}^p \alpha_j \xi_{n-j} + \sum_{\ell=0}^q \lambda_\ell \varepsilon_{n-\ell}$ , where the coefficients are chosen so that  $\xi$  is stationary. Then

$$X_n = \sum_{j=1}^p \alpha_j X_{n-j} + \sum_{\ell=0}^q \lambda_\ell b^* \zeta_{n-\ell}$$

and the filtering problem can be solved through the usual state space augmentation. However, even in this case our method yields a filter of lower dimension (precisely  $(p + 2(q + 1))d$  instead of  $(1 + 2(p + q))d$ ).

#### 4. Optimal filtering

The statement of Theorem 1 means that the filtering problem for  $X$  in model (1) can be analyzed as a part of the filtering problem in the model for the Gaussian signal–observation pair  $((X, \zeta^*), Z)$ .

Let us note that we have reduced the initial filtering problem to (11). It is clear that  $X_n$  does not satisfy the conditions of [15, Theorem 13.4] because of the kernel  $K(n, \cdot)$  being dependent on  $n$ . Nevertheless, using the idea proposed in [24], we obtain the following Kalman type filter equations:

**Theorem 2.** The conditional mean  $\pi_n(X)$  of  $X_n$  given  $\mathcal{Y}_n$  and the covariance matrix  $\gamma_{XX}(n) = \mathbf{E}(X_n - \pi_n(X))(X_n - \pi_n(X))^*$  of the filtering error are given for  $n \geq 1$  by the equations:

$$\begin{aligned} \pi_n(X) &= x + \sum_{m=1}^n K(n, m) b^* \pi_m(\zeta) \\ &+ \sum_{m=1}^n \gamma_{X\zeta}(n, m-1) A_{m-1}^* b \mathcal{M}^* \langle v \rangle_m^{-1} v_m \end{aligned} \quad (16)$$

and

$$\begin{aligned} \gamma_{XX}(n) &= \sum_{m=1}^n K(n, m) (\gamma_{X\zeta}(n, m) b \\ &+ b^* \Phi_m A_{m-1} \gamma_{X\zeta}^*(n, m-1)) \\ &- \tilde{P}^*(n, m) \langle v \rangle_m^{-1} \tilde{P}(n, m) \end{aligned} \quad (17)$$

where  $\tilde{P}(n, m) = \mathcal{M} b^* A_{m-1} \gamma_{X\zeta}^*(n, m-1)$ ,  $\Phi_m$  is defined by Eq. (15) and the matrix  $\gamma_{X\zeta}(n, m)$  for  $1 \leq m \leq n$  satisfies the equation

$$\gamma_{X\zeta}(n, m) = \gamma_{X\zeta}(n, m-1) A_{m-1}^* \Phi_m^* + K(n, m) b^* \gamma_{\zeta\zeta}(m). \quad (18)$$

It is worth mentioning that in the case of i.i.d. sequences, when  $K(n, m) = \delta_{n-m}$  and  $\beta_n = \delta_n$ , ( $\delta_n$  is the Kronecker symbol), Eqs. (16) and (17) reduce to the Kalman filter.

#### 5. Simulation

In this section, we present the filtering simulations for non-independent stationary Gaussian noises  $\xi$ . Here  $(\varepsilon_n, n \geq 1)$  is i.i.d. zero-mean standard Gaussian variables sequence.

First, we consider successively the initial one dimensional model (1) with:

1. Moving Average noises (MA),  $\xi_n = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}(\varepsilon_n + \alpha\varepsilon_{n-1})$ . In this case,  $\rho(|n|) = \mathbb{1}_{\{|n|=0\}} + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \mathbb{1}_{\{|n|=1\}}$ ,  $K(n, m) = \delta_{n-m} + \alpha\delta_{n-m-1}$  and  $k(n, m) = \alpha^{n-m}$ .
2. AutoRegressive noises (AR(1)),  $\xi_n = \sqrt{1-\alpha^2}\varepsilon_n + \alpha\xi_{n-1}$ . In this case,  $\rho(|n|) = \alpha^{|n|}$ ,  $K(n, m) = \alpha^{n-m}$  and  $k(n, m) = \delta_{n-m} + \alpha\delta_{n-m-1}$ .
3. Fractional Gaussian noises (fGn) of explicit covariance function

$$\begin{aligned} \rho(|m-n|) \\ = \frac{1}{2} (|m-n+1|^{2H} - 2|m-n|^{2H} + |m-n-1|^{2H}) \end{aligned}$$

for a known Hurst exponent  $H \in (0, 1)$ . As far as we know, there is not an explicit expression for the Cholesky decomposition and in our work, for simulation of the fractional Gaussian noise we used the Wood and Chan method (see [25]).

The results of the Monte-Carlo simulation of the variance of the filtering error (for 10 000 replications) for different types of noises (MA, AR and fGn) are presented in Figs. 1 and 2.

The filter presented in this paper based on model transformation (MTF) naturally over-performs classical Kalman filter (KF) in the case of MA, AR and fGn cases (in this case, the KF is not optimal). Let us mention that if  $\alpha = 0$  for MA and AR models or  $H = \frac{1}{2}$  in the fGn model, noises are i.i.d. and the BKF is equivalent to the KF.

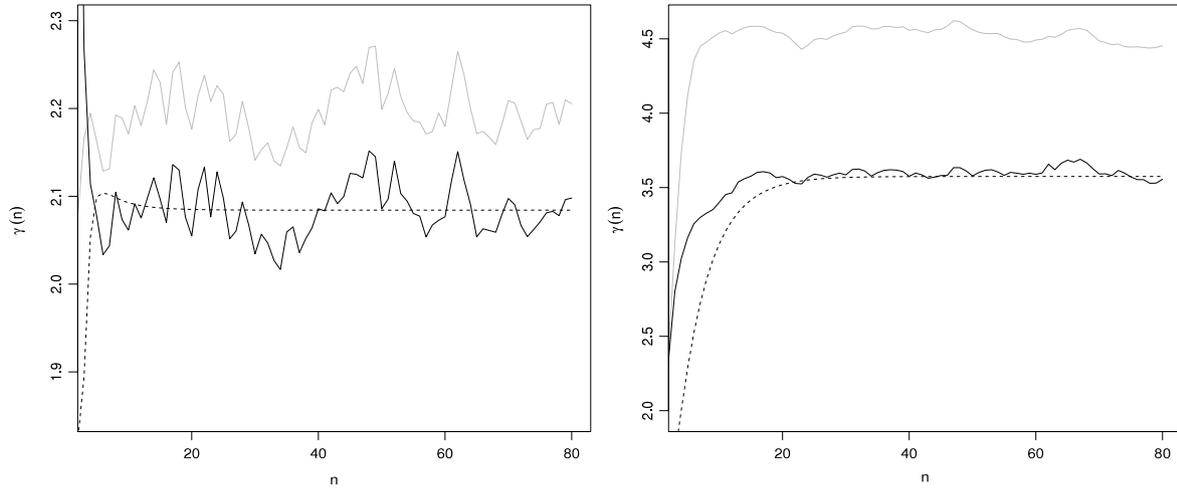
Second, we consider the multidimensional setting (1) where the signal is of dimension 3 and the observation of dimension 1. Namely,

$$\begin{aligned} \Theta = \begin{pmatrix} 1 & \Delta & 0 \\ 0 & 1 & \Delta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad (19) \\ \mathcal{M} = (1 \quad 0 \quad 0) \end{aligned}$$

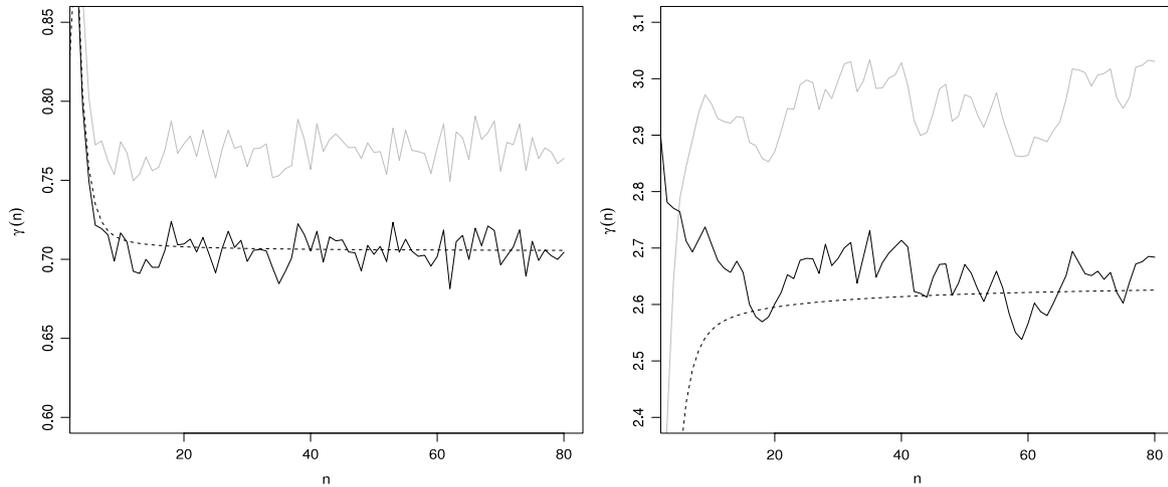
where  $\Delta, \sigma_1, \sigma_2$  and  $\tilde{\Lambda}$  are known constants. This example is taken from the avionic domain (first order accelerometer/GPS hybridation, see [26]). Only fractional Gaussian noises setting have been treated for this model. We compare in Fig. 3 the filter presented in this paper based on model transformation (MTF) with respect to the classical Kalman filter (KF) in terms of variance of the filtering error of the first component (which is the position of the aircraft). Moreover, we compare the MTF with the other normal correlation approach in the literature (NKF, see [20]) in terms of CPU time. The MTF (and NKF) naturally over-performs the FK in terms of variance of the filtering error and the MTF is more stable and fast than the NKF.

When the dimension of the observation is bigger in the setting (1), the MTF is even faster than the NKF. CPU times for both algorithms are presented in Fig. 4 for a signal and an observation of dimension 2. Namely, in this example,

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \tilde{\Lambda} = \mathbf{I}_2 \quad \text{and} \quad \mathcal{M} = \mathbf{I}_2. \quad (20)$$



**Fig. 1.** Theoretical variance of the filtering error  $\gamma_{X,X}(n)$ ,  $n = 1 \dots 80$ , (dotted line) and Monte-Carlo empirical variance of the filtering error (10 000 replications) for the BKF (gray line) and the KF (black line) for MA noises (left) and AR(1) noises (right). Parameter values for simulations, are in both cases,  $\alpha = 0.9$ ,  $\mathcal{M} = 0.5$ ,  $\Theta = 0.9$ ,  $\Lambda = \tilde{\Lambda} = 1$ .



**Fig. 2.** Theoretical variance of the filtering error  $\gamma_{X,X}(n)$ ,  $n = 1 \dots 80$ , (dotted line) and Monte-Carlo empirical variance of the filtering error (10 000 replications) for the MTF (filled line) and the KF (gray line) for  $H = 0.2 < 1/2$  (left) and  $H = 0.8 > 1/2$  (right). Parameter values for simulations, are in both cases,  $\mathcal{M} = 0.5$ ,  $\Theta = 0.9$ ,  $\Lambda = \tilde{\Lambda} = 1$ .

**6. Proofs**

**6.1. Proof of Theorem 1**

Let us introduce the following sequences

$$Q_n = \sum_{m=1}^n k(n, m)X_m, \quad \text{and} \quad q_n = \sum_{m=1}^n k(n, m)X_{m-1}, \quad n \geq 1.$$

Eqs. (1), (2) and (8) immediately imply the following representations:

$$\begin{aligned} Z_n &= \mathcal{M}Q_n + \sigma_n \tilde{\Lambda}_n \tilde{\varepsilon}_n \\ &= \mathcal{M}\Theta q_n + \sigma_n \mathcal{M}\Lambda \varepsilon_n + \sigma_n \tilde{\Lambda} \tilde{\varepsilon}_n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Since  $X_n = \sum_{m=1}^n K(n, m)Q_m$ , we see that

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{m=2}^n k(n, m) \sum_{r=1}^{m-1} K(m-1, r)Q_r - \beta_{n-1}x \\ &= \sum_{r=1}^{n-1} Q_r \sum_{m=r+1}^n k(n, m)K(m-1, r) - \beta_{n-1}x \\ &= \sum_{r=1}^{n-1} \Psi(n, r)Q_r - \beta_{n-1}x, \end{aligned}$$

where

$$\Psi(n, r) = \sum_{m=r+1}^n k(n, m)K(m-1, r)$$

is a deterministic kernel which does not depend on  $(d, \Theta, \Lambda)$ . In order to find the explicit form of  $\Psi(n, r)$  we fix  $d = 1$ ,  $\Theta = 0$  and  $\Lambda = 1$ . In this case we have that  $Q_n = \sigma_n \varepsilon_n$  and

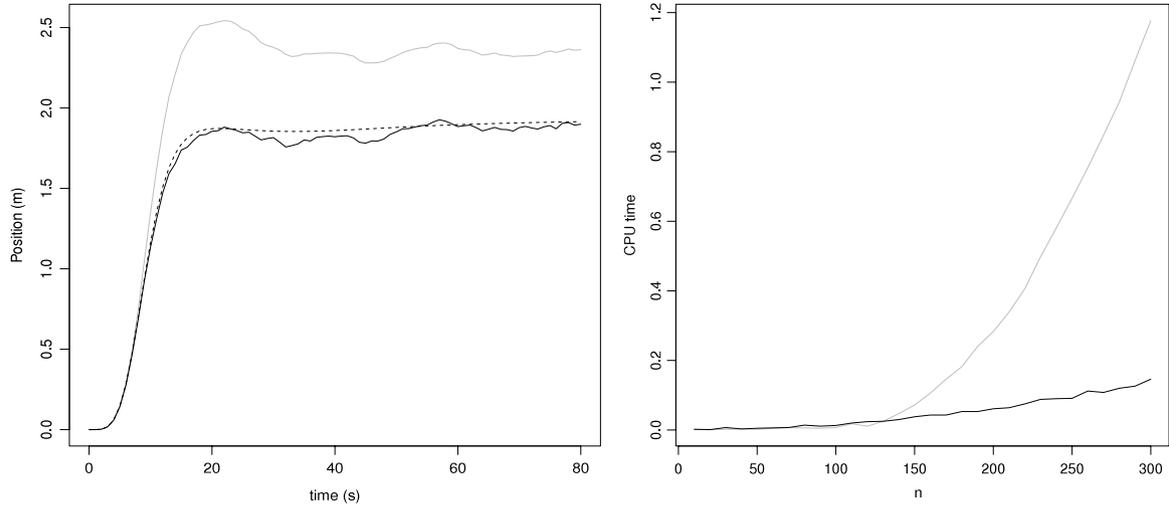
$$q_n = \sum_{r=1}^{n-1} \Psi(n, r)\sigma_r \varepsilon_r$$

and so, if  $m \leq n-1$ , we have

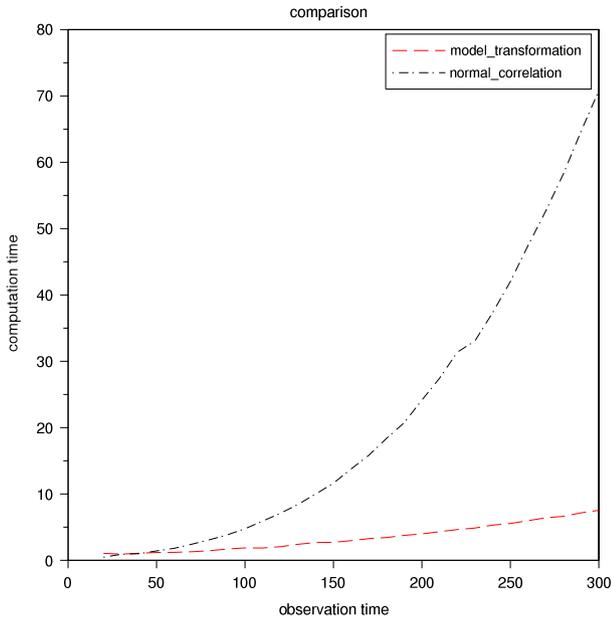
$$\mathbf{E}Q_m q_n = \Psi(n, m)\sigma_m^2.$$

Let us calculate  $\mathbf{E}Q_m q_n$  in a different way. We have

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Q_m q_n &= \mathbf{E} \sum_{\ell=1}^m k(m, \ell)\xi_\ell \sum_{r=2}^n k(n, r)\xi_{r-1} \\ &= \sum_{\ell=1}^m k(m, \ell) \sum_{r=2}^n k(n, r)\mathbf{E}\xi_\ell \xi_{r-1} \\ &= \sum_{\ell=1}^m k(m, \ell) \end{aligned}$$



**Fig. 3.** On the left, theoretical variance of the filtering error  $\gamma_{X,X}(n)$ ,  $n = 1 \dots 80$ , (dotted black line) and Monte-Carlo empirical variance of the filtering error (10000 replications) for the MTF (and NKf) (black line) and the KF (gray line) for the first component model (20) where  $H = 0.8$ ,  $\Delta = 1$ ,  $\sigma_1^2 = 2.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\sigma_2^2 = 1.10 \cdot 10^{-6}$ ,  $\lambda^2 = 3$ . On the right, CPU time of the MTF algorithm (black line) and the NKf algorithm (gray line) for  $n = 10, 20, \dots, 300$ .



**Fig. 4.** Comparison of the MTF and the NKf in terms of CPU time. In this example the signal is 2-dimensional and the observation is 2-dimensional.

$$\times \left( \sum_{r=1}^n k(n, r) \rho(|\ell - r + 1|) - k(n, 1) \rho(\ell) \right). \quad (21)$$

Eqs. (21) and (5) imply that we have  $\mathbf{E}Q_m q_n = \beta_{n-1} \beta_m \sigma_m^2 + J(m, n)$ . Here  $J(m, n) = \sum_{\ell=1}^m k(m, \ell) \sum_{r=1}^n k(n, r) \rho(|\ell - r + 1|)$ .

Since for any  $0 \leq \ell \leq n$  we have  $\mathbf{E}\xi_\ell \varepsilon_n = \sum_{r=1}^n k(n, r) \rho(|\ell - r|) = \sigma_n^2 \delta_{n-\ell} + \sigma_n^2 \beta_n \delta_\ell$ , we obtain  $J(m, n) = \sigma_n^2 \delta_{m-n+1}$ . Finally,

$$\psi(n, m) = \begin{cases} \beta_{n-1} \beta_m, & m < n - 1 \\ 1, & m = n - 1 \end{cases}$$

and for any  $d, \Theta, \Lambda$  we have the following representation:

$$q_n = Q_{n-1} + \beta_{n-1} \left( \sum_{r=1}^{n-2} \beta_r Q_r - x \right) = (\mathbf{I}_d \quad \beta_{n-1} \mathbf{I}_d) \zeta_{n-1},$$

with

$$\begin{cases} \zeta_n^1 = Q_n = \Theta q_n + \sigma_n \Lambda \varepsilon_n = (\Theta \quad \Theta \beta_{n-1}) \zeta_{n-1} + \sigma_n \Lambda \varepsilon_n \\ \zeta_n^2 = \sum_{r=1}^{n-1} \beta_r Q_r - x = \sum_{r=1}^{n-2} \beta_r Q_r - x + \beta_{n-1} Q_{n-1} \\ \quad = (\beta_{n-1} \mathbf{I}_d \quad \mathbf{I}_d) \zeta_{n-1} \end{cases}$$

which is Eq. (9). The initial condition is taken in order to keep  $q_1 = x$ .

### 6.2. Proof of Theorem 2

Let us introduce the auxiliary process  $(X_n^p)_{n \geq 1}$ ,  $p \geq n$ :

$$X_n^p = \sum_{m=1}^n K(p, m) b^* \zeta_m. \quad (22)$$

We have  $X_n^n = X_n$  and for fixed  $p$ ,  $n \geq 1$ ,

$$X_n^p = X_{n-1}^p + K(p, n) b^* \zeta_n. \quad (23)$$

Applying [15, Theorem 13.1], we obtain

$$\begin{aligned} \pi_n(X_n^p) - \pi_n(X_{n-1}^p) &= K(p, n) b^* \pi_n(\zeta) + \mathbf{E}[X_n^p v_n^* | v_n] \langle v_n \rangle_n^{-1} v_n \\ &\quad + K(p, n) b^* \pi_n(\zeta) \\ &= \gamma_{X_\zeta}(p, n-1) A_{n-1}^* b \mathcal{M}^* \langle v_n \rangle_n^{-1} v_n \\ &\quad + K(p, n) b^* \pi_n(\zeta), \end{aligned}$$

where  $v_n$  is defined by Eq. (13) and  $\gamma_{X_\zeta}(p, n) = \mathbf{E}X_n^p (\zeta_n - \pi_n(\zeta))^*$ . Calculating the sums of  $\pi_n(X^p) - \pi_{n-1}(X^p)$  for fixed  $p$  we can write

$$\begin{aligned} \pi_n(X^p) &= x + \sum_{m=1}^n K(p, m) b^* \pi_m(\zeta) \\ &\quad + \sum_{m=1}^n \gamma_{X_\zeta}(n, m-1) A_{m-1}^* b \mathcal{M}^* \langle v_m \rangle_m^{-1} v_m. \end{aligned}$$

Fixing  $p = n$ , we obtain Eq. (16).

Eq. (18) follows from

$$\begin{aligned} \gamma_{X_\zeta}(p, n) &= \mathbf{E}(X_{n-1}^p + K(p, n) b^* \zeta_n) \delta_n^*(\zeta) \\ &= K(p, n) b^* \gamma_{X_\zeta}(n) + \gamma_{X_\zeta}(p, n-1) A_{n-1}^* \\ &\quad - \gamma_{X_\zeta}(p, n-1) A_{n-1}^* b \mathcal{M}^* \langle v_n \rangle_n^{-1} P_n b \mathcal{M}^* \end{aligned}$$

since  $\delta_n(\zeta) = \zeta_n - \pi_n(\zeta) = A_{n-1} \delta_{n-1}(\zeta) + \sigma_n b \Lambda \varepsilon_n - P_n b \mathcal{M}^* \langle v_n \rangle_n^{-1} v_n$ .

To obtain the equation for the covariance matrix  $\gamma_{xx}(n)$  of the filtering error we can apply the same technique. Namely, let us introduce  $\gamma_{xx}(p, n) = \mathbf{E}X_n^p(X_n^n - \pi_n(X^p))^*$ . Of course,  $\gamma_{xx}(n) = \gamma_{xx}(n, n)$ . Then we have

$$\gamma_{xx}(p, n) = \mathbf{E}X_n^p(X_{n-1}^p - \pi_{n-1}(X^p) - \tilde{P}(p, n)\langle v \rangle_n^{-1}v_n + K(p, n)b^*\delta_n(\zeta))^*$$

where  $\tilde{P}(p, n) = \gamma_{x\zeta}(p, n-1)A_{n-1}^*b\mathcal{M}^*$ . Or, equivalently,

$$\gamma_{xx}(p, n) = \mathbf{E}X_n^p(X_{n-1}^p - \pi_{n-1}(X^p)) + K(p, n)\gamma_{x\zeta}(p, n)b - \tilde{P}(p, n)\langle v \rangle_n^{-1}\tilde{P}(p, n)^*$$

Thanks to equalities

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X_n^p(X_{n-1}^p - \pi_{n-1}(X^p)) &= \mathbf{E}(X_n^p - \pi_{n-1}(X_n^p))\delta_{n-1}^*(X^p) \\ &= \gamma_{xx}(p, n-1) \\ &\quad + K(p, n)b^*A_{n-1}^*\gamma_{x\zeta}^*(p, n-1) \\ &\quad + K(p, n)b^*P_n b\mathcal{M}^*\langle v \rangle_n^{-1}\tilde{P}(p, n)^*, \end{aligned}$$

we obtain

$$\begin{aligned} \gamma_{xx}(p, n) - \gamma_{xx}(p, n-1) &= K(p, n)[\gamma_{x\zeta}^*(p, n)b \\ &\quad + b^*A_{n-1}^*\gamma_{x\zeta}^*(p, n-1) \\ &\quad - b^*P_n b\mathcal{M}^*\langle v \rangle_n^{-1}\tilde{P}(p, n)^*] \end{aligned}$$

and Eq. (17) as a direct consequence.

## Acknowledgments

We would like to thank Alain Le Breton and Michel Viot for their fruitful discussions and interest for this work. Computing resources have been financed by Mostapad project in CNRS FR 2962.

## References

[1] A. Harvey, *Forecasting Structural Time Series Models and The Kalman Filter*, Cambridge University Press, 1989.  
 [2] A. Jazwinski, *Stochastic Processes and Filtering Theory*, New York Academic, 1970.

[3] R. Kalman, A new approach to linear filtering and prediction problems, *ASME Journal on Basic Engineering* 82 (1960) 25–40.  
 [4] P. Kaminski, A. Bryson, S. Schmidt, Discrete square root filtering: a survey of current techniques, *IEEE Transactions on Automatic Control* 16 (1971) 727–736.  
 [5] E. Potter, R. Stern, Statistical filtering of space navigation measurements, in: *Proc. 1963 AIAA Guidance Contr. Conf.* 1963.  
 [6] T. Kailath, Some new algorithms for recursive estimation in constant linear systems, *IEEE Transactions on Information Theory* 19 (1973) 750–760.  
 [7] S. Julier, J. Uhlmann, A new extension of the kalman filter to nonlinear systems, in: *Proc. of AeroSense: The 11th Int. Symp. on Aerospace/Defence Sensing*, 19, 1997, pp. 750–760.  
 [8] R. Elliott, H. Miao, Stochastic volatility model with filtering, *Stochastic Analysis and Applications* 24 (2006) 661–683.  
 [9] B. Ray, R. Tsay, Long-range dependence in daily stock volatilities, *Journal of Business and Economic Statistics* 18 (2000) 254–262.  
 [10] S. Bregni, W. Erangoli, Fractional noise in experimental measurements of IP traffic in a metropolitan area network, in: *Proc. of IEEE GlobeCom 2005*, vol. 2, 2005, pp. 781–785.  
 [11] W. Willinger, M. Taqqu, W. Leland, D. Wilson, Self-similarity in high-speed packet traffic: analysis and modeling of ethernet traffic measurements, *Statistical Science* 10 (1995) 67–85.  
 [12] R. Elliott, *Stochastic Calculus and Applications*, Springer-Verlag, 1982.  
 [13] G. Kallianpur, *Stochastic Filtering Theory*, Springer-Verlag, 1980.  
 [14] R. Liptser, A. Shiryaev, *Theory of Martingales*, Kluwer Academic, 1989.  
 [15] R. Liptser, A. Shiryaev, *Statistics of Random Processes*, Springer, 2001.  
 [16] R. Elliott, J. Deng, A filter for a hidden Markov chain observed in fractional Gaussian noise, *Systems and Control Letters* 60 (2011) 93–100.  
 [17] R. Elliott, T. Kuen Siu, Control of discrete-time HMM partially observed under fractional Gaussian noises, *Systems and Control Letters* 60 (2011) 350–355.  
 [18] B. Ait-El-Fquih, F. Desbouvries, Kalman filtering in triplet Markov chains, *IEEE Transactions on Signal Processing* 54 (2006) 2957–2963.  
 [19] F. Forbes, W. Pieczynski, New trends in Markov models and related learning to restore data. in: *2009 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing*, Grenoble, France, September 2–4, 2009.  
 [20] X. Li, C. Han, J. Wang, Discrete-time linear filtering in arbitrary noise, in: *Proc. 39th IEEE Conf. Decision and Control*, December 2000, pp. 1212–1217.  
 [21] M. Kleptsyna, A. Le Breton, M.-C. Roubaud, General approach to filtering with fractional Brownian noises — application to linear systems, *Stochastics and Stochastics Reports* 71 (2000) 119–140.  
 [22] M. Kleptsyna, A. Le Breton, Extension of the Kalman–Bucy filter to elementary linear systems with fractional Brownian noises, *Statistical Inference for Stochastic Processes* 5 (2002) 249–271.  
 [23] J. Durbin, The fitting of time series models, *Review of the International Statistical Institute* 28 (1960) 233–243.  
 [24] M. Kleptsyna, A. Veretennikov, On filtering and properties of conditional laws of Ito–Volterra equations, *Statistics and Control of Stochastic Processes* (1984) 179–196.  
 [25] A. Wood, G. Chan, Simulation of stationary Gaussian processes, *Journal of Computational and Graphical Statistics* 3 (4) (1994) 409–432.  
 [26] J. Farrell, M. Barth, *The Global Positioning System and Inertial navigation*, McGraw-Hill, 1999.

## Liste des figures

Figure 1 : Mesure des différentes positions $X_i$ d'un mobile aux instants $t_i$ , $i = 1, 2, \dots, n$ .....	6
Figure 2 : Illustration d'un tachéomètre.....	7
Figure 3 : Simulation d'un bruit blanc centré réduit (signal, moyenne, écart-type).....	10
Figure 4 : Décroissance de la corrélation temporelle.....	12
Figure 5 : Illustration simplifiée du filtre de Kalman.....	16
Figure 6 : Simulation de l'accélération du chariot constante à un bruit blanc près.....	23
Figure 7 : Simulation de la trajectoire du chariot se déplaçant le long d'un banc rectiligne.....	23
Figure 8 : Schéma synthétique de la procédure d'estimation par le maximum de vraisemblance...	28
Figure 9 : Normalité asymptotique du paramètre $\sigma$ pour $N=80$ par simulations de Monte-Carlo de l'expérience de Bogatin de $M=2000$ tirages indépendants.....	30
Figure 10 : Normalité asymptotique du paramètre $\sigma$ pour $N=80$ par simulations de Monte-Carlo de 2000 tirages indépendants de l'expérience de Bogatin.....	31
Figure 11 : Normalité asymptotique du paramètre $\sigma d$ pour $N=80$ par simulations de Monte-Carlo de 2000 tirages indépendants de l'expérience de Bogatin.....	31
Figure 12 : Normalité asymptotique du paramètre $\sigma HZ$ pour $N=80$ par simulations de Monte-Carlo de 2000 tirages indépendants de l'expérience de Bogatin.....	31
Figure 13 : Normalité asymptotique du paramètre $\sigma V$ pour $N=80$ par simulations de Monte-Carlo de 2000 tirages indépendants de l'expérience de Bogatin.....	31
Figure 14 : Variance de l'erreur de filtrage.....	33
Figure 15 : Suivi automatisé des mouvements altimétriques de rails SNCF (Système auscultation automatisée) Source : <a href="http://www.auscultation-automatique.fr/">http://www.auscultation-automatique.fr/</a> consulté le 08/05/2016.....	34
Figure 16 : Centrale inertielle MTi avec son repère associé Source : MTi and MTx User Manual and Technical Documentation p 9.....	34
Figure 17 : Fonction d'autocorrélation d'un processus AR(1), source : document web ; <b>Analyse des séries temporelles, Didier Délégnières</b> p 19.....	37
Figure 18 : Fonction d'autocorrélation d'un processus longue mémoire, source : document web ; <b>Analyse des séries temporelles, Didier Délégnières</b> p 19.....	37
Figure 19 : Illustration de la corrélation dans une expérience d'auscultation.....	38
Figure 20 : Illustration de l'erreur du multi-trajet GPS.....	38
Figure 21 : Simulation d'un processus moyenne mobile d'ordre 1.....	40
Figure 22 : Filtre classique de Kalman filtrant des mesures corrélées à 10% aux bruits MA (1), variance de l'erreur de filtrage.....	42

Figure 23 : Filtre classique de Kalman filtrant des mesures corrélées à 50% aux bruits MA (1), variance de l'erreur de filtrage.....	42
Figure 24 : Filtre classique de Kalman filtrant des mesures corrélées à 90% aux bruits MA (1), variance de l'erreur de filtrage.....	43
Figure 25 : Inefficacité du filtre classique de Kalman à estimer des états corrélés à 90% aux bruits MA(1).....	43
Figure 26 : Normalité asymptotique du paramètre $\sigma$ pour N=80 par simulations de Monte-Carlo de l'expérience de Bogatin de M=2000 tirages indépendants.....	50
Figure 27 : Normalité asymptotique des paramètres $\sigma$ et $\alpha$ pour N=80 par simulations de Monte-Carlo de l'expérience de Bogatin de M=2000 tirages indépendants. ....	51
Figure 28 : Normalité asymptotique du paramètre $\sigma$ pour N=80 par simulations de Monte-Carlo de l'expérience de Bogatin de M=2000 tirages indépendants.....	51
Figure 29 : Normalité asymptotique des paramètres $\sigma$ et $\alpha$ pour N=80 par simulations de Monte-Carlo de l'expérience de Bogatin de M=2000 tirages indépendants. ....	52
Figure 30 : Variance de la position estimée par filtrage de Kalman à bruits corrélés pour 50% aux bruits MA(1).....	53
Figure 31 : Variance de la vitesse estimée par filtrage de Kalman à bruits corrélés pour 50% aux bruits MA(1).....	54
Figure 32 : Variance de l'accélération estimée par filtrage de Kalman à bruits corrélés pour 50% aux bruits MA(1).....	54
Figure 33 : Variance de la position estimée par filtrage de Kalman à bruits à bruits corrélés MA(1) à 71,14% .....	56
Figure 34 : Variance de la vitesse estimée par filtrage de Kalman à bruits à bruits corrélés MA(1) à 71,14%.....	56
Figure 35 : Variance de l'accélération estimée par filtrage de Kalman à bruits à bruits corrélés MA(1) à 71,14% .....	56

## Liste des tableaux

Tableau 1 : Résultats de la calibration du paramètre $\sigma$ sur 2000 simulations.....	29
Tableau 2 : Résultats de la calibration des paramètres $\sigma, \sigma_{HZ}, \sigma_V, \sigma_d$ sur 2000 simulations .....	31
Tableau 3 : Paramètres ayant servi à la simulation des mesures corrélées aux bruits MA(1) et AR(1) .....	49
Tableau 4 : Résultats de la calibration du paramètre $\sigma$ sur 2000 simulations.....	50
Tableau 5 : Résultats de la calibration des paramètres $\sigma, \alpha$ sur 2000 simulations.....	50
Tableau 6 : Résultats de la calibration du paramètre $\sigma$ sur 2000 simulations.....	51
Tableau 7 : Résultats de la calibration des paramètres $\sigma, \alpha$ sur 2000 simulations.....	52
Tableau 8 : Résultat de la calibration des mesures réelles .....	55
Tableau 9 : Mise en évidence de la performance du filtre à bruits corrélés (variance de l'erreur de filtrage) .....	57

## Filtrage de Kalman à bruits corrélés pour le positionnement précis

Mémoire d'Ingénieur C.N.A.M., Le Mans 2016

---

### RESUME

Le filtre de Kalman à bruits corrélés peut être considéré comme une alternative aux solutions de filtrage classique, car il améliore la précision du positionnement. Les applications de ce nouveau filtre seraient très intéressantes pour le couplage de mesures dans les domaines suivants, photogrammétrie, télédétection aérienne, bathymétrie et «mobile mapping».

L'objectif visé par ce travail de fin d'études, est d'évaluer les performances du filtre de Kalman à bruits corrélés dans une expérience d'auscultation. Dans l'optique de mettre en évidence la puissance de ce filtre, il y a lieu d'estimer par le maximum de vraisemblance, d'une part la variance du modèle d'évolution et d'autre part la corrélation des modèles (même corrélation de bruits, pour les modèles d'évolution et d'observation) en fixant au préalable une structure de corrélation aux dits modèles.

**Mots clés: Kalman, bruits corrélés, corrélation, précision, maximum de vraisemblance, modèles, structure de corrélation.**

---

### SUMMARY

The Kalman filter correlated noises can be considered as an alternative to conventional filtering solutions, because it improves the positioning accuracy. The applications of this new filter would be very interesting for the coupling of measures in the following areas, photogrammetry, aerial remote sensing, bathymetry and «mobile mapping».

The objective of this work graduation, is to assess the Kalman filter performance correlated noises in an auscultation experience. In order to demonstrate the power of this filter, it must estimate by the maximum likelihood, one hand the variance of the evolution model and the other hand, the correlation models (same noises correlation structure for the evolution and observation models) setting beforehand a correlation structure to said models.

**Key words: Kalman, correlated noises, correlation, precision, maximum likelihood, models, correlation structure.**