



**HAL**  
open science

## Une introduction géométrique à la racine carrée

Montserrat Gomez Pardo

► **To cite this version:**

Montserrat Gomez Pardo. Une introduction géométrique à la racine carrée. Education. 2018. dumas-01942376

**HAL Id: dumas-01942376**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01942376>**

Submitted on 10 Dec 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Année universitaire 2017-2018**

**Master MEEF**

**Mention 2<sup>nd</sup> degré- parcours Mathématiques**

**2<sup>ème</sup> année**

# **UNE INTRODUCTION GEOMETRIQUE A LA RACINE CARREE**

**Mots Clefs : racine carrée, seconde, troisième, activité introductive, géométrie**

**Présenté par : Montserrat GOMEZ PARDO**

**Encadré par : Nicolas MEUNIER**



## Table des matières

---

Introduction .....	1
Partie A : Analyse de la notion de racine carrée et de son enseignement .....	3
I. Analyse historique .....	3
1. Une notion ancienne .....	3
2. La crise des irrationnels .....	3
3. Un symbole en évolution .....	4
II. Evolution des programmes et analyse de manuels scolaires .....	5
1. Le statut de racine carrée dans les programmes : étude de T. Assude .....	5
2. Evolution des programmes depuis 1999 et analyse de manuels scolaires.....	6
➤ Programme de 1999 .....	6
➤ Programme de 2008 .....	8
➤ Programme de 2016 .....	11
III. Difficultés rencontrées par les élèves .....	14
Partie B : Une activité géométrique pour introduire la racine carrée .....	16
I. Mise en situation .....	16
1. Une classe hétérogène .....	16
2. Des connaissances morcelées sur la racine carrée .....	16
II. Présentation de l'activité proposée .....	18
1. Réflexion ayant conduit à la création de l'activité .....	18
2. Analyse <i>a priori</i> .....	19
III. Déroulement effectif de l'activité .....	21
IV. Analyse <i>a posteriori</i> .....	22
1. Premier demi-groupe .....	22
2. Second demi-groupe .....	23
3. Bilan de l'activité .....	24
Conclusion.....	26
Bibliographie .....	28
Annexes .....	31



## Introduction

---

La notion de racine carrée est aujourd'hui une notion difficile à appréhender et à comprendre pour les élèves du secondaire. Les racines carrées sont des nombres que les élèves n'ont pas l'habitude de rencontrer et de manipuler : en effet, ces nombres ne sont pas étudiés à l'école primaire (au contraire des entiers et des décimaux bien plus familiers des élèves) ni dans la vie courante. Ainsi, les élèves ont pour la plupart du mal à s'approprier cette notion qui leur est étrangère et qui a peu voire pas de sens pour eux.

La notion de racine carrée est une notion qui a beaucoup évolué dans sa présentation aux élèves et dans les attentes formulées par le programme de mathématiques à son égard. On peut citer par exemple le calcul d'une valeur approchée d'une racine carrée par le biais d'un algorithme présent dans les programmes jusque dans les années 1960 puis le passage à l'utilisation de la calculatrice pour l'obtention de ces mêmes valeurs approchées. De même, la racine carrée a connu différents statuts mathématiques (plus ou moins clairs) au fur et à mesure des modifications des programmes.

La refonte des programmes de collège de 2016 avec le redécoupage des cycles 1, 2 et 3 et l'ajout du cycle 4 n'est pas sans conséquence pour l'enseignement de la racine carrée au collège et par extension au lycée. En effet, l'ancien programme<sup>1</sup> (mis en place à la rentrée scolaire 2009) prévoyait l'introduction de la racine carrée en deux temps :

- en 4<sup>ème</sup>, la racine carrée est introduite par la touche racine carrée de la calculatrice dans le chapitre sur le théorème de Pythagore
- en 3<sup>ème</sup>, un chapitre entier est consacré à la notion avec la formulation d'une définition et de propriétés sur les produits et les quotients de racines carrées

Le programme en vigueur aujourd'hui<sup>2</sup> évoque la racine carrée en lien avec le théorème de Pythagore (comme dans l'ancien programme) mais il n'est plus mention de la racine carrée dans un cadre qui ne serait pas géométrique.

Cette transition entre deux programmes différents m'a amenée à me poser la question de l'enseignement de cette notion à ma classe de seconde qui, ayant passé une troisième dans le cadre de la réforme du collège, n'a aucune conception de ce qu'est une racine carrée mis à part « une touche sur la calculatrice ». L'aménagement du programme de seconde<sup>3</sup> proposé pour faire une transition entre la classe de troisième avec la réforme du collège et la classe de seconde dont le programme<sup>4</sup> date de 2010 ne mentionne pas les racines carrées contrairement à d'autres notions supprimées du programme de collège, comme les identités remarquables et les systèmes d'équations de deux équations à deux inconnues qui intègrent désormais les programmes de seconde. Or les racines carrées interviennent au sein du programme de seconde notamment dans le chapitre sur le repérage dans le plan avec la formule de la distance entre deux points. Il est donc nécessaire que mes élèves de seconde se familiarisent avec la notion de racine carrée. Pour cela, il m'est apparu important de leur proposer une activité introductive qui donne du sens à

---

<sup>1</sup> BO Hors-série n°5 du 25 août 2008

<sup>2</sup> BO spécial n°11 du 26 novembre 2015

<sup>3</sup> Aménagement B.O. n°18, 4 mai 2017

<sup>4</sup> BO n°30 du 23 juillet 2009

cette notion. Je me suis donc demandé si une introduction géométrique ne permettrait pas de donner plus de sens au nombre racine carré de  $a$ .

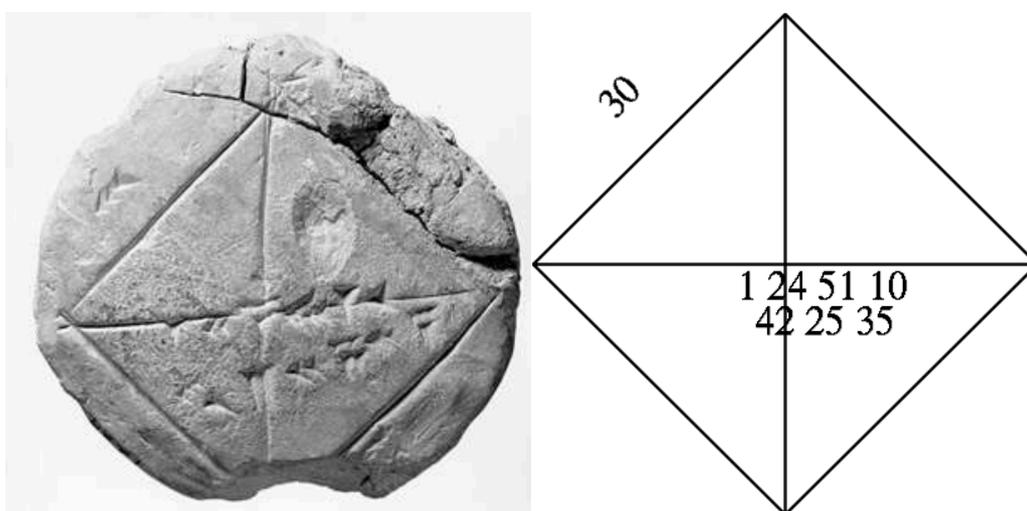
Nous allons voir dans une première partie une présentation de la notion (historique, pédagogique avec l'analyse de programmes et de manuels scolaires), son introduction aux élèves au cours du temps et des changements de programmes ainsi que les difficultés classiques rencontrées par les élèves sur cette notion. Dans une seconde partie, je proposerai une activité géométrique introductive à la racine carrée mise en place dans ma classe de seconde, pour essayer de remédier à certaines de ces difficultés et donner du sens à la notion.

## Partie A : Analyse de la notion racine carrée et de son enseignement

### I. Analyse historique

#### 1. Une notion ancienne

La racine carrée est une notion ancienne dont on trouve déjà trace chez les Babyloniens au II<sup>ème</sup> millénaire avant notre ère. En effet, la plus ancienne représentation d'une valeur approchée de  $\sqrt{2}$  se trouve sur une tablette d'argile qui serait l'œuvre d'un scribe babylonien de la première dynastie (entre 1900 et 1600 avant notre ère). Cette tablette connue sous le nom de YBC 7289<sup>5</sup>, conservée à l'université Yale aux Etats-Unis, représente un carré avec ses diagonales.



Photographie de la tablette YBC 7289<sup>6</sup> et schéma portant la traduction des inscriptions cunéiformes qui y sont inscrites

Elle semble répondre à la question suivante : « Un carré de côté 30 étant donné, quelle est la longueur de ses diagonales ? ». Si l'on traduit dans notre système moderne de numération les inscriptions cunéiformes de la tablette, on obtient que la longueur de la diagonale est d'environ 42,4263889. L'autre inscription portée sur la tablette est la valeur 1,41421296 qui est une valeur approchée de  $\sqrt{2}$  relativement précise. C'est cette valeur qui permet d'obtenir la longueur de la diagonale en la multipliant par la longueur du côté du carré :  $30 \times 1,41421296$  qui est environ égal à 42,4263889. La tablette met ainsi en évidence l'utilisation de  $\sqrt{2}$  pour déterminer la longueur de la diagonale d'un carré de côté donné. Cependant, on ne sait comment l'approximation de  $\sqrt{2}$  présente sur la tablette a été déterminée.

#### 2. La crise des irrationnels

Comme Dedron et Itard l'écrivent dans leur ouvrage *Mathématiques et mathématiciens*, les racines carrées trouvent leur origine dans les problèmes nécessitant de calculer le côté d'un carré dont l'aire est donnée numériquement ou dans les problèmes nécessitant de construire le

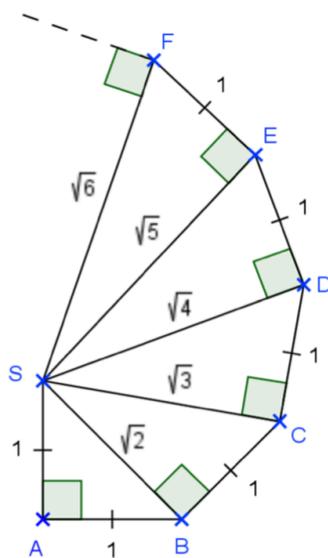
<sup>5</sup> YBC est l'abréviation de Yale Babylonian Collection.

<sup>6</sup> Copyright : Yale Babylonian Collection

côté d'un carré d'aire donnée géométriquement. La notion de racine carrée est donc, dès le départ, liée à la géométrie. L'expression racine carrée trouverait même son explication dans ce lien avec la géométrie :

- le mot racine renvoie à l'idée de revenir en arrière (retour à la racine) : on part de l'aire du carré et à partir de cette donnée, on retrouve la mesure de la longueur du côté du carré ; on a ici l'idée d'un nombre qui serait enfoui dans un autre
- le mot carré dans sa signification géométrique ou arithmétique renvoie à la figure géométrique du carré

La racine carrée a provoqué la première grande crise des mathématiques occidentales : la crise des irrationnels chez les Grecs. En effet, les pythagoriciens considéraient que les seuls nombres valables étaient les nombres entiers et les fractions. Les grecs connaissaient l'existence de  $\sqrt{2}$  car ce nombre était constructible à la règle et au compas comme diagonale d'un carré de côté 1, mais la découverte de l'impossibilité d'exprimer ce nombre sous la forme d'un nombre entier ou d'une fraction fit scandale et remit en cause les savoirs des mathématiciens grecs. Des savants grecs comme Platon, Aristote et Euclide démontrent l'incommensurabilité de la diagonale du carré avec son côté, ce qui revient à démontrer que  $\sqrt{2}$  est un nombre irrationnel. Un autre savant grec Théodore de Cyrène s'est intéressé à ces nombres irrationnels en démontrant notamment que les racines carrées des nombres 3, 5, 6 étaient des nombres irrationnels par une méthode dont nous n'avons pas connaissance. Théodore de Cyrène est entre autres à l'origine de la construction de ce que l'on appelle aujourd'hui l'escargot de Pythagore, qui permet de construire géométriquement et pas à pas des segments de longueurs  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{4}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{6}$  etc.



Escargot de Pythagore

Après la découverte des irrationnels, il a fallu de nombreuses années pour que les mathématiciens s'habituent à la manipulation et au travail avec ces nombres, qui pendant longtemps n'ont pas été considérés comme de véritables nombres.

### 3. Un symbole en évolution

Le premier symbole utilisé, au II<sup>ème</sup> siècle après J.C., pour désigner la racine carrée est la lettre l qui est la première lettre du mot latin *latus* signifiant côté d'un carré. On voit donc

l'importance de la caractérisation géométrique de la racine carrée dans le choix de ce premier symbole.

Ce symbole évolue ensuite pour laisser la place à la lettre r initiale du mot latin *radix* qui signifie racine. C'est en 1525 qu'apparaît pour la première fois le symbole radical dans le traité d'arithmétique *Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeincklich die Coss genent werden*<sup>7</sup> de Christoph Rudolf, mathématicien allemand. Rudolf y emploie le symbole  $\sqrt{\quad}$  (sans barre horizontale) pour désigner la racine carrée. Ce symbole peut trouver son origine dans la déformation d'un r gothique mais rien ne permet de l'affirmer.

Descartes dans son ouvrage, *La Géométrie*, publié en 1637 fait apparaître le symbole radical tel qu'on le connaît aujourd'hui avec la barre horizontale. Ce symbole viendrait du recollement du symbole radical sans barre horizontale introduit par Rudolf et de la barre horizontale utilisée par certains mathématiciens au lieu de parenthèses dans les calculs.

## **II. Evolution des programmes – analyse de manuels scolaires**

Au cours du temps, la notion de racine carrée a évolué dans sa présentation dans les programmes officiels notamment au niveau de son statut (nombre, fonction, irrationnel...), du calcul (extraction, approximation) et des opérations qui lui sont liées.

### 1. Le statut de racine carrée dans les programmes : étude de T. Assude

T. Assude<sup>8</sup> distingue trois périodes : une période avant la réforme des mathématiques modernes, une période pendant la réforme des mathématiques modernes et une période après la réforme des mathématiques modernes.

Pendant la première période qui s'étend jusqu'en 1970, la racine carrée est une opération qui figure dans la partie arithmétique du programme. Un algorithme permet de l'extraire et d'obtenir des informations sur ce nombre, notamment en ce qui concerne sa nature (entier, décimal...). L'absence de calculatrice donne du sens aux calculs visant à simplifier des quotients qui possèdent un dénominateur comportant des radicaux irrationnels.

Pendant la seconde période (de 1970 à 1978), la racine carrée est présentée comme une fonction, en cohérence avec le nouveau cadre mis en place pour l'enseignement des mathématiques (ensembles, relations, applications). Cependant, il s'agit ici d'un simple cadre de présentation, en effet, la propriété algébrique  $x^2 = a$  reste la propriété caractéristique de la racine carrée de  $a$  en troisième. L'algorithme d'extraction a disparu des programmes et l'utilisation des calculatrices, mises au point à partir des années 1960, se développe pour calculer une approximation décimale de la racine carrée d'un nombre entier ou décimal.

---

<sup>7</sup> Calcul agile et juste par l'ars magna des règles algébriques, autrement appelé la Coss

<sup>8</sup> CISSE F. (2006), Un dossier sur « racine carrée » à l'usage des formateurs (collège/lycée), *document pour la formation des enseignants*, Université Paris 7 – Denis Diderot

Pendant la troisième période (jusqu'en 1992<sup>9</sup>), la racine carrée n'est plus liée à une opération et n'est plus une fonction. Son statut n'est plus clair. Elle apparaît comme un objet sur lequel on fait des calculs sans que l'on sache réellement quelle est l'utilité de ces calculs. Rien ne permet de justifier l'existence des nombres s'écrivant avec des radicaux et leur statut car les ensembles de nombres ne sont pas étudiés au collège.

T. Assude parle d'un arrêt de la transposition didactique<sup>10</sup> à partir de la troisième période, où disparaît le passage du savoir savant (la fonction carrée est la fonction bijection réciproque sur  $\mathbb{R}^+$  de la fonction carré) au savoir enseigné car, au collège, les élèves ne sont pas à même de se saisir du concept de fonction comme outil de travail.

## 2. Evolution des programmes depuis 1999 et analyse de manuels scolaires

### ➤ Programme de 1999

Le programme de troisième de 1999<sup>11</sup> est un exemple de programme entrant dans la troisième période définie par T. Assude et qui préfigurera les différents programmes de troisième en vigueur jusqu'à la refonte des programmes de collège de 2016.

---

<sup>9</sup> Il s'agit de la date à laquelle T. Assude a soutenu sa thèse dans laquelle elle définit ces trois périodes. Nous pouvons néanmoins élargir cette période jusqu'aux programmes actuels.

<sup>10</sup> Concept introduit par M. Vernet en 1975 puis repris par Y. Chevallard qui désigne l'ensemble des transformations subies par un objet de savoir (c'est-à-dire le savoir des spécialistes du domaine) pour devenir un objet d'enseignement accessibles aux élèves.

<sup>11</sup> MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, Programmes des classes de troisième des collèges, BO Hors série n°10 du 15 octobre 1998, pp. 106-114

CONTENU	COMPETENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
Calculs élémentaires sur les radicaux (racines carrées) Racine carrée d'un nombre positif	Savoir que si $a$ désigne un nombre positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est $a$ . Sur des exemples numériques où $a$ est un nombre positif, utiliser les égalités : $(\sqrt{a})^2 = a, \sqrt{a^2} = a$ . Déterminer sur des exemples numériques, les nombres $x$ tels que $x^2 = a$ où $a$ désigne un nombre positif.	La touche « racine carrée » de la calculatrice qui a déjà été utilisée en classe de quatrième fournit une valeur approchée d'une racine carrée. Le travail mentionné sur les identités remarquables permet d'écrire des égalités comme $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1,$ $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$
Produit et quotient de deux radicaux	Sur des exemples numériques, où $a$ et $b$ sont deux nombres positifs, utiliser les égalités : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}, \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ .	Ces résultats que l'on peut facilement démontrer à partir de la définition de la racine carrée d'un nombre positif, permettent d'écrire des égalités telles que $\sqrt{45} = 3\sqrt{5},$ $\sqrt{4/3} = 2/\sqrt{3}, 1/\sqrt{5} = \sqrt{5}/5.$ On habituera ainsi les élèves à écrire un nombre sous la forme la mieux adaptée au problème posé.

Extrait du programme de troisième de 1999

Dans ce programme, la racine carrée fait son introduction en classe de quatrième en lien avec le théorème de Pythagore par le biais de la calculatrice. Elle apparaît comme un outil de calcul qui permet notamment de calculer la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle. Aucune définition de la racine carrée n'est donnée en quatrième.

En classe de troisième, la racine carrée est mentionnée dans la partie « Travaux numériques » du programme. On voit bien ainsi que l'apprentissage de la racine carrée n'a plus de lien avec les fonctions, contrairement à ce qui était en vigueur dans les programmes correspondant à la seconde période identifiée par T. Assude ; la racine carrée apparaissait alors dans la partie « Nombres réels, calculs algébriques, fonctions numériques » des programmes. Le programme de 1999 présente une caractérisation algébrique de la racine carrée ainsi que des propriétés algébriques que les élèves doivent savoir utiliser sur des exemples numériques. Le calcul approché des racines carrées s'effectue désormais seulement avec la calculatrice. On remarque aussi que le programme passe sous silence les questions d'existence et le statut de « nouveaux nombres » des racines carrées irrationnelles.

#### Etude de deux manuels :

Les deux manuels étudiés correspondant au programme 1999 sont les éditions 2003 des manuels suivants :

- *Math 3<sup>e</sup>*, collection transmath, Nathan
- *Maths 3<sup>e</sup>*, Magnard

Dans ces deux manuels, on a la présence d'un chapitre consacré à la racine carrée. La racine carrée est introduite par le biais d'une activité géométrique:

- une portant sur le passage de l'aire d'un carré à la mesure de la longueur d'un de ses côtés avec des aires qui, dans un premier temps, sont des carrés parfaits puis la même question se pose pour un carré d'aire  $50 \text{ cm}^2$ ; il n'est cependant pas demandé la valeur exacte du côté mais de mesurer sur une figure cette longueur en cm puis d'utiliser la calculatrice pour avoir une valeur approchée (*Math 3<sup>e</sup>*, collection transmath)
- l'autre portant sur un problème historique qu'est la recherche d'un carré d'aire double du carré d'aire 1 (*Maths 3<sup>ème</sup>*, Magnard)

La définition de « racine carrée » choisie dans la partie cours du manuel est la même et s'inspire directement de ce qui est écrit dans le programme. Elle est définie ici du point de vue numérique.

« *a désigne un nombre positif.*

*La racine carrée de a est le seul nombre positif dont le carré est a. Ce nombre est noté  $\sqrt{a}$ . »<sup>12</sup>*

La racine carrée est définie ici du point de vue numérique mais aussi du point de vue algébrique et du point de vue fonctionnel avec la présence implicite de l'ensemble de définition.

Dans le manuel *Math 3<sup>e</sup>*, collection transmath, il n'est pas spécifié (mis à part dans la définition) que la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas, ce qui est fait dans le manuel des éditions Magnard. De même, on trouve seulement dans ce manuel le point de vue géométrique sur la racine carrée avec le dessin d'un carré d'aire  $a \text{ cm}^2$ , où il est indiqué que son côté mesure alors  $\sqrt{a}$  cm.

#### ➤ Programmes de 2008

Le programme de 2008<sup>13</sup> modifie les programmes des classes de quatrième et de troisième.

En quatrième, la racine carrée reste introduite comme un outil de la géométrie au sein de la partie consacré au « Triangle rectangle : théorème de Pythagore ». Cependant, on note que le mot racine carrée et le symbole  $\sqrt{n}$  apparaissent plus dans les programmes. C'était encore le cas dans les programmes de quatrième précédents datant de 2005<sup>14</sup>. Il n'est plus mentionné explicitement l'utilisation de la calculatrice comme outil pour déterminer une valeur approchée d'une racine carrée.

---

<sup>12</sup> Définition donnée par le manuel *Math 3<sup>e</sup>*, collection transmath, Nathan

<sup>13</sup> MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, Programmes du collège. Programmes de l'enseignement de mathématiques, BO Hors-série n°6 du 28 août 2008

<sup>14</sup> MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, Programmes des collèges. Mathématiques. Classe de quatrième, BO Hors série n°5 du 25 août 2005

CONTENUS	COMPETENCES
Triangle rectangle : théorème de Pythagore et sa réciproque	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Caractériser le triangle rectangle par le théorème de Pythagore et sa réciproque.</li> <li>- Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir de celles de deux autres.</li> </ul> En donner, si besoin est, une valeur approchée, en faisant éventuellement usage de la touche $\sqrt{\quad}$ d'une calculatrice.

Extrait du programme de quatrième de 2005

CONNAISSANCES	CAPACITES	COMMENTAIRES
Triangle rectangle : théorème de Pythagore	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Caractériser le triangle rectangle par l'égalité de Pythagore.</li> <li>- Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir de celles des deux autres.</li> </ul>	On ne distingue pas le théorème de Pythagore direct de sa réciproque (ni de sa forme contraposée). On considère que l'égalité de Pythagore caractérise la propriété d'être rectangle.

Extrait du programme de quatrième de 2008

### Etude de manuels :

Les six manuels étudiés correspondant au programme 2008 sont les éditions 2011 des manuels suivants :

- *Mathématiques 4<sup>e</sup>*, collection Phare, Hachette
- *Transmath 4<sup>e</sup>*, Nathan
- *Mathématiques 4<sup>e</sup>*, collection Zénius, Magnard
- *Mathématiques 4<sup>e</sup>*, collection Triangle, Hatier
- *Maths 4<sup>e</sup>*, nouveau Prisme, Belin
- *Mathématiques 4<sup>e</sup>*, collection Myriade, Bordas

Malgré la disparition dans le programme officiel de la mention de la touche racine carrée de la calculatrice, dans l'ensemble de ces manuels, on trouve l'introduction de cette touche dans le chapitre sur le théorème de Pythagore. Cette introduction se fait par le biais d'une activité ou d'un exercice résolu classé dans la partie savoir-faire ou méthode du chapitre.

Seuls deux des six manuels étudiés proposent une « définition » de la racine carrée sur un exemple numérique.

« Le nombre positif dont le carré est 25 est appelé la racine carrée de 25 et se note  $\sqrt{25}$ . »<sup>15</sup>

Les autres manuels ne mentionnent que la touche de la calculatrice sans expliquer ce qu'elle fait ni ce que représente l'objet racine carrée.

<sup>15</sup> Exemple de « définition » donnée sur un exemple numérique par le manuel *Maths 4<sup>e</sup>*, nouveau Prisme, Belin. Cette « définition » apparaît au sein d'une activité intitulée « Je calcule la racine carrée d'un nombre positif ».

En troisième, la racine carrée figure au sein de la partie « Nombres et calculs ». Le programme de troisième de 2008 reprend celui de 1999 au niveau de la formulation et des compétences attendues.

CONNAISSANCES	CAPACITES	COMMENTAIRES
<p><b>2.2. Calculs élémentaires sur les radicaux</b></p> <p>Racine carrée d'un nombre positif.</p> <p><i>Produit et quotient de deux radicaux.</i></p>	<p>- Savoir que, si <math>a</math> désigne un nombre positif, <math>\sqrt{a}</math> est le nombre positif dont le carré est <math>a</math> et utiliser les égalités : <math>(\sqrt{a})^2 = a, \sqrt{a^2} = a</math>.</p> <p>- Déterminer, sur des exemples numériques, les nombres <math>x</math> tels que <math>x^2 = a</math>, où <math>a</math> est un nombre positif.</p> <p>- Sur des exemples numériques, où <math>a</math> et <math>b</math> sont deux nombres positifs, utiliser les égalités :</p> $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}, \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ (} b \text{ non nul)}$	<p>Dans le cadre du socle commun, la seule capacité exigible, relative à la racine carrée, concerne le calcul à la calculatrice de la valeur exacte ou approchée de la racine carrée d'un nombre positif.</p> <p><i>Ces résultats permettent de transformer l'écriture d'un nombre et de choisir la forme la mieux adaptée à la résolution d'un problème posé.</i></p>

Extrait du programme de troisième de 2008

### Etude de manuels :

Les manuels étudiés correspondant au programme 2008 sont les éditions 2008 des manuels suivants :

- *Dimathème 3<sup>e</sup>*, Didier
- *Maths 3<sup>e</sup>*, collection Diabolo, Hachette Education
- *Mathématiques 3<sup>e</sup>*, collection Phare, Hachette Education
- *Mathématiques 3<sup>e</sup>*, collection Triangle, Hatier
- *Math 3<sup>e</sup>*, collection Prisme, Belin
- *Maths 3<sup>e</sup>*, Bréal
- *Transmath 3<sup>e</sup>*, Nathan

Auxquels s'ajoutent les éditions 2012 des manuels suivants :

- *Mathématiques 3<sup>e</sup>*, collection Zénius, Magnard
- *Mathématiques 3<sup>e</sup>*, collection Myriade, Bordas
- *Mathématiques 3<sup>e</sup>*, collection Phare, Hachette Education
- *Maths 3<sup>e</sup>*, nouveau Prisme, Belin
- *Transmath 3<sup>e</sup>*, Nathan

Dans l'ensemble de ces manuels, on a la présence d'un chapitre portant sur la racine carrée. L'introduction à la racine carrée se fait par le biais d'activités qui se placent selon les manuels :

- dans un cadre algébrique : la racine carrée d'un nombre positif  $a$  est vue comme la solution positive de l'équation  $x^2 = a$

- dans un cadre géométrique :
  - o la racine carrée d'un nombre positif  $a$  est vue comme la mesure de la longueur du côté du carré d'aire  $a$
  - o utilisation de ce qui a été vu en 4<sup>ème</sup> sur le théorème de Pythagore : escargot de Pythagore, calcul de l'hypoténuses de triangles rectangles
- dans une alternance entre ces deux cadres

Quel que soit le cadre dans lequel se place l'activité introductive à la racine carrée proposée par le manuel, la définition est la même et suit ce qui est écrit dans le programme.

« Soit  $a$  un nombre positif.

On appelle racine carrée de  $a$ , notée  $\sqrt{a}$ , le seul nombre positif dont le carré est égal à  $a$ . On a ainsi  $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$ , c'est-à-dire  $(\sqrt{a})^2 = a$ . »<sup>16</sup>

On retrouve ici comme dans les manuels du précédent programme le mélange des points de vue numérique, algébrique et fonctionnel dans la définition.

Pour les éditions 2008, seuls les manuels *Maths 3<sup>e</sup>*, collection Diabolo et *Mathématiques 3<sup>e</sup>*, collection Triangle précisent que la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas par une phrase ou par le biais d'un exemple. Les autres manuels ne font pas cette précision et considèrent que la définition suffit à l'exprimer. On retrouve de même cette dichotomie dans les éditions 2012 des manuels *Mathématiques 3<sup>e</sup>*, collection Phare et *Transmath 3<sup>e</sup>* qui ne précisent pas qu'une racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas. De plus, aucun des manuels ne fait le lien avec le point de vue géométrique dans la partie cours, même lorsque l'activité géométrique choisie par le manuel a un cadre géométrique.

On notera également qu'à partir des éditions 2012, de manière générale, les manuels présentent moins d'activités (une double page contre plusieurs doubles pages dans ceux de 2003) et un cours plus condensé sur la racine carrée (une page contre une double page dans les manuels de 2008). Et ceci, alors que les programmes officiels comme nous l'avons vu précédemment sont sensiblement les mêmes en ce qui concerne la racine carrée.

#### ➤ Programme de 2016

La refonte des programmes de collège de 2016 a entraîné des changements considérables, notamment avec l'apparition de programmes par cycles pour le collège qui fonctionnait auparavant avec des programmes par niveaux. La classe de sixième du collège est désormais intégrée au cycle 3 qui comprend également le CM1 et le CM2 du primaire. Les classes de cinquième, quatrième et troisième sont quant à elles regroupées au sein du cycle 4 nouvellement créé.

Ce redécoupage n'est pas sans conséquence pour l'enseignement de la racine carrée au collège et par extension au lycée. En effet, si on lit attentivement les programmes du cycle 4 de

---

<sup>16</sup> Définition donnée par le manuel *Maths 3<sup>e</sup>*, collection Diabolo, Hachette Education.

2016<sup>17</sup> (qui sont par ailleurs beaucoup plus vagues et libres d'interprétation que les programmes des réformes précédentes), seule la définition de la racine carrée et les carrés parfaits figurent au programme désormais. Il n'est plus mention des calculs élémentaires avec les radicaux : les formules  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ ,  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  pour  $a$  et  $b$  deux réels positifs ( $b \neq 0$ ) disparaissent des programmes du collège.

La notion de racine carrée est toujours introduite en lien avec le théorème de Pythagore ou l'agrandissement de surfaces, comme c'était déjà le cas dans les programmes précédents. L'utilisation de la calculatrice pour déterminer une valeur exacte ou approchée de la racine carrée refait son apparition dans les programmes.

>> Définition de la racine carrée ; les carrés parfaits entre 1 et 144.

La notion de racine carrée est introduite en lien avec le théorème de Pythagore ou l'agrandissement des surfaces. Les élèves connaissent quelques carrés parfaits, les utilisent pour encadrer des racines par des entiers, et utilisent la calculatrice pour donner une valeur exacte ou approchée de la racine carrée d'un nombre positif.

Extraits du programme de 2016

### Etude de manuels :

Les manuels étudiés correspondant au programme 2016 sont les éditions 2016 des manuels suivants :

- *Maths cycle 4 4<sup>e</sup>*, Mission indigo, Hachette Education
- *Maths cycle 4 3<sup>e</sup>*, Mission indigo, Hachette Education
- *Maths 4<sup>e</sup>*, collection Myriade, Bordas
- *Delta Maths 4<sup>e</sup>*, Magnard
- *Maths 3<sup>e</sup>*, collection Dimensions, Hatier
- *Delta Mathématiques cycle 4*, Belin
- *Maths Monde*, cycle 4, Didier
- *Transmath 4<sup>e</sup>*, Nathan

Tout d'abord, je me suis intéressée aux manuels de troisième. Le chapitre « Racine carrée » présent dans l'ensemble des manuels de troisième des programmes précédents a disparu en conformité avec les demandes du programme.

Dans le manuel *Maths 3<sup>e</sup>*, collection Dimensions, la seule occurrence du mot « racine carrée » se trouve dans un exemple de calcul de longueur d'un côté de l'angle droit dans un triangle rectangle (chapitre « Théorème de Pythagore »).

Dans le manuel *Maths cycle 4 3<sup>e</sup>*, Mission indigo, on trouve dans le chapitre « Triangles rectangles : trigonométrie » une activité (rappel de quatrième) sur les racines carrées qui porte sur la construction d'un carré d'aire  $2 \text{ dm}^2$  à partir de deux carrés d'aire  $1 \text{ dm}^2$ . Dans la partie

<sup>17</sup> MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4), BO spécial n°11 du 26 novembre 2015, pp. 367-382

cours de ce manuel, on trouve une définition de la racine carrée d'un nombre positif  $a$  qui suit la demande des anciens programmes.

Les manuels de 4<sup>ème</sup> introduisent la racine carrée par une activité dans le chapitre sur le théorème de Pythagore avec la touche de la calculatrice ou par la recherche de longueurs de côtés de carrés d'aire donnée. Les manuels *Maths 4<sup>e</sup>*, collection *Myriade et Transmath 4<sup>e</sup>* ne proposent pas d'activités d'introduction. La définition proposée dans ces manuels est toujours la même (avec des formulations différentes) et reprend ce qui est écrit dans le programme de 2008.

« Soit  $a$  un nombre positif. On appelle « racine carrée de  $a$  » le nombre positif dont le carré est égal à  $a$ . On le note  $\sqrt{a}$  ». <sup>18</sup>

Il y a selon les manuels de 4<sup>ème</sup> plus ou moins d'exercices portant sur la racine carrée.

Les manuels de cycle 4 proposent une activité d'introduction géométrique à la racine carrée (aire de carré donnée). La définition proposée est toujours la même (avec des formulations différentes) et reprend ce qui est écrit dans le programme de 2008.

De l'ensemble des manuels de cycle 4, seul *Delta mathématiques cycle 4* propose une activité pour découvrir la propriété  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$  et la démontrer. Ce manuel est également celui qui propose le plus d'exercices sur les racines carrées (définition, propriété, changement d'écriture). Le contenu en terme d'exercices se rapproche plus des manuels du programme 2008.

Ainsi, d'après les nouveaux programmes et les nouveaux manuels, les élèves qui quittent le collège actuellement ont découvert la racine carrée avec le théorème de Pythagore et la touche racine carrée de la calculatrice (comme leurs aînés). Ils ont donc découvert la racine carrée dans un cadre géométrique mais lorsqu'on leur a donné une définition de la racine carrée, celle-ci s'est inscrite dans les cadres algébrique et numérique sans lien avec le cadre géométrique. De plus, cette définition qui reprend la demande des programmes avant 2016 (alors que rien dans le programme de 2016 n'oblige les enseignants à donner une définition algébrique) est compliquée à comprendre et à mémoriser pour les élèves. Du fait du peu d'exercices dans les manuels et de l'absence de demandes du programme, peu d'élèves à l'entrée en seconde ont manipulé des écritures contenant des racines carrées, et beaucoup pensent à tort que la racine carrée se réduit à une touche de la calculatrice (croyance encore plus ancrée chez les élèves s'ils n'ont pas vu de définition de la racine carrée). Cette tendance est encore plus marquée chez les élèves entrés en seconde à la rentrée 2017, car ils ont suivi un enseignement de quatrième conforme au programme de 2008 et un enseignement de troisième conforme au programme de 2016. Ce sont donc des élèves pour lesquels la racine carrée a été introduite via le théorème de Pythagore en quatrième sans définition « formelle », celle-ci devant apparaître en troisième avec le chapitre sur la racine carrée. Or d'après le changement de programme, ils n'ont pas évoqué en troisième la racine carrée.

En raison de la refonte des programmes de collège de 2016, il a été mis en place un aménagement des programmes de seconde<sup>19</sup> pour tenter de combler les écarts entre le programme de cycle 4 de 2016 et le programme actuel de seconde entré en vigueur à la rentrée scolaire

---

<sup>18</sup> Définition donnée par le manuel *Maths 4<sup>e</sup>*, collection Myriade, Bordas

<sup>19</sup> MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, Proposition d'aménagement du programme de la classe de seconde. Mathématiques, BO n°18 du 4 mai 2017

2010<sup>20</sup>. Ainsi, certains chapitres auparavant vus en classe de troisième et supprimés du programme de cycle 4 de 2016 font leur entrée au programme de seconde dans l'aménagement. On peut par exemple citer la tangente à un cercle, les systèmes de deux équations à deux inconnues et les identités remarquables. Cependant, rien n'est dit concernant la racine carrée (notamment les calculs avec les radicaux) qui donc dans l'état actuel des choses n'apparaît plus explicitement dans aucun programme. Il y a donc pour l'année scolaire 2017-2018 un « vide » concernant la racine carrée dans les programmes officiels. Or la racine carrée et ses propriétés sont utilisées en seconde par exemple lors des chapitres sur les fonctions polynômes du second degré, le repérage dans le plan et il est donc utile que les élèves connaissent les propriétés  $(\sqrt{a})^2 = a$ ,  $\sqrt{a^2} = a$  (avec  $a$  réel positif) et sachent simplifier des écritures faisant intervenir des racines carrées.

### **III. Difficultés rencontrées par les élèves**

Les travaux de F. Cissé<sup>21</sup>, T. Assude<sup>22</sup>, E. Roditi<sup>23</sup>, A. Bronner<sup>24</sup> et A. Dumail<sup>25</sup> nous permettent d'établir une liste des difficultés couramment rencontrées par les élèves face à la racine carrée :

- difficultés liées à la définition que les élèves ont du mal à mémoriser, les liens entre « racines carrées », « carré » et « positif » ne sont pas clairs pour les élèves ; on peut voir apparaître chez les élèves des confusions entre  $a$ ,  $\sqrt{a}$  et  $a^2$
- confusion entre  $a \geq 0$  qui est la condition d'existence d'une racine carrée et  $\sqrt{a} \geq 0$  qui est une convention posée par les mathématiciens
- sens du mot « exister » pour un nombre ;  $\sqrt{-3}$  n'existe pas mais  $\sqrt{15}$  existe même si on ne peut donner une écriture décimale pour ces deux nombres
- lettre  $a$  qui est souvent perçue comme un entier positif par les élèves, impression renforcée par le choix des exemples des manuels, par l'utilisation de la racine carrée dans la géométrie où les longueurs sont souvent entières
- statut de la racine carrée qui n'est pas clair pour les élèves ; il s'agit d'un nombre (ce qui en soit n'est pas très clair) qui peut être soit entier, soit décimal, soit rationnel, soit irrationnel

---

<sup>20</sup> MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique, BO n°30 du 23 juillet 2009

<sup>21</sup> Cisse F. (2006), Un dossier sur « racine carrée » à l'usage des formateurs (collège/lycée), *document pour la formation des enseignants*, Université Paris 7 – Denis Diderot

<sup>22</sup> ASSUDE T. (1989), Racines carrées : conceptions et mises en situations d'élèves de 4<sup>ème</sup> et de 3<sup>ème</sup>, *Petit x n°20*, pp. 5-33

<sup>23</sup> RODITI E. (1996), La racine carrée en troisième. Etude d'une activité, *document de travail pour la formation des enseignants*, Université Paris 7 – Denis Diderot

<sup>24</sup> BRONNER A. (1991), Connaissances d'élèves maliens à propos de la racine carrée, *Petit x n°28*, pp. 19-55

<sup>25</sup> DUMAIL A. (2007), La racine carrée en troisième. Des enseignements aux apprentissages, *Cahier de DIDIREM n°57*

- rapport entre valeurs approchées et valeurs exactes, par exemple les élèves ont du mal à considérer  $\sqrt{3}$  comme une valeur exacte ; il est difficile pour les élèves de concevoir que  $\sqrt{3}$  est une désignation suffisante du nombre qui au carré donne 3 ; peut-être faut-il remettre en cause l'utilisation quasi systématique de la calculatrice qui laisse penser aux élèves qu'un nombre n'existe pas si on ne l'approxime pas ?
- un grand nombre d'élèves pensent que la racine d'une somme est égale à la somme des racines ; cette erreur peut être liée au fait qu'avant de découvrir la racine carrée les élèves n'ont eu affaire qu'à des fonctions linéaires ou affines et ont beaucoup travaillé la proportionnalité au collège ; ils étendent donc la propriété de linéarité des fonctions à la racine carrée
- la racine carrée de  $a$  n'est pas vue par les élèves comme un nombre réel mais comme une expression, une opération ; ceci peut être dû à la présentation et au traitement de la racine carrée de manière purement algébrique sans liens avec les nombres réels ; cette difficulté peut être aussi liée au fait que les élèves considèrent que les seuls nombres possibles sont les nombres entiers ou décimaux et donc cela pose problème car on n'obtient pas toujours une valeur entière ou décimale exacte pour une racine carrée ; cette difficulté est accentuée par le travail sur les expressions contenant des radicaux où les racines carrées sont « gérées » par les élèves comme des «  $x$  », ce qui n'aident pas à les considérer comme des réels à part entière
- la racine carrée de  $a$  peut être aussi vue par les élèves comme une transformation, une étape d'un calcul ; cette vision est renforcée par la présentation de la racine carrée en quatrième dans le cadre du théorème de Pythagore, où il s'agit d'une étape de calcul permettant d'obtenir un résultat

## **Partie B : Une activité géométrique pour introduire la racine carrée**

---

### **I. Mise en situation**

#### 1. Une classe hétérogène

Ma classe de seconde, du lycée Georges Brassens de Courcouronnes (91), est une classe de niveau hétérogène avec plus d'élèves ayant des difficultés en mathématiques que d'élèves ayant un bon niveau. La plupart des élèves sont issus de collèges classés REP des alentours.

Globalement, le niveau de la classe en mathématiques est faible au vu de celui attendu en début de seconde. La plupart des élèves ont des lacunes sur des connaissances sensées être acquises à la fin du collège que ce soit dans :

- le domaine des fonctions (reconnaissance de fonctions affines, calcul de l'image d'un nombre par une fonction...)
- le domaine du calcul (distributivité, factorisation, calcul mental, résolution d'une équation à une inconnue...)
- le domaine de la géométrie (application des théorèmes de Thalès et de Pythagore...)

Ainsi de nombreux points de rappel sont nécessaires en début et au cours des chapitres que j'ai traités avec la classe pour permettre à l'ensemble des élèves d'aborder les notions avec des bases solides.

#### 2. Des connaissances morcelées sur la racine carrée

En raison des programmes actuellement en vigueur, ma classe de seconde a découvert la racine carrée en classe de quatrième lors du chapitre sur le théorème de Pythagore. Elle est utilisée pour déterminer la longueur d'un côté dans un triangle rectangle connaissant les longueurs des deux autres côtés. La plupart des élèves de ma classe de seconde connaissent donc la racine carrée comme une touche sur la calculatrice qui permet d'obtenir une valeur approximative ou exacte d'une longueur.

Après cette introduction en classe de quatrième, les élèves en classe de troisième n'ont pas vu, en application des nouveaux programmes du cycle 4, une définition de la racine carrée et ne connaissent pas ses propriétés.

A l'entrée en seconde, la racine carrée est donc pour eux seulement utilisée dans le cadre du théorème de Pythagore et consiste simplement en une touche de la calculatrice qui permet de passer du carré d'une longueur à la longueur elle-même.

En début d'année, j'ai rapidement pris conscience du niveau faible de ma classe et des nombreuses difficultés des élèves. Lors d'un exercice sur le chapitre « Généralités sur les fonctions », j'ai donné aux élèves un exercice du manuel à faire où il fallait déterminer l'image de  $\sqrt{2}$  par une fonction polynôme du second degré. En passant dans les rangs pour regarder ce que les élèves faisaient, je me suis aperçue que cette question posait problème à un grand nombre d'élèves qui ne savaient pas comment l'aborder. Notamment, les élèves ne savaient pas s'il fallait conserver  $\sqrt{2}$  ou utiliser une valeur approchée donnée par la calculatrice. De plus, leur ignorance de la propriété  $(\sqrt{a})^2 = a$  (pour  $a$  réel positif) ne leur permettait pas d'effectuer le calcul. Au vu

de ses difficultés et d'autres propres aux fonctions (calcul de l'image d'un nombre par une fonction, détermination graphique d'images et d'antécédents), j'ai fait le choix de ne pas aborder la racine carrée pour l'instant avec mes élèves et de me concentrer sur les savoir-faire propres aux fonctions.

Cette volonté de ne pas aborder la racine carrée en début d'année ne nous a pas empêchés de rencontrer des racines carrées au cours de la suite de notre progression. Nous les avons rencontrées notamment :

- lors des rappels de géométrie plane avec le théorème de Pythagore
- dans le chapitre « Répérages dans le plan » avec la formule de la distance entre deux points du plan dans un repère orthonormé
- dans un exercice, nous avons évoqué la résolution des équations de la forme  $x^2 = a$

Ces rencontres avec l'objet racine carrée m'ont permis de mettre en lumière les conceptions qu'ont certains élèves de ma classe vis-à-vis de l'objet racine carrée. Ainsi j'ai pu relever :

- pour la plupart des élèves, la racine carrée n'a pas de sens en tant que nombre mais également du point de vue de l'écriture de ce nombre ; certains élèves ne savent pas comment désigner oralement le symbole racine carrée et me parlent d'un « v bizarre »
- dès que l'on a affaire à une racine carrée, le premier réflexe des élèves est d'utiliser leur calculatrice pour obtenir une valeur de ce nombre qu'il peuvent comprendre (réflexe qui apparaît également lors de la manipulation de fractions qui sont dès que possible remplacées par une valeur décimale) ; comme j'ai pu le voir dans d'autres chapitres, les élèves ne font pas la différence entre valeur approchée et valeur exacte (je l'ai également observé dans la manipulation du nombre  $\pi$  qui est pour les élèves égal à 3,14)
- certains élèves savent qu'il y a un lien entre racine carrée et carré<sup>26</sup> qui peut permettre de simplifier des écritures mais ce lien n'est pas clair ; ainsi pour les élèves,  $\sqrt{x^2 + y^2}$  est égal à  $x + y$  car la racine carrée annule le carré
- j'ai également pu observer des difficultés dans l'application du théorème de Pythagore, notamment l'oubli de prendre le carré des longueurs qui ont pu conduire à des égalités comme  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x + y}$  qui est un théorème élève courant

La plupart de ces conceptions sont erronées et peuvent peut-être être expliquées par l'absence d'un cours dédié à la racine carrée au cours de leur scolarité au collège ; celui-ci aurait permis de mettre en place une définition formelle ainsi que l'évocation des règles ou non règles liées aux opérations sur la racine carrée. Ceci aurait amené les élèves à comprendre le lien entre carré<sup>27</sup> et racine carrée et les opérations « compatibles » avec la racine carrée.

---

<sup>26</sup> Ici dans le sens de mettre au carré une expression.

<sup>27</sup> Ici dans le sens de mettre au carré une expression.

## II. Présentation de l'activité proposée

### 1. Réflexion ayant conduit à la création de l'activité

Il m'est rapidement apparu qu'il était nécessaire que je comble les lacunes de mes élèves vis-à-vis de la racine carrée. Je me suis alors demandé comment introduire au mieux cette notion :

- en prenant en compte leurs connaissances précédentes, c'est-à-dire une manipulation dans le cadre de la géométrie et du théorème de Pythagore
- pour leur permettre de mieux se saisir et donner du sens au concept de racine carrée

Au fur et à mesure de mes études de manuels des programmes actuels et précédents des classes de troisième, je me suis aperçue que l'on pouvait classer les activités d'introduction proposées en deux types :

- des activités se plaçant dans un cadre algébrique visant à faire émerger à l'aide de la calculatrice la racine carrée de  $a$  comme la solution positive de l'équation  $x^2 = a$
- des activités se plaçant dans un cadre géométrique et faisant intervenir des carrés ou des triangles rectangles

Il m'a paru plus intéressant d'envisager une activité d'introduction géométrique pour ma classe de seconde afin de leur permettre de réinvestir leurs connaissances de quatrième sur le théorème de Pythagore (que nous avons par ailleurs revu en classe précédemment) et de ne pas créer chez eux une association immédiate entre « racine carrée » et « utilisation de la calculatrice ».

Je me suis donc demandé si une introduction géométrique permettrait de donner plus de sens au nombre  $\sqrt{a}$ , c'est-à-dire si elle permettrait aux élèves une meilleure prise en main de l'objet racine carrée et de sa définition.

En effet, on peut reprocher à la définition donnée classiquement dans le cadre algébrique « On appelle racine carrée de  $a$ , notée  $\sqrt{a}$ , le seul nombre positif dont le carré est égal à  $a$  » d'être peu claire tant au niveau de la formulation que des conditions d'existence de ce nombre, et de ne pas faire de lien à première vue pour des élèves avec les connaissances antérieures dont ils disposent sur la racine carrée.

La lecture du dossier de l'IREM de Rennes *Racine carrée de 5 existe-t-elle ?*<sup>28</sup> m'a confortée dans mon choix. Dans ce dossier, les auteurs (professeurs de collège, de lycée et un universitaire) proposent des activités pouvant être réalisées en classe de troisième ou de seconde ; elles visent à donner du sens aux nombres s'écrivant avec un radical et à amener les élèves à les manipuler avec autant d'aise que des nombres entiers ou décimaux. On y trouve des activités portant sur :

- des constructions géométriques de nombres tels que  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$
- une démonstration de l'irrationalité de  $\sqrt{2}$
- une approximation de  $\sqrt{2}$  avec l'utilisation du tableur
- de la trigonométrie, des comparaisons d'aires
- des équations et des carrés magiques

---

<sup>28</sup> BODIN N. et al. (2001), *Racine carrée de 5 existe-t-elle ?*, IREM de Rennes

Au sein des activités présentées, je me suis plus particulièrement intéressée à l'activité 1 portant sur « Triangle rectangle et racine carrée ». Cette activité propose de construire des triangles rectangles permettant de construire géométriquement des segments de longueurs  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  puis  $\sqrt{5}$ .

Je voulais que mon activité reprenne cette idée de construction de segments de longueurs  $\sqrt{a}$  à l'aide de triangles rectangles, mais je voulais aussi faire intervenir des carrés pour faire émerger la définition de la racine carrée dans un cadre géométrique. Je suis donc arrivée à la création des activités suivantes :

**Activité 1**

Existe-il un carré d'aire  $9 \text{ cm}^2$  ? Si oui, le tracer.

*Expliquer avec des phrases les recherches effectuées ainsi que la construction effectuée.*

**Activité 2**

Existe-il un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$  ? Si oui, le tracer.

*Expliquer avec des phrases les recherches effectuées ainsi que la construction effectuée.*

Activités proposées aux élèves pour introduire la racine carrée

## 2. Analyse a priori

Cette activité prend place dans le chapitre consacré à la racine carrée et sert d'introduction à cette notion. L'objectif de l'activité est de faire émerger chez les élèves la définition de la racine carrée dans un cadre géométrique : « la racine d'un nombre positif  $a$  est la mesure de la longueur du côté du carré d'aire  $a$  ». Cette définition, à mon avis, permet aux élèves de mieux retenir et comprendre ce qu'est une racine carrée. Notamment le fait qu'une racine carrée est toujours positive est ici énoncé naturellement par sa représentation par une longueur que les élèves savent toujours positive. Le fait qu'on ne peut prendre la racine carrée que d'un nombre positif est ici explicité par  $a$  qui représente une aire (une grandeur positive). Le fait que  $\sqrt{a}$  est un nombre comme les autres qui existe et que l'on peut représenter est également montré.

Cette activité permet également de faire le lien avec les connaissances préalables des élèves comme le théorème de Pythagore qui est la première rencontre des élèves avec la racine carrée. Cette activité doit également permettre une meilleure compréhension du lien entre  $\sqrt{a}$  et  $a^2$  par le biais de la géométrie.

Cette activité est prévue pour être réalisée en demi-groupe dans une classe de seconde. Mes deux demi-groupes n'ayant pas le même niveau, j'ai pris la décision de proposer une activité différenciée.

Le premier demi-groupe qui est le demi-groupe de niveau faible se verra proposer les activités 1 et 2. L'objectif étant que l'activité 1 permette aux élèves de comprendre comment 3 (la longueur du côté souhaitée) est obtenu en partant de 9 (aire demandée), et donc de faire émerger la racine carrée dans le cas d'un carré parfait, avant de devoir le faire dans un exemple de carré non parfait.

Le deuxième demi-groupe, où les élèves ont un niveau plus élevé, se verra proposer seulement l'activité 2. Il faut donc qu'ils fassent eux-mêmes émerger l'idée de prendre la racine carrée de l'aire pour obtenir la longueur du côté.

L'activité sera proposée aux élèves sous la forme de narration de recherche à faire individuellement. Les élèves doivent écrire sur papier toutes les étapes de leur réflexion, toutes les étapes qu'ils ont suivies même celles qui n'ont pas abouti.

Pour la réalisation de cette activité, les élèves auront à leur disposition :

- leur cahier de cours dans lequel se trouve un rappel du théorème de Pythagore
- leur matériel de géométrie (règle, équerre, compas)
- leur calculatrice

L'activité est prévue pour un travail autonome de la part des élèves. C'est une activité de recherche sans aide ou indication de la part du professeur.

Les connaissances mathématiques nécessaires à la réalisation de cette activité sont :

- connaître la formule donnant l'aire d'un carré
- connaître et savoir appliquer le théorème de Pythagore
- savoir tracer un carré, un triangle rectangle à l'aide des instruments de géométries (tracé de perpendiculaires, de parallèles)

Les tâches que doivent réaliser les élèves sont pour l'activité 1 :

- déterminer par la calcul ou la calculatrice la longueur du côté du carré en partant de la formule de l'aire du carré
- tracer un carré de côté 3 cm à l'aide de la règle et de l'équerre

Les tâches que doivent réaliser les élèves sont pour l'activité 2 :

- en s'inspirant de ce qui a été fait pour l'activité 1 (pour les élèves ayant eu les deux activités), déterminer la longueur du côté du carré en partant de la formule de l'aire du carré
- trouver une méthode pour tracer un segment de longueur  $\sqrt{10}$  cm ; l'idée est que les élèves pensent au théorème de Pythagore et tracent un triangle rectangle de côtés de l'angle droit de 1 cm et 3 cm, afin d'obtenir une hypoténuse de longueur  $\sqrt{10}$  cm
- tracer un carré de côté  $\sqrt{10}$  cm en reportant la longueur précédemment obtenue

Les difficultés attendues sont :

- déterminer la longueur du côté du carré c'est-à-dire comprendre qu'il faut prendre la racine carrée de l'aire du carré
- penser au théorème de Pythagore pour tracer un segment de longueur  $\sqrt{10}$  cm
- appliquer correctement le théorème de Pythagore, c'est-à-dire déterminer les deux longueurs des côtés de l'angle droit
- penser à utiliser le compas pour reporter précisément le segment de longueur  $\sqrt{10}$  cm et non la règle graduée, qui ne permet de tracer qu'un segment de longueur approximative

### III. Déroulement effectif de l'activité

L'activité a été mise en place pendant une séance de demi-groupe d'une heure. Avant la mise en place de l'activité, la définition d'un carré et la formule donnant l'aire d'un carré ont été revues et écrites au tableau afin de permettre aux élèves de s'y référer si besoin pendant l'activité.

Chaque élève s'est vu remettre un sujet avec les énoncés de(s) l'activité(s) qui faisait également office de feuille réponse. J'ai précisé à l'oral (en plus de l'avoir indiqué à l'écrit) que je désirais que les élèves expliquent leurs recherches, constructions et calculs par des phrases sur leur feuille. J'ai également précisé que l'activité était ramassée et qu'il était important que chaque élève cherche et écrive ses recherches même non concluantes.

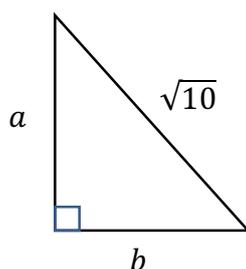
L'activité s'est déroulée de manière individuelle. Les élèves ont cherché pendant 15-20 minutes pour le premier groupe et 10-15 minutes pour le second groupe. Ils avaient à leur disposition :

- leur matériel de géométrie : règle, équerre, compas,
- leur cahiers de cours et d'exercices
- leur manuel scolaire<sup>29</sup>
- les rappels sur le carré écrits au tableau

L'activité mettait l'accent sur les compétences « chercher et communiquer » et sur la prise d'initiative de la part des élèves. Je n'ai pas apporté d'aide pendant le déroulement de l'activité.

L'activité a été suivie par une correction que j'ai écrite au tableau et prise en note par les élèves dans leur cahier d'exercices. Cette correction a été construite par un échange entre les élèves et moi-même.

Après avoir déterminé que la longueur du côté du carré était de  $\sqrt{10}$  cm, la question s'est posée de savoir si oui ou non il était possible de tracer un segment de cette longueur. Pour la plupart des élèves, il était impossible de le tracer sans utiliser de valeur approchée de  $\sqrt{10}$ . J'ai alors demandé aux élèves si nous n'avions pas déjà croisé le symbole racine carrée au cours de l'année. Certains élèves ont alors évoqué le théorème de Pythagore. J'ai alors tracé la figure suivante au tableau :



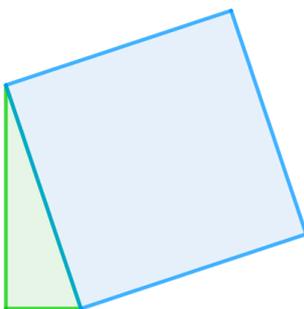
Puis, après avoir demandé l'égalité de Pythagore associée à cette figure, j'ai interrogé les élèves sur les valeurs de  $a$  et  $b$  pour que l'hypoténuse soit égale à  $\sqrt{10}$ . Pour répondre à cette question, nous avons construit un tableau donnant les valeurs des premiers carrés de nombres entiers. Les élèves ont ainsi trouvé qu'il faut prendre les valeurs suivantes :  $a = 1$  et  $b = 3$  ou inversement. Pour m'assurer de la compréhension de la méthode par les élèves, je leur ai demandé quelles devraient être les valeurs de  $a$  et  $b$  pour que l'hypoténuse soit égale à  $\sqrt{2}$ , à  $\sqrt{5}$ .

S'est alors posée la question du tracé du carré. J'ai laissé chercher les élèves. Ils ont trouvé deux méthodes différentes qu'ils ont mis en place dans leur cahier d'exercices :

---

<sup>29</sup> *Déclic Maths Seconde*, Hachette Education, édition 2010

- la première méthode est une méthode de « prolongement » où le carré est construit directement en partant de l'hypoténuse du triangle rectangle précédemment tracé



- la deuxième méthode consiste à reporter au compas le segment mesurant  $\sqrt{10}$  obtenu à l'aide du triangle rectangle puis à tracer à partir de ce segment le carré souhaité

Cette activité et sa correction ont permis de faire émerger chez les élèves la définition de la racine carrée dans un cadre géométrique à la suite d'un échange avec moi-même : je leur ai demandé de généraliser ce qu'ils avaient observé dans les (l') activité(s) en leur posant la question suivante « si on appelle  $a$  l'aire du carré, que représente  $\sqrt{a}$  ? ». Les élèves ont également trouvé les conditions d'existence ( $a \geq 0$ ) ainsi que la convention  $\sqrt{a} \geq 0$  en partant de la définition qu'ils venaient d'établir.

A la suite de cette formulation de la définition, j'ai distribué aux élèves le cours polycopié du chapitre « Racines carrées » (annexe 8). Ce cours se présentait sous forme de cours à trous : les élèves devaient remplir les exemples. Nous avons lu le cours et compléter ensemble les exemples de la partie I du cours. J'ai fait tracer aux élèves des segments de longueurs  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  et  $\sqrt{5}$  en utilisant la méthode vue lors de l'activité, pour qu'ils puissent visualiser en traçant le segment de longueur  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  que  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$ . Il s'agissait de mettre l'accent par un exemple visuel sur la fausseté du théorème élève courant «  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$  ».

Les élèves ont ensuite commencé à faire les exercices de la feuille d'exercices (annexe 9). Pour les aider, notamment pour l'exercice 1, j'ai dit aux élèves de se référer à la définition du cours et à l'image visuelle du carré qui l'illustre.

#### **IV. Analyse a posteriori**

##### 1. Premier demi-groupe

Dans le premier demi-groupe qui s'est vu présenter les activités 1 et 2, la plupart des élèves ont trouvé la réponse à l'activité 1 mais rares sont ceux qui ont fait apparaître  $\sqrt{9}$  sur leur production (copies 1 et 2 de l'annexe 3) : les élèves ont préféré écrire  $3 \times 3 = 9$  en se référant à leurs tables de multiplication comme on peut le voir dans la copie 3 de l'annexe 3.

La présence de l'activité 1, où la longueur du côté du carré à trouver était un nombre entier, a influencé la plupart des élèves sur le fait que la longueur du côté du carré à trouver devait nécessairement être un nombre entier ou décimal. Ainsi, la plupart des élèves ont dit qu'il était

impossible de tracer un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$ , car 10 n'est pas le carré d'un nombre entier ou décimal.

Dans leurs productions, seuls deux élèves ont fait apparaître  $\sqrt{10}$ . Ce sont les mêmes élèves qui avaient fait apparaître  $\sqrt{9}$  dans la première activité. Les autres élèves, qui ont repris leur méthode de l'exercice 1, c'est-à-dire des multiplications, ont fait des recherches en multipliant et calculant les carrés de plusieurs nombres entiers et décimaux, afin de voir si on peut trouver 10 comme résultat de l'un de ces calculs (copie 1 annexe 4).

Qu'il s'agisse des élèves qui ont fait apparaître  $\sqrt{10}$  ou de ceux qui sont passés par la méthode des multiplications, l'ensemble des élèves ont conclu que l'on ne pouvait pas tracer un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$  avec des justifications différentes :

- on ne trouve jamais un carré d'entier ou de décimal égal à 10 (copie 1 annexe 4)
- la racine carré de 10 n'a pas de valeur décimale exacte (copie 2 annexe 4)

Certains élèves ont cependant tracé un carré en prenant une valeur approchée de  $\sqrt{10}$  comme dans la copie 3 de l'annexe 3 où l'élève a choisi comme valeur approchée 3,2.

Dans ce groupe, j'ai pu observer comme erreurs :

- une confusion dans les opérations notamment avec cette élève qui confond addition et multiplication (copie 1 annexe 5)
- une confusion entre aire et périmètre et ce malgré le rappel de l'aire du carré écrit au tableau comme on peut le voir dans cette production (copie 2 annexe 5)

Il aurait peut-être été utile pour éviter ces erreurs de donner aux élèves un carré de longueur de côté 7 par exemple et de leur demander de calculer son aire avant de les lancer dans l'activité.

## 2. Second demi-groupe

Dans le second demi-groupe qui n'avait pas l'activité 1 mais seulement l'activité 2, 11 élèves sur les 16 que compte le groupe ont trouvé que le côté du carré devait avoir pour longueur  $\sqrt{10}$  cm comme on peut le voir dans la copie 1 de l'annexe 6.

Cependant, comme dans le premier demi-groupe, les élèves ont pour la plupart dit que l'on ne pouvait pas tracer un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$  avec des justifications différentes :

- on ne peut tracer un segment de longueur  $\sqrt{10}$  cm mais seulement un segment dont la longueur approche  $\sqrt{10}$  cm (copie 2 annexe 6)
- on ne peut pas tracer ce carré car « les côtés ne se mesurent pas », ce qui signifie à mon avis, que l'on ne peut les tracer en utilisant une règle graduée (copie 4 annexe 6)

Les élèves qui ont dit que l'on pouvait avoir un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$  ont tracé un carré en utilisant une valeur approchée (au dixième ou au centième) de  $\sqrt{10}$  pour la longueur de ses côtés, comme on peut le voir dans les copies 5 et 1 de l'annexe 6. Seule une élève (copie 3 annexe 6) ayant tracé ce carré a recalculé l'aire de ce carré, et elle s'est rendu compte qu'en prenant une valeur approchée, on n'obtenait pas une aire égale à  $10 \text{ cm}^2$ .

D'autres élèves ont pensé au théorème de Pythagore car il fait apparaître des racines carrées et nous avons besoin de  $\sqrt{10}$  dans le problème, mais ils n'ont pas réussi à mettre en place une méthode permettant de tracer un segment de longueur  $\sqrt{10}$  cm en utilisant ce théorème.

Dans ce groupe, j'ai pu observer les mêmes erreurs que dans le groupe précédent :

- une confusion dans les opérations notamment avec cette élève qui confond addition et multiplication (copie 1 annexe 7)
- une confusion entre aire et périmètre et ce malgré le rappel de l'aire du carré écrit au tableau comme on peut le voir dans cette production (copie 2 annexe 7)

### 3. Bilan de l'activité

L'activité 2 proposée, au vu des résultats des élèves, n'est pas assez guidée pour que les élèves parviennent à la construction finale du carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$ . Il aurait peut-être été préférable :

- de modifier la question posée aux élèves et de la remplacer par « Tracer un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$  » en affirmant l'existence de ce dernier plutôt que de laisser aux élèves la tâche de détermination de l'existence ou non de ce carré
- de conserver la question posée telle quelle et de faire travailler les élèves en groupes
- de proposer un énoncé plus guidé en leur indiquant l'utilisation le théorème de Pythagore pour effectuer la construction

Cependant, bien qu'aucun élève ne soit parvenu à tracer le carré attendu, l'objectif de l'activité a été atteint. Dans le premier et le second demi-groupe, les élèves sont parvenus à la formulation de la définition de la racine carrée dans un cadre géométrique. L'activité, au cours de la correction, a également permis de montrer aux élèves que l'on peut tracer à la règle et à l'équerre (ou au compas) une longueur exprimée par une racine carrée. Nous avons également pu travailler sur la notion de valeur approchée/valeur exacte : en recalculant l'aire du carré après l'avoir tracé avec une valeur approchée de  $\sqrt{10}$  comme longueur de côté, les élèves se sont aperçus qu'il était nécessaire d'utiliser une valeur exacte. L'activité a également permis de mettre en place l'image mentale de la racine carrée de  $a$ , comme la longueur du côté du carré d'aire  $a$ .

Concernant les points négatifs de l'activité, pour la version donnée au premier demi-groupe, on peut se demander si l'activité 1 est une aide ou au contraire un obstacle à la résolution de l'activité 2. Au vu des productions de ce demi-groupe, l'activité 1 semble être un obstacle à la résolution de l'activité 2 car elle entretient l'idée que l'on ne peut construire des segments que si leur longueur est un nombre entier ou décimal. De plus, la valeur de l'aire proposée étant un nombre simple (9), la plupart des élèves ne sont pas passés par la racine carrée mais par la multiplication pour obtenir la longueur du côté (3). Ainsi, n'ayant pas identifié que la longueur du côté du carré était la racine carrée de la valeur de l'aire, ils n'ont pas su trouver la valeur exacte du côté du carré dans l'activité 2. Néanmoins, la présence de cette activité a permis aux élèves les plus faibles de rentrer dans l'activité.

Au terme de l'activité, je ne suis pas sûre que tous les élèves soient convaincus qu'un nombre s'écrivant avec un radical est un nombre comme les autres, qui doit être traité de la même manière qu'un nombre entier ou décimal. En outre, le fait que l'activité se situe dans le cadre géométrique permet de faire appel aux connaissances préalables des élèves sur la racine carrée, notamment au théorème de Pythagore, mais cela peut également entretenir l'idée que la racine carrée ne sert que dans un cadre géométrique. D'où l'importance de voir par la suite l'utilisation

de la racine carrée dans un cadre algébrique, par exemple en résolvant des équations de la forme  $x^2 = a$  au sein du chapitre sur la fonction carré.

Outre le prolongement sur le cours « classique » concernant la racine carrée, cette activité et notamment la partie construction de segments de longueurs  $\sqrt{a}$  avec  $a \geq 0$  utilisant des triangles rectangles, peut permettre de présenter et de faire réaliser aux élèves l'escargot de Pythagore. Il pourrait ensuite s'ensuivre un questionnement demandant aux élèves s'il est nécessaire de construire les segments de longueurs  $\sqrt{2}$  jusqu'à  $\sqrt{28}$  pour obtenir un segment de longueur  $\sqrt{29}$ . Il pourrait aussi être intéressant d'expliquer aux élèves que cette méthode ne permet de construire que des segments dont la longueur est la racine carrée d'un nombre entier, et qu'il existe une autre méthode qui est celle utilisée par Descartes dans le livre premier de son ouvrage *La Géométrie* publié en 1637.

## Conclusion

---

Nous avons vu que la notion de racine carrée est une notion mathématique ancienne qui est liée, dès les premières traces que nous en avons, à la géométrie par la figure du carré. De plus, c'est une notion dont la présentation aux élèves a évolué au cours du temps ; son statut est passé d'opération à fonction puis à un statut non déterminé aujourd'hui. Ce statut non déterminé et les différents changements des programmes de mathématiques au collège sont à l'origine des difficultés des élèves à se saisir de cet objet et à le manipuler correctement.

La racine carrée apparaît dans les programmes post 1999 comme un objet sur lequel on fait des calculs et on passe sous silence le caractère « nouveau nombre » de certains radicaux. La définition proposée aux élèves, dans les différents programmes officiels jusqu'à la réforme de 2016, est une définition numérique difficile d'accès pour les élèves et ne faisant pas le lien avec leurs connaissances antérieures liées à la racine carrée. Cette définition crée des difficultés pour les élèves et s'ajoutent aux difficultés liées au statut des nombres s'écrivant avec un radical.

Les changements des programmes et la place bien moins importante accordée à la racine carrée dans le nouveau programme de collège font que les élèves de troisième/seconde, qui manipulaient déjà avec difficulté cet objet, ont une connaissance encore moindre de cet objet et de ses propriétés algébriques. Ils se reposent en grande partie sur leur calculatrice mais ne sont pas à même de comprendre les résultats et les simplifications d'écriture qu'elle leur propose. Ceci désavantage les élèves car ils n'ont aucun moyen de contrôle sur leurs résultats : ils ne sont pas à même de détecter une faute de frappe sur leur calculatrice. Il est donc nécessaire que les élèves aient des connaissances sur la racine carrée. Ces connaissances par ailleurs leur seront utiles en seconde pour le calcul de la distance entre deux points, puis en première S lors de l'étude de la fonction racine carrée ou des racines d'un polynôme du second degré.

Pour ces raisons, j'ai travaillé la notion de racine carrée avec ma classe de seconde. Je suis partie des connaissances antérieures des élèves pour leur proposer une activité présentant la racine carrée dans un cadre géométrique. Cette activité avait deux objectifs :

- donner une définition géométrique de la racine carrée qui me paraissait plus simple d'accès pour les élèves
- permettre aux élèves de se représenter visuellement ce qu'est une racine carrée

Ces deux objectifs ont été atteints par l'activité que j'ai proposée et les élèves se sont montrés intéressés par l'activité et par sa présentation assez inhabituelle pour eux (activité de recherche). Ils ont tous tenté de résoudre l'activité et de proposer une solution ainsi qu'une construction de figure.

En outre, l'activité a permis d'exploiter de nouveau les connaissances de quatrième des élèves sur le théorème de Pythagore et ainsi de faire le lien entre ce qu'ils connaissaient déjà sur la notion et les nouvelles connaissances que je leur ai apportées. Cependant, l'activité n'était pas assez détaillée pour permettre aux élèves de construire un segment de longueur  $\sqrt{a}$  sans intervention de la part du professeur. Il serait donc nécessaire de la modifier si cette tâche est un objectif de l'activité.

L'activité a aussi permis aux élèves de se créer une image mentale correspondant au carré d'aire  $a$  dont la longueur du côté vaut  $\sqrt{a}$ . Cette image a permis aux élèves de corriger leurs

erreurs lors des exercices, notamment sur la condition d'existence d'une racine carrée. Je pense donc que pour les élèves de ma classe de seconde, le passage par la géométrie a donné plus de sens à la racine carrée même si son statut de nombre « comme les autres » reste flou pour les élèves.

Néanmoins, malgré la réalisation de cette activité avec les élèves, le reste du chapitre consacré à la racine carrée est assez classique, entre propriétés algébriques et exercices d'application. Il serait intéressant de proposer aux élèves de « construire » ces propriétés pour ce qui est de la compatibilité avec la multiplication et la division, puis de les démontrer pour mieux fixer ces propriétés dans l'esprit des élèves. Mais ceci demanderait plus de temps au sein d'un programme déjà chargé de seconde (ou de troisième).

## Bibliographie

---

ACADEMIE D'ORLEANS- TOURS, *Racine carrée de 2 et ses secrets* [en ligne]. Disponible sur : [http://maths.ac-orleans-tours.fr/fileadmin/user\\_upload/maths/Faire\\_des\\_maths/rallye/corriges\\_culture/2013\\_racine\\_de\\_deux\\_corrige.pdf](http://maths.ac-orleans-tours.fr/fileadmin/user_upload/maths/Faire_des_maths/rallye/corriges_culture/2013_racine_de_deux_corrige.pdf) (Consulté le 11/03/2018)

ALEIXANDRE D. et al. (2011), *Mathématiques 4<sup>e</sup>*, collection Zénus, Magnard, Paris, 304 p.

ALEIXANDRE D. et al. (2012), *Mathématiques 3<sup>e</sup>*, collection Zénus, Magnard, Paris, 320 p.

ALEIXANDRE D. et al. (2014), *Mathématiques 3<sup>e</sup>*, collection Zénus, Magnard, Paris, 339 p.

ANCEL-LEPESQUEUR C. et al. (2007), *Math 4<sup>e</sup>*, collection prisme, Belin, Paris, 304 p.

ANDRIEU X. et al. (2007), *Dimathème 4<sup>e</sup>*, Didier, Paris, 288 p.

ANDRIEU X. et al. (2008), *Dimathème 3<sup>e</sup>*, Didier, Paris, 304 p.

ASSUDE T. (1989), Racines carrées : conceptions et mises en situations d'élèves de 4<sup>ème</sup> et de 3<sup>ème</sup>, *Petit x n°20*, pp. 5-33

ASSUDE T. (1994), Ecologie de l'objet « racine carrée » et analyse du curriculum, *Petit x n°35*, pp. 43-58

BARNET C. (dir.) (2016), *Maths cycle 4 4<sup>e</sup>*, Mission indigo, Hachette Education, Paris, 304 p.

BARNET C. (dir.) (2016), *Maths cycle 4 3<sup>e</sup>*, Mission indigo, Hachette Education, Paris, 320 p.

BARUK S. (1992), *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*, Seuil, Paris, 1324 p.

BESSOT A. et LE THO HOAI A. (1994), Une étude du contrat didactique à propos de la racine carrée, *Petit x n°36*, pp. 39-60

BODIN N. et al. (2001), Racine carrée de 5 existe-t-elle ?, IREM de Rennes

BORREANI J. (dir.) (2003), *Maths 3<sup>e</sup>*, Magnard, Paris, 304 p.

BOULLIS M. et ROY D. (dir) (2011), *Mathématiques 4<sup>e</sup>*, collection Myriade, Bordas, Paris, 322 p.

BOULLIS M. et ROY D. (dir) (2012), *Mathématiques 3<sup>e</sup>*, collection Myriade, Bordas, Paris, 324 p.

BOULLIS M. (dir.) (2016), *Maths 4<sup>e</sup>*, collection Myriade, Bordas, Paris, 278 p.

BRACONNE-MICHOUX A. et al. (2008), *Maths 3<sup>e</sup>*, collection Diabolo, Hachette Education, Paris, 304 p.

BRAULT R. et al. (2007), *Mathématiques 4<sup>e</sup>*, collection Phare, Hachette Education, Paris, 304 p.

BRAULT R. et al. (2008), *Mathématiques 3<sup>e</sup>*, collection Phare, Hachette Education, Paris, 320 p.

BRAULT R. et al. (2011), *Mathématiques 4<sup>e</sup>*, collection Phare, Hachette Education, Paris, 304 p.

BRAULT R. et al. (2012), *Mathématiques 3<sup>e</sup>*, collection Phare, Hachette Education, Paris, 320 p.

BRONNER A. (1991), Connaissances d'élèves maliens à propos de la racine carrée, *Petit x n°28*, pp. 19-55

BROTREAUD L. et al. (2016), *Delta Maths 4<sup>e</sup>*, Magnard, Paris, 256 p.

CISSE F. (2006), Un dossier sur « racine carrée » à l'usage des formateurs (collège/lycée), *document pour la formation des enseignants*, Université Paris 7 – Denis Diderot

CHAPIRON G. et al. (2007), *Mathématiques 4<sup>e</sup>*, collection Triangle, Hatier, Paris, 350 p.

CHAPIRON G. et al. (2008), *Mathématiques 3<sup>e</sup>*, collection Triangle, Hatier, Paris, 354 p.

CHAPIRON G. et al. (2011), *Mathématiques 4<sup>e</sup>*, collection Triangle, Hatier, Paris, 304 p.

CHAPIRON G. et al. (2012), *Mathématiques 3<sup>e</sup>*, collection Triangle, Hatier, Paris, 320 p.

CHESNE J.-F. et LE YAOUANQ M.-H. (dir.) (2011), *Maths 4*, Didier, Paris, 320 p.

DEDRON P. et ITARD J. (1959), *Mathématiques et mathématiciens*, Magnard, Paris, 433 p.

DESCHAMPS C. (dir.) (2008), *Math 3<sup>e</sup>*, collection Prisme, Belin, Paris, 288 p.

DOS SANTOS R. (dir.) (2016), *Maths 3<sup>e</sup>*, collection Dimensions, Hatier, Paris, 288 p.

DUMAIL A. (2007), La racine carrée en troisième. Des enseignements aux apprentissages, *Cahier de DIDIREM n°57*

FREYCENET P. et al. (2006), *Maths 4<sup>e</sup>*, collection Diabolo, Hachette Education, Paris, 304 p.

JACOB N. (dir.) (2011), *Maths 4<sup>e</sup>*, nouveau Prisme, Belin, Paris, 288 p.

JACOB N. (dir.) (2012), *Maths 3<sup>e</sup>*, nouveau Prisme, Belin, Paris, 314 p.

JUILLAC A. et al. (2008), *Maths 3<sup>e</sup>*, Bréal, Rosny-sous-Bois, 304 p.

LAMBOTTE L. (dir.) (2016), *Delta Mathématiques cycle 4*, Belin, Paris, 480 p.

LANATA F. (dir.) (2016), *Maths Monde*, cycle 4, Didier, Paris, 444 p.

LEWILLION-LIZAMBERT M. (dir.) (2007), *Maths 4<sup>e</sup>*, collection Babylone, Bordas, Paris, 288 p.

MALAVAL J. et al. (2003), *Math 3<sup>e</sup>*, collection transmath, Nathan, Paris, 304 p.

MALAVAL J. et al. (2008), *Transmath 3<sup>e</sup>*, Nathan, Paris, 312 p.

MALAVAL J. et al. (2011), *Transmath 4<sup>e</sup>*, Nathan, Paris, 304 p.

MALAVAL J. et al. (2012), *Transmath 3<sup>e</sup>*, Nathan, Paris, 320 p.

MALAVAL J. (dir.) (2016), *Transmath 4<sup>e</sup>*, Nathan, Paris, 256 p.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, Programmes des classes de troisième des collèges, BO Hors série n°10 du 15 octobre 1998, pp. 106-114

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, Programmes des collèges. Mathématiques. Classe de quatrième, BO Hors série n°5 du 25 août 2005

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, Programmes du collège. Programmes de l'enseignement de mathématiques, BO Hors-série n°6 du 28 août 2008, pp. 27-38

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique, BO n°30 du 23 juillet 2009

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4), BO spécial n°11 du 26 novembre 2015, pp. 367-382

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, Proposition d'aménagement du programme de la classe de seconde. Mathématiques, BO n°18 du 4 mai 2017

RODITI E. (1996), La racine carrée en troisième. Etude d'une activité, *document de travail pour la formation des enseignants*, Université Paris 7 – Denis Diderot

RUHLMANN A., *L'histoire des mathématiques, La racine carrée* [en ligne]. Disponible sur : <http://matoumatheux.ac-rennes.fr/divers/histoire/racine.htm> (Consulté le 11/03/2018)

WIKIPEDIA, *Histoire de la racine carrée* [en ligne]. Disponible sur : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Histoire\\_de\\_la\\_racine\\_carrée](https://fr.wikipedia.org/wiki/Histoire_de_la_racine_carrée) (Consulté le 11/03/2018)

## **Annexes**

---

**Annexe 1.** Sujet de l'activité donnée au premier demi-groupe.

**Annexe 2.** Sujet de l'activité donnée au second demi-groupe.

**Annexe 3.** Premier demi-groupe. Activité 1. Copies d'élèves.

**Annexe 4.** Premier demi-groupe. Activité 2. Copies d'élèves.

**Annexe 5.** Premier demi-groupe. Erreurs.

**Annexe 6.** Second demi-groupe. Activité. Copies d'élèves.

**Annexe 7.** Second demi-groupe. Erreurs.

**Annexe 8.** Cours sur la racine carrée distribué aux élèves.

**Annexe 9.** Exercices sur le chapitre racine carrée.

**Annexe 1 : Sujet de l'activité donnée au premier demi-groupe.**

---

NOM :

Prénom :

**Activité 1**

Existe-il un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$  ? Si oui, le tracer.

*Expliquer avec des phrases les recherches effectuées ainsi que la construction effectuée.*

NOM :

Prénom :

**Activité 1**

Existe-il un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$  ? Si oui, le tracer.

*Expliquer avec des phrases les recherches effectuées ainsi que la construction effectuée.*

**Annexe 2 : Sujet de l'activité donnée au second demi-groupe.**

---

NOM :  
Prénom :

**Activité 1**

Existe-il un carré d'aire  $9 \text{ cm}^2$  ? Si oui, le tracer.

*Expliquer avec des phrases les recherches effectuées ainsi que la construction effectuée.*

**Activité 2**

Existe-il un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$  ? Si oui, le tracer.

*Expliquer avec des phrases les recherches effectuées ainsi que la construction effectuée.*

## Annexe 3 : Premier demi-groupe. Activité 1. Copies d'élèves.

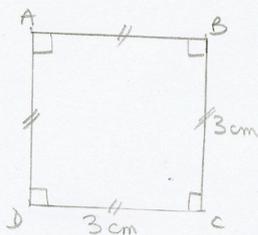
### Copie 1

#### Activité 1

Existe-il un carré d'aire  $9 \text{ cm}^2$ ? Si oui, le tracer.

Expliquer avec des phrases les recherches effectuées ainsi que la construction effectuée.

oui



- J'ai d'abord cherché la racine carrée de  $9 \text{ cm}^2$  qui est 3.  $3 \times 3 = 9$  (étant donné que l'aire d'un carré se trouve avec  $c \times c = c^2$ )
- J'ai ensuite tracé un premier segment de 3cm que j'ai nommé [AB].
- J'ai tracé un segment parallèle à celui-ci commençant à B de longueur 3cm, que j'ai nommé C.
- J'ai fait la même chose à partir de A, j'ai nommé [AD] ce nouveau segment
- J'ai tracé [DC] pour finir

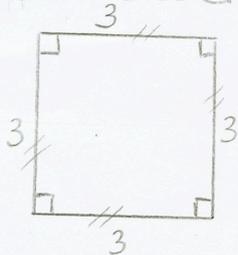
### Copie 2

#### Activité 1

Existe-il un carré d'aire  $9 \text{ cm}^2$ ? Si oui, le tracer.

Expliquer avec des phrases les recherches effectuées ainsi que la construction effectuée.

On nous dit que l'aire du carré doit être  $9 \text{ cm}^2$   
 On sait que  $A_{\text{carré}} = c \times c = c^2$   
 Ce qui équivaut à  $c \times c = 9$   
 J'ai donc cherché la racine carrée de 9  
 ce qui m'a donné 3. J'ai vérifié si mes calculs étaient bons:



$$\begin{aligned}
 &= c \times c \\
 &= 3 \times 3 \\
 &= 9 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

### Copie 3

#### Activité 1

Existe-il un carré d'aire  $9 \text{ cm}^2$ ? Si oui, le tracer.

Expliquer avec des phrases les recherches effectuées ainsi que la construction effectuée.

Carré

$$A = 3 \times 3 = 9 \text{ cm}^2$$

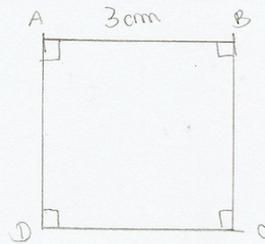
\* Pour calculer l'aire d'un carré, nous utilisons la formule  $c \times c$ .

Sachant que  $3 \times 3 = 9$

Il est possible d'avoir l'aire d'un carré de  $9 \text{ cm}^2$ .

Construction:

- tracer un segment de  $3 \text{ cm}$ .
- tracer la perpendiculaire de cette droite des deux extrémités puis fermer la figure.



## Annexe 4 : Premier demi-groupe. Activité 2. Copies d'élèves.

### Copie 1

#### Activité 2

Existe-il un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$ ? Si oui, le tracer.

Expliquer avec des phrases les recherches effectuées ainsi que la construction effectuée.

Non il n'y a pas de carré qui existe avec une aire de  $10 \text{ cm}^2$ .

$$3 \times 3 = 9$$

$$4 \times 4 = 16$$

$$3,5 \times 3,5 = 12,25$$

$$3,1 \times 3,1 = 9,61$$

$$3,2 \times 3,2 = 10,24$$

il n'est pas possible de le tracer et comme on ne trouve pas de valeur exacte, il n'y a donc pas un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$ .

Impossible à le tracer exactement.

### Copie 2

#### Activité 2

Existe-il un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$ ? Si oui, le tracer.

Expliquer avec des phrases les recherches effectuées ainsi que la construction effectuée.

Non

- Sachant que l'aire d'un carré se calcule avec  $c \times c = c^2$ , j'ai cherché la racine carrée de  $10 \text{ cm}^2$  alors j'ai trouvé un nombre infini.

### Copie 3

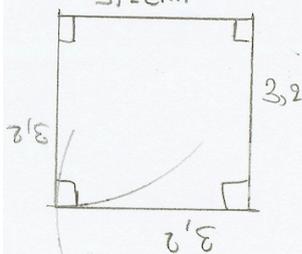
#### Activité 2

Existe-il un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$ ? Si oui, le tracer.

Expliquer avec des phrases les recherches effectuées ainsi que la construction effectuée.

$$\sqrt{10} = 3,24616227466... = 3,2$$

3,2 cm



voir consigne de l'exercice 1

Il ne peut exister un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$  du fait que celui-ci ait des nombres infinis après la virgule.

## Annexe 5 : Premier demi-groupe. Erreurs.

### Copie 1

#### Activité 2

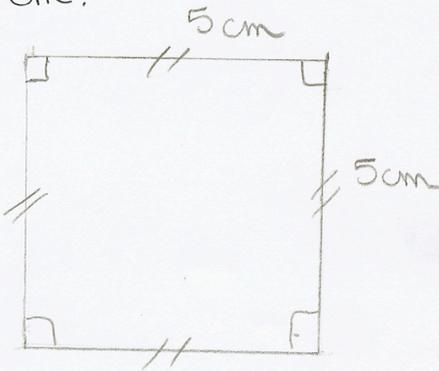
Existe-il un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$  ? Si oui, le tracer.

Expliquer avec des phrases les recherches effectuées ainsi que la construction effectuée.

$$c \times c = c^2$$

$$10 \text{ cm}^2 = 5 \times 5$$

Il existe bien un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$  ses côtés mesurent  $5 \text{ cm}$ .

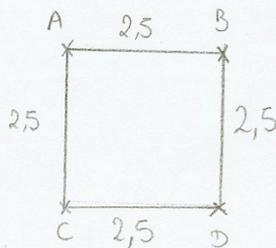


### Copie 2

#### Activité 2

Existe-il un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$  ? Si oui, le tracer.

Expliquer avec des phrases les recherches effectuées ainsi que la construction effectuée.



J'ai divisé  $10 \text{ cm}$  qui est l'aire du carré par 4 qui est le nombre de côté du carré.

$$10 \div 4 = 2,5$$

Ce qui m'a donné  $2,5 \text{ cm}$  pour chaque côté donc oui un carré de  $10 \text{ cm}$  existe.

## Annexe 6 : Second demi-groupe. Activité. Copies d'élèves.

### Copie 1

#### Activité 1

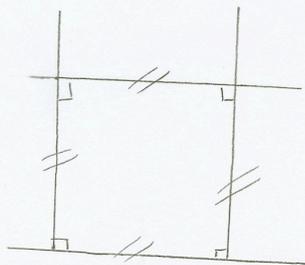
Existe-il un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$ ? Si oui, le tracer.

Expliquer avec des phrases les recherches effectuées ainsi que la construction effectuée.

$$\text{Aire d'un carré de côté } c : c \times c = c^2$$

$$\text{Donc : } \sqrt{c^2} = c$$

$$\Rightarrow \sqrt{10} \approx 3,16 \text{ cm}$$



### Copie 2

#### Activité 1

Existe-il un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$ ? Si oui, le tracer.

Expliquer avec des phrases les recherches effectuées ainsi que la construction effectuée.

$$\text{Côté} \times \text{Côté} = a^2$$

$$\sqrt{10} = 3,16227766$$

Ils n'est pas possible d'avoir un carré parfait avec  $10 \text{ cm}^2$  d'air mais on peut avoir un carré moins précis avec  $3,2 \text{ cm}$  de côté

### Copie 3

#### Activité 1

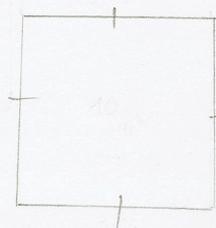
Existe-il un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$ ? Si oui, le tracer.  $\approx 3,16$

Expliquer avec des phrases les recherches effectuées ainsi que la construction effectuée.

Sachant que l'aire d'un carré se calcule par côté  $\times$  côté

$$\text{côté} = \sqrt{\text{aire}}, \text{ soit } \text{côté} = \sqrt{10} \approx 3,16$$

ce qui veut dire que chaque côté du carré mesure  $\approx 3,16$



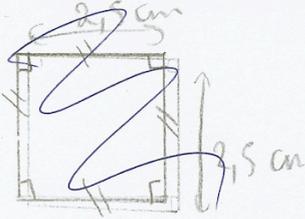
Mais,  $3,16$  n'est qu'une valeur approchée, donc si on fait  $3,16 \times 3,16 = 9,98$   
Donc, comme ce n'est pas une valeur exacte, on ne peut pas tracer le carré.

## Copie 4

### Activité 1

Existe-il un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$ ? Si oui, le tracer.

Expliquer avec des phrases les recherches effectuées ainsi que la construction effectuée.



~~Ce carré existe.~~

$$10 \text{ cm}^2 \rightarrow$$

~~Comme dans un carré il y a 4~~  
~~côté, j'ai fait  $10 \div 4 = 2,5$ .~~

~~Chaque côté mesure donc~~  
~~2,5 cm.~~

de carré de  $10 \text{ cm}^2$ . On fait  $\sqrt{10}$ .  
Ce qui nous donne  $3,1622776...$   
Donc ce carré n'existe pas, car les  
côté ne se mesurent pas.

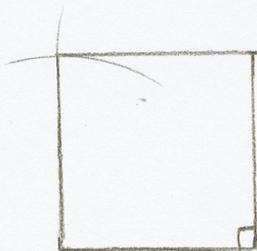
## Copie 5

### Activité 1

Existe-il un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$ ? Si oui, le tracer.

Expliquer avec des phrases les recherches effectuées ainsi que la construction effectuée.

de centrale du carré est la racine carré donc on calcule la racine  
carré de 10 pour trouver la longueur d'un côté. On trouve  $3,16227766$   
on arrondi à 1 chiffre après la virgule ce qui nous donne  $3,2$ .  
Chaque côté de notre carré fait  $3,2$ , pour le tracer on fait donc  
un segment de  $0,2$  on trace la perpendiculaire avec une  
équerre puis avec son compas on pique au 2 point des segments  
qui ne sont pas en commun pour trouver le 3<sup>e</sup> point. l'écart  
du compas doit être réglé à  $3,2 \text{ cm}$



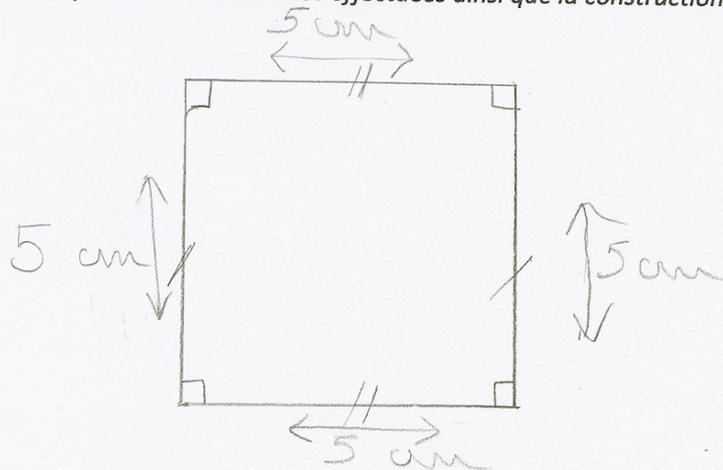
## Annexe 7 : Second demi-groupe. Erreurs.

### Copie 1

#### Activité 1

Existe-il un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$  ? Si oui, le tracer.

Expliquer avec des phrases les recherches effectuées ainsi que la construction effectuée.

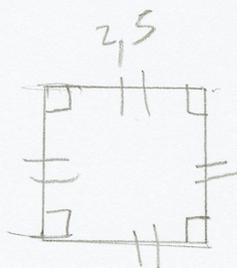


### Copie 2

#### Activité 1

Existe-il un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$  ? Si oui, le tracer.

Expliquer avec des phrases les recherches effectuées ainsi que la construction effectuée.



oui, il existe un carré d'aire  $10 \text{ cm}^2$ .

$$c \times c = c^2$$
$$2,5 \times 2,5 = (2,5)^2$$

Chaque côté mesure  $2,5 \text{ cm}$  :  $2,5 \times 4 = 10$

$$\sqrt{10} =$$

$$2,5 \times 2,5 = (2,5)^2$$
$$6,25 = 6,25$$

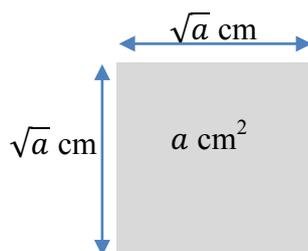
## Racines carrées

### I. Racine carrée d'un nombre positif

#### 1. Définition, propriétés

##### définition :

La **racine carrée de  $a$** , notée  $\sqrt{a}$ , est la mesure de la longueur du côté du carré d'aire  $a$ .



##### Remarques :

$a \geq 0$  car  $c$ 'est une aire. **La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.**

$\sqrt{a} \geq 0$  car  $c$ 'est une longueur.

##### Exemples :

1. Soit un carré d'aire  $25$  cm<sup>2</sup>. Quelle est la longueur de son côté ?

2. Soit un carré d'aire  $30$  cm<sup>2</sup>. Quelle est la longueur de son côté ?

##### Propriétés :

Soit  $a$  un réel **positif**.

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad \text{et} \quad \sqrt{a^2} = a.$$

#### 2. Opérations sur les racines carrées

##### Propriétés : multiplication et quotient de racines carrés

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels positifs.

1.  $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Le produit de deux racines carrées est égal à la racine carrée du produit.

2. Si  $b \neq 0$ ,  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$   
quotient. `

Le quotient de deux racines carrées est égal à la racine carrée du

Exemples :

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} =$$

$$\sqrt{4} \times \sqrt{6} =$$

$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} =$$

**ATTENTION :** Il n'y a pas de règles générales concernant la somme et la différence de deux racines carrées. Généralement,  $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$  et  $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$  pour  $a - b \geq 0$

## II. Méthodes de transformations des racines carrées

Exemples :

1. Ecrire le plus simplement possible :

$$A = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$$

$$B = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - \sqrt{5}$$

On regroupe les membres d'une même « famille de racines carrées » pour réduire l'expression.

2. Ecrire les expressions suivantes sous la forme  $a\sqrt{3}$ , où  $a$  est un entier positif.

$$A = \sqrt{48}$$

$$B = \sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$$

On fait apparaître des racines carrées de 3 en extrayant des carrés parfaits.

## Annexe 9 : Exercices sur le chapitre racine carrée.

---

Feuille d'exercices : racines carrées – 2<sup>nde</sup> 5

### Exercice 1

Pour chaque nombre donné ci-dessous, préciser si la racine carrée de ce nombre est définie ou non.

- a) 3,6      b) -4      c)  $\frac{2}{-5}$       d)  $\frac{-11}{-3}$       e) 0      f)  $\frac{\pi}{4}$

### Exercice 2

Donner, sans calculatrice, la racine carrée des nombres ci-dessous.

- a) 64      b) 144      c) 16      d) 81      e) 100      f) 121

### Exercice 3

A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à  $10^{-4}$  près des nombres ci-dessous.

- a)  $\sqrt{2}$       b)  $\sqrt{12,6}$       c)  $\sqrt{2673}$

### Exercice 4

Parmi ces écritures, indiquer, sans utiliser la calculatrice, celles qui sont égales à 7.

- a)  $\sqrt{(-7)^2}$       b)  $-(\sqrt{7})^2$       c)  $(-\sqrt{7})^2$       d)  $\sqrt{-7^2}$

### Exercice 5

Sans utiliser la calculatrice, donner la racine carrée de ces nombres.

- a) 0      b)  $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$       c)  $\sqrt{81}$       d)  $(-6)^2$

### Exercice 6

Ecrire le plus simplement possible.

$$A = \sqrt{3} \times \sqrt{12} \quad B = \sqrt{3} \times \sqrt{75} \quad C = 3\sqrt{5} \times \sqrt{5} \quad D = \sqrt{5} \times \sqrt{32}$$

### Exercice 7

Sans utiliser la calculatrice, donner une écriture fractionnaire de chaque nombre.

$$A = \sqrt{\frac{1}{9}} \quad B = \sqrt{\frac{4}{25}} \quad C = \sqrt{\frac{-100}{-16}} \quad D = \sqrt{-\frac{-144}{225}}$$

### Exercice 8

Réduire, si c'est possible, les expressions suivantes :

- a)  $5\sqrt{2} + 13\sqrt{2}$       b)  $4\sqrt{7} - 9\sqrt{7}$       c)  $2\sqrt{3} + 6\sqrt{5}$       d)  $13\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 17\sqrt{2} + \sqrt{2}$   
e)  $-4\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 15\sqrt{3} + \sqrt{2}$

### Exercice 9

Ecrire sous la forme  $a\sqrt{3}$  où  $a$  est un nombre entier.

- a)  $\sqrt{75}$       b)  $\sqrt{27}$       c)  $\sqrt{147}$       d)  $\sqrt{243}$       e)  $\sqrt{12}$       f)  $\sqrt{432}$

### Exercice 10

Réduire les écritures des nombres suivants.

$$A = 9\sqrt{2} \times 7\sqrt{3} \times 2\sqrt{18} \quad B = \sqrt{4 + 36}$$
$$C = 5\sqrt{11} \times (-4\sqrt{22}) \quad D = \sqrt{18} - \sqrt{2}$$

**Exercice 11**

Réduire l'écriture de  $A$  et  $B$ .

$$A = 6\sqrt{32} - 5\sqrt{27} - 2\sqrt{72} + \sqrt{12} + \sqrt{200}$$

$$B = -2\sqrt{20} + 7\sqrt{45} - 5\sqrt{40} + \sqrt{500} - \sqrt{810}$$