Anticiper une manipulation pour apprendre les mathématiques au cycle 1

Héloïse Rey

▶ **To cite this version:**

Héloïse Rey. Anticiper une manipulation pour apprendre les mathématiques au cycle 1. Education. 2018. dumas-01885954

HAL Id: dumas-01885954

https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01885954

Submitted on 2 Oct 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année universitaire 2017-2018

Master *Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation*

Mention *Premier degré*

Anticiper une manipulation pour apprendre les mathématiques au cycle 1

Présenté par Héloïse REY

Première partie rédigée en collaboration avec Celena BENEDETTI

Mémoire de M2 encadré par Sophie SOURY-LAVERGNE

Remerciements

Je tiens à remercier respectivement toutes les personnes qui m'ont aidée, encouragée et soutenue et qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

En particulier, Madame Sophie SOURY-LAVERGNE, ma tutrice de mémoire qui m'a guidée et conseillée tout au long de ce travail.

Madame Nathalie DEMANGEAT, ma PEMF qui m'a accompagnée et conseillée lors des différentes visites.

Je tiens aussi à remercier mes collègues de mon école de stage qui ont su me soutenir et me conseiller tout au long de l'année.

Je témoigne aussi ma gratitude envers mes élèves, sans qui la mise en place de ce dispositif n'aurait pas été possible

Pour finir, je tiens à remercier Celena BENEDETTI, ma binôme de travail pour l'élaboration de ce mémoire.

Autorisation de diffusion électronique d'un mémoire de Master 2 MEEF dans la base DUMAS[1]

Autorisation de l'étudiant(e)

Je soussigné(e) Héloïse REY

auteur et signataire du mémoire de niveau Master 2, intitulé :
Anticiper une manipulation pour apprendre les mathématiques au cycle 1.

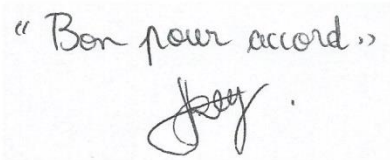
, agissant en l'absence de toute contrainte,
☐ **autorise** ☐ **n'autorise pas** [2]

le Service Interétablissement de Documentation de l'Université Grenoble Alpes-Grenoble INP à le diffuser, sans limitation de temps, sur la base DUMAS en texte intégral.

- Je certifie la conformité de la version électronique déposée avec l'exemplaire imprimé remis au jury.
- Je m'engage à signaler les documents pour lesquels je ne détiens pas les droits de reproduction et de représentation ou les autorisations afférentes. Ces documents devront être masqués ou retirés de la version diffusée sur la base DUMAS par les auteurs.
- La présente autorisation de diffusion n'a pas de caractère exclusif. L'auteur conserve par conséquent toutes les possibilités de cession de ses droits et de diffusion concomitante de son mémoire.
- Je renonce à toute rémunération pour la diffusion effectuée dans les conditions précisées ci-dessus.
- Conformément à la loi « informatiques et libertés » du 6 janvier 1978, modifiée en 2004, je pourrai à tout moment modifier cette autorisation de diffusion par simple lettre ou courriel à la BUPE : membupe@univ-grenoble-alpes.fr

Fait à Chambéry, le 13 mai 2018

Signature de l'étudiants(e),
Précédée de la mention « bon pour accord »



[1] La base DUMAS (Dépôt Universitaire des Mémoires Après Soutenance) est en accès libre à l'adresse : http://dumas.ccsd.cnrs.fr/
NB : le mémoire sera diffusé sur Dumas si la note obtenue pour l'écrit est supérieure ou égale à 16/20 et si l'auteur et le responsable de mémoire en donnent l'autorisation

[2] Entourer la mention choisie

Attestation de non-plagiat

Je soussigné(e) Héloïse REY

Auteur du mémoire de master 2 ou de l'écrit scientifique réflexif MEEF-PE / ~~MEEF-SD / MEEF-EE / MEEF-PIF~~ (entourez la mention et indiquez le titre du mémoire)

Anticiper une manipulation pour apprendre les mathématiques au cycle 1.

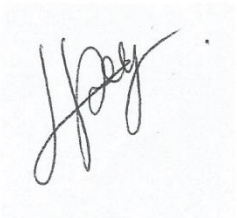
déclare sur l'honneur que ce mémoire est le fruit d'un travail personnel, que je n'ai ni contrefait, ni falsifié, ni copié tout ou partie de l'œuvre d'autrui afin de la faire passer pour mienne.

Toutes les sources d'information utilisées et les citations d'auteur ont été mentionnées conformément aux usages en vigueur.

Je suis conscient(e) que le fait de ne pas citer une source ou de ne pas la citer clairement et complètement est constitutif de plagiat, que le plagiat est considéré comme une faute grave au sein de l'Université, pouvant être sévèrement sanctionnée par la loi.

Fait à Chambéry, le 13 mai 2018.

Signature de l'étudiant(e)



INTRODUCTION **1**

1. Manipuler pour apprendre un concept abstrait **2**

1.1. L'approche du nombre **2**

1.1.1. Le nombre au service de la quantité 2

1.1.2. Les représentations du nombre 3

1.1.3. Les procédures permettant de quantifier une collection 4

1.1.4. Les instructions officielles : Programme de l'école maternelle 2015 4

1.2. La construction du nombre chez l'enfant **5**

1.2.1. Les différentes approches théoriques du nombre chez l'enfant : Piaget et Gelman & Gallistel 6

1.2.2. Les trois processus pour la perception du nombre chez l'enfant 7

1.2.3. L'apprentissage du dénombrement à l'école maternelle 8

1.3. La manipulation : le cœur des apprentissages **11**

1.3.1. Principes pour que la manipulation soit utile à l'apprentissage 11

1.3.2. La place de la manipulation… 12

1.3.3. Les différentes étapes de l'apprentissage mathématique 13

1.3.4. Vers la démarche expérimentale en mathématiques 16

2. PROBLEMATIQUE **17**

3. EXPERIMENTATION **17**

3.1. Situation d'apprentissage du nombre pour contrôler une quantité, anticiper s'il reste des objets dans un sac **17**

3.1.1 Eléments clefs, variables didactiques et aides 18

3.1.2 Analyse a priori : stratégies des élèves pour prévoir s'il reste un marron dans le sac 21

3.2. Déroulement de l'expérimentation **22**

3.2.1 Participants 22

3.2.2 Première phase du nombre 1 au nombre 3 (mars) 22

3.2.1 Deuxième phase : nombre 1 à 5 (avril) 23

4. RESULTATS **24**

4.1 Etape préalable : Construction d'une collection de 1 à 5 objets **24**

4.2 Sortir les marrons du sac, lorsque la boite d'œuf est visible (jeu 1) **25**

4.3 Sortir les marrons du sac et les mettre dans une cuvette (jeu 2) **26**

4.4 Sortir les marrons du sac et les poser sur la table **27**

4.5 Type d'aides choisies par les élèves, lors des jeux 2 et 3 ..... **28**

5. DISCUSSION **30**

5.1. Re-contextualisation **30**

5.2. Analyse des résultats **30**

5.3 Limites, perspectives et apports professionnels **34**

CONCLUSION **36**

BIBLIOGRAPHIE .....

INTRODUCTION

« Apprendre les mathématiques, ce n'est pas mémoriser des règles ou des informations mais s'entraîner à raisonner sur des objets abstraits, pour établir des propriétés sans avoir à recourir à l'expérience pour valider ses conclusions » C. Berdonneau (2006, page 1). Cette citation va permettre d'introduire ce mémoire, car elle semble en contradiction avec une autre pratique des mathématiques qui s'appuie au contraire sur l'expérience et la manipulation.

La manipulation est au cœur des apprentissages à l'école, elle présente des intérêts pour l'enfant ainsi que pour l'enseignant. Cependant ce terme peut avoir différentes définitions, de nombreux chercheurs en didactiques des mathématiques ont exposé l'intérêt de la manipulation dans l'apprentissage des mathématiques chez les élèves de maternelle. D'après C. Berdonneau (2006, page 1), la manipulation n'est pas une activité de « tripotage » mais une activité des mains, guidées par un raisonnement.

De plus, les programmes officiels déclarent qu'il faut faire manipuler les élèves. Mais de nombreuses questions apparaissent : pourquoi manipuler ? Quand manipuler ? Comment manipuler ? Faut-il faire manipuler les élèves à tout âge ? Faut-il guider la manipulation ou au contraire la laisser libre ? Autant de questions possibles lorsqu'on parle de « manipulation ».

En début d'année scolaire, avec mes élèves de PS j'ai cherché à travailler les mathématiques de manière ludique, de façon à ce que les élèves soient actifs et donc acteurs de leur apprentissage. C'est pour cette raison que mon choix de mémoire s'est porté sur la manipulation en mathématiques à l'école maternelle.

Dans une première partie, je présenterai tout d'abord une approche du nombre de façon générale, ainsi que les procédures que l'enfant doit maitriser. Je continuerai avec la construction du nombre chez l'enfant. Enfin, je présenterai l'importance de la manipulation en mathématiques. Suite à cette partie théorique, dans une seconde partie, je développerai la démarche méthodologique, dans laquelle l'expérimentation sera détaillée, en particulier les situations d'apprentissage conçues et expérimentées auprès d'élève de Petite Section de maternelle ainsi que le matériel et les participants. Enfin, je conclurai quant à savoir si la nécessité d'anticiper peut amener les élèves à utiliser le nombre pour contrôler une action.

1. Manipuler pour apprendre un concept abstrait

1.1. L'approche du nombre

Les mathématiques, en particulier le nombre, permet de contrôler et travailler les quantités, de pouvoir s'en souvenir. Il s'agit du rôle des nombres. On ne peut utiliser les nombres qu'à travers une désignation, un nom ou encore un symbole pour pouvoir en parler. La façon de désigner ces nombres, de les nommer, de les écrire, de calculer avec, est à la fois complexe et ingénieuse, tout particulièrement la numération décimale. C'est donc cela que les élèves à l'école primaire vont devoir apprendre. L'école maternelle est donc là pour construire avec les élèves la notion de quantité et les premières façons de désigner ces quantités.

L'origine des mathématiques remonte au Paléolithique. En effet, à cette période, les hommes utilisaient des systèmes rudimentaires comme aide à la numération. Il s'agissait de supports tels que les os ou le bois où ils gravaient des encoches : par exemple, à chaque fois qu'ils tuaient une bête, des bâtons osseux étaient gravés d'un cran.

Ces premiers marqueurs permettant de se souvenir d'une information donnaient naissance aux premiers rudiments des systèmes de numération. Grâce à ce besoin de se souvenir d'une information, l'abstraction est apparue progressivement.

1.1.1. Le nombre au service de la quantité

Le nombre est un concept de base en mathématiques, c'est un outil universel utilisé dans toutes les civilisations notamment pour résoudre des situations de la vie quotidienne. Les bergers utilisaient des petits cailloux pour représenter le nombre de moutons qu'ils possédaient. Cependant, ce système possédant des limites, l'écriture du nombre avec différents symboles est apparue.

Fig.1. Bulle-enveloppe scellée et calculi - Suse, Iran, vers 3300 av. J.-C., Musée du Louvre. Pierre Amiet, La naissance de l'écriture en Sumer et en Élam, Naissance de l'écriture, RMN, 1982, p. 46.

C'est vers 3600 avant J-C que les chiffres sont apparus, l'homme commença par les symboliser sur l'argile au moyen des lettres de l'alphabet. Le système a consisté à attribuer aux lettres des valeurs numériques de 1 à 9 puis par dizaines, puis par centaines et ainsi de suite.

Selon le dictionnaire Larousse, le chiffre représente chacun des symboles ou caractères servant à écrire les nombres dans un système de numération. Nous utilisons en France le système de numération de position : c'est un système d'écriture des nombres qui utilise exactement dix chiffres qui sont : {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Dans ce système, la quantité représentée par chacun des chiffres dans l'écriture d'un nombre est fonction de la place qu'il occupe dans le nombre. Il existe d'autres systèmes de numération comme les systèmes additifs utilisés par les Egyptiens.

Un chiffre est donc un élément d'écriture. Il y a eu d'autres façons de désigner les nombres, qui vont être utiles à l'école primaire. Les systèmes unaires : un caillou ou une marque pour chaque élément.

1.1.2. Les représentations du nombre

Selon le dictionnaire Larousse, le nombre est la notion fondamentale des mathématiques dérivant du besoin de dénombrer, de classer des objets ou de mesurer des grandeurs, mais qui ne peut faire l'objet d'une définition stricte.

Selon Dehaene (2010), le nombre se modélise selon un « triple code ».

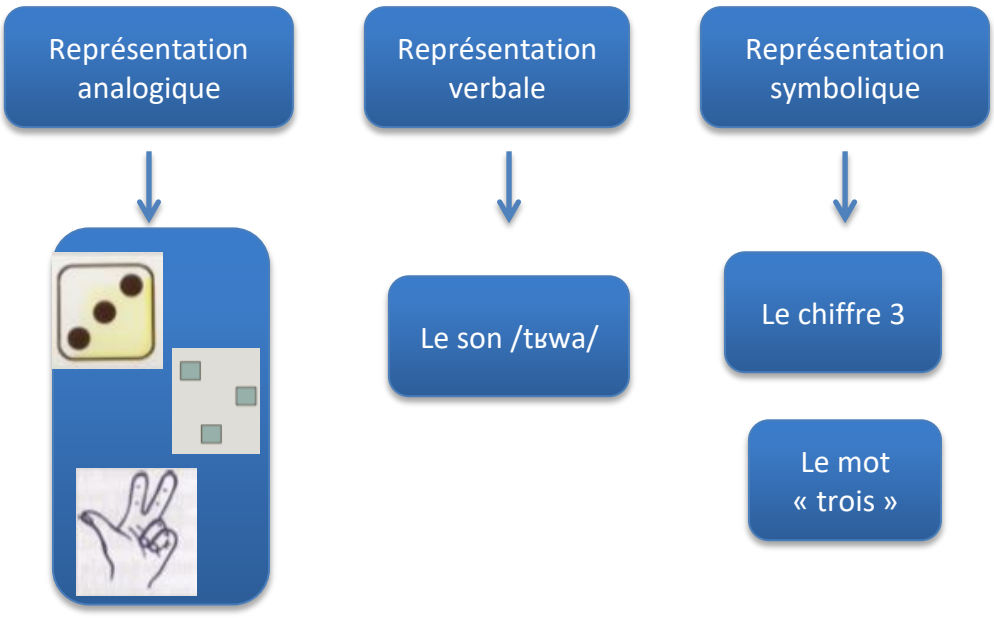


Fig. 2. Le triple code

Un nombre est un concept, une notion fondamentale permettant d'évaluer et de comparer ou de mesurer des quantités discrètes ou des grandeurs continues, mais aussi d'ordonner, de distinguer ou de nommer des éléments par une numérotation.

A l'école maternelle, le nombre a trois fonctions principales :

- la mémorisation d'une quantité (aspect cardinal) ou d'une position (aspect ordinal)

- l'anticipation des résultats dans des situations encore non réalisées
- la comparaison

Un nombre n'est pas une quantité, mais une idée qui permet d'imaginer ou de se représenter et travailler une quantité en l'absence des objets.

1.1.3. Les procédures permettant de quantifier une collection

D'après Brissiaud (2007, p. 21), le mot dénombrer est constitué à partir du radical « nombre ». Le dénombrement correspond à « tout procédé permettant d'accéder au nombre, dont la construction d'une collection-témoin de doigts et le comptage ». Toujours d'après Brissiaud (2007), il existe trois conditions pour dénombrer :

- Créer mentalement les unités numériques.
- Prendre en compte toutes ces unités sans répétition ni oubli d'unités, c'est-à-dire énumérer.
- Totaliser toutes ces unités numériques.

Le dénombrement est donc une procédure permettant de déterminer le nombre d'éléments d'une collection.

D'après Baruk, « compter, c'est dire le nom des nombres que l'on obtient en partant de un, et en ajoutant un, encore un, encore un, et ainsi de suite » (2003, p. 141). Charnay affirme que compter c'est énumérer en désignant chacun des objets par un nombre, dans l'ordre de la suite des mots-nombres et en commençant par un. Cependant, selon Brissiaud, « le comptage ne permet pas aux jeunes enfants de répondre à une question du type : « Combien y a-t-il de… ? » (2007, p. 8). Un enfant peut donc réciter la suite des premiers mots-nombres, mais il ne sait toujours pas l'utiliser pour dénombrer une collection.

1.1.4. Les instructions officielles : Programme de l'école maternelle 2015

Le bulletin officiel spécial n°2 du 26 mars 2015, publié par le Ministère de l'Education Nationale, indique les attentes ministérielles pour l'école maternelle.

Comme le dit la loi de refondation de l'Ecole, la maternelle est un cycle unique qui a une place fondamentale pour garantir la réussite de chaque élève.

Le domaine « Construire les premiers outils pour structurer sa pensée » permet aux enfants de découvrir les nombres ainsi que leurs utilisations. L'école maternelle apprend aux enfants à discriminer des petites quantités (un, deux et trois), notamment dans des configurations culturellement connues comme les constellations d'un dé. De plus, ils acquièrent progressivement les débuts de la suite numérique. L'école maternelle conduit les

élèves à comprendre que les nombres ont deux usages. Un usage cardinal, c'est-à-dire que les nombres servent à exprimer des quantités et un usage ordinal, où les nombres permettent d'exprimer un rang ou un positionnement.

Cet apprentissage requiert du temps, demandant la confrontation à de nombreuses situations impliquant des activités pré-numériques (tris d'objets, énumération de collections…) puis numériques (quantification, rang…). C'est pour cela que les attendus concernent la fin du cycle 1 et donc la fin de la Grande Section de maternelle. Ces attendus sont divisés en deux groupes : utiliser les nombres et étudier les nombres. En fin de cycle 1, les élèves doivent être capables de :

Utiliser les nombres :

- D'évaluer et de comparer des collections d'objets avec des procédures numériques ou non numériques.
- De réaliser une collection dont le cardinal est donné. Ainsi que d'utiliser le dénombrement pour comparer deux quantités.
- De mobiliser des symboles analogiques, verbaux ou écrits, conventionnels ou non conventionnels pour communiquer des informations orales et écrites sur une quantité.

Etudier les nombres :

- D'avoir compris que le cardinal ne change pas si on modifie la disposition spatiale ou la nature des éléments.
- De quantifier des collections jusqu'à dix au moins ; les composer et les décomposer par manipulations effectives et mentales.
- De dire la suite des nombres jusqu'à 30 et lire les nombres écrits en chiffres jusqu'à dix.

1.2. La construction du nombre chez l'enfant

La construction du nombre commence très tôt chez l'enfant ainsi dès la maternelle, les élèves sont confrontés à des situations problèmes en mathématiques leur demandant d'anticiper certains résultats. Cette étape d'anticipation encore abstraite pour eux se base notamment sur les principes qu'ils auront déjà acquis ou non dans la construction du nombre. Afin d'essayer de comprendre cette étape, nous nous intéressons aux différentes approches théoriques puis nous essayerons de comprendre quelles sont les procédures permettant au jeune enfant de 3 ans d'entrer dans l'espace ordinal du nombre.

1.2.1. Les différentes approches théoriques du nombre chez l'enfant : Piaget et Gelman & Gallistel

Pour Piaget (1941), les structures logiques de la pensée, dont le développement est repérable à travers les épreuves de conservation, servent de base à toute connaissance. Elles sous-tendent le nombre et la connaissance arithmétique. Selon Piaget, le nombre constitue un tout permanent (un invariant), identique à lui-même quel que soit l'agencement spatial ou temporel de ses composants. Pour lui, le nombre n'est pas intuitif comme on pouvait le penser avant. L'accès au nombre serait tardif, vers 7 ans, et indépendant du langage et des pratiques sociales. Le nombre, synthèse du cardinal et de l'ordinal, nécessite la coordination de la classification et de la sériation. En effet, selon Piaget, pour comprendre le nombre, l'enfant doit intégrer ce qu'est l'inclusion des classes : l'aspect cardinal du nombre mais aussi l'idée d'ordre issu des sériations : l'aspect ordinal du nombre. Les deux, ensemble, permettent de comprendre que 1 est inclus dans 1+1, 1+1 dans 1+1+1…

Dans les années 70, Gelman et Gallistel postulent l'existence très précoce du comptage, dès 3 ans, et de cinq principes numériques « innés », préexistants permettant de dénombrer :

- principe d'ordre stable : les mots-nombres doivent être engendrés dans le même ordre à chaque comptage
- principe de stricte correspondance terme à terme entre objets décomptés et noms de nombres : chaque élément de collection doit être désigné par un mot-nombre et un seul
- principe de cardinalité : le mot-nombre qui désigne le dernier élément compté d'une collection représente le nombre total d'éléments
- principe d'abstraction : seules sont abstraites des éléments comptés, leurs caractéristiques d'entités distinctes. L'hétérogénéité des collections n'a aucune incidence sur le dénombrement
- principe de non pertinence de l'ordre : l'ordre dans lequel les éléments d'une collection sont énumérés n'affecte pas le résultat du comptage à condition que le principe de correspondance terme à terme soit respecté

Pour Gelman, les difficultés relèvent du procédural et de l'utilisation. Elle explique qu'un enfant sait que lorsqu'on compte, il y a « x » objets correspondants. Cependant, il doit alors mobiliser toutes ses connaissances en même temps d'où la difficulté à les utiliser de façon coordonnée parce qu'il est submergé par la tâche. Pour elle, l'enfant est affecté dès lors que le cardinal change et non pas quand la distance entre les objets change.

Notons que vers les années 80, Fuson et Hall (1983) et Briars et Siegler (1984) mettent en avant la théorie des « principes-après » en contradiction avec Gelman. Ils expliquent que les principes sont appris progressivement par répétition des procédures de dénombrement, elles-mêmes acquises par imitation.

1.2.2. Les trois processus pour la perception du nombre chez l'enfant

Selon Dehaene (2010), il existe au moins trois procédures distinctes du dénombrement, qui contribuent au « sens du nombre » et qui permettent d'évaluer rapidement le cardinal d'une collection :

- Le subitizing pour les ensembles de 1, 2 ou 3 objets. Il ne dépend pas de l'arrangement spatial, les objets ne doivent pas être alignés cependant il échoue si les objets sont superposés et s'ils ne peuvent pas être isolés par la vision « pré-attentive ». Brissiaud (2007, p.34), le définit comme « la capacité d'énumération immédiate des unités jusqu'à 3 ». Selon lui, l'énumération mentale se fait de façon automatique et simultanée pour 2 ou 3 entités. Gallistel et Gelman (1991) décrivaient le subitizing comme un dénombrement malgré la rapidité du processus, selon eux, ce dernier demande de l'attention mais ne se fait pas seulement de façon automatique. On remarque là que les points de vue sont différents notamment avec Brissiaud.
- L'estimation de la quantité, au-delà de 3 objets. Il s'agit d'un processus peu précis mais rapide qui convient aux grandes collections. Gallistel et Whalem (en 1999 et 2001) ont démontré que l'estimation pouvait être affectée par deux effets : un effet de distance, plus la distance numérique est importante, plus la discrimination est facile ainsi qu'un effet de magnitude, plus la taille de la collection est grande, plus l'estimation sera imprécise.
- Le comptage, fondé sur la correspondance terme-à-terme, pour parvenir à la cardinalité exacte. Pour ce processus, on remarque que le temps de comptage et les erreurs augmentent avec le nombre.

Le subitizing et l'estimation sont présents très précocement chez l'enfant, et existent également chez de nombreuses espèces animales. Ces processus numériques confèrent à l'enfant, très précocement un certain « sens du nombre » et une capacité d'opération sur les quantités approximatives.

1.2.3. L'apprentissage du dénombrement à l'école maternelle

1.2.3.1. Dans les programmes

La construction du nombre s'appuie sur différents points comme la notion de quantité, la suite orale des nombres, la codification orale et écrite des quantités ainsi que l'usage du dénombrement. Les enfants peuvent réciter parfaitement la comptine numérique sans pour autant réussir à l'utiliser pour dénombrer une collection. L'école maternelle doit donc permettre aux enfants de faire un lien entre les deux activités. Les enseignants doivent permettent aux enfants de stabiliser la connaissance des petits nombres, ainsi que de construire les nombres pour exprimer des quantités.

Les enfants doivent comprendre que la quantité n'est pas caractéristique d'un objet mais d'une collection d'objets. Tout d'abord une estimation perceptive et globale est effectuée (beaucoup, pas beaucoup). Puis, progressivement la quantité est prise en compte, sans tenir compte de l'apparence de la collection. Le cycle 1 est nécessaire pour stabiliser le fait que le nombre est un outil de mesure d'une quantité. Par exemple : deux indique deux pommes ou deux cubes ou encore deux chats, et même « un chat et un cube ». Peu importe la nature, la taille des éléments ou l'espace qu'ils occupent, le nombre est un outil de mesure de la quantité présentée.

1.2.3.2. La suite numérique

La chaîne numérique est une base indispensable pour pouvoir réaliser un comptage correct. L'acquisition de la comptine numérique s'établit lorsque l'enfant a entre 2 et 6 ans. Fayol observe que la suite numérique verbale produite par un enfant en train de l'apprendre peut être décomposée en trois parties :

- Une première partie stable et conventionnelle qui correspond à la suite pratiquée par les adultes. Sa longueur dépend de l'âge ainsi que de l'influence de l'environnement.
  Exemple : 1, 2, 3, 4, 5 […] 20, 21
- Une partie stable mais non conventionnelle qui correspond à des mots nombres formulés dans un ordre qui n'est pas conventionnel
  Exemple : 1, 2, 4, 5, 7, 6
- Une partie ni stable ni conventionnelle c'est-à-dire que la suite change d'une tentative à l'autre
  Exemple : 1, 3, 4, 5 puis 1, 2, 3, 6, 7

Fayol pense que la chaine numérique verbale s'acquière en deux temps. Dans un premier temps l'enfant apprend par cœur la série de 1 à 19, puis dans un second temps la série 20 à 99 (et au-delà).

Fuson, Richard et Briars (1982) ont décrit l'apprentissage de la chaîne numérique verbale avec quatre niveaux successifs :

- Le niveau chapelet : les noms de nombres n'ont aucune individualité par exemple
- « un-deux-trois-quatre…». C'est un savoir par cœur inutilisable, un tout indifférencié, l'enfant ne dénombre pas, c'est une sorte de simulation.
- Le niveau chaîne insécable : la suite est formée de mots nombres individualisés, mais cependant elle reste insécable. L'élève commence par « un » mais il ne réussit pas à commencer par un autre nombre.
- Le niveau chaîne sécable : l'enfant devient capable de compter à partir de n'importe quel nombre de la liste qu'il connaît, jusqu'à un nombre fixé à l'avance. Il est aussi possible que l'élève compte à rebours.

Cependant, la comptine numérique ne suffit pas pour savoir compter. Il n'y a pas forcément de correspondance terme à terme entre la désignation d'objets et l'oralisation. Il n'y a pas non plus forcément de coordination entre la désignation des objets et la récitation des mots-nombres. Lorsqu'on demande à un enfant combien il y a d'objets, il peut réciter à nouveau la suite numérique. Brissiaud (2007) explique que l'enfant doit tout d'abord comprendre comment se forment les nombres. Par la suite, il pourra alors connaître leurs noms.

1.2.3.3. Le comptage, les décompositions et les collections témoins : des moyens pour dénombrer une quantité

Un élève de maternelle pour dénombrer une quantité doit maîtriser l'énumération. Il s'agit pour l'enfant d'associer objet et pointage. A chaque objet, l'enfant doit pointer une seule et unique fois. Or, très souvent, l'enfant de maternelle met bien en correspondance terme à terme les mots-nombres et les objets de la collection mais il n'isole pas le dernier mot nombre prononcé pour répondre à la question « combien de ? ». Son comptage ne constitue donc pas un dénombrement mais un simple pointage. L'enfant n'acquiert alors pas la signification de cardinalité puisque pour lui le dernier mot-nombre prononcé ne correspond pas à la quantité totale des objets qu'il aura pointé.

Afin de favoriser l'accès au sens des nombres, Brissiaud (2007) distingue le comptage des décompositions. Par exemple : si l'on demande à un enfant combien il y a de biscuits dans le paquet et qu'il répond 3, il faudra alors lui montrer en disant « oui, un là, un là et encore un là ». Grâce à ce processus, les jeunes enfants n'ont pas à coordonner les deux significations des mots-nombres : numéros et noms des nombres. De plus, les décompositions peuvent se représenter de manière non linguistique par des collections témoins.

Une collection témoin est une collection stable du point de vue de son cardinal et partagée au sein d'un groupe. Le procédé consiste à l'utiliser pour effectuer une correspondance terme à terme entre les unités de la collection de départ (des objets dans un sac) avec celles d'une autre collection (des traits tracés, des doigts, des cailloux, les constellations du dé…)

Notons que Brissiaud explique que les configurations de doigts ne sont pas des collections témoins comme les autres, elles sont plus difficiles à comprendre puisque l'enfant peut voir un pouce, un index, un majeur et non pas un doigt, un autre et encore un autre. De plus, il est important selon lui de ne pas seulement utiliser les constellations du dé car il y a un risque que les élèves les connaissent par cœur et donc totalisent au lieu de dénombrer, ce qui ne serait pas un procédé numérique. La collection témoin sert à comprendre que la grandeur de la collection de traits, de cailloux, de doigts sert à représenter la grandeur de la collection de départ Par la construction de collections témoins, l'enfant apprend à se représenter les quantités, elles permettent de décomposer un nombre afin de favoriser la création mentale, l'énumération et la totalisation des unités. Brissiaud (2007) précise que lorsque le maître privilégie « la procédure de construction d'une collection témoin, les enfants ne mémorisent pas d'emblée le nom des nombres et montrent leurs trois doigts pour désigner trois, en demandant « c'est combien un, un et un ? ». L'enfant qui a un tel comportement a déjà appris l'essentiel : il conçoit l'idée du nombre trois seul lui manque le nom de ce nombre ».

1.2.3.4. Association de l'écriture chiffrée aux noms des nombres connus

D'après les programmes, les élèves à la fin du cycle 1 doivent être capables en voyant l'écriture 5 de dire « c'est cinq » et réciproquement, de choisir parmi différentes écritures chiffrées celle qui désigne 5. L'écriture chiffrée n'a d'intérêt que lorsque l'élève a compris la signification principale des nombres soit la désignation d'une quantité. Si l'élève ne sait pas aller chercher 6 crayons lorsque le maître montre 6 doigts ou une autre constellation de 6, il n'y a guère d'intérêt à savoir que le graphisme 6 se dit « six ».

Cependant, différents supports peuvent aider l'élève à l'apprentissage du passage de l'écriture chiffrée aux noms des nombres connus. Pour cela, il faut montrer à l'élève la correspondance entre les écritures et les nombres dits. Un des outils pour cela est la bande numérique. Cependant, il ne faut pas que pour l'élève le mot « dix » et l'écriture chiffrée correspondante ne désignent qu'une case soit la case portant l'étiquette numéro 10. Pour limiter ce risque, il est donc important de faire figurer sous chaque nombre écrit de la bande une représentation de la quantité correspondante, par exemple avec des doigts, des configurations de dés ou autres constellations d'objets.

1.3. La manipulation : le cœur des apprentissages

Les élèves de maternelle et plus particulièrement ceux de petite section ne sont pas encore totalement en mesure de verbaliser ce qu'ils font lors d'une tâche et d'expliquer leurs procédures pour la résoudre. La manipulation est donc omniprésente en maternelle puisqu'il s'agit d'un besoin pour l'élève qui lui permet d'apprendre. De plus, elle permet au professeur des écoles de construire des situations d'apprentissage et ainsi de comprendre le raisonnement des élèves face aux tâches demandées. Grâce à la manipulation, et plus particulièrement une manipulation contrainte l'élève va être mis face à une situation problème qu'il devra résoudre. Pour cela il lui faudra anticiper son action puis la réaliser afin de vérifier si son raisonnement fonctionne ou non. L'action de manipulation, si elle est réussie, validera l'action d'anticipation. Nous nous intéresserons donc ce qu'est la manipulation en tant que telle puis nous regarderons son usage plus particulier lors de l'apprentissage mathématique.

1.3.1. Principes pour que la manipulation soit utile à l'apprentissage

Selon le dictionnaire Larousse, le mot manipulation se définit comme une « action de soumettre quelque chose à des opérations diverses, en particulier dans un but de recherche ou d'apprentissage ».

Berdonneau (2006) définit le terme manipulation comme étant une activité de l'élève présentant plusieurs caractéristiques :

- La manipulation doit s'exercer sur des objets relativement petits par rapport à la taille de l'enfant, c'est-à-dire qu'il doit pouvoir les déplacer, les prendre dans ses mains, les orienter comme il le veut ou encore les déformer.
- Les gestes de l'enfant doivent être guidés par sa pensée, l'enfant doit donc avoir un objectif lors de la manipulation. Malgré les moments de tâtonnement, l'enfant doit manipuler en ayant en tête une consigne précise.

1.3.2. La place de la manipulation…

Une des modalités spécifiques d'apprentissage du programme de l'école maternelle de 2015, indique que les enfants doivent apprendre en jouant car le jeu favorise la richesse des expériences vécues par l'enfant. Le jeu peut revêtir différentes formes dont la manipulation. De plus, elle alimente tous les domaines d'apprentissages. On remarquera d'ailleurs que le bulletin officiel spécial n°2 du 26 mars 2015, cite plusieurs fois le mot « manipulation » dans différents domaines tel que « Mobiliser le langage dans toutes ses dimensions » ou encore « Construire les premiers outils pour structurer sa pensée ». Dans le domaine 5 « Explorer le monde », le mot « manipuler » consiste même un sous-titre : « Utiliser, fabriquer, manipuler des objets ». Que ce soit la manipulation d'objets, de syllabes, ou encore de sons, le jeune enfant doit manipuler mais pas seulement au cycle 1.

Le bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015, qui concerne les cycles 2 et 3 reprend aussi le terme de manipulation à de nombreuses reprises et dans tous domaines en proposant de multiples activités comme par exemple : la manipulation d'objets sonores, la manipulation de phrases, ou encore la manipulation de formes. Manipuler fait même partie des compétences travaillées à l'école élémentaire, les compétences suivantes sont citées dans le bulletin officiel : « manipuler avec soin », « manipuler et réinvestir le repère historique dans différents contextes » ou encore « S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter ». Les enseignants sont donc en charge d'apprendre aux élèves à manipuler et d'apprendre en manipulant.

Berdonneau (2006) attribue plusieurs fonctions à la manipulation pour l'enfant :

- La manipulation répond à un besoin de sensorialité chez l'enfant.
- Elle permet à chaque élève de communiquer via le canal sensoriel qui lui correspond car la manipulation est un apprentissage multi-sensoriel.
- Elle canalise l'attention ainsi elle facilite l'élaboration des concepts.
- Elle libère de toutes tâches qui ne concerneraient pas le domaine des mathématiques, par exemple l'acte graphique, qui peut être une contrainte pour certains élèves.
- Elle permet la répétition.

La manipulation, bénéfique à l'enfant, est aussi un précieux élément pour le professeur des écoles. Berdonneau (2006) met en avant cinq aspects de la manipulation qui en font un outil au service de l'enseignant. Tout d'abord, la manipulation rend visible et observable l'activité de l'élève. Grâce à cela, le professeur des écoles peut observer le déroulement de la manipulation afin d'observer le raisonnement suivi par l'élève.

En effet, l'enfant face à une tâche de manipulation peut difficilement faire semblant face à son enseignant. Il s'agit aussi d'un outil de mise au travail de l'élève. L'élève, par le matériel, peut mieux se représenter la tâche qui lui est demandée. Par son côté kinesthésique, la manipulation est un outil d'aide à l'élaboration des représentations mentales chez l'enfant. Enfin, la manipulation est un dispositif permettant une évaluation plus simple pour les enseignants puisqu'elle permet de prendre en compte l'hétérogénéité d'une classe et donc de mettre en place de la différenciation au sein de la classe.

Cependant, Berdonneau (2006) nous rappelle un point essentiel à noter en tant que professeur des écoles en ce qui concerne la manipulation : « *c'est grâce à la manière dont le maître exploite les supports de manipulation que l'élève va pouvoir assimiler la connaissance correspondante* » (page 2). Autrement dit, l'enseignant doit utiliser les supports de manipulation à bon escient et effectuer une médiation puisque le support de manipulation ne suffit pas, il ne contient pas le savoir.

1.3.3. Les différentes étapes de l'apprentissage mathématique

Les manières d'organiser les supports et de proposer des activités de manipulation pour l'apprentissage des mathématiques ont été étudiées par les didacticiens.

Brousseau, cité par Margolinas et Wosniak (2012), distingue trois types de manifestations de la pensée et du langage mathématique, qui amènent à distinguer trois types de situation didactiques.

Tout d'abord, il parle de la **situation d'action** où la connaissance fonctionne comme moyen de prendre des décisions et d'agir. L'élève mobilise ses connaissances implicites comme moyen d'action sur le milieu. Le milieu lui apporte des informations et rétroactions en retour de ses actions.

Exemple : résoudre un jeu

Cependant, la situation d'action n'est pas suffisante pour l'apprentissage de tous les aspects de la connaissance mathématique.

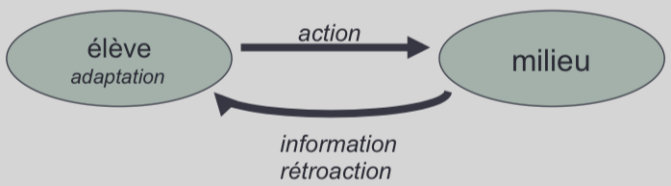


Fig. 3. Situation d'action, Théorie de situations didactiques, Soury-Lavergne, MASTER EADM UE10, 2011-2012

A la suite de cela, vient alors la **situation de formulation**. Il s'agit pour l'élève de formuler le modèle implicite de ses actions. Ses connaissances se construisent comme moyen de communication. Pour que cette formulation ait du sens pour lui, il faut qu'elle soit en tant que formulation un moyen d'action sur le milieu qui lui apporte des informations et rétroactions en retour de ses formulations. Les situations de communication entre élèves où seuls certains peuvent agir, sont des exemples de telles situations.

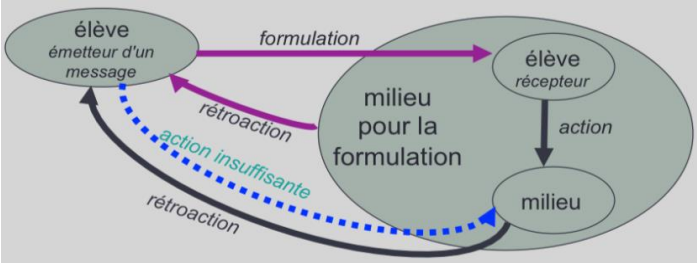


Fig. 4. Situation de formulation, Théorie de situations didactiques, Soury-Lavergne, MASTER EADM UE10, 2011-2012

Enfin, on retrouve la **situation de validation**. Ici, l'élève élabore des preuves de la validité et de la pertinence de son modèle d'action. Ses connaissances se construisent comme un moyen de prouver et de convaincre un interlocuteur.

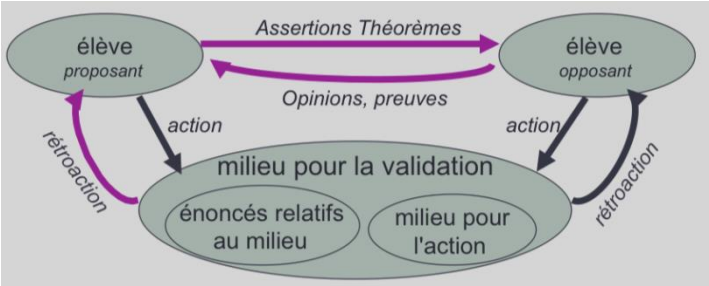


Fig. 5. Situation de validation, Théorie de situations didactiques, Soury-Lavergne, MASTER EADM UE10, 2011-2012

Ces trois situations ne sont pas toutes nécessaires à la maternelle, on utilisera essentiellement la situation d'action avec les élèves de cycle 1. Les situations de formulation et de validation sont organisées et contrôlées par l'enseignant sans pour autant être visibles pour l'élève.

Berdonneau, en 2006, définit à son tour trois phases dans l'apprentissage des mathématiques, plus adaptées aux élèves de maternelle. Parmi ces étapes, deux sont indispensables à la création d'un concept mathématique : la phase d'action et la phase de représentation mentale. La phase d'action se scinde en deux phases selon elle :

- une phase d'activité motrice globale où le corps tout entier est impliqué, on peut par exemple faire vivre aux élèves cette phase dans la salle de motricité
- une phase d'activité plus restreinte où seuls les membres supérieurs du corps (poignet, main, doigts) sont impliqués, l'espace est donc réduit

La phase de représentation mentale est une phase où l'élève intériorise l'élaboration des différents concepts et met en lien les phénomènes observés.

Afin d'élaborer des représentations mentales, l'enseignant doit mettre en place des actions pour les susciter puisqu'elles se produisent rarement de façon spontanée chez le jeune enfant. Pour recourir à cette phase d'abstraction, de nombreuses répétitions sont nécessaires ainsi qu'une verbalisation.

Margolinas (2015), en accord avec Berdonneau ajoute que pour permettre l'apprentissage, le professeur des écoles doit contraindre l'action. Il doit partiellement empêcher l'action pour former une anticipation. La manipulation permet aux élèves de s'approprier le problème, de comprendre de quoi il s'agit mais la notion mathématique n'intervient que lorsque la manipulation est gênée. Les élèves doivent donc raisonner en l'absence des objets, les connaissances mathématiques viennent donc pallier la difficulté ou l'impossibilité de manipuler. Valentin (2000-2001) ajoute que le travail réellement mathématique ne peut se faire que par la création d'un obstacle amenant l'élève à dépasser l'utilisation de procédures connues.

Margolinas (2015) définit alors la phase d'action comme visant l'apprentissage d'une connaissance mathématique. Elle précise qu'il ne faut pas considérer une situation d'action comme une activité de manipulation. En effet, même si l'enfant joue, manipule, il est donc en activité, mais il se peut qu'il ne s'agisse pas réellement d'une situation d'action. Pour construire des situations, il faut organiser les actions des élèves avec un milieu. A l'école maternelle, ce milieu est clairement constitué d'objets. Cependant, ce n'est pas la manipulation d'un matériel qui constitue l'activité mathématique mais son utilisation pour résoudre un problème ou les questions qu'elle suggère.

Pour qu'il y ait une réelle situation d'action, il doit donc y avoir un enjeu, l'action doit être finalisée. Pour cela, l'élève doit élaborer des stratégies en « dialoguant » avec le milieu soit anticiper. En effet, lorsque l'élève est face à une situation de manipulation contrainte, sa phase d'anticipation est réalisée inconsciemment. Grâce au sens nombre que l'élève aura donné au nombre, il pourra anticiper certains résultats, relatifs à des collections en l'absence de celle-ci. Il pourra comparer des quantités, sans avoir à manipuler les collections correspondantes, prévoir le résultat d'une action sur une collection avant que celle-ci n'ait eu lieu. Dans une situation d'action, quand le sujet agit sur le milieu, il anticipe une réaction du milieu que l'on appelle une rétroaction. Il y a donc à la fois des connaissances dans l'action du sujet avec le milieu mais aussi des connaissances dans l'interprétation de la rétroaction du milieu. En ce sens, il ne s'agit jamais seulement d'une action, il y a toujours une dimension

d'anticipation. Selon l'équipe ERMEL, anticiper c'est trouver le résultat d'une action sur une situation qui n'est pas encore réalisée c'est-à-dire que les connaissances de l'élève lui permette de savoir le résultat d'une action avant même de la voir. Il peut donc vérifier la conformité du réel à ses attentes.

Vergnaud (1990) ajoute à cela que « *ce n'est pas l'action, ni la manipulation seule, qui, en elles-mêmes permettent la conceptualisation mais bien l'action en situation donc une action motivée* » (page 7). Ainsi, c'est l'action associée à une anticipation qui permet d'apprendre.

1.3.4. Vers la démarche expérimentale en mathématiques

D'après Dias (2012, p. 19), « *permettre aux élèves d'agir en mathématiques c'est aménager par les enseignants un passage progressif de la manipulation à l'expérimentation* ». Pour lui, il est nécessaire de dépasser le hasard du tâtonnement avec les élèves. Il s'accorde avec Margolinas sur le fait qu'il faut une action orientée vers un but, pour cela il explique qu'il faut problématiser les situations d'apprentissage. Lors d'une expérience, un raisonnement permet donc une organisation et des gestes guidés.

On passe donc d'une phase de manipulation où l'élève déplace, touche, palpe, actionne, utilise à une phase d'expérimentation où l'élève contrôle, essaye, teste, vérifie et éprouve.

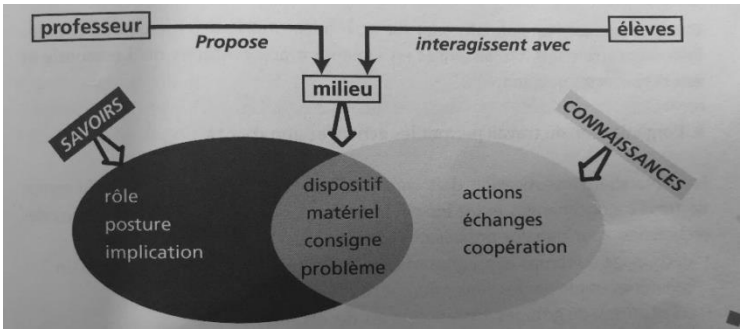


Fig. 6. Manipuler et expérimenter en mathématiques, Dias, 2012, p.19

Comme nous montre ce schéma élaboré par Dias, étant un environnement d'apprentissage propice aux expériences des élèves, le professeur propose un milieu aux élèves. Dans ce milieu, on peut observer que le professeur met à la disposition des élèves un dispositif avec une consigne et du matériel auquel il ajoute un problème. L'action est donc bien contrainte par le professeur. Cette méthode est quasi similaire à la démarche d'investigation.

2. PROBLEMATIQUE

Suite à mes lectures, j'ai appris que le concept de nombre a été construit pour conserver la mémoire de la quantité, pour garder la mémoire d'une position ou encore pour anticiper. Je me suis donc intéressée à cette dernière catégorie. Le nombre permet d'anticiper certains résultats par exemple en comparant des quantités sans avoir à les manipuler, ou encore de prévoir le résultat d'une action avant qu'elle n'ait eu lieu, comme un ajout ou un retrait d'un élément dans la collection. Ainsi l'anticipation permet de penser le monde avant qu'une action soit produite. L'anticipation devient un substitut de la manipulation matérielle et permet de se libérer de celle-ci. Il est donc intéressant de relier la manipulation en mathématiques au concept d'anticipation. Il s'agit de trouver une expérimentation s'appuyant sur la manipulation tout en permettant aux élèves d'anticiper.

Plusieurs hypothèses sont apparues, tout d'abord, on peut supposer que la manipulation en mathématiques amène un enfant à anticiper une action ou un résultat. La seconde hypothèse est qu'il est nécessaire de maitriser la quantité pour pouvoir réaliser une anticipation. Enfin, des situations de manipulation qui conduisent les élèves à devoir anticiper avant de manipuler, les amènent elles à dénombrer par comptage ou prendre en compte la quantité d'une collection ? Ma problématique est donc née d'un regard croisé entre mes observations de classe ainsi que mes différentes lectures. Ainsi la question que je me suis posée est : dans quelles mesures contraindre la manipulation dans la démarche expérimentale en mathématiques, amène l'élève à tenter d'anticiper le résultat de son action en prenant des informations numériques sur la situation et donc de donner du sens au nombre ?

3. EXPERIMENTATION

3.1. Situation d'apprentissage du nombre pour contrôler une quantité, anticiper s'il reste des objets dans un sac

La situation élaborée pour l'expérimentation a pour objectif, après une phase de manipulation des objets par les élèves, de faire exister une phase d'anticipation des élèves après une phase de manipulation et de voir si cela les amène à utiliser le nombre comme moyen d'anticipation et de contrôle d'une quantité. Ainsi, ils seront en situation d'utiliser le nombre comme moyen d'action sur le milieu (le milieu n'est pas seulement matériel mais il contient aussi les prévisions). Ici, les élèves doivent utiliser la connaissance du cardinal d'une collection pour anticiper une action.

Objectif : utiliser la connaissance du cardinal d'une collection pour anticiper une action : reste-t-il des marrons dans un sac alors que je ne les vois pas, pour que je puisse en prendre encore un ?

Figure 7 : à gauche, l'élève fabrique la collection de marrons à placer dans le sac, à droite l'élève a fait une anticipation et vérifie qu'il y a encore un marron à retirer du sac.

1ère étape : Constitution de la collection de n marrons, n étant égal au nombre d'alvéoles d'une boite d'œufs donnée.

2e étape : L'élève doit dire s'il peut prendre un marron. La boite d'œuf reste ou pas sur la table (évolution au cours de la répétition du jeu). L'élève dispose ou pas d'une aide pour se souvenir de la quantité initiale de marrons.

3e étape : L'élève doit dire s'il peut prendre un marron dans le sac.

Si sa réponse est « oui », il le fait. S'il a pu retirer un marron, l'action est validée (il pose le marron dans la boite d'œufs) et il recommence. S'il n'a pas pu retirer de marron, il a perdu.

Si sa réponse est « non », il procède à une vérification du sac. Si le sac est vide, le jeu est alors gagné, mais s'il reste encore des marrons dans le sac alors le jeu est perdu.

4e étape : Reproduction de l'étape 2 jusqu'à épuisement des marrons ou erreur d'anticipation de l'élève.

3.1.1 Eléments clefs, variables didactiques et aides

Eléments clés de la situation (jeu) :

- Deux collections équipotentes : les alvéoles d'une boite d'œufs, des marrons
- Une collection de marrons de cardinal n (n de 1 à 5) (Cf. figure 8).
- Une boîte de n alvéoles (Cf. figure 8).
- Un sac pour cacher les marrons (Cf. figure 8).

Figure 8 : De gauche à droite : des marrons, les boites d'œufs comprenant 1 à 5 alvéoles, le sac pour cacher les marrons.

Variables didactiques :

- Cardinal de la collection : 1 à 3, ou 4 et 5
- Boite d'œufs : la boite d'œufs initiale est visible (présence d'une collection équipotente à la collection initiale, l'élève anticipe en regardant la boite) ou la boite d'œufs est absente ou sans alvéoles (autre procédure nécessaire).
- Aides type : le nombre de marron initial n est présent par un symbole écrit (carte chiffre), un symbole oral (mot nombre dit par la maitresse), une représentation analogique écrite (collections témoins : carte dé, carte point, carte doigt), un dessin libre fait par l'élève : n est représenté par un symbole, un mot ou une icône que l'élève peut choisir pour s'aider ou alors par un écrit produit librement par l'élève, ou aucune représentation de n n'est disponible.
- Aides n fixe ou pas : les aides données sont toutes sur la quantité n ou alors l'élève doit faire un choix parmi différents nombres.

Deux variantes : avec ou sans « aide »

Lorsque le jeu se déroule avec aide, plusieurs aides lui sont proposées. C'est à l'élève de choisir l'information qui peut l'aider (par exemple une carte nombre car elle correspond à la quantité de marrons mis dans le sac).

Toutes les aides sont choisies par l'élève avant de vider la boîte de marrons dans le sac. De plus, pour chaque type d'aide, plusieurs nombres lui sont proposés, c'est à l'élève de choisir celle qui correspond à la quantité initiale de marrons.

Les cartes possibles sont :

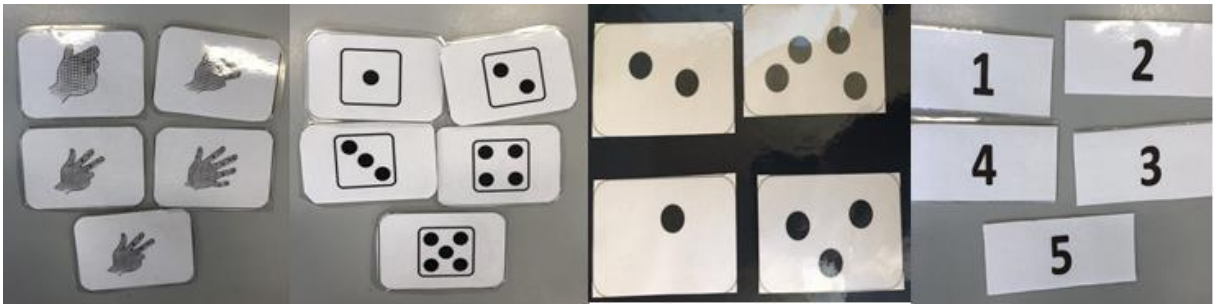


Figure 9 : Les cartes aides que les élèves peuvent choisir. De gauche à droite : carte doigts, cartes constellations du dé, carte points, cartes nombre en chiffres.

Aide carte constellations du dé : chaque carte comprend une constellation du dé (Cf. figure 9).
Aide carte doigts : chaque carte comprend une image de doigts (Cf. figure 9)
Aide carte recto – verso nombre et constellations du dé : chaque carte comprend sur une face une constellation du dé et sur l'autre face le nombre associé
Aide carte recto – verso nombre et doigts : chaque carte comprend sur une face les doigts représentant une quantité et sur l'autre face le nombre associé
Aide carte points : sur chaque carte se trouvent des points, non disposés comme les constellations du dé, représentant la quantité de marrons qu'il possède (Cf. figure 9).
Aide carte recto – verso nombre et points : chaque carte comprend sur une face les points et sur l'autre face le nombre associé
Aide orale : l'enseignante informe l'élève qu'il peut lui demander autant de fois qu'il veut le nombre total de marrons qu'il possède ou qu'il a mis dans le sac. Pour cela, l'enseignante demande "Je dois dire quel nombre?" puis à chacune de ses demandes, elle lui dit "Le nombre en tout c'est…" (quantité)
Aide dessin libre : l'élève peut dessiner la quantité de marrons qu'il possède.
Aide carte nombre en chiffres : l'élève peut prendre une carte où se trouvent les nombres 1, 2, 3 ou 4 ou 5 écrits en chiffres (Cf. figure 9).
Aucune aide : la même situation peut avoir lieu, sans aucune aide à la disposition de l'élève.

On peut refaire cette expérimentation en changeant la boîte de départ. A la place d'utiliser une boîte avec alvéoles, utiliser une boîte où la quantité sera dispersée (ne pas avoir une place pour chaque marron).

3.1.2 Analyse a priori : stratégies des élèves pour prévoir s'il reste un marron dans le sac

Grâce au hasard :

1- L'élève dit au hasard s'il reste ou non des marrons dans le sac

Grâce au sac :

3- L'élève peut, en prenant un marron, percevoir approximativement s'il en reste après celui qu'il a pris

Grâce à la boîte d'œufs avec alvéoles :

2- L'élève peut faire par estimation visuelle des alvéoles vides de la boîte

4- L'élève procède à un comptage des alvéoles vides de sa boîte et en déduit le nombre de marrons manquants.

5- L'élève peut compter les marrons déjà présents dans sa boîte et déduire le nombre de marrons qu'il reste à prendre en utilisant les décompositions

Grâce aux aides, sans boîte :

6- A l'aide des cartes, l'élève fait de la correspondance terme à terme en plaçant à chaque fois son marron déjà sorti du sac sur les points ou les doigts.

7- A l'aide des cartes, l'élève dispose les marrons sur la table de la même manière que les constellations du dé. Il voit qu'un point de la constellation ne correspond pas à un marron.

11- Pour le dessin : l'élève peut entourer les marrons à l'aide d'un crayon, il peut faire des symboles pour les représenter.

Grâce à la collection de marrons sortis du sac :

8- Utilisation de la comptine numérique. Par exemple, il a déjà récupéré 3 marrons du sac, il sait que le cardinal de la collection est 4, il prononce les mots « un », « deux », « trois » associés aux marrons visibles et déduit alors qu'il peut encore en prendre un car le mot-nombre 4 est associé au marron encore dans le sac.

9- L'élève peut faire du surcomptage. Par exemple, par subitizing, l'élève voit 2 marrons dans sa boîte qu'il a déjà récupérés. Le cardinal de la collection est 3. Il part de 2 et surcompte jusqu'à 3. Il sait alors qu'il reste un marron à prendre.

10- L'élève peut construire une collection témoin de doigts et la décrire verbalement par une décomposition. Il va ajouter un doigt pour chaque marron, en disant un, encore un et encore un, et percevoir la quantité finale de doigts, c'est à dire 3.

Autres :

12- L'enfant peut aussi utiliser un procédé sonore, pour communiquer la quantité de marrons. Cela consiste à taper autant de fois dans ses mains que le nombre de marrons pour communiquer la quantité de marrons à l'enseignant.

13- L'enfant peut répéter à haute voix ou dans sa tête le cardinal de la collection de marrons qu'il aura confectionné au départ et repartir de 1 jusqu'au cardinal pour voir le nombre de marrons manquants

3.2. Déroulement de l'expérimentation

3.2.1 Participants

Pour mon année en tant que Professeur des Ecoles Stagiaire j'ai été affectée à mi-temps dans une école de milieu rural située dans la circonscription de Montmélian. Cette école comprend trois classes, avec un effectif total de quatre-vingt-dix élèves.

J'ai effectué mon année de stage dans une classe de PS-MS comprenant 30 élèves, avec 22 PS et 8 MS. En revanche, cette étude a été imaginée et conduite seulement avec les 22 élèves de PS. Cette partie de la classe comprend 14 filles et 8 garçons. Les élèves, en mathématiques disposent d'un niveau correct et ne compte pas d'élèves à besoins particuliers. Treize élèves sont nés dans la première moitié de l'année 2004 et neuf élèves sont nés dans la deuxième moitié de l'année.

3.2.2 Première phase du nombre 1 au nombre 3 (mars)

- Jeu 1- avec boîte à œufs vide, sans aide, nombre 1 à 3

Etape 1- Création d'une collection de marrons de même cardinal qu'une collection donnée: l'élève fait une collection de marrons pour remplir les alvéoles d'une boîte : il dispose de marrons et d'une boîte d'œufs (1 ou 2 ou 3 alvéoles). Il doit prendre autant de marrons qu'il a d'alvéoles, pour remplir sa boîte.

Etape 2- Jeu avec collection de marrons inaccessibles : L'enseignante vide les marrons de la boîte à œufs dans le sac, de façon à ce que les marrons soient cachés, mais que l'enfant ait bien pu prendre conscience que ce sont les mêmes marrons, la même quantité qui était dans la boite. L'enfant n'a pas le droit de toucher le sac à tâtons pour ne pas permettre de répondre à la question (est-il possible de prendre un marron ?) sans nécessiter de raisonner à partir des marrons initialement mis dans le sac.

Etape 3- L'élève doit de nouveau remplir sa boîte d'œufs en tirant les marrons du sac et en anticipant, avant de piocher dans le sac, s'il peut encore prendre un marron. L'enfant prend un marron, puis dit s'il peut en prendre encore un. C'est l'enseignante qui demande à chaque fois s'il peut encore en prendre un. A la fin de la tâche demandée, l'enseignante peut demander à l'élève comment il a fait.

- Jeu 2- boite sans alvéoles (cuvette), où les marrons sont dispersés, aide

Figure 10 : Boite sans alvéoles (cuvette)

Reproduction des mêmes étapes 1,2 et 3, sans la présence de la boite d'œufs visible et possibilité d'avoir une aide : L'enfant, doit prévoir s'il peut retirer un marron du sac ou pas. A l'étape 2, le professeur des écoles a enlevé la boîte d'œufs et l'a remplacée par une cuvette dans laquelle l'élève peut reposer les marrons tirés du sac. L'élève dispose ou non d'une aide qu'il choisit.

- Jeu 3- sans boîte, les marrons sont disposés sur la table, aide

Reproduction de la même situation sans boîte alvéolée, à partir de l'étape 2, les marrons tirés du sac sont disposés sur la table et l'élève a la possibilité d'avoir une aide

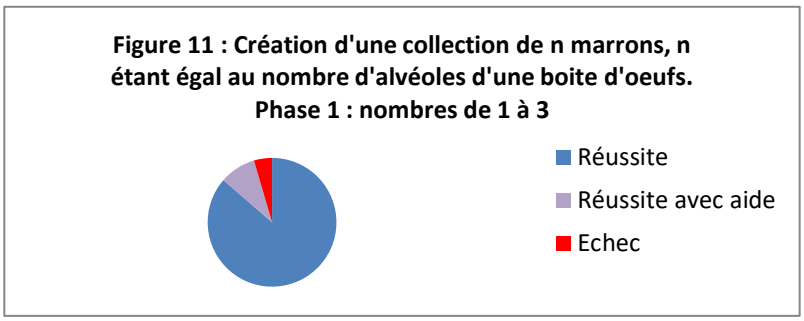
3.2.1 Deuxième phase : nombre 1 à 5 (avril)

La séquence est reproduite à l'identique avec le cardinal de la collection de marrons jusqu'à 5.

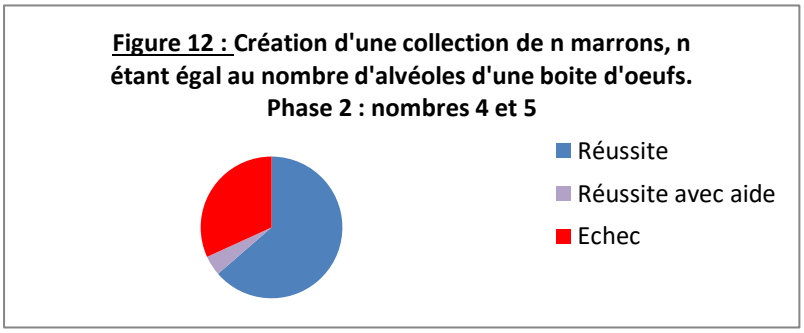
4. RESULTATS

4.1 Etape préalable : Construction d'une collection de 1 à 5 objets

Pour rappel, la première étape de l'expérimentation consistait à créer une collection de n marrons, n étant égal au nombre d'alvéoles d'une boîte d'œufs. Cette étape servait de diagnostic sur les compétences des élèves à propos des nombre et des quantités.



Lors de la phase 1, les élèves travaillaient avec 1,2 et 3 marrons. On peut voir sur la figure 11, que 19 élèves sur 22 ont réussi cette étape et que deux élèves sur 22 ont réussi en demandant de l'aide. Lors de cette étape, les élèves disposaient d'une boîte d'œufs comportant une ou deux ou trois alvéoles. Ils devaient aller chercher en une seule fois, sur une table voisine, autant de marrons qu'ils avaient d'alvéoles dans la boîte d'œufs, de façon à ce qu'il y ait un marron dans chaque alvéole. Cependant la collection de référence n'était plus visible. Les deux élèves qui ont réussi avec aide ont fait plusieurs voyages afin de ramener le bon nombre de marrons. Pour cette étape, seulement 1 élève sur 22, n'a pas réussi, car il mettait plusieurs marrons dans une seule alvéole.

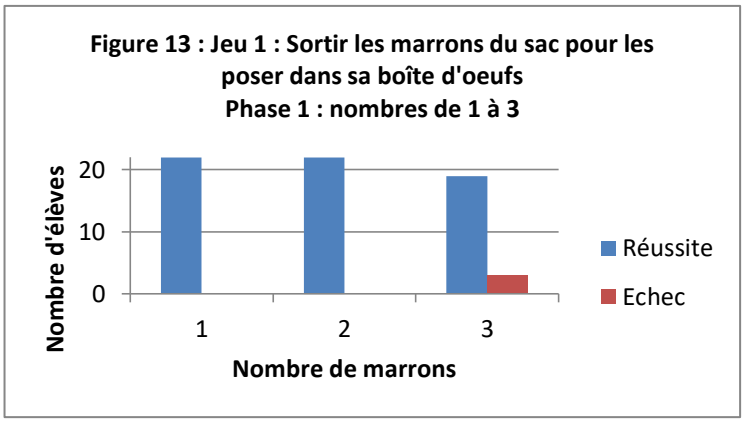


Pour la phase 2, représentée par la figure 12, les élèves travaillaient avec les quantités 4 et 5. Il y a 15 élèves sur 22 qui ont réussi cette étape dont un élève qui a réussi avec de l'aide, c'est-à-dire qu'il a fait plusieurs voyages entre la table éloignée où était disposés les marrons et la table où était présente sa boîte d'œufs. En revanche, 7 enfants sur 22 n'ont pas réussi cette étape. Soit car ils ne se souvenaient pas de la quantité de marrons de départ, soit car ils mettaient plusieurs marrons dans une seule alvéole ou encore ils ramenaient plus de marrons que la quantité demandée.

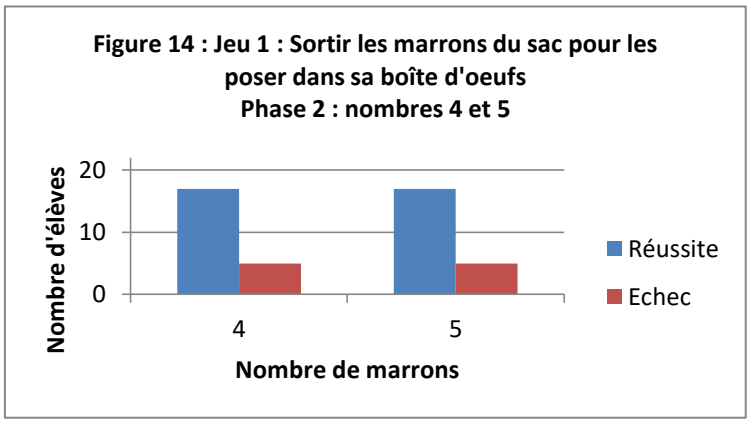
4.2 Sortir les marrons du sac, lorsque la boite d'œuf est visible (jeu 1)

Lors de la seconde et troisième étape du jeu, la boîte d'œufs comprenant les marrons était vidée dans un sac opaque. Ensuite, l'élève devait prendre un marron, puis prévoir s'il restait ou non des marrons dans le sac et tester. Pour ce jeu, 19 élèves sur 22 ont réussi à anticiper s'il restait ou non un marron dans le sac. Si sa réponse était « oui », il le fait. S'il peut retirer un marron du sac, son action est validée et il peut recommencer. En revanche, s'il n'a pas pu retirer de marrons, il a perdu. Si sa réponse était « non », il procède à une vérification de son sac. Si le sac est vide, dans ce cas l'élève a gagné, mais si le sac contient encore des marrons, dans ce cas l'élève a perdu. Cette étape était reproduite jusqu'à épuisement des marrons dans le sac ou échec de l'enfant. Ces étapes pouvaient être réalisées de trois manières différentes.

Lors de la phase 1 (nombres de 1 à 3), pour le premier jeu, le cardinal de la collection variait de 1 à 3. L'élève disposait d'une boîte d'œufs visible, avec un nombre d'alvéoles variant de 1 à 3. La réussite d'un élève consistait à savoir anticiper s'il restait un marron ou non dans le sac, puis tirer tous les marrons un par un pour les mettre dans la boite d'œufs, et enfin savoir quand il ne pouvait plus le faire car le sac était vide.



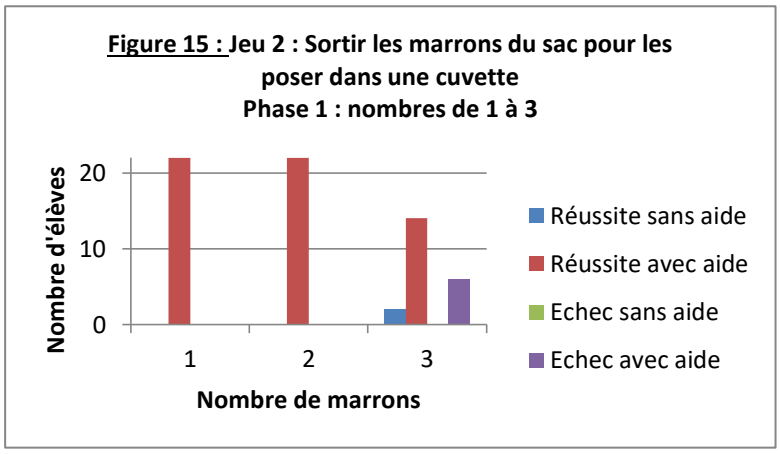
Comme le montre la figure 13, il y a 22 élèves sur 22 qui ont réussi cette tâche avec 1 puis 2 marrons. En revanche avec 3 marrons, 3 élèves sur 22 n'ont pas réussi à anticiper. La plupart des élèves observaient les alvéoles vides de leur boite d'œufs, pour savoir s'il restait ou non des marrons dans le sac. S'il restait des alvéoles vides ils concluaient qu'il y avait encore des marrons dans le sac. Certains enfants dénombraient chacun des marrons présents dans la boîte d'œufs jusqu'à obtenir la quantité de départ. Les trois élèves n'ayant pas réussi répondaient toujours « oui », à la question « Reste-t-il des marrons dans le sac ? ». Leur réponse était correcte seulement jusqu'à que le sac soit vide.



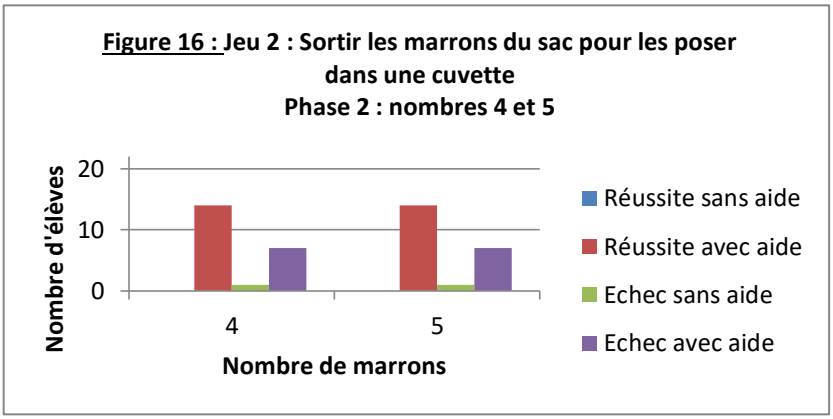
La figure 14, représente le même jeu mais en phase 2, c'est-à-dire avec 4 et 5 marrons. Il y a 17 élèves sur 22 qui ont réussi à anticiper la présence ou non de marrons dans le sac, tirer tous les marrons un par un pour les mettre dans la boite d'œufs et savoir quand il ne pouvait plus le faire car le sac était vide. 5 élèves sur 22 n'ont donc pas réussi. Pour réaliser cette tâche ces élèves dénombraient les marrons qu'ils venaient de déposer dans leur boite d'œufs, jusqu'à retrouver la quantité de départ. En revanche, les quantités 4 et 5 n'étaient pas encore acquises pour ces élèves et ils ont fait des erreurs lors du dénombrement.

4.3 Sortir les marrons du sac et les mettre dans une cuvette (jeu 2)

Lors du jeu 2, avec n variant de 1 à 3, l'élève a joué au même jeu que précédemment, cependant sans avoir une boite alvéolée, mais il avait une cuvette où la quantité de marrons était dispersée. Ce qui l'obligeait à tenir compte des marrons dans le sac. Lors de ce jeu l'élève avait le droit de choisir une aide pour se remémorer la quantité de départ. La réussite d'un élève consistait à savoir anticiper s'il restait un marron ou non dans le sac, puis tirer tous les marrons un par un pour les mettre dans la cuvette, et enfin savoir quand il ne pouvait plus le faire car le sac était vide.



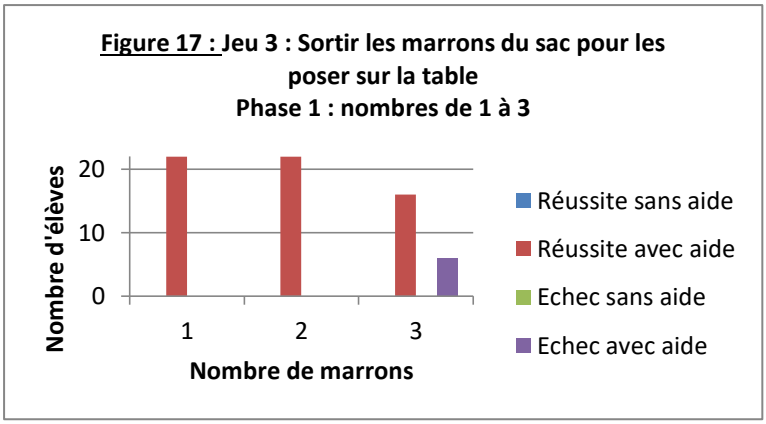
Comme le montre la figure 15, avec 1 ou 2 marrons, tous les élèves ont réussi cette tâche, en ayant choisi de prendre une aide. Lorsque les élèves ont réalisé ce même jeu mais avec 3 marrons, 2 élèves sur 22 ont réussi sans aide et 14 élèves sur 22 ont réussi avec une aide. En revanche, 6 élèves disposant d'une aide ont échoué la tâche.

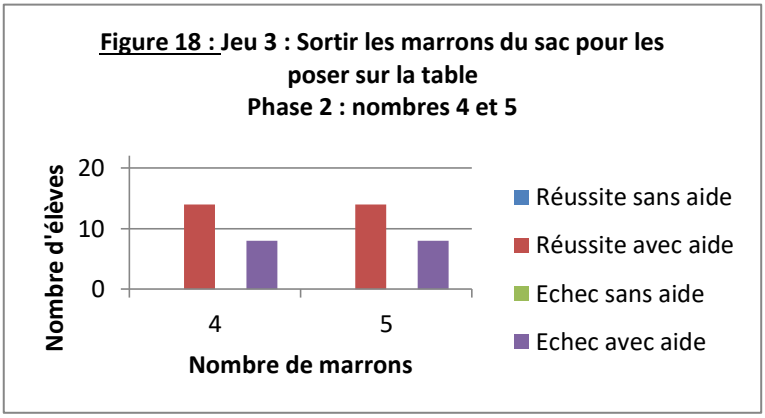


Pour le même jeu, mais en phase 2, avec 4 et 5 marrons, d'après la figure 16, 14 élèves sur 22 ont réussi à anticiper s'il restait un marron ou non dans le sac, puis tirer tous les marrons un par un pour les mettre dans la cuvette, et enfin savoir quand il ne pouvait plus le faire car le sac était vide. 8 élèves sur 22 n'ont pas réussi correctement cette tâche, parmi ces élèves seulement un avait choisi de ne pas prendre d'aide.

4.4 Sortir les marrons du sac et les poser sur la table

Lors du troisième et dernier jeu, représenté par les figures 17 et 18, l'élève n'avait pas de boite d'œufs, ni de cuvette. Il posait ses marrons devant lui sur la table et pouvait obtenir s'il le souhaitait une aide. Les résultats obtenus sont semblable à ceux du jeu 2, car d'un point de vue didactique il n'y a pas de différence, entre une boite non alvéolée et poser la quantité sur une table, étant donné que la quantité est dispersée dans les deux cas. La réussite d'un élève consistait à savoir anticiper s'il restait un marron ou non dans le sac, puis tirer tous les marrons un par un puis les poser sur la table, et enfin savoir quand il ne pouvait plus le faire car le sac était vide.





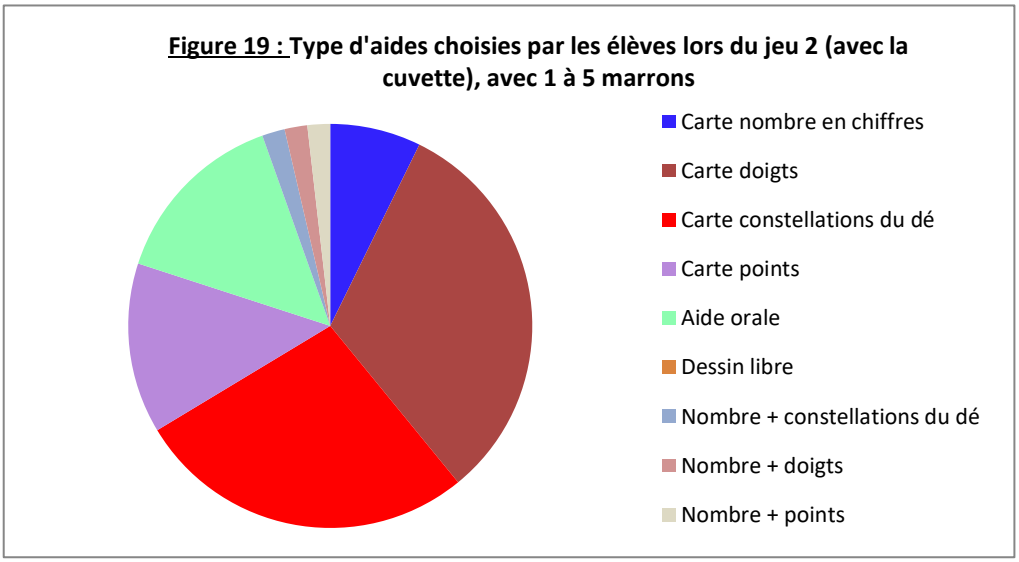
D'après la figure 17, tous les élèves ont réussi avec 1 et 2 marrons. Avec 3 marrons, comme le jeu précédent 16 élèves sur 22 ont réussi à savoir anticiper s'il restait un marron ou non dans le sac, puis tirer tous les marrons un par un puis les poser sur la table, et enfin savoir quand il ne pouvait plus le faire car le sac était vide.

Pour la phase 2, représentée par la figure 18, 14 élèves ont réussi cette tâche et 8 élèves sur 22 n'ont pas réussi. Les résultats sont donc semblables au jeu précédent, la seule différence est que tous les élèves ont choisi de prendre une aide.

4.5 Type d'aides choisies par les élèves, lors des jeux 2 et 3

Lors du jeu 2 avec la cuvette et du jeu 3 lorsque les élèves posaient les marrons sur la table. Ils pouvaient s'ils le désiraient choisir une aide pour se remémorer la quantité de marrons de départ, avant que l'enseignante mette les marrons dans le sac. Différents types d'aides étaient proposées aux élèves.

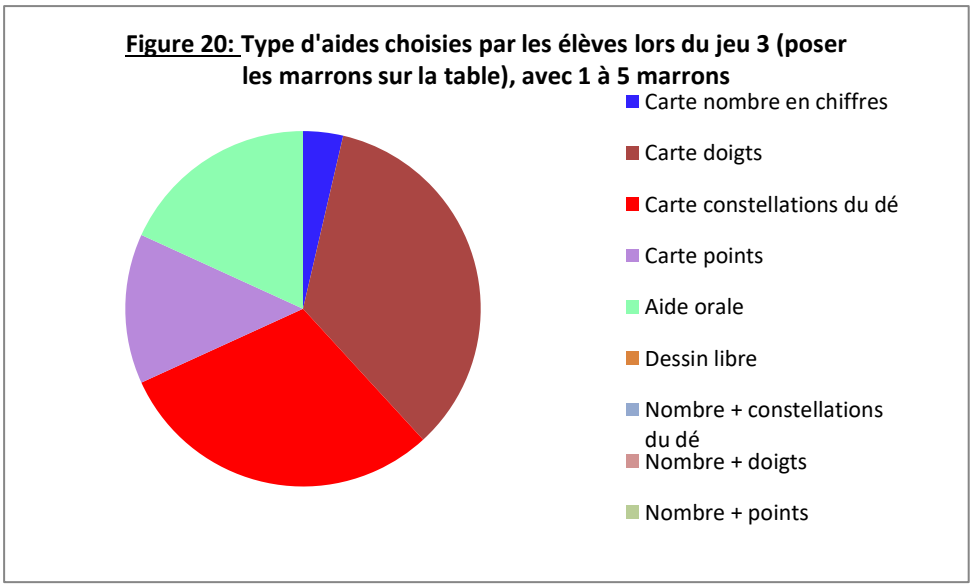
Chaque élève jouait 5 parties pour un jeu, au cours des deux phases. La classe comprend 22 élèves, donc 110 parties ont été jouées au cours d'un jeu. Il est donc intéressant de voir les aides choisies au cours du jeu 2 et du jeu 3 par les élèves.



Lors du jeu 2, comme le montre la figure 19, les aides les plus utilisées sont la carte doigts, qui correspond à une carte comprenant la quantité représentée avec les doigts d'une main, cette carte a été choisie 35 parties sur 110 parties jouées. La carte avec les constellations du dé, où la quantité est représentée avec des points disposés comme les constellations d'un dé a été prise par les élèves, 30 parties sur 110 parties jouées.

L'aide orale où l'élève pouvait demander à l'enseignante la quantité de manière orale, a été moins choisie par les élèves (16 parties sur 110), tout comme la carte points (15 parties sur 110). Cette carte représentait la quantité avec des points disposés de façon non conventionnelle. La carte nombre en chiffres n'a pas été beaucoup choisie par les élèves. Sur cette carte, la quantité était inscrite de manière chiffrée (8 parties sur 110).

Des cartes recto-verso étaient aussi proposées, elles permettaient aux élèves d'avoir deux aides en une. Elles ont été très peu utilisées par les élèves. Chacune de ces cartes ont été choisies seulement pour deux parties sur 110 parties jouées. Enfin, l'aide dessin libre consistait à ce que l'élève dessine lui-même sa quantité de marrons sur une feuille blanche, aucun élève n'a choisi ce type d'aide.



Lors du jeu 3, où les élèves devaient cette fois ci déposer les marrons devant eux sur la table, au total 110 parties ont été jouées lors des deux phases par les 22 élèves. D'après la figure 20, les cartes les plus utilisées sont toujours la carte avec les doigts qui a été choisie 35 parties sur 110 et celle avec les constellations du dé qui a été choisie 33 parties sur 110 parties jouées. La carte avec les points a été choisie le même nombre de fois que pour le jeu 2. L'aide orale a été plus choisie que lors du jeu précédent : 20 parties sur 110. En revanche la carte avec le nombre écrit en chiffre a été moins prise 4 parties sur 110. Le dessin libre n'a toujours pas été utilisé par les élèves. Et les cartes recto-verso n'ont pas été utilisées lors du jeu 3.

5. DISCUSSION

5.1. Re-contextualisation

Tout au long de cette étude, je souhaitais montrer dans quelles mesures contraindre la manipulation dans la démarche expérimentale en mathématiques, amène l'élève à tenter d'anticiper le résultat de son action en prenant des informations numériques sur la situation et donc de donner du sens au nombre.

J'avais émis plusieurs hypothèses, une première selon laquelle la manipulation en mathématiques amènerait un enfant à anticiper une action ou un résultat. La seconde hypothèse supposait qu'il serait nécessaire de maitriser la quantité pour pouvoir réaliser une anticipation. La dernière hypothèse consistait à se demander si des situations de manipulation qui conduisent les élèves à devoir anticiper avant de manipuler, les amèneraient à dénombrer par comptage ou prendre en compte la quantité d'une collection.

La situation élaborée pour cette expérimentation a donc comme objectif, après une phase de manipulation des objets par les élèves, de faire exister une phase d'anticipation afin de voir si cela les amenait à utiliser le nombre comme moyen d'anticipation et de contrôle d'une quantité.

5.2. Analyse des résultats

- Evolution des anticipations entre le jeu 1 (boite d'œufs), jeu 2 (cuvette) et jeu 3 (sur la table)

Pour rappel, la réussite d'un élève consistait à savoir anticiper s'il restait un marron ou non dans le sac, puis tirer tous les marrons un par un, afin de les poser dans la boite d'œufs (jeu 1), dans la cuvette (jeu 2), sur la table (jeu 3). Et enfin, savoir quand il ne pouvait plus retirer de marron car le sac était vide.

Tout d'abord nous pouvons remarquer que tous les élèves ont réussi lorsqu'ils avaient 1 ou 2 marrons, lors des trois différents jeux. Je pense que cela est dû au fait que les élèves maitrisent très bien les quantités 1 et 2. Le fait de changer de récipient ou de disposer les marrons sur la table ne les a donc pas perturbés.

On peut remarquer que les élèves ont mieux réussi le jeu 1 avec la boite d'œufs que les jeux 2 et 3. Lors de ce premier jeu, l'élève tirait un marron du sac puis le mettait dans la boite d'œufs comprenant une à cinq alvéoles. La stratégie utilisée par la plupart des élèves était de regarder les alvéoles vides de la boite d'œufs pour savoir s'il restait ou non des marrons dans le sac. Si la boite d'œufs comprenait des alvéoles vides dans ce cas l'élève affirmait qu'il

restait des marrons dans le sac. En revanche, s'il n'y avait plus d'alvéoles vides, dans ce cas l'enfant répondait que le sac était vide. Les élèves ne contrôlent donc pas les marrons dans le sac mais les alvéoles de la boite d'œufs. Les enfants utilisent donc une stratégie visuelle, en observant la boite alvéolée. Ils ne procèdent pas à un dénombrement des marrons.

Lors du jeu 2 avec la cuvette et du jeu 3 où les marrons sont posés par l'enfant sur la table, on ne remarque pas de différence dans les résultats. C'est à dire qu'il y a autant d'élèves qui ont réussi cette tâche lors du jeu 2 que du jeu 3. Cette conclusion est normale étant donné que d'un point de vue didactique il n'y a pas de différence entre poser les marrons dans une cuvette ou sur une table, étant donné que dans les deux cas la quantité de marrons est dispersée. Cependant lors de l'élaboration de l'expérimentation de ce mémoire, nous pensions observer une différence, étant donné que dans un cas l'élève a un récipient (la cuvette) et dans l'autre cas, l'élève n'a rien. La seule différence observée était d'un point de vue pratique, les enfants pouvaient disposer les marrons sur la table comme ils le souhaitaient sans être gênés par les rebords de la cuvette. Plus précisément, certains enfants disposaient les marrons comme sont placés les points sur les constellations d'un dé. On peut remarquer que moins d'élèves ont réussi la tâche, par rapport au jeu 1. Cela est dû au fait qu'ils ne disposaient plus de la boite d'œufs. Donc ils ne pouvaient plus seulement regarder les alvéoles vides et devaient utiliser une autre stratégie.

- <u>Evolution des anticipations entre la phase 1 (1,2,3 marrons) et la phase 2 (4 et 5 marrons)</u>

Il est intéressant de voir les différences de résultats entre la phase 1 réalisée en mars avec 1, 2 et 3 marrons, et la phase 2 réalisée en avril avec 4 et 5 marrons.

Tout d'abord avec le premier jeu (la boite d'œufs), ils devaient prévoir s'il restait un marron ou non dans le sac, tirer tous les marrons un par un, afin de les poser dans la boite d'œufs, et dire à l'enseignante quand il ne pouvait plus retirer de marron car le sac était vide. Nous pouvons remarquer qu'en phase 1, avec les quantités 1 et 2, tous les élèves réussissent. Avec 3 marrons, 19 élèves réussissent. On remarque que 5 élèves ne réussissent pas avec 4 et 5 marrons. Parmi ceux-ci, 3 élèves avaient déjà échoué avec 3 marrons, ce sont des enfants qui, pour le moment réussissent à dénombrer seulement jusqu'à 2. Ils se sont donc retrouvés en difficulté avec les quantités 3,4 et 5. Quant aux deux autres élèves n'ayant pas réussi, ils maitrisent les quantités jusqu'à 3. Pour ces élèves lorsque je leur demandais : « Reste-il un marron dans le sac ? ». Leur réponse était toujours « oui », même lorsque le sac était vide. Il considérait que lorsqu'ils avaient 3 ou 4 ou 5 marrons, ils en avaient « beaucoup » et donc

espéraient toujours sortir un marron du sac, pour augmenter la quantité qu'ils avaient déjà sorti du sac. De plus, en phase 2, un de ces élèves en situation de non réussite, avait décidé de ne pas prendre d'aide, ce qui l'a pénalisé pour réaliser la tâche.

Ensuite, avec le second jeu (la cuvette) et le troisième jeu (marrons posés sur la table). Les élèves devaient prévoir s'il restait un marron ou non dans le sac, tirer tous les marrons un par un, afin de les poser dans la cuvette ou sur la table, et dire à l'enseignante quand ils ne pouvaient plus retirer de marron car le sac était vide. On remarque encore une fois que tous les élèves réussissent avec 1 et 2 marrons. On peut voir que 6 élèves ont échoué la tâche avec 3 marrons et 8 élèves ont échoué avec 4 et 5 marrons. Lors de la phase 2, nous avons donc deux élèves en plus qui n'ont pas réussi. Cela est dû au fait qu'ils ne réussissaient pas à dénombrer ces quantités, et avaient choisi une aide qu'ils n'ont pas su utilisé.

- Utilisation des aides

Les élèves ont choisi de prendre une aide pour presque toutes les parties jouées lors des jeux 2 et 3. Cependant, parfois ils réalisaient la tâche sans prêter attention à celle-ci. Soit car ils réussissaient seuls rapidement, soit car la carte ne leur apportait pas de soutien, par exemple lorsqu'ils ne reconnaissaient pas la quantité présente sur la carte.

On peut remarquer que les cartes aides le plus choisies par les élèves lors des jeux 2 et 3 sont la carte doigts et la carte avec les constellations du dé. Ce sont les représentations les plus fréquemment utilisées en classe par les enfants, lors des jeux de société ou des comptines par exemple. Ce sont donc les cartes qui ont le plus attiré les élèves. De plus, la plupart des élèves savent reconnaître rapidement la quantité représentée, sans devoir réaliser un comptage des points ou des doigts. Certains élèves réalisaient une correspondance terme à terme en posant les marrons tirés du sac sur la carte, puis ils observaient les symboles non recouverts. Ces cartes ont apporté un réel appui aux élèves et ont été très utiles pour se souvenir de la quantité de départ.

Les élèves qui ont choisi la carte avec les points disposés de façon non conventionnelle, posaient les marrons pris dans le sac sur les points de la carte. Puis lorsque tous les points étaient recouverts d'un marron, ils affirmaient que le sac était vide.

L'aide orale a été davantage choisie lors du jeu 3 (table) que lors du jeu 2 (cuvette). Cela est dû au fait que les élèves étaient plus à l'aise avec le jeu et la consigne. De plus certains élèves désiraient choisir une aide différente du jeu précédent.

La carte avec le nombre en écriture chiffrée a été très peu utilisée. Les enfants qui ont choisi cette carte ne l'ont pas vraiment utilisée. Ils ont pris l'aide seulement pour obtenir une carte, et non pour s'en servir comme un outil d'aide à la mémorisation de la quantité de marrons. De plus, certains élèves ne savaient pas reconnaitre l'écriture chiffrée présente sur la carte.

Pour les cartes recto-verso, la quantité représentée par l'écriture chiffrée n'a pas été vraiment utilisée, pour les mêmes raisons que précédemment. En revanche, la face comprenant les constellations du dé ou les doigts ou les points était utilisés par les élèves.

Il était aussi proposé une aide nommée « dessin libre », celle-ci consistait à ce que les élèves puissent dessiner eux-mêmes la quantité de marrons de départ. Cette aide n'a pas été utilisée par les élèves. Je pense que lors de la présentation des aides, le fait de voir les nombreuses propositions de cartes, a attiré davantage le regard des enfants. De plus nous avions déjà travaillé avec certaines de ces cartes au cours de l'année lors de jeux, ce qui peut aussi rassurer l'enfant et l'entrainer à choisir quelque chose qu'il connait déjà.

- Retour sur les hypothèses

Hypothèse 1 : la manipulation en mathématiques amènerait un enfant à anticiper une action ou un résultat.

Pour valider cette hypothèse, il faut que la manipulation en mathématiques soit contrainte. C'est-à-dire que les élèves ne doivent pas seulement, manipuler en touchant des objets ou en jouant sans consigne particulière. Nous avons pu découvrir dans l'état de l'art, que Berdonneau (2006), affirmait que l'activité de manipulation devait répondre à plusieurs caractéristiques. Il faut donc que l'activité de manipulation soit contrainte par l'enseignante, avec une consigne et un objectif précis. De façon à ce que les élèves sachent comment et pourquoi ils réalisent la tâche. La manipulation sera dans ce cas-là, utile pour l'élève et lui permettra réellement d'anticiper une action ou un résultat.

Cette hypothèse est donc validée seulement si la manipulation en mathématiques est contrainte.

Hypothèse 2 : il serait nécessaire de maitriser la quantité pour pouvoir réaliser une anticipation.

Les données recueillies lors des jeux réalisés avec les élèves, ainsi que les observations faites au cours de ce travail, sont significatives. Elles permettent de constater que si les élèves ne maitrisent pas une quantité, ils ne réussiront donc pas à anticiper la quantité présente dans le sac. En d'autres termes, si un élève ne réussit pas à dénombrer 4 objets, il se retrouvera en

difficulté lorsqu'il devra dénombrer les 4 marrons qu'il a sorti du sac. Il sera donc impossible pour l'élève de savoir s'il a sorti tous les marrons du sac ou non. Sauf si l'élève utilise une stratégie visuelle, c'est-à-dire qu'il regarde les alvéoles de sa boîte d'œufs ou s'il place les marrons sur les points de sa carte d'aide et observe ceux non recouverts par exemple.
Cette hypothèse est donc validée partiellement, en fonction de la stratégie utilisée par l'élève, pour résoudre la tâche.

Hypothèse 3 : des situations de manipulation qui conduisent les élèves à devoir anticiper avant de manipuler, les amèneraient à dénombrer par comptage ou prendre en compte la quantité d'une collection.

L'analyse des résultats et les observations réalisées en classe sont révélatrices. Si l'élève n'utilise pas une stratégie visuelle, comme regarder les alvéoles vides de la boite d'œufs, ou ne fait pas de la correspondance terme à terme. Alors, ils doivent dénombrer par comptage ou prendre en compte la quantité de la collection de marrons, pour pouvoir réaliser la tâche.
Donc l'hypothèse est validée partiellement, puisque les élèves sont amenés à dénombrer par comptage ou prendre en compte la quantité d'une collection pour anticiper seulement s'ils n'utilisent pas une stratégie d'ordre visuelle.

5.3 Limites, perspectives et apports professionnels

- Les limites à la recherche

Lors de cette étude, j'ai pu m'apercevoir de certaines limites. Pour commencer, l'étude a été proposée à un nombre de participants assez restreints : vingt-deux élèves. Cela me semble donc limité pour valider l'ensemble des résultats. Il serait intéressant de mettre en place cette étude avec plusieurs classes de PS. Et pourquoi pas avec d'autres classes de cycle 1, comme des MS ou des GS afin de comparer les résultats.

Lors des jeux 2 et 3, nous avons proposé de nombreuses aides, cependant après cette étude, nous nous sommes rendues compte que certaines cartes pouvaient biaisées l'étude. Comme par exemple, les cartes où les élèves peuvent réaliser une correspondance terme à terme et donc ne procède pas à un dénombrement par comptage. D'autres aides ont été inutiles, pour certains enfants comme la quantité en écriture chiffrée, qui n'était pas comprise par certains élèves. Il faudrait alors revoir quelles aides nous pourrions proposer, qui seraient vraiment utiles aux élèves et qui ne biaiseraient pas les résultats de l'étude.

- Perspectives d'amélioration et de progression

Afin d'améliorer la situation d'étude, certaines améliorations pourraient être apportées. Lors de la rédaction de cette expérimentation, il nous a semblé intéressant de réaliser un jeu où la quantité était disposée dans une cuvette et un jeu où la quantité était disposée sur la table. Suite aux résultats et aux observations, la différence entre ces deux jeux n'est pas significative. Pour l'avenir, il ne serait pas forcément nécessaire de réaliser ces deux jeux.

Cette étude a été proposée aux élèves à un moment précis de l'année scolaire, en mars et en avril. Or les données recueillies ne nous permettent pas de dire si les résultats auraient été différents ou non à une autre période de l'année scolaire. Ainsi, il serait intéressant de réaliser ce travail à des périodes différentes, dans l'objectif de comparer les résultats et l'évolution au cours de l'année scolaire. L'idéal serait de réaliser cette expérimentation en début d'année scolaire (novembre), en milieu d'année scolaire (février) et en fin d'année scolaire (juin).

De plus, il serait intéressant de réaliser cette expérimentation en utilisant toujours les mêmes quantités de marrons, entre les différentes phases. De façon à comparer les mêmes données. Pour des élèves de PS, il serait intéressant de conserver des petites quantités, comme 1 ou 2 ou 3 marrons, afin que les élèves ne soient gênés par des quantités trop grandes et encore non acquises par certains élèves de PS.

- Retour sur ma pratique professionnelle

Ce travail a eu un impact sur ma pratique professionnelle. Les recherches antérieures ainsi que la réalisation de ce travail, m'ont éclairé sur la définition du mot « manipulation », ainsi que sur son importance en classe. J'ai pu apprendre que la manipulation n'était pas seulement une activité où les enfants touchent simplement des objets, mais que des objectifs ainsi que des consignes précises devaient être mis en place, afin que la manipulation soit effective. De plus, j'ai pu constater que le matériel jouait un rôle très important. Le matériel peut induire en erreur les élèves ou encore biaisé des résultats comme certaines cartes aides. Il est donc nécessaire que l'enseignant prévoit son matériel en faisant attention aux répercussions qu'il peut avoir sur la situation. Enfin, j'avais une brève idée de l'enseignement des « mathématiques » en maternelle, j'ai donc pu enrichir mes connaissances. J'ai compris qu'il n'était pas forcément nécessaire de savoir compter pour réaliser une situation en mathématiques, en PS. Les élèves ne doivent pas uniquement connaître la comptine numérique ou encore le nom des nombres mais prendre conscience de ce qu'il y a derrière les nombres.

CONCLUSION

La manipulation est un outil pédagogique intéressant, autant pour les élèves que pour les enseignants. Elle permet d'aider l'élève à anticiper le résultat de son action. En revanche celle-ci doit être contrainte, avec un accompagnement de l'adulte si l'on veut qu'elle se montre efficace et qu'elle pousse l'élève à anticiper le résultat de son action.

De plus, en fonction du matériel, ainsi que des aides apportées par l'enseignant, les élèves ne sont pas dans l'obligation de tenir compte de la quantité pour réaliser une anticipation. Si, les élèves utilisent une stratégie visuelle ou font de la correspondance terme à terme, ils ne sont pas obligés de prendre en compte le nombre et d'utiliser ce qu'il signifie pour contrôler la quantité de marrons. En revanche, sans ces stratégies, l'élève doit réaliser un dénombrement par comptage et donc utiliser la signification du nombre pour contrôler la quantité de marrons.

BIBLIOGRAPHIE

Baruk, S. (2003). *Comptes pour petits et grands volume 1*. Paris : Magnard.

Berdonneau, C. (2006, Juin 7). *De l'importance des gestes pour l'apprentissage des concepts mathématiques*. Récupéré sur Académie de Rouen http://ecoles.ac-rouen.fr/circ_dieppe_ouest/outils/maternelle/doc_maternelle/berdonneau02.pdf

Brissiaud, R. (2007). *Premiers pas vers les maths*. Retz.

Dehaene, S. (2010). *La bosse des maths.* Odile Jacob.

Dias, T. (2012). *Manipuler et expérimenter en mathématiques*. Paris : Magnard.

Charnay, R. (2005). *Comment enseigner les nombres entiers et la numération décimale ? de la PS au CM2*. Paris : Hatier.

Jean Piaget, A. S. (1941). *La genèse du nombre chez l'enfant*. Delachaux et Nieslté.

Margolinas, C. (2015). *Des mathématiques à l'école maternelle*. Récupéré sur Archives ouvertes HAL https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01140474/document

Margolinas, C., & Wozniak, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle*. De Boeck.

Valentin, D. (2000-2001). *Dix dans un dortoir*. Grand N, n°67, p 7 à 14.

Annexes

Annexe 1 : grille d'observation des stratégies des élèves

Grille d'observation des stratégies des élèves – Prénom :

	1- Réponse au hasard
	2- Estimation visuelle
	3- Perception approximative des marrons restants dans le sac
	4- Comptage des alvéoles vides de la boîte d'œufs
	5- Dénombrement des marrons présents dans la boîte et déduction des marrons restants
	6- Correspondance terme à terme (entre les points ou doigts des cartes et les marrons sortis du sac)
	7- Disposition des marrons sur la table de la même façon que les constellations du dé
	8- Comptine numérique
	9- Surcomptage
	10- Collection témoin de doigts et description verbal par décomposition
	11- Dessin
	12- Procédé sonore
	13- Cardinal dit à haute voix

Annexe 2 : grille d'observation des maitrises des jeux

Grille d'observation des maitrises des jeux

Objectifs	L'élève a réussi seul	L'élève n'a pas réussi seul	L'élève a réussi avec une aide	L'élève n'a pas réussi avec une aide	Type d'aide	Observations
Création d'une collection de marrons de même cardinal qu'une collection donnée → **1 marron**						
Création d'une collection de marrons de même cardinal qu'une collection donnée → **2 marrons**						
Création d'une collection de marrons de même cardinal qu'une collection donnée → **3 marrons**						
Création d'une collection de marrons de même cardinal qu'une collection donnée → **4 marrons**						
Création d'une collection de marrons de même cardinal qu'une collection donnée → **5 marrons**						
Remplir la boîte d'œufs en anticipant s'il peut prendre encore des marrons dans le sac **(jeu 1)** → **1 marron**						
Remplir la boîte d'œufs en anticipant s'il peut prendre encore des marrons dans le sac **(jeu 1)** → **2 marrons**						
Remplir la boîte d'œufs en anticipant s'il peut prendre encore des marrons dans le sac **(jeu 1)** → **3 marrons**						
Remplir la boîte d'œufs en anticipant s'il peut prendre encore des marrons dans le sac **(jeu 1)** → **4 marrons**						
Remplir la boîte d'œufs en anticipant s'il peut prendre encore des marrons dans le sac **(jeu 1)** → **5 marrons**						

Annexe 3 : suite de la grille d'observation des maitrises des jeux

Même situation mais sans la boîte d'œufs et avec la cuvette **(jeu 2)** **➔ 1 marron**										
Même situation mais sans la boîte d'œufs et avec la cuvette **(jeu 2)** **➔ 2 marrons**										
Même situation mais sans la boîte d'œufs et avec la cuvette **(jeu 2)** **➔ 3 marrons**										
Même situation mais sans la boîte d'œufs et avec la cuvette **(jeu 2)** **➔ 4 marrons**										
Même situation mais sans la boîte d'œufs et avec la cuvette **(jeu 2)** **➔ 5 marrons**										
Même situation mais les marrons sont posés sur la table **(jeu 3)** **➔ 1 marron**										
Même situation mais les marrons sont posés sur la table **(jeu 3)** **➔ 2 marrons**										
Même situation mais les marrons sont posés sur la table **(jeu 3)** **➔ 3 marrons**										
Même situation mais les marrons sont posés sur la table **(jeu 3)** **➔ 4 marrons**										
Même situation mais les marrons sont posés sur la table **(jeu 3)** **➔ 5 marrons**										

École supérieure du professorat et de l'éducation
Académie de Grenoble

UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Année universitaire 2017-2018

Master 2 *Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation*
Mention Premier degré

Titre du mémoire : La manipulation au service de l'anticipation pour donner du sens au nombre au cycle 1.
Auteur : REY Héloïse

Résumé :

La manipulation est au cœur des apprentissages, elle est importante autant pour les élèves que pour le professeur des écoles. D'une part, elle permet aux élèves d'être acteurs de leurs apprentissages et d'autre part, elle permet à l'enseignant de situer les élèves ainsi que leurs progrès. Cependant, la manipulation est effective seulement si elle est contrainte à un moment donné. En effet, l'élève doit être face à une situation problème pour pouvoir mettre en place des stratégies afin d'anticiper le résultat d'une action. L'étude conduite vise à montrer comment une manipulation limitée permet à l'élève de maternelle de donner du sens au nombre. Elle mettra en avant les procédures utilisées dans l'acquisition de la notion de quantité. Il en ressort que la manipulation chez les élèves de cycle 1 permet de donner plus de sens au nombre et donc d'anticiper le résultat d'une action. Cependant, dans une phase de manipulation contrainte, l'anticipation est possible principalement si les élèves mettent en place des stratégies grâce à différentes aides.

Mots clés : enseignement des mathématiques, manipulation, anticipation, maternelle, cycle 1, PS, dénombrement, procédure

Summary :

Handling is at the heart of learning, it is as important for pupils as for teachers. On one side, it allows to pupils to be actor of their learning, and on another side, it enables the teacher to situate the pupils and their progress. However, handling is effective only if it is constrained at some stage. In fact, the pupil must be facing to a problem situation in order to set up some strategies to anticipate the result of an action. The conducted study aims to show how a limited handling allows the pupil to make sense to a number. It will spotlight procedures used in the acquisition of the quantity notion. It is conclude that handling from pupils of the first cycle allows to give a sense to a number, and so to anticipate the result of an action. Nevertheless, in a constrained handling phase, anticipation is possible mainly if pupils establish strategies thanks to different aids.

Key words : teaching mathematics, handling, anticipation, nursery school, cycle 1, PS, count, procedure