



HAL
open science

Les apports de la manipulation des réglettes Cuisenaire en mathématiques

Aline Vergoni

► **To cite this version:**

Aline Vergoni. Les apports de la manipulation des réglettes Cuisenaire en mathématiques. Education. 2018. dumas-01939040

HAL Id: dumas-01939040

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01939040>

Submitted on 29 Nov 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Les apports de la manipulation des réglettes

Cuisenaire en mathématiques

Mémoire présenté dans le cadre de la formation initiale 2^{ème} année

2017-2018 :

MEEF mention 1^{er} degré

Soutenu publiquement par :

Aline Vergoni

En présence d'un jury composé de :

Tuteur ESPE : M. Olivier Le Dantec

Tuteur Education Nationale : Mme Valérie Chrétien-Staraj

Déclaration anti-plagiat

Nom VERGONI Prénom Aline

Je déclare que ce mémoire est le fruit d'un travail personnel et que personne d'autre que moi ne peut s'en approprier tout ou partie.

J'ai connaissance du fait que prétendre être l'auteur de l'écrit de quelqu'un d'autre enfreint les règles liées à la propriété intellectuelle.

Je sais que les propos empruntés à d'autres auteurs doivent figurer entre guillemets et que je m'appuie dans ce mémoire sur des écrits systématiquement référencés selon une bibliographie précise.

Date : 4/05/2018

Signature :



Table des matières

INTRODUCTION.....	4
I- Partie théorique : Revue de la littérature.....	6
1) Le processus d'abstraction et la difficulté du passage à l'abstraction en mathématiques.....	6
2) La nécessaire manipulation pour accéder à l'abstraction	10
3) Les réglettes Cuisenaire, un outil aux nombreux aspects positifs	14
II- Partie empirique : utilisation des réglettes Cuisenaire dans ma classe de CE2 : méthodologie et technique de recherche	17
1) Expérimentation, présentation de la méthode.....	17
2) Présentation des résultats	24
III- Partie discussion : interprétation et analyse	27
1) Comparaison des résultats théoriques et empiriques	27
2) Analyse des résultats empiriques à la lumière des résultats théoriques	28
CONCLUSION	30
BIBLIOGRAPHIE	31
ANNEXES	32

INTRODUCTION

Les résultats alarmants de l'étude TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) en mathématiques ne peuvent laisser indifférent. En effet, cette étude internationale menée sur des élèves de CM1 en 2015 a révélé un niveau des élèves français en mathématiques (et en sciences) significativement inférieur à la moyenne mondiale (488 points pour 500 points en moyenne)¹. A partir de ce constat, il est légitime de se demander de quelle manière il serait envisageable d'agir pour contrecarrer cette tendance. Dans l'étude que j'ai menée, je m'interroge sur les apports des réglettes Cuisenaire, l'objectif étant de chercher à savoir si leur manipulation aide à la construction des images mentales en mathématiques. Pour ce faire, je me suis appuyée sur certaines compétences issues du programme de 2015 : calculer avec des nombres entiers ; comprendre le sens des opérations ; comprendre le sens des symboles + - x.² L'étude consiste à comparer les résultats des travaux de mes élèves de CE2 sans et avec la manipulation des réglettes Cuisenaire. Alors que le Larousse détermine l'action de manipuler comme celle de « tenir un objet dans ses mains lors d'une utilisation quelconque » en s'attachant à la fonction qu'ont les mains sur un objet, je considère la manipulation non pas comme le simple fait de toucher, mais comme une action devant aboutir à une réflexion : « une pensée par les mains », comme l'exprime Maria Montessori³.

Les réglettes Cuisenaire portent le nom de leur inventeur, M. Cuisenaire, ancien maître et directeur d'école à Thuin en Belgique, qui a élaboré un matériel pédagogique dont l'objectif était de rendre plus vivant et plus efficace l'enseignement des mathématiques. Elles sont un ensemble de réglettes de bois non graduées allant de 1 à 10 unités. La plus petite est un cube de 1 sur 1, la suivante fait deux fois la longueur de la première, la suivante trois fois, etc. A chaque longueur est associée une couleur de façon à ce que la différenciation puisse se faire sur un autre critère que la taille. Il y a trois familles de couleurs qui comprennent des longueurs qui ont un rapport additif ou multiplicatif entre elles : les rouges : la rouge=2cm, la rose=4cm, la marron=8cm ; les bleues : la vert clair=3cm, la vert foncée=6cm, la bleue=9cm ; les jaunes : la jaune=5cm, la orange=10cm ; et enfin une blanche de 1cm et une noire de 7cm.

¹ Note d'information n°33, Direction de l'Evaluation, de la prospective et de la performance, Novembre 2016

² Bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015, p.77

³ ROBICHAUD Cécile, L'efficacité des réglettes Cuisenaire, 3ème et 4ème années primaires, éditions Delachaux et Niestlé, 1968, p.21

J'ai choisi cet objet d'étude car je me suis demandé si, à l'heure où le monde est toujours plus virtuel, un ancrage sur le concret et le palpable ne serait pas salutaire. Ce matériel me paraissait également pouvoir stimuler la motivation de l'enfant par le jeu et dépasser ainsi un enseignement classique des mathématiques et globalement réputé laborieux. Il m'importait aussi de dépasser l'idée qu'un enfant est bon ou mauvais en mathématiques, ou celle qui consiste à croire que certains enfants ont des prédispositions pour les mathématiques et pas d'autres, dans le but d'aider mes élèves à construire leur savoir de manière ludique en les menant autant que possible vers la réussite. Pour ce faire, il est indispensable de redonner aux nombres un sens car l'on oublie que c'est ce que confère la notion du concept de « compter ». Il n'est d'ailleurs pas anodin que dans de nombreuses langues comme en français, en espagnol, en portugais, en allemand, etc. les mots « compter » et « conter » soient très proches ou similaires et que dans d'autres, comme en russe, l'on utilise le même mot pour signifier « compter » et « penser ». Stella Baruk considère en effet que le langage des nombres fait partie de notre langue et qu'il est donc porteur de sens à lui tout seul : « Pourquoi donc aujourd'hui, ne comprend-on pas que « lire, écrire » les nombres fait partie de la lecture/écriture tout court ? Pourquoi ne peut-on accepter l'idée que la langue des nombres fait *d'abord* partie de la langue tout court, et qu'elle doit avoir *du sens* ? Que si des signes qui sont des chiffres sont opaques, ils « trouent » tout aussi bien un texte que les autres signes d'écriture, ce « texte » fût-il aussi anodin que l'est une adresse sur une enveloppe ? Pourquoi la signification des signes d'une écriture chiffrée reste-t-elle impossible à donner pour tant d'enfants [...]? »⁴

Quels sont les apports des réglettes Cuisenaire en mathématiques ? Les réglettes permettent-elles de faciliter le passage à l'abstraction ?

Afin de répondre à cette problématique, je m'attacherai d'abord à définir ce qu'est le processus d'abstraction et pourquoi il est particulièrement difficile en mathématiques. Je montrerai que la manipulation est une solution dans le passage à l'abstraction et donnerai les raisons qui font que les réglettes Cuisenaire sont un matériel particulièrement adapté pour faciliter l'apprentissage des mathématiques. Dans une deuxième partie, je présenterai la démarche expérimentale mise en place auprès des élèves de ma classe dans le but de les aider

⁴ BARUK Stella, Comptes pour petits et grands, Pour un apprentissage du nombre et de la numération fondé sur la langue et les sens, volume 1, édition Magnard, 2003, p.12

à acquérir certaines compétences attendues à leur niveau dans les programmes officiels. Je mettrai enfin en perspective les résultats de ma démarche afin de déterminer si la manipulation des réglettes Cuisenaire s'avère aussi productive qu'espéré.

I- Partie théorique : Revue de la littérature

1) Le processus d'abstraction et la difficulté du passage à l'abstraction en mathématiques

Avant de déterminer l'impact de la manipulation des réglettes Cuisenaire sur l'apprentissage des mathématiques, il est indispensable de faire un point sur ce qu'est le processus d'abstraction afin de comprendre comment fonctionne l'apprenant pour construire ses apprentissages. Pour ce faire, je vais principalement m'appuyer dans cette partie sur les travaux de Britt-Mari Barth qui propose un modèle pédagogique adapté au fonctionnement du processus d'abstraction de l'apprenant. Je m'attacherai donc ici à décrire les processus en œuvre lors de la construction du savoir ainsi que les dispositions nécessaires à établir afin de privilégier une efficacité optimale des apprentissages.

La construction du savoir est un processus long qui, comme l'explique Britt-Mari Barth, « [...] commence par la perception d'un concept présenté pour être appris et qui se termine par l'acquisition de celui-ci au niveau de l'abstraction et de la généralisation »⁵. L'auteur propose une démarche pédagogique pour aider les élèves à mettre en œuvre ce processus de pensée qu'est la conceptualisation avec trois étapes. Ce modèle pédagogique renforce l'idée qu'enseigner, c'est aider les élèves à leur faire prendre conscience de leurs démarches intellectuelles pour qu'ils puissent ensuite les transférer dans d'autres situations d'apprentissages.

La première étape que décrit Britt-Mari Barth est une phase d'observation et d'exploration lors de laquelle les consignes sont données et la motivation de l'élève et sa disponibilité intellectuelle vont être déterminantes pour la suite. En effet, l'envie et la motivation sont des paramètres importants pour l'élève afin d'entrer dans l'activité et d'offrir un terrain propice à l'apprentissage. Le climat affectif est également un élément déterminant : il est capital de mettre l'élève en confiance, et notamment de le rassurer quant à la place de l'erreur. Celle-ci

⁵ BARTH Britt-Mari, L'apprentissage de l'abstraction, RETZ, 2013, p.51

lui sera justement utile dans la construction de son savoir. Madeleine Goutard met d'ailleurs en évidence la place de l'erreur dans l'apprentissage : « il ne faut pas craindre les erreurs sans lesquelles il n'y a pas d'apprentissage possible. Il faut même les provoquer toutes au début afin que les élèves se construisent au plus vite les critères qui leur permettent de distinguer ce qui est juste de ce qui est faux. Ne plus faire d'erreurs c'est démontrer qu'on a acquis ces critères et que l'apprentissage est, sur ce point, achevé.»⁶ Lors de cette première phase, il est également recommandé de mettre à disposition de l'apprenant autant d'exemples que possible afin qu'il puisse les comparer, les classer, les trier, les confronter aux éléments qu'il a déjà à sa connaissance... en somme, les organiser. C'est d'ailleurs un des rôles principaux de l'enseignant à ce moment. Britt-Mari Barth précise que du fait de l'hétérogénéité des individus et de leur intelligence, ainsi que de la présence de trois principaux modes d'appréhension de l'information, ce va-et-vient entre les différentes représentations et types d'exemples de la notion en jeu permet d'accéder à sa compréhension et à son appropriation. « Bruner nous a alertés sur le fait que chaque individu possède trois systèmes parallèles pour coder l'information : le mode sensori-moteur, le mode visuel et le mode symbolique. [...] En passant d'un mode de représentation à l'autre en spirale, reprenant les données par des modes différents, la pensée évolue vers une plus grande abstraction. Concrètement cela veut dire qu'il faudrait présenter des exemples de façon variée : expérimentations, démonstrations, images, schémas, diagrammes, mots parlés, mots écrits ... sans connaître les différences individuelles, le fait de varier systématiquement le registre permet à chaque élève de s'habituer à appréhender l'information par des modes différents. »⁷

La deuxième phase nécessaire au cheminement de l'apprentissage est, toujours selon les termes de Britt-Mari Barth, celle de la « clarification » et de la « vérification ». Les élèves ont alors compris le nouveau concept en jeu mais il s'agit là de s'assurer d'une compréhension juste, que ce soit de la part de l'enseignant comme de la part de l'élève, et le cas échéant, de rectifier ce qu'il est nécessaire de modifier. C'est par le moyen privilégié à ce moment qu'est l'interaction verbale que va se former un conflit cognitif. Ce concept piagétien considère qu'à un certain stade de l'apprentissage, les représentations mentales qu'un élève aura formées entrent en conflit avec des faits issus de la réalité. L'élève se voit donc dans l'obligation de modifier sa structure de connaissance afin que tous les éléments constitutifs de sa pensée et de

⁶ BARTH Britt-Mari, L'apprentissage de l'abstraction, RETZ, 2013, p.155

⁷ BARTH Britt-Mari, L'apprentissage de l'abstraction, RETZ, 2013, p.

la réalité entrent en adéquation. Ce passage obligé dans le cheminement de l'apprentissage permet d'atteindre un niveau de connaissance supérieur grâce à un affinage de la compréhension du concept en jeu par corrections et précisions au fil de son expérience. Le rôle du langage est alors essentiel à la préparation vers le niveau ultime du processus d'apprentissage qu'est l'abstraction. Britt-Mari Barth précise en effet que « pour Bruner, la langue est un médiateur, un outil, pour accéder à un mode de pensée abstraite ». ⁸ En effet, s'il est d'abord social, le langage est aussi un outil structurant de la pensée. Mettre des mots sur le vécu, c'est se distancier par rapport à sa propre expérience et permettre ainsi des prises de conscience. Communiquer oblige également à clarifier sa pensée pour la rendre transmissible et compréhensible. Le langage revêt en ce sens un rôle capital dans la construction et la structuration de la pensée.

Dans le modèle pédagogique proposé par Mari-Britt Barth, la troisième et dernière phase est celle de l'abstraction lors de laquelle on évalue l'élève dans sa capacité à reconnaître le concept en jeu, à le justifier et à rattacher au concept ce que sont ses attributs essentiels. Il s'agit là de vérifier que l'apprenant maîtrise l'idée abstraite du concept. Elle définit l'abstraction ainsi : « l'abstraction est une opération mentale qui considère à part un ou plusieurs éléments d'une perception en négligeant les autres. » ⁹ Ce processus d'abstraction est donc une étape ultime d'un processus d'apprentissage lors duquel de nombreuses opérations mentales auront été nécessaires (perception, comparaison, inférence, hypothèse et vérification). En d'autres termes, l'abstraction est un processus cognitif mettant en jeu de nombreuses opérations mentales à partir de l'observation de la réalité afin d'en discerner les attributs : « l'abstraction étant le fruit d'une observation active et réfléchie, devient donc, pour Decroly, ce « pont entre le monde et la pensée » ». ¹⁰ Ces trois étapes dans le processus d'abstraction nous apprennent donc que le cheminement de l'apprentissage fait appel à de nombreuses activités mentales, mais aussi à de nécessaires dispositions affectives, verbales et pédagogiques.

Selon Britt-Mari Barth, une dernière opération mentale, non des moindres, est indispensable au parachèvement de l'apprentissage en jeu : celle de la généralisation, que nous avons coutume de désigner comme une phase de transfert : « La généralisation est une opération

⁸ BARTH Britt-Mari, L'apprentissage de l'abstraction, RETZ, 2013, p.

⁹ BARTH Britt-Mari, L'apprentissage de l'abstraction, RETZ, 2013, p.155

¹⁰ ROBICHAUD Cécile, L'efficiency des réglettes Cuisenaire, 3ème et 4ème années primaires, éditions Delachaux et Niestlé, 1968, p.39

mentale par laquelle on étend à une classe entière ce qui a été observé sur un nombre limité de cas singuliers appartenant à cette classe. »¹¹ Ce modèle pédagogique est donc proposé par l'auteur comme un accompagnement du processus d'abstraction, l'idéal étant que l'élève prenne conscience de ce dernier en verbalisant et en explicitant chacune de ces phases dans le but d'apprendre à l'élève à apprendre. On note donc ici encore le rôle clé du langage dans la capacité d'abstraction. « En effet, l'activité cognitive qui consiste à raisonner se fait sur le support du langage, un langage « intérieur » très difficile à évaluer par un enseignant, bien entendu. On peut demander aux élèves « comment ils ont fait dans leur tête » pour exhiber un peu les compétences langagières qu'ils ont utilisées ou qu'ils tentent d'utiliser pour résoudre des problèmes, mais sans jamais être sûr que ce qu'ils disent à ce moment-là soit le reflet fidèle de leur activité de pensée. Les techniques métacognitives qui consistent à aider l'élève à prendre conscience de ses connaissances peuvent lui permettre de mieux comprendre les raisonnements qu'il utilise. »¹² Cette étape de transfert témoigne donc d'une compréhension et d'un apprentissage de la notion en question, achevés. Nous verrons que dans le domaine des mathématiques, ce processus peut facilement être entravé pour certains apprenants. C'est la raison pour laquelle je m'emploierai à comprendre quelle peut être la place de la manipulation de manière générale dans l'apprentissage des mathématiques, puis plus spécifiquement celle de la manipulation des réglettes Cuisenaire ainsi que la mesure de leur efficacité.

Le processus d'abstraction est l'une des opérations cognitives des plus élémentaires de notre cerveau. Pourtant il s'avère particulièrement difficile voire inaccessible pour beaucoup d'élèves lorsqu'il s'agit d'y avoir recours dans le champ des mathématiques. On peut attribuer ces difficultés au fait que les mathématiques sont constituées de symboles et procéder à l'abstraction de ces symboles nécessitent d'autres abstractions et ainsi de suite, formant ainsi plusieurs niveaux de conceptualisation. Seton Pollock a cherché à expliquer les raisons de ces difficultés récurrentes. « Il parle d'abord d'une matière abstraite qui échappe si facilement à une mémoire infidèle, puis il signale comme principale erreur commise : celle de supposer que les sons et les symboles numériques sont des nombres. Or, dit-il, c'est une activité mentale qui ressort du monde des quantités, des propriétés et relations spatiales et des expériences temporelles. »¹³ En effet, sans mise en relation entre le symbole et sa représentation, l'abstraction est impossible. « L'abstraction mathématique repose sur

¹¹ BARTH Britt-Mari, L'apprentissage de l'abstraction, RETZ, 2013, p.125

¹² DIAS Thierry, Manipuler et expérimenter en mathématiques, édition Magnard, 2012, pp.98-99

¹³ ROBICHAUD Cécile, L'efficacité des réglettes Cuisenaire, 3ème et 4ème années primaires, éditions Delachaux et Niestlé, 1968, p.53

l'utilisation de symboles qui expriment des relations de plus en plus complexes. Accéder à des niveaux supérieurs d'abstraction [...] demande à l'élève de comprendre les significations auxquelles renvoient les nouveaux symboles (par exemple, comment opérer les symboles « 16 » et « 28 ») et de revenir aux significations préalables lorsque nécessaire (le symbole « 16 » signifie une dizaine et six unités, mais aussi seize unités, etc.). »¹⁴ Il est capital de pallier ces difficultés que certains élèves peuvent rencontrer dans leur processus d'abstraction en mathématiques. Pour ce faire, la manipulation est la toute première étape à proposer dans le cheminement vers l'abstraction, permettant, pour Maria Montessori « de varier les perceptions et [n'étant] autre qu'une pensée par les mains. »¹⁵

2) La nécessaire manipulation pour accéder à l'abstraction

Comme décrit plus haut, Bruner soutient qu'il existe chez l'enfant trois modes de représentation pour traiter l'information qui se développent chronologiquement : le mode « enactif » ou sensorimoteur, le mode « iconique » ou visuel et le mode « symbolique ». Ce n'est pas tant l'âge mais l'expérience vécue de l'enfant qui permet de les développer successivement. « Une fois développés, ces trois systèmes de représentation fonctionnent parallèlement pour appréhender l'information. Mais plus l'enfant est jeune, plus il a besoin de manipuler pour accéder à l'information. »¹⁶ Cette théorie cognitive met en avant le fait que l'objet manipulé fait appel aux formes multimodales de traitement de l'information, qui par la stimulation multiple des opérations mentales (sensorielle, visuelle et verbale), facilite ainsi l'apprentissage.

Cette théorie coïncide avec les quatre stades de développement de la pensée, eux-mêmes concomitants avec les étapes de la construction du nombre selon Jean Piaget : dans le stade sensori-moteur (0-2 ans), l'enfant découvre le monde par ses mouvements et ses sensations : son action transforme les objets concrets ; dans le stade pré-opératoire (2 à 6-7 ans), l'enfant se situe dans le moment présent et parvient à se le représenter par l'élaboration d'images mentales : sa pensée se rapporte à ses gestes ; dans le stade des opérations concrètes (6-7 à 11-12 ans), l'enfant est capable de se représenter des transformations sur les objets : son action

¹⁴ RADFORD Luis, DEMERS Serge, MIRANDA Isaias, Processus d'abstraction mathématiques, Repères pratiques et conceptuels, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario et Université Laurentienne, 2009, p.12

¹⁵ ROBICHAUD Cécile, L'efficacité des réglettes Cuisenaire, 3ème et 4ème années primaires, éditions Delachaux et Niestlé, 1968, p.21

¹⁶ BARTH Britt-Mari, L'apprentissage de l'abstraction, RETZ, 2013, p.116

n'est plus isolée mais fait partie d'un tout qu'il articule par le biais d'une pensée logique ; dans le stade des opérations formelles, l'enfant manipule des concepts abstraits et parvient à les articuler entre eux : selon Jean Piaget, la réalité manipulable n'est donc plus indispensable à la formation de son raisonnement. « Ce processus de la construction du nombre attire l'attention du psychologue et du praticien scolaires sur la nécessité de l'action et de l'opération sur et par le concret : condition indispensable à l'élaboration de la pensée formelle. »¹⁷ Parallèlement, on trouve chez M. Audemars et L. Lafendel, qui se sont penchées sur l'enseignement du calcul à l'école, trois étapes distinctes dans le développement de l'enfant affirmant à nouveau la place capitale de la manipulation : « la première, de 3 à 5 ans, période de « mouvement pour le mouvement » où « la pensée est bouchée par l'action » ; la seconde, de 5 à 7 ans, stade de « l'activité réfléchie » où le mouvement est en vue d'un but et où « l'action provoque la pensée » ; la troisième, de 7 à 10 ans, où « l'on remarque une première conquête de l'équilibre entre l'activité de la main et l'activité du cerveau. Le travail devient ordonné, le mouvement est soumis à la pensée, parce que la pensée précède l'action. »¹⁸ »¹⁹ Ces théories du développement convergent toutes vers la nécessité pour les enfants, très dépendants du monde physique, de manipuler afin de faire le lien entre un concept mathématique abstrait et le monde réel. On peut tout de même remarquer que pour les adultes également, la manipulation reste un support utile à l'appréhension d'une information nouvelle et à la construction d'un savoir.

En dehors du domaine cognitif, le climat affectif est également une variable à prendre en compte dans la réussite vers un apprentissage complet. La motivation intrinsèque d'un élève lancé dans une activité est liée à sa réussite : l'envie d'apprendre va lui permettre de faire des efforts pour acquérir une notion. Les défis qui lui sont lancés éveillent son désir de s'investir, de chercher. Or c'est généralement les sentiments qui émanent d'une nouvelle expérience qui met en œuvre ses différents sens : la manipulation va lui apporter un certain plaisir, une confiance et ainsi apporter toutes les conditions nécessaires à développer sa curiosité, provoquer l'initiative personnelle et la satisfaction d'avoir surmonté des difficultés. Par ailleurs, la manipulation lui permet un certain degré d'autonomie que l'on ne retrouve pas

¹⁷ ROBICHAUD Cécile, L'efficience des réglettes Cuisenaire, 3ème et 4ème années primaires, éditions Delachaux et Niestlé, 1968, p.9

¹⁸ Audemars M / Lafendel L. La maison des petits de l'institut J.J. Rousseau, pp.11 à 22 in ROBICHAUD Cécile, L'efficience des réglettes Cuisenaire, 3ème et 4ème années primaires, éditions Delachaux et Niestlé, 1968, p.35

¹⁹ ROBICHAUD Cécile, L'efficience des réglettes Cuisenaire, 3ème et 4ème années primaires, éditions Delachaux et Niestlé, 1968, p.35

nécessairement dans les méthodes plus classiques. « L'usage de matériels éducatifs se révèle profitable parce que, grâce à eux, l'élève ne dépend plus uniquement de la parole du maître et peut mener plus librement son apprentissage selon ses voies propres et son rythme propre. Il peut ainsi faire tout seul ses découvertes comme il en avait coutume dans la première enfance et sa pensée conserve son pouvoir d'autonomie et son pouvoir de concentration. »²⁰

Cependant, le seul recours à la manipulation n'est pas une réponse aux difficultés du processus d'abstraction en mathématiques, mais doit être conçu dans une démarche d'apprentissage globale. La manipulation en mathématiques ne doit pas non plus obnubiler l'élève et le bloquer dans la progression dans ses apprentissages. Madeleine Goutard rejoint Mari-Britt Barth sur le fait que l'élève doit confronter ses représentations à un nombre important d'exemples, afin d'affiner la compréhension du concept en jeu. Mais ceux-ci doivent surtout être variés et diversifiés pour affiner et faire évoluer les représentations en jeu. « Ce n'est pas le nombre des manipulations qui importe car celles-ci peuvent ne recouvrir que des conduites stéréotypées. C'est la diversité des expériences et surtout la conscience qu'on y apporte qui sont les plus grands facteurs de progrès. »²¹ Par ailleurs, certaines phases se prêtent plus qu'à d'autres à la manipulation et des moments trop longs à manipuler risquent d'être contre-productifs. Madeleine Goutard précise en effet que « lorsque la phase des tâtonnements empiriques se prolonge trop longtemps, l'excès d'activité manuelle ne fait que recouvrir une certaine inertie de l'esprit. »²² Pour l'auteur, les phases de découverte et de vérification sont les plus appropriées aux moments de manipulation et doivent être conçues en alternance avec des moments d'écrits et de verbalisation. Madeleine Goutard conclut donc ainsi : « rappelons donc les phases d'une expérience complète :

- 1) on réalise une construction ;
- 2) on s'en détache pour l'examiner, prendre conscience de ce qu'elle contient et exprimer ce qu'on en retient ;
- 3) on reconstitue, à l'aide de ses substituts que sont les signes graphiques, les relations qu'on a établies et les jugements qu'on a énoncés ;

²⁰ GOUTARD Madeleine, La pratique des nombres en couleur, édition Une éducation pour demain, 2011, p.153

²¹ GOUTARD Madeleine, La pratique des nombres en couleur, édition Une éducation pour demain, 2011, p.83

²² GOUTARD Madeleine, La pratique des nombres en couleur, édition Une éducation pour demain, 2011, p.78

4) on a introduit l'expérience acquise dans de nouvelles situations existant dans le matériel ou dans d'autres domaines. »²³

Les textes officiels préconisent également des moments de manipulation conséquents mais articulés à d'autres phases dans une séquence structurée et coordonnés à des activités diverses. Pour l'étude des nombres en maternelle par exemple, le programme préconise « Quantifier des collections jusqu'à dix au moins ; les composer et les décomposer par manipulations effectives puis mentales. Dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix. »²⁴ En maternelle, la manipulation est largement associée au jeu. En élémentaire, le programme officiel préconise d'avoir recours à la manipulation dans un objectif de recherche : « Chercher. S'engager dans une démarche de résolution de problèmes en observant, en posant des questions, en manipulant, en expérimentant, en émettant des hypothèses, si besoin avec l'accompagnement du professeur après un temps de recherche autonome. Tester, essayer plusieurs pistes proposées par soi-même, les autres élèves ou le professeur. »²⁵ La recherche est le moyen de progresser puisqu'elle remet en questions les représentations initiales des enfants sur lesquelles ils s'appuient : « ces temps permettent aux élèves de se confronter aux limites de leur représentation ou de leur stratégie. Ainsi, il se crée chez eux le besoin d'adopter de nouveaux raisonnements ou encore de s'appuyer sur de nouveaux concepts. »²⁶ De manière générale enfin, les programmes préconisent une articulation forte entre manipulation et langage : la verbalisation devrait ainsi systématiquement accompagner l'action.

La manipulation en mathématiques contribue au passage à l'abstraction et assure ainsi un apprentissage solide des concepts en jeu. Cette théorie du « learning by doing » peut être reformulée ainsi, comme le fait Cécile Robichaud : « Les mathématiques ne sont pas dans les choses mais bien dans les actions exécutées par l'enfant sur les choses. Ce sont en effet ces réalisations matérielles, fruits de l'activité personnelle et du travail de pensée de l'enfant, qui

²³ GOUTARD Madeleine, La pratique des nombres en couleur, édition Une éducation pour demain, 2011, p.158

²⁴ Bulletin officiel spécial n° 2 du 26 mars 2015

²⁵ Bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015

²⁶ DESSERTINE Sébastien in DIAS Thierry, Manipuler et expérimenter en mathématiques, édition Magnard, 2012, p.38

assurent une assimilation profonde des différentes notions. »²⁷ Les réglettes Cuisenaire sont un matériel de manipulation qu'il convient maintenant d'étudier.

3) Les réglettes Cuisenaire, un outil aux nombreux aspects positifs

Que sont les réglettes ?

Le matériel Cuisenaire a cela de particulier qu'il évite de tout rapporter à l'unité mais il permet de focaliser le raisonnement sur les rapports entre les réglettes : « Georges Cuisenaire, en pédagogue averti, savait que faire de la mathématique c'était abstraire et raisonner et son expérience d'enseignant, soucieux de la formation intégrale de ses élèves, lui apprit que la pensée opératoire ne travaillait pas sur des nombres mais sur des rapports, des relations entre grandeurs caractérisées par les notions d'équivalence, -c'est-à-dire d'égalité –d'ordre et d'algèbre, comme Piaget l'avait laissé entendre. »²⁸ Les réglettes permettent ainsi de redonner du sens aux nombres par la découverte des rapports entre elles et donc entre les nombres : ceux-ci ne sont plus qu'un symbole mais sont rattachés à un matériel concret, palpable. Leur manipulation est une étape pour accéder au langage des mathématiques qui n'émane plus d'une convention extérieure mais qui prend sens par l'expérience qu'il aura pu en faire. Caleb Gattegno l'explique ainsi : « Par la découverte des rapports mathématiques au cours de sa manipulation des réglettes, et par l'expression consécutive, en des termes qui ont un sens pour lui de ce qu'il a découvert, la notation traditionnelle prend à ses yeux une signification immédiate, et n'est pas quelque chose d'étranger à son expérience qu'on lui imposerait du dehors. »²⁹ D'ailleurs, certains auteurs préconisent un passage à l'écrit souple, initié par l'enfant en train de construire ses connaissances. Comme on laisse l'enfant explorer le matériel et vivre sa propre expérience, il convient de le laisser créer la notation qu'il souhaite associer à ses manipulations. Le moment doit s'imposer de lui-même de sorte qu'il soit naturel pour l'enfant de devoir recourir à un moment donné à un écrit qui émane de sa propre pensée. Madeleine Goutard précise que « l'écriture doit être au service de la pensée et non l'inverse. »³⁰

²⁷ ROBICHAUD Cécile, L'efficacité des réglettes Cuisenaire, 3ème et 4ème années primaires, éditions Delachaux et Niestlé, 1968, p.38

²⁸ ROBICHAUD Cécile, L'efficacité des réglettes Cuisenaire, 3ème et 4ème années primaires, éditions Delachaux et Niestlé, 1968, p.69

²⁹ GATTEGNO Caleb, Enfin, Freddy comprend l'arithmétique, L'emploi des « Réglettes Cuisenaire » expliqué aux parents, Editions Delachaux et Niestlé, 1967, p.95

³⁰ GOUTARD Madeleine, La pratique des nombres en couleur, édition Une éducation pour demain, 2011, p.34

L'un des aspects originaux du matériel Cuisenaire est que par sa manipulation, les différentes opérations mathématiques auxquelles il aura recours dans un deuxième temps auront déjà été vécues dans sa manipulation. Or il existe des « corrélations entre les structures mathématiques et structures opératoires de l'intelligence. »³¹ « L'intelligence est un système d'opérations, toutes les mathématiques sont des systèmes d'opérations. L'opération n'est pas autre chose qu'une action ; c'est une action réelle mais intériorisée, devenue réversible. Pour que l'enfant arrive à combiner des opérations, qu'il s'agisse d'opérations numériques, d'opérations spatiales, il faut qu'il ait manipulé ; il faut qu'il ait agi, qu'il ait expérimenté, non pas seulement sur des dessins, mais sur du matériel réel, sur des objets physiques, sur des points, sur des surfaces, etc. »³² Les quatre opérations fondamentales sont par ailleurs vécues de manière simultanée lors de la manipulation des réglettes et non dans un ordre prédéfini en fonction d'une supposée gradation de la difficulté (addition, soustraction, multiplication, division). « Toutes les opérations mathématiques sont présentées comme des aspects des jeux auxquels il a joué avec les réglettes, en sorte qu'un accroissement continu et cohérent de clarté se manifeste à mesure que se développe son intuition mathématique. »³³ Les nouveaux domaines abordés sont autant de domaines dans lesquels ce qui a été acquis par expérience auparavant est un support à une nouvelle construction du savoir. « Par exemple, la division peut être déduite directement de l'addition sans qu'on ait à passer, comme auparavant, par la connaissance des tables de multiplication. »³⁴

Comment utiliser les réglettes Cuisenaire ?

« De tous les matériels didactiques, le matériel Cuisenaire est celui qui présente de la manière la plus adéquate les structures de base de l'arithmétique et de l'algèbre élémentaire. »³⁵ A partir de cette affirmation, il conviendrait à tous les enseignants d'équiper leur classe de ce matériel. Pour Madeleine Goutard, les réglettes « ne sont pas une machine à calculer paresseusement »³⁶ mais elles sont destinées à deux phases principales dans le processus

³¹ ROBICHAUD Cécile, L'efficience des réglettes Cuisenaire, 3ème et 4ème années primaires, éditions Delachaux et Niestlé, 1968, p.58

³² Piaget, Jean La genèse du nombre chez l'enfant, Conférence in Bourrelrier – Initiation au calcul, cahiers de pédagogie moderne, p.20

³³ GATTEGNO Caleb, Enfin, Freddy comprend l'arithmétique, L'emploi des « Réglettes Cuisenaire » expliqué aux parents, Editions Delachaux et Niestlé, 1967, p.95

³⁴ Ibidem p.95

³⁵ GOUTARD Madeleine, La pratique des nombres en couleur, édition Une éducation pour demain, 2011, p.20

³⁶ GOUTARD Madeleine, La pratique des nombres en couleur, édition Une éducation pour demain, 2011, p.14

d'apprentissage : la découverte et la vérification. Il s'agit donc d'un matériel de manipulation sur lequel l'enfant va s'appuyer pour construire son raisonnement. Et comme tout matériel de manipulation, l'apprenant pourra s'en détacher progressivement au fur et à mesure qu'il aura construit la compréhension du concept en jeu et que l'opération mentale sera alors devenue plus facile à réaliser que la manipulation d'un support concret. Mais il ne s'agit pas de deux phases bien distinctes non plus : « il s'agit en réalité d'un mouvement de va-et-vient continu : c'est dès les tout premiers débuts qu'on s'efforce de calculer mentalement en s'appuyant sur l'expérience acquise lors des séances de manipulations (en particulier, le travail écrit devrait se faire le plus possible sans les réglettes) ; mais on retourne au matériel pour procéder aux vérifications, pour aborder une question nouvelle ou approfondir une analyse amorcée. »³⁷ D'ailleurs les réglettes Cuisenaire ont cela de particulier qu'elles permettent une autocorrection immédiate, permettant à l'enfant de s'émanciper dans l'expérience et d'élaborer une pensée de plus en plus autonome.

Il est nécessaire de laisser aux élèves un temps conséquent pour qu'ils s'approprient le matériel. Afin de s'en servir plus tard comme un outil accompagnant le raisonnement, ils doivent pouvoir le connaître parfaitement, connaître et comprendre la relation entre les réglettes, entre les couleurs, entre les couleurs et leurs mesures... Cela ne peut se faire qu'après un temps de jeu autonome. Selon Madeleine Goutard, « si l'adulte intervient trop tôt, il appauvrit le jeu de l'enfant en l'acheminant trop rapidement vers des constructions uniquement schématiques et linéaires, alors que l'enfant construit spontanément dans les trois directions de l'espace, avec une profusion d'idées. »³⁸ Caleb Gattegno préconise de la même manière de laisser au début une place importante aux jeux libres afin de se familiariser avec ce matériel. Il pourra ainsi plus tard édifier ses connaissances mathématiques sur ce qu'il aura découvert par le jeu et la manipulation de lui-même³⁹. Cependant, comme il a déjà été indiqué plus haut, un temps trop long dédié à la manipulation du matériel Cuisenaire produirait des effets inverses sur le passage à l'abstraction. Leur efficacité réside donc à la fois dans un dosage et un guidage équilibrés.

³⁷ GOUTARD Madeleine, La pratique des nombres en couleur, édition Une éducation pour demain, 2011, p.48

³⁸ GOUTARD Madeleine, La pratique des nombres en couleur, édition Une éducation pour demain, 2011, p.13

³⁹ GATTEGNO Caleb, Enfin, Freddy comprend l'arithmétique, L'emploi des « Réglettes Cuisenaire » expliqué aux parents, Editions Delachaux et Niestlé, 1967, pp.12-14

Pour résumer, Madeleine Goutard décrit le matériel Cuisenaire comme « avant tout un matériel algébrique. Parce qu'il ne donne que très peu de choses et qu'il ne les donne pas explicitement ; parce qu'avec ce très peu on peut produire beaucoup, l'esprit de l'utilisateur se centre spontanément sur son activité, sur ses opérations. »⁴⁰ La manipulation des réglettes Cuisenaire, effectuée de manière équilibrée entre une autonomie totale et un guidage de la part de l'enseignant, et amenée lors de certaines phases du processus d'apprentissage plus qu'à d'autres, s'avère donc efficace. Elle participe en effet au processus d'abstraction, processus particulièrement difficile dans le domaine des mathématiques du fait de la spécificité de cette discipline qu'est une abstraction inhérente. Les réglettes Cuisenaire permettent ainsi d'apporter un éclairage sur les rapports entre les nombres et leur confèrent du sens, condition indispensable à l'apprentissage. J'ai cherché à retrouver cette efficacité en expérimentant les réglettes auprès des élèves de ma classe de CE2.

II- Partie empirique : utilisation des réglettes Cuisenaire dans ma classe de CE2 : méthodologie et technique de recherche

1) Expérimentation, présentation de la méthode

A- Evaluation diagnostique : Compléments et calculs additifs sans réglettes

Le cœur de ma problématique consiste à comprendre si la manipulation des réglettes Cuisenaire facilite le passage à l'abstraction et rend ainsi plus efficace l'enseignement et la construction des savoirs mathématiques. Pour ce faire, j'ai mené une expérimentation auprès des élèves de CE2 de ma classe en sélectionnant deux notions mathématiques intimement liées à acquérir au cycle 2 que sont les compléments et le calcul additif. Je me suis focalisée sur les élèves les plus en difficulté en mathématiques car mon but, au-delà de la réalisation de cette expérience, était de porter l'ensemble de mes élèves vers la réussite. Un tiers environ de mes élèves (9 dans mon expérimentation) rencontre des difficultés récurrentes dans la compréhension et la construction du nombre et nécessite en effet un soutien particulier en mathématiques. C'est d'ailleurs ce constat qui a participé à l'émergence de ma problématique. Je me suis posé la question de comment accompagner ces élèves vers une meilleure compréhension du nombre. A la suite de ma formation et de diverses lectures, il en est ressorti que la manipulation serait une réponse adéquate. Qui plus est, l'outil que sont les réglettes Cuisenaire m'a moi-même interpellé et me paraissait, avant de débiter son utilisation,

⁴⁰ GOUTARD Madeleine, La pratique des nombres en couleur, édition Une éducation pour demain, 2011, p.97

porteur de nombreux apprentissages du fait de la liberté totale dans leur manipulation. Sans me prononcer d'avance sur l'efficacité potentielle des réglettes Cuisenaire, j'émettais déjà l'hypothèse que cet outil serait agréable à utiliser pour l'ensemble des élèves et serait déjà intéressant du point de vue de la motivation intrinsèque qu'il permettrait.

La séquence expérimentale a été conduite en période 3 et 4 principalement, sur les créneaux d'activité pédagogique complémentaire (APC) de 11h30 à 12h00, soit 3 fois par semaine, par groupe de 4 ou 5 donc chaque élève a travaillé pendant 1 à 2 créneaux hebdomadaires. Sur la période 3, la principale notion abordée était les compléments. En période 4, j'ai mené une étude sur le calcul additif. Au préalable en période 2, j'ai dédié un temps important à la découverte du matériel et aux jeux autonomes pour une familiarisation avec le matériel, à la fois en groupe classe et en APC. Pour ces deux notions abordées, j'ai mené une première phase diagnostique, une phase de découverte, une phase de recherche mettant en jeu la manipulation des réglettes Cuisenaire, une phase d'entraînement avec et sans les réglettes ainsi qu'une phase d'évaluation. Je n'ai pas encore mené de phase de transfert des apprentissages.

Evaluation diagnostique

- Les compléments :

Afin d'évaluer la compétence de calcul de complément, je me suis basée sur un problème proposé par le manuel sur lequel j'appuie principalement l'enseignement des mathématiques à mes élèves de CE2 : Cap Maths, éditions Hatier, 2011 (cf annexe 1). Ce problème consiste à trouver des longueurs manquantes sur des branches dessinées : on donne un tronçon de 32 cm pour une branche totale mesurant 47cm, un autre tronçon de 6cm pour une branche mesurant 80 cm et deux tronçons de 24 et 26 cm pour une longueur totale à trouver. Avant de leur proposer cet exercice, les élèves ont acquis des pré-requis nécessaires afin de résoudre ce problème que sont les calculs en ligne d'addition, de soustraction et d'addition à trous. Les 9 élèves observés mettent en œuvre différentes stratégies de calcul : comptage avec les doigts, surcomptage, comptage à rebours, ou addition / soustraction posée. Cette compétence acquise, il s'agit dorénavant de l'exploiter dans la résolution d'un problème. Les 9 élèves n'ont pas réussi cet exercice de façon autonome. Il leur a été difficile de manipuler les données en jeu, et le sens des opérations à mettre en œuvre n'a pas été déterminé. La première partie du problème n'a pas été dépassée.

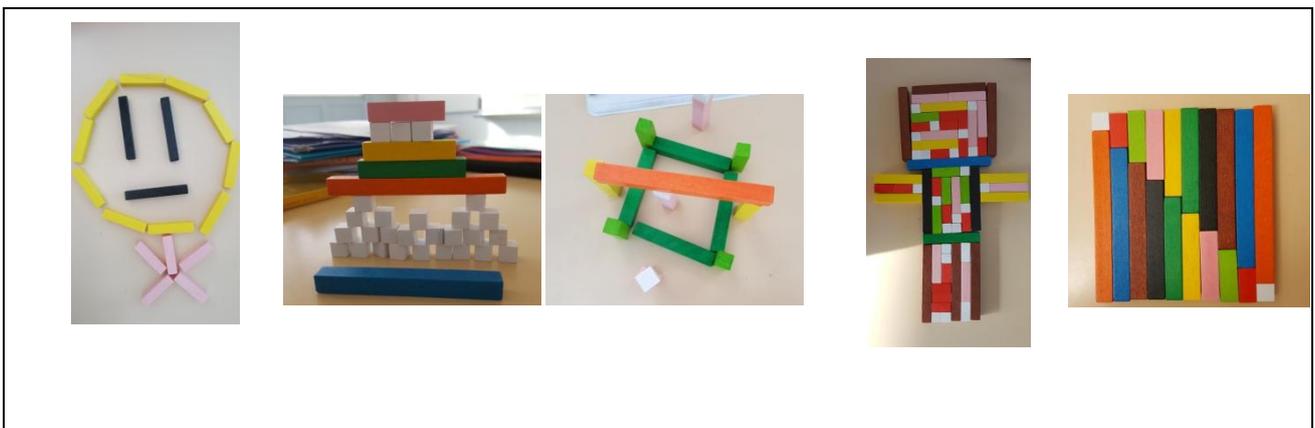
- Le calcul additif :

Pour un retour aux fondamentaux et dans la lignée des compléments, il m'a été nécessaire de mettre en place une évaluation diagnostique sur le calcul additif permettant des résultats facilement mesurables. En 5 minutes précises, les élèves ont effectué une série de calculs dont les sommes ne dépassaient pas 20, du type $9+2 = \dots$ ou $4+\dots=7$ (cf annexe 2). Dans cet exercice de rapidité, les élèves étaient en confiance puisqu'ils effectuaient des opérations qu'ils savaient faire et qui ne leur demandaient pas de surcharge cognitive (cf tableau des résultats plus bas).

B- Phase d'expérimentation avec les élèves en difficulté détectés : manipulation des réglettes Cuisenaire pour les compléments et calculs additifs

Jeux de familiarisation

Avant d'utiliser le matériel Cuisenaire afin de le mettre au profit d'un raisonnement mathématique, il est primordial de familiariser les élèves à sa manipulation. J'ai donc prévu en période 2 un moment conséquent de manipulation des réglettes en le présentant d'entrée comme un jeu. J'ai laissé les 9 enfants faire des constructions, des combinaisons, les détruire, les modifier, les rebâtir... Certains sont restés au plan horizontal, d'autres ont choisi de réaliser des constructions en trois dimensions (cf ci-dessous).



Afin d'accroître leur familiarité avec les réglettes, j'ai proposé le jeu d'identification des longueurs. Avec deux, puis trois, puis quatre réglettes dans la main derrière le dos, il s'agit de trouver la couleur demandée.

J'ai proposé ensuite qu'ils construisent des escaliers afin de visualiser l'ordre des longueurs et des couleurs. Tout à tour, chacun nommait les couleurs en commençant par la plus petite. Le but du jeu était ensuite de rappeler l'ordre des réglettes en fermant les yeux. A partir de l'escalier, je demandais de me donner la couleur de la tantième marche en partant du haut. L'objectif de ce jeu est d'entrer dans l'association de la couleur au nombre et de fixer cet apprentissage. Puis on fait l'inverse : en donnant telle couleur, quel est l'ordinal de la marche ? Ensuite, à partir des ordinaux, on accède aux chiffres cardinaux en passant par l'écrit : en binôme, l'un écrit sur l'ardoise le numéro de la marche, l'autre désigne la couleur de ma marche demandée.

Le jeu suivant proposé est celui des trains et de ses wagons. Je leur ai demandé de construire un train avec autant de wagons qu'ils le souhaitent, puis un deuxième train de la même longueur avec d'autres wagons. Puis je leur ai proposé une contrainte supplémentaire : les trains ne doivent être que d'une seule couleur. L'objectif est que l'élève comprenne ici qu'il y a un rapport entre les longueurs des réglettes et le nombre nécessaire de réglettes à disposer pour parvenir à une certaine longueur.

A ce moment, je suis revenue sur le nombre donné aux différentes réglettes : « quelle est la couleur de la quatre, etc. » Certains élèves avaient déjà mémorisé l'association du nombre à la couleur. D'autres, plus hésitants, cherchaient en les comparant. J'ai donc cherché à introduire ici une méthode de comparaison rigoureuse pour s'assurer de la longueur de la réglette en question, en lui apposant les réglettes blanches (d'1 cm de longueur). Cette méthode a été émise par certains d'entre eux, et adoptée par tous par la suite de manière spontanée.

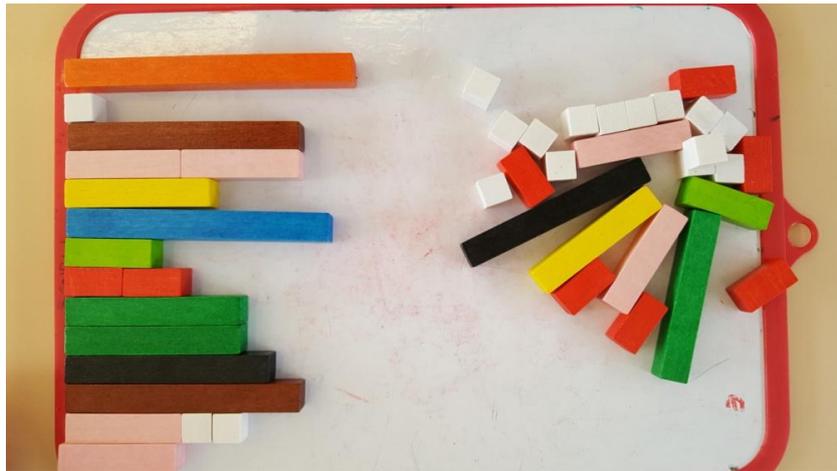
Jeux mathématiques

Après ces différentes étapes réalisées de manipulation des réglettes de manière libre puis guidée, nous entrons dans une activité mathématique explicite avec le jeu des « tapis ». Il s'agit de proposer une réglette et de lui adjoindre toutes les combinaisons possibles de réglettes pour représenter la même longueur. J'ai proposé cette activité plusieurs fois, d'abord avec une seule réglette (de 2 à 10) en insistant sur le 10, puis pour d'autres longueurs

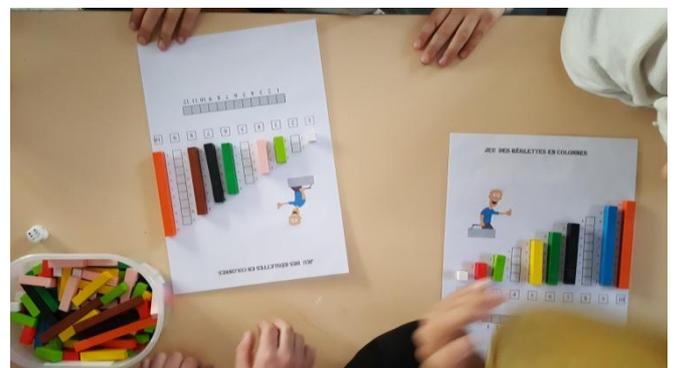
comprises entre 11 et 20. J'ai fait évoluer ce jeu en proposant le jeu du « marchand de tapis » : le marchand propose une longueur et le client passe la commande du tapis en lui dictant les différentes broderies possibles sans parler de couleur : le marchand valide ou invalide les propositions du client immédiatement au fur et à mesure qu'il construit son tapis. Une deuxième évolution du jeu proposée a été d'effectuer ce même travail de commande mais cette fois sans parler mais à l'aide de l'écriture mathématique : les clients ont donc constitué leurs tapis puis traduit sur l'ardoise en addition en ligne dans un premier temps. Ensuite il faisait passer au marchand leur commande que ce dernier devait réaliser.



Lors de ces jeux, la notion d'addition a sans cesse été utilisée, et en même temps la notion de soustraction. Afin de travailler la notion de soustraction et de compléments de manière plus explicite, je leur ai proposé un nouveau jeu à partir du jeu des « tapis ». Après la construction d'un tapis, j'ai enlevé toutes les réglettes de l'extrémité droite que j'ai laissées à disposition des élèves et ceux-ci devaient reconstruire leur tapis. Une fois ce jeu réussi, je leur ai proposé une évolution du jeu : au lieu de leur laisser à disposition les réglettes, je les leur ai enlevées, et ils devaient, à l'oral, retrouver la bonne réglette qui compléterait le tableau. Ce jeu a quelquefois provoqué une certaine frustration du fait de voir leur tapis détruit mais aussi de la redondance de l'activité. Certains ont même proposé des stratégies pour s'alléger la tâche : « ne fais pas un grand tapis, après tu vas devoir tout refaire ! », « cette fois, je le fais plus petit sinon ça va être trop long à refaire ! ». Deux élèves ont d'ailleurs montré des difficultés à réaliser cette activité et ont réagi en exprimant une certaine lassitude devant une telle tâche demandée.



En parallèle, en groupe classe, j'ai présenté un jeu destiné à être joué en autonomie par la suite : le jeu des réglettes en colonne (cf annexe 3). A deux joueurs, chacun a une feuille de jeu. Ils lancent à tour de rôle deux dés et remplissent les colonnes par les réglettes sur les feuilles de jeu en fonction des constellations des dés, soit en prenant les réglettes correspondant aux dés, soit en prenant une seule réglette en ajoutant les deux dés, le but du jeu étant de terminer sa feuille le premier. On peut dans un deuxième temps faire évoluer le jeu en changeant les règles pour faire utiliser des soustractions, des multiplications, ou des divisions (pour un niveau ultérieur) ou encore choisir de laisser toutes ces possibilités afin de laisser aux enfants le choix de leurs stratégies. Ce jeu a eu un grand succès auprès de l'ensemble des élèves de la classe. Ce qui a été d'autant plus satisfaisant pour les neuf élèves observés, c'est qu'ils connaissaient de manière plus approfondie les réglettes et étaient ainsi meneurs de l'activité, en validant les longueurs des réglettes, ou en étant plus rapides que les autres à les déterminer.



En période 4, j'ai continué à proposer aux neuf élèves observés trois nouveaux jeux en binôme ou trinôme dans le but de travailler la décomposition additive. Chaque semaine, un nouveau jeu était proposé donc chacun des neuf élèves a joué une à deux fois à chaque jeu.

Le jeu des « pirates » consistait à mettre en jeu une réglette choisie au hasard par un meneur de jeu entre deux joueurs, l'attaquant donnait un nombre inférieur à celui de la réglette et le défenseur devait trouver du tac au tac le nombre manquant, qui ajouté au nombre donné équivalait à la réglette. S'il réussissait il gagnait la réglette, sinon elle était remise en jeu. Le meneur de jeu devait valider ou invalider la réponse. Ils auraient pu utiliser les réglettes pour vérifier mais ils n'y ont pas eu recours. Puis les joueurs échangeaient les rôles.

Le jeu de « l'architecte » consistait à faire construire des escaliers avec des différences variées entre chaque marche de l'escalier : en fonction des élèves, je leur demandai des différences telles que 2, 3, 4 ou 5. Pour s'assurer du respect de la consigne et de la validité de leur production, ils utilisaient, la réglette dont la longueur était commandée pour « sauter » de marche en marche.

Le jeu de « Lucky Luke » consistait à tirer une réglette au hasard par le meneur de jeu qui annonçait sa longueur, et les deux joueurs devaient trouver au plus vite une addition qui avait cette longueur pour somme. Le plus rapide gagnait la réglette. Puis les joueurs changeaient de rôles.

De manière générale, en dehors de ces jeux proposés, les élèves avaient accès aux réglettes Cuisenaire à tout instant, que ce soit pour s'appuyer sur un matériel didactique pour réaliser un exercice, ou pour y jouer en autonomie après avoir terminé un travail demandé. En effet, sur les deux notions en jeux, j'ai développé une séquence dans laquelle les enfants se sont aussi entraînés sans les réglettes mais ils pouvaient à tout moment y avoir recours en cas de besoin.

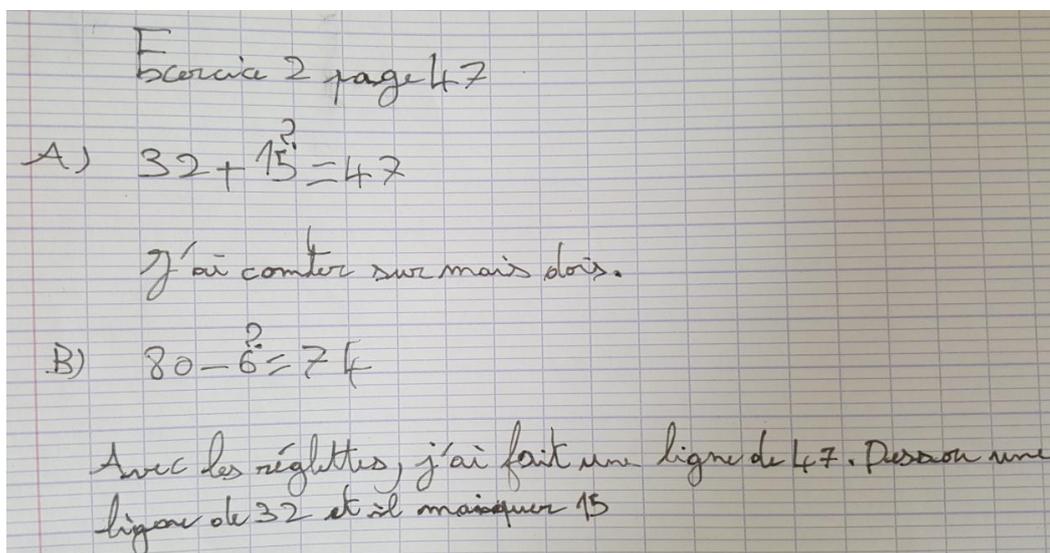
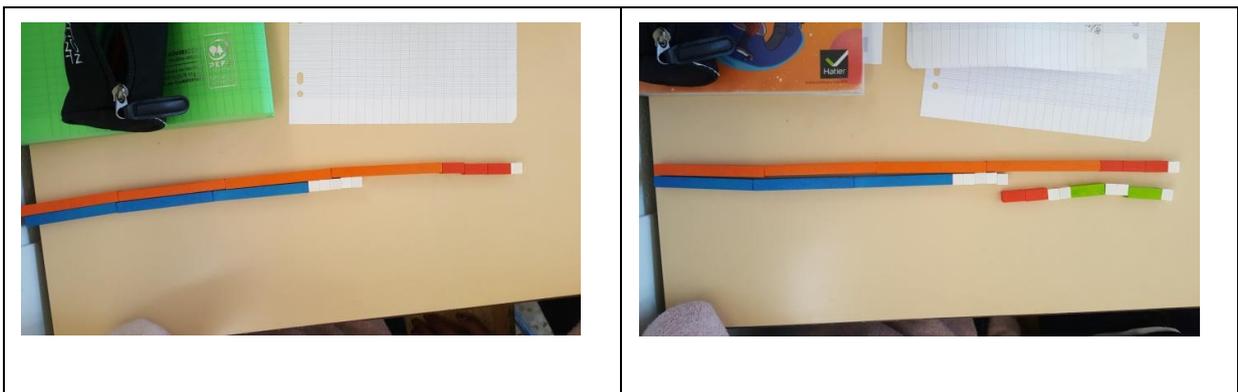
2) Présentation des résultats

A- Les résultats objectifs de l'expérimentation

Après ces différentes phases d'entraînement avec la manipulation des réglettes, j'ai repris les évaluations diagnostiques que j'avais menées en début de période afin de leur faire refaire et de comparer les résultats.

- Les compléments

Je leur ai proposé le même exercice de mesure de branche, questions a et b, sans aide des réglettes. Sur les 9 élèves, 5 ont réussi à faire l'intégralité de l'exercice, 2 n'ont fait que la question a, et 2 ne l'ont pas effectué. Puis j'ai demandé à certains d'entre eux de représenter le problème (question a) avec les réglettes, pour vérifier leur résultat, et d'expliquer enfin comment ils ont fonctionné avec les réglettes. (cf photos ci-dessous)



- Le calcul additif

J'ai proposé à mes neuf élèves observés de refaire la série de calculs additifs qu'ils avaient réalisée en début de période, dans le même temps imparti : 5 minutes. Voici un tableau récapitulatif qui compare les résultats de l'évaluation diagnostique et ceux de l'évaluation finale.

	Nombre de calculs effectués lors de l'évaluation diagnostique	Nombre de calculs effectués lors de l'évaluation finale	Différence
Elève 1	54	60	+6
Elève 2	20	20	+0
Elève 3	22	41	+19
Elève 4	58	63	+5
Elève 5	37	42	+5
Elève 6	37	34	-3
Elève 7	53	63	+10
Elève 8	38	42	+4
Elève 9	38	47	+9

B- Analyse des résultats

J'ai mené cette étude dans le but de mesurer l'impact qu'a la manipulation des réglettes Cuisenaire sur les apprentissages des élèves en mathématiques. Les résultats ont été satisfaisants.

Avant de commencer, j'avais émis l'hypothèse que ce matériel serait attrayant pour la plupart des élèves. Cela a été vérifié : les élèves montraient tous un très grand enthousiasme à utiliser les réglettes, qui a probablement engendré une motivation intrinsèque supérieure à un enseignement mathématique traditionnel sans manipulation de cet outil.

Sur le plan des compétences acquises, une progression notable a été constatée. S'agissant des compléments, plus de la moitié des élèves ont réussi à résoudre un problème qui les mettait initialement tous en échec. J'ai cherché à comprendre quelles images mentales ils s'étaient représentés afin de parvenir à le comprendre et le résoudre. J'ai eu spontanément la reproduction, l'une sous l'autre, des branches de 32 et 47 cm avec les réglettes. Ils n'avaient plus qu'à compléter la courte pour atteindre la longue et à compter la différence. C'est donc une vérification avec le matériel qui a conforté les élèves dans leur résultat. Même si cette étape a semblé quelque peu superficielle à leur travail puisqu'ils étaient déjà convaincus de leur résultat, elle a aussi été le moyen de montrer que les réglettes peuvent s'utiliser pour vérifier un résultat en cas de doute. Les deux élèves qui n'ont réalisé que la moitié de l'exercice ont aussi été en réussite puisque le problème a été compris de manière autonome, le sens de l'opération à mettre en œuvre a également été trouvé, et le calcul a été réalisé avec succès.

Les deux élèves qui n'ont pas réalisé l'exercice n'ont pas su quelle opération mettre en œuvre et ont rejeté en bloc la réalisation de la tâche. C'est là une première limite à cette activité. En effet, la résolution de problème implique d'autres compétences en amont de l'exécution d'une procédure technique, comme la compréhension de l'écrit et la formation d'une image mentale permettant de se représenter le problème, ou encore l'élaboration du sens de l'opération à mettre en œuvre. Ces étapes ont donc été des sources de difficultés pour ces deux élèves, d'autant plus que l'une d'elles a une maîtrise limitée de la langue française puisqu'elle était allophone en début d'année scolaire.

La deuxième limite qui vient nuancer ces résultats est le fait que ce même exercice avait déjà été réalisé, expliqué, corrigé en classe. Même si les deux évaluations ont été effectuées à plusieurs mois d'intervalle, il se peut que les enfants aient mémorisé la procédure à faire sans en comprendre le sens. Pourtant leurs explications à l'oral m'ont paru tout à fait pertinentes, et porteuses d'une compréhension en profondeur du sens de l'opération qu'ils venaient d'effectuer, articulée à une représentation concrète du problème.

Quant aux calculs additifs proposés, les résultats sont ici sans appel. Sur les 9 élèves observés, 7 se sont montrés plus rapides, dont l'un d'eux a progressé de manière fulgurante puisqu'il a carrément doublé le nombre de calculs effectués. Je n'ai relevé qu'une seule erreur qui n'impacte pas le delta entre les résultats. Une élève a effectué le même nombre de calculs et

une autre en a effectué trois de moins (de 37 à 34). Là encore, on peut se poser la question de savoir si le fait de refaire les mêmes calculs n'a pas biaisé les résultats du fait de leur répétition, mais je doute que dans un intervalle de trois semaines, les élèves aient pu user de leur mémoire plutôt que de la procédure opératoire sur ce type de calculs. En tout cas, ces évaluations ont eu lieu de manière relativement rapprochée, ce qui rend les résultats d'autant plus satisfaisants et encourageants. On peut donc conclure sans se tromper que les élèves ont été plus efficaces dans la manipulation des nombres. J'attribue ce gain d'efficacité à la manipulation régulière des réglettes Cuisenaire qui a été mise en œuvre dans cet intervalle de temps.

III- Partie discussion : interprétation et analyse

1) Comparaison des résultats théoriques et empiriques

Les premières conclusions d'entrée observables issues de mon expérimentation qui font écho aux écrits des auteurs sus-cités, sont l'effet que procure le jeu des réglettes sur les enfants. Effectivement, cette entrée par le jeu et le plaisir de manipuler les réglettes Cuisenaire permet aux élèves de s'affranchir de toute idée négative, voire sclérosante, à propos des mathématiques. La motivation intrinsèque est ainsi maximale et forme le terreau sur lequel l'élève va bâtir ses apprentissages avec envie et succès.

Quant aux résultats mesurés, le degré de progression effectuée par les élèves est aussi satisfaisant que ce que les auteurs adeptes des réglettes Cuisenaire prévoyaient. Outre les résultats finaux et mesurables, on peut aussi noter certaines attitudes provoquées par la manipulation des réglettes et qui selon les auteurs précédents, seraient inhérentes à leur utilisation. Il s'agit premièrement d'un certain degré d'autonomie gagné par les élèves qui ont eu tendance à avoir recours aux réglettes pour valider leurs réponses. Il est vrai que les réglettes ont une caractéristique d'autocorrection importante. D'autre part, la manipulation des réglettes a eu tendance à provoquer une verbalisation des procédures utilisées, que ce soit dans des échanges, ou même lors de jeux en autonomie et individuels lors desquels j'ai surpris plusieurs élèves à décrire à haute voix leurs actions sur les réglettes.

La différence notoire qu'il existe entre la préconisation théorique d'un enseignement reposant sur la manipulation des réglettes et ma méthode mise en œuvre auprès des élèves de ma classe, c'est que les auteurs sur lesquels je me suis appuyée préconisent un enseignement des

mathématiques en débutant par la manipulation des réglettes Cuisenaire. Or dans mon cas d'étude, il s'agit au contraire de notions déjà abordées dans les niveaux précédents, mais non maîtrisées par cet échantillon d'élèves. J'ai donc choisi de revenir sur des notions mathématiques fondamentales avec eux (la structure additive et soustractive des nombres) par l'utilisation des réglettes afin qu'ils puissent acquérir les compétences en question et les transférer dans d'autres situations. De la même manière, alors qu'il est préconisé de mettre en place un passage à l'écrit souple et basé sur la création d'une notation propre à l'élève en fonction de ses expériences de manipulation avec les réglettes, les élèves observés étaient déjà en connaissance des écrits symboliques mathématiques. J'ai d'ailleurs moi-même demandé de mettre en corrélation assez rapidement les écrits aux expériences de manipulation lors de jeux d'échanges (de commande par exemple). Néanmoins, si je compare la théorie préconisée et mes propres résultats, je constate avec satisfaction que l'objectif de réussite et les apports constatés sont comparables et similaires.

Il manque cependant la phase de transfert des apprentissages que je n'ai pas menée à bien à cause d'un temps limité, et qui pourtant, selon plusieurs chercheurs et notamment Britt-Mari Barth, témoigne indéniablement du passage à l'abstraction de l'apprenant pour un concept donné. Bien que les évaluations finales sur la notion de complément et celle du calcul additif soient satisfaisantes, cette phase ultime permettra un retour sur les apprentissages par métacognition et fera prendre conscience aux élèves de leur propre raisonnement pour pouvoir le mettre à profit dans d'autres situations, notamment dans des situations-problèmes, ou encore lors de calculs soustractifs.

2) Analyse des résultats empiriques à la lumière des résultats théoriques

Dans un premier temps, les résultats de mon expérimentation sont à nuancer pour deux raisons. La première est ma population observable restreinte de 9 élèves qui est trop faible pour pouvoir généraliser les résultats. La deuxième est que je n'ai pas d'échantillon empirique de comparaison. Pour une étude plus représentative, une étude comparative aurait pu être menée entre un groupe manipulant et un groupe ne manipulant pas les réglettes Cuisenaire. Mais mon devoir de porter chaque élève à la réussite ne m'a pas permis d'effectuer une telle étude. La méthode qui consiste à comparer un avant à un après d'un même élève est peut-être moins fiable mais a toutefois montré une direction très satisfaisante vers des progrès notables.

La notion la plus difficile à mesurer mais sans doute celle qui est la plus représentative de l'efficacité des réglettes Cuisenaire est le sens donné aux chiffres par la manipulation de ce matériel. En effet lorsqu'ils manipulent les réglettes, les enfants font particulièrement attention aux rapports qu'il existe entre elles, que ce soit par les couleurs ou par les longueurs. Cette première abstraction est un préalable à la pensée mathématique qui fonctionne principalement sur les relations qu'ont les nombres entre eux. Redonner ainsi du sens dans l'apprentissage des mathématiques permet de passer à l'abstraction et de construire les savoirs en jeu. Comprendre ce que l'on apprend c'est aussi une première étape pour faire tomber les barrières issues des jugements déjà trop ancrés que l'on est « mauvais en mathématiques », et d'aller vers un apprentissage des mathématiques en confiance et dans la joie. J'estime ainsi que si les résultats ont été aussi positifs, c'est que les élèves ont toujours participé aux APC dédiées aux réglettes Cuisenaire avec envie et motivation.

Je tiens à préciser enfin la nécessité de la manipulation en mathématiques pour des enfants de cet âge que j'ai pu moi-même observer. Les CE2 arrivent à la fin du cycle 2, et l'on pourrait croire qu'ils sont en train de fixer des acquisitions attendues en fin de cycle de concepts déjà abordés dans les niveaux antérieurs. Cependant, si l'on se réfère à la théorie piagétienne des différents stades de développement de l'enfant, les enfants en CE2 se trouvent entre le « stade pré-opérateur » et celui des « opérations concrètes », c'est-à-dire qu'à 8 ans, l'enfant est en train de concevoir la représentation mentale des transformations qu'il effectue sur les objets car ses actions sont mises en relations et non plus isolées. Sachant cela, il est indispensable de faire le lien entre le monde abstrait des mathématiques et le monde concret de la réalité. J'ai en effet constaté à plusieurs reprises que pour illustrer un problème ou vérifier un calcul, les enfants avaient spontanément recours aux réglettes. C'est donc ainsi que l'on peut considérer les réglettes Cuisenaire, comme un outil permettant ce passage du monde concret au monde abstrait.

CONCLUSION

Si la manipulation est une pratique pédagogique indispensable à un enseignement des mathématiques efficace et à une compréhension profonde de cette discipline permettant de fixer les apprentissages, les réglettes Cuisenaire semblent en être l'outil par excellence. Elles permettent en effet de comprendre le comportement des nombres entre eux par l'expérience de leur manipulation. Les mathématiques font ainsi sens pour l'apprenant, bien que cette discipline soit particulièrement abstraite et qu'il soit encore difficile pour les enfants de pénétrer le monde abstrait. Le passage à l'abstraction en est facilité et les conditions d'un apprentissage efficace sont ainsi posées. L'étude que j'ai menée permettant à au moins 7 élèves sur 9 de dépasser leurs difficultés dans la construction de la structure additive du nombre en est l'illustration criante.

Mais la seule manipulation des réglettes Cuisenaire, sans guidage de l'enseignant ne peut être suffisante. L'enfant doit être accompagné pour être en confiance, et sa réflexion doit être guidée afin que l'outil devienne de plus en plus efficace et que l'élève gagne en autonomie. D'ailleurs, il me semble nécessaire que l'enseignant lui-même soit guidé dans la pratique de l'utilisation des réglettes afin qu'il puisse dispenser un enseignement davantage adapté aux besoins et qu'il mette à profit cet outil pédagogique pour maximiser son immense potentiel.

BIBLIOGRAPHIE

BARTH Britt-Mari, L'apprentissage de l'abstraction, RETZ, 2013

BARUK Stella, Comptes pour petits et grands, Pour un apprentissage du nombre et de la numération fondé sur la langue et les sens, volume 1, édition Magnard, 2003

BARUK Stella, Comptes pour petits et grands, Pour un apprentissage du nombre et de la numération fondé sur la langue et les sens, volume 2, édition Magnard, 2003

DIAS Thierry, Manipuler et expérimenter en mathématiques, édition Magnard, 2012

GATTEGNO Caleb, Enfin, Freddy comprend l'arithmétique, L'emploi des « Réglettes Cuisenaire » expliqué aux parents, Editions Delachaux et Niestlé, 1967

GOUTARD Madeleine, La pratique des nombres en couleur, édition Une éducation pour demain, 2011

RADFORD Luis, DEMERS Serge, MIRANDA Isaias, Processus d'abstraction mathématiques, Repères pratiques et conceptuels, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario et Université Laurentienne, 2009

ROBICHAUD Cécile, L'effcience des réglettes Cuisenaire, 3^{ème} et 4^{ème} années primaires, éditions Delachaux et Niestlé, 1968

Bulletin officiel spécial n° 2 du 26 mars 2015

Bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015

Note d'information n°33, Direction de l'Évaluation, de la prospective et de la performance, Novembre 2016

ANNEXES

Annexe 1 : Evaluation diagnostique et finale sur les compléments : Cap Maths, Edition Hatier 2011, Exercice 2 p. 47

EXERCICES

2 Trouve la longueur qui manque, sans mesurer.
Écris tes calculs.

a.

b.

c.

Annexe 2: Evaluation diagnostique et finale sur le calcul additif

Prénom : Date :

$\begin{array}{r} 6 \\ + 5 \\ \hline \end{array}$	Addition posée en ligne : $9 + 9 = 18$	Addition posée en colonne : $\begin{array}{r} 9 \\ + 9 \\ \hline 18 \end{array}$
---	---	--

• Calcule ces additions en ligne :

$3 + 1 = 4$	$9 + 2 = \dots$	$7 + 5 = \dots$	$9 + 7 = \dots$	$4 + 4 = \dots$
$4 + 1 = \dots$	$7 + 2 = \dots$	$9 + 8 = \dots$	$6 + 2 = \dots$	$8 + 8 = \dots$
$2 + 2 = \dots$	$0 + 7 = \dots$	$6 + 1 = \dots$	$3 + 5 = \dots$	$3 + 3 = \dots$
$4 + 2 = \dots$	$3 + 2 = \dots$	$6 + 8 = \dots$	$3 + 8 = \dots$	$9 + 9 = \dots$
$7 + 1 = \dots$	$2 + 8 = \dots$	$7 + 6 = \dots$	$8 + 6 = \dots$	$7 + 7 = \dots$
$2 + 3 = \dots$	$8 + 2 = \dots$	$5 + 5 = \dots$	$6 + 6 = \dots$	$7 + 8 = \dots$

$4 + 6 = 10$	$4 + 2 = \dots$	$7 + 5 = \dots$	$2 + 9 = \dots$	$6 + 4 = \dots$
$3 + 7 = \dots$	$5 + 3 = \dots$	$8 + 7 = \dots$	$7 + 4 = \dots$	$7 + 3 = \dots$
$5 + 5 = \dots$	$8 + 4 = \dots$	$6 + 6 = \dots$	$1 + 9 = \dots$	$8 + 9 = \dots$
$9 + 9 = \dots$	$7 + 3 = \dots$	$7 + 8 = \dots$	$8 + 7 = \dots$	$2 + 3 = \dots$
$9 + 0 = \dots$	$6 + 6 = \dots$	$8 + 9 = \dots$	$2 + 8 = \dots$	$5 + 5 = \dots$
$8 + 8 = \dots$	$9 + 7 = \dots$	$9 + 6 = \dots$	$9 + 5 = \dots$	$9 + 4 = \dots$

$3 + 3 = 6$	$8 + \dots = 9$	$6 + \dots = 7$	$4 + \dots = 9$	$3 + \dots = 9$
$4 + \dots = 7$	$\dots + 7 = 9$	$\dots + 7 = 9$	$\dots + 3 = 7$	$\dots + 7 = 8$
$\dots + 3 = 8$	$7 + \dots = 8$	$4 + \dots = 8$	$6 + \dots = 9$	$8 + \dots = 10$
$2 + \dots = 8$	$\dots + 4 = 8$	$\dots + 4 = 7$	$2 + \dots = 8$	$7 + \dots = 10$
$\dots + 4 = 7$	$2 + \dots = 7$	$3 + \dots = 6$	$4 + \dots = 10$	$\dots + 4 = 5$
$5 + \dots = 9$	$4 + \dots = 9$	$5 + \dots = 7$	$7 + \dots = 9$	$2 + \dots = 6$

$2 + 7 = 9$	$4 + \dots = 10$	$3 + \dots = 10$	$8 + \dots = 15$	$6 + \dots = 9$
$3 + \dots = 8$	$\dots + 2 = 8$	$\dots + 7 = 10$	$\dots + 7 = 15$	$\dots + 7 = 9$
$\dots + 4 = 9$	$6 + \dots = 9$	$8 + \dots = 12$	$7 + \dots = 15$	$8 + \dots = 9$
$1 + \dots = 8$	$2 + \dots = 8$	$9 + \dots = 10$	$\dots + 8 = 15$	$\dots + 4 = 9$
$\dots + 3 = 12$	$5 + \dots = 10$	$\dots + 4 = 7$	$5 + \dots = 11$	$3 + \dots = 9$
$6 + \dots = 10$	$7 + \dots = 10$	$9 + \dots = 10$	$1 + \dots = 10$	$5 + \dots = 11$

$8 + 9 = 17$	$2 + \dots = 10$	$6 + \dots = 13$	$4 + \dots = 12$	$7 + \dots = 13$
$\dots + 7 = 16$	$3 + \dots = 12$	$\dots + 7 = 15$	$\dots + 7 = 16$	$\dots + 8 = 10$
$7 + \dots = 14$	$\dots + 4 = 11$	$8 + \dots = 16$	$8 + \dots = 17$	$6 + \dots = 11$
$\dots + 8 = 13$	$4 + \dots = 11$	$\dots + 4 = 12$	$9 + \dots = 18$	$5 + \dots = 13$
$5 + \dots = 12$	$\dots + 3 = 11$	$3 + \dots = 12$	$\dots + 4 = 13$	$9 + \dots = 18$
$1 + \dots = 9$	$6 + \dots = 12$	$5 + \dots = 14$	$9 + \dots = 10$	$8 + \dots = 17$

Jeu des réglettes en colonnes

BUT DU JEU :

Le but du jeu est de remplir les colonnes le premier. A tour de rôle chaque joueur lance deux dés. Il recherche dans la boîte des réglettes celle /celles qui correspondent aux dés. Plusieurs possibilités :

- 2 réglettes dont la longueur **est indiqué par chaque dé** (ex : 3 et 6)
- 1 réglette qui correspond à **la somme des dés** (ex : $3+6=9$)
- 1 réglette qui correspond à **la différence des dés** (ex : $6-3=3$)
- 1 réglette qui correspond au **produit des dés** (ex : $3 \times 6=18$)
- 1 réglette qui correspond au **quotient des dés** (ex : $6:3=2$)

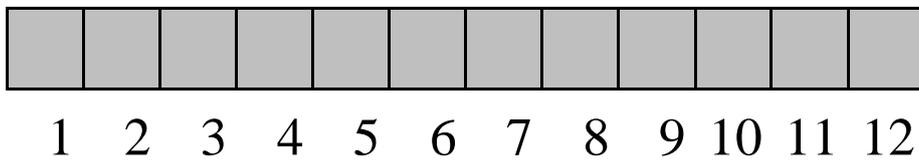
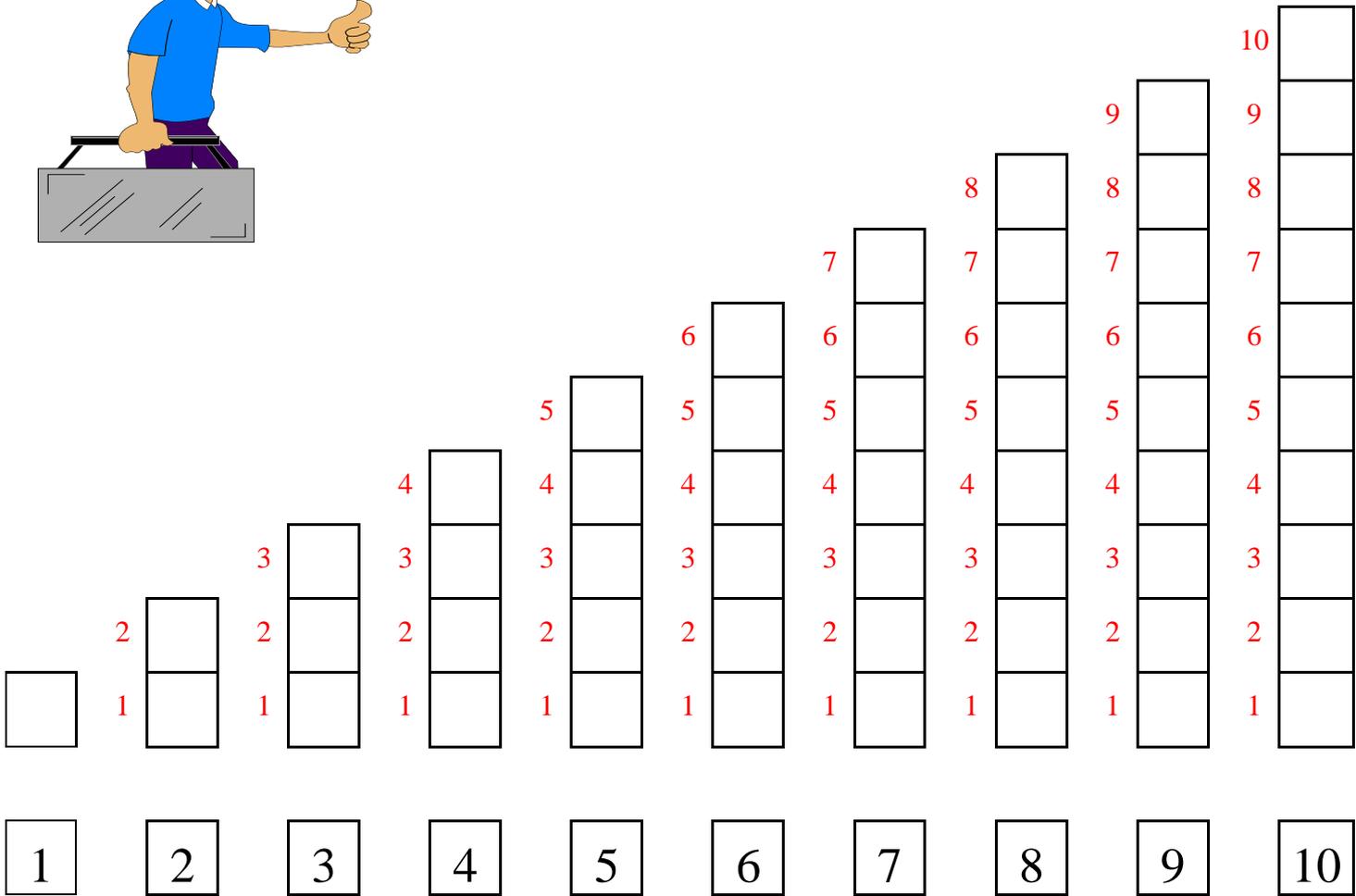
Il dispose ensuite librement les réglettes dans les colonnes de sa feuille de jeu. Il devra ensuite au cours du jeu compléter les différentes colonnes.

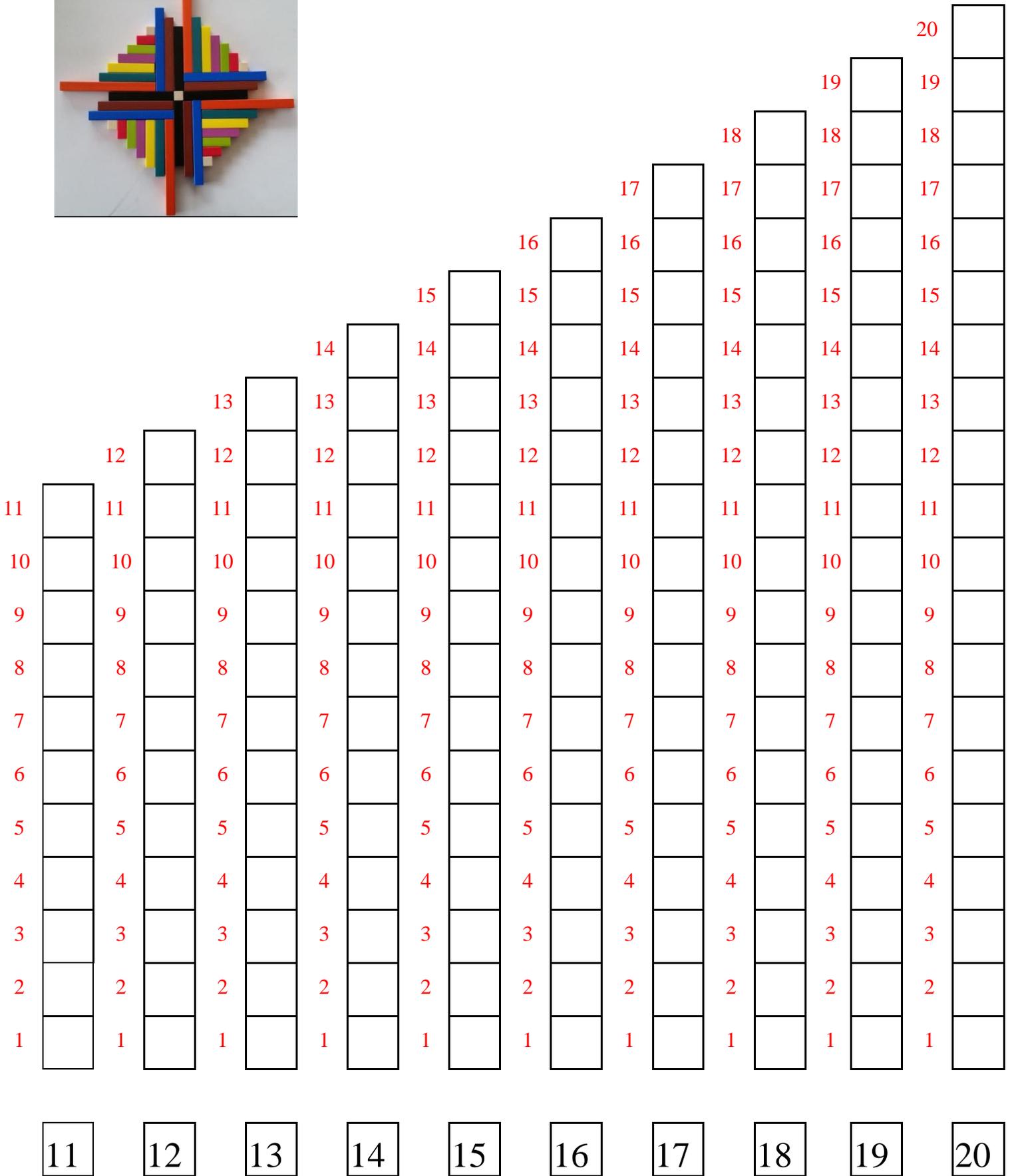
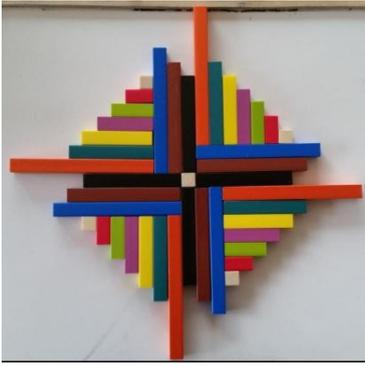
L'échelle grisée lui permet de vérifier les différentes longueurs (plus long, plus court).

Le gagnant sera celui qui aura rempli toutes les colonnes le premier.

Autres variantes de jeu :

- terminer en ayant le moins de réglettes possibles sur sa feuille grâce aux réglettes longues (il faut surtout faire des additions et des multiplications).
- terminer en ayant le plus de réglettes possibles grâce aux réglettes courtes (il faut surtout faire des soustractions et des divisions).
- Une autre feuille de jeu avec les colonnes de 10 à 20.





Les apports de la manipulation des réglettes

Cuisenaire en mathématiques

Résumé en français (150 mots env.)

La manipulation dans l'apprentissage des mathématiques permet de faciliter le passage à l'abstraction. Cette dernière est l'étape ultime de la construction des apprentissages et relève d'un processus cognitif qui part de l'observation de la réalité jusqu'au monde de la pensée, grâce au discernement des attributs essentiels du concept en jeu. Les réglettes Cuisenaire sont un outil pédagogique que j'ai souhaité expérimenter afin de déterminer si leur manipulation participe au passage à l'abstraction, processus particulièrement difficile dans le domaine des mathématiques du fait de leur spécificité : une abstraction inhérente. Il est ressorti de mon expérimentation que la manipulation des réglettes Cuisenaire, effectuée de manière équilibrée entre autonomie de l'enfant et guidage de l'enseignant, et amenée lors de certaines phases du processus d'apprentissage, s'avère efficace. Elle participe en effet au processus d'abstraction en apportant un éclairage sur les rapports entre les nombres et en leur conférant du sens, condition indispensable à tout apprentissage.

Mots-Clés (3 à 5)

Réglettes Cuisenaire – Manipulation – Passage à l'abstraction - Mathématiques