



**HAL**  
open science

# Raffinement des modèles géophysiques globaux de la Terre par assimilation de données gravimétriques satellitaires

Anthony Venturi

► **To cite this version:**

Anthony Venturi. Raffinement des modèles géophysiques globaux de la Terre par assimilation de données gravimétriques satellitaires. Sciences de l'ingénieur [physics]. 2016. dumas-01811151

**HAL Id: dumas-01811151**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01811151>**

Submitted on 8 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET METIERS**  
**ÉCOLE SUPÉRIEURE DES GÉOMÈTRES ET TOPOGRAPHES**

---

**MÉMOIRE**

**présenté en vue d'obtenir**

**le DIPLÔME D'INGÉNIEUR CNAM**

**Spécialité : Géomètre et Topographe**

**par**

**Anthony VENTURI**

---

**Raffinement des modèles géophysiques globaux de la Terre par  
assimilation de données gravimétriques satellitaires**

**Soutenu le 05 Juillet 2016**

---

**JURY**

**PRESIDENT :** Monsieur Laurent MOREL

**MEMBRES :** Monsieur Jérôme VERDUN  
Monsieur Clément ROUSSEL  
Madame Joëlle NICOLAS-DUROY  
Monsieur José CALI  
Monsieur Frédéric DURAND  
Monsieur Stéphane DURAND  
Madame Élisabeth SIMONETTO  
Monsieur Benoit LEGRU

**Maître de stage**  
**Maître de stage**  
**Professeur référent**

## Remerciements

---

Je tiens tout d'abord à remercier mes maîtres de stage Jérôme Verdun et Clément Roussel pour leur disponibilité et la confiance qu'ils m'ont accordée. Ils m'ont apporté toute l'aide nécessaire à la réalisation de ce travail et m'ont donné de précieux conseils.

Aussi, je tiens à remercier mon professeur référent Joëlle Nicolas-Duroy pour ses remarques pertinentes et son regard critique.

Pour la bonne ambiance et le bon état d'esprit, c'est l'ensemble de mes camarades de la T0 ainsi que toute l'équipe du laboratoire Géomatique et Foncier qui méritent des remerciements.

Enfin je remercie toute ma famille pour son soutien sans faille et pour ses encouragements tout au long du cycle d'ingénieur.

## Glossaire et liste des abréviations

---

**AUV** : Autonomous Underwater Vehicle

**ESA** : European Space Agency

**CGS** : Centimètre, Gramme, Seconde

**GGT** : Gravity Gradient Tensor

**GMT** : Generic Mapping Tools

**GOCE** : Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer

**GRACE** : Gravity Recovery And Climate Experiment

**GRS80** : Geodetic Reference System 1980

**LNOF** : Local North Oriented Frame

**NGA** : National Geospatial-Intelligence Agency

**NIMA** : National Imagery And Mapping Agency

**PREM** : Preliminary Reference Earth Model

**ROV** : Remotely Operated Vehicle

**WGS84** : World Geodetic System 1984

# Table des matières

---

Remerciements .....	2
Glossaire et liste des abréviations.....	3
Introduction.....	6
Partie I Les méthodes de calcul du Tenseur du Gradient de Gravité (GGT) .....	8
I.1 Les notions de base sur les grandeurs gravimétriques .....	9
I.1.1 Le potentiel gravitationnel .....	9
I.1.1.1 Cas d'un corps ponctuel .....	9
I.1.1.2 Cas d'un corps non ponctuel (infinitésimal) de densité homogène.....	10
I.1.1.3 Cas d'un corps étendu de densité hétérogène .....	10
I.1.2 Le champ gravitationnel .....	11
I.1.3 Le tenseur du gradient de gravité (GGT) .....	11
I.2 État de l'art .....	12
I.2.1 Le prisme sphérique .....	12
I.2.1.1 Les coordonnées sphériques .....	12
I.2.1.2 Description du prisme sphérique .....	13
I.2.2 Le prisme ellipsoïdal .....	15
I.2.2.1 Les coordonnées ellipsoïdales .....	15
I.2.2.2 Les ellipsoïdes homothétiques .....	16
I.2.2.3 Description du prisme ellipsoïdal .....	18
I.3 L'équilibre hydrostatique .....	20
I.3.1 Définition et conséquences .....	20
I.3.1.1 Le concept d'isostasie.....	20
I.3.1.2 De la gravimétrie à l'isostasie.....	21
I.3.2 L'équation différentielle de Clairaut .....	21
Partie II Conception de modèles de densités raffinés .....	25
II.1 Définition d'un modèle géophysique et des données gravimétriques satellitaires.....	26
II.1.1 Le modèle PREM.....	26
II.1.1.1 Propagation des ondes sismiques .....	26
II.1.1.2 Vitesse et comportement des ondes sismiques en cas de changement de milieu26	
II.1.1.3 Corrélation entre structure du globe et comportement des ondes sismiques.....	27
II.1.2 Génération du modèle PREM .....	28
II.1.3 LITHO1.0 .....	29
II.2 Conception de modèles géophysiques raffinés .....	31
II.2.1 Calcul des modèles raffinés PREMC et PREMC+LITHO1.0C.....	31

II.2.1.1	Calcul de l'aplatissement de la couche externe ( $r = 6\,378\,137\text{ m}$ ).....	31
II.2.1.2	Calcul de l'aplatissement de la couche interne ( $r = 0\text{ m}$ ) .....	32
II.2.1.3	Calcul de la dérivée de l'aplatissement sur la couche interne .....	34
II.2.2	Création des modèles compensés.....	35
II.2.2.1	Mise à l'échelle du modèle PREM brut .....	35
II.2.2.2	Création du modèle PREMC .....	35
II.2.2.3	Création de PREMH .....	36
II.2.2.4	Création du modèle [PREM+LITHO1.0]C .....	36
II.3	Présentation des données gravimétriques satellitaires .....	41
II.3.1	Les données GOCE.....	41
Partie III	Comparaison des effets gravitationnels induits par les différents modèles avec les données gravimétriques satellitaires .....	43
III.1	Ajustement des masses des modèles compensés.....	44
III.2	Comparaison des modèles entre eux.....	45
III.2.1	Anomalie PREMC/PREMH .....	45
III.2.1.1	GGT dérivant du potentiel induit par PREMC .....	45
III.2.1.2	GGT dérivant du potentiel induit par PREMH .....	46
III.2.1.3	Anomalie PREMC-PREMH.....	46
III.2.1.4	GGT dérivant du potentiel induit par [PREM+LITHO1.0]C (1 <sup>ère</sup> approche) .....	47
III.3	Anomalie MESURES/[PREM+LITHO1.0]C .....	50
Conclusion	.....	51
Bibliographie	.....	53
Table des annexes	.....	55
Liste des figures	.....	69
Liste des tableaux	.....	69

## Introduction

---

Aujourd'hui, l'utilité de l'espace pour la mesure et la surveillance de l'environnement est devenue incontestable. Initialement, l'imagerie de l'intérieur de la Terre était déterminée exclusivement à partir de données sismiques. En effet, la densité des matériaux du fait de leur composition chimique et du changement de température varie géographiquement et suivant la profondeur. Par ailleurs, cette variation libère une force à l'origine de la convection mantellique qui est responsable du mouvement des plaques. Ainsi les séismes ou encore les volcans sont créés par de lents mouvements dans les profondeurs du manteau. Les ondes qui se propagent sont ensuite enregistrées pour produire des cartes d'anomalies des vitesses de propagation. Cependant traduire ces variations de vitesse en densité reste délicat et nécessite l'apport d'informations complémentaires.

Désormais, les chercheurs s'appuient sur les mesures gravimétriques pour appréhender le fonctionnement de la machine Terre. Le champ de gravitation occupe tout l'espace, qui entoure un corps de masse non nulle. Il traduit l'action gravitationnelle de ce dernier sur un objet situé à proximité, immédiate ou non. En outre, il est caractérisé par les trois grandeurs physiques suivantes :

- le potentiel gravitationnel, noté  $V$ , dont l'unité dans le système international est le mètre carré par seconde carré ( $m^2 \cdot s^{-2}$ ) ;
- le champ gravitationnel, noté  $\vec{g}$ , qui est le gradient du potentiel, appelé plus couramment accélération de pesanteur, exprimé légalement en  $m \cdot s^{-2}$ , ou en *Gal*, l'unité utilisée dans le système CGS, de symbole  $G$  ( $1 G = 1 cm \cdot s^{-2} = 10^{-2} m \cdot s^{-2}$ ) ;
- le gradient du champ gravitationnel noté  $T$  qui est un tenseur d'ordre 2 dont les composantes sont exprimées en  $s^{-2}$ , qui est l'unité légale, mais également en Eötvös (symbole  $E$  :  $1 E = 10^{-9} s^{-2}$ ). Ainsi, la composante verticale ( $V_{zz}$ ) du tenseur, qui dérive du potentiel gravitationnel induit par la Terre, en un point situé à une hauteur de 255 km au-dessus de l'ellipsoïde, vaut environ 3000 Eötvös.

Il existe différents moyens techniques, statiques ou mobiles, afin de mesurer le champ gravitationnel de la Terre mais également différents milieux de mesures tels que le sol, la mer, l'air ou encore l'espace. De nouveaux systèmes d'acquisition gravimétriques embarqués sont à l'étude, ils fourniront des données à haute résolution spatiale dans le cadre d'études locales ou en compléments de mesures globales. Par exemple, le projet GRAVIMOB (Roussel et al., 2015b) porté par l'Institut Universitaire Européen de la Mer (IUEM) en collaboration avec le Laboratoire Géomatique et foncier du Cnam (GeF), propose le développement d'un système sous-marin embarquable à bord de porteurs téléguidés AUV ou autonomes ROV.

Par ailleurs, les dispositifs de mesures satellitaires se développent de plus en plus. Aussi, l'étude des orbites des satellites géodésiques fournit des cartes très précises du champ de gravité de la Terre à grandes longueurs d'onde. Plusieurs générations de modèles globaux se sont succédées. Le champ de gravité est non uniforme à cause de la répartition hétérogène de la matière au sein des différentes enveloppes du globe. Par conséquent, sa connaissance s'avère nécessaire notamment en géodésie physique pour la création d'un géoïde de haute résolution.

En effet, cette surface est équipotentielle du champ de pesanteur, elle possède deux grandes bosses, d'environ 60 m par rapport à l'ellipsoïde de référence WGS84, dont l'une est centrée sur l'Islande et l'autre située au sud de l'Afrique, entre Madagascar et l'Antarctique. De plus, on localise également un creux, d'environ 100 m de profondeur par rapport à l'ellipsoïde de référence, au sud de l'Inde. Ces formes coïncident selon toute vraisemblance avec les courants convectifs mantelliques.

Toutefois, le suivi des variations spatiales et temporelles du champ de gravité permet d'approfondir les connaissances dans d'autres domaines scientifiques tels que la géophysique, notamment concernant la structure interne du globe. En effet certaines zones géographiques de la planète sont quasiment dépourvues de matériels de mesure permettant d'enregistrer les données sismiques. De ce fait, les données satellitaires de par leur caractère global fournissent des informations nécessaires pour évaluer l'intérieur de la Terre à ces endroits. Ainsi, le satellite GOCE, entre 2009 et 2013, a mesuré les composantes du tenseur du gradient de gravité avec une précision inégalée de l'ordre du milliEötvös (3 mE) d'après (MISSION, CNES 2015). Par conséquent, les variations latérales de densité des différentes couches géologiques sont détectables par GOCE puisqu'elles induisent des variations de 1 à 2 E. Enfin, l'apparition de ces données globales de haute précision, ne permettant pas d'obtenir directement les informations sur la structure interne de notre planète, autorise néanmoins la mise au point d'une modélisation numérique de l'effet du champ à partir de modèles géophysiques globaux.

Aussi, dans le cadre de cette étude, on s'intéresse plus particulièrement à ces modèles. En effet, ceux déjà existants tels que PREM et LITHO1.0 n'ont pas encore été comparés à ces nouvelles données satellitaires. Afin de les rendre comparables à ces mesures, ce travail consiste à les raffiner, c'est-à-dire à améliorer leur distribution de densité. Il se décompose en deux étapes qui sont :

- à partir d'un modèle géophysique de densités données (celles des enveloppes terrestres internes), de calculer numériquement les grandeurs gravimétriques qui dépendent des densités, en des points de l'espace (situés à 255 km environ, au-dessus de l'ellipsoïde WGS84) ;
- ensuite, de comparer ces valeurs à celles mesurées par le satellite GOCE, situé à cette même altitude.

Enfin, les résultats obtenus pourront servir aux géophysiciens et aux géologues qui s'intéressent à la structure interne de la Terre.

Le mémoire se compose de trois parties ; la première qui expose les méthodes de calcul du GGT (Gravity Gradient Tensor), puis la deuxième qui explique la démarche à suivre pour concevoir des modèles raffinés et enfin, la troisième partie qui présente différentes comparaisons entre les résultats obtenus à partir de nos modèles et ceux provenant des mesures satellitaires.

**Partie I Les méthodes de calcul du Tenseur du Gradient de  
Gravité (GGT)**

## I.1 Les notions de base sur les grandeurs gravimétriques

D'une manière générale, le champ gravitationnel est un champ réparti dans tout l'espace. Il est dû à la présence d'une masse susceptible d'exercer une influence gravitationnelle sur tout autre corps situé dans son entourage. Par ailleurs il est caractérisé par trois grandeurs liées entre-elles :

- le potentiel gravitationnel noté  $V$  ;
- le champ gravitationnel noté  $\vec{g}$  ;
- le tenseur du gradient de gravité noté  $T$ .

Ces grandeurs sont générées en un point  $P$  de l'espace par une source, notée  $S$  dans la suite du mémoire, définie par sa forme géométrique, sa position dans l'espace et sa masse volumique  $\rho$ .

### I.1.1 Le potentiel gravitationnel

Le potentiel gravitationnel est un potentiel Newtonien<sup>1</sup> induit en un point de l'espace par un corps, de répartition de masse quelconque.

#### I.1.1.1 Cas d'un corps ponctuel

La notion de corps ponctuel n'est pas réaliste mais simplifie le problème. Ainsi une source  $S$  ponctuelle, de masse  $m$  située à une distance  $l$  d'un point  $P$  induit en celui-ci un potentiel  $V$  (cf. *figure I-1*) :

$$V(P) = G \times \frac{m}{l} \quad (1.1)$$

où  $G$  est la constante gravitationnelle :

$$G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

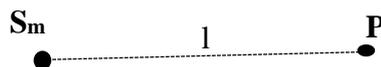


Figure I-1 – Corps ponctuel

---

<sup>1</sup> On appelle potentiel Newtonien tout potentiel scalaire variant en «  $\frac{1}{l}$  » ( $l$  étant la distance entre le corps et le point de l'espace).

### I.1.1.2 Cas d'un corps non ponctuel (infinitésimal) de densité homogène

La masse de la source  $S_{\Omega,\rho}$  est maintenant définie par le produit de sa densité  $\rho$ , constante et de son volume  $\Omega$  (cf. *figure I-2*) :

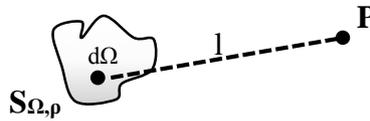


Figure I-2 – Corps non ponctuel

Le potentiel en  $P$  s'exprime grâce au principe de superposition comme la somme des potentiels induits par chaque source ponctuelle de volume infinitésimal  $d\Omega$  :

$$V(P) = G\rho \iiint_{\Omega} \frac{d\Omega}{l} \quad (1.2)$$

### I.1.1.3 Cas d'un corps étendu de densité hétérogène

Afin de déterminer le potentiel  $V$  en un point  $P$  de l'espace induit par une source  $S$  de densité variable, il convient de discrétiser  $S$  en  $n$  sources de densité  $\rho_i$  et de volume  $d\Omega_i$  avec  $i \in \{1, \dots, n\}$ . La masse  $m$  de  $S$  s'exprime ainsi :

$$m = \sum_{i=1}^n \rho_i \times d\Omega_i$$

D'où le potentiel :

$$V(P) = G \sum_{i=1}^n \rho_i \iiint_{\Omega} \frac{d\Omega}{l} \quad (1.3)$$

Seuls ces deux derniers cas sont pertinents. En effet la source  $S$  considérée dans ce travail de fin d'études correspond à une portion de couche géologique qui appartient à la Terre. Par conséquent cette portion, que l'on assimilera mathématiquement à un prisme pour effectuer les calculs (cf. **I.2**), possède un volume et une densité qui lui sont propres.

Une fois le potentiel déterminé, on en déduit le champ gravitationnel.

### I.1.2 Le champ gravitationnel

Nommé aussi vecteur accélération gravitationnelle, ce champ noté  $\vec{g}$  est obtenu par dérivation spatiale du potentiel précédemment évoqué.

$$\vec{g}(P) = -\overrightarrow{grad}(V) \text{ et } g(P) = G \sum_{i=1}^n \rho_i \iiint_{\Omega} \nabla \left( \frac{1}{l} \right) d\Omega \quad (1.5)$$

on notera que  $\vec{g}$  est de direction opposée à celle du vecteur  $\overrightarrow{SP}$ .

Enfin on calcule le tenseur à partir de  $g(P)$ .

### I.1.3 Le tenseur du gradient de gravité (GGT)

Ce tenseur d'ordre 2 noté  $T$  est obtenu en dérivant spatialement  $g(P)$ . Ainsi il vient :

$$T(P) = \nabla_p(\nabla_p V) = G \sum_{i=1}^n \rho_i \iiint_{\Omega} \nabla \left( \nabla \left( \frac{1}{l} \right) \right) d\Omega \quad (1.6)$$

Autrement dit  $T$  est le gradient du champ gravitationnel ( $\vec{\nabla}f = \overrightarrow{grad}f$ ).

Finalement, le calcul de ces trois grandeurs consiste à discrétiser la Terre en éléments de volume qui possèdent chacun une densité propre. Aussi, ces formules analytiques permettent d'envisager le problème inverse. En effet, à partir des mesures satellitaires du GGT, et en fixant la géométrie des éléments de volume, on pourra déterminer la valeur des densités qui leur est associée et ainsi, raffiner nos modèles géophysiques.

À présent il convient de réfléchir sur la forme géométrique discrétisée de la source  $S$  à adopter pour effectuer les calculs les plus précis possibles.

## I.2 État de l'art

Afin de calculer le potentiel et les autres grandeurs gravimétriques associées, la source  $S$  considérée peut prendre six formes géométriques différentes. Ainsi d'après divers travaux (Heck & Seitz, 2007 ; Wild-Pfeiffer, 2008 ; Roussel, 2013), le volume de l'élément de matière peut être modélisé par :

- le prisme ellipsoïdal ;
- le prisme sphérique ;
- le prisme droit ;
- le point massique ;
- la couche massique ;
- la ligne massique.

Dans ce travail, seuls les deux premiers prismes sont détaillés car on s'intéresse au champ gravitationnel produit par la Terre dans son intégralité. Les autres modélisations sont réservées à des études locales où la courbure du globe est négligée.

### I.2.1 Le prisme sphérique

Le prisme sphérique est utilisé dans le cas où l'on néglige l'aplatissement terrestre. La Terre devient donc une sphère. Tout d'abord il est utile de présenter les coordonnées sphériques.

#### I.2.1.1 Les coordonnées sphériques

Dans ce système de coordonnées (cf. *figure I-3*) la latitude d'un point devient géocentrique, on la notera  $\theta$ .

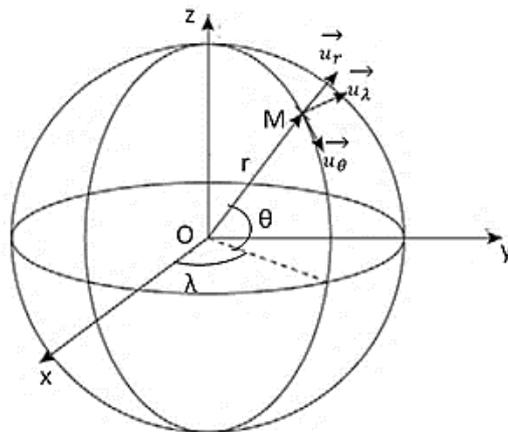


Figure I-3 – Système de coordonnées sphériques (source : Beury (2014).  
<http://mawy33.free.fr/cours%20sup/35-500%20coords.pdf>)

Un point  $M$  de l'espace de coordonnées sphériques  $(r, \lambda, \theta)$  a pour coordonnées cartésiennes géocentriques :

$$\begin{cases} x_M = r \cos(\theta) \cos(\lambda) \\ y_M = r \cos(\theta) \sin(\lambda) \\ z_M = r \sin(\theta) \end{cases} \quad (2.1)$$

avec les relations suivantes :

$$\boxed{0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \lambda \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi}$$

On peut à présent décrire facilement le prisme sphérique (cf. *figure I-4*).

### I.2.1.2 Description du prisme sphérique

Le prisme sphérique possède sept paramètres :

- 2 parallèles de latitudes respectives  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ;
- 2 méridiens de longitudes respectives  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ;
- 2 sphères concentriques de rayons respectifs  $r_1$  et  $r_2$  ;
- une densité constante  $\rho$ .

En conséquence l'élément de volume sphérique s'écrit :

$$d\Omega = r^2 \cos\theta dr d\lambda d\theta$$

Il vient ensuite par intégration :

$$\Omega = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \cos\theta dr d\lambda d\theta \quad (2.2)$$

Ainsi, en intégrant sur une sphère de rayon  $R$ , il vient d'après (2.2) :

$$\Omega = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\theta dr d\lambda d\theta = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (2.3)$$

À présent donnons un petit exemple d'application du prisme sphérique pour le calcul du potentiel gravitationnel  $V$ .

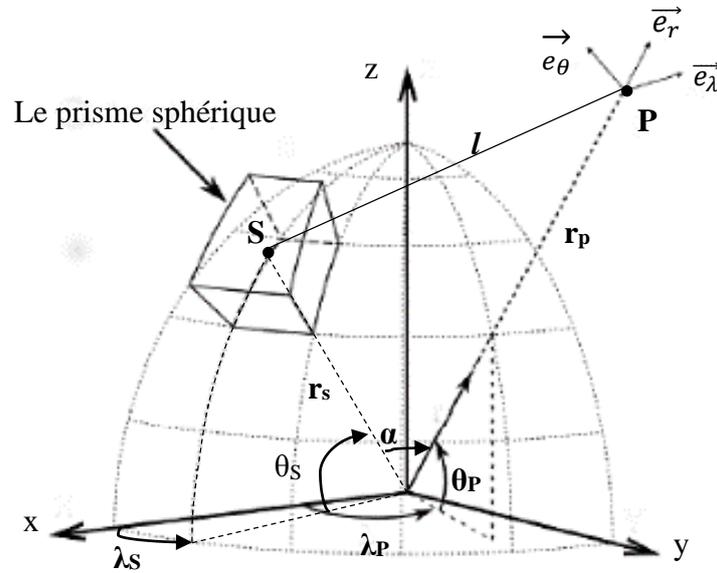


Figure I-4 – Le prisme sphérique

Pour rappel, d'après (I.2) :

$$V(P) = G\rho \iiint_{\Omega} \frac{d\Omega}{l}$$

Soit un point  $P$  de coordonnées sphériques  $(r_p, \lambda_p, \theta_p)$ . La distance  $l$  (PS) devient :

$$l = \sqrt{r_p^2 + r_s^2 - 2r_p r_s \cos\alpha}$$

$\alpha$  est l'angle entre les deux rayons vecteurs  $\vec{OP}$  et  $\vec{OS}$ . L'angle  $\alpha$  peut donc s'exprimer en fonction des coordonnées des points  $S$  et  $P$  par

$$\cos\alpha = \sin\theta_p \sin\theta_s + \cos\theta_p \cos\theta_s \cos(\lambda_p - \lambda_s)$$

On peut ainsi exprimer le potentiel :

$$V(P) = G\rho \int_{r_1}^{r_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{r_s^2 \cos\theta_s dr_s d\lambda_s d\theta_s}{\sqrt{r_p^2 + r_s^2 - 2r_p r_s \cos\alpha}} \quad (2.4)$$

Les expressions littérales complètes des composantes du vecteur accélération gravitationnelle et du GGT sont données dans Asgharzadeh et al. (2007). Enfin, cet outil de modélisation idéale pour discrétiser une terre immobile de forme sphérique présente des limites dans le cas d'une terre en rotation.

## I.2.2 Le prisme ellipsoïdal

Afin de tenir compte de l'aplatissement de la Terre dû à sa rotation, l'utilisation du modèle du prisme ellipsoïdal permet d'obtenir un résultat plus raffiné de l'effet de la croûte terrestre. Effectivement, il consent une discrétisation exacte d'une terre de forme ellipsoïdale. En premier lieu il est intéressant de définir les coordonnées ellipsoïdales pour ensuite parler du prisme.

### I.2.2.1 Les coordonnées ellipsoïdales

De manière générale, un ellipsoïde est déterminé par son demi-grand axe  $a$  et son demi-petit-axe  $b$ . Dans le cas d'un ellipsoïde de révolution de rayon équatorial  $a$  et de rayon polaire (demi-petit-axe de rotation)  $b$ , les coordonnées cartésiennes d'un point  $M$  situé sur la surface de l'ellipsoïde de coordonnées géographiques  $(\lambda, \varphi)$  dans un repère orthonormé approprié ( cf. *figure I-5* ) sont :

$$\begin{cases} x_M(\varphi, \lambda) = a \cos(\varphi) \cos(\lambda) \\ y_M(\varphi, \lambda) = a \cos(\varphi) \sin(\lambda) \\ z_M(\varphi, \lambda) = b \sin(\varphi) \end{cases}$$

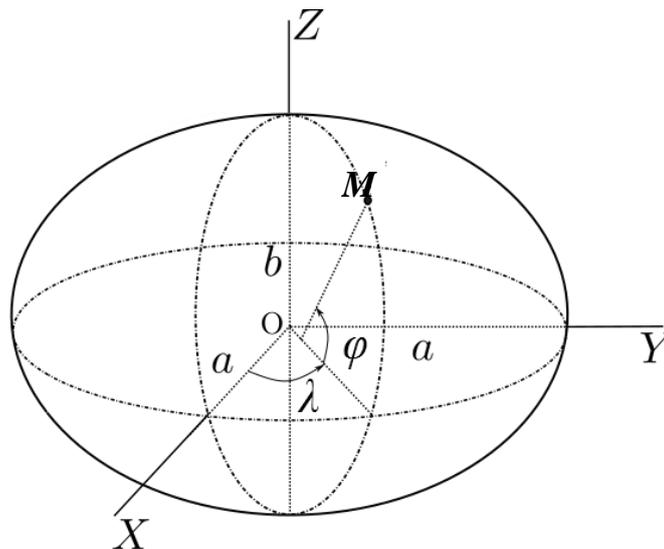


Figure I-5 – Coordonnées géographiques d'un point situé sur l'ellipsoïde

D'où l'équation cartésienne vérifiée par  $M$  :

$$\boxed{\frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{a^2} + \frac{z_M^2}{b^2} = 1} \quad (2.5)$$

Par ailleurs, en notant la latitude géodésique  $\varphi_g$  qui est l'angle que fait la normale à l'ellipsoïde passant par  $M$  avec le plan équatorial tel que  $0 \leq \varphi_g \leq 2\pi$ , les coordonnées cartésiennes géocentriques du point s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{cases} x(\varphi_g, \lambda) = R_N(\varphi_g) \cos(\varphi_g) \cos(\lambda) \\ y(\varphi_g, \lambda) = R_N(\varphi_g) \cos(\varphi_g) \sin(\lambda) \\ z(\varphi_g, \lambda) = R_N(\varphi_g)(1 - e^2) \sin(\varphi_g) \end{cases} \quad (2.6)$$

Avec  $R_N(\varphi_g) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi_g)}}$ , le rayon de courbure de la section normale Est-Ouest obtenue

lors de la paramétrisation de l'ellipse,  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ , l'excentricité associée et  $\lambda$ , l'angle dièdre entre le plan méridien origine et le plan méridien de  $M$  tel que  $0 \leq \lambda \leq \pi$  (cf. *figure I-6*).

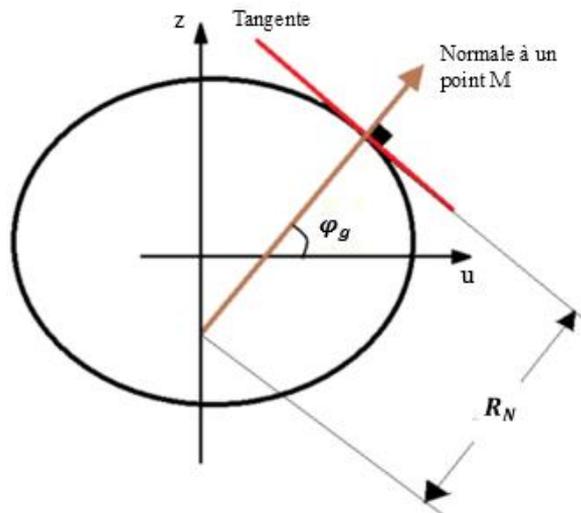


Figure I-6 – Latitude géodésique  $\varphi_g$  et rayon de courbure  $R_N$  (source : Jarry-Bolduc (2012). <https://sites.google.com/site/sciencesgeomatiques/gmt2050/examen-1/examen-1---hiver-2012/section-2---ellipsoïde>)

Pour la suite, on considère un ellipsoïde de référence noté  $\varepsilon_0$  de demi-grand axe  $a_0$ , de demi petit-axe  $b_0$  et d'excentricité  $e_0$ .

### I.2.2.2 Les ellipsoïdes homothétiques

Cette notion est abordée en vue de définir un prisme ellipsoïdal (cf. I.2.2.3).

Soit  $\varepsilon_u$  un ellipsoïde de révolution homothétique et concentrique à  $\varepsilon_0$ . On note son demi-grand axe  $a_u$  et son demi petit-axe  $b_u$  de sorte que l'on ait les relations suivantes :

$$\begin{cases} a_u = u \times a_0 \\ b_u = u \times b_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

avec  $u$  le facteur d'homothétie et  $\varepsilon_u = \varepsilon_0$  par définition.

Ainsi un point  $M$  de l'espace repéré par ses coordonnées ellipsoïdales  $(\lambda, \varphi, u)$  a pour coordonnées cartésiennes géocentriques :

$$\begin{cases} x_M = u R_N(\varphi_g) \cos(\varphi_g) \cos(\lambda) \\ y_M = u R_N(\varphi_g) \cos(\varphi_g) \sin(\lambda) \\ z_M = u R_N(\varphi_g) (1 - e^2) \sin(\varphi_g) \end{cases} \quad (2.8)$$

L'équation cartésienne vérifiée par  $M$  devient :

$$\frac{x_M^2}{u^2 a^2} + \frac{y_M^2}{u^2 a^2} + \frac{z_M^2}{u^2 b^2} = 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\sqrt{\frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{a^2} + \frac{z_M^2}{b^2}} = u \quad (2.9)$$

Finalement, (cf. *figure I-7*), si :

- $u > 1$  : Le point  $M$  se situe à l'extérieur de  $\varepsilon_0$  ;
- $u = 1$  : Le point  $M$  se situe sur  $\varepsilon_0$  ;
- $u < 1$  : Le point  $M$  se situe à l'intérieur de l'ellipsoïde de référence  $\varepsilon_0$ .

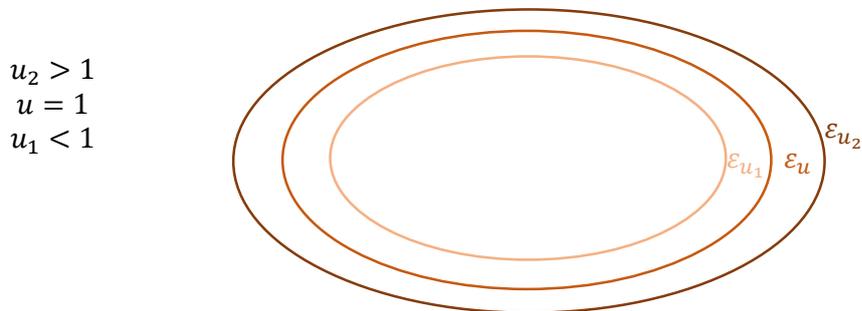


Figure I-7 – Position du point  $M$  par rapport à l'ellipsoïde de référence

### I.2.2.3 Description du prisme ellipsoïdal

Un prisme ellipsoïdal (cf. *figure I-8*) est caractérisé par :

- deux ellipsoïdes homothétiques  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  ;
- deux parallèles  $\phi_1$  et  $\phi_2$  ;
- deux méridiens  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ;
- une densité constante  $\rho$ .

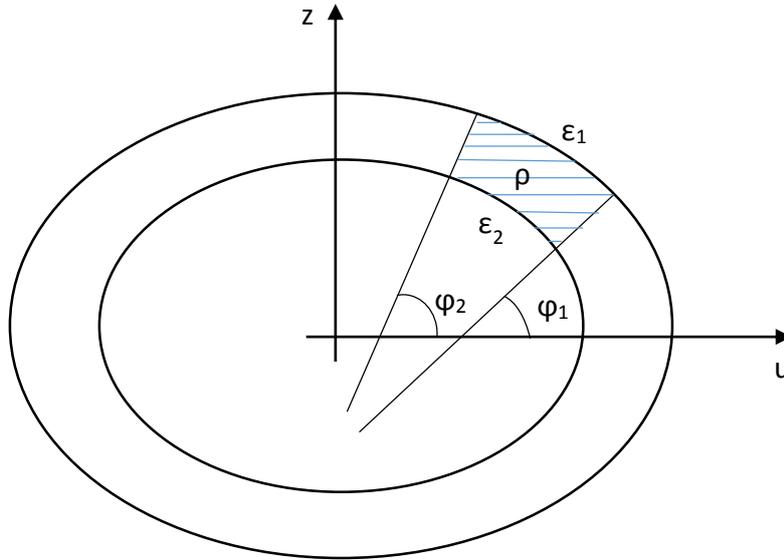


Figure I-8 – Prisme ellipsoïdal

De ce fait un élément de volume infinitésimal du prisme a pour expression :

$$d\Omega = |\det J| d\lambda d\varphi du \quad (2.10)$$

$J$  est la matrice jacobienne relative aux coordonnées ellipsoïdales du point  $M$  :

$$J = \left( \begin{pmatrix} \frac{dOM}{d\lambda} \\ \frac{dOM}{d\varphi} \\ \frac{dOM}{du} \end{pmatrix} \right)$$

En développant l'expression (2.10) il vient :

$$d\Omega = R_N(\varphi)^3 \cos(\varphi) (1 - e^2) u^2 d\lambda d\varphi du$$

On en déduit le volume d'un prisme de paramètres  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \phi_1, \phi_2, \lambda_1, \lambda_2)$  :

$$\Omega = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{a^3 \cos(\varphi) (1 - e^2) u^2}{(1 - e^2 \sin^2(\varphi))^{3/2}} d\lambda d\varphi du \quad (2.11)$$

Ainsi on peut exprimer le volume de l'ellipsoïde  $\epsilon_0$  en résolvant l'intégrale :

$$\Omega = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{a^3 \cos(\varphi)(1-e^2)u^2}{(1-e^2 \sin^2(\varphi))^{3/2}} d\lambda d\varphi du$$

ce qui équivaut à

$$\Omega = a^3(1-e^2) \frac{2\pi}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\varphi)}{(1-e^2 \sin^2(\varphi))^{3/2}} d\varphi$$

avec

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\varphi)}{(1-e^2 \sin^2(\varphi))^{3/2}} d\varphi = \left[ \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2(\varphi)}} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}$$

finalemt le volume s'écrit :

$$\boxed{\Omega = \frac{4\pi}{3} a^3 \sqrt{1-e^2} = \frac{4\pi}{3} a^2 b.} \quad (2.12)$$

On comprend très vite que l'expression littérale tend à se complexifier considérablement pour le calcul des dérivées du potentiel. Les expressions littérales des composantes du champ gravitationnel et du GGT sont données dans Roussel et al. (2015). Par ailleurs, on ne peut pas résoudre de manière analytique ces intégrales. De ce fait, une méthode d'intégration numérique telle que la quadrature de Gauss-Legendre que l'on retrouve dans les travaux d'Asgharzadeh et al. (2007), s'avère indispensable.

### I.3 L'équilibre hydrostatique

On s'intéresse dans cette section à l'équilibre hydrostatique d'une Terre en rotation. En effet les modèles géophysiques globaux de notre planète sont une discrétisation de la Terre en couches sphériques de densités propres. Ainsi l'état d'équilibre est naturellement vérifié. On cherche donc ici à le préserver dans le cas d'une Terre de forme ellipsoïdale.

#### I.3.1 Définition et conséquences

Selon le principe d'Archimède : "Tout corps, plongé dans un fluide au repos en partie ou en totalité reçoit une force verticale exercée de bas en haut et d'intensité le poids du volume déplacé". Dans notre cas, le fluide est en réalité l'asthénosphère du manteau supérieur, qui est déformable sur de très longues périodes et le corps flottant, la lithosphère sus-jacente. Par conséquent, un corps dont le poids  $P$  sera supérieur à l'intensité de la force d'Archimède s'enfoncera jusqu'à l'équilibre (cf. *figure I-9*) avec une partie immergée et une émergée et inversement d'après les travaux de Thomas (2011). Finalement, l'équilibre hydrostatique est vérifié lorsque ces deux forces sont d'intensités égales. Dans notre cas, cela revient à dire que les différentes couches ellipsoïdales, qui assemblées, modélisent le globe en rotation, doivent vérifier chacune un poids d'intensité égale à la poussée d'Archimède qui s'exerce sur elles.

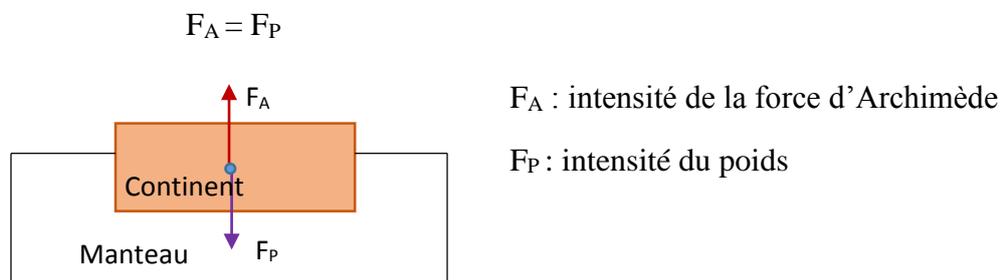


Figure I-9 – L'équilibre isostatique

D'autre part, à un niveau plus régional, on se rend compte des irrégularités topographiques que présente la surface terrestre et qui produisent par conséquent une répartition de masses, en surface, hétérogène. Cependant, il existe un phénomène de compensation des masses topographiques, en profondeur, que les géophysiciens nomment l'isostasie.

##### I.3.1.1 Le concept d'isostasie

L'isostasie est en réalité l'application à la Terre de la poussée d'Archimède. Elle peut être mise en évidence grâce à la gravimétrie. En effet, les mesures gravimétriques permettent de décrire l'inégale distribution des masses à l'intérieur de la Terre qui induit des irrégularités de la pesanteur selon le lieu.

### I.3.1.2 De la gravimétrie à l'isostasie

La gravité à une altitude terrestre constante au-dessus de la surface terrestre est quasi-constante alors qu'elle devrait être plus forte au niveau des bosses (montagnes, volcans, etc.) et plus faible au niveau des creux (bassins sédimentaires,...). En outre il existe une compensation verticale naturelle dans la répartition des masses au sein de la lithosphère. Par exemple, l'épaisseur de la croûte est plus grande sous une chaîne de montagne et plus mince au niveau d'un rift ou d'un bassin sédimentaire. On parle de compensation isostatique, l'accumulation (sédimentation, formation d'une montagne,...) ou la diminution (érosion,...) de matière en surface suppose un changement de masse qui induit ensuite un mouvement vertical de la lithosphère jusqu'à un nouvel état d'équilibre isostatique. Le phénomène de compensation ne se fait plus sentir en profondeur (~ 100 km), cet endroit théorique où la lithosphère est soumise à une pression constante, est nommé surface de compensation.

À titre d'exemple, un ajustement isostatique intéressant est celui du rebond postglaciaire. La Terre a connu différents épisodes de glaciation depuis sa création, ainsi lors de chaque fonte, l'allègement de la masse des continents a provoqué une remontée verticale de ces derniers jusqu'à l'équilibre et entraîné de nombreux séismes (Thomas, 2011).

Finalement, l'équilibre hydrostatique est à prendre en compte pour calculer les composantes gravimétriques<sup>2</sup> le plus précisément possible. L'objectif de la prochaine section est de trouver une solution efficace pour concevoir un modèle réaliste de la Terre en rotation, dont la structure interne respecte cet équilibre.

### I.3.2 L'équation différentielle de Clairaut

L'équation de Clairaut est un moyen d'y parvenir puisqu'elle est issue de la théorie hydrostatique.

Levallois (1970), propose une démonstration de cette équation dans ses travaux. Les grandes étapes et les notions aussi bien mathématiques que géophysiques sont détaillées en annexe (cf. *annexe I*). On se contente ci-dessous d'énoncer les résultats qui permettent d'aboutir à l'équation.

La méridienne d'une surface de niveau, d'après les travaux de Levallois est définie par la relation

$$\mathbf{r} = \mathbf{X}(\mathbf{1} + \varepsilon_2 \mathbf{P}_2). \quad (3.10)$$

$\mathbf{X}$  représente la valeur moyenne de  $\mathbf{r}$ , qui n'est autre que le rayon sphérique, et peut donc être remplacé par  $\mathbf{r}$  dans l'équation. Par ailleurs,  $\mathbf{P}_2$  est le deuxième polynôme de Legendre dont l'expression est

$$P_2 = \frac{2 - 3\sin^2\theta}{2} \quad (3.11)$$

---

<sup>2</sup> cf. I.1. Les notions de base sur les grandeurs gravimétriques

l'ellipticité  $\varepsilon_2$  est liée à l'aplatissement  $f$  ( $f = \frac{a-b}{a}$ ), par l'expression  $\varepsilon_2 = -\frac{2}{3}f$ . Effectivement, en remplaçant  $P_2$  par son expression dans (3.10), la relation devient

$$r = X \left[ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 (3 \cos^2 \theta - 1) \right]$$

$\Leftrightarrow$

$$r = X \left[ 1 - \frac{1}{2} \varepsilon_2 + \frac{3}{2} \varepsilon_2 \cos^2 \theta \right] \quad (3.12)$$

avec  $r = x^2 + y^2 + z^2$ , où  $(x, y, z)$  est le triplet de coordonnées cartésiennes qui s'expriment suivant la longitude  $\lambda$  et la colatitude géocentrique  $\theta$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_M = r \sin(\theta) \cos(\lambda) \\ y_M = r \sin(\theta) \sin(\lambda) \\ z_M = r \cos(\theta) \end{cases}$$

L'équation (3.12) est équivalente à

$$r^2 = X^2 \left[ 1 - \varepsilon_2 + 3\varepsilon_2 \frac{z^2}{r^2} \right] = X^2 \left[ 1 - \varepsilon_2 + 3\varepsilon_2 \frac{z^2}{X^2} \right]$$

$$\text{ce qui revient à écrire que } r^2 - 3\varepsilon_2 z^2 = X^2(1 - \varepsilon_2). \quad (3.13)$$

Ensuite en remplaçant  $r$  par son expression, on obtient :

$$x^2 + y^2 + (1 - 3\varepsilon_2)z^2 = X^2(1 - \varepsilon_2).$$

Enfin en simplifiant par  $X^2(1 - \varepsilon_2)$  on se ramène à l'équation cartésienne d'un ellipsoïde de demi-grand axe  $a$  et de demi petit-axe  $b$  :

$$\frac{x^2 + y^2}{X^2(1 - \varepsilon_2)} + \frac{(1 - 3\varepsilon_2)z^2}{X^2(1 - \varepsilon_2)} = 1 \quad (3.14)$$

on en déduit les expressions de  $a^2$  et  $b^2$  par identification :

$$\begin{aligned} a^2 &= X^2(1 - \varepsilon_2) \\ b^2 &= X^2 \frac{1 - \varepsilon_2}{1 - 3\varepsilon_2} \end{aligned}$$

et comme  $\varepsilon_2$  est très proche de  $0$ , on peut déterminer les expressions de  $a$  et  $b$  à l'ordre 1 :

$$\boxed{\begin{array}{l} a \sim X(1 - \frac{1}{2} \varepsilon_2) \\ b \sim X(1 + \varepsilon_2) \end{array}} \quad (3.15)$$

Finalement, sachant que l'aplatissement s'écrit  $\frac{a-b}{a}$  on en déduit que  $f$  est lié à  $\varepsilon_2$  par la relation

$$f = \frac{-3}{2} \varepsilon_2$$

et l'équation de Clairaut s'écrit comme suit :

$$\boxed{\bar{\rho} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{6\rho}{r} \frac{df}{dr} + \frac{6f}{r^2} [\rho - \bar{\rho}] = 0} \quad (3.16)$$

Elle relie l'aplatissement  $f$  associé à une couche géologique, à la connaissance de la loi de densité  $\rho$  en fonction de  $r$ . De plus, la quantité  $\bar{\rho}$  correspond à la densité moyenne associée à la masse du corps entre  $0$  et  $r$ . On sait que pour la terre,  $\bar{\rho} = 5,52 \text{ g.cm}^{-3}$  et en son centre

$$\bar{\rho} = \rho.$$

L'une des difficultés majeures de ce travail fut la résolution de cette équation. En effet, comme la distribution de la densité est dépendante de  $r$ , nous avons à faire à une équation du second ordre à coefficients variables. Ainsi, à défaut de pouvoir la résoudre de façon analytique, nous l'avons résolue numériquement grâce à la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4. Le principe de cette méthode itérative est décrit dans l'ouvrage (Yger & Weil, 2009). La Terre sera discrétisée en plusieurs couches sphériques concentriques d'épaisseur  $r_i$ . De ce fait, la variable  $r_i$  sera en réalité le rayon de la couche considérée. Ensuite on associera à chacune d'entre-elles une densité  $\rho_i$  constante à déterminer suivant les données dont on dispose. Puis, l'équation de Clairaut donnera pour une densité et une position  $r_i$  données, l'aplatissement de la couche ellipsoïdale équivalente. En outre, on passera d'un modèle sphérique à un modèle ellipsoïdal (cf. **figure I-10**) constitué d'autant de couches (d'aplatissement  $f_i$  et de demi-grand axe  $a_i$ ) pour lesquelles il faudra réajuster les densités en vue d'éviter toute perte de matière. Enfin, une fois l'équilibre hydrostatique atteint, on pourra calculer l'effet gravimétrique de ce modèle généré en un point quelconque de l'espace.

Dans le cadre de cette étude, concevoir un modèle à l'équilibre hydrostatique est fondamental afin de respecter les lois de la physique classique. En effet, dans le cas où nous obtiendrions un résultat cohérent avec les mesures, à partir d'un modèle simplifié (en couches ellipsoïdales homothétiques par exemple), on pourra toujours nous reprocher que notre modèle n'est pas réaliste.

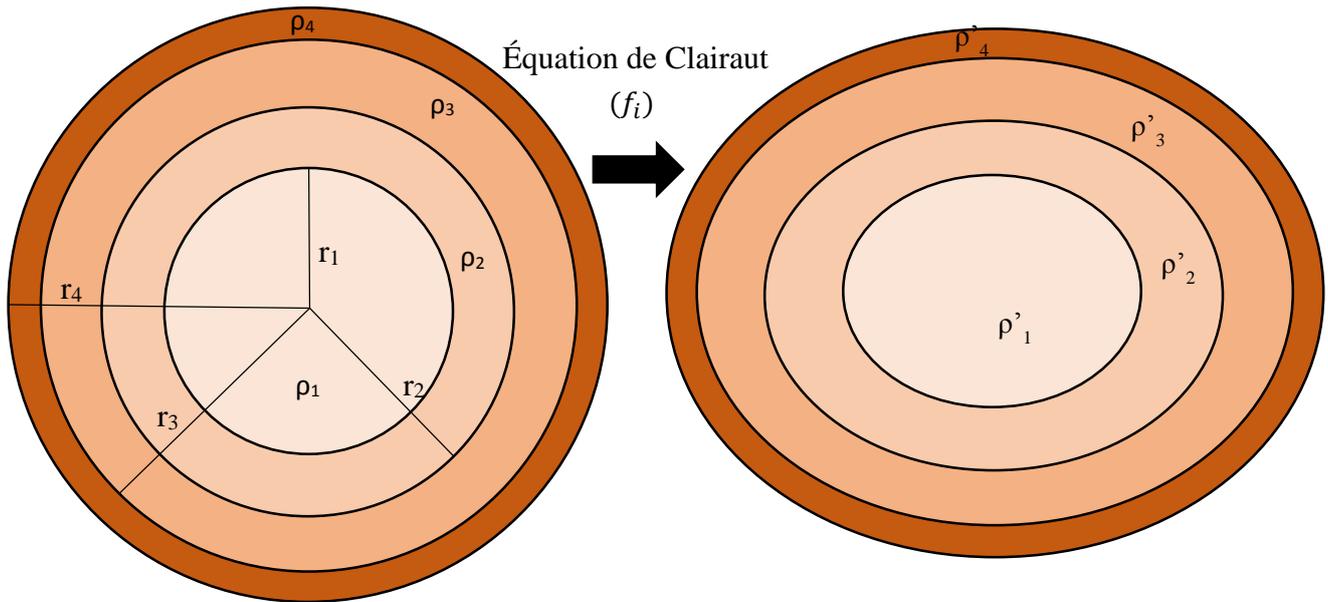


Figure I-10 – Modèles terrestres sphérique et ellipsoïdal

L'ajustement de densité est régit par l'équation suivante pour tout  $i \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{4}{3}\pi\rho_i r_i^3 = \frac{4}{3}\pi\rho'_i a_i^3 (1 - f_i)$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\frac{\rho_i r_i^3}{a_i^3 (1 - f_i)} = \rho'_i} \quad (3.17)$$

dans la suite du travail on prendra  $a_i = r_i$ .

**Partie II Conception de modèles de densités raffinés**

## **II.1 Définition d'un modèle géophysique et des données gravimétriques satellitaires**

Les observations directes de la Terre sont insuffisantes pour déterminer sa structure interne. En effet, les forages les plus profonds atteignent seulement une quinzaine de kilomètres de profondeur alors que le rayon terrestre mesure environ 6400 km. Dès lors, on recourt à des mesures indirectes dans l'intention d'établir des modèles terrestres cohérents qui délivreront des informations sur l'intérieur de la Terre. Dans ce chapitre on s'intéressera en particulier aux modèles de densités puisque ces dernières sont indispensables pour le calcul du GGT.

### **II.1.1 Le modèle PREM**

Ce modèle développé par Dziewonski et Anderson (1981) est le premier à avoir été créé à partir de données sismologiques, d'où son nom : Preliminary Reference Earth Model.

#### **II.1.1.1 Propagation des ondes sismiques**

Elles sont créées et se propagent à partir du foyer du séisme dans toutes les directions. De plus, cette propagation est contrôlée par les propriétés du milieu traversé. Des sismographes placés sur la surface de la terre, les enregistrent. Enfin, en étudiant leur moment d'arrivée par rapport à celui de départ ainsi que leur amplitude, on peut en déduire la composition des milieux traversés par les ondes.

Il existe trois types d'ondes :

- les ondes P (Premières), longitudinales qui se transmettent dans les milieux liquides et solides ;
- les ondes S (Secondes), transversales sont plus lentes que les P et ne se propagent pas dans les liquides ;
- les ondes L (Longues), ont une amplitude plus grande que les deux précédentes et se propagent en surface uniquement.

#### **II.1.1.2 Vitesse et comportement des ondes sismiques en cas de changement de milieu**

D'après un ouvrage de Mari et al. (2001), la vitesse d'une onde dépend du milieu qu'elle traverse. Une brusque variation de vitesse supposera donc un changement de nature physique (état solide/liquide, densité...), ou chimique (changement de composition) de celui-ci. Les ondes se propagent plus rapidement dans un milieu solide et dense que dans un milieu liquide du fait de sa structure atomique, puisque les atomes sont liés entre eux.

En cas de changement de milieu, les ondes adoptent un comportement similaire à celui des ondes lumineuses qui suivent les premières lois de Descartes.

### II.1.1.3 Corrélation entre structure du globe et comportement des ondes sismiques

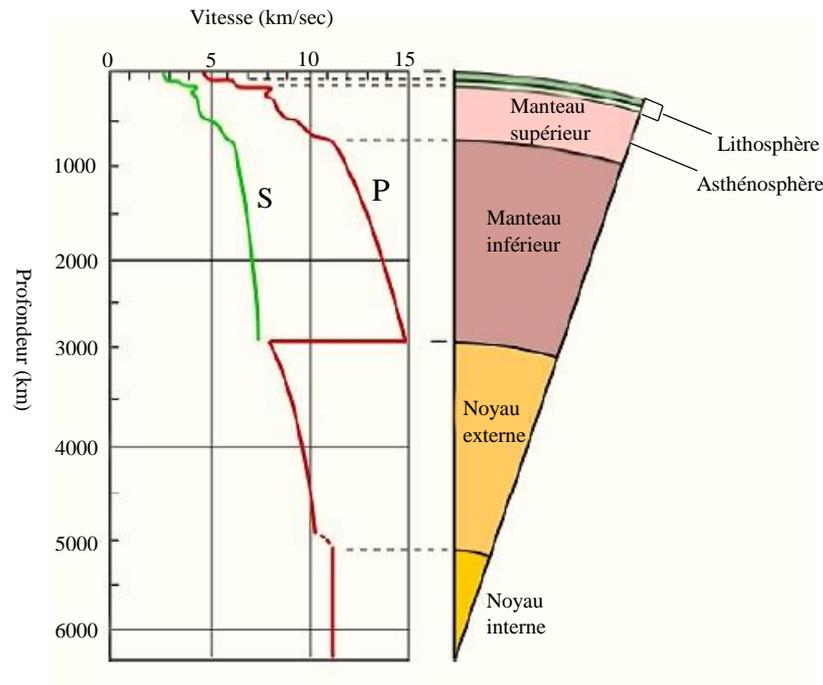


Figure II-1 – Propagation des ondes P et S dans l'intérieur du globe (source : Brunet Manquat (2010). <http://www.lyceedadultes.fr//sitepedagogique/pages/SVT1S.html>)

Peu importe le lieu du séisme ou de l'enregistrement, les courbes des ondes P et S obtenues (cf. **figure II-1**) ont toujours la même allure. On remarque que plus la profondeur est grande et plus leur vitesse de propagation augmente car la densité devient de plus en plus élevée. Les changements brusques de vitesse marquent un changement de couche géologique. Les ondes S disparaissent à partir de 3000 km de profondeur, ce qui laisse présumer de l'état liquide du noyau externe. On note trois discontinuités majeures :

- la discontinuité de Mohorovicic, située à une profondeur de 10 km sous les océans et de 35 km sous les continents. Cette surface est marquée par une accélération brutale des ondes P et S due à une variation de la composition chimique des matériaux ;
- la discontinuité de Gutenberg, située à 2900 km de profondeur, sépare le manteau inférieur du noyau externe liquide. On remarque une forte décélération des ondes P et l'arrêt des ondes S ;
- la discontinuité de Lehman, située à une profondeur de 5100 km entre le noyau externe et le noyau interne solide, se traduit par une accélération des ondes P.

L'étude des ondes est donc nécessaire afin d'évaluer la masse volumique et la pression des enveloppes internes.

## II.1.2 Génération du modèle PREM

PREM est défini dans les travaux de Dziewonski et Anderson (1981). Ce modèle est constitué de 9 couches distinctes dont les densités sont des fonctions polynômiales de  $x$  (cf. *tableau II-1*). Cette variable n'est autre que le rayon normé  $x = \frac{r}{a}$  avec  $a = 6371 \text{ km}$  et  $r \in [0 ; a]$ .

Enveloppe	Rayon (km)	Densité (g.cm <sup>-3</sup> )
Océan (1) <sup>3</sup>	6368 à 6371	1.020
Croûte supérieure (2)	6356 à 6368	2.600
Croûte inférieure (3)	6346.6 à 6356	2.900
Manteau lithosphérique (4)	6291 à 6346.6	$0.6924 x + 2.6910$
LVZ <sup>4</sup> (4)	6151 à 6291	$0.6924 x + 2.6910$
Zone de transition (5)	5971 à 6151	$-3.8045 x + 7.1089$
Zone de transition (6)	5771 à 5971	$-8.0298 x + 11.2494$
Zone de transition (7)	5701 à 5771	$-1.4836 x + 5.3197$
Manteau inférieur (8)	3480 à 5701	$-3.0807 x^3 + 5.5283 x^2 - 6.4761 x + 7.9565$
Noyau externe (9)	1221.5 à 3480	$-5.5281 x^3 - 3.6426 x^2 - 1.2638 x + 12.5815$
Noyau interne (10)	0 à 1221.5	$-8.8381 x^2 + 13.0885$

Tableau II-1 – Description du modèle PREM

La densité a initialement pour valeur 1.02 g.cm<sup>-3</sup> au niveau zéro, puis elle augmente progressivement avec la profondeur pour atteindre 13.0885 g.cm<sup>-3</sup> au centre de la Terre. Le *tableau II-1* se traduit graphiquement par la *figure II-2*, que j'ai réalisée avec le langage de programmation Python 3 et qui représente la distribution de densité du modèle suivant la profondeur.

<sup>3</sup> cf *figure II-2*.

<sup>4</sup> Zone à moindre vitesse.

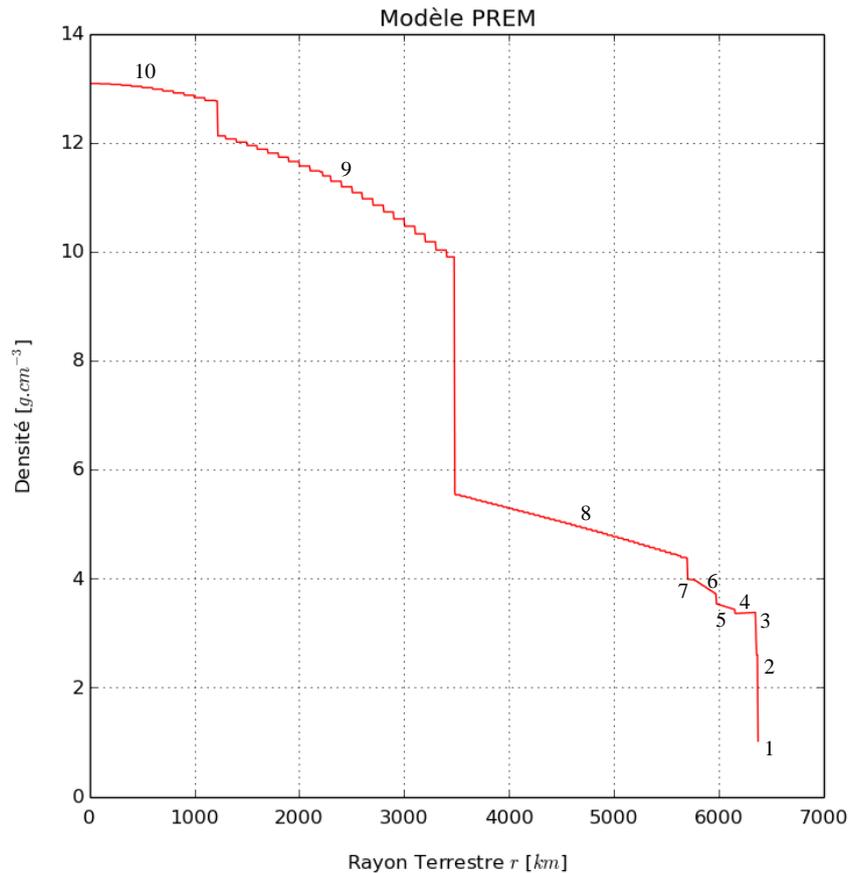


Figure II-2 – Description du modèle PREM

### II.1.3 LITHO1.0

LITHO1.0 provient des travaux de Pasyanos et al. (2014). Ce modèle est différent de PREM, il n'est pas constitué de couches sphériques, c'est un modèle en grille dont chaque nœud est espacé de son plus proche voisin par un pas de 1 degré aussi bien en latitude qu'en longitude. Par conséquent, les enveloppes dorénavant maillées, présentent des hétérogénéités latérales non seulement de profondeur mais aussi de densité selon le nœud où l'on se trouve. LITHO1.0 est donc plus précis que PREM pour une même couche. Cependant, ce modèle est moins profond que PREM ; il s'étend jusqu'à la limite entre la lithosphère et l'asthénosphère mais, contrairement à ce dernier, il ne débute pas au niveau 0 puisqu'il prend également en compte la topographie du milieu.

La *figure II-3* est une carte de la profondeur du modèle par rapport au niveau 0 de la mer, qui varie entre 0 km au niveau des dorsales océaniques et 320 km. Je l'ai créée avec le logiciel de cartographie GMT (Generic Mapping Tools), utilisé par les géophysiciens.

Enfin le modèle donne des informations de densité pour les couches suivantes :

- océan, glace, couches sédimentaires (supérieures, intermédiaires et inférieures) ;
- croûte (supérieure, intermédiaire, inférieure) ;
- manteau lithosphérique.

## Profondeur de LITHO1.0

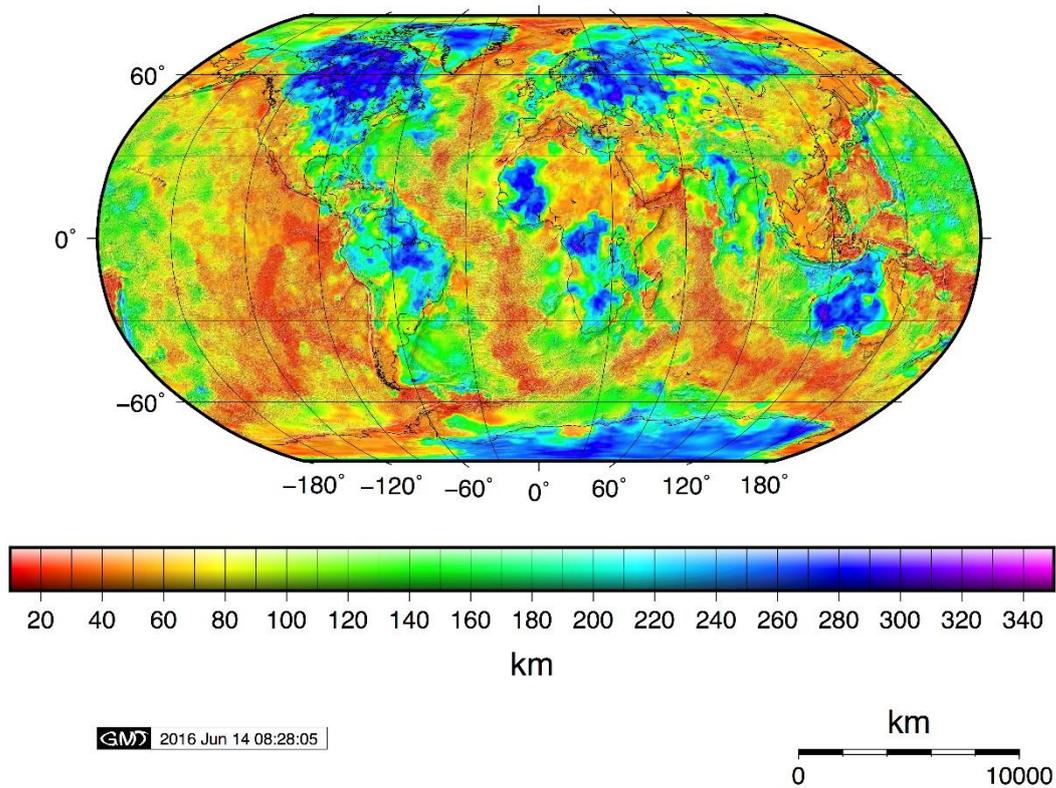


Figure II-3 – Description du modèle LITHO1.0

Enfin, combiner ce modèle à celui de PREM semble être une solution pertinente pour concevoir un modèle géophysique global de la Terre plus raffiné.

## II.2 Conception de modèles géophysiques raffinés

Ce chapitre a pour objectif de décrire la démarche suivie en vue de créer un modèle global de la Terre, le plus raffiné possible. Pour cela, nous avons vu plus haut que l'équation de Clairaut permettait de déterminer l'aplatissement  $f$  subi par une sphère fluide en rotation à l'équilibre hydrostatique, pour un rayon  $r$  donné, à partir de la connaissance de sa distribution de densité  $\rho(r)$ .

### II.2.1 Calcul des modèles raffinés PREMC et PREMC+LITHO1.0C

Une autre difficulté conséquente dans la résolution de cette équation repose avant tout sur la détermination des conditions aux limites en  $r = 0$  m et en  $r = 6\,378\,137$  m (rayon de la couche externe de nos modèles) pour l'aplatissement  $f$  et sa dérivée. Ainsi, dans cette section, on se propose de déterminer l'expression rigoureuse de ces conditions selon Levallois (1970).

La forme intégrée de l'équation de Clairaut est donnée par :

$$-\frac{8\pi G}{5} \left[ \int_0^r \rho(u) u^4 \left( 5f(u) + u \frac{df}{du} \right) du + r^5 \int_r^a \rho(u) df(u) - 5r^2 f(r) \int_0^r \rho(u) u^2 du \right] = \omega^2 r^5 \quad (5.1)$$

#### II.2.1.1 Calcul de l'aplatissement de la couche externe ( $r = 6\,378\,137$ m)

La finalité de ce travail est de comparer l'effet induit sur un point de l'espace, situé à une hauteur de 255 km au-dessus de l'ellipsoïde WGS84, par les modèles géophysiques avec celui mesuré lors de la mission GOCE. De plus, ces données mesurées sont des écarts par rapport au tenseur qui dérive d'un modèle de pesanteur normale associé au système de référence WGS84. Dès lors, le terme prépondérant de l'effet induit par notre modèle doit coïncider avec celui induit par le potentiel normal du système WGS84 (cf. *annexe 2*). De plus, ce terme dépend de la forme externe du modèle de l'ellipsoïde.

Le calcul est réalisé en coordonnées sphériques ( $\lambda, \theta, r$ ) où  $\lambda$  est la longitude,  $\theta$ , la colatitude et  $r$ , le rayon géocentrique. L'expression de l'aplatissement externe est déterminée par identification à partir des potentiels normaux ; celui d'un ellipsoïde faiblement aplati (produisant le même potentiel que celui de la pesanteur normale associée au système WGS84) et celui de l'ellipsoïde WGS84, et qui ont pour expression :

- Potentiel de l'ellipsoïde faiblement aplati d'après Botton (2011) :

$$V = \frac{GM}{r} \left( 1 - \frac{2}{5} f \left( \frac{a}{r} \right)^2 P_2 \right) \text{ avec } a = A \left( 1 - \frac{f}{3} \right) ; \quad (5.2)$$

- Potentiel de l'ellipsoïde WGS84 (degré 2, ordre 0) d'après (NGA, 1997) :

$$V = \frac{GM_0}{r} \left( 1 + C_{20} \left( \frac{a}{r} \right)^2 P_2 \right) \quad (5.3)$$

où

- $C_{20}$ , le coefficient harmonique de degré 2 ( $C_{20} = -0.484\ 166\ 774\ 985 \times 10^{-3}$ );
- $a$ , le demi-grand axe de l'ellipsoïde WGS84 ( $a = 6\ 378\ 137,0\ m$ );
- $P_2$ , le deuxième polynôme de Legendre ( $P_2 = \frac{2-3\sin^2\theta}{2}$ );
- $G$ , la constante universelle de gravitation ( $G = 6,673 \times 10^{-11}\ m^3kg^{-1}s^{-2}$ );
- $M_0$  et  $M$  les masses respectives des modèles elliptiques WGS84 et de l'ellipsoïde faiblement aplati.

Finalement il vient :

pour  $GM = GM_0$

$$\boxed{f = \frac{-5}{2} C_{20} = 0.0022} \quad (5.4)$$

de plus

$$A \left(1 - \frac{f}{3}\right) = A \left(1 + \frac{5}{6} C_{20}\right) = a$$

d'où l'expression de  $A$  :

$$\boxed{A = \frac{a}{1 + \frac{5}{6} C_{20}}} \quad (5.5)$$

### II.2.1.2 Calcul de l'aplatissement de la couche interne ( $r = 0\ m$ )

L'équation (5.1) peut s'écrire sous une forme légèrement modifiée :

$$-\frac{8\pi G}{5} \left[ \int_0^r \rho(u) d(u^5 f(u)) + r^5 \int_r^a \rho(u) df(u) - 5r^2 f(r) \int_0^r \rho(u) u^2 du \right] = \omega^2 r^5 \quad (5.6)$$

Soit  $r_0$  le rayon de la couche la plus interne et  $\rho_0$  sa densité. En appliquant la relation (5.2) pour  $r = r_0$ , il vient :

$$-\frac{8\pi G}{5} \left[ \rho_0 r_0^5 f_0 + r_0^5 \int_{r_0}^a \rho(u) df(u) - \frac{5}{3} \rho_0 r_0^5 f_0 \right] = \omega^2 r_0^5 \quad (5.7)$$

où l'on a posé  $f_0 = f(r = r_0)$ .

En appelant  $\rho_m$  la densité moyenne de la Terre, on peut approximer l'intégrale  $\int_{r_0}^a \rho(u) df(u)$  par :

$$\int_{r_0}^a \rho(u) df(u) \approx \rho_m (f(r = a) - f(r = r_0)) = \rho_m (f - f_0)$$

où  $f$  est l'aplatissement de surface.

Après simplification par  $r_0^5$ , l'équation (5.3) devient :

$$-\frac{8\pi G}{5} \left[ -\frac{2}{3} \rho_0 f_0 + \rho_m (f - f_0) \right] = \omega^2 \quad (5.8)$$

Finalement on obtient une expression de l'aplatissement  $f_0$  en fonction de l'aplatissement de surface  $f$  donnée par

$$f_0 = \frac{\frac{5\omega^2}{8\pi G} + \rho_m f}{\frac{2}{3}\rho_0 + \rho_m} \quad (5.9)$$

À l'aide des valeurs numériques suivantes :

$$G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$\omega = 7,292115 \times 10^{-5} \text{ rad. s}^{-1} \text{ d'après NGA (1997)}$$

$$\rho_m = 5500 \text{ kg. m}^{-3}$$

$$\rho_0 = 13086,32 \text{ kg. m}^{-3} \text{ d'après Dziewonski et Anderson (1981)}$$

$$f = 0.0022$$

Il vient donc  $f_0 = 0.0016$ .

### II.2.1.3 Calcul de la dérivée de l'aplatissement sur la couche interne

Reprenons l'équation (5.1) en  $r = r_0$  et dérivons la par rapport à  $r_0$ . Il vient alors :

$$\begin{aligned} & -\frac{8\pi G}{5} \left( \rho_0 r_0^4 \left( 5f_0 + r_0 \left( \frac{df}{dr} \right)_{r_0} \right) \right. \\ & + 5r_0^4 \int_{r_0}^a \rho(u) \frac{df}{du} du - r_0^5 \rho_0 \left( \frac{df}{du} \right)_{r_0} \\ & \left. - 5 \left( \frac{df}{dr} \right)_{r_0} r_0^2 \int_0^{r_0} \rho(u) u^2 du - 10f_0 r_0 \int_0^{r_0} \rho(u) u^2 du - 5f_0 r_0^4 \rho_0 \right) = 5\omega^2 r_0^4 \end{aligned}$$

Après simplification, il vient :

$$-\frac{8\pi G}{5} \left( 5\rho_m(f - f_0) - \frac{5}{3} \rho_0 r_0 \left( \frac{df}{dr} \right)_{r_0} - \frac{10}{3} f_0 \rho_0 \right) = 5\omega^2$$

Or, en remarquant que, d'après (5.4) :

$$\rho_m(f - f_0) = -\frac{5\omega^2}{8\pi G} + \frac{2}{3} \rho_0 f_0$$

On a ainsi :

$$-\frac{8\pi G}{5} \left( -\frac{25\omega^2}{8\pi G} - \frac{5}{3} \rho_0 r_0 \left( \frac{df}{dr} \right)_{r_0} \right) = 5\omega^2$$

Finalement, il résulte :

$$\boxed{\left( \frac{df}{dr} \right)_{r_0} = 0} \quad (5.6)$$

À présent, nous pouvons créer les modèles compensés nommés PREMC et PREM+LITHO1.0C en déduisant des aplatissements calculés, l'excentricité associée à chacun d'entre eux par la relation  $e = \sqrt{2 \times f - f^2}$ . Une fois les excentricités obtenues, il faut réajuster les densités des couches des nouveaux modèles afin de compenser leur perte de masse par rapport au modèle géophysique initial, appelé aussi "brut". En effet, la forme de ces modèles nommés par la suite "compensés", est à présent ellipsoïdale et non plus sphérique. Cet ajustement de densité est détaillé par l'équation (3.17) à la fin de la partie I (cf. I.3).

## II.2.2 Création des modèles compensés

Ces modèles sont créés à partir du modèle PREM à l'état brut. L'objectif est de comparer l'effet gravitationnel, de ces modèles terrestres, avec celui de la Terre mesuré par le satellite GOCE. Tout d'abord il convient de mettre le modèle PREM initial à la bonne échelle car les mesures satellitaires sont effectuées à une hauteur au-dessus de l'ellipsoïde WGS84 d'environ 255 km.

### II.2.2.1 Mise à l'échelle du modèle PREM brut

Le rayon terrestre maximal mesure 6371 km, il correspond à la couche externe du modèle. Or pour être en accord avec les mesures satellitaires de points situés précisément sur un ellipsoïde homothétique de l'ellipsoïde WGS84 tel que sa hauteur au-dessus de l'équateur soit égale à 255 km, il faut considérer un rayon maximal d'une longueur égale à celle de son demi-grand axe ( $a = 6378.137 \text{ km}$ ). Ainsi, les rayons associés aux couches sphériques du modèle ont été multipliés par un facteur d'échelle noté  $u$  ( $u = \frac{6378.137}{6371}$ ). D'autre part, en vue d'éviter la perte de matière par "l'étirement" de notre modèle, les densités associées à chaque couche sont divisées par le cube du facteur d'échelle ( $u^3$ ). Effectivement il faut que l'égalité suivante soit vérifiée :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{4}{3}\pi (ur)^3 \rho'$$

ce qui revient à écrire que

$$\boxed{\rho' = \frac{\rho}{u^3}}$$

Par conséquent, en vérifiant cette égalité pour chaque couche, on conserve la masse du modèle brut. Ensuite, on peut résoudre l'équation de Clairaut pour le raffiner et obtenir le modèle en couches ellipsoïdales.

### II.2.2.2 Création du modèle PREMC

Comme expliqué précédemment, ce modèle est conçu à partir du modèle PREM brut remis à l'échelle et pour lequel, on résout l'équation de Clairaut. À partir du résultat obtenu on a la courbe d'évolution de l'aplatissement (cf. *figure II-4*) en fonction du rayon  $r$ . On remarque que l'aplatissement est minimal au niveau du noyau interne ( $f = 0.0016$ ), puis il croît jusqu'à atteindre une valeur maximale au niveau de la couche externe ( $f = 0.0022$ ). Autrement dit au fur et à mesure qu'on se rapproche du noyau, les couches adoptent une forme de plus en plus semblable à la sphère.

### II.2.2.3 Création de PREMH

Ce modèle est désigné ainsi puisqu'il s'agit d'un modèle en couches ellipsoïdales homothétiques. Il est conçu à partir de PREM "brut" également mais contrairement à PREMC, l'équation de Clairaut n'est pas utile pour déterminer la nouvelle forme de notre modèle. En effet, les ellipsoïdes sont homothétiques et possèdent donc tous la même excentricité, qui sera d'ailleurs celle de l'ellipsoïde GRS80. En outre, il suffit de déterminer un coefficient homothétique  $h_i$  qui sera associé à chaque couche  $i$  et qui multipliera leur rayon  $r_i$  de sorte que :  
pour tout  $i \in \mathbb{N}$  on ait

$$h_i = \frac{r_i}{r_0}$$

avec  $r_0$  le rayon de la couche externe. Enfin, il faut veiller une nouvelle fois à la conservation des masses. La nouvelle distribution de densités est déterminée à partir de la relation suivante issue de l'équation (3.17) de la partie I :

$$\rho'_i = \frac{\rho}{u^3 \sqrt{1 - e_{GRS80}^2}}$$

On peut à présent rajouter les données de LITHO1.0 afin de créer un modèle enrichi par les variations latérales de densité et qui par conséquent, offrira une description plus fine de la structure interne du globe entre 0 et 320 km de profondeur.

### II.2.2.4 Création du modèle [PREM+LITHO1.0]C

Ce modèle a été créé selon deux approches :

- **1<sup>ère</sup> approche** (cf. *figure II-5*) :

Il s'agit tout d'abord de créer un modèle que l'on nomme PREM+LITHO1.0. Ce modèle est établi à partir de PREM "étiré" et de LITHO1.0. On repère dans un premier temps la couche du modèle PREM qui approche le plus la couche interne de LITHO1.0. À partir de ce niveau et jusqu'à la couche externe de LITHO1.0 on vient substituer les données de ce dernier à celles de PREM. Ensuite, on attribue une valeur moyenne de la densité à chacune des couches. Par conséquent, on ne tient pas vraiment compte des hétérogénéités latérales de densité. Enfin, en résolvant l'équation différentielle de Clairaut à partir de PREM+LITHO1.0 nouvellement créé, nous obtenons la courbe d'aplatissements du modèle [PREM+LITHO1.0]C (cf. *figure II-4*) dont la forme est à présent non plus sphérique mais ellipsoïdale.

On peut considérer compte tenu de l'écart (cf. *figure II-4*) maximal en valeur absolue entre les aplatissements des deux modèles dont la valeur est de  $10^{-11}$ , que les deux courbes se superposent. Par conséquent, du fait que les aplatissements des couches

de chaque modèle soient quasi-identiques, les excentricités induites le sont également. En conclusion, LITHO1.0 employé de la manière décrite précédemment n'apporte pas beaucoup plus de précision entre 320 km de profondeur et le niveau de la mer. Cependant ce modèle donne des informations sur la topographie à prendre en compte dans le poids total de la Terre.

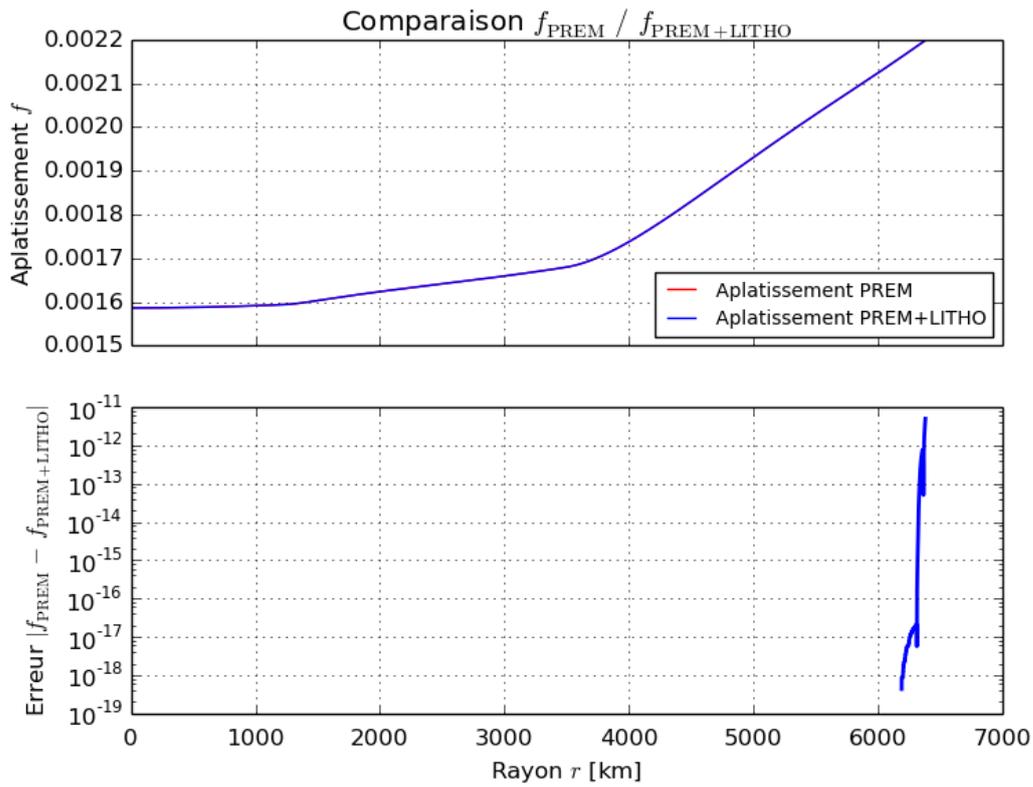
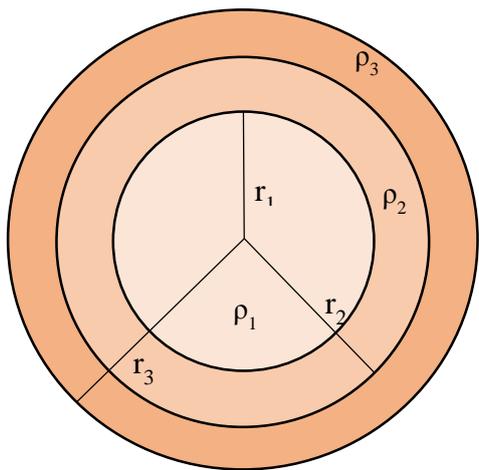
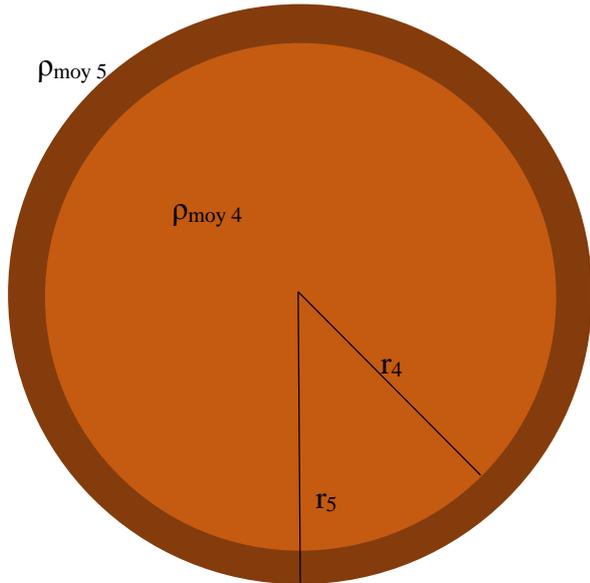


Figure II-4 – Évolution des aplatissements des couches de chaque modèle PREMC et [PREM+LITHO1.0]C en fonction de la profondeur

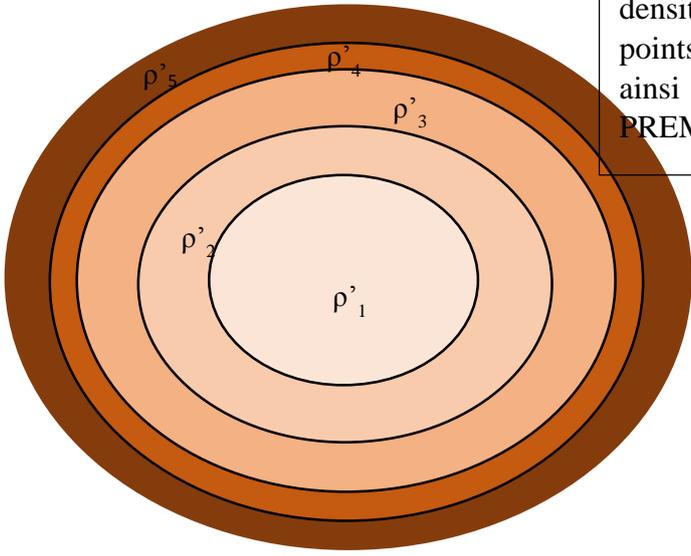
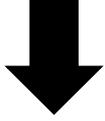


Modèle PREM étiré jusqu'à la couche de rayon  $r_3 = 6\,058\,000$  m



Modèle LITHO1.0 complété avec les densités de PREM, là où LITHO n'apporte pas d'informations, de rayon  $r_4$  (couche interne) le plus proche en longueur du rayon  $r_3$  (associé à la couche inférieure de PREM la plus proche de la couche interne de LITHO1.0). Les densités  $\rho_{moy\ 4}$  et  $\rho_{moy\ 5}$  sont les densités moyennes obtenues à partir des densités associées à chacun des points de la grille de LITHO1.0, ainsi que des densités du modèle PREM en cas de carence.

Équation de Clairaut  
( $f_i$ )



[PREM+LITHO1.0]C

Figure II-5 – Schéma de la conception du modèle [PREM+LITHO1.0]C (1<sup>ère</sup> approche)

- **2<sup>nd</sup>e approche** (cf. *figure II-6*) :

Il s'agit de prendre en compte les variations latérales de densité que propose LITHO1.0. Pour cela, le travail s'effectue en deux parties. On calcule dans un premier temps l'effet gravitationnel induit par le modèle PREM jusqu'à la couche la plus proche de celle interne de LITHO1.0. Dans un second temps, à partir de cette profondeur, on vient calculer l'effet de LITHO1.0 en discrétisant l'espace en prismes ellipsoïdaux dans les couches déjà établies de PREM, chacun possédant une densité qui lui est propre. Le calcul des composantes des différentes grandeurs gravimétriques nécessite une méthode d'intégration numérique qui est celle de Gauss-Legendre à l'ordre 2 d'après Roussel (2013). De plus selon Uieda et al. (2011), afin de respecter la condition sur les précisions des observations annoncées par la mission GOCE, il faut que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\frac{\text{distance } PS}{\text{Taille du prisme}} > 4$$

Ainsi, un prisme ellipsoïdal de paramètres  $\Delta\lambda_S = 0.5^\circ$  et  $\Delta\theta_S = 0.5^\circ$  respecte la condition précédemment énoncée. Enfin, en sommant les deux effets calculés, on obtient l'effet total induit par [PREM+LITHO1.0]C.

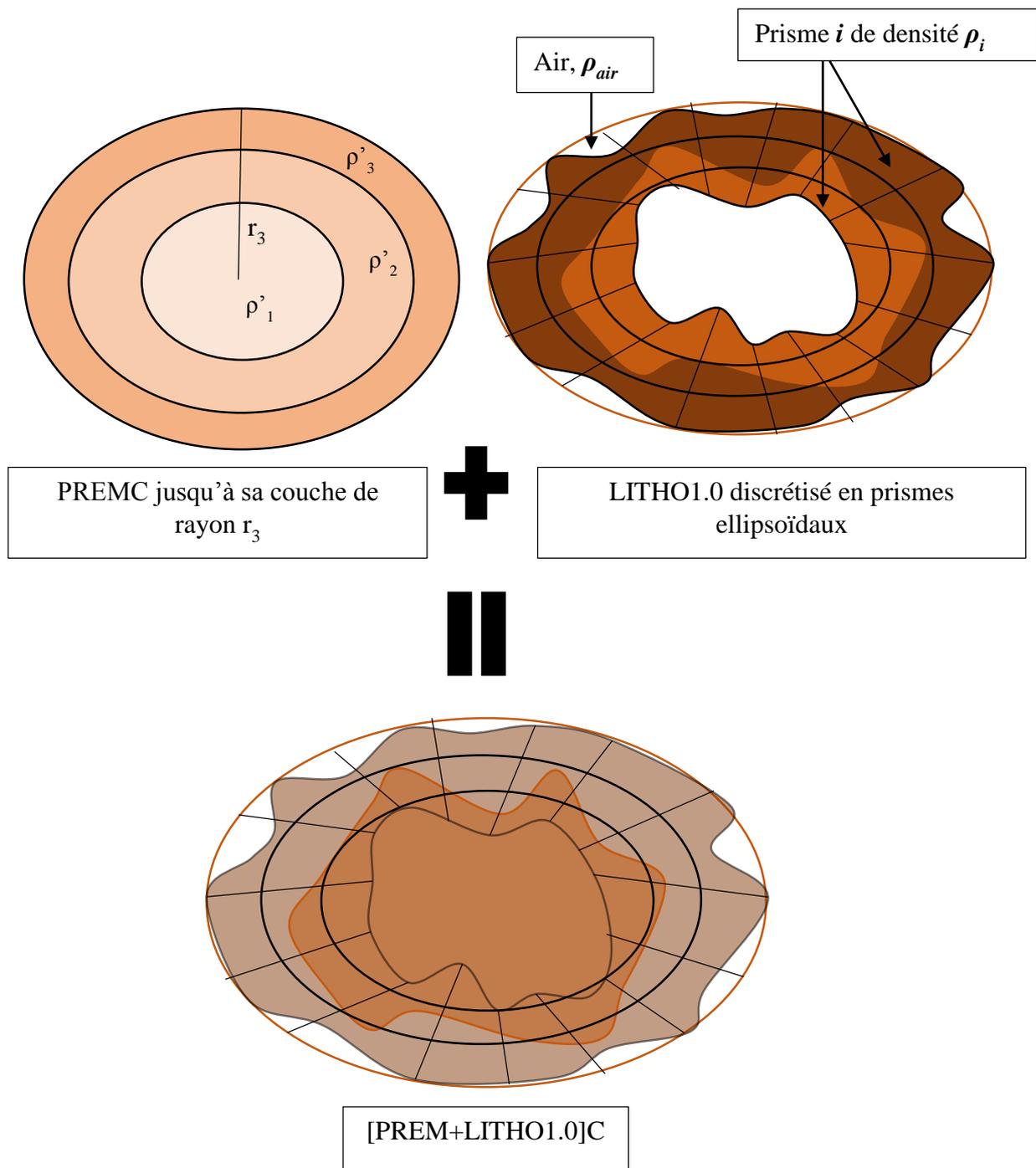


Figure II-6 – Schéma de la conception du modèle [PREM+LITHO1.0]C (2<sup>nde</sup> approche)

À présent, il convient de présenter les données gravimétriques mesurées par GOCE.

## II.3 Présentation des données gravimétriques satellitaires

Depuis plus d'un demi-siècle, les satellites artificiels observent notre planète et la mesurent révélant quantité d'informations sur les océans, les continents ou encore l'atmosphère. Ainsi, l'espace est devenu incontournable non seulement pour la surveillance de l'environnement terrestre mais également pour l'étude des structures internes de la Terre à l'image du satellite européen GOCE. Mis en orbite en 2009 par l'ESA, il a mesuré le champ de gravité terrestre avec une précision inégalée ( $1 \text{ mGal} = 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ ) et permis en outre, d'obtenir une cartographie du géoïde tout aussi précise de 1 à 2 cm (Esa's gravity mission GOCE, 2013).

### II.3.1 Les données GOCE

Entre 2009 et 2013, le satellite GOCE a orbité autour de la Terre à très basse altitude (255 km environ) afin de mesurer les infimes variations spatiales de gravité dues à la présence d'une fosse océanique, d'une montagne, ou encore provenant de la distribution des matériaux dans le manteau terrestre. Ce satellite est complémentaire à la mission GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) qui observe depuis 2002 les variations temporelles du champ de gravité dues notamment aux marées, courants marins ou aux évolutions des glaces polaires d'après Bourda (2004). Par ailleurs, la nouveauté apportée par GOCE, explicitée dans un article de Panet et al. (2014), en vue d'étudier la distribution des masses terrestres, n'est autre que la détermination des gradients de gravité. Celle-ci est permise par la mesure des variations fines du vecteur gravité dans les trois directions de l'espace. En outre, ces observations sont beaucoup plus sensibles à la géométrie des anomalies de masse que les observations classiques de l'intensité de la pesanteur.

Finalement les données utilisées dans ce travail sont celles de Bouman et al (2016) issues des mesures combinées du GGT, provenant des deux missions GOCE et GRACE. Le fichier se compose des coordonnées géographiques des différents points de l'espace, qui forment ainsi une grille, situés sur un ellipsoïde homothétique de l'ellipsoïde WGS84 tel que sa hauteur au-dessus de l'équateur soit égale à 255 km, et des écarts entre les composantes du GGT mesuré et celles du GGT théorique, dérivant d'un modèle de pesanteur normale associé à WGS84 dans le repère LNOF (Local North Oriented Frame) sphérique (*figure II-5*). Ce repère est direct (North-West-Up) ; l'axe  $X_{\text{LNOFs}}$  est dans la direction Nord, l'axe  $Y_{\text{LNOFs}}$  dans la direction Ouest, normale au méridien du satellite et l'axe  $Z_{\text{LNOFs}}$  suit la direction de la normale géocentrique à la sphère. Enfin, l'origine du repère est placée en chaque point de la grille.

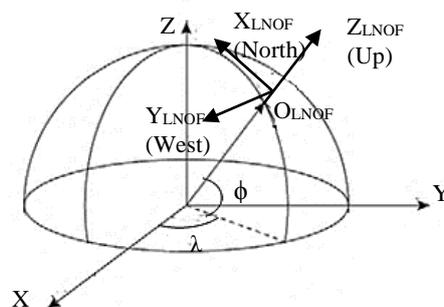


Figure II-7 – Repère LNOF sphérique

Par ailleurs on peut facilement passer du LNOF sphérique (LNOFs) au LNOF ellipsoïdal (LNOFe, repère dans lequel sont obtenues par calcul numérique ou analytique les composantes du GGT) à l'aide des formules de passage suivantes :

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\tan(\phi)}{1-e_{GRS80}^2}\right) \text{ où } \phi \text{ est la latitude géographique.}$$

$R_2(\varphi - \phi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi - \phi) & 0 & -\sin(\varphi - \phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi - \phi) & 0 & \cos(\varphi - \phi) \end{pmatrix}$  la matrice de passage du repère LNOFe au repère LNOFs.

La relation de passage s'exprime donc par :

$$GGT_e = R_2(\varphi - \phi) \times GGT_s \times R_2^t(\varphi - \phi)$$

En vue de mieux visualiser ces données, la **figure II-6** correspond à la cartographie de la composante verticale du tenseur ( $V_{zz}$ ), écart entre  $V_{zz}$  mesurée et  $V_{zz}$  théorique, dans le repère LNOF sphérique. On constate que l'écart maximal vaut 1,8 E en valeur absolue. Cela est cohérent car le  $V_{zz}$  théorique dérive d'un potentiel théorique qui ici, est une approximation du  $V_{zz}$  réel à l'ordre 0 et au degré 2 (cf. II.2.1.1). D'autre part, ces écarts mettent en évidence les grandes structures topographiques de la Terre. Par exemple, on repère la grande dorsale atlantique, la chaîne himalayenne ou encore la cordillère des Andes.

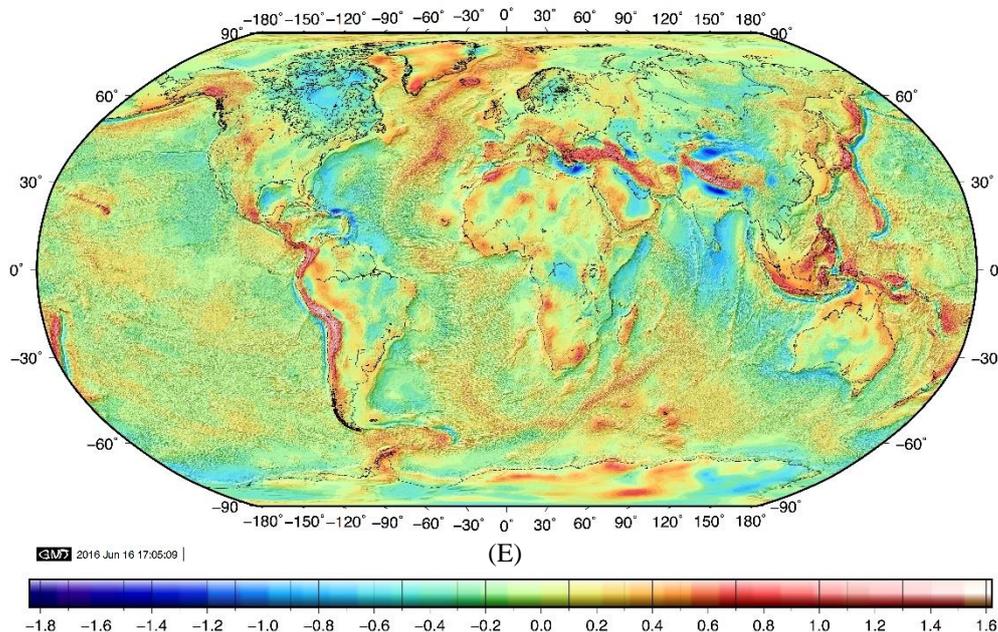


Figure II-8 –  $V_{zz}$  du tenseur mesuré à l'altitude du satellite GOCE (environ 255 km au-dessus de l'ellipsoïde WGS84)

Les cartographies des autres composantes du GGT sont consultables en **annexe 3**.

Au sein de cette partie, les différents modèles géophysiques et les données satellitaires ont été présentées, on peut étudier à présent dans une dernière partie, les différences constatées entre les effets générés par nos modèles uniquement et celles constatées entre les effets calculés et ceux mesurés.

**Partie III Comparaison des effets gravitationnels induits  
par les différents modèles avec les données  
gravimétriques satellitaires**

### III.1 Ajustement des masses des modèles compensés

L'objectif de ce travail est de rendre les modèles géophysiques comparables aux nouvelles données *GOCE/GRACE*. De plus, comme énoncé précédemment, ces données sont des écarts entre les composantes du GGT mesuré et celles du GGT théorique, dérivant d'un modèle de pesanteur normale associé à WGS84 :

$$\text{données } GOCE/GRACE = GGT_{\text{mesuré}} - GGT_{\text{théorique}}$$

Par conséquent, notre GGT mesuré est obtenu en sommant le GGT théorique avec ces écarts. Compte tenu de l'écart maximal qui est proche de deux Eötvös et qui reste faible, on peut considérer que le GGT mesuré est induit par l'effet gravitationnel d'un modèle de pesanteur dont la masse  $m$  est d'après la NGA (National Geospatial-Intelligence Agency, 1997) :

$$m = \frac{GM}{G} = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

en prenant

$$GM = 3\,986\,004,418 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

et

$$G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Afin de rendre nos modèles comparables à celui de la pesanteur normale, il faut qu'ils aient la même masse que ce dernier. Cela revient, une fois l'effet gravitationnel de nos modèles raffinés calculé, à multiplier chaque composante de notre tenseur par le facteur d'échelle  $k$  dont l'expression est la suivante :

$$k = \frac{GM}{G \times M_{\text{modèle}}}$$

où  $M_{\text{modèle}}$  n'est autre que la masse de notre modèle compensé.

À présent, nous pouvons comparer les effets calculés induits par nos modèles avec celui mesuré par les satellites et en déduire les modifications à prendre en compte pour créer nos modèles.

## III.2 Comparaison des modèles entre eux

Au sein de cette section, nous allons présenter les effets des différents modèles et les comparer.

### III.2.1 Anomalie PREMC/PREMH

Une anomalie est un écart entre deux GGT induits par différents modèles. Compte tenu de la précision des mesures de GOCE de 3 milliEötvös, on pourra en déduire si cet écart de valeur est détectable ou non par le satellite. Si tel est le cas, il faudra tenir compte de la spécificité de notre modèle le plus réaliste, pour calculer l'effet gravitationnel.

Étudions dans un premier temps les GGT associés aux deux modèles ; PREMC, celui dont les couches sont à l'équilibre hydrostatique et PREMH, celui constitué de couches ellipsoïdales homothétiques.

#### III.2.1.1 GGT dérivant du potentiel induit par PREMC

On se contente d'étudier la composante verticale  $V_{zz}$ , (intéressante pour mettre en évidence la structure topographique de la Terre), du tenseur associé à PREMC, dans le repère LNOFe, qui est représentée par la *figure III-1* ci-dessous :

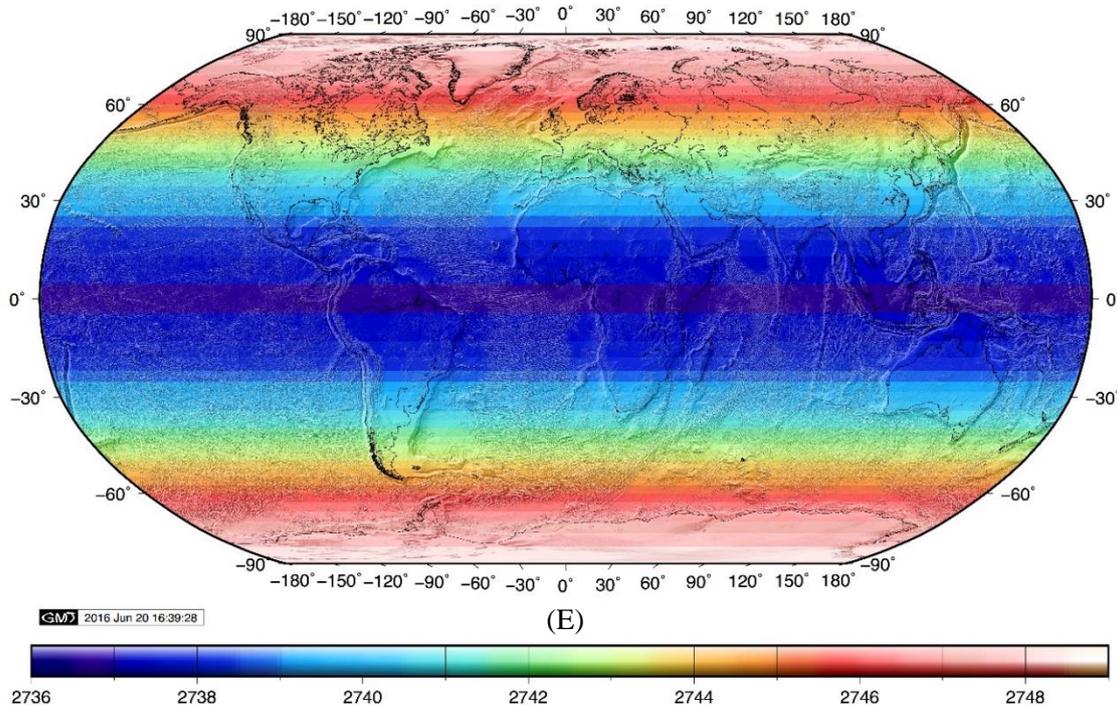


Figure III-1 – Composante  $V_{zz}$  en Eötvös (PREMC, environ 255 km au-dessus de l'ellipsoïde WGS84)

L'effet gravitationnel présente une symétrie axiale avec une valeur de la composante décroissante, maximale aux pôles (2748,5 E) et minimale à l'équateur (2736 E). Cette tendance est donc conforme avec celle que l'on observe chez la composante  $V_{zz}$  mesurée par GOCE.

À présent, étudions cette composante associée au modèle en couches ellipsoïdales homothétiques nommé PREMh.

### III.2.1.2 GGT dérivant du potentiel induit par PREMh

La *figure III-2* représente une cartographie de la composante  $V_{zz}$  dans le repère LNOFe :

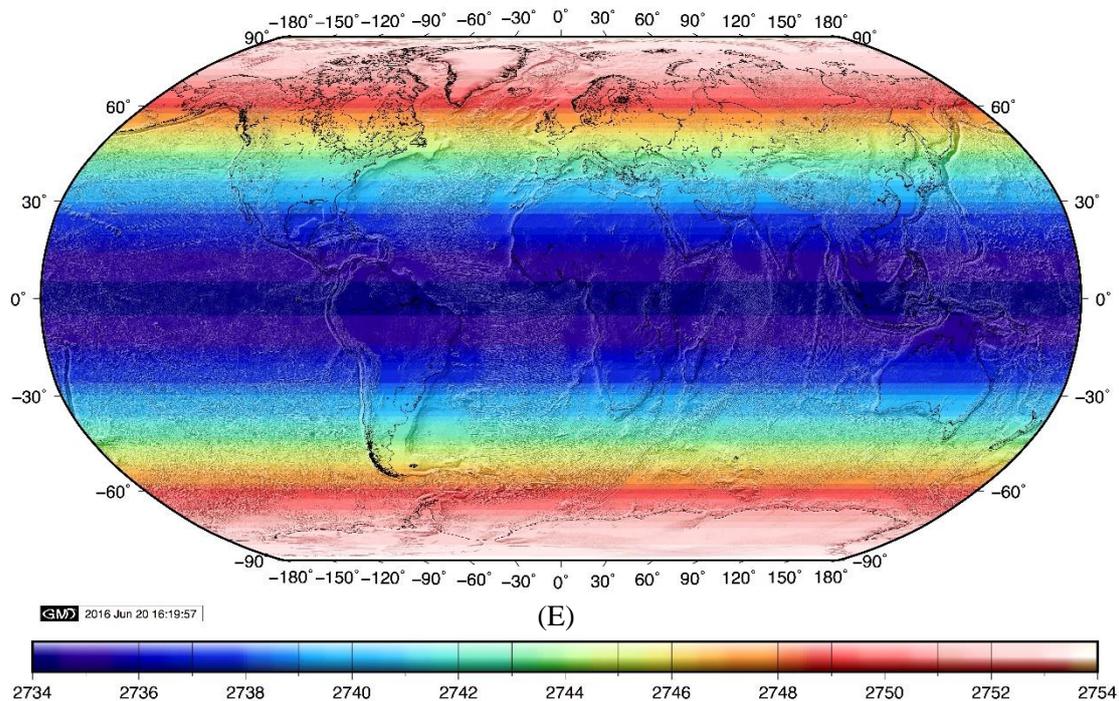


Figure III-2 – Composante  $V_{zz}$  en Eötvös (PREMh, environ 255 km au-dessus de l'ellipsoïde WGS84)

On constate encore cet effet symétrique par rapport à l'axe équatorial. La composante est une nouvelle fois décroissante avec un minimum à l'équateur de 2734 E et un maximum au pôle de 2752,5 E. Par conséquent l'amplitude de cet effet est plus grande que celle de l'effet associé à PREMC. On peut donc tracer l'anomalie PREMC-PREMh pour observer la différence d'effet entre ces deux modèles.

### III.2.1.3 Anomalie PREMC-PREMh

La *figure III-3* représente une cartographie de l'anomalie de la composante  $V_{zz}$  entre nos deux modèles, dans le repère LNOFe :

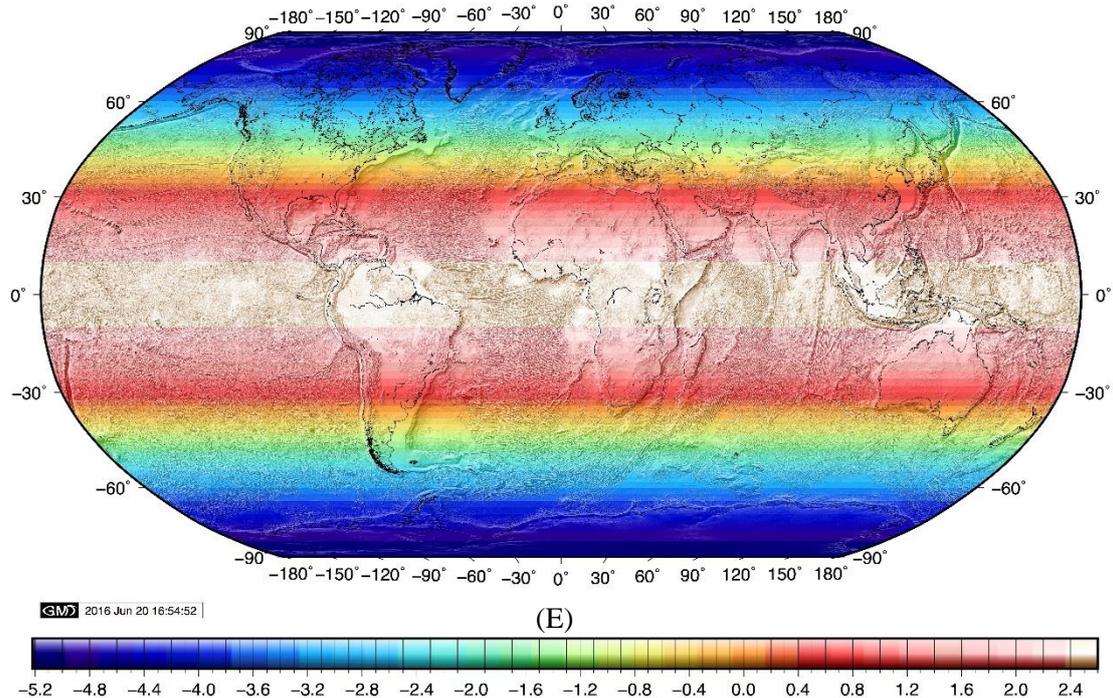


Figure III-3 – Anomalie PREMC-PREMH sur la composante  $V_{zz}$  en Eötvös (environ 255 km au-dessus de l'ellipsoïde WGS84)

Tout d'abord, on retrouve cette symétrie par rapport à l'axe équatorial. De plus on constate de nouveau, cette variation décroissante qui part des pôles avec une valeur maximale de  $-5,2$  E jusqu'à l'équateur avec une valeur minimale  $2,4$  E.

Finalement, compte tenu de la précision annoncée du satellite GOCE de  $3$  mE, on se rend compte que cet écart n'est pas négligeable. Effectivement, la valeur maximale de  $5,2$  E en valeur absolue est beaucoup plus élevée que la précision des mesures. D'autre part, cela nous permet de conclure qu'un modèle simplifié tel que PREMH ne suffit pas et qu'il faut donc passer à l'équilibre hydrostatique pour concevoir nos modèles. Intéressons-nous maintenant au GGT qui dérive d'un potentiel associé au modèle [PREM+LITHO1.0]C, créé suivant "la première approche" (cf. **II.2.2.4**).

#### III.2.1.4 GGT dérivant du potentiel induit par [PREM+LITHO1.0]C (1<sup>ère</sup> approche)

Ce modèle est composé de couches à l'équilibre hydrostatique et plus précis dans sa distribution de densité que celle de PREMC. En effet, puisqu'il tient en plus compte de la topographie à la surface de la Terre, il apporte des informations supplémentaires. Cependant [PREM+LITHO1.0]C reste tout de même très proche de PREMC, de par la manière dont il est construit, mais aussi parce qu'on ne tient pas vraiment compte des variations latérales de densité offertes par LITHO1.0. Par conséquent, sans grande surprise, on observe quasiment le même tenseur du gradient de gravité que celui associé à PREMC (cf. *figure III-4* et *figure III-5*).

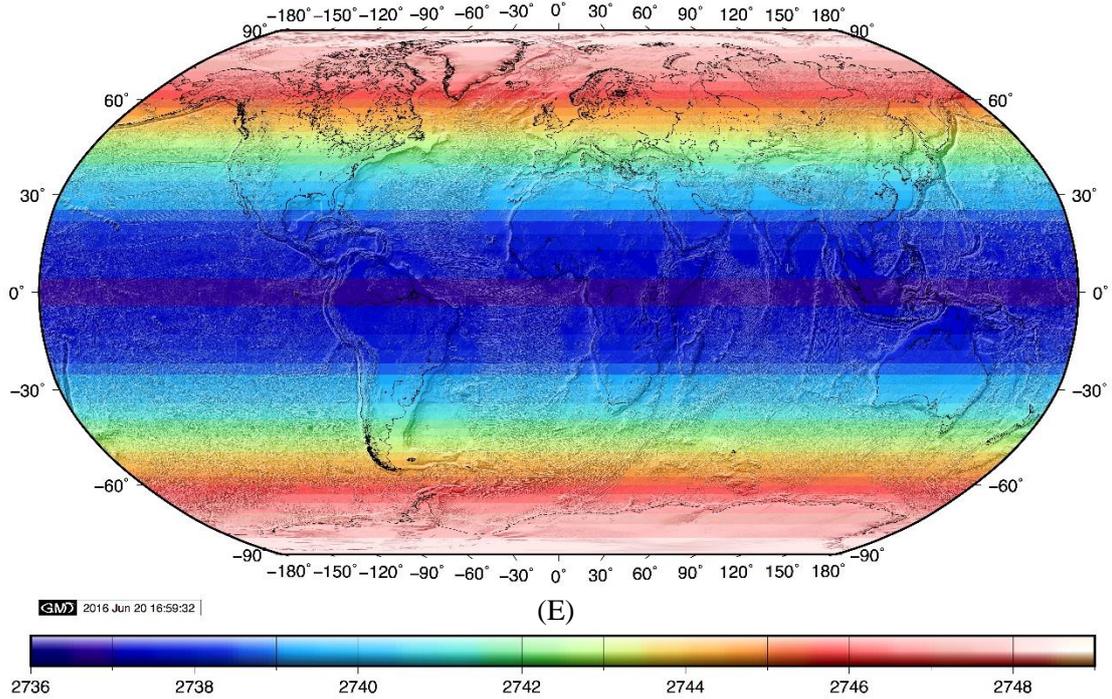


Figure III-4 – Composante  $V_{zz}$  en Eötvös ([PREM+LITHO1.0]C, 255 km)

On retrouve effectivement la même échelle de valeurs. De plus l'anomalie [PREM+LITHO1.0]C-PREMC nous offre de plus amples informations d'après la

*figure III-5 :*

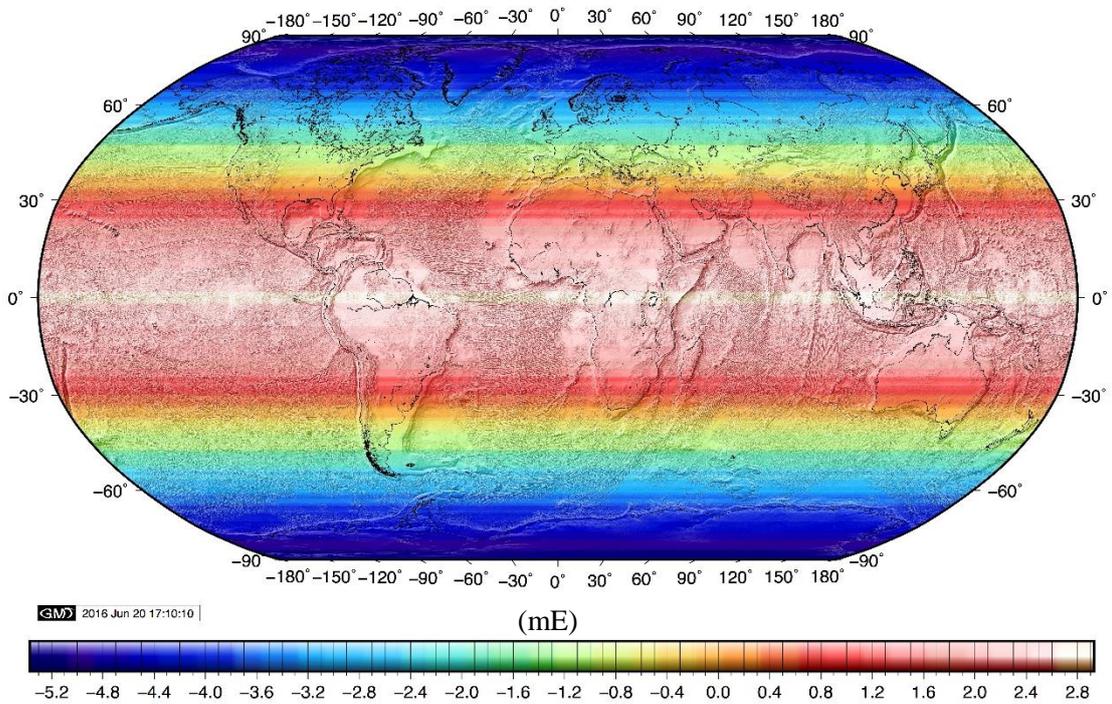


Figure III-5 – Anomalie [PREM+LITHO1.0]C-PREMC sur la composante  $V_{zz}$  en milliEötvös (255 km)

On remarque ici que les écarts sur la composante  $V_{zz}$  sont de l'ordre du milliEötvös. Par ailleurs cela traduit bien le fait que ces deux modèles sont très proches. Toutefois, comme l'écart maximal est de 5,2 mE en valeur absolue, on ne peut le négliger car il est supérieur à la précision annoncée de 3 mE. Finalement, le modèle [PREM+LITHO1.0]C apporte des détails supplémentaires par rapport à PREMC que l'on ne doit pas négliger.

À présent que nous disposons d'un modèle suffisamment raffiné tel que ce dernier pour être comparable aux données satellitaires, on peut étudier les écarts entre les effets mesurés et ceux calculés. Dès lors, nous pouvons étudier une dernière anomalie que l'on nommera MESURES-[PREM+LITHO1.0]C.

### III.3 Anomalie MESURES/[PREM+LITHO1.0]C

Cette anomalie représente l'écart entre le GGT mesuré par GOCE et le GGT calculé associé au modèle [PREM+LITHO1.0]C (cf. *figure III-6*).

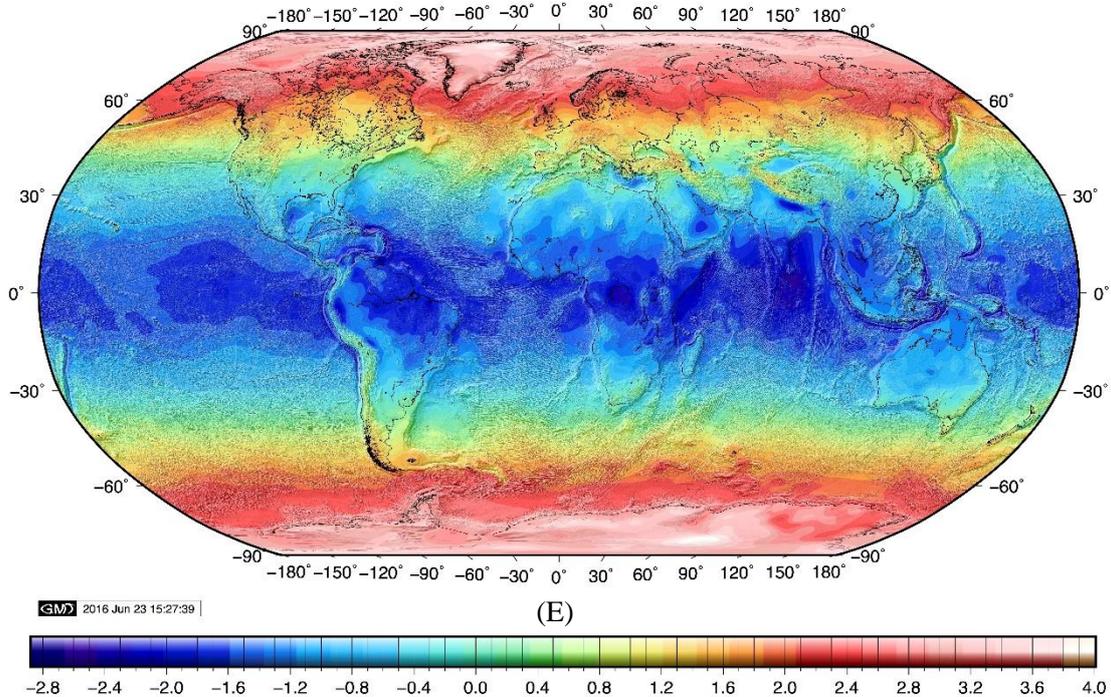


Figure III-6 – Anomalie MESURES-[PREM+LITHO1.0]C sur la composante  $V_{zz}$  en Eötvös (255 km)

L'effet est toujours symétrique par rapport à l'axe équatorial en raison de la distribution des masses symétrique par rapport à ce même plan également. La valeur maximale de l'écart est de 3,8 Eötvös aux pôles. On s'attendrait normalement à observer de courtes longueurs d'ondes qui mettent en exergue les différentes structures topographiques de la planète comme sur la *figure II-8* puisque [PREM+LITHO1.0]C est censé induire un effet gravitationnel quasi-similaire à celui mesuré de la Terre (à quelques dixièmes de milliEötvös près). Toutefois ce n'est pas le cas car l'écart est encore trop grand et ne permet pas de les mettre en valeur.

Finalement en l'état actuel, [PREM+LITHO1.0]C conçu selon la 1<sup>ère</sup> approche n'est pas assez raffiné. Autrement dit, il ne coïncide pas suffisamment avec le modèle de pesanteur normal associé au système de référence WGS84. De plus, il est inutile de concevoir le même modèle suivant la 2<sup>nde</sup> approche (cf. *II.2.2.4*) car les précisions supplémentaires qu'il est censé apporter sont très fines, de l'ordre du milliEötvös. Par conséquent, cela laisse envisager de nouvelles recherches pour résoudre ce problème. Dans un premier temps, en vue d'envisager un éventuel raffinement de densités, il conviendra de modifier [PREM+LITHO1.0]C de manière à ce qu'il coïncide quasi parfaitement (quelques dixièmes de milliEötvös) avec le modèle théorique associé à WGS84. Ainsi, les structures topographiques de la Terre seront mises en évidence par les courtes longueurs d'onde qui subsistent, comme on l'a vu pour la composante  $V_{zz}$  issue de la combinaison des mesures GOCE/GRACE. Par conséquent, les modèles auront une distribution de densités très réaliste (très proche de la véritable distribution), que l'on pourra raffiner plus facilement.

## Conclusion

---

Aujourd'hui les mesures satellitaires sont largement utilisées pour appréhender la structure interne du globe. De plus, la comparaison des grandeurs gravitationnelles mesurées par le satellite gravimétrique GOCE, avec celles calculées à partir des modèles géophysiques globaux de la Terre, permet de raffiner ces derniers. C'est pourquoi, dans ce travail nous avons choisi des modèles géophysiques existants afin de comparer leur effet gravimétrique avec celui mesuré, en des points situés à une hauteur d'environ 255 km au-dessus de l'ellipsoïde WGS84 (altitude du satellite GOCE). Ainsi, nous avons étudié le modèle globale PREM en couches sphériques concentriques, élaboré par Dziewonski et Anderson (1981), ainsi que le modèle en grille LITHO1.0, qui décrit la structure interne du globe jusqu'à la partie supérieure du manteau terrestre, élaboré par Pasyanos et al. (2014).

Tout d'abord, il a fallu concevoir des modèles réalistes incontestables qui respectent les lois de la physique classique. Ainsi, nous nous sommes servis de l'équation d'Alexis Clairaut qui permet de créer de nouveaux modèles à l'équilibre hydrostatique. En effet, la structure interne de la planète respecte cet équilibre. Cependant la difficulté de cette résolution provenait du caractère non linéaire de cette équation du second ordre. Dès lors, à défaut de pouvoir compter sur une solution analytique, nous avons été contraints de la résoudre numériquement avec la méthode de Runge Kutta à l'ordre 4. À partir de la solution obtenue, nous avons généré la courbe des aplatissements successifs de chaque couche concentrique. Dorénavant la forme de ces modèles à l'équilibre est ellipsoïdale.

D'autre part, il a fallu compenser nos nouveaux modèles afin d'éviter la perte de masse entre le passage d'un modèle initial en couches sphériques et celui d'un modèle en couches ellipsoïdales. Nous avons ensuite calculé leur effet gravitationnel qui a été par la suite multiplié par un facteur d'échelle pour le comparer à celui associé à un modèle de pesanteur normale du système de référence WGS84. En effet, le fichier de données satellitaires utilisé représente les écarts sur les composantes du GGT entre les mesures vraies et les calculs théoriques à partir de ce même modèle de pesanteur normale. De plus, ces écarts étant faibles, cela revient à considérer dans un premier temps, une masse de notre modèle égale à celle du modèle de pesanteur normale.

Les différentes anomalies entre les effets associés à nos modèles géophysiques, nous ont donné la possibilité de déterminer les meilleurs modèles à comparer à celui de pesanteur normale. Par exemple, nous pouvons affirmer au vu des précisions satellitaires de 3 mE, que l'écart entre l'effet associé à un modèle à l'équilibre hydrostatique et celui associé à un modèle en couches ellipsoïdales homothétiques, qui vaut jusqu'à -5,2 E, ne peut être négligé. Ainsi, concevoir un modèle à partir de l'équation de Clairaut est nécessaire, bien que plus compliqué à réaliser. Cependant, malgré toutes les précautions prises, l'écart entre l'effet mesuré et l'effet associé à notre modèle le plus pertinent, nommé [PREM+LITHO1.0]C est encore trop élevé pour laisser deviner la structure topographique terrestre.

Ce travail présente donc de nouvelles perspectives de recherches. Dans un premier temps, en vue d'un raffinement ultérieur, il conviendra de modifier [PREM+LITHO1.0]C de manière à ce qu'il coïncide quasi parfaitement (quelques dixièmes de milliEötvös) avec le modèle théorique associé à WGS84. Ce qui permettra la convergence, vers une solution, d'un problème

inverse explicité plus bas. Une fois cette étape accomplie, les valeurs du GGT obtenu devraient être très proches de celles du GGT mesuré. Ainsi, la cartographie de l'anomalie sur la composante  $V_{zz}$  par exemple, laissera apparaître les structures topographiques de la Terre mises en évidence par les courtes longueurs d'onde qui subsistent, comme on l'a vu pour la composante  $V_{zz}$  mesurée. Enfin, cette assimilation de données gravimétriques laissera envisager la résolution d'un problème inverse. En d'autres termes, nous avons vu que les formules analytiques des composantes gravimétriques étaient liées à la masse et au volume d'une source  $S$  génératrice de l'effet gravitationnel. Par conséquent, en fixant ce volume et en utilisant les mesures satellitaires on pourra en déduire les densités qui y sont associées et raffiner nos modèles.

D'un point de vue personnel, ce travail a été un véritable défi à relever pour moi. En effet, partant d'un niveau modeste en programmation, j'ai dû redoubler d'efforts pour atteindre les objectifs fixés par mes maîtres de stage et par moi-même, à savoir quitter l'école avec un profil, le plus complet possible. D'un point de vue professionnel, grâce à la confiance acquise, je me sens à présent capable de m'adapter à tous les types de situations.

## Bibliographie

---

- ASGHARZADEH M. F., VON FRESE R. R. B., KIM H. R., LEFTWICH T. E., and KIM J. W. (2007). Spherical prism gravity effects by Gauss-Legendre quadrature integration. *Journal of Geophysical Research*, **169**/2007, p. 1–11.
- BOTTON S. (2011). *Système de référence et de coordonnées : l'ellipsoïde*. ENSG, Marne la Vallée, 34 p.
- BOUMAN J., EBBING J., FUCHS M., SEBERA J., LIEB V., SZWILLUS W., HAAGMANS R., NOVAK P.: Satellite gravity gradient grids for geophysics. *Nature Scientific Reports*, **6**:21050, 10.1038/srep21050, 2016.
- BOURDA G. Rotation terrestre et Variations du champ de gravité : Étude et apport des missions CHAMP et GRACE. Sciences de la Terre. Observatoire de Paris, 2004. Français.  
<tel-00008286>
- DZIEWONSKI A.M. & ANDERSON D.L. (1981). Preliminary Reference Earth Model. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **25**/2013, p. 297-356.
- HECK B. & SEITZ K. (2007). A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modeling. *Journal of Geodesy*, **81**/2007, p. 121–136.
- LEVALLOIS J.-J. (1970). *Géodésie générale, Tome III, Le champ de la pesanteur*. Paris, Eyrolles, 336 p.
- MARI J.-L., GLANGEAUD F., COPPENS F. (2001). *Traitement du signal pour géologue et géophysiciens*. Paris, Éditions Technip, 216 p.
- PANET I., PAJOT-MÉTIVIER G., GREFF-LEFFTZ M., METIVIER L., DIAMENT M., & MANDEA M. (2014). Mapping the mass distribution of Earth's mantle using satellite-derived gravity gradients. *Nature geoscience*, **7**/2014, p. 131-135.
- PASYANOS M. E., MASTERS T. G., LASKE G., & MA Z. (2014). LITHO1.0: An updated crust and lithospheric model of the Earth, *J. Geophys. Res. Solid Earth*, **119**/2014, p. 2153-2173.
- ROUSSEL C., VERDUN J., CALI J. et MASSON F. (2015a). Complete gravity field of an ellipsoidal prism by Gauss–Legendre quadrature. *Geophysical Journal International*, **203**, n°3, p. 2220-2236. DOI 10.1093/gji/ggv438.
- ROUSSEL C., VERDUN J., CALI J., MAIA M. et D'EU J. F., (2015b). Integration of a strapdown gravimeter system in an autonomous underwater vehicle. *ISPRS - International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*. 9 avril 2015. Vol. XL-5/W5, pp. 199-206. DOI 10.5194/isprsarchives-XL-5-W5-199-2015.
- ROUSSEL C. (2013). Modélisation numérique du champ de gravité produit par une structure géologique arbitraire, stage de fin d'études, mastère spécialisé PPMD, ENSG, 101 p.

UIEDA L., BOMFIM E.P., BRAITENBERG C., MOLINA E. (2011). Optimal forward calculation method of the marussi tensor due to geologic structure at GOCE height. Proc. of 4th International GOCE User Workshop, p. 1–5.

WILD-PFEIFFER F. (2008). A comparison of different mass elements for use in gravity gradiometry. *Journal of Geodesy*, 82/2008, p. 637–653.

YGER A. & WEIL J.-A., (2009). *Mathématiques L3 appliquées*. Pearson Education France, Paris, 890 p.

### Sites internet consultés

---

Coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques. In : BEURY J.-N. Cours, [en ligne]. Disponible sur : <<http://mawy33.free.fr/cours%20sup/35-500%20coords.pdf>>. (Consulté le 10/04/2016).

Ellipsoïde. In : JARRY-BOLDUC E. Sciences Géomatiques, [en ligne]. Disponible sur : <<https://sites.google.com/site/sciencesgeomatiques/gmt2050/examen-1/examen-1---hiver-2012/section-2---ellipsoide>>. (Consulté le 05/04/2016).

Esa's gravity mission GOCE. In : ESA. GOCE earth explorers, [en ligne]. Disponible sur : <[http://www.esa.int/Our\\_Activities/Observing\\_the\\_Earth/The\\_Living\\_Planet\\_Programme/Earth\\_Explorers/GOCE/ESA\\_s\\_gravity\\_mission\\_GOCE](http://www.esa.int/Our_Activities/Observing_the_Earth/The_Living_Planet_Programme/Earth_Explorers/GOCE/ESA_s_gravity_mission_GOCE)>. (Consulté le 22/06/2016).

Gravimétrie et isostasie, deux vieilles clés pour comprendre le fonctionnement de la Terre, vieilles mais indispensables. In : THOMAS P. Planet Terre ENS Lyon, [en ligne]. Disponible sur : <<http://planet-terre.ens-lyon.fr/planetterre/objets/Images/gravimetrie-isostasie-P-Thomas/gravimetrie-isostasie.pdf>>. (Consulté le 21/04/2016).

Mission. In : CNES. GOCE, [en ligne]. Disponible sur : <<https://goce.cnes.fr/fr/goce/en-detail/mission>>. (Consulté le 22/06/2016).

NGA. DOD World Geodetic System 1984, [en ligne]. Disponible sur : <[http://earth-info.nga.mil/GandG/publications/tr8350.2/tr8350\\_2.html](http://earth-info.nga.mil/GandG/publications/tr8350.2/tr8350_2.html)>. (Consulté le 18/06/2016).

Structure et composition chimique de la Terre interne. In : BRUNET MANQUAT, B. Lycée d'Adultes, [en ligne]. Disponible sur : <<http://www.lyceedadultes.fr//sitepedagogique/pages/SVT1S.html>>. (Consulté le 26/04/2016).

## Table des annexes

---

<i>Annexe 1. Établissement de l'équation différentielle de Clairaut.....</i>	<i>56</i>
<i>Annexe 2. GGT pour le champ normal WGS84.....</i>	<i>64</i>
<i>Annexe 3. Présentation des composantes du GGT obtenues par combinaison des mesures GOCE/GRACE.....</i>	<i>66</i>

## Annexe 1. Établissement de l'équation différentielle de Clairaut

Voici la démarche à suivre selon Levallois (1970), pour poser le problème et arriver au résultat final, à savoir l'équation de Clairaut.

### Le sphéroïde de révolution

Le sphéroïde de révolution selon l'ouvrage de Levallois (1970) est une surface de révolution avec une symétrie équatoriale et un aplatissement que l'on notera  $f$  qui s'exprime en fonction de son demi grand-axe  $a$  et de son demi petit-axe  $b$  par  $f = \frac{a-b}{a}$ . Aussi l'ellipsoïde de révolution semble être un sphéroïde intéressant puisqu'il correspond à la forme prise par une masse fluide mise en rotation autour d'un de ses axes de symétrie. De plus cette surface présente l'avantage de pouvoir être modélisée à partir de seulement deux paramètres qui sont l'aplatissement  $f$  et le demi grand-axe  $a$ . Par ailleurs, comme la Terre est animée d'un mouvement de rotation uniforme, la force centrifuge étire la planète vers l'extérieur avec un maximum dans le plan équatorial.

Cette masse fluide en rotation est soumise à l'action de trois forces agissantes :

- la pression hydrostatique ;
- les attractions newtoniennes ;
- la force centrifuge.

La condition d'équilibre hydrostatique régissant le repos s'exprime par  $dp = \rho dV$  en considérant que les forces considérées dépendent d'un potentiel  $V$ . Enfin, dans un fluide en état d'équilibre hydrostatique, les surfaces équipotentielles sont isobares, isothermes et de densités constantes.

Vérifions à présent que l'ellipsoïde de révolution puisse être effectivement une surface d'équilibre d'un fluide homogène, en mouvement de rotation lent et uniforme autour de son petit axe.

### Cas général

Soit un point  $P$  intérieur à un ellipsoïde homogène à trois axes  $a$ ,  $b$  et  $c$ . La force newtonienne s'exerçant sur ce point est d'après Lagrange donnée par les trois expressions suivantes :

$$\begin{cases} X = -4\pi Gbcx_0 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \alpha \sin \alpha \, d\alpha}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)(a^2 \sin^2 \alpha + c^2 \cos^2 \alpha)}} \\ Y = -4\pi Gcay_0 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \alpha \sin \alpha \, d\alpha}{\sqrt{(b^2 \sin^2 \alpha + c^2 \cos^2 \alpha)(b^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha)}} \\ Z = -4\pi Gabz_0 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \alpha \sin \alpha \, d\alpha}{\sqrt{(c^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha)(c^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)}} \end{cases} \quad (1.1)$$

avec  $A(x_0, y_0, z_0)$  le point où le potentiel est calculé.

Dans ces expressions où les intégrales ne dépendent que de  $a, b, c$  et nullement des coordonnées du point  $A$ , quelques remarques peuvent être faites :

- Une composante donnée  $X$  garde la même valeur pour tous les points  $x_0 = \text{constante}$  ;
- On retrouve la proportionnalité de la force à l'abscisse rectiligne sur le rayon  $OA$ . Ainsi la force newtonienne s'exerçant sur un point intérieur à un ellipsoïde homogène quelconque s'écrit de la forme  $\begin{cases} X = P_0 x \\ Y = Q_0 y \\ Z = R_0 z \end{cases}$

$P_0, Q_0, R_0$  sont des coefficients fixes ne dépendant que de l'ellipsoïde.

### L'ellipsoïde de Mac Laurin (Levallois, 1970)

À présent on peut démontrer que l'ellipsoïde de révolution peut modéliser correctement la Terre. Ainsi en un point intérieur à l'ellipsoïde les composantes de l'attraction sont données par les expressions que nous avons définies plus haut :

$$\begin{cases} X = -P_0 x \\ Y = -Q_0 y \\ Z = -R_0 z \end{cases} \quad (1.2)$$

Il vient donc dans le cas d'un ellipsoïde de révolution, d'après J.-J. Levallois (1970) :

$$P_0 = Q_0$$

Ensuite à la force attractive s'ajoute la force centrifuge dont les composantes sont

$$[\omega^2 x \quad \omega^2 y \quad 0]$$

Finalement la surface limitant le corps sera donnée par l'équation

$$\frac{1}{\rho} dp = -P_0(xdx + ydy) - R_0 dz + \omega^2(xdx + ydy)$$

Cette expression provient de la relation fondamentale de l'équilibre hydrostatique. De plus en intégrant, l'équation de la surface séparatrice devient

$$\frac{2}{\rho} p_0 = -(\omega^2 - P_0)x^2 + (\omega^2 - P_0)y^2 - R_0 z^2 + C$$

Ce qui équivaut à

$$\boxed{(P_0 - \omega^2)(x^2 + y^2) + R_0 z^2 - C = 0} \quad (1.3)$$

En prenant  $P_0 = 0$ .

Cette équation décrit les ellipsoïdes (cf. *équation (2.5)* de la partie I) de Mac Laurin. En outre, par identification, pour qu'un ellipsoïde de révolution soit figure d'équilibre, il faut réunir les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a^2(P_0 - \omega^2) = b^2 R_0 = C \\ a^2 P_0 - b^2 R_0 = a^2 \omega^2 \end{cases} \quad (1.4)$$

De plus  $P_0 < R_0$  d'après leur expression établie plus haut, donc  $a^2 > b^2$  et implique que  $a$  soit supérieur à  $b$  pour que l'égalité ci-dessus soit possible. Finalement cela revient à dire que  $b$  doit être le petit axe de l'ellipsoïde. J.-J. Levallois précise qu'après intégration des valeurs  $P_0, R_0$ , il existe pour une masse et une vitesse de rotation données, deux ellipsoïdes satisfaisant aux conditions ; l'un très peu aplati et l'autre très plat.

## Étude de la forme des couches internes de la Terre

Il s'agit ici d'analyser les conséquences de l'équation fondamentale de l'hydrostatique en l'appliquant à l'étude de la structure interne des corps de densité régulièrement variable dont la forme se rapproche de la sphère. En outre, comme les surfaces de niveau internes sont d'égales densité, la connaissance de leurs densités permettra de déterminer leurs aplatissements successifs.

Étudions dans un premier temps le potentiel intérieur d'un corps homogène, de densité  $\rho$ , voisin de la sphère ; son centre de gravité sera noté  $G$ . D'après J.-J. Levallois, le rayon vecteur  $r$  compté en fonction de la colatitude  $\theta$  et de la longitude  $\lambda$  présente par rapport au rayon  $R$  d'une sphère homogène de comparaison centrée sur  $G$  des discordances  $\Delta r$ . Il vient

$$R = r + \Delta r$$

De plus en première approximation on admettra que le corps a même potentiel qu'une sphère homogène recouverte d'une couche de densité variable  $\mu$  telle qu'en chaque point

$$\rho \Delta r = \mu$$

Cette approximation bien qu'incorrecte au voisinage de la surface sera très admissible à l'intérieur du corps. Le rayon  $R$  de la sphère de comparaison sera défini par l'égalité des masses

$$V\rho = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$$

De sorte que les valeurs  $\Delta r$  seront positives ou négatives et l'on aura :

$$\sum 4\pi R^2 \times \Delta r = 0$$

Et donc  $\sum \Delta r = 0$ .

Ces quantités  $\Delta r$  seront des fonctions de  $\theta$  et de  $\lambda$  exprimées en fonctions sphériques  $Y_n$  afin que le rayon du solide soit de la forme

$$r = R \left( 1 - \frac{\Delta r}{R} \right) = R(1 + \varepsilon_n Y_n) \quad (1.5)$$

Le paramètre  $\varepsilon_n$  est appelé coefficient d'ellipticité et considéré infiniment petit du premier ordre. Par conséquent, la fonction  $Y_n$  pourra s'écrire de la forme  $P_n^p \cos(p(\lambda - \lambda_n^p))$  sans autre coefficient numérique, celui-ci étant absorbé dans  $\varepsilon_n$ . Le symbole  $\varepsilon_n Y_n$  contient la sommation sur  $n$ .

Par conséquent, l'expression de la densité de la couche superficielle de la sphère peut s'écrire de la forme

$$\rho \Delta r = \mu = \rho \varepsilon_n Y_n R$$

Finalement, le potentiel gravitationnel  $V$  en un point à l'intérieur de la sphère s'écrit comme la somme de trois quantités :

- le potentiel de la couche extérieure de densité  $\mu$  ;
- le potentiel intérieur à la sphère matérielle de densité  $\rho$  ;
- le potentiel centrifuge.

$$V = \frac{4}{3}\pi \frac{\rho GR^3}{R} \left( \frac{3R^2 - r^2}{2R^2} + 3 \frac{\varepsilon_n Y_n}{2n+1} \left( \frac{r}{R} \right)^n \right) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (1.6)$$

Par ailleurs, dans le cas d'une surface  $R(1 + \varepsilon_n Y_n)$  en équilibre, cette dernière s'identifie obligatoirement avec la surface  $V = \text{cste}$ . On se contentera d'une solution approchée où les termes du second ordre en  $\varepsilon_n^2$  seront négligés.

Afin que l'identification soit correcte, il faut que, en reportant dans  $V$  la valeur de  $r$ , les coefficients harmoniques  $Y_n$  soient identiquement nuls. Nous avons :

$$r^n = R^n (1 + \varepsilon_n Y_n)^n \approx R^n (1 + n \varepsilon_n Y_n)$$

Le potentiel  $V$  s'écrit donc

$$V = \frac{4}{3}\pi \rho GR^2 \left( \frac{3R^2 - R^2(1 + 2\varepsilon_n Y_n)}{2R^2} + 3 \frac{\varepsilon_n Y_n}{2n+1} (1 + n \varepsilon_n Y_n) \right) + \frac{1}{2} \omega^2 R^2 (1 + 2\varepsilon_n Y_n) \left( \frac{2 - 2P_2}{3} \right) \quad (1.7)$$

$P_2$  est le deuxième polynôme de Legendre dont l'expression est

$$P_2 = \frac{2 - 3\sin^2 \theta}{2}$$

À présent, considérons que le corps représente la Terre et qu'il soit donc stratifié en couches de densité variant continument et parfois de façon discontinue en certains endroits en fonction d'un paramètre lié à la profondeur. Ce paramètre est lié au potentiel puisque, la terre étant supposée fluide, les isobares et les surfaces d'égales densités sont précisément des surfaces de niveau de la pesanteur. Une couche de densité  $\rho$  étant en équilibre avec ses voisines, elle sera liée à une relation du type

$$r = X(1 + \varepsilon_n Y_n)$$

Où le terme  $X$ , la densité  $\mu$  et les ellipticités  $\varepsilon_n$  sont précisément des fonctions du paramètre profondeur.

Soit un point  $P$  situé à l'intérieur de la surface. En ce point le potentiel est donc la somme suivante :

- des potentiels extérieurs de toutes les couches intérieures à  $A$  ;
- des potentiels intérieurs de toutes les couches extérieures à  $A$  ;
- du potentiel centrifuge en  $A$ .

En outre, en notant  $r_I$  la distance correspondant à la position du point  $A$ , on a :

- Le potentiel extérieur d'un sphéroïde de paramètre  $X$  et de densité constante  $\rho$  qui est égal à

$$W_e = \frac{4}{3} \pi \rho \frac{GX^3}{r_1} \left( 1 + 3 \frac{\varepsilon_n Y_n}{2n+1} \left( \frac{X}{r_1} \right)^n \right)$$

Le potentiel total extérieur correspondant à toutes les couches intérieures est donc

$$W_e = \frac{4}{3} \pi G \int_0^{X_1} \rho \frac{d}{dX} \left( \frac{X^3}{r_1} + 3 \frac{\varepsilon_n Y_n}{2n+1} \frac{X^{n+3}}{r_1^{n+1}} \right) dX$$

$X_I$  étant le paramètre de la surface de niveau passant par  $A$ .

- Le potentiel intérieur de toutes les couches extérieures à  $A$  est donné par l'expression

$$W_I = \frac{4}{3} \pi G \int_{X_1}^R \rho \frac{d}{dX} \left( \frac{3X^2}{2} + \frac{3\varepsilon_n Y_n}{2n+1} \frac{r_1^n}{X^{n-2}} \right) dX$$

$X$  étant le rayon extérieur ( $X > X_I$ ) de la surface potential A.

- Pour finir le potentiel centrifuge s'écrit

$$\frac{1}{2} \omega^2 r_1^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{2} \omega^2 r_1^2 \left( \frac{2 - 2P_2}{3} \right)$$

Finalement le potentiel total du corps a pour expression

$$W = \frac{4}{3} \pi G \left( \int_0^{X_1} \rho \frac{d}{dX} \left( \frac{X^3}{r_1} + 3 \frac{\varepsilon_n Y_n}{2n+1} \frac{X^{n+3}}{r_1^{n+1}} \right) dX + \int_{X_1}^R \rho \frac{d}{dX} \left( \frac{3X^2}{2} + \frac{3\varepsilon_n Y_n}{2n+1} \frac{r_1^n}{X^{n-2}} \right) dX \right) + \frac{1}{2} \omega^2 r_1^2 \left( \frac{2 - 2P_2}{3} \right) \quad (1.8)$$

## Équation différentielle de Clairaut

Avec les notions étudiées plus haut, nous sommes dorénavant en mesure d'établir l'équation différentielle de Clairaut qui fournit la valeur de l'aplatissement d'une couche à une profondeur donnée. La démonstration qui suit est une nouvelle fois extraite des travaux de J.-J. Levallois :

La surface équipotentielle passant par  $A(\mathbf{r}_1, X_1)$  étant en équilibre pour  $X = X_I$ , cette dernière s'identifie obligatoirement avec la surface  $W = \text{constante}$ .  $X_I$  et  $r_I$  sont liés par la relation suivante :

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1 - \varepsilon_n Y_n}{X_1}$$

On considère  $r_1 \sim X_1$ .

En exprimant  $Y_n$  à l'aide de cette relation, l'expression du potentiel total sans tenir compte du potentiel centrifuge, devient :

$$\frac{4}{3} \pi G \left[ \left( \frac{1 - \varepsilon_n Y_n}{X_1} \right) \int_0^{X_1} \rho 3X^2 dX + \frac{3}{2n+1} \frac{Y_n}{r_1^{n+1}} \int_0^{X_1} \rho d(X^{n+3} \varepsilon_n) + \frac{3}{2n+1} Y_n r_1^n \int_{X_1}^R \rho d \left( \frac{\varepsilon_n}{X^{n-2}} \right) \right] = cste$$

Afin que cette relation soit vérifiée il faut que le coefficient de  $Y_n$  soit nul et donc que :

$$\frac{4}{3} \pi G Y_n \left[ \frac{-\varepsilon_n}{X_1} \int_0^{X_1} \rho 3X^2 dX + \frac{3}{2n+1} \left( \frac{1}{X_1^{n+1}} \int_0^{X_1} \rho d(X^{n+3} \varepsilon_n) + X_1^n \int_{X_1}^R \rho d \frac{\varepsilon_n}{X^{n-2}} \right) \right] = 0$$

De plus, ce coefficient doit être nul pour tous les  $Y_n$  afin que le potentiel soit constant sur la surface passant par  $A$ .

En principe il est nécessaire d'écrire une équation pour chaque  $\varepsilon_n$  qui caractérise précisément la variation de  $\varepsilon_n$  en fonction de  $X$ . Dans la suite de sa démonstration, J.-J. Levallois prouve que tous ces coefficients sont nuls sauf pour le cas  $n = 2$ . En effet pour l'harmonique du deuxième ordre, s'ajoute le terme  $\frac{-\omega^2 X_1^2 P_2}{3}$ .

Par conséquent le coefficient  $\varepsilon_n$  n'est plus en facteur et la constance du potentiel  $W$  a pour expression :

$$\frac{4}{3} \pi G Y_2 \left[ \frac{-\varepsilon_2}{X_1} \int_0^{X_1} \rho 3X^2 dX + \frac{3}{5} \left( \frac{1}{X_1^3} \int_0^{X_1} \rho d(X^5 \varepsilon_n) + X_1^2 \int_{X_1}^R \rho d\varepsilon_2 \right) \right] - \rho^2 X_1^2 \frac{P_2}{3} = 0$$

Et donc  $Y_2 \equiv P_2$  et  $r = X(1 + \varepsilon_2 P_2)$ .

L'absence d'harmoniques tesserales<sup>5</sup> dans l'expression de  $r$  à l'ordre 2 montre que les surfaces d'équilibre sont des surfaces de révolution.

<sup>5</sup> Harmonique du potentiel de gravitation terrestre qui dépend de la longitude et de la latitude par opposition à l'harmonique zonale qui ne dépend que de la latitude.

En supprimant l'indice 2 de l'ellipticité  $\varepsilon_2$  et l'indice 1 de  $\mathbf{X}$ , l'équation ci-dessus devient :

$$\frac{-\varepsilon}{X} \int_0^X \rho 3X^2 dX + \frac{3}{5} \left( \frac{1}{X^3} \int_0^X \rho d(X^5 \varepsilon) + X^2 \int_X^R \rho d\varepsilon \right) - \frac{\rho^2 X^2}{4\pi G} = 0$$

Puis en multipliant par  $X^3$  :

$$-\varepsilon X^2 \int_0^X \rho 3X^2 dX + \frac{3}{5} \left( \int_0^X \rho d(X^5 \varepsilon) + X^5 \int_X^R \rho d\varepsilon \right) - \frac{\rho^2 X^5}{4\pi G} = 0$$

Ensuite en dérivant par rapport à  $X$ , puis en divisant par  $X^4$  il vient :

$$-\left( \frac{2\varepsilon}{X^3} + \frac{1}{X^2} \frac{d\varepsilon}{dX} \right) \int_0^X 3\rho X^2 dX + 3 \int_X^R \rho d\varepsilon - \frac{5\rho^2}{4\pi G} = 0$$

Enfin, en dérivant une nouvelle fois par  $X$  et en posant

$$\bar{\rho} X^3 = \int_0^X 3\rho X^2 dX$$

on obtient ainsi l'équation de Clairaut qui relie l'ellipticité  $\varepsilon$  de l'équipotentielle à la connaissance de la loi de densité  $\rho$  en fonction de  $X$  :

$$\boxed{\bar{\rho} \frac{d^2 \varepsilon}{dX^2} + \frac{6\rho}{X} \frac{d\varepsilon}{dX} + \frac{6\varepsilon}{X^2} [\rho - \bar{\rho}] = 0} \quad (1.9)$$

La quantité  $\bar{\rho}$  correspond à la densité moyenne associée à la masse du corps entre 0 et  $X$ . On sait que pour la terre,  $\bar{\rho} = 5,52 \text{ g.cm}^{-3}$  et qu'au centre  $\bar{\rho} = \rho$  (Levallois, 1970).

## Annexe 2. GGT pour le champ normal WGS84

Le calcul est réalisé en coordonnées sphériques  $(\lambda, \theta, r)$  où  $\lambda$  est la longitude,  $\theta$ , la colatitude et  $r$ , le rayon géocentrique. On néglige ici la force centrifuge dans les expressions car le GGT calculé est issu de formules analytiques qui n'en tiennent pas compte.

Les composantes de la pesanteur normale et du tenseur des gradients de gravité sont exprimées dans le repère mobile  $(x'y'z')$  dont les axes pointent respectivement dans les directions nord ( $x'$ ), ouest ( $y'$ ) et radiale ( $z'$ ).

Les composantes de la pesanteur normale sont donc :  $U_{x'}$ ,  $U_{y'}$  et  $U_{z'}$ . Les composantes du tenseur du gradient de gravité sont :  $U_{x'x'}$ ,  $U_{x'y'}$ ,  $U_{x'z'}$ ,  $U_{y'y'}$ ,  $U_{y'z'}$  et  $U_{z'z'}$ .

### Potentiel normal (d'après NGA (1997), anciennement NIMA)

$$V = \frac{GM_0}{r} \left( 1 + C_{20} \left( \frac{a}{r} \right)^2 P_2 \right)$$

où

- $GM_0$  désigne la constante gravitationnelle de la Terre ( $3\,986\,004,418 \times 10^8 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ ),
- $C_{20}$ , le coefficient harmonique de degré 2 ( $C_{20} = -0,484\,166\,774\,985 \times 10^{-3}$ ),
- $a$ , le demi-grand axe de l'ellipsoïde WGS84 ( $a = 6\,378\,137,0 \text{ m}$ ),
- $\omega$ , la vitesse angulaire de rotation de la Terre ( $\omega = 7\,292\,115 \times 10^{-11} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ );
- $P_2$ , le deuxième polynôme de Legendre ( $P_2 = \frac{2-3\sin^2\theta}{2}$ ).

Dans la suite, on utilisera la notation :  $U_\alpha = \frac{\partial U}{\partial \alpha}$  pour  $\alpha = \lambda, \theta, r$ .

### Dérivées premières du potentiel

$$U_\lambda = 0$$

$$U_\theta = \frac{1}{2r^3} (-3C_{20}GM_0a^2) \sin(2\theta)$$

$$U_r = \frac{1}{r^4} (-4,5C_{20}GM_0a^2 \cos^2(\theta) + 1,5C_{20}GM_0a^2 - GM_0r^2)$$

### Pesanteur normale

$$U_{x'} = \frac{-1}{r} U_\theta = \frac{-1}{2r^4} (-3C_{20}GM_0a^2) \sin(2\theta)$$

$$U_{y'} = \frac{-1}{r \sin \theta} V_\lambda = 0$$

$$U_{z'} = V_r = \frac{1}{r^4} (-4,5C_{20}GM_0a^2 \cos^2\theta + 1,5C_{20}GM_0a^2 - GM_0r^2)$$

## Gradient de gravité

$$U_{x'x'} = \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{\theta\theta} = \frac{1}{r^5} (-10,5C_{20}GM_0a^2\cos^2\theta + 4,5C_{20}GM_0a^2 - GM_0r^2)$$

$$U_{x'y'} = \frac{1}{r^2\sin\theta} V_{\theta\lambda} - \frac{\cos\theta}{r^2\sin^2\theta} V_\lambda = 0$$

$$U_{x'z'} = \frac{1}{r^2} V_\theta - \frac{1}{r} V_{r\theta} = \frac{-1}{2r^5} (12C_{20}GM_0a^2) \sin(2\theta)$$

$$\begin{aligned} U_{y'y'} &= \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2\tan\theta} V_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} V_{\lambda\lambda} \\ &= \frac{1}{2r^5\tan\theta} (-3C_{20}GMa^2\sin(2\theta) + (-9C_{20}GMa^2\cos^2\theta + 3C_{20}GMa^2 - 2GMr^2) \tan\theta) \end{aligned}$$

$$U_{y'z'} = \frac{1}{r^2\sin\theta} V_\lambda - \frac{1}{r\sin\theta} V_{r\lambda} = 0$$

$$U_{z'z'} = V_{rr} = \frac{1}{r^5} (18C_{20}GMa^2\cos^2\theta - 6C_{20}GMa^2 + 2GMr^2)$$

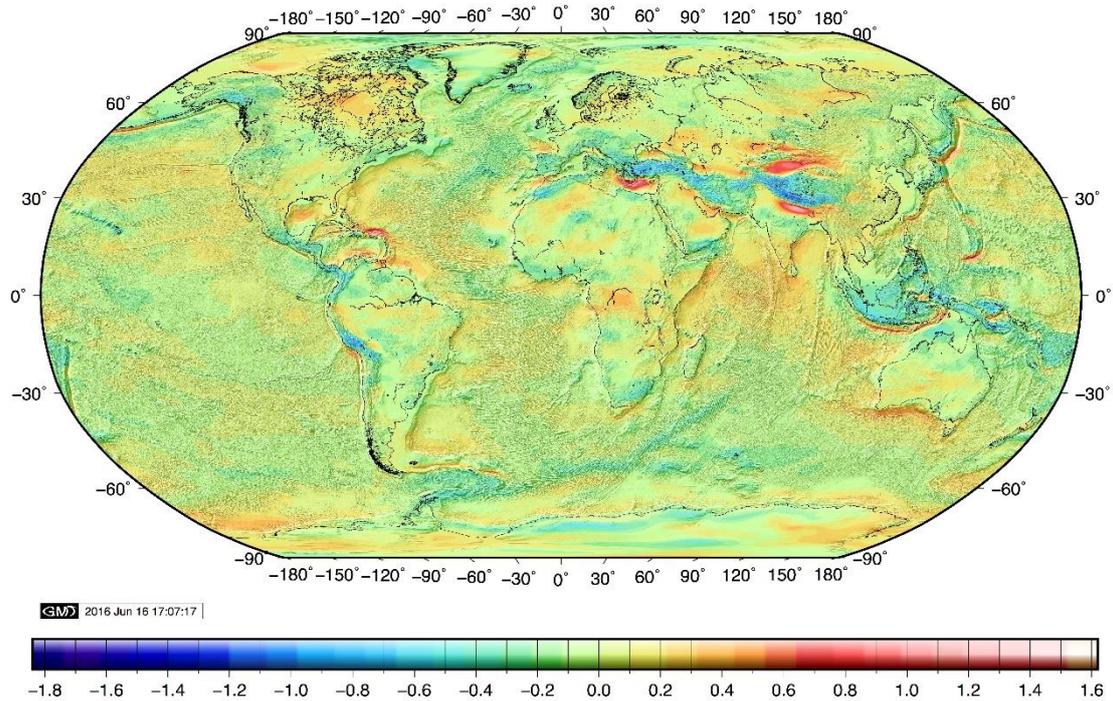
### *Annexe 3. Présentation des composantes du GGT obtenues par combinaison des mesures GOCE/GRACE*

Le GGT est une matrice  $3 \times 3$  symétrique, de la forme suivante :

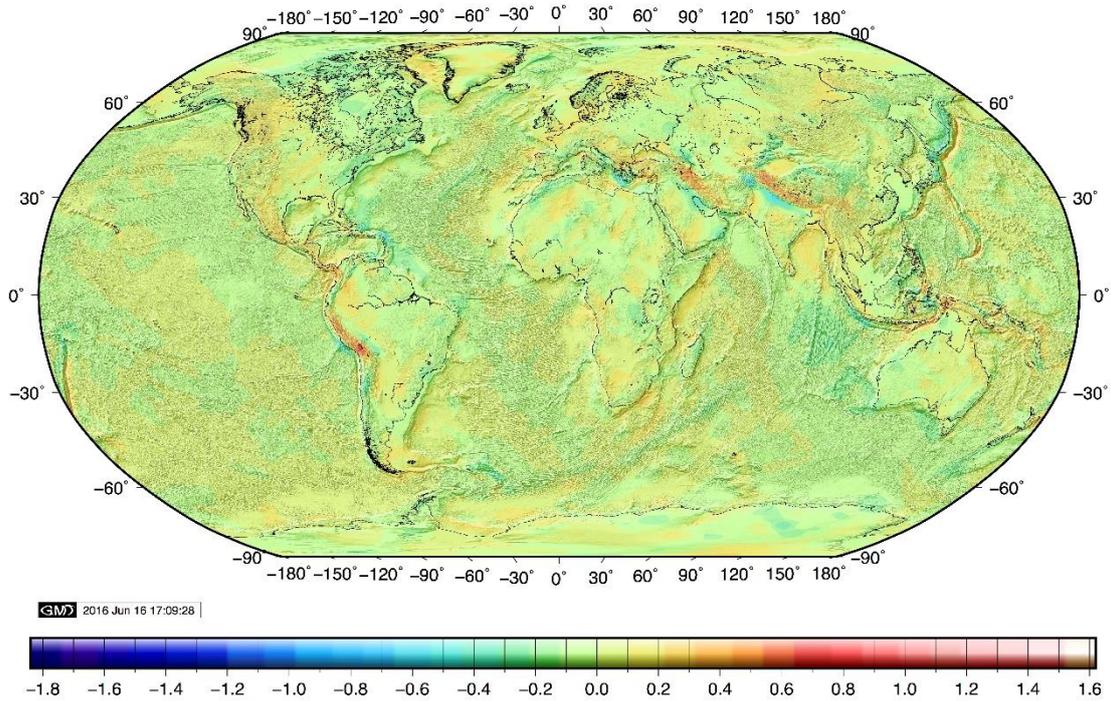
$$\begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{pmatrix}$$

de plus sa trace est nulle :

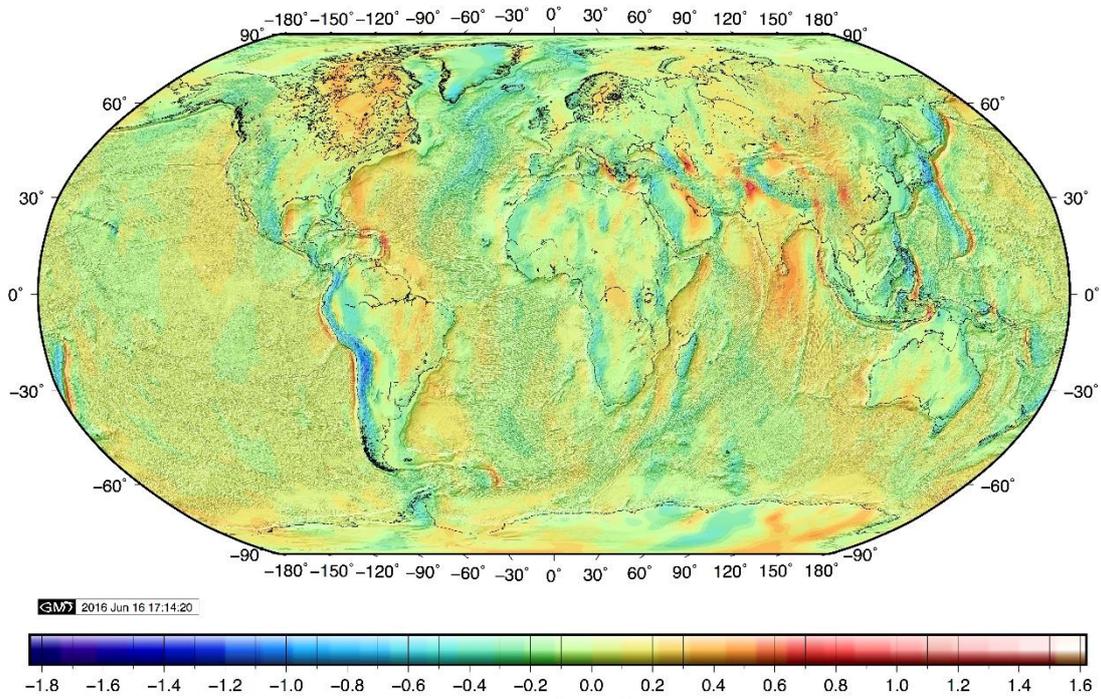
$$V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$$



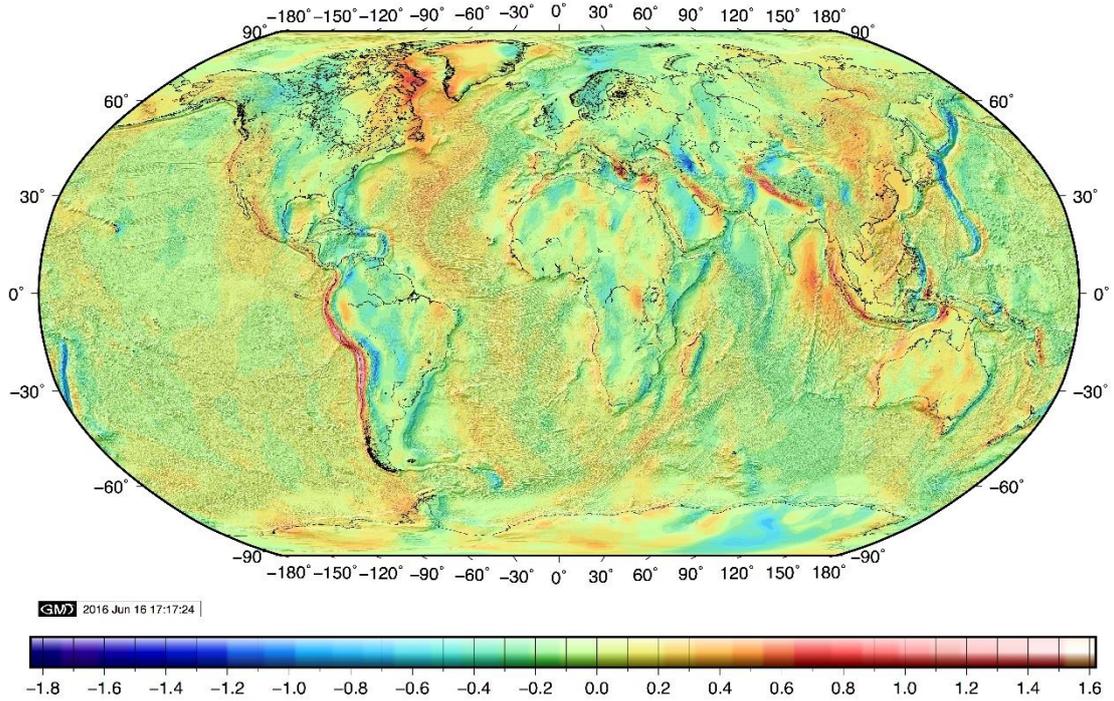
$V_{xx}$  du tenseur mesuré à l'altitude du satellite GOCE  
(environ 255 km au-dessus de l'ellipsoïde WGS84)



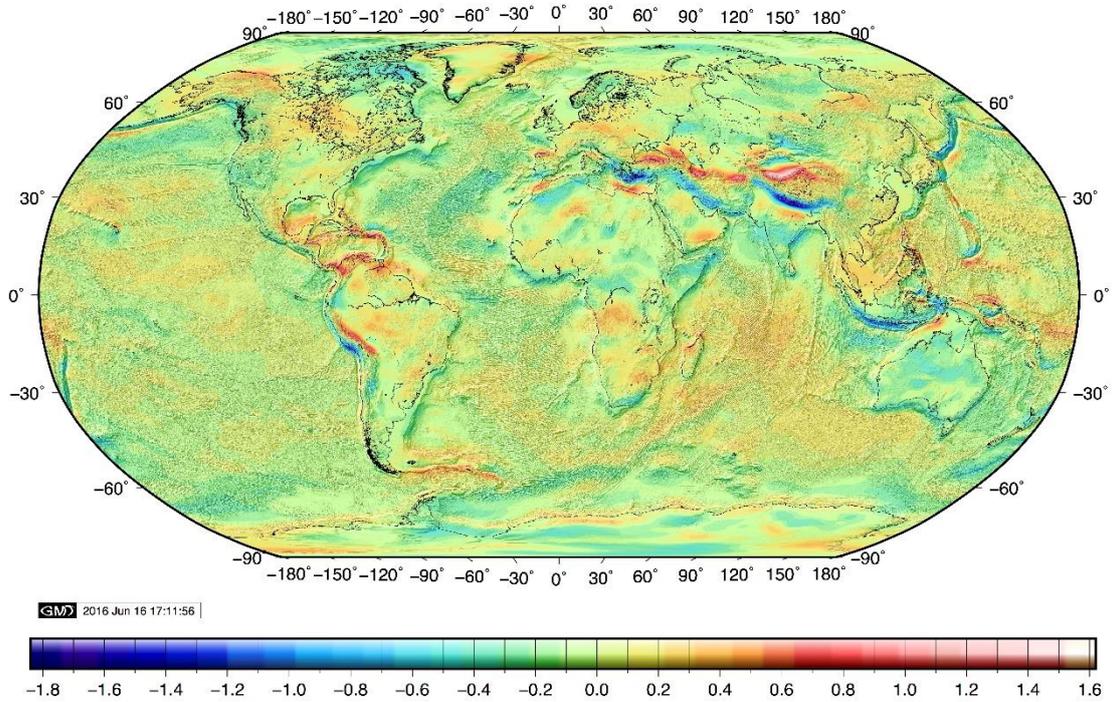
V<sub>xy</sub> du tenseur mesuré à l'altitude du satellite GOCE  
(environ 255 km au-dessus de l'ellipsoïde WGS84)



V<sub>yy</sub> du tenseur mesuré à l'altitude du satellite GOCE  
(environ 255 km au-dessus de l'ellipsoïde WGS84)



Vyz du tenseur mesuré à l'altitude du satellite GOCE  
 (environ 255 km au-dessus de l'ellipsoïde WGS84)



Vxz du tenseur mesuré à l'altitude du satellite GOCE  
 (environ 255 km au-dessus de l'ellipsoïde WGS84)

## Liste des figures

---

<i>Figure I-1 – Corps ponctuel</i> .....	9
<i>Figure I-2 – Corps non ponctuel</i> .....	10
<i>Figure I-3 – Système de coordonnées sphériques (source : Beury (2014))</i> .....	12
<i>Figure I-4 – Le prisme sphérique</i> .....	14
<i>Figure I-5 – Coordonnées géographiques d'un point situé sur l'ellipsoïde</i> .....	15
<i>Figure I-6 – Latitude géodésique <math>\phi_g</math> et rayon de courbure <math>R_N</math> (source : Jarry-Bolduc (2012). <a href="https://sites.google.com/site/sciencesgeomatiques/gmt2050/examen-1/examen-1---hiver-2012/section-2---ellipsoïde">https://sites.google.com/site/sciencesgeomatiques/gmt2050/examen-1/examen-1---hiver-2012/section-2---ellipsoïde</a>)</i> .....	16
<i>Figure I-7 – Position du point M par rapport à l'ellipsoïde de référence</i> .....	17
<i>Figure I-8 – Prisme ellipsoïdal</i> .....	18
<i>Figure I-9 – L'équilibre isostatique</i> .....	20
<i>Figure I-10 – Modèles terrestres sphérique et ellipsoïdal</i> .....	24
<i>Figure II-1 – Propagation des ondes P et S dans l'intérieur du globe (source : Brunet Manquat (2010). <a href="http://www.lyceedadultes.fr//sitepedagogique/pages/SVTIS.html">http://www.lyceedadultes.fr//sitepedagogique/pages/SVTIS.html</a>)</i> .....	27
<i>Figure II-2 – Description du modèle PREM</i> .....	29
<i>Figure II-3 – Description du modèle LITHO1.0</i> .....	30
<i>Figure II-4 – Évolution des aplatissements des couches de chaque modèle PREMC et [PREM+LITHO1.0]C en fonction de la profondeur</i> .....	37
<i>Figure II-5 – Schéma de la conception du modèle [PREM+LITHO1.0]C (1<sup>ère</sup> approche)</i> ....	38
<i>Figure II-6 – Schéma de la conception du modèle [PREM+LITHO1.0]C (2<sup>nde</sup> approche)</i> ....	40
<i>Figure II-7 – Repère LNOF sphérique</i> .....	41
<i>Figure II-8 – <math>V_{zz}</math> du tenseur mesuré à l'altitude du satellite GOCE (environ 255 km au-dessus de l'ellipsoïde WGS84)</i> .....	42
<i>Figure III-1 – Composante <math>V_{zz}</math> en Eötvös (PREMC, environ 255 km au-dessus de l'ellipsoïde WGS84)</i> .....	45
<i>Figure III-2 – Composante <math>V_{zz}</math> en Eötvös (PREMH, environ 255 km au-dessus de l'ellipsoïde WGS84)</i> .....	46
<i>Figure III-3 – Anomalie PREMC-PREMH sur la composante <math>V_{zz}</math> en Eötvös (environ 255 km au-dessus de l'ellipsoïde WGS84)</i> .....	47
<i>Figure III-4 – Composante <math>V_{zz}</math> en Eötvös ([PREM+LITHO1.0]C, 255 km)</i> .....	48
<i>Figure III-5 – Anomalie [PREM+LITHO1.0]C-PREMC sur la composante <math>V_{zz}</math> en milliEötvös (255 km)</i> .....	48
<i>Figure III-6 – Anomalie MESURES-[PREM+LITHO1.0]C sur la composante <math>V_{zz}</math> en Eötvös (255 km)</i> .....	50

## Liste des tableaux

---

<i>Tableau II-1 – Description du modèle PREM</i> .....	28
--	----

## **Raffinement des modèles géophysiques globaux de la Terre par assimilation de données gravimétriques satellitaires.**

**Mémoire d'Ingénieur E.S.G.T., Le Mans 2016**

---

### **RÉSUMÉ**

Aujourd'hui les mesures satellitaires sont largement utilisées pour appréhender la structure interne du globe. De plus, la comparaison des grandeurs gravitationnelles mesurées par le satellite gravimétrique GOCE, avec celles calculées à partir des modèles géophysiques globaux de la Terre, permet de raffiner ces derniers. On se propose dans cette étude, de concevoir à partir de modèles géophysiques existants, des nouveaux modèles dont l'effet gravitationnel est comparable à celui mesuré, par le satellite.

L'analyse des écarts entre les composantes mesurées et celles induites par nos modèles, du tenseur du gradient de gravité, au vu de la précision des mesures satellitaires, permet d'en déduire les modifications à prendre en compte pour nos modèles. En d'autres termes, cela revient à raffiner ces derniers par assimilation de données gravimétriques satellitaires.

**Mots clés :** modèles géologiques et sismologiques, équation différentielle de Clairaut, équilibre hydrostatique, modèle compensé, tenseur du gradient de gravité (GGT), prisme sphérique, prisme ellipsoïdal, calcul numérique du GGT, mesures gravimétriques satellitaires.

---

### **SUMMARY**

Today satellite-measured data have been increasingly using to understand the internal structure of the Earth. Moreover, the comparison between the gravitational effect measured by the gravimetric satellite GOCE and which computed from global earth models, enables the refinement of these latter. In this study, we conceive new geophysical models from these existing, whose gravitational effect is similar to the one measured.

The analyses of differences between the Gravity Gradient Tensor components evaluated by satellites and these which are computed from our models, as regard the accuracy of satellite measurement precision, allow some modifications to take into account in our model's conception. In other words, it means to refine these latter by gravimetric satellite data assimilation.

**Keywords :** geological and seismological models, Clairaut differential equation, hydrostatic equilibrium, offset model, Gravity Gradient Tensor, spherical prism, ellipsoidal prism, numeric computing of GGT, gravimetric satellite measures.