



HAL
open science

Conception et acceptation de la démonstration en seconde

François Casanova

► **To cite this version:**

François Casanova. Conception et acceptation de la démonstration en seconde. Education. 2018.
dumas-02111800

HAL Id: dumas-02111800

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-02111800>

Submitted on 21 Sep 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année universitaire 2017-2018

Master Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation

Mention Second degré

Parcours : Mathématiques

Conception et acceptation de la démonstration en seconde

Présenté par François Casanova

Première partie rédigée en collaboration avec Claire Bourdin

Mémoire de M2 encadré par Michèle Gandit

Table des matières

Introduction.....	1
1.Dualité et écueils de la démonstration mathématique.....	1
1.1.Démontrer : une démarche double.....	2
1.2.Argumentation et démonstration	3
1.3.Éclairer ou convaincre	4
1.4.Validité d'un raisonnement.....	5
1.5.La figure, outil indispensable mais argument contestable.....	6
1.6.Conclusion.....	8
2.Document ressources et manuels.....	9
2.1.Cycle 4.....	9
2.2.Lycée.....	10
2.3.Les démonstrations dans les manuels de seconde.....	11
2.3.1.Manuel Hyperbole, 2nde GT édité par Nathan.....	12
2.3.2.Mathématiques 2nde (E.Barbazo), édité par Hachette.....	12
2.3.3.Manuel Sésamaths, 2nde GT édité par Magnard.....	13
3.Problématique.....	14
4.Expérimentations en seconde.....	15
4.1.Questionnaire	15
4.1.1.Présentation des questions.....	15
4.1.2.Déroulement et analyse a posteriori.....	18
4.2.Une situation de recherche pour la classe : la « Chasse à la bête ».....	25
4.2.1.Présentation et analyse a priori.....	25
4.2.2.Déroulement et conclusions.....	28
Conclusions.....	32
Bibliographie.....	34

Introduction

En mathématiques la preuve joue un rôle central, non seulement comme outil de construction du savoir, mais aussi dans son acceptation et sa compréhension. Il revient alors à l'enseignant de retranscrire ces multiples aspects dans la communauté que constitue sa classe de sorte que ses élèves soient non seulement capables de justifier les résultats qu'ils obtiennent mais aussi de juger ceux qui leur sont soumis. Dans ce mémoire nous analyserons en premier lieu les rôles complexes joués par la démonstration, ainsi que les paramètres pouvant influencer sur son acceptation au sein des différentes communautés mathématiques. Puis, en s'appuyant sur des documents officiels et des manuels scolaires, nous essayerons de déterminer comment retranscrire au mieux chaque facette de la démonstration tout en nous interrogeant sur la possible présence de biais de conceptions chez nos élèves. Ensuite, nous testerons ces hypothèses dans nos classes au moyen d'un questionnaire dont la correction donnera lieu à un débat qui permettra de clarifier certains points relatifs à la preuve. Cela fournira un point d'appui à nos élèves afin qu'ils puissent à leur tour produire un texte de démonstration à l'issue d'une situation de recherche en classe et finalement évaluer les productions de leurs camarades et permettre d'identifier leurs critères d'acceptabilité.

1. Dualité et écueils de la démonstration mathématique

Si la démonstration peut se définir comme un « raisonnement qui prouve la vérité de sa conclusion par déduction et d'une manière évidente et convaincante » (Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales¹), on comprend sans aucun doute qu'elle a pour objectif d'établir une vérité mais plusieurs questions se posent alors : que peut-on considérer comme « évident » ? Qui faut-il convaincre ? Et comment ?

Historiquement, on ne trouve pas trace écrite de démonstration avant les mathématiques grecques, au VI^{ème} siècle avant notre ère. En effet, il n'était question jusque-là que de techniques de calculs destinées à des fins pratiques, est alors apparu le désir de convaincre autrui. Les mathématiques grecques sont construites selon un modèle axiomatique : à partir d'un nombre restreint de postulats d'apparence raisonnable et de règles d'inférences prédéterminées comme le principe du tiers exclu ou le *modus ponens* (sachant que l'implication « si A alors B » est vraie, la condition A étant vérifiée, on peut en déduire la conclusion B), on peut alors prouver propositions, corollaires et théorèmes qui sont dès lors relégués à l'ordre de connaissances établies et réutilisables à souhait par la suite pour produire de nouveaux résultats.

¹Repéré par <http://www.cnrtl.fr/definition/academie8/demonstration>

Ainsi est « évident » tout ce qui relève des axiomes puisque ces derniers constituent une base de connaissances initiales naturellement considérée comme acceptable, puis par extension toutes les propositions connues qui en découlent. Quant à l'acceptation de tels raisonnements, elle est voulue universelle : toute personne sensée ayant préalablement accepté l'axiomatique ne peut en théorie qu'approuver ce qu'ils impliquent.

Pour prétendre alors réaliser une véritable activité mathématique dans nos classes, il convient de s'efforcer de transposer ce rôle de construction et de communication du savoir que joue la démonstration, ce qui nécessite d'éviter certains écueils et de se confronter à un certain nombre de problèmes.

1.1. Démontrer : une démarche double

Lorsque l'on parle de démonstration, il est important de distinguer le « produit » du « processus de preuve » (M.Gandit, 2004). Le « produit » désigne le texte mathématique final, rédigé à la perfection, articulant chaque étape pas à pas en suivant une logique infaillible et un raisonnement parfait, c'est la démonstration telle qu'on peut la lire dans la plupart des cours ou livres de mathématiques. Quant au « processus de preuve », il s'agit de la démarche de recherche, de l'arborescence des raisonnements, efficaces ou non, déployés par le mathématicien en vue de résoudre un problème. Tant que ce dernier objectif n'est pas atteint, celui-ci va suivre différentes idées qui échoueront, certes, mais ce faisant lui fourniront de nouvelles informations quant à la nature même de son problème et le guideront peu à peu vers la solution. Si il est important d'avoir ces deux aspects en tête, c'est parce que le « produit » éclipse bien souvent le « processus », qualifié à ce titre d'« inavouable labeur » par le mathématicien A.Grothendieck (1983) lorsqu'il en constate l'absence : « Ce n'est sûrement pas un hasard que la démarche spontanée de toute vraie recherche n'apparaisse pour ainsi dire jamais dans les textes ou le discours qui sont censés communiquer et transmettre la substance de ce qui a été "trouvé". ». Or la phase de recherche est inséparable de toute démonstration, peu importe le niveau auquel on se place, il est rare d'avoir à faire à des résultats suffisamment intéressants pour être étudiés mais dont la preuve est assez triviale pour être rédigée d'une traite. En effet, toujours selon les mots de Grothendieck, il s'agit de faire le « travail » (chercher) et de le refaire « à l'envers, en effaçant soigneusement toutes les ratures » (rédiger). Impossible dès lors de prétendre enseigner à nos élèves à démontrer, si l'on ne prend pas la peine de mettre en lumière cette phase de recherche nécessaire à la construction de toute démonstration.

1.2. Argumentation et démonstration

Dans la vie quotidienne, nous sommes régulièrement amenés à donner notre point de vue, et parfois même le défendre, le faire adopter par quelqu'un d'autre, ce qui nécessite de développer un discours argumentatif plus ou moins poussé. Dans la mesure où l'objectif premier de l'argumentation, qui est de persuader autrui de quelque chose que l'on tient pour vrai, coïncide avec celui de la démonstration mathématique, il est alors naturel de s'interroger sur les différences possibles entre ces deux processus évoluant dans des environnements différents.

D'après Duval (1993), pour justifier une affirmation, mathématique ou non, il faut distinguer deux opérations : la production de raisons ou d'arguments par celui qui la présente et l'examen de l'acceptabilité de ces arguments par celui qui en prend connaissance. Dans le cadre d'une argumentation, ce dernier jugera les différentes raisons qui lui sont présentées en fonction de leur pertinence et de leur force (résistantes à ses propres objections et ayant une valeur épistémique positive²). Il apparaît ainsi qu'un argument peut être rejeté par la personne à laquelle il est soumis si cette dernière le juge infondé ou non conforme à ses propres convictions. Lors de l'examen d'une démonstration, seule la vérité des propositions qui la composent et la validité du raisonnement qui est mis en place sont considérées, de sorte que toute personne acceptant l'axiomatique concernée et comprenant l'ensemble du raisonnement ne peut qu'adhérer à sa conclusion. La différence entre démonstration et argumentation pourrait être résumée ainsi : la démonstration obéit à des contraintes de validité et a pour but l'atteinte d'une vérité universelle; alors que l'argumentation obéit à des contraintes de pertinence et a pour but la vraisemblance et la conviction d'autrui ou de soi-même.

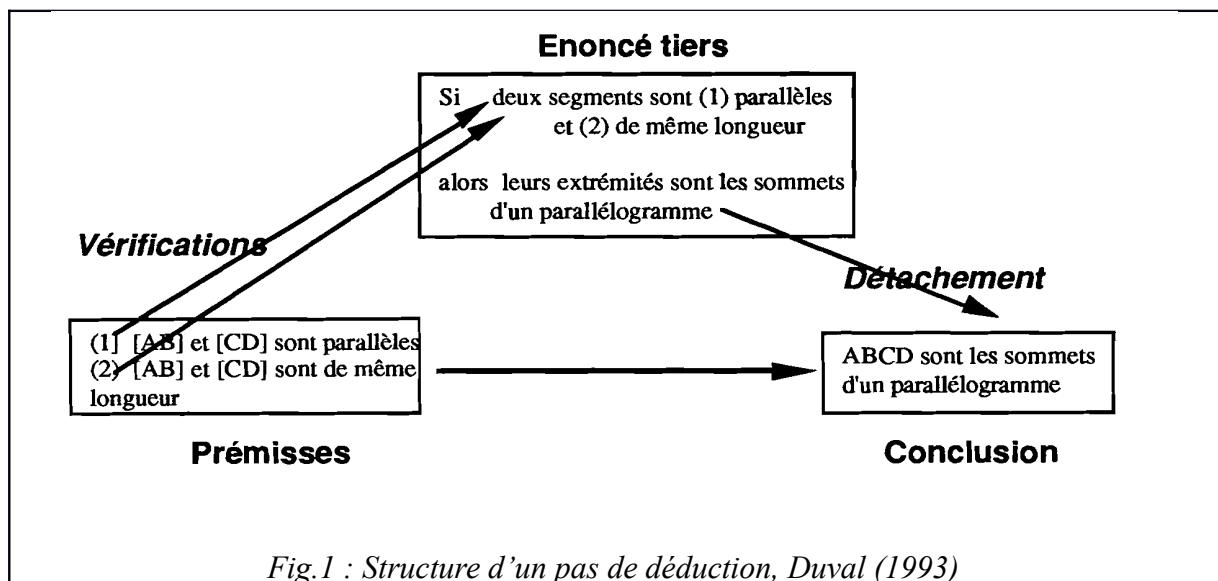


Fig.1 : Structure d'un pas de déduction, Duval (1993)

2Élément positif du point de vue de l'acquisition, de la formation des connaissances. Duval (1993)

Dans un pas de déduction (Fig.1), c'est le statut des propositions qui va permettre d'établir la relation de justification par une opération de détachement; alors que dans une argumentation, la valeur épistémique des arguments dépend de leur contenu, qui est donc toujours contestable. Enfin, il y a une uniformité dans l'organisation d'une démonstration où tout est ramené localement à la règle du *modus ponens*, alors qu'on trouve dans l'argumentation une large variété d'inférences. Le passage d'une argumentation à une démonstration demande donc une réorganisation totale, et pris du point de vue de la logique propositionnelle, peut mener à des contradictions³. Ce qui amène à distinguer les arguments rhétoriques qui visent à convaincre l'interlocuteur ou soi-même, des arguments heuristiques qui visent à progresser dans le problème. Ainsi, bien qu'il y ait une certaine proximité discursive, il y a une très grande « distance cognitive » entre le fonctionnement d'une démonstration et celle d'une argumentation. Le développement de l'argumentation n'ouvre pas une voie vers la démonstration, et pour appréhender cette dernière un apprentissage spécifique du raisonnement déductif est nécessaire. De plus là où l'acceptation d'un argumentaire varie suivant des degrés divers selon la personne à laquelle il est soumis, cela ne devrait pas être le cas pour une démonstration mathématique : on n'est pas plus ou moins convaincu d'un résultat, il est considéré comme étant soit vrai, soit faux, il n'y a pas d'entre deux.

1.3. Éclairer ou convaincre

Lorsque l'on parle de démonstration mathématique, comme nous l'avons vu précédemment, c'est souvent au « produit » que l'on pense en premier lieu. Cependant ce point de vue n'est que très peu propice à l'apprentissage de la démonstration, puisqu'il occulte considérablement, si ce n'est totalement, la démarche même qui aura permis la construction d'une telle preuve. Ainsi, E.Barbin (1988) utilise le terme de preuve « éclairante » lorsque l'heuristique qui a guidé la phase de recherche transparaît dans la rédaction finale, ou de preuve « convaincante » lorsque, bien que la vérité de la proposition soit établie, le sens de la démarche y menant reste imperceptible.

Par exemple, avant la découverte du palimpseste d'Archimède dévoilant entre autres la méthode ayant permis à son auteur de déterminer le volume de la sphère, il était souvent reproché aux démonstrations du savant de Syracuse, bien qu'étant valides, de ne pas être « éclairantes ». En effet dans sa manière de procéder, Archimède lui-même semble distinguer le processus de recherche menant à la découverte de son résultat de la démonstration qu'il en donne⁴. Pour déterminer des volumes, il utilise ce qu'il appelle la « méthode relative aux

³Pour un exemple détaillé, voir Annexe 1 extraite de Duval (1993) p.49 à 51

⁴Bettinelli (1990)

théorèmes mécaniques ». Cette dernière mélangeant géométrie plane, considérations d'équilibres physiques et de proportionnalité semble si étrangère aux critères de rigueur grecs qu'une fois la formule obtenue, Archimède considère comme indispensable de la démontrer par exhaustion. Autrement dit en mettant en évidence le fait qu'il est impossible que le volume considéré soit strictement inférieur ou strictement supérieur à la valeur donnée par la formule, ce qui ne manque certes pas de convaincre mais ne permet pas d'expliquer d'où elle vient, d'autant plus que ce type de raisonnement nécessite la connaissance préalable de ladite formule. Il y a donc ici rupture entre la méthode de recherche qui est « éclairante » et la preuve par exhaustion « convaincante ».

Tout cela n'est pas sans rappeler la logique intuitionniste dont les démonstrations sont exemptes de principe du tiers exclus au profit de preuves dites constructives. En effet plutôt que de révéler que l'inexistence d'un objet mathématique particulier est impossible en montrant que cela aboutit à une contradiction, les intuitionnistes exigent une construction dudit objet pour prouver son existence. Nous observons ainsi une inversion du standard de rigueur fondée sur l'acceptation ou le rejet d'un type de raisonnement particulier: là où l'exhaustion faisait loi chez les mathématiciens grecs, elle est caduque pour les intuitionnistes.

1.4. Validité d'un raisonnement

Cela nous amène à nous interroger sur les raisons pouvant influencer sur l'acceptation d'une démonstration d'une communauté à l'autre. Si la nécessité de s'appuyer sur des assertions considérées comme vraies pour en déduire un résultat accepté de tous ne semble jamais avoir été remise en cause, la manière dont se font les déductions va influencer sur son acceptation et grandement varier selon le contexte. Par exemple, comme le remarque C. Merker (1990), dans l'Introduction à l'Analyse des infinis, le mathématicien Léonard Euler présente de nombreux résultats bien connus des étudiants d'aujourd'hui, en particulier les développements en séries entières des fonctions exponentielles, logarithmes et trigonométriques. Ce ne sont pas tant le caractère verbeux et qualitatif des démonstrations qui est en contraste avec les mathématiques d'aujourd'hui mais bien l'indifférence avec laquelle y est manipulé l'infini : en suivant les mêmes règles de calcul que pour des quantités finies. En effet, du point de vue des mathématiciens actuels, cela soulève un problème de rigueur pouvant induire d'énormes erreurs, là où ce type de manipulation est unanimement accepté au XVIII^{ème} siècle. À noter que cela n'est cause d'aucune erreur de la sorte chez Euler qui est loin de manipuler aveuglément ces quantités et semble parfaitement conscient des termes que le passage à la limite rend « négligeables » et de ceux dont il doit tenir compte. Il n'en reste pas moins qu'une telle manipulation des infinis serait de nos jours perçue comme peu rigoureuse car

nous avons désormais connaissance d'exemples où raisonner ainsi conduirait à des résultats manifestement erronés. Ainsi pour qu'un raisonnement soit considéré comme étant valide, il est nécessaire qu'il permette d'aboutir à une conclusion vraie, quel que soit le cas où il est appliqué.

1.5. La figure, outil indispensable mais argument contestable

D'après Delahaye (1998), « Il y a quelques années, il était bien vu de mettre le moins possible de dessins dans un livre de géométrie. [...] L'idée derrière ce qui semble de navrantes aberrations est qu'une figure ne prouve rien et qu'au contraire, il faut s'en méfier ». En effet, toute figure est un cas particulier ; et nous pouvons dessiner une figure avec une caractéristique particulière qui donnera l'illusion d'un résultat général erroné.

Il est aussi possible que la figure sur lequel le raisonnement est basé soit imperceptiblement trompeuse et conduise à un paradoxe. Un célèbre exemple proposé par Lewis Carroll (1899) établit que « tout triangle est isocèle », ce qui est évidemment faux (Fig.2). Ici la figure trompe le lecteur : si le point F est construit soigneusement, il se trouvera toujours à l'extérieur du triangle ABC, ce qui empêche la suite du raisonnement.

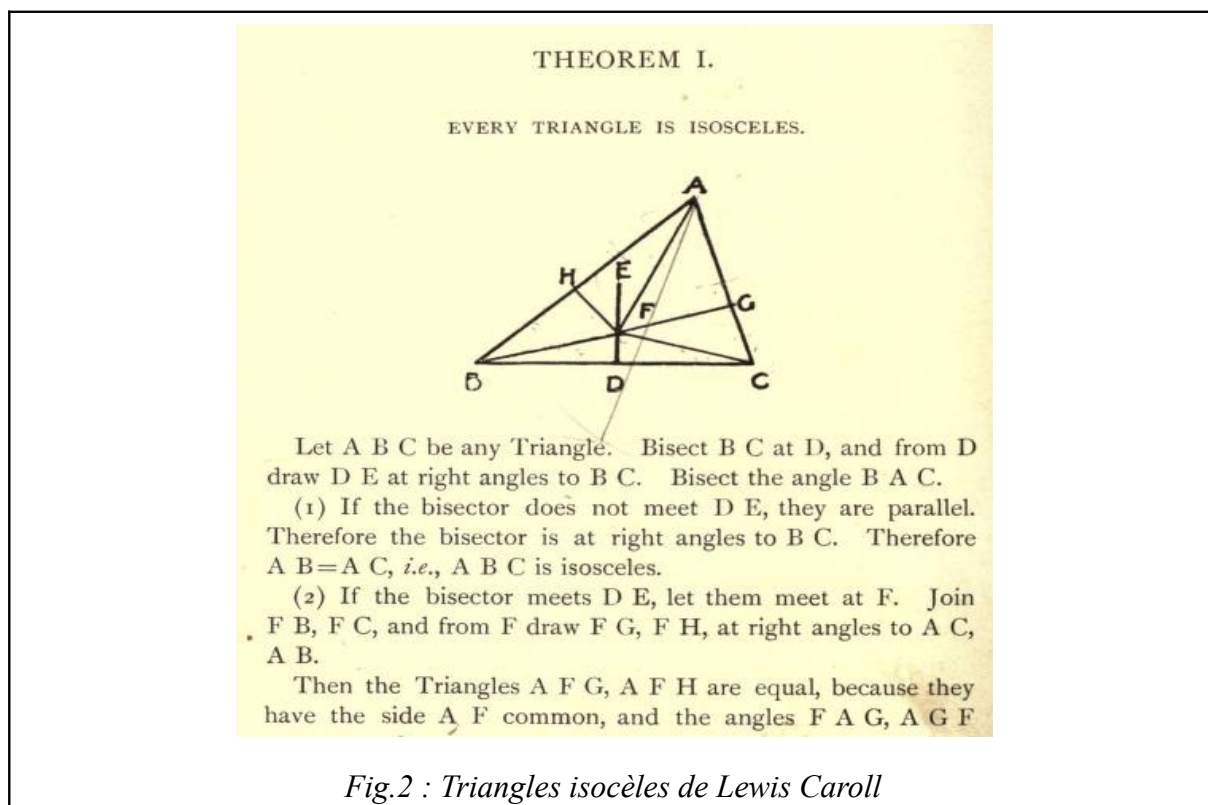
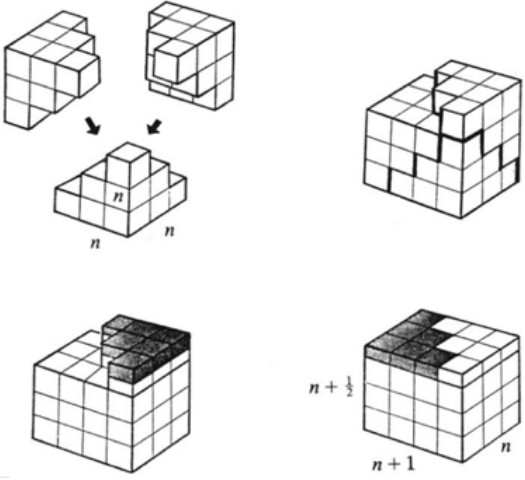


Fig.2 : Triangles isocèles de Lewis Carroll

Ainsi le raisonnement mathématique ne saurait se reposer sur le visible, et il faudrait même douter de nos sens pour être rigoureux.

Cependant, et comme cela a été souligné dans la partie précédente, il pourra être reproché à une preuve sans illustration de ne pas être éclairante. Illustrer une démonstration par une figure en facilite la compréhension, et une rupture idéologique s'effectue ici : à l'opposé d'ouvrages entiers sans figures, il se développe des démonstrations sans mots.

Nelsen (2003) définit les preuves sans mots de la façon suivante : « il s'agit de figures, schémas ou diagrammes qui aident le lecteur à comprendre pourquoi un énoncé mathématique particulier peut être vrai, ainsi qu'à voir comment on pourrait tenter de le démontrer. [...] une ou deux équations peuvent être incluses [...]. L'essentiel est de fournir des indications visuelles propres à stimuler la pensée mathématique. » Bien qu'elles connaissent un regain d'intérêt récent, les preuves sans mots sont loin d'être nouvelles : on en recense de nombreuses provenant de la Chine, de l'Inde ancienne, de la culture arabo-islamique du Moyen-Age et de l'Italie de la Renaissance. Comme pour une démonstration « classique », des connaissances préalables sont supposées du lecteur ; certaines preuves sans mots sont loin d'être évidentes et il faudra plus de quelques secondes pour comprendre et se convaincre de la validité du raisonnement. Les preuves sans mots peuvent présenter l'avantage d'être plus éclairantes qu'une démonstration « habituelle » et de mieux « montrer » le résultat. Une illustration de cet intérêt est donnée ci-dessous avec deux façons de démontrer la formule de la somme des carrés des entiers naturels :

Démonstration « rigoureuse »	Preuve sans mots
<p>Montrons que la proposition $P(n)$: « $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3} \times n(n+1)(n + \frac{1}{2})$ » est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. $P(0)$ est vraie. Supposons que $P(M)$ est vraie pour $M \in \mathbb{N}$ et étudions $P(M+1)$:</p> $P(M+1) = 1^2 + 2^2 + \dots + M^2 + (M+1)^2$ $= \frac{1}{3} \times M(M+1)(M + \frac{1}{2}) + (M+1)^2$ <p>(par hypothèse $P(M)$ est vraie) $P(M+1) = \frac{1}{3} \times (M+1)(M+2)(M + \frac{3}{2})$ (en factorisant puis en transformant l'expression.) On obtient la formule cherchée pour $M+1$. Donc, en raisonnant par récurrence, la proposition P est vraie pour tout entier naturel.</p>	 <p style="text-align: center;"><i>Man-Keung Siu (1984)</i></p>

Dans cet exemple, la démonstration rigoureuse ne permet pas de comprendre la formule, l'emploi du raisonnement par récurrence convainc le lecteur (elle est vraie au rang 0 et la vérité du rang n entraîne celle du rang suivant) sans lui permettre d'apprécier « pourquoi »

cette égalité est vraie. A l'inverse, comme la preuve sans mots suggère visuellement l'égalité, le lecteur a le sentiment de mieux saisir ce qu'il se passe.

Cependant les preuves textuelles sont des outils puissants et généraux que les preuves sans mots ne pourront pas détrôner. Lorsqu'une preuve avec mots est parfaitement décrite, aucune intelligence n'est nécessaire pour la comprendre : il suffit de suivre les pas de raisonnement en vérifiant leur validité. On pourrait avancer la critique qu'une preuve ne pourra jamais être « parfaitement décrite », mais il s'agit là de questions de limitation en logique qui dépassent le cadre de ce mémoire. Les preuves textuelles ont une portée générale et formelle, contrairement aux preuves sans mots qui certes présentent l'avantage de s'aligner avec notre vision mais peuvent également véhiculer les biais.

Ainsi, et selon Brown (1999), « Les mathématiciens, comme nous tous, chérissent les idées astucieuses ; en particulier, ils se délectent devant une figure ingénieuse. Mais cette appréciation ne va pas sans un scepticisme affirmé. [...] [Les figures] sont psychologiquement suggestives et pédagogiquement importantes, mais elles ne prouvent rien ». Utiliser des bases précises et formelles pour la rédaction de preuves est nécessaire et est le moyen le plus solide pour avancer rigoureusement en mathématiques. Pour autant, les preuves sans mots présentent des atouts non négligeables tels qu'un ancrage visuel, un ressenti différent, et une aide à la mémorisation. Ce sont de précieuses aides en didactique des mathématiques.

1.6. Conclusion

Quelle que soit la communauté considérée, la démonstration reste un moyen d'établir et de communiquer une vérité. Pour cela il est nécessaire de s'appuyer sur des prémisses que l'on sait vraies (axiomes, résultats déjà démontrés) en effectuant des raisonnements considérés comme valides. C'est sur ce dernier point que l'avis des communautés diverge, bien qu'elles s'accordent sur le fait qu'en aucun cas un raisonnement acceptable puisse aboutir à un résultat faux, certaines écoles mathématiques en favoriseront certains et en refuseront d'autres. À ce titre le caractère « éclairant » d'une preuve peut constituer un facteur important dans son acceptation puisqu'en plus d'en faciliter la compréhension, il peut également rendre compte de la démarche de recherche dont elle est issue. En effet il faut garder en tête que la preuve rédigée reste une reformulation et une sélection des éléments trouvés en phase de recherche, ce qui n'est pas forcément visible pour le lecteur et peut rendre obscur l'enchaînement de certaines étapes. Dans cette optique l'utilisation de schémas est très pertinente, à condition toutefois de rester conscient des limites qui y sont liées.

2. Documents ressources et manuels

Après avoir pris connaissance des différents aspects liés à son acceptation, il nous faut à présent essayer de déterminer lesquels retranscrire dans nos classes et par quels moyens. Pour ce faire, nous étudierons dans un premier temps des documents d'accompagnements en lien avec l'enseignement de la démonstration afin d'examiner ce qui est attendu à l'issue du cycle 4 et en seconde. Puis nous examinerons quelques manuels scolaires : ceux-ci étant au contact de l'élève tout au long de l'année, ils peuvent influencer ses conceptions, il est donc important d'en tenir compte.

2.1. Cycle 4

Étant l'activité principale du mathématicien, il n'est pas étonnant de constater que la démonstration puisse être mise en lien, de près ou de loin, avec l'ensemble des six compétences mises en avant au cycle 4 et au lycée. C'est cependant dans la ressource décrivant la compétence « Raisonner »⁵, qu'elle est le plus développée, elle y est dès la première page ainsi définie : « démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion », suite à quoi il est rappelé que démontrer, c'est « donner à voir les différentes étapes d'une preuve par la présentation, rédigée sous forme déductive, des liens logiques qui la sous-tendent ».

Le lien avec la compétence « communiquer » est apparent puisque la nécessité d'un texte de démonstration apparaît naturellement dès lors que l'élève veut partager sa solution. Bien qu'une rigueur syntaxique soit de mise pour bien se faire comprendre lorsque l'on rédige une démonstration, il est conseillé de ne pas exiger un modèle de rédaction standardisée (comme le « On sait que...Or...Donc ») qui peut induire de la part des élèves un comportement relevant davantage de l'imitation que de l'appropriation et de la compréhension. La production d'un texte de démonstration restant compliquée à ce niveau, il est précisé qu'il est important de valoriser les traces de recherche comme les schémas, les calculs ou les raisonnements permettant d'aboutir à la rédaction.

De plus, si l'utilisation d'outils de représentation logiciels (de géométrie, de calcul, de simulation, de programmation) reste un support au raisonnement favorisant la formulation de conjectures, leur caractère incertain doit être souligné. Comme précisé en 1.5, bien qu'une illustration constitue une image mentale pertinente, elle ne tient pas lieu de démonstration. Dans une démarche d'investigation, l'élève devra (seul ou en groupe), notamment dans l'exercice de la compétence « chercher » : s'approprier le problème, confronter ses savoirs

⁵Eduscol(2016)

disponibles, élaborer éventuellement des expérimentations, émettre des hypothèses, faire des essais et choisir des directions. Il devra également confronter et argumenter ses idées, les justifier, valider ou rejeter ses propositions et celles de ses camarades. Les situations doivent donc proposer à la fois des temps de recherche et d'expérimentation, des temps de mise en commun et d'argumentation et des temps de démonstrations rédigées. Les problèmes ouverts où la solution est accessible par plusieurs modes de raisonnement sollicitent la curiosité de l'élève, motivent sa recherche et sont donc particulièrement intéressants.

La distinction entre phase de recherche et de production d'une preuve se retrouve également au niveau des raisonnements employés dans chacune d'elles. En effet pendant la recherche les raisonnements abductifs (raisonnement partant du résultat et visant à déterminer des conditions suffisantes à sa vérification) et inductifs (généralisation d'une propriété observée sur des cas particuliers) sont privilégiés tandis que la démonstration en tant que telle ne fait appel qu'au raisonnement déductif (*modus ponens*, disjonction de cas, raisonnement par l'absurde). L'enseignant se trouve donc dans la délicate posture où il doit à la fois entraîner ses élèves dans des raisonnements inductifs, en phase de recherche ; pour ensuite les refuser et apprendre aux élèves à les remplacer par un raisonnement déductif dans les « démonstrations formalisées ». Pour l'élève, la difficulté est également double puisque qu'il doit à la fois passer d'un raisonnement inductif à un raisonnement déductif, puis mettre en forme ce raisonnement déductif.

2.2. Lycée

« Effectuer des inférences (inductives, déductives) pour obtenir de nouveaux résultats, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture, prendre une décision. » est un des points de la compétence « Raisonner »⁶ à développer au lycée.

Tout au long du lycée, les capacités d'argumentation, de rédaction d'une démonstration et de logique font partie intégrante des exigences. Ces concepts et méthodes ne font pas l'objet de cours spécifiques et prennent leur place tout au long du programme. Il s'agit de profiter des questions et des erreurs des élèves pour faire émerger et approfondir les notions de logique.

En particulier, les élèves sont entraînés :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et » et « ou », à utiliser à bon escient les quantificateurs universels et à savoir repérer les quantificateurs implicites de certaines propositions.

⁶Educol (2009)

- à distinguer dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ; à utiliser les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante ».
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ; à reconnaître et à utiliser le raisonnement par disjonction des cas, le recours à la contraposée, le raisonnement par l'absurde.

A l'issue de la seconde, l'élève doit avoir travaillé sur l'argumentation et la logique, afin de savoir distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant. Les notions de conditions nécessaires et suffisantes sont encore difficiles et il est préférable de les revoir sur des contenus déjà connus des élèves. Comme précisé dans la partie précédente, une partie des élèves de seconde savent conduire un raisonnement sans pour autant savoir le rédiger formellement, ainsi un des objectifs du travail au cours de cette année est de s'approprier notations et vocabulaire ce qui peut les aider dans cette tâche. En effet, en ce sens les documents d'accompagnement⁷ précisent : « Il est important de faire prendre conscience aux élèves de la nécessité et de l'intérêt de certaines explicitations, et de les amener progressivement à préciser leur démarche lorsqu'ils rédigent la solution d'un problème. Toutefois cette exigence, qui n'est pas une fin en soi, ne peut être prise en compte par les élèves que si on leur a laissé le temps de comprendre les concepts et de chercher : ainsi, l'écriture formalisée d'une démonstration ne prend du sens que lorsque les élèves ont bien compris les différents statuts d'un énoncé, la notion d'implication et qu'ils ont trouvé une piste pour la résolution. »

Ainsi si au cycle 4 la démonstration est abordée dans le cadre d'une phase de recherche suivie d'une communication des idées et des stratégies mises en place de manière non formelle, dès le lycée l'accent est davantage mis sur cette formalisation en vue de laquelle lui sont fournis de nombreux outils logiques.

2.3. Les démonstrations dans les manuels de seconde

Le but de cette analyse est de se donner un aperçu de la manière dont la démonstration peut être abordée au travers d'un manuel scolaire. Lors de ces lectures nous serons avant tout attentifs aux aspects de la preuve qui sont mis en valeur, en particulier à la présence ou l'absence de la phase de recherche. En effet, nous nous attendons principalement à des démonstrations sous forme de « produits » sans trace du processus de recherche associé comme semblait déjà le présumer A.Grothendieck (1983) : « Y-a-t-il un seul livre de classe,

⁷Eduscol (2009)

un seul manuel à l'usage des écoliers, lycéens, étudiants, voire même de "nos chercheurs", qui puisse donner au malheureux lecteur la moindre idée de ce que c'est que la recherche [...].»

2.3.1. Manuel Hyperbole, 2nde GT édité par Nathan

Dans le manuel Hyperbole, les liens logiques sont clairement explicités (si...alors, donc, si et seulement si, etc...) et sont d'ailleurs expliqués en début de manuel, illustrés par des exemples faisant intervenir situation réelle et géométrie. En revanche, aucun des deux manuels ne présente les types de raisonnements utilisés, qui sont majoritairement des disjonctions de cas : la présentation (colonnes, tirets) en suggère la démarche (peut-être uniquement au lecteur initié ?) mais elle n'est ni nommée, ni expliquée. Les thèmes où elles apparaissent le plus fréquemment sont ceux de la géométrie (repérage dans le plan, vecteurs) et des fonctions de références (sens de variations, symétries) mais on peut aussi en trouver quelques-unes en trigonométrie ou en probabilités.

Ainsi, dans l'ouvrage Hyperbole, la preuve n'est visible que sous sa forme de « produit fini », et après avoir feuilleté quelques autres manuels, il semblerait que cette présentation soit une tendance générale, à quelques variations près (par exemple dans Indice 2nde, les raisonnements proposés sont indiqués dans la marge et plus variés). D'autre part, on remarque que si le cadre géométrique reste très propice à la mise en œuvre de démonstrations, ce n'est assurément pas au détriment des autres thèmes qui semblent largement exploités, mais toujours de la même manière (proposition puis preuve rédigée). Bien qu'il soit souhaitable que l'élève ait un aperçu de ce vers quoi sa production doit tendre, il serait également appréciable qu'il puisse se faire une idée du processus de construction de cette dernière. Il incombe donc entièrement à l'enseignant la tâche de mettre en évidence le caractère heuristique, voire parfois erratique de la production d'une démonstration.

2.3.2. Mathématiques 2nde (E.Barbazo), édité par Hachette

Cet ouvrage présente des méthodes pour chaque chapitre, par exemple nous pouvons trouver les « méthodes » suivantes dans la partie Géométrie : « Connaître des démonstrations clés », « Utiliser des vecteurs pour démontrer », « Démontrer que deux droites sont non coplanaires ». Ces intitulés bien qu'obscurs permettent aux élèves de voir que la démonstration est utile à la résolution d'exercices, mais entretiennent le flou autour de la démonstration : s'agit-il donc d'une méthode de résolution ? Dans ce cas comment la différencier d'une autre méthode ?

2.3.3. Manuel Sésamaths, 2nde GT édité par Magnard

Dans l'ouvrage Sesamaths, les « Preuves » apparaissent principalement de deux façons : en « Activité » ou « TP » ; et à la suite du cours, pour démontrer une propriété.

Dans le premier cas, la phase de recherche et d'heuristique est soulignée ; le texte de démonstration apparaît comme une façon convaincante pour tous d'expliquer les résultats des phases de recherche.

TP 3 Le long d'un quart de cercle

1 Conjecture

Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.

- 1) Placer trois points A , B et C tel que ABC soit rectangle isocèle en A . Tracer le petit arc de cercle de centre A d'extrémités B et C . Le point M est un point libre sur cet arc. Placer le point N , pied de la perpendiculaire à (AB) passant par M ainsi que le point P , pied de la perpendiculaire à (AC) passant par M .
- 2) Conjecturer la position du point M pour laquelle l'aire du rectangle $ANMP$ est maximale.

2 Affinage

Dans le repère $(A; B, C)$, on note x la longueur AN et $f(x)$ l'aire du rectangle $ANMP$.

- 1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
- 2) Sur la figure, créer un point R dont l'abscisse est égale à la longueur AN et dont l'ordonnée est égale à l'aire du rectangle $ANMP$. Sur quel objet géométrique se déplace le point R ?
- 3) Dresser alors le tableau des variations de la fonction f et faire une conjecture en utilisant la précision permise par le logiciel.

3 Démonstration

- 1) Exprimer la distance NM en fonction de x . En déduire une expression de $f(x)$.
- 2) Montrer que $f(x) = \sqrt{x^2(1-x^2)}$. En déduire que $f(x) = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}$.
- 3) Expliquer pourquoi $f(x)$ est maximal lorsque $x^2 = \frac{1}{2}$. En déduire la réponse au problème et comparer avec les conjectures précédentes.

La démonstration en "TP" - Sesamaths 2nde

Dans le second cas, ces preuves sont généralement les plus courtes possibles pour une meilleure lisibilité de la partie « cours » du manuel, comme l'illustre l'exemple suivant :

PREUVE Soit A , B et M de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$ et $(x_M; y_M)$ dans un repère $(O; I, J)$ tels que $\vec{OM} = \vec{AB}$ et $OMBA$ est un parallélogramme.

Donc $[AM]$ et $[OB]$ ont même milieu.

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_M}{2} = \frac{x_B + x_O}{2} \\ \frac{y_A + y_M}{2} = \frac{y_B + y_O}{2} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_A + x_M = x_B \\ y_A + y_M = y_B \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_M = x_B - x_A \\ y_M = y_B - y_A \end{cases}$$

Une démonstration du calcul des coordonnées du vecteur \vec{AB} - Sesamaths 2nde

Conclusion

Si les documents officiels s'attachent à retransmettre la plupart des aspects dont nous avons parlé en première partie, nous constatons que les manuels de seconde, bien qu'ils soient en accord avec le programme dans le sens où ils reprennent les points de logiques utiles à l'élaboration d'une démonstration, auraient plutôt tendance à véhiculer des biais de conception que de contribuer à l'apprentissage de la preuve. En effet, à quelques exceptions près, les démonstrations sont présentées de la même manière dans tous les manuels: elles succèdent, dans le cadre d'un cours, à une proposition logique dont l'intitulé semble déjà présupposer la vérité (proposition, théorème), accompagnées lorsque cela est possible d'un dessin (doit-on d'ailleurs considérer qu'il fait partie de la preuve ?). Le côté « recherche » est ainsi totalement éludé : on sait ce à quoi on veut aboutir, il n'y a donc nul besoin de tester ou de conjecturer, la preuve est déroulée machinalement, en suivant pas à pas des étapes généralement facilement vérifiables sans toutefois que les raisons qui incitent à suivre ce cheminement soient apparentes. En présentant la démonstration de cette façon, les manuels transmettent l'idée fautive que les essais, erreurs et tentatives n'ont pas lieu d'être ou d'apparaître sur une copie ; qu'une démonstration est un texte « propre ». Cela suggère que ces étapes de tâtonnement, se font en cachette, qu'il n'y a rien à en apprendre, pas de façon de les travailler et donc de s'améliorer sur ces sujets. En effet, si ni le manuel, ni le professeur n'aborde ces questions ; l'élève sera tenté de penser qu'il s'agit là de quelque chose d'inné, immédiat, qu'on ne peut pas développer ou transmettre. Ainsi certains élèves pourront préférer ne même pas essayer de rédiger plutôt que de proposer quelque chose qui ne correspondrait pas aux attendus (selon eux). D'autres se sentiront désemparés devant de tels textes de preuve : comment est-on passé de la question posée à cet écrit ? Par où commencer ? Comment aborder le problème ? Le texte final de preuve ne répond pas à ces questions d'ordre méthodologique. Face à un tel manque, certains lycéens abandonneront avant même d'avoir commencé.

3. Problématique

Comme nous l'avons vu précédemment, par ses multiples facettes et par la manière dont elle est présentée dans les documents accessibles aux élèves, la démonstration peut être liée à différents problèmes de conceptions, lesquels pourront influencer non seulement sur la construction de la preuve par l'élève mais aussi influencer sur les critères qu'il utilise pour l'accepter. Nous nous attendons en particulier à ce que nos élèves aient une vision de la preuve conforme à celle présentée par les manuels : sous forme de « produit » et à peine conscients du « processus ». De plus, nos observations quotidiennes en classe nous font

constater chez l'élève une confiance aveugle en la figure, ainsi qu'une absence de remise en question vis-à-vis des raisonnements qui lui sont présentés.

Ainsi nos expériences en classe auront pour but de répondre aux questions suivantes : quelles sont les conceptions des élèves vis-à-vis de la démonstration ? Sur quels critères se basent-ils pour accepter ou rejeter une démonstration ? Précisons que les expérimentations auront lieu dans trois classes (A, B et C).

4. Expérimentations en seconde

4.1. Questionnaire

Nous avons construit ce questionnaire avec deux objectifs en tête. Le premier d'entre eux est de lui donner un rôle formatif, dans le sens où il devrait nous permettre de prendre conscience, au vu des réponses, des conceptions possibles relatives à la démonstration chez nos élèves, et dans une moindre mesure de les affiner lors du débat qui suivra. Nous détaillerons ici pour chaque question quel aspect de la démonstration est mis en jeu et les conceptions auxquelles nous nous attendons, ainsi que d'éventuels éléments de correction (qui sera réalisée par la suite en classe sous forme de débat). Concernant le deuxième objectif, il s'agit de permettre aux élèves d'exercer une première brève réflexion sur des textes mathématiques simples afin de préparer l'analyse de leurs propres productions sur la situation de recherche qui suivra.

4.1.1. Présentation des questions

Le questionnaire sera distribué et rempli en fin de séance, après avoir brièvement exposé oralement aux élèves ce qui est attendu d'eux : lire chaque encadré et dire si son contenu peut être accepté comme une démonstration. Le temps prévu pour cette partie est de 15 à 20 minutes. Par la suite, nous sélectionnerons quelques réponses à projeter au tableau afin d'alimenter un débat relatif à chaque question lors d'une séance qui suivra.

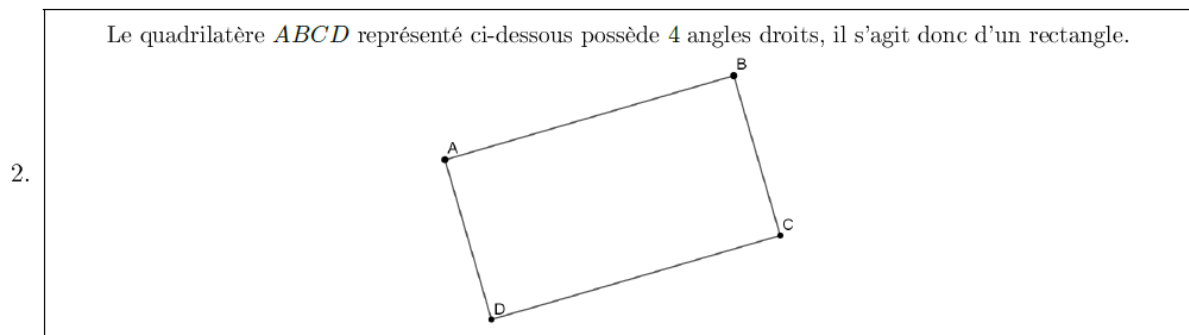
1.

$2x + 1 = 0$
$2x = -1$
$x = -\frac{1}{2}$

La finalité est ici de signaler l'omniprésence de la démonstration dans la pratique mathématique quotidienne. En effet, cet aspect est souvent masqué par l'intitulé "démonstration" ou "preuve" visible dans le cours ou les manuels suite à certaines propositions, ce qui pourrait sous-entendre que l'on n'en fait pas le reste du temps. Des réponses du type « Ce n'est pas une démonstration car une démonstration est un texte » ou

« Ce n'est pas une démonstration car les démonstrations sont en géométrie » peuvent également ressortir.

Nous nous attendons dès lors à ce que l'élève n'identifie pas ce passage comme étant une démonstration, un moyen de remédier à cela serait de lui faire convenir que l'on peut bien conclure, malgré l'absence de lien logique, que "si x vérifie l'équation, alors $x = -\frac{1}{2}$ (et réciproquement) ".



Nous souhaitons aborder ici l'une des confusions les plus fréquentes, ou en tout cas la plus apparente sur les copies : la tendance à tirer des conclusions fondées sur l'allure d'une figure. Nous souhaitons que les élèves soulignent le manque de cohérence entre le texte, qui précise les 4 angles droits, et le schéma sans codage. L'idée sera donc de rappeler une fois de plus qu'un dessin sans codage, aussi précis soit-il, ne saurait constituer une preuve bien qu'il soit nécessaire de savoir l'interpréter pour avoir une intuition de la situation.

3.

La somme de deux nombres impairs est un nombre pair.
En effet si on considère deux entiers impairs m et n , on peut les écrire sous la forme :

$$m = 2a + 1 \quad \text{et} \quad n = 2b + 1 \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des entiers naturels.}$$

Ainsi : $m + n = 2a + 1 + 2b + 1 = 2a + 2b + 2 = 2(a + b + 1)$

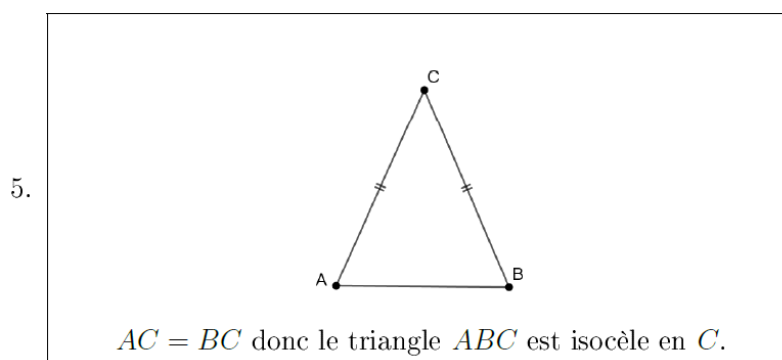
$m + n$ est donc bien un nombre pair.

Cette question présente une démonstration "classique", sous forme de « produit » réalisée dans le cadre arithmétique. Il s'agit donc de vérifier si ce type de présentation a réellement tendance à être associé à une preuve par l'élève. Nous craignons toutefois que le raisonnement présenté ne soit pas compris par tous, ce qui constituerait un obstacle à la vérification de cette hypothèse. Certains élèves pourront avancer, avec raison, qu'il faudrait préciser que $a+b+1$ est encore un nombre entier avant de pouvoir conclure.

4. On appelle fonction affine toute fonction f dont l'expression algébrique s'écrit sous la forme :
 $f(x) = ax + b$ où a et b sont des nombres réels.

L'intérêt ici est d'attirer l'attention sur le statut de l'énoncé (sans nécessairement le formuler comme tel) lors de la correction: une définition ne constitue pas une démonstration (bien qu'elle y intervienne souvent), pas plus qu'elle ne nécessite, par sa nature, d'être prouvée.

Difficile pour cette question d'envisager une tendance particulière dans les réponses, d'un côté on peut se dire que l'élève saura reconnaître la définition et donc rejettera l'idée d'une démonstration, de l'autre le caractère rarement explicité de ces statuts peut facilement mener à des confusions, la justification de l'élève sera donc primordiale pour juger de son interprétation.



Cette question est à mettre en lien avec la question 2, elle met en avant l'importance du codage qui a valeur de vérité et non d'observation, ce qui permet cette fois-ci de tirer des conclusions quant à la nature du triangle. Concernant les réponses, nous pouvons nous attendre à deux possibilités: soit l'élève passe à côté de la subtilité du codage, soit il en a conscience, il accepte dans les deux cas la démonstration, il faudra donc encore une fois s'en remettre à la justification pour cerner son raisonnement.

On se demande si la moyenne \bar{x} d'une série statistique est toujours comprise entre Q_1 et Q_3 .
 Pour déterminer cela voyons ce qu'il en est sur la série suivante :

Valeurs	-1	0	1
Effectifs	4	10	6

Après calculs, on trouve : $\bar{x} = 0.5$, $Q_1 = 0$, $Q_3 = 1$. Donc ici on a bien : $Q_1 < \bar{x} < Q_3$.
 Mais est-ce toujours le cas ?

6. Essayons de faire baisser la moyenne en diminuant la première valeur de la série tout en ne faisant pas varier les effectifs pour ne pas déplacer les quartiles :

Valeurs	-10	0	1
Effectifs	4	10	6

Cette fois, on obtient : $\bar{x} = -1,7$, $Q_1 = 0$, $Q_3 = 1$ et donc $\bar{x} < Q_1 < Q_3$.

Ainsi quelle que soit la série statistique qu'on étudie, sa moyenne n'est pas toujours comprise entre Q_1 et Q_3 .

En plus de présenter une démonstration sous forme de contre-exemple dans le cadre statistique, ce raisonnement a l'avantage de ne pas dissimuler l'aspect heuristique présent dans la construction dudit contre-exemple. L'enjeu est donc ici de déterminer si une preuve présentant un "échec" (avec la première série statistique) et un raisonnement basé sur celui-ci est identifié comme une démonstration ou pas. Bien que la présence de la première série statistique soit superflue dans la démonstration du résultat, c'est ici un moyen de mettre en valeur la nécessité du processus de recherche.

7. Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu, dont les côtés opposés sont deux à deux égaux et parallèles et possédant quatre angles droits est un rectangle.

Nous avons introduit ici un simulacre de démonstration présentant une affirmation tout à fait vraie, bien que certaines prémisses soient inutiles. On peut donc s'attendre à ce qu'elle soit majoritairement acceptée, la difficulté sera ici de faire comprendre que rien n'a été démontré en dépit de la vérité de l'affirmation.

4.1.2. Déroulement et analyse a posteriori

Séance n°1

Le questionnaire est rempli de manière individuelle en fin de séance en une durée de 15 à 20 minutes selon les élèves. La plupart d'entre eux ont « joué le jeu », le fait que leur copie soit ramassée, bien que non notée, est un levier de motivation efficace. Pour certaines classes, les réponses auraient certainement été plus fournies si l'activité avait été réalisée en début d'heure.

Séance n°2

L'heure entière est accordée à la discussion autour de l'acceptation de chaque encadré. Ce format est peut-être un peu long : pour les dernières questions, les élèves commencent à s'ennuyer et le débat est relancé fréquemment par le professeur. On pourrait envisager de diviser cette séance en deux pour un débat plus riche. Les élèves semblent cependant apprécier cette activité différente de d'habitude et donnent leur avis avec entrain. Le fait que le débat soit alimenté par leurs productions projetées au tableau est particulièrement positif pour les élèves. Le bilan de la séance n'est pas réalisé par les élèves, contrairement à ce que nous avons prévu. Le professeur écrit au tableau quelques phrases, que les élèves notent dans le cahier de cours.

Résultats généraux :

Voici un tableau récapitulant les réponses des élèves sur les trois classes, allant de 69 à 74 réponses comptabilisées par question. Certains élèves ayant parfois coché les deux cases, ou aucune, nous précisons le nombre de réponses dans la dernière colonne.

Question	Acceptable	Non acceptable	Nombre de réponses comptabilisables
1	50	24	74
2	22	50	72
3	41	30	71
4	53	16	69
5	58	15	73
6	42	27	69
7	49	22	71

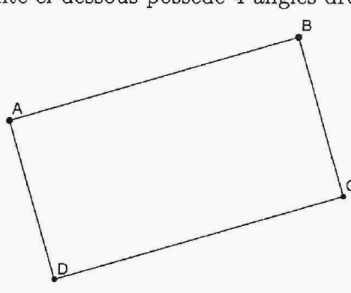
Il semblerait donc que seule la question 2 ne soit pas majoritairement considérée comme « acceptable ». Nous allons à présent examiner les raisons qui ont pu conduire à ces réponses au travers des justifications écrites et des avis qui sont ressortis en classe. À noter que certains élèves ont coché la case « non acceptable » lorsqu'ils ne comprenaient pas le contenu de l'encadré. Il est également intéressant de remarquer qu'une même justification peut inciter les élèves à cocher des cases différentes.

Question n°1

1.	$2x + 1 = 0$ $2x = -1$ $x = -\frac{1}{2}$
	<input type="checkbox"/> Acceptable <input checked="" type="checkbox"/> Non acceptable
	Justification : <i>il n'y a pas de conclusion</i>

La première question est presque unanimement considérée comme acceptable par la classe. Le fait qu'il n'y ait pas de texte ne semble pas déranger la majorité des élèves pour l'accepter comme une démonstration. Selon certains élèves, « toutes les étapes sont montrées », selon d'autres il faudrait davantage justifier les calculs. Nous nous mettons alors d'accord sur le fait que l'acceptation du lecteur pourra dépendre de son « niveau mathématique », effectivement un élève peu entraîné à la résolution d'équation ne pourra pas comprendre ce qui est fait sans davantage de détails. Quelques-uns considèrent qu'il manque quand même une phrase de conclusion, un élève semble même considérer que cela manque de contexte. D'autres plus rares soutiennent que puisqu'il s'agit « juste » d'une résolution d'équation, on ne peut pas raisonnablement considérer qu'il s'agit d'une démonstration. Ces élèves acceptent cependant le fait que les calculs effectués montrent que « si x vérifie l'équation, alors $x=1/2$ », et réciproquement si l'on raisonne par équivalence. Aucun élève ne relève cependant l'absence de lien logique qu'il aurait été souhaitable de préciser.

Question n°2

Le quadrilatère $ABCD$ représenté ci-dessous possède 4 angles droits, il s'agit donc d'un rectangle.	
2.	
	<input checked="" type="checkbox"/> Acceptable <input checked="" type="checkbox"/> Non acceptable
	Justification : <i>Car il peut être un carré</i>

Cette question génère un gros débat dans la classe C : certains soutiennent que « le texte est le plus important et le texte dit que le quadrilatère possède 4 angles droits, c'est donc bien un rectangle ». Enfin, quelques-uns notent l'absence de codage de la figure.

Dans les classes A et B, un élève remarque directement que la figure n'est pas codée, la quasi-totalité des élèves se range alors de son côté et opte pour « Non acceptable ». Dans les trois classes, quelques élèves ont du mal à accepter le fait que par définition, un carré est un rectangle.

Nous arrivons à la conclusion qu'un schéma ne constitue pas une démonstration, bien qu'il puisse aider à la construire et à la comprendre. Il semblerait qu'il y ait ici une ambiguïté involontaire entre le texte et la figure, il aurait été préférable de commencer la phrase par « D'après la figure-ci-dessous », ce qui aurait souligné le fait que celle-ci s'appuie entièrement sur le dessin.

Question n°3

3.	<p>La somme de deux nombres impairs est un nombre pair. En effet si on considère deux entiers impairs m et n, on peut les écrire sous la forme :</p> $m = 2a + 1 \quad \text{et} \quad n = 2b + 1 \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des entiers naturels.}$ <p>Ainsi : $m + n = 2a + 1 + 2b + 1 = 2a + 2b + 2 = 2(a + b + 1)$</p> <p>$m + n$ est donc bien un nombre pair.</p> <p style="text-align: center;"> <input type="checkbox"/> Acceptable <input checked="" type="checkbox"/> Non acceptable </p> <p>Justification : <i>il faut donner un exemple avec des vrai chiffre et expliquer plus facilement.</i></p>
----	--

Cette affirmation génère peu de débat, personne ne s'oppose oralement à l'acceptation de cet encadré. Certains élèves arguent qu'un exemple aurait été nécessaire pour « mieux comprendre », ce qui est un point de vue qui est souvent revenu dans d'autres questions et que nous n'avions pas anticipé. En effet dans le cadre d'un cours un exemple est souvent utile pour concrétiser un énoncé (définition, proposition) trop abstrait. Nous pouvons également retrouver ce rôle dans des logiques non mathématiques, comme en philosophie où l'exemple vient illustrer et soutenir un argument. Cependant une telle utilisation de l'exemple n'est pas souhaitable dans une démonstration puisqu'en tant qu'explication, elle ne permet pas d'influer sur la vérité du résultat et est donc superflue. En revanche il est important de souligner l'importance du contre-exemple dont le rôle est différent puisqu'il vient contredire une assertion, démontrant ainsi qu'elle est fausse. Nous aurions pu également envisager le cas de l'exemple générique, pour lequel un même raisonnement permet de conclure sur tous les autres cas possibles, néanmoins il ne semble pas très pertinent sur cette question.

Question n°4

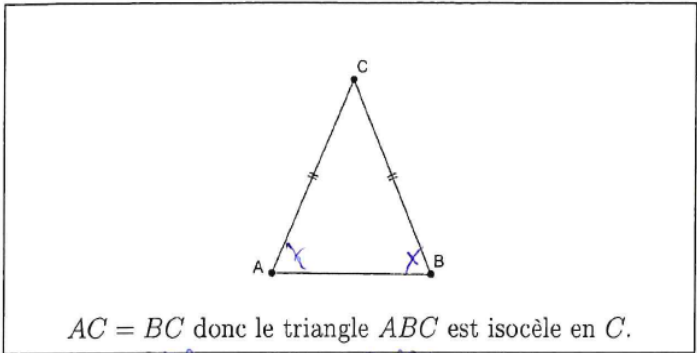
4. On appelle fonction affine toute fonction f dont l'expression algébrique s'écrit sous la forme :
 $f(x) = ax + b$ où a et b sont des nombres réels.

Cette question génère également peu de débat, dans les trois classes, les élèves considèrent ce texte comme une démonstration acceptable car nous avons vu en cours qu'une telle fonction est communément appelée « fonction affine », l'encadré est alors accepté car vrai dans une logique lexicale, sans réellement se demander s'il s'agit d'une démonstration ou non. Le professeur leur demande donc d'expliquer ce qui est démontré dans ce texte.

La différence entre une définition et une démonstration est mise en évidence. Dans une démonstration, on part de choses connues pour arriver grâce au raisonnement à des propositions qu'on ne savait pas vraies alors que dans une définition, on se contente généralement de nommer un objet.

Question n°5

5.



Acceptable Non acceptable

$AC = BC$ donc le triangle ABC est isocèle en C .

Justification : ... *si* ... *aurait* ... *fallait* ... *dire* ... *auss* ... *que* ... \hat{A} ... *et* ... \hat{B} ... *sont* ...
... *égaux* ... *si* ... $AC = BC$... *juste* ... *car* ... *donc* ... $\hat{A} = \hat{B}$...

Cette question fait rapidement écho à la question 2 et la présence de codage sur la figure est remarquée. Pourtant dans la classe C, le débat tourne en rond et les élèves ne se sentent pas capables de justifier si ce texte est acceptable en tant que démonstration ou non. Ceci peut être expliqué par la crainte d'un nouveau « piège » : beaucoup s'étaient positionnés avec conviction pour la question 2, et se sont trompés. Dans les classes A et B, la présence du codage signalant l'égalité des côtés AC et BC convainc de la validité du raisonnement. Nous observons que dans quelques copies il est considéré comme nécessaire de démontrer l'égalité des angles en plus des côtés.

Question n°6

On se demande si la moyenne \bar{x} d'une série statistique est toujours comprise entre Q_1 et Q_3 .
Pour déterminer cela voyons ce qu'il en est sur la série suivante :

Valeurs	-1	0	1
Effectifs	4	10	6

Après calculs, on trouve : $\bar{x} = 0.5$, $Q_1 = 0$, $Q_3 = 1$. Donc ici on a bien : $Q_1 < \bar{x} < Q_3$.
Mais est-ce toujours le cas ?

6. Essayons de faire baisser la moyenne en diminuant la première valeur de la série tout en ne faisant pas varier les effectifs pour ne pas déplacer les quartiles :

Valeurs	-10	0	1
Effectifs	4	10	6

Cette fois, on obtient : $\bar{x} = -1,7$, $Q_1 = 0$, $Q_3 = 1$ et donc $\bar{x} < Q_1 < Q_3$.

Ainsi quelle que soit la série statistique qu'on étudie, sa moyenne n'est pas toujours comprise entre Q_1 et Q_3 .

Acceptable Non acceptable

Justification : *il faut faire avec \bar{x}*

Sur cette question, les avis sont divisés. Certains notent la présence d'un « exemple inutile », ce qui justifierait de le considérer comme « non acceptable », possiblement en lien avec ce qui a été dit sur les questions précédentes. D'autres expliquent qu'on ne peut rien démontrer avec des exemples, il est alors nécessaire d'orienter la discussion vers le contre-exemple. Beaucoup se refusent à accepter l'encadré car il manque les calculs des moyennes et des quartiles. Nous revenons alors sur le fait que cela peut dépendre du niveau auquel on se place : on peut considérer ou pas que les calculs sont vérifiables par le lecteur. D'autre part le professeur ajoute que les calculs auraient considérablement rallongé la preuve ce qui ne l'aurait pas forcément rendue plus digeste, les élèves paraissent sensibles à cet argument.

Dans la classe C, le débat n'avance plus sans l'intervention du professeur qui reprend le texte en insistant sur les quantificateurs (« on se demande si la moyenne [...] est toujours [...], et il trouve une série statistique dont la moyenne n'est pas [...]). Le professeur montre aussi que le premier exemple, qui ne contredit pas l'affirmation, ne remet pas en cause la validité du raisonnement.

Nous précisons finalement que ce que les élèves ont vu comme un « exemple inutile » a servi de base à la construction du contre-exemple et renseigne le lecteur sur sa provenance, bien qu'il soit effectivement superflu dans la mesure où la seule présentation du contre-exemple suffit à prouver que la moyenne peut sortir de l'intervalle interquartile.

Question n°7

7. Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu, dont les côtés opposés sont deux à deux égaux et parallèles et possédant quatre angles droits est un rectangle.

Acceptable Non acceptable

Justification : ... elle ... est ... l'ém ... mais ... en ... je ... longue ...
.....
.....

Sur cette question, les avis sont également divisés. Dans les classes A et B, certains jugent le texte comme une démonstration acceptable, d'autres se rappellent de la question 4 et estiment que rien n'est démontré dans ce texte, et concluent qu'il s'agit donc encore une fois d'une définition. Il est alors fait la distinction entre définition et proposition, un élève remarque que certaines hypothèses sont inutiles.

Dans la classe C, les élèves expliquent que cette phrase est vraie, bien que sa réciproque ne le soit pas (il n'est pas nécessaire de démontrer toutes ces propriétés du quadrilatère pour conclure qu'il s'agit d'un rectangle). Le professeur souligne la redondance des hypothèses.

Conclusion

Contrairement à ce que nous pensions, les élèves semblent pour la plupart conscients de l'omniprésence de la démonstration en mathématique ainsi que de l'importance du codage (bien qu'ils aient souvent tendance à oublier ce dernier point). Ils ont cependant eu dans un premier temps des difficultés à dissocier démonstration et vérité. En effet si démontrer permet d'établir une vérité, ce n'est pas parce qu'une assertion est vraie qu'il s'agit d'une démonstration. Néanmoins, certains ont pris conscience de la distinction et l'ont montré à la question 7. Le point le plus surprenant qu'a fait ressortir ce questionnaire est l'abondante demande d'exemples. Il semblerait que pour beaucoup, puisque la démonstration a pour but de convaincre son lecteur d'une vérité, elle se doive de le faire de la manière la plus compréhensible possible. Or en mathématiques la présentation d'un exemple peut parfois apparaître comme salutaire pour comprendre certains énoncés, d'où l'idée d'en introduire dans les passages paraissant trop abstraits afin d'aider le lecteur. Néanmoins un tel ajout ne permettrait en aucun cas d'avancer dans le processus de démonstration et ne ferait qu'alourdir inutilement la preuve. Et comme l'ont montré plusieurs avis, le superflu ne semble pas être pour les élèves quelque chose de désirable dans une preuve, il faut donc bien quelque part que cela leur paraisse important pour être proposé aussi souvent.

4.2. Une situation de recherche pour la classe : la « Chasse à la bête »

Les situations de recherche pour la classe font intervenir des problèmes dont le questionnement initial nécessite peu de prérequis, et est donc facilement compréhensible. Elles présentent également d'autres avantages comme d'être accompagnées d'un support matériel aidant à développer la phase de recherche, favorisant ainsi l'essai de plusieurs stratégies. De plus il est possible de faire varier certains paramètres du problème, renvoyant à de nouvelles questions (potentiellement non résolues).

Ainsi, dans le but de faire produire un texte de démonstration à nos élèves, il nous a semblé pertinent de mettre en œuvre une situation ne nécessitant peu ou pas de connaissances mathématiques afin de favoriser leur investissement en phase de recherche. Il est également important de valoriser cette partie du travail pour montrer aux élèves que l'exploration d'idées, qui aboutissent ou non ; le tâtonnement ; les essais et les erreurs font partie intégrante de l'activité mathématique qui mène à la preuve. Par le biais de cette situation de recherche, nous souhaitons mettre en lumière cet aspect souvent oublié voire caché, mais incontournable, de la démonstration qui, comme nous l'avons vu, est peu abordée dans les manuels, où la démonstration est généralement directement présentée sous forme de « produit ».

Nous proposons donc à nos classes de seconde la « chasse à la bête », afin non seulement de montrer l'importance de la phase de recherche dans la démonstration d'un résultat mais aussi dans le but de mettre en évidence le fait que le texte de preuve est une sélection, une reformulation et une réorganisation des idées et raisonnements issus de la phase précédente.

4.2.1. Présentation et analyse a priori

La chasse à la bête est un problème d'optimisation dont un des intérêts est de permettre à des élèves de lycée de trouver par eux-mêmes la solution la moins coûteuse par expérimentation puis d'en prouver le caractère minimal. Certains de ces textes de démonstration seront ensuite analysés par l'ensemble de la classe.

Le problème présenté aux élèves est le suivant :

On veut protéger un territoire quadrillé (5×5) d'un nuage de bêtes qui veulent se poser. On dispose pour cela d'un grand nombre de pièges. Les bêtes comme les pièges se posent exactement sur les cases (et non en travers). Si une case est occupée par un piège, aucune bête ne peut se poser en couvrant la case.

Quel est le plus petit nombre de pièges qui protégera le territoire ?

Démontrer que ce nombre est bien minimal.

Il y a **deux problèmes distincts**, correspondant à deux sortes de bêtes (elles ne se mélangent pas !), à étudier dans l'ordre ci-dessous.

Problème 1 : avec les dominos

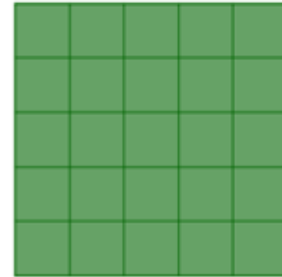
(Problème 2 : avec les triminos)



Pièges



Les deux types de bêtes



Le territoire

Il sera bien précisé oralement qu'un texte de démonstration concernant les bêtes en forme de dominos doit être rédigé et que le problème des triminos longs ne doit être considéré qu'à la fin, si le temps le permet.

Mise en œuvre

Cette partie de l'expérimentation se déroulera sur deux séances prévues de la manière suivante :

- Une première séance d'une heure, en classe dédoublée, où le problème sera exposé aux élèves qui seront ensuite divisés en groupes de trois ou quatre pour manipuler et chercher la solution durant une trentaine de minutes, puis produiront individuellement (classes A et B) ou en groupe (classe C) un texte de démonstration lors du temps restant. Ne disposant pas d'heure dédoublée, un de mes tuteurs s'est occupé d'un des demi-groupes pour les classes A et B.
- Une deuxième séance complète, cette fois-ci en classe entière, pour analyser deux textes de démonstration que nous aurons sélectionnés pour pouvoir en débattre (rédigés dans des styles différents, tant dans la forme que dans le raisonnement, il faudra de plus qu'au moins l'un d'entre eux présente un raisonnement invalide) et donner à nos élèves des idées de critères d'acceptation. La phase d'analyse durera une quinzaine de minutes et sera guidée par quelques questions, s'en suivront dix minutes de débat par copie, suite à quoi les élèves proposeront leur critères d'analyse.

Approches envisageables

Nous nous attendons à ce que, par la manipulation, tous les groupes aboutissent à une des deux solutions en damier possibles et considèrent intuitivement avoir trouvé la solution optimale sans pouvoir cependant le justifier correctement. Suite à cela, nous pouvons imaginer le développement et la rédaction de deux raisonnements possibles :

- **Raisonnement 1** : comme les bêtes sont de taille 2, il est nécessaire de ne pas laisser deux cases adjacentes inoccupées. Pour ce faire, la manière la plus « économique » serait de piéger une case sur deux, ce qui mène à seulement deux possibilités dont l'une coûte seulement 12 pièges et l'autre 13, ce qui fait de la première la solution optimale.
- **Raisonnement 2** : le nombre de piège minimal doit pouvoir protéger le champ quel que soit le nombre de bêtes, dans le pire des cas 12 bêtes occupent le champ, ce qui signifie que la solution optimale utilise au minimum 12 pièges (un par bête), or une solution de ce type a déjà été trouvée.

Le dernier raisonnement n'est pas immédiat puisqu'il nécessite de renverser le problème en passant d'une situation où l'on cherche à poser un minimum de pièges à une autre situation où il faudra cette fois occuper le champ avec un maximum de bêtes. Nous nous attendons donc à ce qu'il soit proposé plus rarement par les élèves.

Difficultés et aides possibles

Nous pensons qu'en tâtonnant chaque groupe aboutira assez rapidement à une des solutions possibles pour protéger le champ en piégeant une case sur deux en étant empiriquement convaincu qu'il n'en existe pas de moins coûteuse. Il faudra alors leur faire envisager la possibilité qu'ils n'aient pas été en mesure de la trouver et donc la nécessité de mettre en place un raisonnement prouvant qu'il est impossible de faire mieux.

L'argument « C'est la meilleure solution car si on enlève un piège, le champ n'est plus protégé » pourra être donné par les élèves. Il sera alors nécessaire de discuter avec eux de la validité de ce raisonnement, en questionnant l'existence d'un réarrangement avec moins de pièges.

Afin d'aider les élèves dans l'élaboration de leur raisonnement, le professeur pourra poser des questions du type : quelle serait une condition nécessaire pour qu'aucune bête ne puisse se poser sur le champ ? Quelles sont alors les possibilités de « pavages » respectant cette condition ? Ou encore : combien de bêtes peuvent se poser côte à côte sur le champ ?

Combien de pièges faut-il pour une bête ? En quoi cela nous permet-il d'avancer vers la résolution du problème ?

4.2.2. Déroulement et conclusions

Séance n°1

Les élèves sont enthousiasmés par le format différent de la séance et même les moins investis habituellement se mettent rapidement à la recherche de solutions. Comme prévu, les solutions en damiers sont vite trouvées, et comme prévu les élèves sont dès le départ convaincus qu'il s'agit de la solution la moins coûteuse (qu'ils aient trouvé celle à 12 ou à 13 pièges), il leur est alors demandé de le justifier. Avec un peu plus de recherche, la meilleure des deux apparaît au sein de chaque groupe (certains groupes convaincus par la solution en damiers à 13 pièges ont vu sur les autres tables la solution optimale à 12 pièges). La plupart des élèves discutent de la rédaction, d'autres préfèrent chercher des solutions au problème avec des triminos longs et trouvent des solutions sans parvenir à en justifier le caractère minimal.

La démonstration est rédigée en groupes dans la classe C et individuellement dans les classes A et B. Dans la classe C, ce moment est beaucoup plus laborieux : certains groupes se contentent de représenter les solutions et considèrent avoir répondu au problème ; tous les groupes pensent que la présentation de la solution en damiers est une justification suffisante pour répondre à la question. Aucun ne songe à expliquer pourquoi cette solution est optimale et pour beaucoup cela est évident et ne nécessite donc pas davantage d'explication. Sans l'intervention du professeur, raisonner sur le nombre de bêtes qui peuvent se poser sur le territoire n'est pas du tout envisagé par les élèves : en effet malgré la présence des pièces en forme de dominos, ils restent concentrés sur les pièges. En ce qui concerne les classes A et B, nous observons une divergence des raisonnements employés suivant les demi-groupes. Ceux suivis par le stagiaire favorisent le premier raisonnement et les autres, suivis par le tuteur, le deuxième. Ainsi dans ces classes, lors de l'analyse des productions, chaque élève réfléchira sur une copie qui correspondra à l'approche qu'il n'a pas empruntée.

La séance 1 met en lumière les conceptions erronées et les blocages suivants des élèves vis-à-vis de la démonstration :

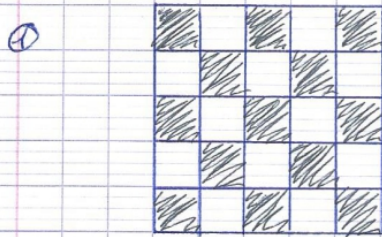
- Nombre d'entre eux considèrent dans un premier temps que dessiner la solution qu'ils tiennent pour optimale sans plus de justification est une réponse adéquate au problème : un schéma sans mots peut donc être une démonstration pour nos élèves, mais en l'occurrence ils ne réalisent pas qu'ici cela ne suffit pas à apporter une réponse acceptable.

- Si la majorité des élèves se lance avec plaisir dans la recherche de solutions, la rédaction de la preuve engendre beaucoup moins d'enthousiasme. Bien qu'ils aient tous trouvé les solutions, les élèves ne savent pas comment faire ni par où commencer. Le flou engendré par les multiples objectifs de la démonstration semble se transformer en blocage pour certains qui ne comprennent que trop confusément ce qui leur est demandé. Nous remarquons à ce sujet qu'un bon nombre de copies sont plus rédigées dans le style d'une narration de recherche que d'une démonstration : il s'agit parfois davantage de rendre compte de ce qui a été fait durant la phase de recherche plutôt que de réellement essayer de prouver que le nombre de pièges trouvé est minimal. Concernant le problème des triminos longs, quelques élèves proposent une solution à 8 pièges sans même tenter de prouver qu'il s'agit de la solution optimale (nous n'en reparlerons pas durant la séance suivante).

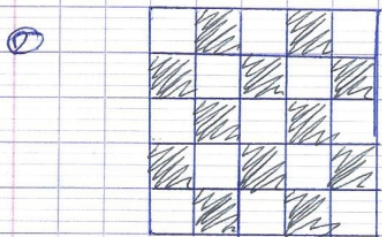
Séance n°2

Dans la classe C, les copies A (Fig.4) et B (Fig.5) sont présentées aux élèves. Le professeur lance le débat en faisant un sondage pour la copie qui est la plus réussie : la copie A l'emporte largement avec 14 voix contre 5 (on note cependant qu'un tiers de la classe n'a pas répondu). Dans les autres classes, d'autres copies similaires sont choisies afin que les élèves se concentrent davantage sur le document que sur la personne qui l'a rédigé.

Nous passerons 3 types de matériaux, un "territoire" ou il est possible de rentrer 25 carrés, des carrés assemblés par 2 petits carrés appelés "bêtes" et des carrés noirs appelés "piège". Les bêtes doivent se poser sur le territoire mais les pièges leur en empêchent. Comme une bête fait 2 carrés il faut placer un piège tout les 2 carrés du territoire en sachant qu'il faut utiliser le moins de pièges possible. Deux solutions s'offre a nous:



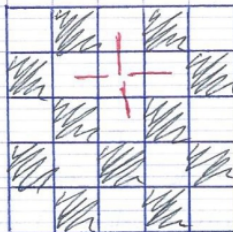
les carrés noirs sont les pièges nous voyons que nous avons posé 13 pièges, peut-on y arriver avec moins de pièges?



nous avons placé seulement 12 pièges. Peut-on faire encore moins?

Non car si nous enleveront un carré quelque soit sa place au moins une bête pourra se poser donc ce n'est pas possible d'enlever des carrés.

Exemple:



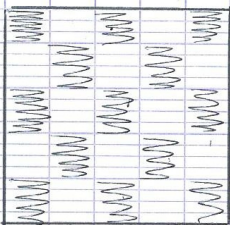
- = bête

Une bête aura déjà au moins 4 position.

Fig.4 : Copie A


Damiers

1^{ère} réflexion : Damier à 13 pièges
 N : nombre minimum de pièges ≤ 13



2^{ème} réflexion : Damier \rightarrow 12 pièges
 N : nombre minimum de pièges ≤ 12

Nous avons d'abord posé 2 pièges sur la 1^{ère} ligne au lieu de 3 pièges (1^{ère} solution).



Configuration : ~~les bêtes sont disposées sur le terrain~~
 Nous avons ^{au maximum} 12 bêtes qui peuvent rentrer sur le terrain donc il faut au minimum 12 pièges pour protéger le terrain.

Fig.5 : Copie B

Pour les élèves de la classe C, le fait que le texte A soit plus long que le B indique qu'il est meilleur. Ils soulignent également que « le sujet et le raisonnement sont bien expliqués ». Pour B, les élèves notent le manque de soin et l'absence d'introduction et d'explications. Dans les autres classes, la longueur apparaît plutôt comme un défaut, la clarté (schémas, fautes de français, introduction) reste cependant un critère important.

Dans la copie A, il y a une erreur de raisonnement : « si nous enlevons un carré quelle que soit sa place, au moins une bête pourra se poser, donc ce n'est pas possible d'enlever des carrés ». Aucun élève ne remarque cette erreur ; cependant une fois qu'elle est soulignée par le professeur, un élève explique pourquoi ce raisonnement est faux : « on peut appliquer ce raisonnement à la solution à 13 damiers et conclure que la solution à 13 damiers est la meilleure, ce qui est faux ». Cette explication convainc les élèves puisque la majorité considère maintenant que la copie B est la plus réussie, malgré le fait que le raisonnement final mériterait d'être complété.

À la question « quels sont pour vous les points importants d'une démonstration ? », les élèves proposent en premier lieu des réponses de l'ordre de : « expliquer ce qu'on cherche et ce qu'on fait », « rappeler l'énoncé en introduction », « faire un schéma », « pas de long texte ». Ce qui relève encore une fois davantage d'un contrôle de la clarté de l'explication que de la preuve d'une vérité. Toutefois avec un peu d'insistance, des propositions comme : « avoir un

bon raisonnement » ; « ne pas faire d'erreurs (de calcul) » ; « prouver l'objectif », finissent par être formulées, critères primant en fin de compte sur la longueur ou les explications pour les élèves puisque la copie A n'est plus la meilleure dès que son erreur de raisonnement est soulignée. Nous retrouvons également l'objectif principal de la preuve qui avait été perdu de vue par beaucoup : montrer qu'un résultat est vrai.

Conclusions

Si dans les communautés mathématiques considérées en première partie, les divergences en termes d'acceptation étaient essentiellement fondées sur l'acceptation ou le rejet de certains types de raisonnements selon leur caractère « éclairant » ou leur validité présumée, nous constatons que dans nos classes l'attention est plus portée sur la clarté du texte de démonstration en lui-même. Bien sûr la validité du raisonnement reste considérée comme une condition nécessaire à la production d'une démonstration, cependant lorsque nous avons présenté le raisonnement invalide de la copie A, aucun élève ne l'a spontanément remis en question. Or, dans la mesure où un raisonnement ne peut être reconnu comme invalide que dès lors que l'on remarque qu'il existe des cas où il conduit à des conclusions fausses, l'absence d'un tel réflexe conduit, comme nous l'avons vu, à une acceptation trop large.

Ainsi l'élève semble considérer qu'une démonstration bien faite doit avant tout lui permettre d'accéder à la compréhension, ce qui le conduit à formuler des critères sur le bon usage de la langue (orthographe, grammaire, etc...) et l'explication du problème, comme si le lecteur de la démonstration n'était pas en possession de l'énoncé. Remarquons que dans une communauté mathématique ce genre de réclamation n'a pas lieu d'être puisque ces caractéristiques sont d'ores et déjà considérées comme acquises dans la mesure où le rédacteur d'un article est supposé maîtriser la langue dans laquelle il l'écrit et que la présentation de toute preuve accompagne l'énoncé de la proposition qui la concerne (ou présuppose au moins la connaissance de ses hypothèses). Ce genre de convention semble avoir échappé à nos élèves, qui semble-t-il n'ont pas l'habitude d'examiner des textes de démonstration, il serait donc utile en ce sens de les y confronter de manière plus régulière. En effet l'élève tend à privilégier la compréhension de la preuve avant toute autre considération, comme si il fallait absolument que tout soit limpide dès le premier coup d'œil. Or, même dans les cas les plus « éclairants » la vérification d'une démonstration nécessite un travail de la part du lecteur, comme pour les preuves sans mots où le dessin suggère de manière immédiate un raisonnement fondé sur l'égalité d'aires ou de volumes qui doit par la suite se vérifier au moyen d'un calcul. Il paraît donc important de préciser aux élèves que même si une preuve est présentée de manière claire, cela ne signifie pas que sa compréhension en sera immédiate pour

autant. Ces considérations explicatives pourtant secondaires vont jusqu'à éclipser l'objectif principal de la preuve qui est de démontrer la vérité d'une assertion au moyen d'un raisonnement valide ; il est légitime de s'interroger sur l'origine d'un tel renversement.

Une explication possible viendrait de la conception qui est que la preuve vise à convaincre son lecteur d'une vérité universelle, or si l'on suit la logique de la vie quotidienne pour convaincre il est avant tout nécessaire d'être compris. Dans cette optique, des éléments comme la longueur ou la présence d'exemples se transforment en critères. En effet, plus le texte est long et plus chacun peut y trouver son compte, l'exemple aide l'élève à comprendre son cours de mathématiques, il aidera donc le lecteur à comprendre les passages difficiles : on se rapproche alors davantage de l'argumentation que de la preuve mathématique. Pourtant, le but d'une démonstration est d'établir une vérité grâce à un raisonnement valide et à partir de prémisses vraies mais cette idée fondamentale est perdue de vue par l'élève. Convaincre le lecteur est un objectif secondaire de la démonstration, et c'est même au lecteur de s'en convaincre et de s'investir dans la compréhension du texte en établissant entre autres ses propres exemples.

En plus de faire en sorte que l'élève se familiarise avec des textes de démonstration, il est donc primordial d'anticiper et de corriger ce genre de biais de conception, à ce titre il serait profitable d'effectuer dès le début de l'année un travail régulier sur ce sujet.

Bibliographie

Barbin, E. (1988). La démonstration mathématique : significations épistémologiques et question didactiques, *Bull A.P.M.E.P.*, 366, 591-620.

Brown, J.-R. (1999). *Philosophy of Mathematics*. Londres : Routledge

Bettinelli, B. (1989). Intuition et démonstration chez Archimède. In E.Barbin (Ed), *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Actes du 7^{ème} colloque inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques, Besançon, éd. IREM de Besançon et IREM de Lyon, 181-196

Caroll, L. (1899). *The Lewis Caroll Picture Book*. Londres : Stuart Dogson Collongwood

Delahaye, J.-P. (1998). Les preuves sans mots. *Pour la science*, 244, 100-105. Repéré à (page consultée le 13/05/2018) <http://www.lifl.fr/~jdelahay/pls/050.pdf>

Duval, R. (1993). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, 31, 37-61.

Eduscol (2009). *Ressources pour la classe de seconde. Notation et raisonnement mathématiques*. Repéré à (page consultée le 13/05/2018) http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/18/0/Doc_ressource_raisonnement_109180.pdf

Eduscol. (2016). *Mathématiques. Compétences travaillées en mathématiques. Reasonner*. Repéré à (page consultée le 13/05/2018) http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Compétences_travaillees/83/6/RA16_C4_MATH_raisonner_547836.pdf

Gandit, M. (2004). Preuve ou démonstration, un thème pour la formation des enseignants de mathématiques : Première partie, *Petit x*, 65, 36-49.

Grothendieck, A. (1983). Travail et découverte. In *Récoltes et Semailles, Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*, (pp. 127-132). Repéré à (page consultée le 13/05/2018) <https://jmrlivres.files.wordpress.com/2009/11/recoltes-et-semailles.pdf>

Merker, C. (1989). Euler, l'infini, et les nombres imaginaires. In E.Barbin (Ed), *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Actes du 7^{ème} colloque inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques, Besançon, éd. IREM de Besançon et IREM de Lyon, 221-232

Nelsen, R. B. (2013). *Preuves sans mots. Exercices de mathématiques visuelles*. Paris : Editions Hermann.

Annexes

Annexe 1 : Argumentation et logique propositionnelle (extrait de Duval (1993))

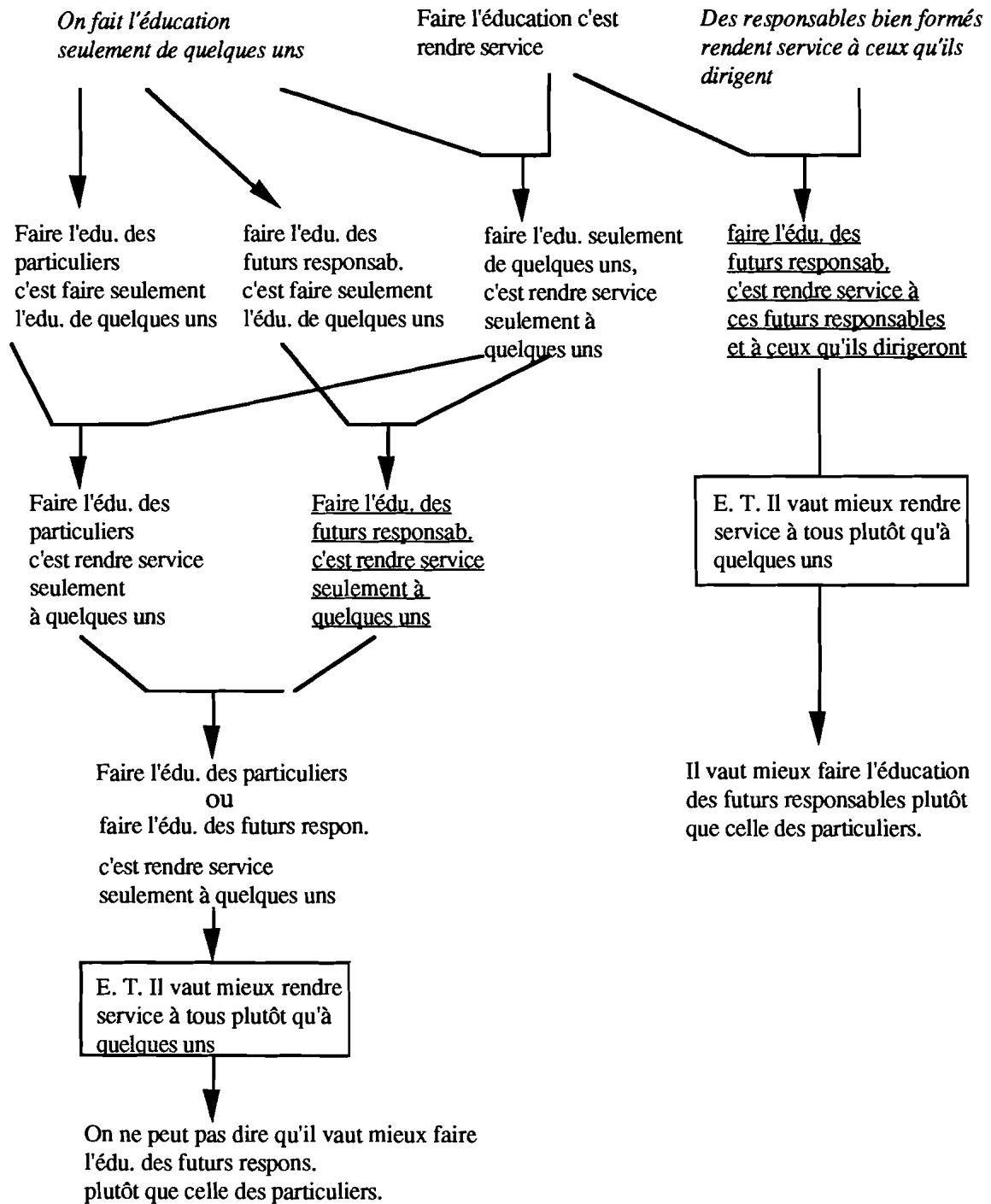


Fig.6 Graphe propositionnel pour une démonstration impossible! Nous ne pouvons pas obtenir un arbre déductif.

Annexe 2 : Réponses d'élèves au questionnaire sélectionnées pour le débat

1.

$$2x + 1 = 0$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Acceptable Non acceptable

Justification : *On résoud juste l'équation*

Acceptable Non acceptable

Justification : *ça correspond à rien*

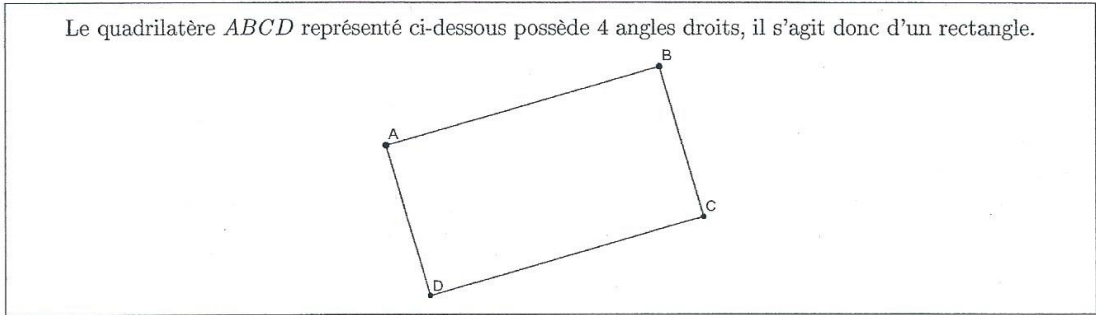
Acceptable Non acceptable

Justification : *c'est juste une résolu^o d'équations*

Acceptable Non acceptable

Justification : *oui mais il faut expliquer à l'oral chaque étape du calcul*

2.



Acceptable Non acceptable

Justification : *Il n'y a pas les signes qui prouvent que ce sont des angles droits et on ne sait pas si les côtés sont égaux*

Acceptable Non acceptable

Justification : *car il montre juste un rectangle et ne montre pas comment il a été fait et n'indique pas les angles*

Acceptable Non acceptable

Justification : *Schema ≠ démonstration*

Acceptable Non acceptable

Justification : *si un quadrilatère à 4 angles droits alors c'est forcément un carré ou un rectangle*

La somme de deux nombres impairs est un nombre pair.
 En effet si on considère deux entiers impairs m et n , on peut les écrire sous la forme :

$$m = 2a + 1 \quad \text{et} \quad n = 2b + 1 \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des entiers naturels.}$$

3.

Ainsi : $m + n = 2a + 1 + 2b + 1 = 2a + 2b + 2 = 2(a + b + 1)$

$m + n$ est donc bien un nombre pair.

Acceptable Non acceptable

Justification : *il faut donner un exemple avec des vrai chiffre et expliquer plus facilement.*

Acceptable Non acceptable

Justification : *car la demonstration est faite avec des lettres n.c'est donc valable car n'importe quel réel remplacant n,m,a,b*

4. On appelle fonction affine toute fonction f dont l'expression algébrique s'écrit sous la forme :
 $f(x) = ax + b$ où a et b sont des nombres réels.

Acceptable Non acceptable

Justification : *car il y a pas d'exemple donc c'est pas très clair.*

Acceptable Non acceptable

Justification : *On le montre pas on l'affirme juste sans preuves.*

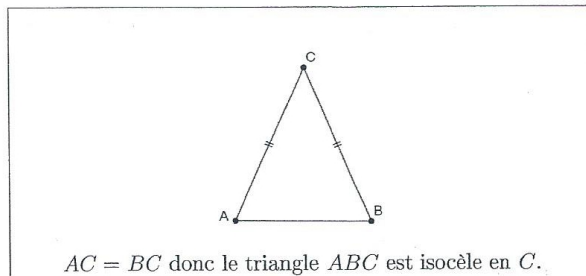
Acceptable Non acceptable

Justification : *c'est la définition même d'une fonction affine.*

Acceptable Non acceptable

Justification : *la démonstration est valable tout le temps.*

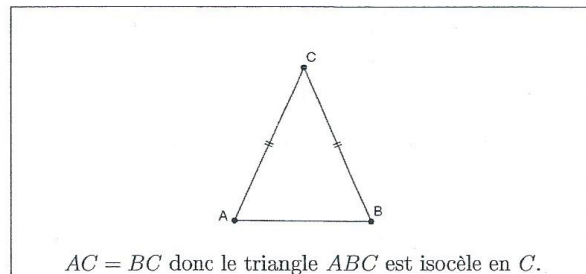
5.



Acceptable Non acceptable

Justification : *il faut une propriété qui explique pourquoi quand AC=BC le triangle est isocèle.*

5.



Acceptable Non acceptable

Justification : *Car le schéma possède un codage, une définition et une conclusion.*

On se demande si la moyenne \bar{x} d'une série statistique est toujours comprise entre Q_1 et Q_3 .
 Pour déterminer cela voyons ce qu'il en est sur la série suivante :

Valeurs	-1	0	1
Effectifs	4	10	6

Après calculs, on trouve : $\bar{x} = 0.5$, $Q_1 = 0$, $Q_3 = 1$. Donc ici on a bien : $Q_1 < \bar{x} < Q_3$.
 Mais est-ce toujours le cas ?

6. Essayons de faire baisser la moyenne en diminuant la première valeur de la série tout en ne faisant pas varier les effectifs pour ne pas déplacer les quartiles :

Valeurs	-10	0	1
Effectifs	4	10	6

Cette fois, on obtient : $\bar{x} = -1,7$, $Q_1 = 0$, $Q_3 = 1$ et donc $\bar{x} < Q_1 < Q_3$.
 Ainsi quelle que soit la série statistique qu'on étudie, sa moyenne n'est pas toujours comprise entre Q_1 et Q_3 .

Acceptable Non acceptable

Justification : *il faut mieux expliquer les calculs et comment on a trouvé les valeurs et effectifs*

Acceptable Non acceptable

Justification : *c'est un exemple ≠ démonstration*

Acceptable Non acceptable

Justification : *L'exemple le montre*

Acceptable Non acceptable

Justification : *pas sûr mais acceptable à première vue mais par contre aucun calcul n'est détaillé un 0/20 serait trop gentil*

7. Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu, dont les côtés opposés sont deux à deux égaux et parallèles et possédant quatre angles droits est un rectangle.

Acceptable Non acceptable

Justification : *On démontre pas on l'affirme juste*

Acceptable Non acceptable

Justification : *ce sont les caractéristiques d'un rectangle*

Année universitaire 2017-2018

Master 2 Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation

Mention Second degré

Parcours : Mathématiques

Titre du mémoire : Conception et acceptation de la démonstration en seconde

Auteur : François Casanova en collaboration avec Claire Bourdin

Résumé :

La démonstration est l'activité principale du mathématicien ; pourtant sa conception même et son enseignement semblent faire débat au sein des professeurs et des élèves. Le but de ce mémoire est d'abord d'exposer les principes, les objectifs et différents aspects associés à la preuve comme les dualités entre phase de recherche et de rédaction ainsi que les critères d'acceptations possibles dans différentes communautés mathématiques. Les programmes et leurs documents d'accompagnement sont ensuite examinés en lien avec ces derniers points. Dans un second temps, une séquence est mise en œuvre avec des élèves de seconde comportant une évaluation diagnostique via un questionnaire et une situation de recherche en classe conduisant à la rédaction d'une démonstration. L'évaluation par les élèves des textes de preuves d'autres élèves permet de mettre en évidence leurs critères d'acceptation et fournissent ainsi un point d'appui pour l'institutionnalisation. Nous constatons alors un décalage entre les communautés mathématiques et les classes qui semblent accorder davantage d'importance à la clarté de la rédaction qu'à la validité du raisonnement employé.

Mots clés : enseignement des mathématiques ; seconde ; démonstration ; critère d'acceptabilité ; situation de recherche en classe

Summary :

Demonstration is the mathematical flagship activity ; still its conception and teaching seem to create a debate among teachers and students. First, the purpose of this essay is to expose the principles, the goals and the multiple facets of a proof such as the relation between the searching and the writing parts and the criterions of acceptability used among mathematical communities. Then, the programmes and their support materials are analyzed in the perspective of the previous points. Second a sequence is set up with high school students : first students have to answer to a questionnaire for a diagnostic evaluation then they are put in a situation of research and have to write their own proof. Conclusion is allowed thanks to the analysis of some of their own proofs with their criterions wich differ from the previous one in many ways.

Key words : mathematical teaching ; high school ; demonstration ; criterion of acceptability ; seeking situation in class ; proof