



HAL
open science

Améliorer le contrôle et la métacognition pour mieux cerner les domaines de validité des procédures en mathématiques

Pauline Bertrand, Ibrahim Tchambaz

► To cite this version:

Pauline Bertrand, Ibrahim Tchambaz. Améliorer le contrôle et la métacognition pour mieux cerner les domaines de validité des procédures en mathématiques. Education. 2018. dumas-01942419

HAL Id: dumas-01942419

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01942419>

Submitted on 18 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année universitaire 2017-2018

Master MEEF

Mention 2nd degré- parcours Mathématiques

2^{ème} année

**Améliorer le contrôle et la métacognition pour mieux
cerner les domaines de validité des procédures en
mathématiques**

Une expérimentation au cycle 4 avec l'analyse d'erreurs

Mots Clefs : métacognition, contrôle, erreurs, autorégulation

Présenté par : Ibrahim Tchambaz et Pauline Bertrand

Encadré par : Renaud Chorlay

Plan

Introduction

I. Outils théoriques	p.5
1. Contrôle.....	p.5
2. Métacognition.....	p.7
3. Autorégulation et contrôle exécutif.....	p.9
4. Typologie des erreurs et statut de l'erreur.....	p.11
5. Lien avec notre questionnement initial et formulation de la problématique.....	p.14
II. Expérimentation	p.16
1. Objectifs et démarches choisies.....	p.16
2. Dans nos pratiques.....	p.16
3. Séance 1.....	p.19
3.1. Analyse a priori	
3.2. Analyse a posteriori	
4. Séance 2.....	p.32
4.1. Analyse a priori	
4.2. Analyse a posteriori	
III. Améliorations et prolongements	p.40
1. Séance 3.....	p.40
1.1. Analyse a priori	
1.2. Analyse a posteriori	
2. Dans nos pratiques.....	p.53
2.1. Améliorations	
2.2. Prolongements	
Conclusion	p.57
Bibliographie.....	p.59
Annexes.....	p.60

Introduction

Dans notre pratique, nous avons observé plusieurs erreurs commises par les élèves qui semblent relever de mécanismes similaires. Nous en citons deux exemples.

En classe de 5^{ème}, Pauline a été confrontée lors du chapitre sur la symétrie centrale à la confusion fréquente entre symétrie axiale et centrale. Les élèves construisent le symétrique de la figure par rapport à un axe "inventé", en général vertical ou horizontal, au lieu de construire le symétrique par rapport au point comme demandé. En classe de 5^{ème} aussi, Ibrahim, en travaillant sur les nombres relatifs, a observé de nombreuses erreurs dans la comparaison de deux nombres négatifs : les élèves semblent se contenter de comparer les valeurs absolues, sans tenir compte du signe.

À chaque fois, il semble y avoir intrusion de procédures connues depuis longtemps par les élèves, dans de nouvelles tâches pour lesquelles elles ne sont pas pertinentes. Pourtant, ces élèves ont souvent les connaissances théoriques nécessaires pour mener à bien l'exercice proposé. Les élèves ne semblent pas parvenir à contrôler le choix de la procédure qu'ils utilisent, mais se lancent dans la tâche sans recul. Alors comment amener les élèves à s'interroger sur le domaine de validité des procédures qu'ils utilisent et à questionner leurs automatismes ?

Ces remarques nous ont amené à nous renseigner sur certains des processus permettant d'expliquer ces erreurs. Le premier qui retint notre attention fut le contrôle (des résultats, du choix de la procédure...) dont le manque nous paraissait être la cause de ce genre d'erreurs chez les élèves. Afin d'exercer ce contrôle, la prise de recul sur les réflexions et actions des élèves pendant les tâches données nous paraissait indispensable, ce qui nous a conduit aux notions de métacognition et d'autorégulation. Enfin, comme notre réflexion concerne les erreurs des élèves, il nous a paru important de connaître quelques typologies d'erreurs proposées par des chercheurs afin de situer celles que nous étudions dans ces typologies, et de nous confronter éventuellement à des interprétations différentes de ces erreurs. Ces outils théoriques sont exposés dans la première partie.

La fréquentation de ces notions issues des domaines des sciences cognitives, de la didactique et de la théorie de l'apprentissage nous a amenés à reformuler notre problématique. Comment concevoir des activités et pratiques à composante métacognitive dans le but d'encourager les élèves à exercer davantage de contrôle sur leur pratique mathématique ?

Certains pourraient objecter que travailler spécifiquement le développement du contrôle et des capacités métacognitives en général est inutile ou mal avisé : le recul sur la pratique mathématique viendrait naturellement aux élèves quand ils commencent à bien connaître les notions en jeu. Les élèves penseront d'eux-mêmes à vérifier leurs résultats quand leur maîtrise des exercices libérera des ressources attentionnelles pour cette tâche supplémentaire. De façon similaire, pour éviter une erreur récurrente il faudrait montrer la démarche correcte, et non utiliser des procédures de contrôle ou discuter de l'erreur pour la comprendre. Il conviendrait donc de se concentrer sur les contenus habituels de l'apprentissage. Nous pensons au contraire, d'une part, qu'il serait bon pour les élèves d'exercer davantage de contrôle sur leur activité mathématique, et d'autre part, que cela peut être travaillé par des moyens spécifiques.

Pour remplir ces objectifs, nous avons conçu et mis en œuvre plusieurs pratiques et activités dans nos classes de cinquième et de quatrième. Nous avons décidé d'accorder une place prépondérante au travail sur les erreurs, leur explicitation avec divers moyens et leur analyse dans le cadre de travaux de groupe. Nous faisons en effet l'hypothèse qu'apprendre à repérer et à caractériser les automatismes et les erreurs contribue à un apprentissage mathématique en améliorant le contrôle et les capacités métacognitives des élèves. Nous faisons également l'hypothèse que demander aux élèves de justifier pourquoi une procédure s'applique, ou ne s'applique pas, permet de sensibiliser les élèves au fait que les procédures apprises en cours sont adaptées, ou inadaptées, pour des raisons mathématiques. Ces hypothèses sont testées, dans la mesure du possible, grâce aux expérimentations didactiques qui sont exposées et discutées dans les deuxième et troisième parties.

I. Outils théoriques

Dans cette partie, nous examinons plusieurs concepts issus des domaines de la didactique, de la psychologie cognitive et de la théorie de l'apprentissage qui sont liés à notre questionnement. À chaque fois, nous cherchons à retenir une définition du concept, puis nous relevons quelques expérimentations qui ont été menées dans les classes et commentons leur efficacité. Nous réinterprétons ensuite notre questionnement initial à la lumière de ces notions.

Il nous a semblé tout d'abord que les élèves devraient exercer un plus grand contrôle pour éviter l'application de procédures inadaptées. Pour cela, les élèves ont besoin d'acquérir du recul sur leurs pratiques, d'où notre intérêt pour les notions de métacognition et d'autorégulation. Par ailleurs, nous avons voulu situer les erreurs qui nous intéressent dans des typologies d'erreurs proposées par des didacticiens.

1. Le contrôle

1.1. Définitions

Pour Laure Guérin (2015, p.10), le contrôle est un gage de bonne réponse en passant par une autre méthode pour résoudre le problème. Par exemple, dans un exercice où il s'agit de déterminer le signe d'une fonction affine non constante sur \mathbb{R} , un élève de 2^{nde} peut commencer par résoudre l'inéquation correspondante. Afin de vérifier que le résultat obtenu est correct, il est susceptible de passer par le cadre graphique en représentant la courbe de la fonction. L'élève peut alors :

- Se contenter de vérifier à l'aide de la courbe que l'ordre des signes - positif puis négatif par exemple - est correct (vérification partielle)
- Résoudre en plus une équation pour trouver le zéro de la fonction (résolution complète par une autre méthode)

Mais cela revient à dire que l'on ne peut contrôler une réponse si le problème ne peut être résolu que d'une certaine manière. Cette définition nous paraît ainsi quelque peu incomplète car, pour reprendre les mots de Mireille Saboya Mandico, "le questionnement sur la justesse de la solution" (Saboya Mandico, 2010, p.14) peut aussi se traduire par des questions comme : ce résultat est-il vraisemblable ? Y a-t-il une contradiction avec les données de l'énoncé ? Ainsi, un élève qui trouve une vitesse moyenne d'une voiture en circulation de 8000 km/h a tout intérêt à remettre en cause sa réponse.

Plus généralement, pour Mireille Saboya Mandico (2010, p.116), « le contrôle se traduit par :

- une *réflexion* de la part de l'élève, sur toute action, sur tout choix tout au long de la tâche : au début, en cours ou à la fin de la résolution.
- la capacité à *prendre des décisions* de façon réfléchie, rationnelle.
- une *prise de distance* par rapport à la résolution.
- le recours aux *fondements* sur lesquels on s'appuie pour valider.
- l'utilisation de *métaconnaissances*. »

On pourrait supposer que cette dernière définition englobe la capacité de l'élève à se poser des questions comme :

- Ai-je déjà été confronté à un problème similaire ? Comment ai-je répondu ? Ma réponse était-elle correcte ?
- Qu'est-ce que le professeur attend de moi ? Quel est le lien avec le cours de l'enseignant ? Par exemple, en classe de 4^{ème}, beaucoup d'élèves, pour répondre à la question "les deux fractions $\frac{19}{20}$ et $\frac{75}{69}$ sont-elles égales ?" se lancent dans un produit en croix laborieux au lieu de comparer chacune des deux fractions à 1. Ils pourraient alors se demander si ce sont vraiment ces calculs qui sont attendus d'eux.

Dans toutes ces situations, l'élève exerce un contrôle soit sur les résultats, soit sur sa propre réflexion, en relation avec la situation proposée par l'énoncé, ou des connaissances acquises dans sa pratique des mathématiques. Ce tableau résume ces différents cas de figure :

Contrôle	Sur les résultats	Sur sa pensée
Par rapport à l'énoncé	Est-ce vraisemblable ? Y a-t-il une contradiction ? La réponse obtenue vérifie-t-elle les conditions (équations...) ?	La procédure que j'utilise permet-elle de répondre à la question ? Suis-je loin du but ?
Par rapport à la pratique mathématique antérieure	M'a-t-on enseigné une façon de contrôler le résultat ? Existe-t-il une procédure moins coûteuse pour faire la même chose ?	Ai-je déjà fait une erreur en résolvant ce type de problème ?

1.2. Paradigmes expérimentaux et efficacité

Nous faisons l'hypothèse qu'il serait profitable pour de nombreux élèves d'exercer davantage de contrôle sur leur activité mathématique. Comment, alors, favoriser le développement d'une activité de contrôle chez les élèves ? Ces stratégies ont-elles réellement un effet positif sur leurs résultats ?

Une première stratégie envisageable serait d'enseigner explicitement des procédures de contrôle aux élèves. Dans la description de la compétence "Calculer" au cycle 4, on peut lire : "Contrôler la vraisemblance de ses résultats, notamment en estimant des ordres de grandeur ou en utilisant des encadrements". Il est assez courant dans la pratique des enseignants d'encourager le recours à des calculs d'ordre de grandeur. Dans la résolution d'équations, les élèves sont aussi incités à vérifier que la solution obtenue convient, ce qui est plus souvent présenté comme une vérification que comme une étape nécessaire d'un raisonnement par analyse-synthèse. Enfin, dans les problèmes de modélisation, on apprend plus ou moins explicitement à revenir à la situation réelle après avoir résolu la question modélisée "dans les mathématiques". Concernant l'efficacité des stratégies explicites, on trouve des résultats positifs (Robert et Tenaud, 1988, p.49) et négatifs (Oliveira et al., 2007, p.11) dans la littérature.

Une seconde stratégie pour faire travailler le contrôle serait de sélectionner des activités dans lesquelles une activité de contrôle est nécessaire à la résolution. C'est la voie qu'a choisi Mireille Saboya Mandico (2010, p.393) dans sa thèse, avec des résultats en demi-teinte.

2. La métacognition

2.1. Définitions

La métacognition en psychologie a plusieurs acceptions, parfois assez éloignées. Etymologiquement, le mot signifie "cognition sur la cognition".

En psychologie de l'éducation, cette notion est souvent utilisée dans le sens assez restreint des connaissances de l'élève sur les processus de l'apprentissage en général et/ou sur l'état de ses connaissances, de ses compétences et sur les particularités de ses propres façons d'apprendre (Delvolvé, 2006, p.4). Ainsi, des connaissances comme "Je suis meilleur

en calcul qu'en géométrie" ou "Il est utile de refaire des exercices pour réussir le contrôle" relèvent de la métacognition.

Cependant, cette définition ne rend pas compte de situations dans lesquelles intervient une réflexion sur les processus cognitifs. Prenons par exemple le cas d'un étudiant engagé dans la résolution d'un problème, qui, après quelques minutes passées à essayer une méthode de résolution, pense : "ça ne mène à rien, je devrais peut-être essayer une autre voie". C'est une pensée métacognitive qui a pour fonction de réguler la recherche en direct.

Nous retenons donc la définition de John H. Flavell (1976, p.233), autour de laquelle de nombreux chercheurs dans le domaine de l'éducation se sont regroupés (Focant, 2004, p.18) :

« Les phénomènes métacognitifs sont de deux ordres :

(1) les connaissances que l'individu a de ses propres processus cognitifs, ainsi que des facteurs favorables et défavorables à ces processus ;

(2) le contrôle actif, la régulation et l'orchestration de ces processus en vue de la réalisation d'un but déterminé. »

Ce second point est à rapprocher des notions d'autorégulation et de contrôle exécutif, qui sont explorées plus en détail dans la partie I.3.

Ces processus semblent intervenir de manière plus ou moins consciente en fonction de la tâche demandée, de l'étape du raisonnement, de l'individu, mais aussi de l'enseignement métacognitif éventuellement suivi par l'élève. En particulier, des pensées métacognitives font parfois intrusion spontanément dans le flux de pensée à certains moments de la réflexion (Focant, 2004, p.24).

2.2. Paradigmes expérimentaux et efficacité

Dans la littérature didactique anglo-saxonne, la notion de métacognition a été largement abordée, et des chercheurs ont proposé des ingénieries didactiques visant à développer la métacognition chez les élèves. Dans nombre d'entre elles, les élèves doivent formuler des questions auto-adressées et y répondre au cours de la recherche mathématique (Kramarski, 2002, p.228). Le même auteur identifie les éléments importants figurant dans ces questions et en donne des exemples :

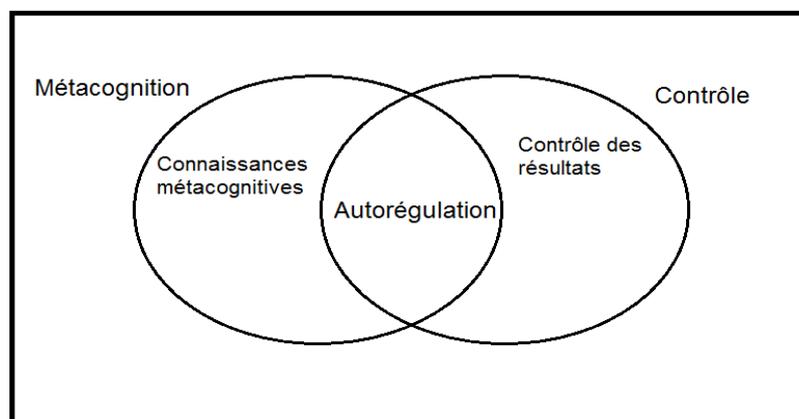
- « (a) Saisir le problème (“De quoi s’agit-il dans ce problème ?”).
- (b) Construire des connexions entre des connaissances anciennes et nouvelles (“Quelles sont les similarités et les différences entre ce problème et ceux que j’ai résolus dans le passé ? Pourquoi ?”).
- (c) Utiliser des stratégies appropriées à la résolution du problème (“Quelles sont les stratégies/tactiques/propriétés adaptées pour résoudre ce problème et pourquoi ?”).
- (d) Retour réflexif sur les procédures et la solution (“Où est-ce que je me suis trompé ?”; “La solution est-elle vraisemblable ?”) »¹.

La métacognition est souvent étudiée dans le contexte du travail en petits groupes. Des études citées par le même auteur ont montré que le travail individuel comportant un tel enseignement métacognitif a un effet plus positif sur la performance mathématique des élèves que le travail coopératif ou individualisé sans enseignement métacognitif, et que le travail coopératif avec enseignement métacognitif est encore plus efficace.

3. Contrôle exécutif et autorégulation

3.1. Définitions

Autorégulation. Les mots “régulation” et “contrôle” apparaissent dans la définition de la métacognition que nous avons retenue. On assimilera la notion d’**autorégulation** au deuxième point de cette définition. L’**autorégulation** est donc l’ensemble des processus qui permettent à un individu de gérer en direct l’allocation de ses ressources attentionnelles et temporelles en vue de la réalisation d’un but. Le diagramme ci-dessous décrit les liens entre ces concepts.



¹ Notre traduction

Plus précisément, Bandura (1986, chap .8) et Schunk (1989, p.91) ont proposé de distinguer trois sous-processus qui interviennent chronologiquement lors d'une tâche autorégulée : l'auto-observation, l'auto-jugement et l'auto-réaction.

L'auto-observation est le comportement d'observation et de prise d'information sur ses propres actions et ses propres pensées. Il s'agit de garder trace de la méthode suivie, du temps passé à l'appliquer, des résultats obtenus jusque-là, etc. L'auto-jugement est l'évaluation de ces observations au regard du but poursuivi. L'auto-réaction est "la prise de décision sur les comportements à mener dans le futur immédiat, en fonction de la poursuite du but fixé" (Focant, 2004, p.28). Il s'agit de modifier son comportement selon les indications données par l'auto-jugement.

On trouve aussi dans la littérature le terme de "monitoring" qui correspond, selon les auteurs, à l'auto-observation et éventuellement l'auto-jugement.

Contrôle exécutif. La notion de contrôle exécutif, proche de celle d'autorégulation, vient du domaine des sciences cognitives. D'après Stanislas Dehaene (2015), le contrôle exécutif est "l'ensemble des processus qui sous-tendent la planification, la sélection, l'initiation, l'exécution et la supervision des comportements volontaires, dirigés vers un but, [ainsi que] la flexibilité cognitive dans la conception de stratégies nouvelles, non-routinières", alors que l'autorégulation concerne essentiellement la supervision de ces comportements.

Il cite parmi les processus du contrôle exécutif la sélection des stratégies pertinentes et l'inhibition des stratégies inappropriées. Prenons l'exemple donné par Olivier Houdé : "Luc a 20 bonbons, c'est 5 de plus que Jeanne" (Houdé, 2014). Combien de bonbons a Jeanne ? Additionner 20 et 5 est une stratégie inadaptée, mais suggérée par l'énoncé à cause du mot "plus". Pour résoudre le problème, il faut y résister et sélectionner l'opération appropriée. Il faut "se contrôler" pour échapper aux biais cognitifs qui nous font commettre des erreurs. Plusieurs observations classiques réalisées notamment par Piaget peuvent être réinterprétées dans cette perspective. Ainsi, si l'on dispose une rangée (1941) de six perles espacées et une rangée de six perles rapprochées, l'enfant jusqu'à 6 ou 7 ans considérera qu'il y a plus de perles dans la première rangée. C'est l'erreur de non-conservation du nombre (Piaget, 1941). Cependant, d'autres expériences montrent une bonne maîtrise du nombre à cet âge. D'après Houdé (2014), cette erreur témoigne en réalité de l'incapacité des enfants à inhiber la stratégie qui consiste à se fonder sur la longueur. Cette stratégie est souvent appropriée, mais elle ne fonctionne pas dans ce cas.

La détection et la correction des erreurs relèvent aussi du contrôle exécutif, ainsi que l'orientation de l'attention vers des cibles pertinentes. On voit que le contrôle exécutif regroupe de nombreux autres processus que ceux de l'autorégulation.

3.2. Paradigmes expérimentaux et efficacité

Dans le même cours, Dehaene soutient que le contrôle exécutif peut être entraîné, avec des effets positifs sur le développement cognitif chez l'enfant et une amélioration des performances cognitives chez l'adulte. De plus, ces effets seraient généralisables : des sujets qui se sont entraînés sur certaines tâches sont plus à même de réussir des tâches différentes exigeant aussi un grand contrôle exécutif.

Outre la pratique régulière d'un instrument de musique et de la méditation, qui permettraient d'améliorer le contrôle exécutif, plusieurs paradigmes expérimentaux ont été imaginés et testés dans la littérature. Les jeux vidéo d'action augmentent la capacité à maintenir une attention soutenue et à inhiber une réaction inappropriée (Cardoso-Leite, 2014, p.191). Chez les enfants, une expérimentation a été menée en maternelle (Diamond, 2007, p.1387) : on a donné aux enfants des notions très élémentaires sur le fonctionnement de leur esprit ainsi que des outils pour réguler leur comportement. Les enseignants ont également été sensibilisés à la problématique de l'attention et de sa gestion. Un effet positif important sur la capacité d'inhibition a été observé.

4. Typologie des erreurs et statut de l'erreur

L'erreur a eu de multiples statuts en pédagogie. Dans le modèle transmissif, qui tend aujourd'hui à disparaître, l'erreur a un statut négatif. Sa réalisation est considérée comme une faute par l'élève, et l'enseignant doit se remettre en question lorsqu'elle survient. Dans le modèle constructiviste, le but de l'enseignant n'est plus d'éviter que ses élèves produisent des erreurs mais plutôt de les laisser apparaître et de les traiter (Scala, 1995). Elles fournissent à ce dernier des informations essentielles comme le savoir initial de l'élève, les tâches intellectuelles qu'il réalise et les obstacles qu'il rencontre. Le statut de l'erreur passe du négatif au positif, voire à l'indispensable lorsque l'on parle non plus d'erreurs fautives mais d'erreurs créatrices. Ainsi, pour reprendre les mots de Jean-Pierre Astolfi (1997, p.26) :

“Il n'est finalement pas d'apprentissage vrai sans tentative de tester dans un cadre nouveau des outils dont le caractère opératoire ne s'applique qu'à un champ limité. “

Ainsi, si l'on ne s'est pas trompé, c'est que l'on n'a pas testé assez loin (ou suffisamment extrapolé) nos connaissances pour en établir de nouvelles. On peut

maintenant se poser les questions suivantes : Toutes les erreurs sont-elles potentiellement créatrices? Y a-t-il des facteurs communs entre elles qui peuvent nous permettre de mieux les analyser et d'en tirer des remédiations afin de mieux les traiter?

Plusieurs didacticiens ont proposé des typologies d'erreurs commises par les élèves. Guy Brousseau en établit plusieurs correspondant à autant de points de vue (par l'échelle d'importance que lui donne l'élève, l'importance pour l'enseignant, etc). Plus récemment, Jean-Pierre Astolfi (1997, p.58-59) a proposé la typologie des erreurs suivante, souvent reprise dans la littérature didactique :

1. des erreurs relevant de la compréhension des consignes
2. des erreurs résultant d'habitudes scolaires ou d'un mauvais décodage des attentes
3. des erreurs témoignant de conceptions ou de représentations erronées
4. des erreurs liées aux opérations intellectuelles impliquées
5. des erreurs portant sur les démarches adoptées
6. des erreurs liées à une charge cognitive trop importante
7. des erreurs ayant leur origine dans une autre discipline
8. des erreurs causées par la complexité du contenu

Parmi les catégories ci-dessus, deux sont en lien étroit avec notre problématique : les erreurs résultant d'habitudes scolaires ou d'un mauvais décodage des attentes (2) et celles témoignant de conceptions ou de représentations erronées (3).

Jean-Pierre Astolfi (1997, p.65-68) détaille les erreurs classées dans la catégorie 2 de la façon suivante :

- réponses non adaptées à la situation et non logiques
- résolution erronée mais utilisant des règles plaquées sans réflexion
- absence de réponse par peur de se tromper
- difficultés liées à des obstacles épistémologiques et psychologiques non pris en compte lors de l'apprentissage (exemple : $5,43 > 5,7$)

Face à ce type d'erreurs, il propose comme remédiations l'explicitation des règles scolaires (clarifier le contrat didactique), l'apprentissage par situation - problème complexe, le travail sur "la représentation de l'erreur qui doit être considérée comme témoin des processus intellectuels en cours" ainsi que la construction par les élèves des règles à appliquer et l'analyse du domaine de validité de ces dernières.

Ce dernier point, l'analyse du domaine de validité des règles, a été travaillé de manière spécifique comme il en sera fait mention ultérieurement.

Concernant la catégorie 3 - des erreurs témoignant de conceptions ou de représentations erronées - Jean-Pierre Astolfi (1997, p.69) leur donne pour cause la construction depuis l'enfance de « systèmes cohérents d'explication » et des « conceptions alternatives [qui] s'avèrent très résistantes aux efforts d'enseignement » ainsi que les différences de signification de certains mots utilisés en mathématiques par rapport au langage courant ("le sommet" en géométrie par exemple).

Il faudrait, pour diminuer leurs apparitions, toujours selon Jean-Pierre Astolfi (1997, p. 74-75), prendre en compte les représentations des élèves en les leur faisant schématiser, les faire discuter des conceptions ou en provoquant une contradiction apparente dans certaines d'entre elles. Le débat d'idées et les tâches coopératives grâce auxquelles des conflits socio-cognitifs peuvent apparaître seraient à encourager.

On pourrait penser, à première vue, que la cinquième catégorie d'erreurs : "des erreurs portant sur les démarches adoptées" fait partie intégrante de notre sujet de recherche. Mais Jean-Pierre Astolfi (1997, p.81) y classe les productions d'élèves qui ne sont pas conformes aux attentes au regard de ce qui a été travaillé auparavant, ce qui signifie qu'elles dénotent une réelle compréhension de l'élève concernant ce qui lui est demandé et qu'elles ne manquent pas de pertinence. De ce fait, elles n'entrent pas dans le cadre de notre présent travail.

5. Lien avec notre questionnement initial et formulation de la problématique

Le point de départ de notre questionnement était l'observation d'un certain type d'erreurs récurrentes chez les élèves. Dans cette partie, nous réexaminons ce point de départ à la lumière des notions qui viennent d'être exposées et nous précisons les aspects théoriques les plus pertinents pour notre questionnement. Cela nous permet d'aboutir à la formulation de notre problématique.

Au début de notre questionnement, nous nous demandions en fait comment éliminer les erreurs qui résultent de l'application d'une procédure hors de son domaine de validité. Nous pensons désormais que ces erreurs sont des erreurs créatrices, utiles pour la construction de la connaissance mathématique. Cependant, nous constatons que des erreurs de ce type qui surviennent dès le début du cycle 4 perdurent souvent trop longtemps, parfois jusqu'au

lycée. Par conséquent, nous ne nous donnons pas pour objectif d'empêcher leur apparition, mais de faire en sorte qu'elles soient réellement l'occasion d'un apprentissage lorsqu'elles surviennent, et qu'elles ne survivent pas à leur utilité.

Nous pensons que cet objectif pourrait être atteint à travers :

- un contrôle des résultats plus fréquent
- l'acquisition de certaines connaissances métacognitives
- le développement de l'autorégulation et du contrôle exécutif
- un changement de point de vue sur l'erreur

Ces trois points sont développés ci-dessous.

Le contrôle des résultats. Parmi la grande diversité des pratiques et des types de contrôle, en nous appuyant sur les programmes de 4ème et de 5ème, nous voulons donner aux élèves certaines des procédures leur permettant de vérifier leurs résultats. Parmi celles-ci figurent l'incohérence des résultats, les ordres de grandeurs ou le fait de revenir à des images mentales.

Connaissances métacognitives visées. Nous aimerions amener les élèves à acquérir certaines connaissances métacognitives. Nous voudrions notamment faire réaliser à certains élèves qu'ils doivent parfois se méfier de leur première intuition. Bien entendu, cela n'implique pas que l'intuition doit disparaître de l'activité mathématique des élèves. Au contraire, elle en est une composante majeure et apprendre à faire des mathématiques, c'est aussi forger, affiner et corriger son intuition.

La connaissance d'un certain nombre d'erreurs spécifiques que l'élève a tendance à commettre est aussi un objectif.

Autorégulation et contrôle exécutif. Nous ne nous attachons pas à développer chez les élèves une meilleure capacité à gérer l'allocation de ressources au cours de la recherche sur un problème, même si cela pourrait faire l'objet d'un travail intéressant, notamment en lien avec les problèmes ouverts. Nous ne voulons pas non plus encourager les élèves à exercer un "monitoring" de tous les instants, qui alourdirait sans doute excessivement la charge cognitive (Focant, 2004) et serait peut-être contre-productif.

En revanche, nous voulons encourager l'apparition d'un moment d'intrusion de la métacognition dans la pensée au moment d'appliquer une procédure : cette procédure est-elle adaptée/correcte ? Pour répondre à cette question, outre la référence au cours

mémorisé, nous voulons aussi équiper les élèves de deux outils : la capacité à tester une procédure, et la connaissance d'un répertoire d'erreurs classiques qu'ils ont commis dans le passé.

Le cas échéant, les élèves doivent être capables d'inhiber la démarche incorrecte.

Statut de l'erreur. De la part des élèves comme des enseignants, deux attitudes sont possibles face à une erreur : l'écarter car elle n'a pas été obtenue par la méthode attendue, ou l'invalider par des procédures de contrôle (incohérence dans le raisonnement, ordre de grandeur, contradiction avec un résultat obtenu par une procédure validée, etc). Nous voulons favoriser chez les élèves cette seconde attitude, qui permet à la fois de donner plus de sens à l'activité mathématique, et, nous l'espérons, de progresser dans ses capacités et ses connaissances mathématiques.

Cela nous amène à la question suivante : comment concevoir des activités et des pratiques à composante métacognitives dans le but d'encourager les élèves à exercer davantage de contrôle sur leur pratique mathématique ?

II. Expérimentation : première approche

1. Démarches choisies

Nous avons conçu et mis en œuvre plusieurs démarches pour remplir les objectifs annoncés dans la partie précédente.

D'une part, nous avons introduit des changements dans notre pratique quotidienne (détaillés dans la partie II.2.). D'autre part, nous avons mené trois séances différentes d'analyse d'erreurs.

Lors de ces séances, nous voulions amener les élèves à comprendre des erreurs classiques de leur niveau. Pour cela, nous avons envisagé deux tâches possibles : décrire le type d'erreur commis à partir d'un exemple, en généralisant grâce au langage algébrique, ou, pour atteindre cette généralité, classer plusieurs erreurs. Nous avons suivi la première stratégie dans la première séance d'erreurs, et la seconde dans la deuxième séance. Nous avons ensuite conçu la troisième séance en fonction de nos observations lors des deux premières séances (celle-ci sera exposée dans la partie III. Améliorations et prolongements).

Les démarches choisies ne correspondent pas rigoureusement aux paradigmes expérimentaux relevés dans la littérature, mais s'en inspirent librement pour répondre à notre questionnement. En ce qui concerne le contrôle, nous parions davantage, comme Saboya (2012, p.127), sur des activités qui le favorisent que sur un enseignement explicite de procédures de contrôles rigides à appliquer pour différents exercices. En ce qui concerne la métacognition, nous avons choisi de ne pas reproduire le dispositif anglo-saxon de questions auto-adressées, qui nous paraît peu adapté au type d'exercices dans lesquels nous avons observé les erreurs qui nous intéressent. En ce qui concerne le contrôle exécutif, nous avons repris l'idée de parler aux élèves de certains mécanismes de la cognition.

2. Dans nos pratiques

Nous avons mis en place des démarches distinctes dans nos classes. Elles sont décrites dans les deux parties suivantes.

2.1. Dans les classes d'Ibrahim

- Pour le calcul littéral, une partie des élèves de quatrième avaient eu des difficultés à intégrer les règles de calcul. Il fut décidé d'accompagner, dans les énoncés des évaluations, les exercices de calcul littéral (développement, factorisation, réduction d'expressions littérale ainsi que les exercices demandant de conjecturer puis de démontrer le résultat donné par un programme de calcul) de l'encadré ci-dessous. L'objectif est de rappeler aux élèves la possibilité qu'ils aient commis des fautes d'inattention ou reproduit une erreur passée. Ainsi, l'encadré peut les inciter à revenir sur leurs productions de manière active en prenant plus de recul.

<p>A cocher :</p> <p><input type="checkbox"/> J'ai relu mes réponses</p> <p><input type="checkbox"/> Je n'ai pas répété mes erreurs</p>
--

- Dans le cadre du travail sur la prise de conscience des erreurs, il a été proposé aux élèves des classes de 5^{ème} et de 4^{ème} d'avoir et d'entretenir une feuille regroupant les erreurs qu'ils ont commises en évaluations et en classe (le format ci-dessous leur a été proposé au début du deuxième trimestre). En classe de quatrième, dans laquelle beaucoup d'élèves ont adopté cette méthode, il fut laissé pendant les corrections d'exercices et d'évaluations des temps dédiés à cette tâche. Les élèves avaient droit à cette fiche erreur pendant les évaluations. L'objectif est de diminuer l'indifférence de certains élèves à leurs erreurs en gardant une trace écrite de ces derniers ainsi que des remarques ou procédures permettant de mieux appréhender des situations similaires. Les encadrés à cocher permettent de penser à la consulter.

Situation	Erreur	Ce qu'il fallait faire (et pourquoi)

- Grâce aux tablettes (dont est muni chaque élève du collège d'Ibrahim), des séances d'auto-correction des copies d'évaluation (avec des points bonus par exercice corrigé) ont été menées à l'aide d'une correction détaillée consultable sur tablette. Le

travail des élèves n'était pas de recopier la correction (ce que les élèves sont tenté de faire) mais de détecter les erreurs et, pour chacune, déduire une formule ou une phrase pour qu'il ne la reproduise plus.

2.2. Dans les classes de Pauline

- Les erreurs fréquentes dans les interrogations et les contrôles sont reprises à l'oral, avec un débat entre les élèves. Cela prend souvent la forme de Vrai/Faux ou de diapositives présentant plusieurs solutions, parmi lesquelles les élèves doivent identifier celles qui sont incorrectes. Un tel exemple figure en annexe (A). Les arguments permettant d'invalider des réponses incorrectes sans passer par la procédure correcte sont valorisés. Les élèves identifient ainsi parfois des incohérences dans certaines réponses.

L'objectif de ce travail est double : il s'agit d'identifier ensemble des erreurs fréquentes à ne pas commettre - en comptant sur l'attention des élèves qui se reconnaissent dans les erreurs présentées - mais aussi de développer la capacité à détecter une erreur dans une production finie et à argumenter de manière convaincante, à l'aide de procédures de contrôle.

- Après chaque évaluation sommative, Pauline regroupe les élèves selon les erreurs qu'ils commettent et élabore pour chaque groupe une fiche de remédiation. Ces fiches contiennent souvent des exercices de repérage d'erreur (voir annexe B). Des rappels de cours, ainsi que des exemples d'erreurs commentées, y figurent aussi. Cette remédiation différenciée permet aux élèves de travailler sur leurs propres erreurs.
- Pendant les évaluations, les élèves sont invités à estimer leur note sur leur copie. L'objectif est de les amener à faire un retour réflexif sur leur production. En évaluant leur propre travail grâce au barème, ils pourraient penser à vérifier certaines réponses, ou au moins effectuer un jugement métacognitif de confiance dans leur résolution. Ils acquièrent ainsi un certain recul sur leur production. En répétant cette tâche à chaque évaluation, ils apprennent aussi peut-être à mieux évaluer ce qu'ils savent et ce qu'ils ne savent pas.

Dans tout ce qui précède, nous avons fait l'hypothèse que les erreurs relevant de l'application de procédures hors de leur domaine d'application sont liées à une incapacité à inhiber certains automatismes. Il faut cependant considérer une autre éventualité : les

élèves qui font ces erreurs savent que leur réponse est probablement fautive, mais savent aussi qu'ils sont incapables de résoudre le problème de manière correcte. Ils préfèrent alors écrire quelque chose plutôt que rien. L'estimation de la note peut donner une indication à ce sujet en permettant d'évaluer la distance entre ce que l'élève croit avoir réussi et ce qu'il a réellement réussi.

3. Séance 1

3.1. Analyse a priori

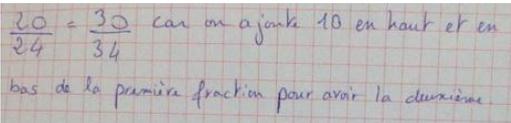
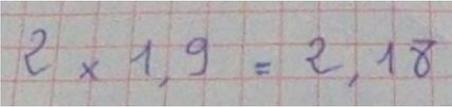
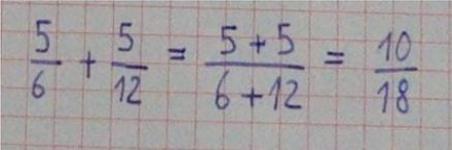
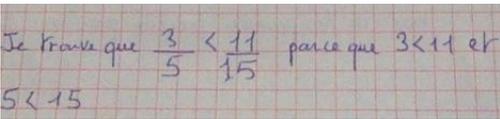
Objectifs de la séance.

- Développer des procédures de contrôle des résultats.
- Identifier des erreurs classiques sur les fractions et sur la multiplication de nombres décimaux.
- Généraliser et tester une procédure.
- Invalider une règle grâce à un contre-exemple.

Mise en place. Cette séance a eu lieu dans la classe de 5^{ème} de Pauline, lors d'une séance en demi-groupes, au début du 2^{ème} trimestre. Les élèves ont travaillé par groupes homogènes de trois ou quatre, choisis par le professeur. La séance était différenciée : chaque groupe a travaillé sur une fiche différente (portant chacune sur une seule erreur) en fonction de son niveau. Les fiches élèves sont en annexe (C). Les élèves d'un même groupe avaient une fiche chacun pour travailler mais devaient en rendre une seule.

Cette séance s'est déroulée en fin de chapitre sur les fractions, après l'institutionnalisation, les exercices d'application, une évaluation formative et un devoir maison, mais avant l'évaluation sommative. Cela nous a permis de nous baser sur les erreurs qui sont réellement apparues.

Après la séance, le travail des élèves a été résumé dans le tableau ci-dessous, auquel ils ont eu accès pendant l'évaluation sommative. Tous les extraits de copie d'élèves traités pendant la séance y figurent, par ordre croissant de difficulté.

	Copie d'élève	Erreur à ne pas commettre
Fiche 1		
Fiche 2		
Fiche 3		
Fiche 4		

Déroulement.

5 min : Explication de la tâche demandée. Les élèves sont informés que leur travail sera résumé par le professeur et utilisable en contrôle. Ils disposent de quelques minutes pour prendre connaissance du sujet et commencer à y réfléchir.

20 min : Travail en groupe sur la fiche élève à compléter. Si un groupe finit son travail plus tôt, une deuxième fiche lui est distribuée.

5 min : Les groupes désignent un porte-parole qui présentera oralement une erreur à éviter à ses camarades. Le professeur distribue une feuille récapitulant le cahier des charges de l'intervention du porte-parole au tableau.

10-15 min : Chaque groupe présente sa synthèse. L'erreur qu'ils ont analysée est projetée au tableau et ils peuvent utiliser les feutres. Après leur présentation, les autres élèves peuvent poser des questions.

5 min : Projection du tableau et bilan : face à des questions mathématiques, on a parfois envie d'appliquer la première chose qui nous passe par la tête, mais tout ce qu'on fait doit

pouvoir être justifié. Dans le doute, on peut se servir de nos autres connaissances mathématiques pour vérifier si une procédure s'applique dans un exercice.

Quelques éléments sur les fiches élèves. Nous avons choisi de dire aux élèves qu'ils allaient travailler sur des extraits de copies d'élèves, et non sur des erreurs. Au début de chaque fiche, nous demandons de résoudre la question mathématique dont l'extrait de copie constitue une réponse. Ensuite, il faut déterminer si la réponse proposée dans l'extrait est correcte ou non, puis décrire la méthode suivie dans cet extrait. Enfin, il faut appliquer des procédures de contrôle pour vérifier la validité de la réponse de l'extrait ou prouver qu'elle est fautive, de manière plus ou moins guidée selon le niveau du groupe. De cette façon, l'activité est utile dans le cas où les élèves commettent la même erreur que dans l'extrait, comme dans le cas où leur résolution est correcte dès le départ. Dans le premier cas, l'utilité des procédures de contrôle est mise en valeur, et dans le second, il reste à prouver que la réponse de l'extrait est bien fautive.

Justification de nos choix pour cette séance. Nous avons choisi de faire une séance différenciée afin que les élèves puissent travailler sur des erreurs qu'ils sont susceptibles de commettre eux-mêmes, et parce que tous les élèves ne sont pas capables de formuler les procédures incorrectes observées avec le même niveau d'abstraction. Tous les groupes doivent cependant parvenir à identifier la procédure utilisée dans la copie d'élève, et à l'invalidier.

Ainsi, dans les groupes les plus faibles, la règle fautive doit être formulée uniquement à l'aide d'une phrase, et le contre-exemple est suggéré par l'énoncé. Dans les groupes les plus forts, la règle fautive doit être formulée mathématiquement, et le contre-exemple trouvé par les élèves. De plus, ils doivent analyser une copie d'élève où la réponse elle-même est correcte, mais la justification fautive.

Afin que tous les élèves soient confrontés aux mêmes erreurs, nous avons opté pour une phase de mise en commun à la fin de l'heure. Cela permet aussi de travailler la communication et l'argumentation.

Difficultés prévues et remédiations.

Dans la phase de mise en commun, les porte-paroles doivent laisser le temps à leur public de s'approprier les questions et les copies d'élèves avant de se lancer dans leur analyse, afin que tous puissent suivre. Ceci est rappelé dans le cahier des charges de l'exposé distribué aux élèves.

Les exposés pourraient être confus ou être une simple relecture des fiches. Les élèves doivent passer de l'analyse d'une copie d'élève particulière à un point de vue pragmatique où il s'agit d'exposer à leurs camarades des erreurs à ne pas commettre, ce qui pourrait s'avérer difficile.

Avec cette classe, nous avons beaucoup travaillé la formalisation des propriétés à l'aide du langage littéral, notamment sur les fractions. Cependant, certains élèves pourraient ne pas parvenir à une formulation mathématique des "règles fausses" utilisées dans les copies d'élèves.

Pour les fiches 2 et 3, traitant respectivement de l'addition de deux fractions et de la multiplication de nombres décimaux, la justification que la règle utilisée dans l'extrait proposé est incorrecte pourrait donner lieu à des réponses du type: "la réponse est incorrecte car l'élève n'a pas suivi la procédure apprise en cours." sans l'accompagner du contrôle du résultat trouvé dans l'extrait proposé. Pour la fiche 3, il faudrait pousser les élèves de ce groupe à utiliser leurs connaissances afin de vérifier que l'on n'obtient pas le même résultat avec ces deux règles (celle instituée dans le cours et celle utilisée dans l'extrait proposé). En revanche, dans la fiche 2, l'écriture décimale est unique donc cette comparaison est immédiate.

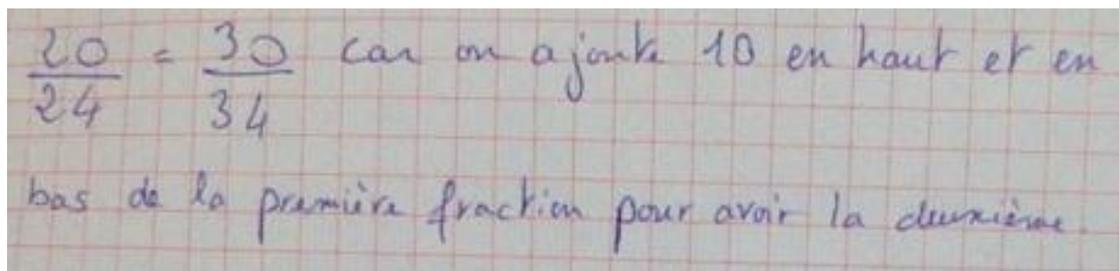
Plus généralement, cette séance est différente de ce qui est fait habituellement en cours de mathématiques, et il est possible que les élèves ne comprennent pas ce qui est attendu d'eux, ou refusent de s'engager dans l'activité car ils n'en percevraient pas les bénéfices pour eux.

Enfin, nous avons aussi envisagé la possibilité que cette séance soit contre-productive : les procédures fausses étant formalisées et discutées, les élèves pourraient les retenir et les utiliser davantage qu'avant la séance. Cependant, cet argument s'applique à tout discours sur l'erreur, et nous pensons au contraire que les élèves ont des capacités métacognitives suffisantes pour parler de l'erreur et distinguer le statut des énoncés.

3.2. Analyse a posteriori

Difficultés observées. Contrairement à ce que nous avons anticipé, les porteparoles ont exposé assez clairement le travail de leur groupe. Pour les autres difficultés, nous analysons successivement chacune des quatre fiches.

Fiche 1. Cette fiche a été distribuée aux groupes les plus faibles. Elle concerne l'erreur ci-dessous.



À la première question posée, "Les fractions $\frac{20}{24}$ et $\frac{30}{34}$ sont-elles égales ?", les deux groupes ont répondu correctement à l'aide d'un produit en croix. Cependant, sur certaines fiches non rendues (chaque groupe avait 4 fiches mais n'en rendait qu'une), on voit que plusieurs élèves, sans doute bloqués par la première question, ont commencé par lire l'extrait et ont été convaincus par le raisonnement qui y figurait. En voici un exemple :

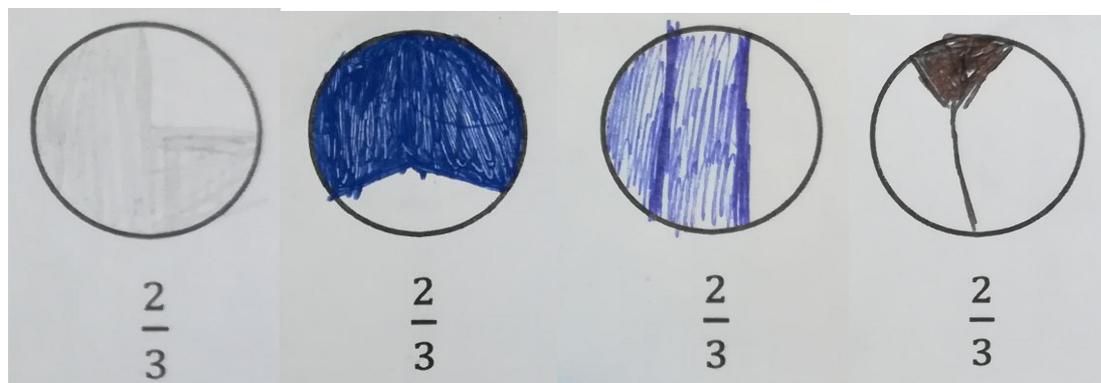
La réponse de cet élève est-elle correcte ? Oui Non

La communication entre élèves dans ces groupes est restée trop limitée malgré les encouragements. Les mêmes élèves qui ont commencé par la question 2 ont donc pu se confronter aux procédures de contrôle proposées dans cette fiche en pensant toujours que la réponse était correcte. Dans cette fiche, nous avons fourni nous-mêmes le contre-exemple, en demandant seulement aux élèves de compléter des représentations des fractions en jeu :

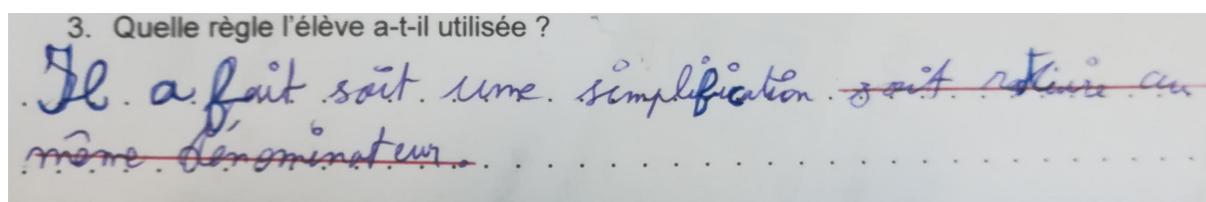
4. Voici un autre exemple d'utilisation de cette règle : $\frac{1}{2} = \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}$, donc $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.

a) Compléter les dessins pour représenter les fractions demandées.

Nous avons constaté à cette occasion que la capacité à représenter une fraction, sur laquelle nous avons compté, n'était en fait pas acquise par les élèves de ce groupe, comme le montrent les productions ci-dessous.



Par ailleurs, nous avons choisi dans la question 3 "Quelle règle l'élève a-t-il utilisée ?" de ne pas préciser que cette règle était incorrecte afin de ne pas révéler que l'extrait contenait une erreur. La formulation de cette question a conduit certains élèves à chercher une "vraie" règle, venant du cours, comme le montre cette production d'élève.



Fiche 2. Cette fiche a été distribuée à des groupes moyens. Elle concerne l'erreur ci-dessous.

$$2 \times 1,9 = 2,18$$

Sur les deux groupes ayant travaillé sur cette fiche, l'un a commencé par faire la même erreur que dans l'extrait. Ils ont ensuite répondu à la question 4.a), reprise ci-dessous.

4. a) Complétez : 1,9 est à peu près égal à 2, donc $2 \times 1,9$ est à peu près égal à . 4

Les élèves de ce groupe ont alors immédiatement remis leur réponse initiale en question. Ils ont été sensibles à la contradiction entre leurs deux croyances. Ils m'ont alors demandé s'ils

pouvaient utiliser leur calculatrice. Devant mon refus, l'un d'eux a eu l'idée de poser l'opération. Le groupe est alors tombé d'accord sur le fait que $2 \times 1,9 = 3,8$ et a reconnu la cohérence de ce résultat avec la réponse à la question 4.a).

Dans l'autre groupe, qui avait trouvé la réponse correcte dès le début, la question 4.a) a aussi été mise en relation avec le résultat de la multiplication pour vérifier sa cohérence.

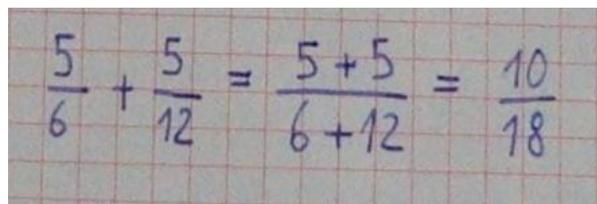
Après cette étape, nous demandions aux élèves ce qu'ils pensaient de la règle suivie par l'élève. Les deux attitudes face à l'erreur sont apparues à cette occasion : le premier groupe justifie que cette règle est incorrecte par le fait qu'elle n'est pas la règle correcte, et le second relève une erreur de raisonnement à la base de cette méthode. C'est ce que montrent les deux productions d'élèves ci-dessous.

b) Que pensez-vous maintenant de la règle suivie par l'élève ?
La règle suivie par l'élève n'est pas bonne, il devrait poser l'opération, mais il ne l'a pas fait. Elle est fautive.

b) Que pensez-vous maintenant de la règle suivie par l'élève ?
Elle est fautive, car il a pensé que le nombre entier et le nombre décimal sont deux nombres différents.

Cependant, aucun élève n'a donné la réponse attendue : la règle est incorrecte car elle donne un résultat faux sur cet exemple (qui constitue donc un contre-exemple).

Fiche 3. Cette fiche a été distribuée aux groupes de niveau moyen. Elle a aussi été traitée par un groupe de niveau fort qui avait terminé sa fiche. Elle concerne l'erreur ci-dessous.


$$\frac{5}{6} + \frac{5}{12} = \frac{5+5}{6+12} = \frac{10}{18}$$

Les élèves devaient tout d'abord additionner les deux fractions par leur propre méthode avant de prendre en compte l'extrait de copie proposé. Les trois groupes ont réduit les fractions au même dénominateur et ont donné la réponse correcte à cette question : $\frac{15}{12}$.

Ils devaient par la suite passer à l'analyse de l'extrait de copie proposé. Deux réponses, ne différant que par la rigueur, ont été relevées.

Certains, comme on peut le voir dans l'extrait élève ci-dessous, ont écrit que la règle utilisée par l'élève était d'avoir additionné sans avoir réduit au même dénominateur, ce qui laisse entendre que si les deux fractions avaient le même dénominateur, on aurait pu additionner les numérateurs et les dénominateurs.

Quelle règle l'élève a-t-il utilisée ?
... Que on additionne même sans le même
... dénominateur ...

D'autres élèves ont bien explicité la procédure suivie dans l'extrait proposé, comme on peut le voir ci-dessous :

Quelle règle l'élève a-t-il utilisée ?
L'élève a additionné les numérateurs
et les dénominateurs entre eux ...

À la question 3, les trois groupes ont jugé la règle utilisée par l'élève incorrecte mais, comme on le prévoyait (voir "difficultés prévues et remédiations" dans l'analyse a priori), certains n'ont pas su justifier leur réponse à part en disant que la réponse était fausse car l'élève n'a pas suivi la procédure instituée comme on peut le voir dans l'extrait suivant :

3. La règle utilisée est-elle correcte ? Oui Non
Justifier.
... Car on doit additionner avec le même
... dénominateur ...

Il a été dit aux groupes pendant la phase de travail en commun: "Êtes-vous sûrs que l'on ne trouve pas le même résultat puisqu'il y a de multiples façons d'écrire une fraction ? Exemple avec $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{4}$ ". Ceci a poussé des groupes travaillant sur cette fiche à comparer le résultat obtenu par eux à la première question au résultat de l'extrait qui leur a été proposé, par deux moyens différents.

En utilisant le produit en croix :

3. La règle utilisée est-elle correcte ? Oui Non

Justifier.

Non. la règle utilisée n'est pas correcte car les 2 produits en croix ($\frac{10}{18}$ et $\frac{15}{12}$) ne sont pas égaux.

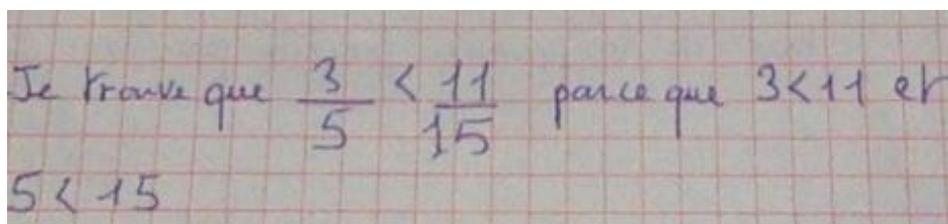
En comparant les fractions à 1 :

3. La règle utilisée est-elle correcte ? Oui Non

Justifier.

La règle est fautive car les résultats ne sont pas égaux : $\frac{15}{12} > 1$; $\frac{10}{18} < 1$.

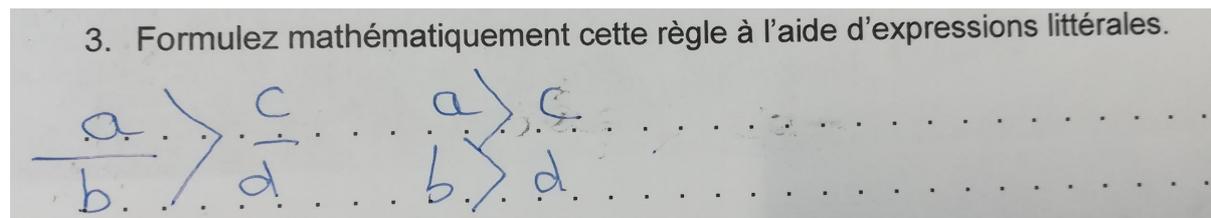
Fiche 4. Cette fiche a été distribuée aux groupes de niveau élevé. Elle concerne l'extrait ci-dessous.



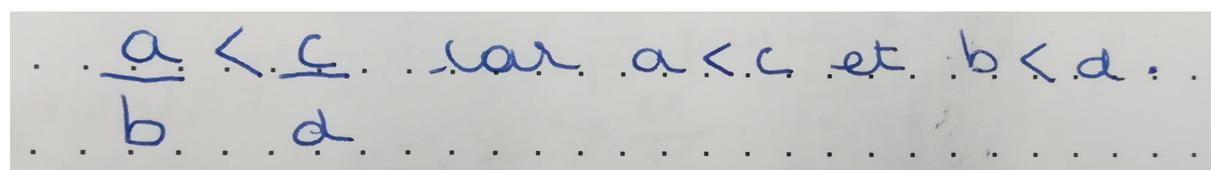
La comparaison entre les fractions est correcte, mais la justification ne l'est pas. Pour invalider cette réponse, les élèves devaient donc trouver un contre-exemple, ce qui est demandé en question 4. Cette fois, il n'était pas donné par l'énoncé.

Dans ces groupes, les élèves n'ont eu aucun mal à comprendre que la réponse était correcte mais la méthode incorrecte, ni la nécessité de produire un contre-exemple. Ils ont semblé apprécier l'activité, sans doute parce qu'elle était assez difficile pour les stimuler tout en restant abordable.

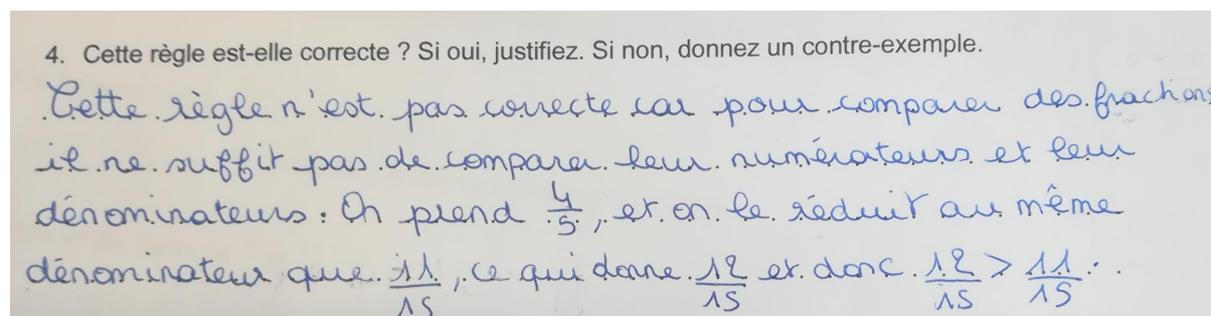
En ce qui concerne la formulation mathématique de la méthode utilisée dans l'extrait, ils ont compris ce qui était demandé, mais les articulations logiques ont manqué dans la production d'un des groupes.



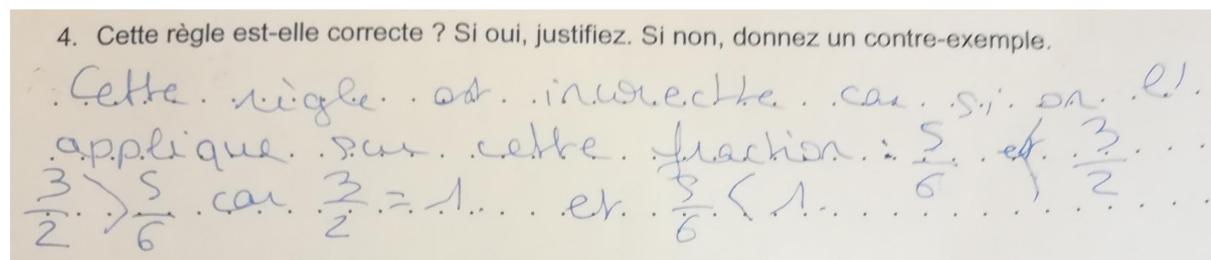
Dans l'autre groupe, cependant, cela a été réussi :



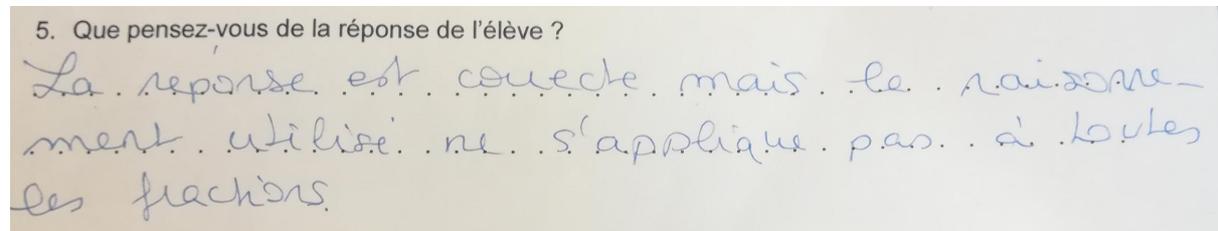
Les deux groupes ont trouvé un contre-exemple pertinent. L'un a eu l'idée de modifier les données de l'énoncé :



L'autre a trouvé un contre-exemple astucieux avec une fraction inférieure à 1 et une fraction supérieure à 1 :



Dans la dernière question, qui était très ouverte, les élèves des deux groupes ont fait spontanément apparaître l'idée du domaine de validité de la méthode, alors qu'ils auraient pu se contenter de signaler que la réponse était correcte, mais pas la justification. En voici un exemple :



Questions sur l'authenticité des erreurs. Dans les deux demi-groupes, les élèves ont voulu savoir si les extraits de copies venaient de leur classe, d'une autre classe de 5ème, ou si elles avaient été inventées. Nous avons fait le choix de reprendre des erreurs réellement commises par les élèves de cette classe, mais en changeant quelques valeurs numériques, et surtout, en réécrivant nous-mêmes ces erreurs. Il s'agissait d'éviter que l'écriture d'un élève soit reconnue, ce qui aurait pu causer des moqueries ou perturber le déroulement de la séance. Les élèves ont été informés qu'il s'agissait de vraies erreurs, qui plus est fréquentes dans leur classe, mais recopiées par des professeurs.

Passage à l'oral. Les porte-paroles ont joué le jeu et ont laissé un temps d'appropriation à leurs camarades, mais il a tout de même été difficile de maintenir l'attention de la classe pendant chaque exposé. Il est probable que les élèves sont sortis de cette séance en retenant surtout l'erreur sur laquelle ils avaient travaillé. Les exposés étaient pourtant clairs et les élèves ont su synthétiser leur travail, ce qui laisse penser qu'ils ont compris le sens de l'activité.

Dans l'évaluation sommative. Nous avons pu observer l'influence de cette séance sur les élèves lors du devoir sur table qui a eu lieu quelques jours après celle-ci, et dans un devoir commun qui s'est déroulé environ trois mois après la séance d'analyse d'erreurs. Dans le devoir sur table, deux questions ont été conçues pour tester si les erreurs abordées allaient être reproduites :

Calculer et simplifier le résultat obtenu si c'est possible.

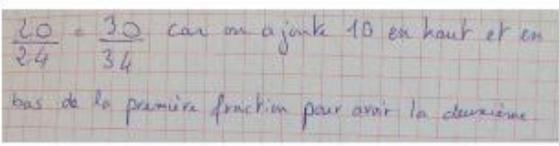
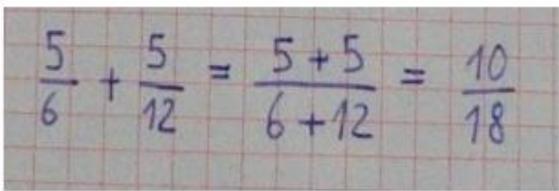
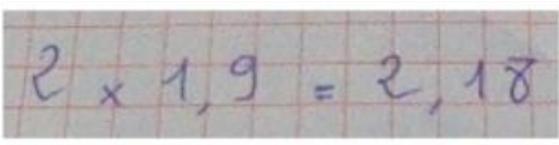
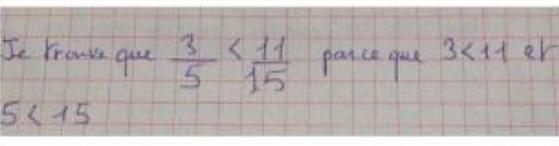
$$A = \frac{3}{8} + \frac{7}{2}$$

Comparer les deux fractions à l'aide des signes «<», «=» ou «>». Justifier chacune de vos réponses.

b) $\frac{42}{40}$ et $\frac{22}{20}$

Dans cette deuxième question, personne n'a répondu que les fractions étaient égales. Cela aurait peut-être été le cas en l'absence de séance d'analyse d'erreurs, mais il semblerait au moins, comme nous l'avons postulé dans l'analyse a priori, que nous n'avons pas encouragé les élèves à appliquer une procédure fautive en la mentionnant et en passant du temps dessus.

Lors du devoir sur table, le tableau suivant, complété par le professeur d'après les exposés, était projeté.

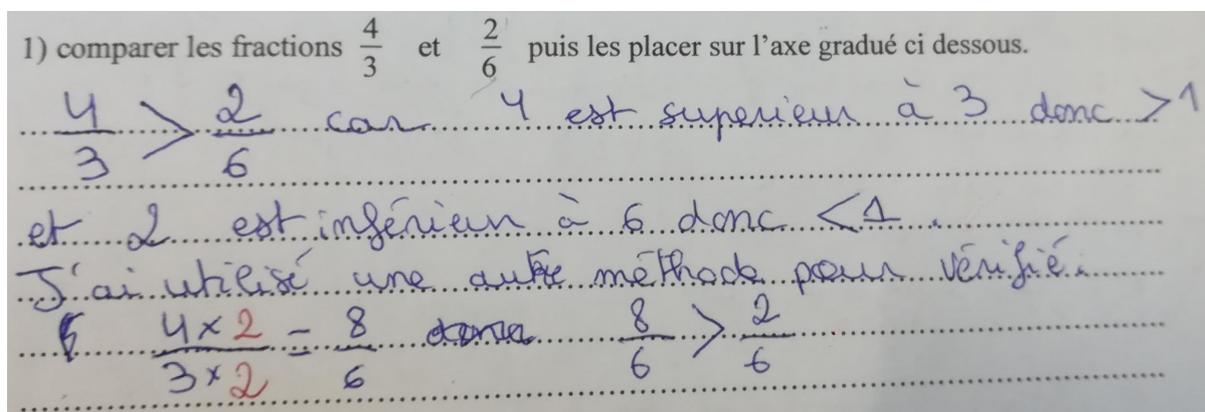
Copie d'élève	Erreur à ne pas commettre
 <p>$\frac{20}{24} = \frac{30}{34}$ car on a ajouté 10 en haut et en bas de la première fraction pour avoir la deuxième.</p>	Pour réduire deux fractions au même dénominateur, on ne peut pas <u>ajouter</u> le même nombre en haut et en bas.
 <p>$\frac{5}{6} + \frac{5}{12} = \frac{5+5}{6+12} = \frac{10}{18}$</p>	Pour additionner deux fractions, on ne peut pas additionner les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
 <p>$2 \times 1,9 = 2,18$</p>	Pour calculer le produit d'un nombre entier et d'un nombre décimal, on ne peut pas considérer ce qu'il y a avant la virgule et ce qu'il y a après la virgule comme deux nombres entiers différents.
 <p>Je trouve que $\frac{3}{5} < \frac{11}{15}$ parce que $3 < 11$ et $5 < 15$</p>	Pour comparer deux fractions, on ne peut pas comparer les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Cependant, deux élèves ont encore appliqué la procédure erronée qui consiste à additionner numérateurs entre eux et dénominateurs entre eux pour additionner deux fractions. L'un d'entre eux, au niveau extrêmement faible, avait travaillé sur cette erreur. Aucun des autres élèves de niveau faible, qui avaient également travaillé sur cette erreur, ne l'ont commise dans le devoir.

Pendant le devoir, un élève qui abordait le calcul $\frac{3}{8} + \frac{7}{2}$ a demandé à Pauline, en montrant le tableau projeté : "ça veut dire qu'ici je ne peux pas faire $3 + 7$ et $8 + 2$?". Elle lui a retourné la question et il a finalement réussi à mener ce calcul correctement. Cela montre d'une part qu'au moins un élève s'est servi de ce support, et d'autre part que la similarité entre les calculs $\frac{3}{8} + \frac{7}{2}$ et $\frac{5}{6} + \frac{5}{12}$ ne va pas de soi pour tous. On peut supposer que la tâche aurait été encore plus ardue avec des écritures fractionnaires comportant des décimaux non entiers.

Dans le devoir commun (trois mois après la séance d'analyse d'erreurs), seules une somme et une différence de fractions permettaient de vérifier si les élèves commettaient encore les erreurs traitées. Nos élèves ont commis ces erreurs dans les mêmes proportions environ que les élèves des trois autres classes de 5ème de l'établissement (3 erreurs en tout sur les deux tâches pour 27 élèves). Bien entendu, de nombreux autres paramètres influencent sans doute ces résultats et il faudrait disposer de plus grands échantillons pour pouvoir arriver à des conclusions.

Nous avons aussi observé, dans les copies de ce devoir commun, que plusieurs élèves avaient utilisé des procédures de contrôle dans des contextes où cela ne leur avait pas été explicitement appris ni même suggéré. En voici un exemple.



Ceci est peut-être à attribuer aux changements introduits dans notre pratique quotidienne et/ou à la séance d'analyse d'erreurs.

Améliorations possibles. Pour que les élèves soient convaincus que c'est leur travail qui est disponible en contrôle, il aurait fallu imprimer le tableau d'erreurs et le remplir pendant les exposés oraux.

Un temps de réflexion personnelle plus long au début de la séance permettrait sans doute à davantage d'élèves de faire les mêmes erreurs que dans les extraits, et de percevoir ainsi l'intérêt des procédures de contrôle proposées.

Enfin, le travail sur les extraits où la réponse est correcte mais pas la justification paraît vraiment intéressant. Il sensibilise particulièrement bien les élèves à l'idée de domaine de validité. La recherche de contre-exemples amène les élèves à examiner des procédures sous l'angle du sens des notions mathématiques en jeu. Devant la facilité qu'ont eu les meilleurs groupes à comprendre les enjeux de ce travail, nous pensons qu'il serait raisonnable d'essayer de le généraliser à tous les groupes. Cependant, il n'est pas évident de trouver de tels exemples au niveau 5ème. On pourra s'en convaincre en essayant de mettre sous cette forme les autres erreurs étudiées dans cette séance.

Bilan. La séance a bien fonctionné et les objectifs semblent atteints. Les élèves les plus faibles se sont engagés dans la tâche et les élèves ont pu produire des raisonnements pertinents mettant en lien procédures apprises et sens mathématique.

4. Séance 2

4.1. Analyse a priori

Objectifs de la séance :

- Identifier des erreurs classiques sur les fractions, le calcul numérique et littéral.
- Atteindre la généralité en classant des erreurs.
- Développer des procédures de contrôle des résultats.

Mise en place. Cette séance a eu lieu dans la classe de 4ème de Pauline, lors d'une séance en demi-groupes, au début du 3ème trimestre. Le travail proposé n'est pas différencié, et les élèves ont travaillé par groupes de 3 ou 4, qu'ils ont choisi eux-mêmes. Dans chaque groupe, une fiche élève par personne a été distribuée, mais une seule fiche était à rendre par groupe (voir annexe C).

La séance a fait l'objet d'un enregistrement sonore.

Cette séance a eu lieu après les chapitres portant sur les fractions, le théorème de Pythagore, le calcul littéral (avec développement et réduction), et avant un devoir commun à toutes les classes de 4^{ème} qui a testé des notions de chacun de ces chapitres.

Déroulé prévu.

5 min : Explication de la tâche demandée.

5 min : Appropriation personnelle de la part des élèves.

20 min : Travail par groupes de 4 sur une fiche élève à compléter.

5 min : On informe les élèves qu'il faut maintenant retenir la classification la plus pertinente.

Un porte-parole dans chaque groupe est désigné par le professeur. Chaque porte-parole présentera oralement et défendra la classification retenue par son groupe.

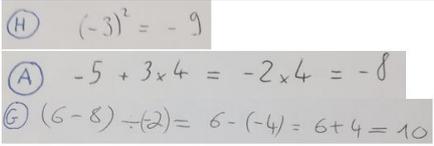
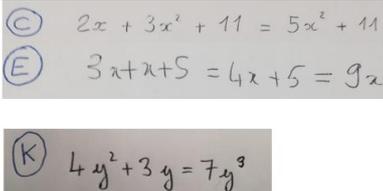
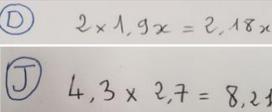
10-15 min : Mise en commun. Présentation orale de chaque porte-parole, à l'aide de leur travail projeté. Selon la diversité des classifications proposées par les élèves, débat entre les élèves pour :

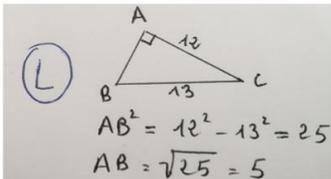
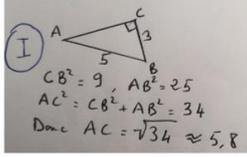
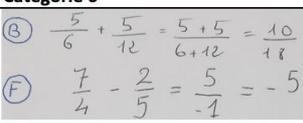
- Déterminer quelles classifications sont identiques ou équivalentes
- Choisir la plus pertinente
- Trouver des descriptions claires et concises de chaque catégorie

5 min : Bilan. Face à des questions mathématiques, on a parfois envie d'appliquer la première chose qui nous passe par la tête, mais tout ce qu'on fait doit pouvoir être justifié. On a vu quelques types d'erreurs récurrents chez les élèves de 4ème. Il faut essayer d'avoir du recul sur son travail et repérer quand une procédure ne s'applique pas.

Tâche de classification. Dans la première séance, le travail sur un unique extrait s'accompagnait d'une généralisation de l'erreur commise afin que les élèves parviennent à comprendre l'erreur dans sa généralité. Il faut qu'ils puissent transférer l'analyse d'une erreur à leur propre pratique, et en particulier reconnaître les situations dans lesquelles ils pourraient la commettre. Pour atteindre ces mêmes objectifs, nous avons choisi dans cette deuxième séance de donner aux élèves plusieurs erreurs à classer. L'élève de 5ème qui a demandé, lors du contrôle, si l'erreur affichée au tableau était à rapprocher de celle qu'il s'apprêtait à commettre, nous conforte dans l'idée que cette tâche pourrait être travaillée avec profit.

Classification finale attendue.

	Catégorie 1	Catégorie 2	Catégorie 3
Erreurs			
Type d'erreurs	Erreurs liées aux priorités opératoires. Pour la H, l'élève a appliqué : $(-x)^2 = -x^2$	On ne <u>somme</u> pas des termes de nature différente.	Pour multiplier deux nombres décimaux, il ne suffit pas de multiplier les parties entières entre elles et les parties décimales entre elles.

	Catégorie 4	Catégorie 5	Catégorie 6
Erreurs			
Type d'erreurs	Erreur dans le passage de l'égalité de Pythagore à l'expression littérale de la longueur du côté adjacent d'un triangle rectangle.	Erreur dans l'application de l'égalité de Pythagore : On ne calcule pas la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle de la même façon que l'on calcule la longueur d'un côté adjacent à l'angle droit.	Pour additionner deux fractions, on ne peut pas ajouter leurs numérateurs entre eux et leurs dénominateurs entre eux. L'élève a appliqué : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

Choix des catégories d'erreurs. Les erreurs choisies sont des erreurs fréquemment relevées dans les copies des élèves de cette classe, où des automatismes sont mis en jeu de manière inadaptée, et qui sont compréhensibles par tous les élèves. Sous ces contraintes, nous avons obtenu des catégories d'erreurs qui recourent presque les catégories basées sur le type d'objet mathématique en jeu (fractions, expressions littérales, triangles rectangles, nombres décimaux).

Cependant, nous avons veillé à ce que ces critères formels ne suffisent pas à trouver la classification attendue : l'erreur D fait intervenir des inconnues mais est à rapprocher de l'erreur J ; les erreurs H, C et L comportent toutes des carrés mais appartiennent à trois catégories différentes ; les deux erreurs où figure un triangle rectangle peuvent être regroupées dans la même catégorie ou séparées selon l'interprétation que l'on en fait. En effet, dans l'erreur I, l'égalité " $AC^2 = CB^2 + AB^2$ " peut être interprétée comme une tentative d'écrire l'égalité de Pythagore, en repérant incorrectement l'hypoténuse, ou encore comme une égalité déduite à tort de l'égalité correcte de Pythagore.

Travail en groupe. Les élèves ont eu la possibilité de se regrouper par affinités. Le travail n'étant pas différencié, il n'a pas paru nécessaire de former des groupes de niveau. De plus, lors de précédentes séances de travail en groupe dans cette classe, il est apparu que les élèves travaillent bien dans cette situation. Le porte-parole, un élève qui n'a pas beaucoup travaillé au sein du groupe, est désigné par le professeur. Le groupe devra se mobiliser, durant les 5 minutes avant le passage à l'oral, pour que ce dernier puisse les représenter.

Difficultés prévues.

Les élèves pourraient avoir des difficultés à repérer l'erreur dans chaque extrait avant de commencer le classement proprement dit. Les plus faibles, qui sont susceptibles de commettre ces erreurs, doivent fournir un effort pour conséquent pour repérer certaines erreurs. C'est pourquoi nous avons choisi, contrairement à ce qui a été fait dans la première séance, de mentionner dans la fiche élève que les extraits contiennent des erreurs.

Comme mentionné précédemment, les catégories choisies par les élèves pourraient ne pas correspondre aux types d'erreurs mais à autant d'objets mathématiques contenus dans les copies d'élèves (fractions, inconnues). Nous avons fait le pari que la discussion au sein d'un groupe ou entre les groupes dans la phase de mise en commun ferait ressortir le fait que certaines erreurs sont très similaires même si elles ne contiennent pas les mêmes objets mathématiques.

Au moment de compléter le tableau, les élèves risquent de prendre un nombre arbitraire de catégories pour pouvoir commencer à remplir le tableau. C'est aussi pourquoi chaque groupe dispose de plusieurs fiches élèves, ce qui leur permet le cas échéant de recommencer la fiche qu'ils rendront.

Les élèves pourraient aussi ne pas comprendre comment utiliser le tableau, car il est inhabituel de demander de diviser un tableau en plusieurs colonnes. Des explications personnalisées pourront être données à ce sujet pendant la phase de recherche.

Certaines erreurs peuvent être interprétées de plusieurs façons, dont certaines que nous n'avons sans doute pas envisagées. Par exemple, l'erreur dans la copie d'élève "H" est susceptible de ne pas être perçue par les élèves comme relevant des priorités opératoires.

Comme pour tout travail en groupe, dans la phase de mise en commun, les élèves, concentrés sur leurs propres classements, risquent de ne pas prêter attention aux classements de leurs camarades. Pour maintenir leur attention, ils pourront être sollicités pour comparer les classements présentés à leur propre classement et se préparer à modifier ou à défendre le leur.

4.2. Analyse a posteriori

Déroulement réel. La séance a eu lieu sur deux heures consécutives avec les deux demi-groupes. Pendant la première heure, les élèves ont perdu trop de temps à comprendre ce que l'on attendait d'eux. Ils se sont souvent engagés dans des classifications sur des critères qui ne remplissaient pas les objectifs (les plus faibles au hasard). Par conséquent, Pauline a donné oralement dès le début une consigne plus fermée aux élèves de l'autre demi-groupe. Il leur a été demandé de classer les extraits en regroupant dans une même catégorie ceux qui témoignaient de "la même erreur".

Par ailleurs, l'exposé successif des différentes classifications pendant la première heure n'a eu qu'un intérêt très limité en termes d'apprentissage. Les passages à l'oral dans le deuxième demi-groupe se sont donc déroulés un peu différemment : une première classification a été exposée et notée au tableau par le premier porte-parole, puis cette classification a été discutée et modifiée peu à peu par les autres groupes.

Difficultés observées et limites de cette séance.

Rétrospectivement, la question "classer ces erreurs" nous paraît bien trop ouverte, surtout pour un si grand nombre d'extraits et de catégories. L'enseignant ne peut remettre en cause la classification des erreurs donnée par les élèves. Il ne peut que les guider dans leurs prospections et si aucun des groupes présents ne pointe les bons critères, il est très difficile de donner une catégorisation "corrigée" aux élèves à la fin de la séance.

Voici quelques exemples de classifications proposées par des élèves du premier groupe. Elles montrent que plusieurs critères pouvaient être imaginés, valides mais qui ne permettent pas les apprentissages visés. Nous ne reprenons ici que les deux premières lignes du tableau.

Catégories	négatif / décimal / fraction / positive			
Erreurs	D/I/S A/F/M/	D/I/S	B	C/E/G/H/L

Catégories	présente	placement de la virgule	point de 0° cube / 0° carré	point de division	calcul incorrect
Erreurs	(A) (G)	(D) (J)	(K) (L) (H) ^(C)	(B) (F)	(E) (I)

Catégories	calcul	calcul
Erreurs	A, B, C, E, F, G, H, I, K	D, J, L

Certains groupes ont proposé des classifications “mixtes” où les critères de classification étaient des critères de forme (“calcul avec x”, “signe”) mais où les similarités entre les erreurs que nous attendions apparaissent dans la description (voir annexe E.2).

De plus, les élèves n’ont pas tous eu le réflexe d’analyser finement ce qui était incorrect dans chaque extrait avant de se lancer dans une classification. Cela leur a peut-être paru trop long ou peu utile. Classer les erreurs sur des critères de surface était plus efficace en termes de temps. L’objectif de la séance “Identifier des erreurs classiques sur les fractions, le calcul numérique et littéral” n’a donc été que partiellement atteint. Il a fallu poser des questions pendant les exposés oraux pour que davantage d’analyses apparaissent.

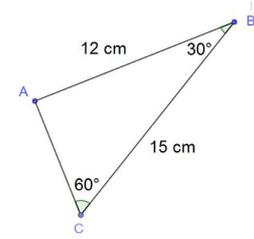
Dans un groupe, comme anticipé et malgré les indications, les élèves n’ont pas compris comment utiliser le tableau (voir annexe E.1).

Si la première séance d’analyse d’erreurs avait permis de faire travailler les plus faibles, celle-ci n’a pas rempli cet objectif. La compréhension des erreurs étant déjà difficile, la tâche de les classer leur a sans doute paru trop difficile. Cependant, dans le deuxième demi-groupe, Pauline a donné le conseil de commencer par essayer de comprendre l’erreur contenue dans chaque extrait. Cela a aussi été l’occasion d’évoquer des procédures de contrôle des résultats avec les élèves, ce qui a également été fait pendant les exposés oraux.

Impact dans le devoir commun.

Quelques jours après la séance 2, les élèves ont passé un devoir commun. Quatre questions étaient conçues pour tester la capacité à résister à l’application de procédures inadaptées. Trois de ces questions relevaient de catégories étudiées pendant la séance d’analyse d’erreurs :

- **Théorème de Pythagore.** Calculer la longueur AC. Justifier.



- **Addition.** Calculer : $B = \frac{8}{2} + \frac{2}{8}$

- **Réduction** (au sein d'un QCM)

La forme réduite de l'expression $4x + 3 + 2x$ est ...	9x	$6x + 3$	$3 + 8x$
---	----	----------	----------

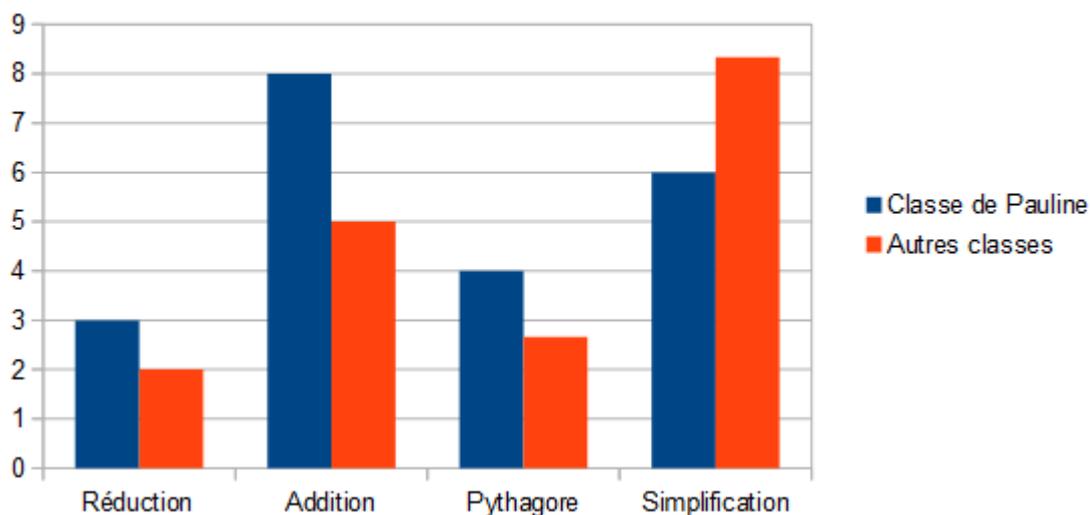
Une quatrième question de **simplification**, également dans le QCM, n'avait pas été étudiée pendant la séance :

Pour chacune des questions ci-dessous, entourez une seule réponse.

La fraction $\frac{11}{21}$...	Peut être simplifiée en $\frac{10}{20}$	Ne peut pas être simplifiée	Peut être simplifiée en $\frac{10}{20}$ et en $\frac{1}{2}$
---------------------------------	---	-----------------------------	---

Globalement, il semble que les élèves de la classe de Pauline n'ont pas commis moins d'erreurs que ceux des autres classes. C'est ce qui apparaît lorsque l'on compare le nombre moyen d'erreurs :

Nombre d'erreurs moyen au devoir commun



Il s'agit uniquement des erreurs où les élèves ont appliqué une procédure hors de son domaine de validité.

Cependant, cette comparaison n'est peut-être pas pertinente. En effet, la classe de 4^{ème}2, qui a un professeur différent des classes de 4^{ème}3 et 4^{ème}4, a fait beaucoup moins d'erreurs que les autres. C'est ce qui apparaît dans le tableau ci-dessous, qui résume le nombre d'erreurs relevées dans chacune des classes.

Nombre d'erreurs de chaque type dans chacune des 4^{ème}

	Réduction	Addition	Pythagore	Simplification
Classe de Pauline	3	8	4	6
4 ^{ème} 2	1	2	4	2
4 ^{ème} 3	1	4	2	13
4 ^{ème} 4	4	9	2	10

De plus, il faut prendre en compte le niveau général de chaque classe. La classe de Pauline a la moyenne générale la plus basse. Ce tableau résume les moyennes générales de chacune des 4^{ème}, calculées sur les deux premiers trimestres.

Moyenne générale de chacune des 4^{ème}

4 ^{ème} 1	4 ^{ème} 2	4 ^{ème} 3	4 ^{ème} 4
11,18	12,99	11,64	12,18

Bilan. Même si les quelques changements effectués à la deuxième heure ont permis d'avoir une séance plus productive, les objectifs n'ont pas vraiment été atteints. Le format de cette séance ne permet pas de travailler efficacement la compréhension d'erreurs classiques, et il est à remettre en question. Il est possible que le dispositif mis en place ait créé davantage de difficultés qu'il n'a permis d'en résoudre.

III. Améliorations et prolongements

L'analyse de ces deux séances nous a poussés à en concevoir une troisième, dans laquelle nous tentons de remédier à certains défauts des premières (III.1). Le retour sur nos pratiques nous amène également à repenser certains dispositifs (III.2.1). Enfin, nous envisageons également dans cette troisième partie des démarches possibles pour prolonger notre travail ou l'aborder sous un autre angle (III.2.2).

1. Séance 3

1.1. Analyse a priori

1.1.1. Description de la séance

Avec cette troisième séance nous avons voulu reprendre l'idée de classer des erreurs pour atteindre la généralité dans le but de remédier aux défauts de la séance 2.

Objectifs :

- Présenter aux élèves une vision simplifiée de ce que sont les automatismes (ou biais cognitifs) et la nécessité de leur inhibition.
- Développer des procédures de contrôle des résultats.
- Identifier des erreurs classiques sur les fractions (comparaison, addition/soustraction), la réduction d'expression littérales et sur l'utilisation de l'égalité de Pythagore.
- Se poser la question de la manière la plus correcte d'aborder certaines situations dont on a repéré la similarité : « comment éviter de reproduire la même erreur ? »

Mise en place. La séance a fait l'objet d'un enregistrement sonore. Cette séance a eu lieu dans la classe de 4^{ème} d'Ibrahim, lors d'une séance en demi-groupes. Les élèves ont travaillé par groupes de quatre, qu'ils ont choisis eux-mêmes. La séance était (relativement) différenciée : chaque groupe a travaillé sur une fiche différente en fonction de son niveau. Les fiches élèves sont en annexe (F3 à F6). Une feuille d'activité par élève a été ramassée.

Un demi-groupe a suivi la séance d'analyse d'erreurs, tandis que l'autre a traité des exercices classiques sur les mêmes thématiques : addition/soustraction de fractions, comparaison de fractions, réductions d'expressions littérales, trouver la longueur d'un côté d'un triangle rectangle grâce à l'égalité de Pythagore.

Contexte. La séance a eu lieu le lundi matin de 8h à 9h. Il s'agit d'une classe européenne ; le niveau est relativement élevé. Les élèves de cette classe sont déjà familiers avec le concept et l'utilisation de la fiche erreur.

Positionnement au sein de la séquence. Cette séance s'est déroulée en fin de séquence sur les fractions (comparaison, addition, soustraction), et avant l'évaluation sommative qui devait avoir lieu 3 jours après cette séance.

Le calcul littéral a été traité au début du 2^{ème} trimestre mais des exercices sur les réductions, développement et factorisations d'expressions littérales ainsi que des programmes de calcul ont été posés dans la plupart des évaluations depuis. De la même manière, l'égalité de Pythagore a été traitée au 1^{er} trimestre mais a été souvent reprise en évaluation.

Déroulé prévu.

Introduction

5 min : Installation en classe. Présentation de la séance : travail sur les erreurs récurrentes en lien avec les automatismes. Informer les élèves que cette séance sera enregistrée avec un dictaphone.

1^{ère} partie de la séance : Introduction aux concepts d'automatisme et d'inhibition par une présentation Powerpoint (voir Annexe F.2).

3 min : Le test Stroop. Dire de quoi il s'agit. Laisser 10 secondes par question.

5 min : Analogie entre le test Stroop et une erreur fréquente chez des élèves du cycle 2 dans la réponse à la question suivante: "Louise a 25 billes. Elle a 5 billes de plus que Léo. Combien Léo a-t-il de billes ?". Échange avec les élèves à propos de cette erreur.

2 min : Distribution des feuilles d'analyse d'erreurs en expliquant qu'il s'agit maintenant d'analyser des erreurs commises à leur niveau d'étude.

2^{ème} partie de la séance : L'activité d'analyse d'erreurs

15 min : Traitement de la question n°1 par les élèves. Passage de l'enseignant dans les groupes pour clarifier l'énoncé et rassurer les élèves sur leurs travaux. Dire aux groupes ayant terminé avant les autres de corriger les extraits de copies proposés en donnant le résultat recherché.

10 min : Présentation orale du porte-parole de chaque groupe qui doit commenter un des extraits choisis par l'enseignant parmi les quatre qui leur ont été proposés.

13 min : Traitement de la question n°2 par les élèves. Aucune aide de l'enseignant.

Bilan

2 min : Face à des questions mathématiques, on a parfois envie d'appliquer la première chose qui nous passe par la tête, mais tout ce qu'on fait doit pouvoir être justifié par une règle ou une propriété du cours. On a vu quelques types d'erreurs récurrentes chez les élèves de 4ème. Il faut essayer d'avoir du recul sur son travail et repérer les procédures inadaptées que vous utilisez.

1.1.2. Choix didactiques

1^{ère} partie de la séance: Introduction aux concepts d'automatisme et d'inhibition.

Le test Stroop. En vue de préparer au mieux les élèves pour les tâches qu'ils auront à réaliser, nous avons choisi de leur présenter un test classique mesurant l'inhibition dans un cadre particulier, celui de la couleur avec le test Stroop (ci-dessous un exemple de question, voir annexe F.1. pour la présentation complète qui a été faite en classe).

Sélectionner le rectangle rouge:

a.



b.



c.



Le test Stroop est un test classique en psychologie pour l'évaluation de l'attention sélective. Celle-ci peut se définir comme la capacité à maintenir l'attention sur une cible,

même en présence d'un distracteur. Bien que ne portant pas sur un contenu mathématique, ce test ludique a pu donner aux élèves une idée assez juste de ce que l'on entend par l'inhibition d'un automatisme. Il s'agit de sélectionner correctement un rectangle d'une couleur donnée, d'abord lorsque le mot désignant la couleur du rectangle demandé est écrit dans une couleur cohérente avec le mot, puis dans des exemples où ce n'est pas le cas, comme ci-dessus. Cela permet de faire ressentir aux élèves l'apparition de cette envie d'association qu'ils doivent inhiber afin de bien répondre à la question.

Analogie avec une erreur "classique" à l'école. Après le test Stroop, nous avons projeté aux élèves un exemple (déjà cité dans la partie I.3.1) d'erreur récurrente dans le cycle 3. Le but est que les élèves fassent l'analogie entre le test Stroop et celle-ci en explicitant "le piège" dans lequel un élève en classe de CE2 pourrait tomber.

« Louise a 25 billes. Elle a 5 billes de plus que Léo. Combien Léo a-t-il de billes ? »
Dans quel piège pensez-vous qu'un élève de CE2 pourrait tomber?

Comme il en a été fait mention au paragraphe I.3.2, certaines études (Diamond, 2007, p.1387) attestent l'influence positive de la sensibilisation des élèves à la métacognition. En effet, on pourrait s'attendre à une plus grande prise de recul sur le travail d'un élève qui a plus de connaissances sur le fonctionnement de son cerveau.

2^{ème} partie de la séance : L'activité d'analyse d'erreurs

Le choix des erreurs. Afin que les élèves de quatrième d'Ibrahim puissent voir et analyser précisément un maximum d'erreurs durant cette séance, nous avons décidé de ne retenir que quatre types d'énoncé parmi ceux qui ont été présentés aux élèves de quatrième de Pauline lors de la séance 2 :

- Déterminer la longueur d'un côté adjacent à l'angle droit d'un triangle rectangle en connaissant les deux autres.
- Comparaison de fractions.
- Addition/soustraction de fractions.
- Réduction d'expressions littérales.

Notre choix s'est fait sur trois critères :

- La richesse didactique. On voulait donner la possibilité de contrôler les résultats par divers moyens. Par exemple, les réponses proposées aux questions sur la comparaison et l'addition/soustraction de fractions peuvent être vérifiées en

réduisant au même dénominateur ou en recourant à la calculatrice. Par l'incohérence aussi : dans les quatre situations proposées faisant appel à l'égalité de Pythagore, la longueur de l'hypoténuse est inférieure à la longueur trouvée du côté adjacent à l'angle droit. Nous voulions aussi voir figurer une réponse correcte avec une justification fautive car cela incite à réfléchir sur le domaine de validité d'une procédure, comme nous l'avons constaté au cours de la séance 1.

- La fréquence de ces erreurs dans la classe. Des erreurs récurrentes que les élèves font depuis le premier trimestre liées à l'utilisation de l'égalité de Pythagore et à la réduction d'expressions littérales ont été accompagnées d'erreurs "classiques" sur le chapitre qu'ils viennent de voir : sommer/comparer les numérateurs et les dénominateurs pour sommer/comparer deux fractions.
- Leur présence au devoir commun qui se déroulera 3 jours après la séance d'analyse d'erreur. Seuls les trois derniers types de questions y sont abordés sachant que le dernier chapitre traité avant cette séance porte sur la comparaison et l'addition/soustraction de fractions.

La généralisation des règles fausses proposées avec des expressions littérales étant un travail coûteux en temps (voir II. 4. 2. Analyse a posteriori) et ne rentrant pas dans les objectifs de cette séance, nous ne l'avons pas pris comme critère de sélection des situations erreurs (le calcul de la longueur du côté adjacent à l'angle droit d'un triangle rectangle ne s'y prêtant pas). Ce travail est tout de même très intéressant (voir II.3. 1. Analyse a posteriori) et mériterait de prendre place dans une seconde séance d'analyse d'erreurs du même type lorsque les élèves seraient plus familiers avec ce qui leur est demandé.

La question 1. Dans cette question les élèves sont censés détecter puis expliquer les erreurs dans chacune des quatre situations proposées.

Nous pensons que les élèves sont à même de faire le lien entre les erreurs que peuvent engendrer ces questions (automatismes, application hors de leur domaine de validité de procédures que l'on a beaucoup utilisé) et le test Stroop suivi de l'exemple d'erreur sur le nombre de billes que possède Léo.

Afin de ne pas surcharger les extraits proposés, nous avons fait le choix de ne pas y faire figurer les énoncés, comptant sur le bon sens et la lecture attentive des élèves.

Le passage à l'oral. Le porte-parole de chaque groupe doit commenter un des extraits choisi par l'enseignant parmi les quatre qui leur ont été proposés.

- Le porte-parole du groupe 1 commente l'extrait A (ci-dessous) : soustraction de fractions dont les dénominateurs ne sont pas multiples l'un de l'autre.

A
$$\frac{-8}{8} - \frac{-2}{5} = \frac{-8 - (-2)}{8-5} = -2$$

Cet extrait présente l'avantage de revoir que "soustraire un nombre négatif, c'est ajouter son opposé" ainsi que de pointer la deuxième égalité qui est correcte. Il est en effet important de souligner auprès des élèves "les bonnes choses" effectuées dans les extraits pour qu'ils ne pensent pas qu'il y a toujours tout à jeter dans une réponse fausse.

- Le porte-parole du groupe 2 commente l'extrait L (ci-dessous) : comparaison de fractions dont les dénominateurs sont multiples l'un de l'autre.

L Je trouve que $\frac{3}{5} < \frac{11}{15}$
parce que $3 < 11$ et $5 < 15$

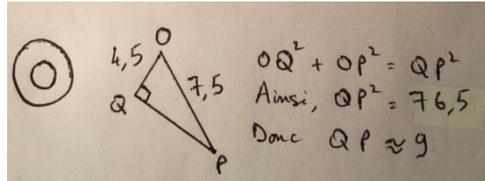
Cet extrait permet d'exposer au reste de la classe une réponse "correcte" avec une justification fausse ainsi que de voir que le dénominateur commun peut être celui d'une des fractions lors de la vérification (contrairement à l'extrait A).

- Le porte-parole du groupe 3 commente l'extrait E (ci-dessous) : réduction d'une expression littérale du premier degré.

E
$$3x + x + 5 = 4x + 5 = 9x$$

En référence à l'extrait précédent, on peut demander aux élèves si, là aussi, une étape n'aurait pas été correctement menée et si on peut vérifier ces égalités en remplaçant éventuellement la variable "x" par plusieurs nombres. Les élèves faibles faisant beaucoup cette erreur, nous avons choisi de prendre la situation la plus simple entre les quatre que nous proposons aux différents groupes.

- Le porte-parole du groupe 4 commente l'extrait O (ci-dessous) : déterminer la longueur d'un côté adjacent à l'angle droit d'un triangle rectangle en connaissant les deux autres.



Dans cet extrait, la réponse proposée reprend correctement l'égalité de Pythagore et il faut que l'élève explicite l'étape intermédiaire (fausse) effectuée qui permet d'écrire la deuxième ligne de calcul. C'est l'occasion de faire appel au reste de la classe afin de faire émerger le lien avec "l'addition à trous" :

Si l'on connaît a et b et que $a + x = b$, alors $x = b - a$.

Et, comme écrit plus haut, la justesse de l'approximation qui a suivi l'erreur ainsi que le contrôle de la cohérence des résultats.

Dans tous les cas, l'enseignant doit inciter l'élève lors de sa réponse à la première question à montrer en quoi la procédure suivie dans l'extrait proposé est inadaptée sachant que celui-ci fournit justement un contre-exemple. Pour cela, il est préférable de donner la priorité au recours au sens mathématique des assertions fausses issues des extraits (en ne disqualifiant pas une procédure parce que ce n'est pas celle que l'élève a apprise) plutôt qu'à l'utilisation de la procédure adaptée à la situation qui a été institutionnalisée en cours. C'est justement l'occasion de prendre du recul sur cette dernière.

Enfin, l'enseignant doit, dans la mesure du possible, encourager l'élève au tableau et ses camarades, avant que celui-ci se lance dans l'explicitation de l'erreur, à se poser la question de la cohérence du résultat avec les données de départ. Cela se prête bien à l'extrait O en comparant la longueur de l'hypoténuse à celle du côté adjacent à l'angle droit ; un peu moins à l'extrait A même si l'on peut faire remarquer que l'on ajoute à une fraction valant -1 un nombre positif (grâce à la règle des signes).

Pendant la séance 1 trop peu d'élèves ont réellement prêté attention aux interventions de leurs camarades (voir II. 3. 1. Analyse a posteriori). En partant de ce constat, il faut dire aux élèves que les présentations de chaque porte-parole sont utiles pour faire la deuxième question, et on a essayé de faire en sorte que ce soit le cas.

La deuxième question. Dans cette question, les élèves doivent dans un premier temps identifier les erreurs similaires à celles qu'ils ont étudiées. Il s'agit implicitement d'une tâche de classification. Nous avons en effet retenu l'idée de classer des erreurs, mais avons apporté plusieurs modifications relativement à la séance 2. Il s'agit cette fois de repérer des similarités entre erreurs et non d'élaborer des catégories, ce qui rend la tâche plus

accessible et permet de couper court à des catégorisations selon des critères non pertinents. Par ailleurs, les types d'erreurs retenues ne s'y prêtent plus. Elles sont également moins nombreuses et la première question a permis aux élèves de les analyser en détail avant de se lancer dans l'analyse.

Dans un deuxième temps, les élèves doivent donner une méthode pour éviter de reproduire ces erreurs. Cette question, assez ouverte, permettra d'avoir une idée de la capacité des élèves à réfléchir sur leur pratique (métacognition), à expliciter ces considérations, à contrôler leurs productions... mais aussi de travailler ces capacités. Cela permet également de s'assurer d'une trace écrite, qui plus est la dernière concernant les extraits d'erreurs proposés, sur une attitude à avoir face à ces situations ou une procédure correcte à suivre.

La question 2 est également l'occasion pour les élèves de corriger ce qu'ils pensaient au vu de ce qui a été présenté.

1.2. Analyse a posteriori

1.2.1. Déroulement réel

Les groupes n'étant pas complètement homogènes, il fut observé pendant le temps imparti pour la réponse à la première question de l'activité beaucoup de discussions entre élèves et, entre autres, l'explication de certaines des erreurs de la part des plus forts aux plus faibles. Ainsi, la majorité des groupes n'avaient pas fini de répondre à la question 1 après la durée de temps imparti (15 minutes). Voyant l'engagement dans la tâche des élèves et ne voulant pas arrêter ces échanges avant que chaque groupe ait pu traiter toutes les questions, Ibrahim a décidé de leur accorder 5 minutes supplémentaires pour répondre à cette première question. Cette dernière allait conditionner leur compréhension des interventions orales et du choix des procédures et attitudes à adopter en face de ces situations lors de la question 2. De plus, les élèves devaient avoir une deuxième heure de cours de mathématiques dans la même salle, ce qui donnait potentiellement quelques minutes en plus si nécessaire.

Par la suite, les interventions des élèves à l'oral pour commenter leurs erreurs se sont déroulées dans les temps et ont été relativement bien suivies par les élèves qui savaient qu'ils devaient les mettre en relation avec les leurs pour répondre à la deuxième question de l'activité.

À cause des minutes supplémentaires accordées au traitement de la question 1, le temps a manqué pour faire, après qu'ils aient répondu à la question 2, un bilan de cette séance et recueillir leurs remarques.

1.2.2. Analyses des productions d'élèves et des interventions au tableau

Addition/soustraction et comparaisons de fractions. Lors de l'institutionnalisation du cours sur l'addition/soustraction et la comparaison de fractions (voir annexe F.1), Ibrahim y avait souligné, sous l'expression "erreur classique" certaines des erreurs les plus communes en donnant des contre-exemples. Pendant la séance d'analyse d'erreurs, il a été observé que certains élèves ne se sont pas assez questionnés sur la fausseté mathématique de la procédure suivie par l'élève. Beaucoup d'entre eux se sont contentés de dire qu'elle était fausse "parce qu'il fallait faire autrement" et d'écrire sur leurs feuilles la procédure institutionnalisée (voir le paragraphe plus bas : Deux attitudes face à l'erreur).

D'autres au contraire ont cherché les raisons de l'erreur, de la même manière qu'ils ont cherché à savoir pourquoi l'élève de CE1 s'est trompé sur la question des billes de Louise, comme on peut le voir sur l'exemple ci-dessous.

(M) $\frac{2}{7} > \frac{-3}{-10}$ car $2 > -3$ et $7 > -10$
 $\frac{20}{70} < \frac{21}{70}$

(N) $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3-1}{5-2} = \frac{2}{3}$
 $\frac{6}{10} - \frac{5}{10} = \frac{6-5}{10} = \frac{1}{10}$

L'élève... n'a pas pris en compte... que... négatif...
 et négatif donne positif... et il a comparé les numérateurs et
 les dénominateurs séparément.
 L'élève a soustrait les fractions alors qu'elles
 n'étaient sur le même dénominateur...
 L'élève a soustrait des valeurs différentes : 5^2 et 2^2

L'élève a relevé que l'auteur de la réponse M a associé le négatif à la vue du signe "-" et "n'a pas pris en compte que négatif et négatif donne positif".

Il nous est apparu que pour éviter des formulations comme celles correspondant à l'extrait N (voir l'extrait de copie ci-dessus) comme "l'élève a soustrait les fractions alors qu'elles n'étaient pas sur le même dénominateur", nous aurions dû ajouter une addition de fractions du type $35+45 = 710$. Cela aurait évité la confusion entre addition des numérateurs et addition des fractions.

À propos de la règle fautive : “on peut additionner ou soustraire des fractions de dénominateurs différents en appliquant l’opération à leurs numérateurs et à leurs dénominateurs”, on aurait pu attendre des élèves le recours à une explication assez familière qu’ils ont su citer pour les mauvaises réductions d’expressions littérales : “On n’ajoute pas des bananes avec des pêches”. On peut supposer que les groupes ayant participé à cette séance n’avaient pas un recul suffisant pour voir les fractions de dénominateurs différents comme des objets que l’on ne peut sommer facilement.

Enfin, aux élèves qui ont eu le temps de corriger certains extraits, il nous est apparu que l’absence d’énoncé dans les extraits que nous avons proposé invitait certains à se demander le format de la réponse attendue. D’où, à propos de l’extrait N présenté ci-dessous, des questions comme : “Doit-on mettre des décimaux dans les fractions ?” ou encore : “faut-il mettre le résultat sur 3 ?”

$$\textcircled{N} \quad \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3-1}{5-2} = \frac{2}{3}$$

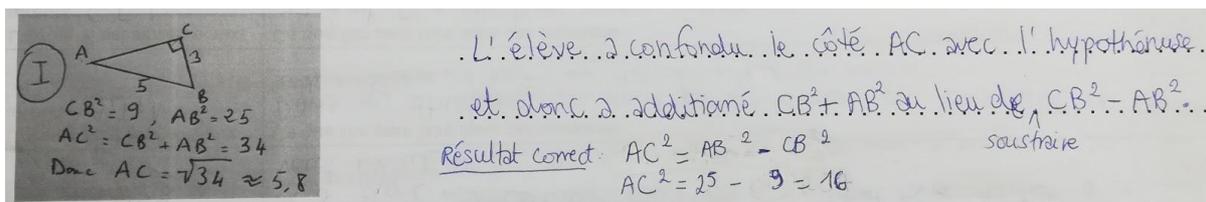
Réductions d’expressions littérales. La plupart des élèves ont expliqué ces erreurs par analogie avec d’autres situations, soit “On n’ajoute pas des pommes et des patates” qui avait été utilisé en cours, soit en faisant une analogie avec l’addition de quantités n’ayant pas la même unité, ce qui est venu des élèves.

L'élève a soustrait des nombres différents : $x^2 y$ et xy^2 ,
on ne peut pas soustraire : « des pommes et des patates ».

Ce que l’on peut faire dans ces situations :
Faire attention aux unités

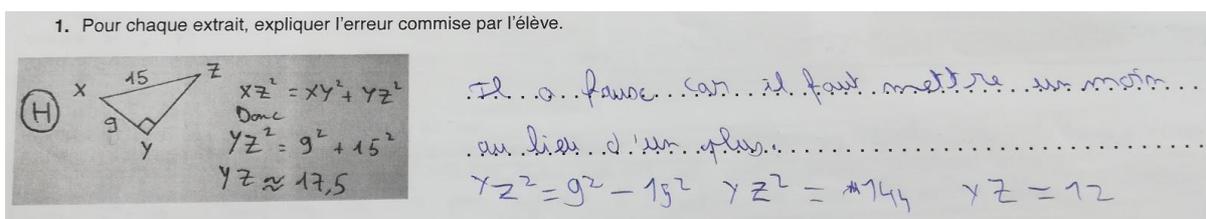
Aucun groupe n’a pensé à tester les égalités pour certaines valeurs des variables.

Trouver la longueur d’un côté d’un triangle rectangle. Les élèves n’ont pas pensé à donner du sens à la procédure institutionnalisée et se sont contentés de dire qu’il fallait mettre un signe “-” lorsque la longueur recherchée du triangle rectangle n’était pas celle de l’hypoténuse. Il en a découlé un mauvais placement du signe “-” lorsqu’ils devaient exprimer la longueur demandée en fonction des autres.



Dans l'extrait ci-dessus, l'élève s'est trompé dans sa phrase puis a rectifié au sein de son calcul à la troisième ligne. On a pu voir qu'ils distinguent deux procédures différentes : celle pour le calcul de la longueur de l'hypoténuse et celle pour le calcul de la longueur d'un côté adjacent à l'angle droit.

Dans cette dernière, « il y a un - au lieu d'un + » comme l'a dit au tableau un élève du groupe 2 qui devait commenter l'extrait H. Il s'est avéré que celui-ci s'est trompé lors de sa correction (il a été demandé aux élèves ayant fini avant les autres de répondre à la question 1 de corriger les extraits) comme on peut le voir sur la photo ci-dessous (l'élève a raturé un signe "-" précédant le nombre 144 correspondant au carré de YZ) :



L'enseignant lui a demandé de corriger au tableau l'erreur. L'élève, relisant sa feuille, a pensé cette fois à dire qu'il faut « inverser les côtés car 15^2 est plus grand que 9^2 ». On peut supposer que grâce à l'intervention orale de cet élève, il a été clarifié pour les autres pourquoi il ne suffit pas de remplacer le signe "+" par le signe "-" et qu'il faut s'assurer de l'expression littérale en passant par l'addition à trous. À titre d'observation, aucun groupe n'a relevé l'incohérence des résultats s'agissant de la situation « égalité de Pythagore » et il s'est avéré utile d'inclure des arrondis dans les quatre situations proposées. Un élève a interprété le signe environ comme une preuve d'ignorance de la part de l'auteur de l'extrait.

Deux attitudes face à l'erreur. Dans les copies des élèves apparaissent à nouveau les deux attitudes face à l'erreur déjà mentionnées : certains font référence à ce qu'il aurait fallu faire, tandis que d'autres, comme nous essayons de l'encourager, se demandent pourquoi la procédure suivie ou le résultat obtenu sont incorrects.

À la première question, où il s'agit d'expliquer l'erreur commise par l'élève, cela se traduit par deux types de réponse. Voici un exemple de la première attitude :

Et un exemple de la seconde :

À la deuxième question, l'élève doit trouver une méthode pour éviter les erreurs repérées. Certains élèves se contentent de donner le conseil d'appliquer la procédure qui convient, mais la plupart suggèrent des stratégies métacognitives. On peut regrouper ces stratégies en plusieurs catégories (accompagnées d'exemples) :

- Orientation de l'attention sur un point particulier

Ce que l'on peut faire dans ces situations : *Il faut bien regarder quel côté est l'hypoténuse pour ne pas se tromper dans les calculs*

- Inhibition d'une procédure

Ce que l'on peut faire dans ces situations : *Ne pas additionner des x et x^2 ou encore d'autres unités de nature différente*

Ce que l'on peut faire dans ces situations : *Faire le bon calcul (ne pas confondre celui pour trouver l'hypoténuse avec celui pour les 2 autres côtés)*

- Recours à des images mentales et retour au sens

Ce que l'on peut faire dans ces situations : *on mélange par les baranes avec les pechs*

Ce que l'on peut faire dans ces situations : *Bien faire le bon calcul en s'aidant d'un schéma. Il faut bien regarder quel est le côté du triangle rectangle qu'il faut trouver et appliquer le théorème de Pythagore.*

- Vérification (contrôle)

Ce que l'on peut faire dans ces situations :

Vérifier toujours quel côté est l'hypoténuse ou sinon calculer les côtés selon l'hypoténuse.

La variété et la pertinence des méthodes proposées témoignent de la capacité des élèves à faire preuve de recul sur leur activité mathématique.

L'évaluation ayant suivi la séance d'analyse d'erreur n°3

Une évaluation sommative dans la classe de 4^{ème} d'Ibrahim a eu lieu 3 jours après la séance d'analyse d'erreur. Elle a été l'occasion de voir si certains effets à courts termes pouvaient découler de la séance.

Si la réponse d'un élève est juste sur sa copie d'évaluation, on peut remarquer qu'il n'est pas aisé de savoir s'il a contrôlé, vérifié par une autre méthode ou rectifié un résultat trouvé précédemment. Malgré tout, il subsiste quelquefois des traces de ces changements comme des écrits barrés, des ratures ou l'utilisation du blanc. Dans la production d'élève ci-dessous, par exemple, où il fallait classer les fractions dans l'ordre croissant, on peut supposer que l'élève a commencé par considérer la fraction $\frac{-10}{-3}$ comme négative, avant de réaliser qu'elle est positive :

2) ~~$\frac{19}{3}$~~ - $\frac{15}{7}$ < $\frac{16}{-7}$ < $\frac{7}{13}$ < $\frac{5}{10}$ < $\frac{-10}{-3}$ ~~X~~.

En comparant le nombre des erreurs commises par les élèves ayant suivi la séance d'analyse d'erreurs à ceux qui avaient fait des exercices plus classiques sur les mêmes notions (voir annexe F.7.1), nous avons relevé le même nombre d'erreurs dans les deux demi-classes. Ceci dit, les erreurs (qui nous intéressent) qui ont été faites dans la demi-classe n'ayant pas suivi la séance sont issues autant d'élèves moyens que faibles, avec 2 erreurs pour ceux dont la moyenne au deuxième semestre est comprise entre 11 et 14 et 2 erreurs pour ceux ayant moins de 11. Quant aux erreurs provenant des élèves ayant suivi la séance, seuls les élèves faibles et n'ayant pas produit de travail personnel (ils ont copié les analyses de leurs camarades) ont fait ces erreurs (4 au total).

Bilan

Points positifs

- Les objectifs visés ont été globalement atteints.
- Des échanges intéressants ont eu lieu entre les élèves. Des élèves faibles ont parfois expliqué aux plus forts des erreurs qu'ils ne comprenaient pas. Il a pu en découler une certaine sensation d'expertise de la part des élèves faibles concernant les erreurs.

Points négatifs

Même si le travail en groupe a permis des échanges et des éclaircissements fructueux entre élèves, nous avons observé que les plus faibles avaient tendance à recopier les réponses de leurs camarades sans les comprendre. Il s'est avéré, sans surprise, lors de l'analyse de l'interrogation sommative qui a suivi la séance d'analyse d'erreurs, que parmi les élèves ayant assisté à la séance d'analyse d'erreur, c'étaient ces derniers et seulement ces derniers qui se sont trompés aux questions présentant des situations similaires à celles traitées dans cette séance.

Améliorations

Il aurait peut-être fallu faire passer les élèves au tableau après la catégorisation des situations afin qu'ils présentent à la fois l'erreur mais aussi la bonne manière d'appréhender cette situation pour ne pas tomber dans le même piège.

Même si une grande part des élèves avaient conscience de la bonne procédure à suivre dans les situations qui leur ont été présentées (et n'auraient pas fait les mêmes erreurs), cette séance peut être envisagée comme une première rencontre des élèves avec l'analyse d'erreurs. Elle pourrait donner suite à des séances dans lesquelles il faut repérer les réponses fausses en les contrôlant par divers moyens : justesse mathématique, recours à une méthode institutionnalisée, cohérence des résultats.

Elle peut être faite avant l'éventuelle institutionnalisation des "erreurs classiques" du chapitre traité ou servir elle-même de support pour les révisions.

2. Dans nos pratiques

2.1. Observations et améliorations

Fiche erreur. Il pourrait être utile de donner dès le début de l'année au moins un modèle de fiche d'erreur, à conserver dans une pochette plastique (voir annexe G.1) aux élèves afin qu'ils puissent s'y conformer. Cela aurait pour autre avantage que la fiche erreur soit facilement reconnaissable sur la table en évaluation. Certains élèves se sont approprié cet outil cette année et nous espérons généraliser cet usage. On pourrait ajouter une colonne "Pourquoi c'est faux" afin de favoriser la réflexion mathématique sur le domaine de validité d'une procédure.

Par ailleurs, il pourrait aussi être profitable d'instituer dès le début de l'année l'évaluation de l'utilisation du signe "=" sur 1 point lors des évaluations (surtout en classe de 5^{ème}) dans le cadre de la formation des élèves à la rédaction en mathématique.

Mise en commun des erreurs. Nos lectures sur le statut de l'erreur et notre expérience dans nos classes nous confortent dans l'idée que le débat sur les erreurs et le fait que la classe arrive à un consensus sont bénéfiques. Il nous paraît donc utile de continuer à revenir sur les erreurs fréquentes lors des contrôles avec des Vrai/Faux et autres, mais également de s'efforcer d'animer de vrais débats entre les élèves à propos des erreurs commises lors des corrections d'exercices par exemple.

Dans les **séances d'autocorrection d'une évaluation**, on pourrait donner plus de liberté aux élèves pour attribuer les points aux questions. Au lieu de donner un statut obligatoire à certaines étapes intermédiaires, il serait aussi possible de les considérer comme des options de justification parmi d'autres et laisser l'élève juger au vu de celles-ci si sa réponse justifie assez bien son résultat. La correction au stylo rouge de l'enseignant qui s'en suivra pourrait lui indiquer la pertinence de sa correction.

2.2. Prolongements

Erreurs persistantes. Nous nous sommes intéressés aux élèves ayant les connaissances théoriques nécessaires pour résoudre des exercices, mais qui ne parviennent pas à sélectionner la procédure correcte. Les élèves "décrocheurs", de niveau très faible, qui ne suivent pas toujours le cours, commettent des erreurs similaires. Cette fois, ce n'est pas par manque de contrôle ou difficulté à déterminer le domaine de validité d'une procédure, mais simplement parce qu'ils n'ont jamais appris la procédure pertinente.

Les expérimentations que nous avons conçues visaient la première catégorie d'élèves. Nous pouvons faire l'hypothèse que les erreurs qui persistent après nos expérimentations sont, au moins en partie, du fait de la deuxième catégorie d'élèves. Nous avons pu constater que ces élèves ont réussi à s'investir lors des séances différenciées, mais regrettons que cela ait constitué pour certains le premier contact réellement actif avec les exercices étudiés. Nous souhaitons donc, à l'avenir, introduire davantage de différenciation dans nos pratiques.

Par ailleurs, les travaux sur la pédagogie explicite suggèrent l'existence d'une troisième catégorie d'élèves, qui font le travail demandé mais "sont enfermés dans une logique du «faire», guident leur action sur la réussite immédiate de la réalisation de la tâche au détriment de sa signification", à tel point qu'ils ont "du mal à transférer leurs connaissances dans une nouvelle tâche" (Assises de l'Éducation prioritaire, 2013). Ces élèves ne parviendraient pas à accéder à une quelconque valeur de généralité des exercices proposés ni aux connaissances sous-jacentes visées. Les théoriciens de l'enseignement explicite proposent pour ces élèves des remédiations qui pourraient être étudiées et appliquées avec profit.

Un autre point de vue : prêter attention à l'échantillon d'exercices. Nous souhaitons que les élèves parviennent à mieux cerner le domaine de validité des propriétés et des procédures qu'ils utilisent. Pour cela, l'échantillon d'exercices travaillés est évidemment important. Par exemple, lorsque l'on travaille l'addition de fractions, imaginons que l'on donne une procédure valide pour les fractions positives et négatives, mais que les exercices donnés comportent uniquement des fractions positives. Même s'il est précisé dans le cours que la procédure s'applique à toutes les fractions, les élèves auront sans doute beaucoup de difficultés pour additionner des fractions négatives. Ils auront inféré de l'échantillon proposé un domaine de validité trop restreint.

À l'inverse, lors de l'apprentissage de la multiplication de nombres décimaux, imaginons que l'on présente seulement des exemples où il suffit de multiplier partie décimale et partie entière séparément, et de les séparer par une virgule (comme dans : $2 \times 3,4 = 6,8$). Même si l'on propose une méthode qui s'applique aussi aux autres cas (par exemple, $2 \times 3,8$), les élèves utiliseront certainement le "raccourci" décrit précédemment. Si aucun contre-exemple ne leur est présenté, ils généraliseront sans doute leur méthode à des multiplications pour lesquelles elle ne donne pas le résultat correct. Les élèves auront inféré de l'échantillon proposé un domaine de validité trop étendu.

Ceci est bien sûr pris en compte dans la pratique des enseignants, en particulier en ce qui concerne le premier point. Cependant, il serait peut-être utile de donner plus systématiquement des contre-exemples pour permettre aux élèves de mieux appréhender les limites d'un domaine de validité. Ces limites pourraient apparaître dans les exercices de manière plus fréquente, même s'il existe déjà des exercices de ce type (voir annexe H). Elles pourraient également apparaître plus fréquemment dans le cours : au moment de donner des exemples, on pourrait aussi donner des contre-exemples. À l'inverse, on peut penser avec Astolfi (1997, p. 74-75) qu'il faudrait laisser de l'autonomie aux élèves dans l'investigation des limites d'un domaine d'application. Les erreurs créatrices commises lors de cette investigation seraient nécessaires et utiles. Dans les deux cas, il semble pertinent de proposer plus fréquemment des exercices ou des situations qui permettent d'explorer ces limites dans un cadre maîtrisé, avec un retour explicite et immédiat, pour favoriser le dépassement de ces erreurs.

Conclusion

Nous nous sommes interrogés sur la conception d'activités et de pratiques permettant d'encourager un contrôle accru de l'activité mathématique par les élèves.

À cette occasion, nous avons pu approfondir des connaissances théoriques acquises pendant la première année de Master (métacognition, typologie des erreurs, statut de l'erreur), et en acquérir de nouvelles sur le contrôle exécutif, les automatismes et l'inhibition. Les recherches récentes accordent une importance croissante aux activités métacognitives en classe. De cette nouveauté découle un manque de ressources sur des ingénieries didactiques favorisant le contrôle chez les élèves (une source pour le lycée au Québec, aucune pour le collège).

Nous avons cherché à tirer parti de ces outils théoriques et à les confronter à l'expérience. Nous avons envisagé le recours à plusieurs formats de séances d'analyse d'erreurs, que nous avons essayé d'améliorer au fil de nos analyses a posteriori. Il est apparu que les élèves de cycle 4 sont tout à fait capables de réflexion métacognitive et ont montré de l'intérêt et de la curiosité pour les activités proposées à condition de faire une analyse fine de quelques erreurs plutôt que la classification d'un grand nombre d'erreurs.

Dans les séances différenciées, même les élèves les plus faibles se sont engagés dans la tâche, et les très bons élèves l'ont trouvé stimulante. Dans la séance n°3, moins différenciée, nous avons pu observer une aide entre pairs lorsque certains membres du groupe ne comprenaient pas les erreurs dans les copies proposées. Par ailleurs, en réécoutant les enregistrements de séances d'analyse d'erreur, nous avons relevé plusieurs questions et remarques de la part des élèves au sujet de l'origine des erreurs et de la possibilité qu'elles soient les leurs. On peut raisonnablement supposer que ces pensées pourraient les inciter à mieux vérifier leurs résultats pour éviter que leurs réponses soient vues de la même façon.

En ce qui concerne l'efficacité de nos démarches, nous avons pu constater, a minima, que discuter d'une erreur de manière approfondie en généralisant sa forme grâce au langage algébrique ne conduit pas à une multiplication de cette erreur dans les productions ultérieures des élèves. La faible taille de l'échantillon et l'importance des paramètres non contrôlés ne nous permettent évidemment pas de conclure dans un sens comme dans l'autre. Nous avons cependant observé que les élèves ayant participé aux séances d'analyse d'erreur ont continué à faire certaines des erreurs étudiées, dans des

proportions globalement équivalentes aux élèves n'ayant pas participé à ces séances. En revanche, nous avons relevé ponctuellement quelques comportements d'élèves qui suggèrent un impact positif de nos démarches sur leurs pratiques.

Afin de tirer profit de cette expérience liée à notre année de stage, nous aimerions, à l'avenir, continuer nos pratiques instituées en classe et faire des séances d'analyse d'erreurs inspirées de la première lorsque l'on souhaite faire de la différenciation et initier certains élèves faisant des erreurs spécifiques à une procédure de contrôle précise (ordre de grandeur pour la multiplication de décimaux par exemple). La troisième séance pourra être utilisée, lorsque l'on souhaite aborder, de manière relativement indifférenciée, 4 ou 5 erreurs récurrentes dans les travaux d'une grande partie de la classe. Nous pensons par ailleurs être mieux équipés pour réagir face aux erreurs de ce type : nous avons une idée plus précise de la façon de les exploiter de la manière la plus utile aux élèves.

Si nous avons choisi de nous concentrer principalement sur les erreurs, d'autres approches sont envisageables pour travailler sur le contrôle et la métacognition, à l'aide par exemple de narrations de recherche, de questions à se poser face à chaque exercice ou de correction de copies entre pairs.

Bibliographie

ASTOLFI, Jean-Pierre. *L'erreur, un outil pour enseigner*. ESF Sciences Humaines, 2012.

BANDURA, Albert. *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Englewood Cliffs, NJ, US: Prentice-Hall, Inc, 1986.

BROUSSEAU, Guy. Les erreurs des élèves en mathématiques. *Etudes dans le cadre de la théorie des Situations Didactique./Petit x*, 2001, vol. 57, p. 5-30.

CARDOSO-LEITE, Pedro et BAVELIER, Daphne. Video game play, attention, and learning: how to shape the development of attention and influence learning?. *Current opinion in neurology*, 2014, vol. 27, no 2, p. 185-191.

CENTRE ALAIN SAVARY, Réaliser un enseignement explicite. *Assises de l'Éducation prioritaire. Des textes de problématisation*. Institut français de l'éducation, 2013.

DEHAENE, S. Fondements cognitifs des apprentissages scolaires. *L'attention et le contrôle exécutif*, 2015, cours disponible sur le site du Collège de France.

DELVOLVÉ, Nicole. Métacognition et réussite des élèves. *Les Cahiers pédagogiques, Décembre*, 2006.

DIAMOND, Adele, BARNETT, W. Steven, THOMAS, Jessica, *et al.* Preschool program improves cognitive control. *Science (New York, NY)*, 2007, vol. 318, no 5855, p. 1387.

FLAVELL, John H. Metacognitive aspects of problem solving. *The nature of intelligence*, 1976, p. 231-235.

FOCANT, Jérôme, *et al.* Stratégies d'autorégulation d'élèves de cinquième primaire en situation de résolution de problèmes arithmétiques. *Louvain-la-Neuve: Université Catholique de Louvain*, 2004.

GUERIN, Laure. Processus de contrôle dans la classe de mathématiques au collège. Etude des conditions et des contraintes d'émergence. *Mémoire de Master 2*. Université d'Aix Marseille, 2015.

HOUDE, Olivier. *Journal du CNRS, N°214, novembre 2007*

KRAMARSKI, Bracha, MEVARECH, Zemira R., et ARAMI, Marsel. The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. *Educational studies in mathematics*, 2002, vol. 49, no 2, p. 225-250.

OLIVEIRA, Izabella, BEDNARZ, Nadine, et LAJOIE, Caroline. Développer une conduite rationnelle sur la proportionnalité: analyse d'une pratique d'enseignement au secondaire en regard du jugement porté sur la reconnaissance de situations proportionnelles. 2006.

PIAGET, Jean et SZEMINSKA, Alina. La genèse du nombre chez l'enfant. Delachaux et Niestlé, 1941.

ROBERT, Aline et TENAUD, Isabelle. Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 9. Num. 1. p. 31-70. Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C.

SABOYA, Mireille. Analyse d'une didactique d'intervention autour du développement d'une activité de contrôle: stratégies d'enseignement et indicateurs de contrôle chez les élèves du secondaire. 2012.

SCALA, André. Le prétendu droit à l'erreur. *Collectif, Le rôle de l'erreur dans la relation pédagogique*. UdReFF, Villeneuve-d'Ascq, 1995. p. 19-25.

SCHUNK, Dale H. Social cognitive theory and self-regulated learning. *Self-regulated learning and academic achievement*. Springer, New York, NY, 1989. p. 83-111

ANNEXES

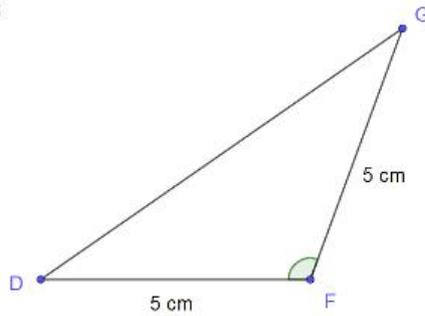
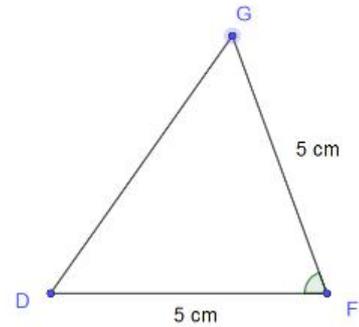
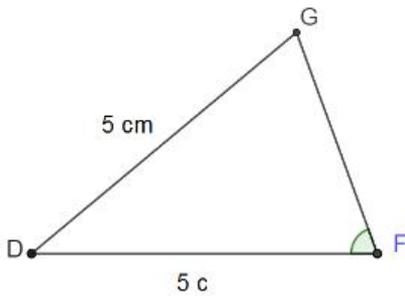
Liste des annexes

- A. Exemple de diapositive permettant de revenir sur les erreurs fréquentes lors d'un contrôle
- B. Exemple de fiche de remédiation en 4^{ème}
- C. Fiches élèves de la séance d'analyse d'erreurs n°1
 - C.1. Séance n°1 - Niveau élevé
 - C.2. Séance n°1 - Niveau moyen 1
 - C.3. Séance n°1 - Niveau moyen 2
 - C.4. Séance n°1 - Niveau faible
- D. Fiche élève de la séance d'analyse d'erreurs 2
- E. Productions d'élèves lors de la séance d'analyse d'erreurs 2
 - E.1. Groupe n'ayant pas compris le fonctionnement du tableau
 - E.2. Groupe avec classification implicite dans la description
- F. Séance d'analyse d'erreurs n°3
 - F.1. Cours 4^{ème} à compléter sur l'addition/soustraction et comparaison de fractions
 - F.2. Présentation powerpoint "automatisme et inhibition"
 - F.3. Fiches élèves de la Séance n°3 - Groupe 1
 - F.4. Fiches élèves de la Séance n°3 - Groupe 2
 - F.5. Fiches élèves de la Séance n°3 - Groupe 3
 - F.6. Fiches élèves de la Séance n°3 - Groupe 4
 - F.7.1 Exercices traités par la deuxième demi-classe
- G. Auto-correction des élèves de 4^{ème} d'Ibrahim
 - G.1 Modèle de fiche erreur
 - G.2 Feuille d'auto-correction d'un devoir de 4^{ème}
- H. Exercices sur les limites du domaine de validité
 - H.1. Exercice extrait de Myriade 4^{ème} programme 2016
 - H.2. Exercice extrait de Mission Indigo 4^{ème} 2016

A. Exemple de diapositive permettant de revenir sur les erreurs fréquentes lors d'un contrôle

Le dernier contrôle

Construire un triangle DFG isocèle en F tel que $DF = 5 \text{ cm}$ et $\hat{F} = 70^\circ$.



B. Exemple de fiche de remédiation en 4ème

FICHE 2 Priorités opératoires et utilisation du signe égal

Rappels de cours.

- ◆ Le signe égal, écrit entre deux nombres, signifie que ces deux nombres ont la même valeur.

Quand on fait un calcul en plusieurs étapes, il faut faire attention à ne pas écrire de signe égal entre deux nombres qui ne sont pas égaux.

Exemple

Pour calculer $(8 + 12) \times 3 + 2$, on ne peut pas écrire : $(8 + 12) \times 3 + 2 = 20 \times 3 = 60 + 2 = 62$
car 20×3 n'est pas égal à $60 + 2$.

- ◆ Dans une expression, les calculs entre parenthèses sont prioritaires sur les multiplications, qui sont prioritaires sur les additions et les soustractions.

Exemple

$(8 + 12) \times 3 + 2 = 20 \times 3 + 2$ (le calcul entre parenthèses est prioritaire)
 $= 60 + 2$ (ensuite, la multiplication est prioritaire)
 $= 62$

EXERCICE 1

Alice, Bob et Camille veulent calculer une même expression. Quel(s) élève(s) ont utilisé le signe égal de manière inadaptée ? Justifier.

Alice écrit :

$$10 + (5 + 3) \times 2 = 5 + 3 = 8 \times 2 = 16 + 10 = 26$$

.....

Bob a écrit :

$$10 + (5 + 3) \times 2 = (8) \times 2 = 16 = 16 + 10 = 26$$

.....

Camille a écrit :

$$10 + (5 + 3) \times 2 = 10 + 8 \times 2 = 10 + 16 = 26$$

.....

EXERCICE 2

Calculer les expressions ci-dessous. Attention aux priorités opératoires et à l'utilisation du signe égal.

$$A = 15 + 5 \times 7 =$$

$$B = 60 - 7 \times 7 =$$

$$C = 3 + (12 + 3) \times 10 =$$

$$D = 5(3 + 4) + 2 \times 4 =$$

$$E = 2(10 + 3 \times 5) - 2 \times 10 =$$

EXERCICE 3

Voici un programme de calcul.

Choisir un nombre.
Ajouter 2.
Multiplier par 3.

On note x le nombre choisi. Thomas affirme «Le nombre obtenu à la fin est $x + 2 \cdot 3$ ». Selon Asma, l'expression correcte est plutôt $(x + 2) \cdot 3$.

1. Compléter:]
L'expression $x + 2 \cdot 3$ est la somme de . . . et de . . .
L'expression $(x + 2) \cdot 3$ est le produit de . . . et de . . .

2. Qui a raison et pourquoi?
.....
.....
.....

EXERCICE 4

a) Pour chacun de ces nombres au carré, commencer par écrire le carré comme produit du nombre par lui-même, puis calculer.

Exemples
 $5^2 = 5 \times 5 = 25$
 $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

$10^2 = \dots \times \dots = \dots$ $(-1)^2 = \dots \times \dots = \dots$
 $(-4)^2 = \dots \times \dots = \dots$ $6^2 = \dots \times \dots = \dots$

- b) Sam affirme : « 11^2 , c'est 2×11 , donc ça fait 22 ». A-t-il raison ? Pourquoi ?
.....

C. Fiches élèves de la séance d'analyse d'erreurs 1

C.1. Séance n°1 - Niveau élevé

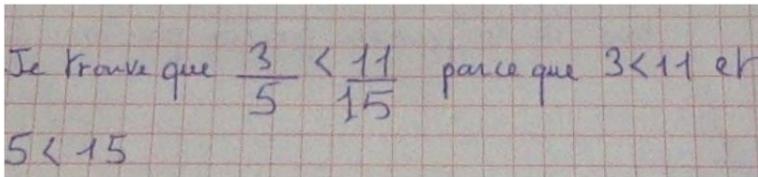
Nom et Prénom :

Activité : Analyse de réponses d'élève

1. Comparer les fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{11}{15}$.

.....
.....

2. Voici la réponse d'un élève :



Avec vos propres mots, décrivez la règle que l'élève a utilisée.

.....
.....
.....

3. Formulez mathématiquement cette règle à l'aide d'expressions littérales.

.....
.....
.....

4. Cette règle est-elle correcte ? Justifiez.

.....
.....
.....
.....

5. Que pensez-vous de la réponse de l'élève ?

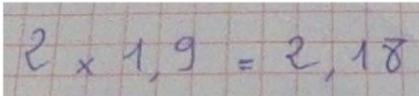
.....
.....

C.2. Séance n°1 - Niveau moyen 1

Nom et Prénom :

Activité : Analyse de réponses d'élève

1. Compléter, sans calculatrice, l'égalité suivante : $2 \times 1,9 = \dots$
2. Voici la réponse d'un élève :



A photograph of a student's handwritten work on a grid background. The student has written the equation $2 \times 1,9 = 2,18$ in blue ink.

Avec vos propres mots, décrivez la règle que l'élève a utilisée.

.....

.....

.....

3. La réponse de cet élève est-elle correcte ? Oui Non

4. a) Complétez : 1,9 est à peu près égal à ..., donc $2 \times 1,9$ est à peu près égal à ...

b) Que pensez-vous maintenant de la règle suivie par l'élève ?

.....

.....

C.3. Séance n°1 - Niveau moyen 2

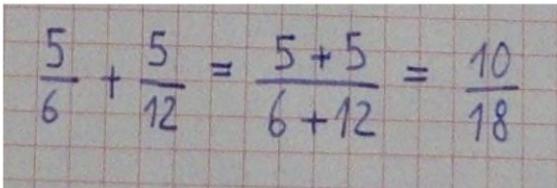
Nom et Prénom :

Activité : Analyse de réponses d'élève

1. Additionner $\frac{5}{6}$ et $\frac{5}{12}$.

.....
.....

2. Voici la réponse d'un élève :


$$\frac{5}{6} + \frac{5}{12} = \frac{5+5}{6+12} = \frac{10}{18}$$

Quelle règle l'élève a-t-il utilisée ?

.....
.....
.....

3. La règle utilisée est-elle correcte ? Oui Non

Justifier.

.....
.....
.....

C.4. Séance n°1 - Niveau faible

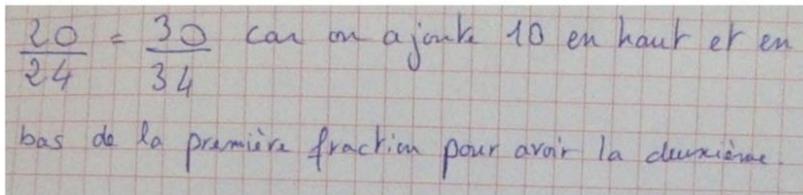
Nom et Prénom :

Activité : Analyse de réponses d'élève

1. Les fractions $\frac{20}{24}$ et $\frac{30}{34}$ sont-elles égales ?

.....
.....
.....

2. Voici la réponse d'un élève :



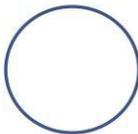
La réponse de cet élève est-elle correcte ? Oui Non

3. Quelle règle l'élève a-t-il utilisée ?

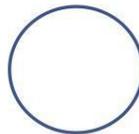
.....
.....
.....

4. Voici un autre exemple d'utilisation de cette règle : $\frac{1}{2} = \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}$, donc $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

a) Compléter les dessins pour représenter les fractions demandées.



$\frac{1}{2}$



$\frac{2}{3}$

b) Que pensez-vous de cette règle ?

.....
.....
.....

D. Fiche élève de la séance d'analyse d'erreurs 2

Activité : Analyse d'erreurs

1. Classer les erreurs suivantes dans le tableau ci-dessous.

Vous pouvez séparer le tableau en plusieurs colonnes et y mettre les lettres correspondant à chaque erreur.

(A) $-5 + 3 \times 4 = -2 \times 4 = -8$

(B) $\frac{5}{6} + \frac{5}{12} = \frac{5+5}{6+12} = \frac{10}{18}$

(C) $2x + 3x^2 + 11 = 5x^2 + 11$

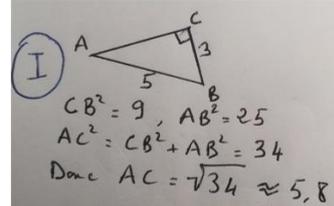
(D) $2 \times 1,9x = 2,18x$

(E) $3x + x + 5 = 4x + 5 = 9x$

(F) $\frac{7}{4} - \frac{2}{5} = \frac{5}{-1} = -5$

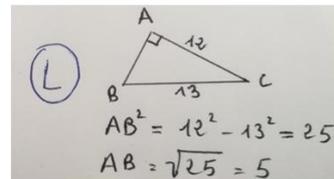
(G) $(6-8) \div (-2) = 6 - (-4) = 6 + 4 = 10$

(H) $(-3)^2 = -9$

(I) 

(J) $4,3 \times 2,7 = 8,21$

(K) $4y^2 + 3y = 7y^3$

(L) 

2. Dans la dernière ligne du tableau, décrire chaque catégorie avec une phrase et une expression littérale si possible.

Catégories	
Erreurs	
Description	

E. Productions d'élèves lors de la séance d'analyse d'erreurs 2

E.1. Groupe n'ayant pas compris le fonctionnement du tableau

Catégories	negatif	decimal	fraction	positive
Erreurs	D/I/S A/F/H	D/I/S	B	C/E/G/K/L
Description	<p>A : le calcul est faux, car, la personne qui a calculer, a calculer + addition en premier au lieu de calculer la multiplication qui doit être prioritaire dans ce calcul.</p> <p>B : le calcul est faux, car, la personne qui a calculer a oublié de rendre les fraction au même dénominateur mais la personne a direct calculer.</p> <p>C : le calcul est faux, car, on ne peut pas calculer des nombre avec des lettre et des nombre avec des nombre au carré mais la personne la fait en calculant un nombre avec une lettre + un autre nombre avec une lettre mais qui est au carré.</p> <p>d : le calcul est faux, car, elle la personne a multiplier les deux parti decimal ensemble au lieu de calculer $2 \times 1,9 \times$ elle a calculer $1,9$ ensemble.</p> <p>e : le calcul est faux, car, on ne peut pas additionner des chiffre qui son accompagnée de lettre avec des lettre.</p> <p>g : le calcul est faux, car, il fallait simplifier.</p> <p>g : le calcul est faux, car, la personne n'a pas calculer (6-8) et a calculer (2) alors qu'il devait être calculer a la fin avec le nombre trouver du calcul (6-8)</p>			

E.2. Groupe avec classification implicite dans la description

Catégories	Priorité opératoire	Calcul	Calcul avec x	Signe	Propriété
Erreurs	A, G	B, F, J, L D	C, B , E, K	H	I
Description	<p>A = Il n'a fait la multiplication en premier alors qu'elle est prioritaire</p> <p>G = Il n'a pas le calcul entre les parenthèses en premier</p>	<p>B : Il devait savoir qu'en ne peut pas calculer 2 dénominateurs qui n'ont pas différents</p> <p>F : même que de B</p> <p>J : Erreur de calcul, il avait dû ajouter 2 à 8</p> <p>L : Il a calculé des racines carrées alors qu'elles n'étaient pas calculées</p> <p>D : Pareil que J</p>	<p>C : On ne peut additionner x^2 à x</p> <p>D : On ne peut pas additionner un chiffre mais x^2 et x ont un même degré</p> <p>E : Pareil que le D</p> <p>K : Pareil que C</p>	<p>H = il a fait une erreur de signe - + et + font un nombre positif et non négatif</p>	<p>I = Il faut connaître la propriété pour savoir que l'hypoténuse est le segment opposé à l'angle droit</p>

F. Séance d'analyse d'erreurs n°3

F.1. Cours 4eme à compléter sur l'addition/soustraction et comparaison de fractions

Collège de Sèvres
2017 - 2018

Mathématiques
Quatrième 9

Algèbre

Chapitre 8 : Fractions 1

Comparaison, addition, soustraction

A. Comparaison de fractions

Propriété A.1 (admise): Règle fondamentale

Un quotient ne change pas si l'on **multiplie** ou si l'on **divise** son numérateur **et** son dénominateur par un même nombre non nul.

a, b et k désignent trois nombres ($b \neq 0, k \neq 0$) :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Exemples :

$$\frac{2,5}{3} = \frac{2,5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{5}{6} \qquad \frac{24}{30} = \frac{24 \div 3}{30 \div 3} = \frac{8}{10}$$



Attention piège classique : $\frac{a}{b} \neq \frac{a+k}{b+k}$ et $\frac{a}{b} \neq \frac{a-k}{b-k}$

Exemple : On sait que $\frac{1}{2} = 0,5$ et si on ajoute 1 au numérateur et au dénominateur on a

$$\frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3} = 0,666\dots$$

Propriété A.2 (admise): Comparaison de deux quotients de mêmes dénominateurs

Si deux quotients ont le **même dénominateur**, le plus grand est celui qui a le plus grand numérateur.

a, b et c désignent trois nombres ($c > 0$) :

$$\text{Si } a < b \text{ alors } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

Exemples :

$$\frac{3}{7} < \frac{5}{7} \quad \text{car } 3 < 5 \qquad \text{Puisque } 0,5 < 3, \text{ alors } \frac{0,5}{789} < \frac{3}{789}$$



Attention piège classique : Cette règle ne marche pas si les deux dénominateurs sont différents !

Exemple : On veut comparer $\frac{4}{5}$ et $\frac{9}{15}$. Malgré que $4 < 9$, le calcul des deux quotients nous donne :

$$\frac{4}{5} = 0,8 \quad \text{et} \quad \frac{9}{15} = 0,3. \quad \text{Ainsi } \frac{4}{5} > \frac{9}{15}$$

→ Pour comparer deux fractions de dénominateurs différents, on peut les réduire au même dénominateur.

Exemple :

Reprenons les deux fractions $\frac{4}{5}$ et $\frac{9}{15}$. On peut écrire $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{12}{15}$.

Les fractions $\frac{12}{15}$ et $\frac{9}{15}$ ont le même dénominateur, on peut appliquer la propriété A.2 pour les

comparer : Puisque $12 > 9$, alors $\frac{12}{15} < \frac{9}{15}$. Ainsi, $\frac{4}{5} < \frac{9}{15}$.

Propriété A.3 (admise): Comparaison d'un quotient par rapport à 1

a, b désignent deux nombres ($b > 0$).

Si $a > b$ alors $\frac{a}{b} > 1$ Si $a < b$ alors $\frac{a}{b} < 1$ Si $a = b$ alors $\frac{a}{b} = 1$

Exemples :

B. Addition et soustraction de fractions

→ Pour additionner ou soustraire deux fractions qui ont le même dénominateur :

- On additionne ou on soustrait les numérateurs
- On garde le dénominateur commun

a, b et c désignent trois nombres relatifs ($c \neq 0$).

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Exemples :



Attention piège classique : Pour additionner ou soustraire deux fractions qui n'ont pas le même dénominateur, on doit d'abord les écrire avec le même dénominateur.

Exemples :

F.2. Présentation powerpoint “automatisme et inhibition”

Automatisme et inhibition

Collège de Sévres 09/04/2018

Le test de Stroop - Question 1

Sélectionner le rectangle rouge:

a.  b.  c. 

Collège de Sévres

Le test de Stroop - Question 2

Sélectionner le rectangle vert:

a.  b.  c. 

Collège de Sévres

Le test de Stroop - Question 3

Sélectionner le rectangle bleu:

a.  b.  c. 

Collège de Sévres

Le test de Stroop - Question 4

Sélectionner le rectangle noir:

- a.  b.  c. 

Collège de Sévres

Le test de Stroop - Question 5

Sélectionner le rectangle rouge:

- a.  b.  c. 

Collège de Sévres

Le test de Stroop - Question 6

Sélectionner le rectangle vert:

- a.  b.  c. 

Collège de Sévres

Le test de Stroop - Question 7

Sélectionner le rectangle noir:

- a.  b.  c. 

Collège de Sévres

Le test de Stroop - Question 8

Sélectionner le rectangle vert:

- a.  b.  c. 

Collège de Sévres

Le test de Stroop - Remarques

Lorsqu'il y a contradiction entre la couleur du mot et l'information apportée par le mot, la tâche est plus difficile.

Pour la réaliser, nous devons inhiber notre première intuition qui correspond au sens du mot et non à la couleur.

Collège de Sèvres

Des automatismes à l'école

• A l'école les enfants se trompent souvent sur des énoncés verbaux du type :

« Louise a 25 billes. Elle a 5 billes de plus que Léo. Combien Léo a-t-il de billes ? »

Dans quel piège pensez-vous qu'un élève de CE2 pourrait tomber?

Collège de Sèvres

Des automatismes à l'école

« Louise a 25 billes. Elle a 5 billes de plus que Léo. Combien Léo a-t-il de billes ? »

L'enfant ne parvient pas à mettre de côté l'automatisme « il y a le mot **plus** alors j'additionne ». Ainsi, il additionne 25 et 5 et répond 30 au lieu d'activer la soustraction ($25-5=20$), logique dans ce cas.

Collège de Sèvres

Analyse d'erreurs - Groupe 1

$$\textcircled{A} \quad \frac{-8}{8} - \frac{-2}{5} = \frac{-8 - (-2)}{8 - 5} = -2$$

Collège de Sévres

Analyse d'erreurs - Groupe 2

\textcircled{L} Je trouve que $\frac{3}{5} < \frac{11}{15}$
parce que $3 < 11$ et $5 < 15$

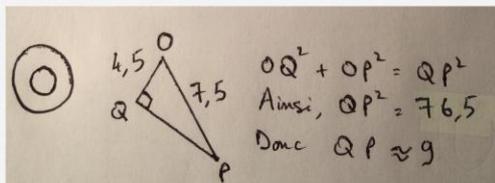
Collège de Sévres

Analyse d'erreurs - Groupe 3

$$\textcircled{E} \quad 3x + x + 5 = 4x + 5 = 9x$$

Collège de Sévres

Analyse d'erreurs - Groupe 4



Collège de Sévres

F.3. Fiches élèves de la Séance n°3 - Groupe 1

Collège de Sèvres
2017 - 2018

Mathématiques
Quatrième!

Activité : Analyse d'erreurs groupe 1

Nom :

Prénom :

1. Pour chaque extrait, expliquer l'erreur commise par l'élève.

A $\frac{-8}{8} - \frac{-2}{5} = \frac{-8-(-2)}{8-5} = -2$

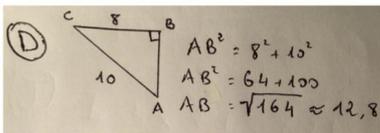
.....
.....

B $\frac{66}{9} < \frac{23}{4}$ car $\frac{66}{9} = \frac{22}{3}$
et que $22 < 23$ et $3 < 4$

.....
.....

C $2x + 3x^2 + 11 = 5x^2 + 11$

.....
.....

D  $AB^2 = 8^2 + 10^2$
 $AB^2 = 64 + 100$
 $AB = \sqrt{164} \approx 12,8$

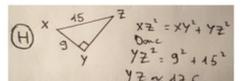
.....
.....

Collège de Sèvres
2017 - 2018

Mathématiques
Quatrième!

2. Au fur et à mesure des présentations de vos camarades, identifiez les erreurs similaires à l'erreur présentée puis donner une méthode pour les éviter.

Groupe 2

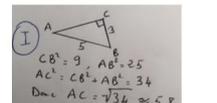
H  $Z^2 = XY^2 + YZ^2$
Donc $YZ^2 = 9^2 + 15^2$
 $YZ \approx 17,5$

I On sait que $1 < \frac{1}{3}$ et que $1 < 3$
Donc $1 < \frac{3}{3}$

F $\frac{-2}{3} + \frac{9}{4} = \frac{7}{7} = 1$

E $3x + x + 5 = 4x + 5 = 9x$

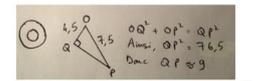
Groupe 3

J  $CB^2 = 9, AB^2 = 25$
 $AC^2 = CB^2 + AB^2 = 34$
Donc $AC = \sqrt{34} \approx 5,8$

K $4x^2 + 3y = 7xy^3$

L Je trouve que $\frac{3}{5} < \frac{11}{15}$
parce que $3 < 11$ et $5 < 15$

Groupe 4

O  $OP^2 = 4,5^2 + 7,5^2$
Amr, $OP^2 = 76,5$
Donc $OP \approx 8,7$

M $\frac{2}{7} > \frac{-3}{-10}$ car $2 > -3$ et $7 > -10$

N $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3-1}{5-2} = \frac{2}{3}$

L $-2x^4 - 2xy^2 = -4x^2y^2$

L'erreur A est similaire aux erreurs :	Ce que l'on peut faire dans ces situations :
L'erreur B est similaire aux erreurs :	Ce que l'on peut faire dans ces situations :
L'erreur C est similaire aux erreurs :	Ce que l'on peut faire dans ces situations :
L'erreur D est similaire aux erreurs :	Ce que l'on peut faire dans ces situations :

F.4. Fiches élèves de la Séance n°3 - Groupe 2

Collège de Sèvres
2017 - 2018

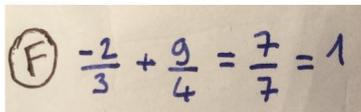
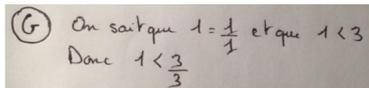
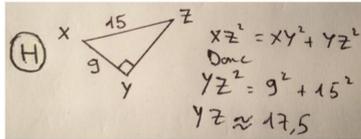
Mathématiques
Quatrième!

Activité : Analyse d'erreurs groupe 2

Nom :

Prénom :

1. Pour chaque extrait, expliquer l'erreur commise par l'élève.



Collège de Sèvres
2017 - 2018

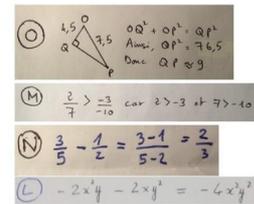
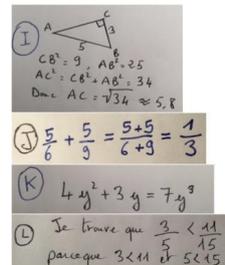
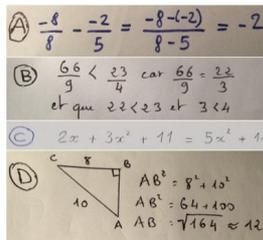
Mathématiques
Quatrième!

Groupe 1

Groupe 3

Groupe 4

2. Au fur et à mesure des présentations de vos camarades, identifiez les erreurs similaires à l'erreur présentée puis donner une méthode pour les éviter.



L'erreur H est similaire aux erreurs :	Ce que l'on peut faire dans ces situations :
L'erreur G est similaire aux erreurs :	Ce que l'on peut faire dans ces situations :
L'erreur F est similaire aux erreurs :	Ce que l'on peut faire dans ces situations :
L'erreur E est similaire aux erreurs :	Ce que l'on peut faire dans ces situations :

F.5. Fiches élèves de la Séance n°3 - Groupe 3

Collège de Sèvres
2017 - 2018

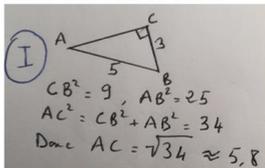
Mathématiques
Quatrième !

Activité : Analyse d'erreurs groupe 3

Nom :

Prénom :

1. Pour chaque extrait, expliquer l'erreur commise par l'élève.



J

$$\frac{5}{6} + \frac{5}{9} = \frac{5+5}{6+9} = \frac{1}{3}$$

K

$$4y^2 + 3y = 7y^3$$

L

Je trouve que $\frac{3}{5} < \frac{11}{15}$
 parce que $3 < 11$ et $5 < 15$

Collège de Sèvres
2017 - 2018

Mathématiques
Quatrième !

Groupe 1

Groupe 2

Groupe 4

2. Au fur et à mesure des présentations de vos camarades, identifiez les erreurs similaires à l'erreur présentée puis donner une méthode pour les éviter.

A

$$\frac{-8}{8} - \frac{-2}{5} = \frac{-8-(-2)}{8-5} = -2$$

B

$$\frac{66}{9} < \frac{23}{4} \text{ car } \frac{66}{9} = \frac{22}{3}$$

et que $22 < 23$ et $3 < 4$

C

$$2x + 3x^2 + 11 = 5x^2 + 11$$

D

$AB^2 = 8^2 + 10^2$
 $AB^2 = 64 + 100$
 $AB = \sqrt{164} \approx 12,8$

H

$xz^2 = xy^2 + yz^2$
 Donc $yz^2 = z^2 + 15^2$
 $yz \approx 17,5$

G

On sait que $1 = \frac{1}{1}$ et que $1 < 3$
 Donc $1 < \frac{1}{3}$

F

$$\frac{-2}{3} + \frac{9}{4} = \frac{7}{7} = 1$$

E

$$3x + 2 + 5 = 4x + 5 = 9x$$

O

$OP^2 = 1,5^2 + 2,5^2$
 Donc $OP \approx 2,9$

M

$$\frac{2}{7} > \frac{-3}{-10} \text{ car } 2 > -3 \text{ et } 7 > -10$$

N

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3-1}{5-2} = \frac{2}{3}$$

L

$$-2x^4 - 2x^4 = -4x^8$$

L'erreur I est similaire aux erreurs :	Ce que l'on peut faire dans ces situations :
L'erreur J est similaire aux erreurs :	Ce que l'on peut faire dans ces situations :
L'erreur K est similaire aux erreurs :	Ce que l'on peut faire dans ces situations :
L'erreur L est similaire aux erreurs :	Ce que l'on peut faire dans ces situations :

F.6. Fiches élèves de la Séance n°3 - Groupe 4

Collège de Sèvres
2017 - 2018

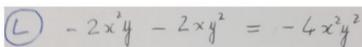
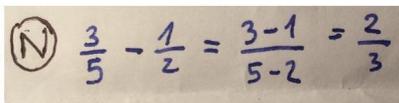
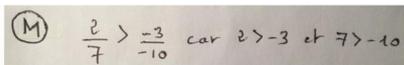
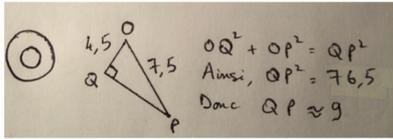
Mathématiques
Quatrième!

Activité : Analyse d'erreurs groupe 4

Nom :

Prénom :

1. Pour chaque extrait, expliquer l'erreur commise par l'élève.



Collège de Sèvres
2017 - 2018

Mathématiques
Quatrième!

2. Au fur et à mesure des présentations de vos camarades, identifiez les erreurs similaires à l'erreur présentée puis donner une méthode pour les éviter.

Groupe 1

A $-\frac{8}{8} - \frac{-2}{5} = \frac{-8-(-2)}{8-5} = -2$

B $\frac{66}{9} < \frac{23}{4}$ car $\frac{66}{9} = \frac{22}{3}$ et que $22 < 23$ et $3 < 4$

C $2x + 3x^2 + 11 = 5x^2 + 11$

D $AB^2 = 8^2 + 10^2$
 $AB^2 = 64 + 100$
 $AB = \sqrt{164} \approx 12,8$

Groupe 2

H $xz^2 = xy^2 + yz^2$
Donc $yz^2 = 9^2 + 15^2$
 $yz^2 = 225 + 225 = 450$
 $yz \approx 21,2$

G On sait que $1 = \frac{1}{1}$ et que $1 < 3$
Donc $1 < \frac{3}{3}$

F $-\frac{2}{3} + \frac{9}{4} = \frac{7}{7} = 1$

E $3x + 2 + 5 = 4x + 5 = 9x$

Groupe 3

I $CB^2 = 9$, $AB^2 = 25$
 $AC^2 = CB^2 + AB^2 = 34$
Donc $AC = \sqrt{34} \approx 5,8$

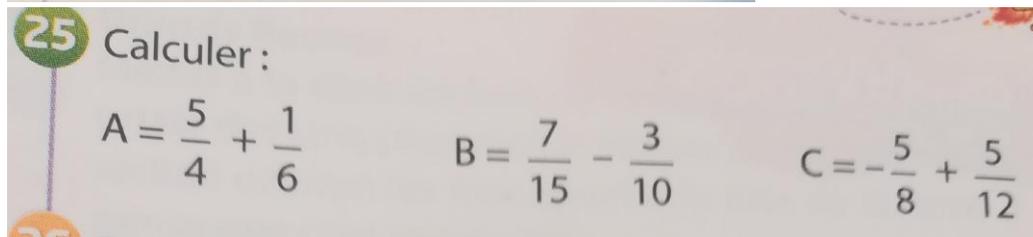
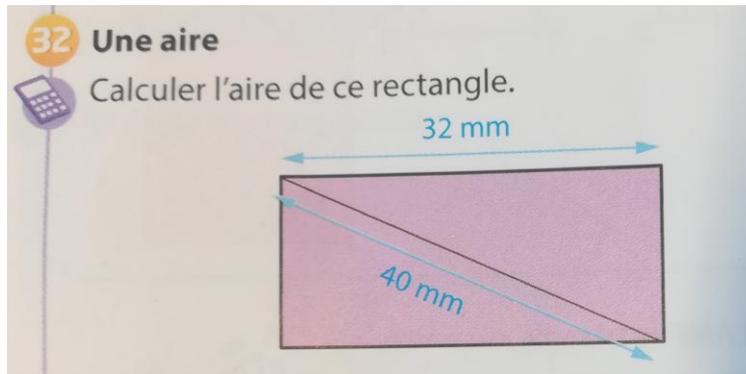
J $\frac{5}{6} + \frac{5}{9} = \frac{5+5}{6+9} = \frac{1}{3}$

K $4xy^2 + 3y = 7xy^3$

L Je trouve que $\frac{3}{5} < \frac{11}{15}$ parce que $3 < 11$ et $5 < 15$

L'erreur O est similaire aux erreurs :	Ce que l'on peut faire dans ces situations :
L'erreur M est similaire aux erreurs :	Ce que l'on peut faire dans ces situations :
L'erreur N est similaire aux erreurs :	Ce que l'on peut faire dans ces situations :
L'erreur L est similaire aux erreurs :	Ce que l'on peut faire dans ces situations :

F.7.1 Exercices traités par la deuxième demi-classe (les exercices 32, 25 et 21 sont extraits du manuel Mission Indigo, Cycle 4, Hachette)



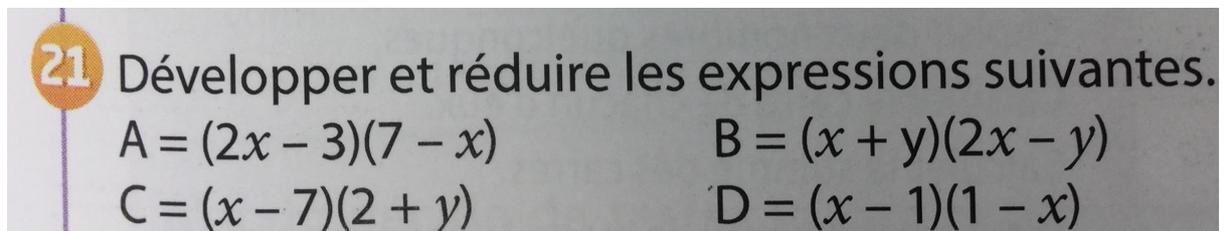
Exercice : Comparaison de fraction

Comparer les fractions suivantes :

$$\frac{5}{8} \text{ et } \frac{7}{12}$$

$$\frac{-12}{3} \text{ et } \frac{-6}{5}$$

$$\frac{2}{11} \text{ et } \frac{-4}{3}$$



G. Auto-correction des élèves de 4eme d'Ibrahim

G.1 Modèle de fiche erreur

Fiche erreurs

Nom :

A Conserver dans une pochette plastique

Prénom :

Situation	Erreur	Ce qu'il fallait faire (et pourquoi)

G.2 Feuille d'auto-correction d'un devoir de 4eme

Collège de Sèvres
2017 - 2018

Vendredi 24 novembre 2017

Mathématiques
Classe de Quatrième 9

Correction Devoir n°2

*Cette correction est très détaillée, toutes les étapes ne sont pas exigées dans une copie d'évaluation.
Un symbole « * » est mis à côté des étapes intermédiaires obligatoires.*

Code couleur : *En vert les étapes intermédiaires*

En rouge le résultat final

En bleu les remarques utiles

Questions de cours : Voir le cours pour le a. et le b. (2,5 points)

- Donner la définition de la division euclidienne entre deux entiers naturels a et b , avec b non nul. (1,25 point)
- Donner la définition d'un nombre premier. (0,75 points)
- Recopier puis compléter la formule de distributivité : $k(a + b) = k \times a + k \times b$ (0,5 points)

Exercice 1 : (1,25 points)

Dans cet exercice, t désigne un nombre quelconque.

Exprimer à l'aide d'une expression littérale la plus simple possible :

- Cinq fois le cinquième de t . (0,5 points)

$$5 \times \frac{t}{5} = t$$

- Le triple de t divisé par la racine carrée du produit de t par 101. (0,75 points)

$$\frac{3 \times t}{\sqrt{101 \times t}} = \frac{3t}{\sqrt{101t}}$$

Exercice 2 : (3,5 points)

Dans chacun des cas suivants, donner l'écriture la plus simple possible.

- $(x + 19y) + (8x - 3y)$ (0,5 points)

$$(x + 19y) + (8x - 3y) = x + 19y + 8x - 3y \quad *$$

Les parenthèses, lorsqu'elles ne sont pas multipliées par un nombre ou précédées par un signe – peuvent être enlevées.

$$(x + 19y) + (8x - 3y) = x + 8x + 19y - 3y$$

$$(x + 19y) + (8x - 3y) = 9x + 16y$$

On s'arrête ici. On n'additionne pas et on ne soustrait pas des « x » avec des « y ».

- $5x \times 5 + 3$ (0,5 points)

$$5x \times 5 + 3 = 5 \times x \times 5 + 3$$

On utilise le fait que la multiplication est « commutative », c'est-à-dire que l'on peut échanger l'ordre des facteurs : $a \times b \times c = b \times c \times a = b \times a \times c$.

$$5x \times 5 + 3 = 5 \times 5 \times x + 3$$

$$5x \times 5 + 3 = 25x + 3$$

On s'arrête ici. On n'additionne pas et on ne soustrait pas des « x » avec des nombres.

- $5 - 4x \times 5 + 3x^2$ (0,5 points)

$$5 - 4x \times 5 + 3x^2 = 5 - 20x + 3x^2$$

On s'arrête ici. On n'additionne pas et on ne soustrait pas des « x » avec des « x^2 ».

d. $-(x + 23y) - (-x)$ (1 points)

$$-(x + 23y) - (-x) = -(x + 23y) + x$$

$$-(x + 23y) - (-x) = -x - 23y + x \quad *$$

$$-(x + 23y) - (-x) = -x + x - 23y$$

$$-(x + 23y) - (-x) = -23y$$

e. $(-x) \times (-y) - 5xy$ (1 points)

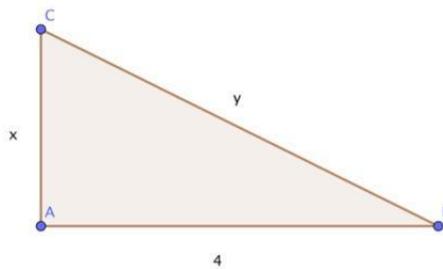
$$(-x) \times (-y) - 5xy = xy - 5xy \quad *$$

On peut additionner ou soustraire des « xy » entre eux.

$$(-x) \times (-y) - 5xy = -4xy$$

Exercice 3 : (4 points)

1. Tracer un triangle rectangle ABC en A avec $AB = 4 \text{ cm}$. On nommera x la longueur du segment $[AC]$ et y la longueur du segment $[BC]$. (0,5 points)



2. Donner l'expression littérale du périmètre du triangle ABC en fonction de x et de y . (0,5 points)

Le périmètre P du triangle ABC est la somme des longueurs des côtés du triangle ABC . Ainsi :

$$P = x + y + 4$$

3. Donner l'expression littérale de y en fonction de x puis de x en fonction de y .

Indice : Appuyez-vous sur un théorème vu cette année en cours.

Le triangle ABC étant rectangle en A , d'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité :

*(0,5 points)

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

$$y^2 = x^2 + 4^2$$

*(0,5 points)

$$y = \sqrt{x^2 + 4^2}$$

(0,75 points)

Par cette dernière égalité, on a bien exprimé y en fonction de x .

Pour exprimer x en fonction de y , on part de la deuxième égalité :

$$y^2 = x^2 + 4^2.$$

On isole d'abord x^2 :

$$x^2 = y^2 - 4^2$$

*(0,5 points)

Enfin, on isole x :

$$x = \sqrt{y^2 - 4^2}$$

(0,75 points)

Par cette dernière égalité, on a exprimé x en fonction de y .

Exercice 4 : (4 points)

Développer puis réduire les expressions littérales suivantes :

$$\begin{aligned} A &= 3(8 + x) + 1 && \text{(1 points)} \\ A &= 3 \times 8 + 3 \times x + 1 && * \\ A &= 24 + 3x + 1 \\ A &= 3x + 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 2(x - 2) - 2 && \text{(1 points)} \\ B &= 2x - 2 \times 2 - 2 && * \\ B &= 2x - 4 - 2 \\ B &= 2x - 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= -3(-x - 1) + 2x + 4 && \text{(2 points)} \\ C &= -3 \times (-x) - (-3) \times (-1) + 2x + 4 && * \\ C &= 3x - 3 + 2x + 4 \\ C &= 5x + 1 \end{aligned}$$

Exercice 5 : (4,75 points)

1. Ecrire, sans justifier, la décomposition en produit de facteurs premiers de 45, puis de 150.
(0,5+0,5 points)

$$\begin{aligned} 45 &= 9 \times 5 && \text{Attention 9 n'est pas premier mais on a } 9 = 3 \times 3 \text{ et l'on sait que 3 est premier.} \\ 45 &= 3 \times 3 \times 5 \\ 45 &= 3^2 \times 5 && \text{(0,5 points)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 150 &= 15 \times 10 && \text{Attention 10 et 15 ne sont pas premier mais on a } 10 = 5 \times 2 \text{ et } 15 = 5 \times 3 \\ &&& \text{Sachant que les nombres 2 ; 3 et 5 sont premiers, on peut écrire :} \\ 150 &= 5 \times 3 \times 5 \times 2 && \text{(on pouvait s'arrêter là)} \\ 150 &= 5^2 \times 3 \times 2 && \text{(0,5 points)} \end{aligned}$$

2. Dans chaque cas, dire, en explicitant votre méthode, si le nombre est un diviseur de 45 puis de 150.
a) 3 b. 5 c. 2 d. 3×5^2 e. $3^2 \times 5$

On pouvait utiliser 3 méthodes (au moins):

- 1ere méthode : grâce aux critères de divisibilité par 2, par 3 et par 5 (méthode applicable seulement pour les sous questions a., b., et c.).
Exemple : 3 divise 150 car la somme des chiffres constituant le nombre 150 : $1 + 5 + 0 = 6$ est un multiple de 3.
- 2eme méthode : Faire la division euclidienne et voir si on a un reste nul ou pas.
Exemple : 2 ne divise pas 45 puisque $45 = 22 \times 2 + 1$ (le reste est non nul)
- 3eme méthode : Voir si le nombre figure dans la décomposition en facteur premier de 45 ou de 150.
Exemple : 5 divise 150 puisque 5 figure dans la décomposition en facteur premier de 150 qui est $5^2 \times 3 \times 2$

- a) 3 divise 45 et 150 (0,5 points)
b) 5 divise 45 et 150 (0,5 points)
c) 2 divise 150 seulement (0,5 points)
d) 3×5^2 divise 150 seulement (0,5 points)
e) $3^2 \times 5$ divise 45 seulement (0,5 points) (on remarquera que $3^2 \times 5 = 45$ et qu'un nombre est toujours divisible par lui-même).
3. Par la méthode de votre choix, et en l'explicitant, donner le plus grand diviseur commun à 45 et 150. (1,25 points)

On pouvait utiliser 2 méthodes (au moins) :

1ere méthode : Trouver tous les diviseurs de 45 et 150 puis donner le plus grand diviseur communs aux deux.

Les diviseurs de 45 sont : 1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 et 45

Les diviseurs de 150 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 25 ; 30 ; 50 (on pouvait s'arrêter la puisque l'on a dépassé 45, n'oublions pas que l'on cherche un diviseur commun aux deux nombres)

Ainsi, le plus grand commun diviseur de 45 et de 150 est 15.

2eme méthode : Trouver le plus grand nombre figurant à la fois dans la décomposition en facteurs premiers de 45 et de 150.

C'est 3×5 qui est égal à 15.

Exercice Bonus 1 :

1. Utiliser la formule de distributivité (en deux fois) pour développer, puis réduire les deux expressions suivantes:

a. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

On utilise une première fois la formule de distributivité : $k(a + b) = k \times a + k \times b$ en considérant

$k = (a + b)$

On obtient :

$(a + b)(a + b) = (a + b) \times a + (a + b) \times b$ *

On utilise une deuxième fois la formule de distributivité pour développer les deux termes de la somme. On prend, pour le premier terme $k = a$ et pour le deuxième terme $k = b$.

$(a + b)(a + b) = a \times a + b \times a + a \times b + b \times b$

$(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$ *

$(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

Ainsi, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b. $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$

On procède de la même manière que dans le a. à part que l'on utilise deux fois la formule de distributivité avec un signe - à l'intérieur de la parenthèse : $k(a - b) = k \times a - k \times b$.

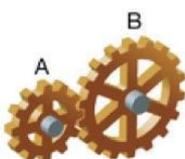
On obtient pour expression finale :

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Exercice bonus 2:

Une roue d'engrenage A possède 12 dents. Elle est en contact avec une roue B qui possède 18 dents. De combien de tours chacune des deux roues doit-elle tourner pour qu'elles soient à nouveau et pour la première fois dans la même position ?

Expliquer le raisonnement.



Lorsque la roue d'engrenage A tourne une fois, elle revient à la même position de départ et 12 dents ont touché, l'une après l'autre, les dents de la roue B.

Lorsque la roue d'engrenage B tourne une fois, elle revient à la même position de départ et 18 dents ont touché, l'une après l'autre, les dents de la roue A.

Pour que les deux roues soient à nouveau dans la même position, il faut que le nombre de dents touchés par la roue A et par la roue B soit un multiple à la fois de 12 et de 18.

Pour qu'elles soient dans la même position pour la première fois, il faut chercher le plus petit multiple commun à 12 et à 18

On remarque que : $12 \times 3 = 36$ et $18 \times 2 = 36$ *

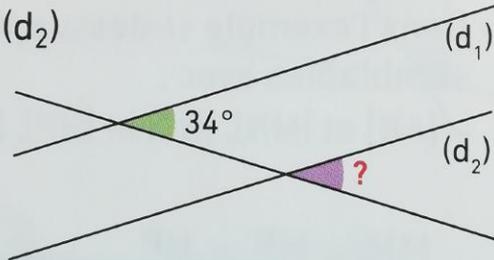
Si la roue d'engrenage A tourne 3 fois et que la roue d'engrenage B tourne 2 fois, elles seront pour la première fois dans la même position.

H. Exercices sur les limites du domaine de validité

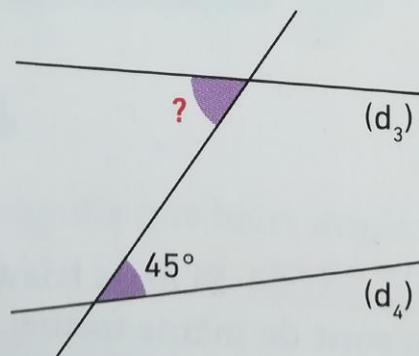
H.1. Exercice extrait de Myriade 4ème programme 2016

6 Dans chaque cas, donner, si cela est possible, la mesure de l'angle violet en expliquant la réponse.

a. $(d_1) \parallel (d_2)$



b.



H.2. Exercice extrait de Mission Indigo 4ème 2016

9 Pour chacun des triangles suivants, indiquer s'il est possible d'écrire l'égalité de Pythagore. Si oui, l'écrire.

