



**HAL**  
open science

# Une expérimentation didactique en logique. La logique n'est pas toujours logique

Anna Carla Russo

## ► To cite this version:

Anna Carla Russo. Une expérimentation didactique en logique. La logique n'est pas toujours logique. Education. 2018. <dumas-02112150>

**HAL Id: dumas-02112150**

**<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-02112150v1>**

Submitted on 22 Sep 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



École supérieure  
du professorat  
et de l'éducation  
Académie de Grenoble



**Année universitaire 2017-2018**

*Master Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation*

*Mention Second degré*

# Une Expérimentation Didactique en Logique

*La logique n'est pas toujours logique*

**Présenté par Anna Carla RUSSO**

Rédigée en collaboration avec Julien ALLARD

**Écrit Scientifique Réflexif de DU encadré par Michèle GANDIT**



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>ii</b>
<b>1 Cadre théorique</b>	<b>1</b>
1.1 La logique pour bien raisonner . . . . .	1
1.2 La recherche didactique en logique . . . . .	3
1.3 Les dispositifs didactiques . . . . .	5
1.4 La logique mathématique . . . . .	6
1.5 Analyse des manuels . . . . .	11
<b>2 La logique en classe</b>	<b>16</b>
2.1 Activités préliminaires . . . . .	16
2.2 Activité du Labyrinthe . . . . .	18
2.3 Activités d'entraînement et test final . . . . .	33
<b>Conclusion</b>	<b>37</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>38</b>
<b>Annexes</b>	<b>40</b>

# Introduction

Parmi les possibilités qui nous étaient offertes, nous avons rapidement décidé de choisir le thème de la logique comme objet de mémoire. Notre première idée était celle de reprendre une expérimentation faite dans le travail de recherche d'une thèse en didactique mathématique (voir DELLO IACONO, LOMBARDI (2015) [8]). Cette expérimentation avait été faite avec des élèves de l'école primaire et son but était de développer l'utilisation de la logique, non pas comme outil pour démontrer des théorèmes, mais comme outil pour élaborer des informations, en mathématiques comme dans la vie courante. Les auteurs de cette recherche avaient investigué si la manipulation concrète d'"objets linguistiques" pouvait aider à développer chez les élèves la capacité de faire un simple processus de déduction. Pour apprendre alors le "jeu" de la déduction, les élèves pouvaient utiliser des cartes magnétiques sur lesquelles il était possible d'écrire et un tableau où placer les cartes.

Même si nous considérons cette expérimentation très intéressante et inspirante, nous nous sommes vite rendu compte des difficultés que nous aurions eu pour la mettre pleinement en place. Premièrement, d'un point de vue matériel nous ne pouvions accéder à un tel matériel (fabrication des cartes magnétiques). Deuxièmement, les auteurs de l'étude ont travaillé sur une durée de 3 ans tandis que nous ne disposons que de quelques mois.

Nous avons alors commencé à lire d'autres articles sur la recherche didactique en logique que madame Gandit, notre tutrice pour le mémoire, nous avait proposé, à savoir HERAULT, HUET, KEL NOTTER, MESNIL (2016) [11] et MURPHY, WEIMA, DURAND-GURRIER (2016) [15]. Nous avons constaté que l'ambiguïté des énoncés suit à une quantification implicite était une thématique requérante et nous avons décidé de l'approfondir. Comment faire en sorte que les élèves se posent des questions sur les énoncés ? Comment faire pour qu'ils reconnaissent qu'il y a des quantificateurs implicites et leur apprendre à les expliciter ? En essayant de répondre à ces questions, nous avons décidé de

commencer notre expérience avec une activité où les ambiguïtés doivent être très fortes et dans laquelle l'interprétation change en fonction du quantificateur choisi. L'activité doit être construite pour faire remonter des questions.

Une fois obtenue l'attention des élèves sur l'importance de reconnaître la présence de quantificateurs implicites, il est nécessaire de les entraîner à cette pratique. Plusieurs exercices vont être proposés en ce sens, en terminant avec un test qui aurait le but de vérifier toutes les compétences mathématiques apprises pendant l'année.

Nous nous sommes enfin interrogés sur l'échantillon à considérer. Nous souhaitons que la taille de celui-ci soit la plus grande possible, tout en restant au même niveau, nous avons décidé de concentrer notre expérimentation au niveau seconde. En effet Monsieur Allard a en charge deux classes de seconde et Madame Russo une classe de seconde et une classe de première ES. La taille de l'échantillon si l'on avait pris la première ES aurait été insuffisante pour avoir des résultats viables statistiquement. Naturellement, le choix de la seconde n'est pas lié seulement à une question de taille d'échantillon. Il est fort probable que des élèves de première aient déjà été confrontés à des activités sur les quantificateurs l'année précédente. Donc les résultats que nous aurions pu obtenir auraient été faussés par les connaissances des élèves. Ainsi, par pertinence statistique et pour avoir des élèves avec le moins de connaissance possible, cela justifie le choix de la seconde pour notre expérimentation.

# Chapitre 1

## Cadre théorique

### 1.1 La logique pour bien raisonner

Depuis plusieurs années, la logique est apparue explicitement dans le programme de mathématiques au lycée. Dans le Bulletin Officiel (2009) [1] on lit que « l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à distinguer les principes de la logique mathématique et ceux de la logique de la vie courante [...] Mais tout exposé de cours sur ces notions est exclu, les notations et le vocabulaire mathématiques étant des conquêtes de l'enseignement et non des points de départ ». L'enseignement de la logique ne doit pas alors faire l'objet d'un chapitre spécifique, mais, à l'occasion de la rencontre d'une notion on peut traiter de manière rigoureuse certains éléments qui font progresser les élèves dans l'apprentissage du raisonnement.

Comme l'indique l'extrait du programme, le premier défi auquel l'enseignant doit se confronter est la multitude de techniques de *raisonnements* que les élèves utilisent couramment et qui ne correspondent pas au raisonnement utilisé en mathématiques. Si dans la vie courante je refuse une situation qui m'apparaît peu vraisemblable, ayant une probabilité très petite de se réaliser, je raisonne de façon **plausible** (voir GLAESER (1988) [10]). La phrase "ce soir la lune ne va pas se lever" sera réputée généralement fausse, mais, bien qu'elle soit improbable, il existe plusieurs facteurs qui peuvent donner cet événement. Souvent on associe une cause possible à un événement observé : "si la rue est mouillée alors il a plu récemment", mais ce n'est pas la seule explication plausible. On fait dans ce cas un raisonnement **abductif**. D'autre fois, en partant de certains cas particuliers, on peut établir une règle universelle. Par exemple, si en se promenant dans une ville étrangère on

ne voit que des maisons avec une cheminée, on pourrait conclure que toutes les maisons de cette ville ont une cheminée même si ce n'est pas le cas. Ce type de raisonnement est dit **inductif**.

Le seul type de raisonnement *correct* d'un point de vue mathématique, qui ne conduit jamais à l'erreur, est le raisonnement **déductif** qui, étant donnée un certain nombre d'hypothèses, conduit à une conclusion dont la vérité est strictement liée à la vérité des hypothèses<sup>1</sup>. Un exemple classique remonte à Aristote.

**Hypothèses :** Tous les hommes sont mortels.

Or tous les Athéniens sont des hommes.

**Conclusion :** Donc tous les Athéniens sont mortels.

Le raisonnement déductif est correct intrinsèquement, et non pas parce que chaque affirmation l'est. Par exemple le raisonnement suivant est également correct.

**Hypothèses :** Tous les animaux sont gentils.

Or tous les hommes sont des animaux.

**Conclusion :** Donc tous les hommes sont gentils.

Si on accepte que tous les animaux sont gentils et que tous les hommes sont des animaux on doit *nécessairement* accepter que tous les hommes sont gentils.

« Pour résumer, la déduction, qui repose sur des causes et des effets certains, aboutit à des énoncés certains ; l'induction, qui propose des causes certaines à des effets probables, aboutit à des énoncés probables ; et l'abduction, qui recherche des causes probables à des effets certains, aboutit à des énoncés plausibles » (CHEVASSAUS-AU-LOUS (2014) [6]).

Le rôle de l'enseignant est alors celui d'apprendre le raisonnement logique aux élèves et surtout de le comparer aux autres pour en faire ressortir les différences, les points faibles et les points forts.

Les enjeux du raisonnement logique sont multiples : définir un type de langage approprié ; savoir reconnaître la présence de variables, l'ensemble dans lequel il faut les interpréter et leurs éventuelles quantifications ; savoir donner une valeur de vérité ou d'indécidabilité à une affirmation ; définir les règles du raisonnement ; etc. Dans notre étude nous nous concentrons sur la problématique de la quantification des variables et leur apprentissage en seconde.

---

1. table de vérité de l'implication dans la section 1.4.

## 1.2 La recherche didactique en logique

Avant de se lancer dans notre expérimentation, une analyse attentive de ce qui a déjà été fait par les experts de didactique sur le thème que nous avons choisi s'avère obligatoire. Dans la littérature nous avons trouvé une multitude d'articles et de textes qui s'occupent de l'introduction de la logique au collège et au lycée et qui proposent des activités pour exploiter cet enseignement.

Dans cette section nous présentons des activités que nous avons estimé particulièrement intéressantes d'un point de vue de notions traitées.

**Du langage naturel au langage mathématique.** L'une des premières difficultés que l'on rencontre lorsqu'on veut proposer des exercices de logique à nos élèves est de réussir à « introduire la logique mathématique en la mettant en lien avec la logique naturelle en effectuant les distinctions nécessaires » (MURPHY, WEIMA, DURAND-GURRIER (2016) [15] p.8). On doit leur faire comprendre que ces deux univers ne sont pas disjoints et que le formalisme mathématique peut être utilisé aussi dans des situations de la vie réelle.

À ce propos, l'activité intitulée « Les cosmonautes » (Annexe A) nous semble adaptée pour commencer à parler de logique à un public jeune<sup>2</sup>. Elle est une des premières expérimentations du groupe « Apprentissage du raisonnement » de l'IREM de Grenoble (LEGRAND (1983) [12]) pour « expliciter les règles élémentaires du raisonnement scientifique », déduction et bonne utilisation de l'implication, de l'implication réciproque et de la contraposée, et pour invalider la règle implicite que « toute question posée dans un cadre scolaire a une unique réponse [qui] s'obtient en manipulant les données au moyen des règles les plus en vogue au moment de la résolution du problème ».

Cette activité a été reprise aussi dans MURPHY, WEIMA, DURAND-GURRIER (2016) [15] et présentée à des élèves de seconde. Ici les auteurs ont pu constater qu'un contexte non mathématique admet plusieurs interprétations qui peuvent amener à des raisonnements non "standard" de certains élèves. Dans cette activité on s'intéresse à une réunion des cosmonautes du monde entier à Paris. La seule information connue est que les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge. D'après ça on est porté

---

2. Proposée à des classes de collège, voir LEGRAND (1983) [12].

à répondre à des questions sur des situations ayant lieu dans l'aéroport de Paris. Des phénomènes liés au contexte avaient été pris en compte par les auteurs de MURPHY, WEIMA, DURAND-GURRIER (2016) [15] dans leur analyse a priori (population de l'aéroport : seulement des cosmonautes ou pas ? Chaque pays participant à la réunion a une couleur de chemise spécifique ?) mais ils ont eu néanmoins quelques surprises. Par exemple certains élèves, en utilisant un raisonnement pratique, avaient pensé que les cosmonautes ne gardaient pas la même tenue entre l'aéroport et la réunion.

Une fois qu'on a fixé "les règles du jeu", on peut poser aux élèves des activités de logique qui rentrent dans un cadre mathématique. Par contre, si on veut se concentrer seulement sur les notions logiques il faut que les notions mathématiques soient suffisamment maîtrisées pour ne pas perturber le raisonnement logique. Par exemple, dans MURPHY, WEIMA, DURAND-GURRIER (2016) [15] les auteurs ont proposé le problème « À propos de losanges » (Annexe B) à une classe de seconde. Cet objet mathématique est bien connu des élèves et on peut l'utiliser pour travailler les notions de conditions nécessaires et suffisantes ainsi que pour commencer à réfléchir sur le problème des quantificateurs implicites et du domaine de quantification.

**Une progression pour le lycée.** Dans HERAULT, HUET, KEL NOTTER, MESNIL (2016) [11] les auteurs ont présenté et analysé une progression sur l'enseignement de la logique de la seconde à la terminale.

C'est en seconde que l'on rencontre pour la première fois les quantificateurs de manière explicite. Un premier exercice proposé dans HERAULT, HUET, KEL NOTTER, MESNIL (2016) [11] pour la classe seconde met justement en valeur l'importance de l'explicitation des quantifications et un second permet de se les approprier. Les auteurs insistent sur le fait qu'il faut continuer à faire un travail sur les quantificateurs en première et en terminale. Toujours dans la progression des auteurs, en terminale, la logique apparaît en lien avec les suites et leurs limites ainsi qu'avec l'algorithmique. Des activités et leurs analyses sont présentées à cet effet. À la fin de leur progression en terminale, un problème plus délicat est abordé : l'alternance des quantificateurs. En effet les élèves ne font pas la distinction entre une proposition du type « $\forall a, \exists b, P[x, y]$ » et une du type « $\exists b, \forall a, P[x, y]$ ». À ce propos les auteurs proposent l'activité de l'annexe C.

Avec cette analyse il apparaît évident que l'explicitation des quantificateurs et toutes les difficultés liées à ce sujet restent le plus grand défi au lycée et pour cette raison on a

décidé de concentrer notre étude sur cet aspect.

### 1.3 Les dispositifs didactiques

Pour mettre en place notre expérimentation, on s'est appuyé sur trois dispositifs didactiques : l'analyse a priori, le travail de groupe et le débat scientifique.

**L'intérêt de l'analyse a priori.** Les supports dont dispose un enseignant pour préparer ses séances sont multiples, on peut citer par exemple les programmes officiels, les manuels scolaires, les productions des IREM, les documents ressources Eduscol, etc. L'expérience de l'enseignant joue certainement un rôle très important au moment du choix des activités, mais s'il veut que ce qu'il propose soit efficace sur le plan de l'apprentissage il est bénéfique, voire nécessaire, de faire une analyse a priori des activités qu'il pense mettre en place pour permettre de « pointer certains points litigieux que les outils habituellement mis à disposition des enseignants ne suffisent pas à révéler » (MILLION-FAURÉ (2011) [16] p.6). Mercier et Assude ont individué dans MERCIER, ASSUDE (2007) [14] trois temps pour l'analyse a priori :

- (1) *analyse descendante*, qui vise à analyser le savoir qu'on veut transmettre ;
- (2) *analyse ascendante*, pour prévoir le comportement des élèves ;
- (3) comparaison des deux analyses précédentes pour relever les éventuelles difficultés.

Dans l'analyse a priori il sera alors important de réfléchir sur le déroulement de la séance, sur les rôles que doivent avoir l'enseignant et les élèves à chaque étape, et quelle devra être la relation entre eux.

Il faut garder en tête que les élèves peuvent avoir des réactions très différentes de celles attendues (comme on a pu voir dans la section 1.2 avec « Les cosmonautes »). L'analyse a priori peut alors aider à prévoir ces réactions et ainsi pouvoir réagir en conséquence.

**Le travail de groupe.** Quand un élève est seul face à un exercice, à un problème, à une question et qu'il doit répondre individuellement, il se base uniquement sur son intuition, ses connaissances et son raisonnement. La solution peut être claire ou pas mais il n'a pas d'autres moyen pour la trouver. De plus il ne se pose pas le problème de la lisibilité de sa rédaction, le seul destinataire est lui-même (je comprends bien ce que j'ai écrit) ou le

professeur dans le cas d'un contrôle (puisqu'il connaît la bonne réponse, il comprendra ma solution).

Si par contre l'élève doit travailler en groupe il est obligé d'exposer ses idées à ses pairs et il doit faire un effort pour être le plus clair possible. De plus, le travail de groupe peut porter les élèves à se confronter aux autres, à réfléchir à des exemples ou contre-exemples auxquels il n'avait pas pensé. Dans l'expérimentation présentée dans LEGRAND (1983) [12] les auteurs ont pu constater que le pourcentage de bonnes réponses avait doublé après le travail de groupe.

« Le plus souvent les arguments [...] permettant la découverte de la bonne solution apparaissent au cours de la discussion »(LEGRAND (1983) [12] p.68)

Il nous semble alors que ce type de pratique est particulièrement adapté pour des activités de logique.

**Le débat scientifique.** Dans la dernière phase de notre expérimentation on a prévu de faire une mise en commun en utilisant le protocole du débat scientifique. On a vu qu'il s'agit souvent de la discussion avec les autres qui mène à la bonne solution. Les avantages de ce mode d'enseignement sont multiples : d'un point de vue humain il favorise le respect des autres ; d'un point de vue didactique il permet de « se détacher du plan scolaire pour se placer réellement sur le plan mathématique » (GANDIT, MASSE-DEMONGEOT (1996) [13] p.72). Ce sont les élèves qui construisent le savoir !

La plus grande difficulté de cette méthode, surtout pour un jeune professeur, c'est le nouveau rôle qu'il doit avoir. Il ne détient plus le savoir mais il est le garant du débat, il doit faire respecter la prise de parole, favoriser la discussion entre pairs tout en y restant à l'extérieur, il doit être neutre.

## 1.4 La logique mathématique

Dans la préface de TARSKI (1971) [17] on lit que « la position de la logique moderne dans le domaine de la vie intellectuelle est devenue beaucoup plus forte durant ces dernières décades ». Cependant on a pu constater que même les enseignants les plus jeunes n'ont pas forcément suivi de cours de logique dans leur parcours universitaire. Ceci représente pour nous un problème assez délicat puisque tous les enseignants sont amenés à enseigner

des notions pour lesquelles ils ne connaissent probablement pas les enjeux théoriques. En reprenant le modèle de HERAULT, HUET, KEL NOTTER, MESNIL (2016) [11], nous avons alors décidé de présenter dans cette section des éléments essentiels sur les deux principaux systèmes logiques (le calcul propositionnel et le calcul de prédicats) à destination des enseignants.

Nous nous concentrerons sur les notions qui ont un lien avec les problèmes de logique qu'on pourrait rencontrer en classe. Pour tout détail nous nous rapportons à CORI, LASCARD (2003) [7] et TARSKI (1971) [17].

La première chose à faire pour étudier les règles qui gèrent le raisonnement logique est de réduire les ambiguïtés du langage courant. Si, par exemple, on dit "on doit étudier l'histoire ou le français" veut-on dire que l'on doit étudier l'un ou l'autre mais pas les deux ? Ou encore, quand on dit "cet après-midi je sors s'il ne pleut pas et j'appelle Antoine" veut-on dire que s'il pleut on n'appelle pas Antoine ou on l'appelle dans tous les cas ? Pour éliminer ces ambiguïtés on va définir un premier langage formel qu'on appelle *langage propositionnel*.

Avec le langage propositionnel on peut formuler des phrases pour lesquelles on peut toujours dire si elles sont vraies ou fausses, par exemple les phrases "0 est un nombre entier" ou "5 est un nombre pair".

Les phrases du type " pour tout nombre  $x$ ,  $x < x + 1$ " et " $x$  est un entier" sont des exemples de phrases qu'on peut formuler dans le *langage du premier ordre*, où l'on voit apparaître l'utilisation des variables et des quantificateurs. Une autre différence avec le langage propositionnel est qu'on ne peut pas toujours donner une valeur de vérité à une phrase, mais cela dépend de l'interprétation des variables présentes, comme dans le cas du deuxième exemple.

Pour chaque langage on aura besoin de définir un alphabet, c'est-à-dire un ensemble de symboles qu'on va utiliser pour écrire les phrases ou les *formules*. La **syntaxe** est la partie du système qui donne les règles pour définir quelles formules sont acceptées dans notre langage. La **sémantique** a le rôle de donner un sens à toutes les formules acceptées.

## Calcul propositionnel

On considère un ensemble  $P$  non vide, fini ou infini, qu'on appelle ensemble des **variables propositionnelles**. On se donne d'autre part les symboles suivants :

$$\neg \text{ (non) , } \vee \text{ (ou) , } \wedge \text{ (et) , } \rightarrow \text{ (implique)}$$

qu'on appelle **connecteurs propositionnels**.

Avec ces symboles, variables propositionnelles plus connecteurs, on peut former des mots qu'on appelle **formules propositionnelles** ou **propositions**.

**Définition.** L'ensemble des formules propositionnelles  $\mathcal{F}$  est le plus petit ensemble qui :

- contient  $P$ ;
- chaque fois qu'il contient une formule  $F$ , il contient aussi la formule  $\neg F$ ;
- chaque fois qu'il contient deux formules  $F$  et  $G$ , il contient aussi les formules

$$F \vee G, F \wedge G, F \rightarrow G$$

À chaque formule propositionnelle on peut accorder une valeur de vérité (0 pour faux et 1 pour vrai), une fois déterminée la vérité ou la fausseté des formules élémentaires qui la composent.

**Définition.** Une **distribution de vérité** sur  $P$  est une application  $\delta : P \rightarrow \{0, 1\}$ .

On utilise aussi le mot *valuation* ou *évaluation*. Une distribution de vérité donne à chaque variable propositionnelle une valeur de vérité. Il est possible de prolonger la fonction  $\delta$  à l'ensemble de toutes les formules propositionnelles de façon unique, en respectant des règles plus ou moins intuitives. Ces règles sont données par les **tables de vérité**.

$p$	$q$	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1

Si la table de la négation et de la conjonction sont conformes à l'utilisation de ces connecteurs dans le langage courant (une formule est vraie si et seulement si sa négation

est fausse et vice versa, la conjonction de deux formules est vraie si et seulement si les deux formules sont vraies au même temps), les tables de la disjonction<sup>3</sup> et de l'implication peuvent susciter de la perplexité. La disjonction en mathématiques est en effet *inclusive*, c'est-à-dire qu'il est suffisant que l'une des formules dans la disjonction soit vraie pour avoir la vérité de la formule finale, contrairement à la disjonction qu'on utilise dans le langage naturel qui est *exclusive*, c'est-à-dire que la formule est vraie seulement si une seule des deux formules dans la disjonction est vraie. Pour ce qui concerne l'implication, la définition qui donne la valeur 1 à la formule  $F \rightarrow G$  lorsque  $F$  et  $G$  prennent toutes les deux la valeur 0 peut étonner. Une façon de dissiper les doutes est de se demander dans quels cas la formule  $F \rightarrow G$  est fausse : c'est uniquement dans le cas où  $F$  est vraie sans que  $G$  le soit.

Par exemple, pour montrer que la phrase "si  $n$  et  $m$  sont deux nombres entiers, alors leur somme est un entier positif" est fausse, il faut chercher un contre-exemple, c'est-à-dire deux nombres entiers (hypothèse vraie, 1 et  $-2$ ) tels que leur somme ne soit pas un nombre entier positif (conséquence fausse,  $1 + (-2) = -1$ ).

Une fois fixée la distribution de vérité, on peut obtenir la valeur de vérité de chaque formule en appliquant plusieurs fois les tables de vérité (on remande à [7] pour la définition rigoureuse de l'extension de l'application  $\delta$  à l'ensemble  $\mathcal{F}$  de toutes les formules propositionnelles).

On appelle **tautologie** une formule qui prend comme valeur 1 pour toute distribution de vérité, c'est-à-dire une formule qui ne contient que des 1 dans sa table de vérité.

## Calcul des prédicats ou logique du premier ordre

Si on reprend l'exemple de raisonnement déductif donné dans la section 1.1, on voit qu'il ne peut pas être formulé en utilisant le calcul propositionnel, il manque la possibilité de pouvoir énoncer des phrases du type " $x$  a la propriété  $P$ " ou "pour  $x$  il faut la propriété  $P$ ".

On introduit alors de nouveaux symboles pour parler de "propriétés" qu'on appelle **prédicats**. L'autre innovation essentielle est l'utilisation des quantificateurs  $\forall$  (pour tout) et  $\exists$  (il existe) qui agissent sur des variables.

---

3. À ne pas confondre ce mot de disjonction avec celui qu'on utilise dans l'expression "disjonction des cas".

Pour chaque structure mathématique on pourrait définir un alphabet et un langage différent pour "parler" de cette structure.

**Définition.** Un **langage du premier ordre** est un ensemble  $L$  des symboles qui se compose de deux parties :

- la première partie est commune à tous les langages et contient un ensemble infini dénombrable  $Var$  des variables, les connecteurs propositionnels, le quantificateur universel et le quantificateur existentiel ;
- la deuxième partie varie d'un langage à l'autre et contient un ensemble  $Const$  de symboles de constantes, un ensemble  $Fct$  de symboles de fonctions et un ensemble  $Rel$  de symboles de relations ou prédicats.

Comme pour le calcul propositionnel, les formules sont des suites de symboles pris dans l'alphabet et obéissant à des règles syntactiques qui sont, dans ce cas, plus compliquées. On parle de formules du premier ordre parce que les quantifications portent seulement sur les variables et non sur les symboles de fonctions et/ou relations. Si une variable est quantifiée on dit qu'elle est **liée**, sinon on dit qu'elle est **libre**. Une formule dans laquelle toutes les variables sont liées est appelée **formule close**.

Pour pouvoir donner du sens aux formules du premier ordre, l'ensemble  $\{0, 1\}$  n'est plus suffisant. On va donc utiliser une **structure**, qui est définie par les données suivantes :

- un *ensemble*  $M$  pour interpréter l'ensemble de variables  $Var$  ;
- un *élément* de  $M$  pour interpréter chaque symbole de constante de l'ensemble  $Const$  ;
- une *fonction* sur  $M$  pour interpréter chaque symbole de fonction de l'ensemble  $Fct$  ;
- une *relation* sur  $M$  pour interpréter chaque symbole de relation de l'ensemble  $Rel$ .

Une formule  $F$  est **satisfaite** dans une structure lorsque son "interprétation est vraie dans la structure". La définition formelle de satisfaction d'une formule dans une structure est faite par induction sur la forme de la formule (voir section 3.3 [7]), elle tiendra compte de la présence ou non de variables libres et de la structure dans laquelle on va interpréter les variables. Ici nous nous limitons à donner des exemples.

**Exemple.**

- L'affirmation "Toutes les personnes dans la classe parlent le chinois" sera fausse dans une classe de Français mais vraie dans une classe de Chinois.
- La formule

$$(\forall x)(\exists y)(x \times y = 1)$$

est vraie dans le corps des réels mais fausse dans la structure  $(\mathbb{N}, \times, 1)$ .

Les formules présentées ci-dessus sont des exemples de formules closes. Si une formule close est satisfaite dans toutes les structures compatibles au langage, on dit qu'elle est **universellement valide**. Des exemples de formules universellement valides sont les tautologies du calcul propositionnel. La négation d'une formule universellement valide est dite **contradictoire**.

Si par contre une formule contient des variables libres, sa valeur de vérité dépendra, non seulement de la structure, mais aussi de l'**interprétation** choisie, c'est-à-dire de la fonction qui à chaque variable associe un élément de la structure.

**Exemple.** Considérons la formule suivante

$$x < y + 3$$

et on choisit comme structure le corps ordonné des réels, les nombres 2 et 3 satisfont la formule mais les nombres 3 et  $-3$  ne la satisfont pas.

Si une formule  $F$  est satisfaite dans une structure pour toute interprétation, on dit que la structure est un **modèle** de  $F$ .

## 1.5 Analyse des manuels

Si la section précédente était réservée aux enseignants, dans cette section nous présentons une analyse de l'enseignement de la logique dans les manuels scolaires, qui sont réservés aux élèves. On verra que beaucoup de simplifications sont faites dans la présentation des notions et une part plus grande est laissée à l'intuition.

Puisque notre expérimentation est faite dans des classes de seconde, nous avons analysé seulement des manuels de ce niveau scolaire.

Le premier est celui utilisé en seconde dans le lycée dans lequel on effectue notre étude, les deux autres étant deux manuels présentant la logique de manière a priori très différentes.

Dans le manuel de seconde choisi par le lycée (Odyssee 2nde-Mathématique [4]) dans lequel on a effectué notre étude, est présent un petit chapitre appelé "**Le raisonnement logique**". Ici on retrouve une première distinction entre langage et logique naturelle et langage et logique mathématique. En effet, dans un premier paragraphe "**Les connecteurs logiques : et, ou**" est présenté la différence entre le *ou exclusif* de la langue française (« tu veux du fromage ou du dessert ? ») et le *ou inclusif* que l'on utilise en mathématiques. Le lien entre les connecteurs logiques et les relations ensemblistes, réunion et intersection, est aussi présenté dans ce paragraphe. Le deuxième paragraphe "**Les quantificateurs : pour tout, quel que soit, il existe**" présente avec des exemples les différents types de quantificateurs et il est remarqué aussi que ces quantificateurs peuvent être implicites et donc qu'il faut bien les repérer, cependant il n'y a pas d'exemples donnés pour illustrer ce propos. Le troisième paragraphe "**Implication, réciproque, contraposée et équivalence**" (Figure 1.1) présente l'implication *comme le principe du raisonnement mathématique*.

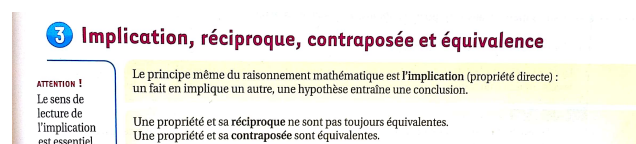


FIGURE 1.1 – Définition implication (Odyssee [4])

Par contre une définition de cette notion n'est pas donnée. En revanche un tableau résume les relations entre ces propositions. Le dernier paragraphe "**Les outils du raisonnement dans la démonstration**" (Figure 1.2) liste les principales méthodes de démonstration utilisées en seconde et en première : par contre-exemple, par l'absurde, par contraposée et par disjonctions des cas. Dans cette liste il manque la preuve d'une existence par un exemple.

Ce chapitre, tout en étant assez riche dans les arguments, a le défaut de ne pas donner les définitions des objets traités mais seulement leur utilités grâce à de nombreux exemples.

Cela est probablement dû au fait qu'il est difficile de proposer une définition simple et claire qui puisse convenir à un élève de seconde. En effet prenons l'exemple de l'impli-

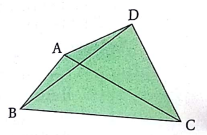
### 4 Les outils du raisonnement dans la démonstration

**a. Le contre-exemple**

Le contre-exemple s'utilise pour démontrer qu'une proposition n'est pas toujours vraie.

**EXEMPLES**

- TOM. – Aujourd'hui, on fabrique tout en Chine !  
LYDIA. – C'est faux : mon sac a été fabriqué en France.
- « Un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle. »  
Cette affirmation est fausse si les diagonales ne se coupent pas en leur milieu.  
La figure ci-contre est un contre-exemple.
- « L'expression  $x^2 - x$  est positive ou nulle pour tout réel  $x$ . »  
Cette phrase est fausse car pour  $x = \frac{1}{2}$  on a  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} < 0$ .



**b. Le raisonnement par l'absurde**

Le raisonnement par l'absurde consiste à émettre comme hypothèse le contraire du résultat escompté. Si cela conduit à un résultat absurde (ou faux) alors on aura démontré que le résultat attendu était juste.

**EXEMPLE**

S'il existe un nombre  $x$  solution de l'équation  $x^2 + 1 = 0$  alors  $x^2 = -1$ , ce qui est impossible car un carré est toujours positif.  
Donc l'équation  $x^2 + 1 = 0$  n'a pas de solution.

FIGURE 1.2 – Exemples de démonstrations (Odyssee [4])

cation : il est bien souvent défini par une proposition du type "si... alors..." qui renferme ainsi une implication en son sein.

De même malgré les nombreux exemples, il n'est pas certain que ceux-ci suffisent à montrer toutes les subtilités du raisonnement logique. Par exemple sur les quantificateurs implicites ce livre ne donne que deux exemples où le mot "un" est interprété de deux manières différentes(Figure 1.3). Cela est dommageable puisque après avoir insisté sur l'importance de l'explicitation des quantificateurs, un exemple portant sur l'implication comporte des quantificateurs implicites.

**ATTENTION !** Les quantificateurs sont essentiels dans une proposition mais ils sont souvent implicites il faut donc veiller à les repérer.

**EXEMPLES**

- « Un parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle. »  
Le quantificateur implicite est « **tout** ».
- « Un parallélogramme peut avoir des diagonales de même longueur. »  
Le quantificateur implicite est « **il existe** ».

Les deux quantificateurs « tout » et « il existe » sont souvent liés lorsqu'il s'agit d'énoncer le contraire d'une proposition.

**EXEMPLES**

- Le contraire de la proposition « **Toutes** les fenêtres sont fermées » est la proposition « **Il existe** une fenêtre (au moins) d'ouverte ».
- Le contraire de la proposition « **Tous** les carrés sont des losanges » est la proposition « **Il existe** des losanges qui ne sont pas carrés ».

FIGURE 1.3 – Quantificateurs implicites (Odyssee [4])

Un autre défaut de ce manuel est la difficulté de repérer des activités qui font intervenir la logique de manière évidente alors que les exercices sur l’algorithmique ou les problèmes ouverts sont bien mis en évidence.

Il présente tout de même un bon point de départ pour les élèves.

Le deuxième manuel que l’on va analyser est le manuel Math’x 2nde de 2014 [5].

Ce manuel est complet du point de vue de la logique. Toutes les notions en jeu sont présentées et agrémentées de très nombreux exemples. Ce manuel laisse ponctuellement des méthodes de raisonnements, par exemple après avoir présenté la contraposée d’une proposition conditionnelle, il enchaîne avec le raisonnement par contraposée. Il est aussi intéressant de voir que ce manuel prend le temps d’expliquer les exemples proposés tout en soulevant des points difficiles. On peut aussi remarquer l’effort fait pour expliciter les quantificateurs (Figure 1.4). Le manuel remarque essentiellement les différentes significations du mot "un".

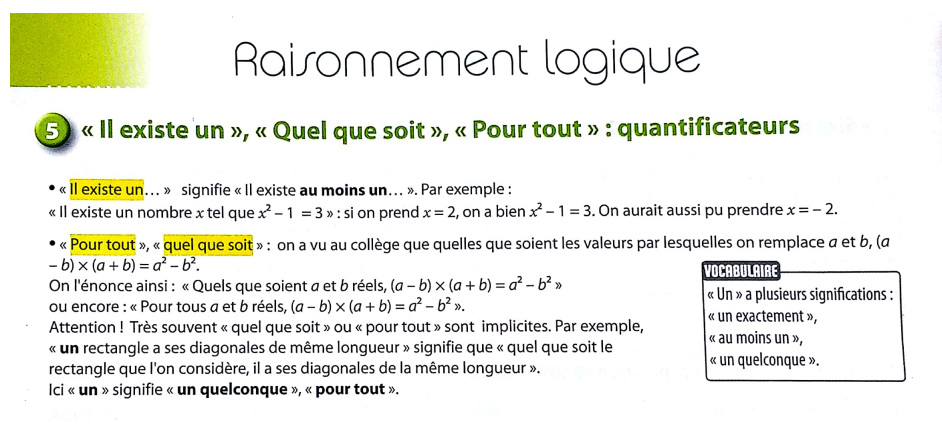


FIGURE 1.4 – Quantificateurs implicites (Math’x [5])

De plus le manuel donne toute une série d’exercices sur la logique et le raisonnement donnant ainsi une base d’exercices au professeur pour faire travailler ses élèves.

Enfin le dernier manuel analysé est Déclic [3].

Ce manuel ne comporte qu’une seule page concernant la logique et le raisonnement. Bien que la partie dédiée à la logique soit très courte, le manuel arrive à parler d’une grande majorité des sujets liés à la logique. On peut cependant remarquer un manque d’explications et d’exemples. En effet certains exemples, pourtant intéressants, mériteraient des explications supplémentaires afin de montrer pourquoi ces exemples ont été choisis. Il est regrettable aussi que ce manuel ne précise pas l’importance des quantificateurs en logique.

Ainsi il ne parle pas des quantificateurs implicites alors que leur utilisation est courante dans leurs exemples.

1. Symboles, vocabulaire	Exemples
<p><b>a. L'équivalence</b></p> <p>Le symbole <math>\Leftrightarrow</math> se lit « équivaut à », « si et seulement si ».</p> <p>Il se place entre deux propositions ; Il signifie que celles-ci sont <b>simultanément vraies</b> (ou encore <b>simultanément fausses</b>).</p> <p><b>b. La conjonction « et »</b></p> <p>« et » entre deux propositions (ou entre deux événements), signifie que les deux propositions doivent être <b>simultanément vraies</b> (ou les événements réalisés tous deux).</p> <p><b>c. La disjonction « ou »</b></p> <p>« ou » entre deux propositions (ou entre deux événements), signifie que <b>l'une des propositions au moins</b> (ou l'un des événements) et <b>peut-être les deux</b> doivent être vraies (ou réalisés).</p>	<p><b>a. L'équivalence</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>ABC</math> est un triangle rectangle en <math>A \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2</math>.</li> <li>• Les points <math>A, B</math> et <math>C</math> sont alignés <math>\Leftrightarrow</math> les vecteurs <math>\vec{AB}</math> et <math>\vec{AC}</math> sont colinéaires.</li> </ul> <p><b>b. La conjonction « et »</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• « <math>x \geq -5</math> et <math>x \leq 1</math> » signifie « <math>x \in [-5; +\infty[ \cap ]-\infty; 1]</math> », soit « <math>-5 \leq x \leq 1</math> ».</li> <li>• Lors du tirage d'une carte dans un jeu de 32, obtenir « un roi » et « un pique » signifie « obtenir le roi de pique ».</li> </ul> <p><b>c. La disjonction « ou »</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• « <math>x \in [-1; 2]</math> ou <math>x \in ]0; 3]</math> » signifie « <math>x \in [-1; 2] \cup ]0; 3]</math> », soit « <math>x \in [-1; 3]</math> ».</li> <li>• Lors d'un lancer d'un dé, « obtenir un multiple de 3 » ou « un numéro supérieur à 4 » signifie « obtenir l'un des numéros suivants : 3, 4, 5, 6 ».</li> </ul>

FIGURE 1.5 – Extrait du manuel Déclic [3])

Finalement on peut remarquer que les manuels sont très disparates concernant l'enseignement de la logique. Certains manuels sont complet et parlent de l'essentiel des problèmes liés à l'enseignement de la logique, alors que d'autres manquent véritablement de contenu. Bien que l'enseignement de la logique soit explicitement présent dans les programmes du lycée, des améliorations sont encore à produire pour pouvoir donner aux élèves des manuels avec une partie sur la logique plus aboutie pour permettre ensuite un meilleur enseignement de la logique au lycée.

Il existe cependant d'autres ressources que les manuels pour les professeurs. Par exemple, sur le site Eduscol, on peut trouver le document intitulé "Notations et raisonnement mathématiques" [2](Extrait dans la Figure 1.6). Ce document est beaucoup plus complet que les manuels, et il permet de lier la logique aux différentes notions mathématiques traitées en seconde.

### Exemple 3

- Reformuler les énoncés suivants en faisant apparaître les quantifications.
- Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x + 5$ .
- (Pour tout nombre réel  $x$ , l'image de  $x$  par la fonction  $f$  est égale à  $2x + 5$ )
- L'équation  $f(x) = 2x + 5$  a-t-elle des solutions ?
- (Existe-t-il des nombres réels  $x$  pour lesquels  $f(x)$  et  $2x + 5$  sont égaux ?)
- Résoudre l'équation  $f(x) = 2x + 5$ .
- (Trouver l'ensemble de tous les réels  $x$  pour lesquels  $f(x)$  et  $2x + 5$  sont égaux)

FIGURE 1.6 – Extrait du document "Notations et raisonnement mathématiques [2])

# Chapitre 2

## La logique en classe

### 2.1 Activités préliminaires

Dès le début de l'année scolaire, des activités liées à la logique ont déjà été abordées en classe.

La première activité est un exercice du manuel Odyssée qui demande de déterminer la vérité ou la fausseté de certaines affirmations sur les nombres(Figure 2.1).

#### 31 Vrai ou faux ?

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.

- a. L'opposé d'un entier naturel est un entier naturel.
- b. L'opposé d'un entier relatif est un entier négatif.
- c. L'inverse d'un entier non nul est un décimal.
- d. L'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel.
- e. La racine carrée d'un entier naturel est toujours irrationnelle.

FIGURE 2.1 – Vrai ou faux sur les nombres (Odyssée [4])

Dans cet exercice on retrouve le problème de l'utilisation implicite des quantificateurs (dans ce cas le quantificateur *pour tous*).

La deuxième activité, toujours prise dans le manuel Odyssée, demande dans un premier temps de formuler une conjecture (sous forme d'implication) à partir de certains cas particuliers et de la démontrer(Figure 2.2).

Presque tous les élèves ont formulé la bonne conjecture (si un nombre est pair, son carré est pair ; si un nombre est impair, son carré est impair). La démonstration de cette conjecture a été plus difficile à cause de l'écriture générale d'un nombre pair ou impair

**63** **Pair ou impair ?**

**1. a.** Calculer  $2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 22^2, 23^2$ .  
**b.** Quel lien peut-on conjecturer entre la parité d'un entier et celle de son carré ?

**2.** Un entier naturel pair admet une écriture de la forme  $n = 2k$  où  $k$  est un entier naturel.  
 Un entier naturel impair admet une écriture de la forme  $n = 2k + 1$  où  $k$  est un entier naturel.  
 En exprimant  $n^2$  dans chacun des cas, démontrer la conjecture émise à la question **1**.

**3.** Montrer la réciproque, c'est-à-dire les propriétés suivantes.  
**a.** Si un entier a un carré pair, alors cet entier est pair.  
**b.** Si un entier a un carré impair, alors cet entier est impair.


**REMARQUE**  On fait ici un raisonnement par contraposée.

FIGURE 2.2 – Conjectures avec les nombres entiers (Odyssee [4])

que les élèves n'avaient jamais rencontrée. Cette activité a donné l'occasion de parler d'implication, de réciproque et de contraposée ainsi que des liens entre eux.

Plus avant dans l'année, une activité récapitulative a été proposé aux élèves.

**Question 1** Soit  $f$  une fonction croissante. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

- A Si  $a < b$ , alors  $f(a) \leq f(b)$ .
- B Si  $f(a) = f(b)$ , alors  $a < b$ .
- C Si  $a < b$ , alors  $f(a) > f(b)$ .

**Question 2** Une seule des affirmations suivantes est vraie.

- A Si  $a$  est un nombre naturel et  $b$  est un nombre entier, alors leur produit est un nombre naturel.
- B  $\frac{a}{b} = 0$  si et seulement si  $a = 0$ .
- C  $\frac{a}{b} = 1$  si et seulement si  $b = 1$ .

**Question 3** Soit  $(O; I, J)$  un repère. Une seule des affirmations suivantes est vraie.

- A Si  $OIJ$  est un triangle rectangle, alors le repère est orthonormé.

B Si  $OIJ$  n'est pas un triangle rectangle isocèle, alors le repère n'est pas orthonormé.

C Si  $OIJ$  est un triangle isocèle, alors le repère est orthonormé.

**Question 4** Soit  $f$  la fonction qui à tout réel  $x$  associe la moitié de  $x$ . Quelle est l'affirmation fautive ?

A 5 est l'image de 10.

B L'antécédent de 14 est 7.

C L'antécédent de 7 est 14.

**Question 5** On considère une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  et telle que  $f(-1) = 2$  et  $f(3) = 5$ . Que peut-on dire des variations de  $f$  sur  $[-1; 3]$  ?

A  $f$  est croissante sur  $[-1; 3]$ .

B  $f$  est décroissante sur  $[-1; 3]$ .

C On ne peut rien dire.

---

Ce QCM avait l'objectif de vérifier la capacité des élèves de distinguer une condition nécessaire d'une condition suffisante dans un énoncé mathématique, de faire un raisonnement mathématique correct, en vérifiant en particulier la vérité d'une implication. Un outil numérique (application Plickers) a été utilisé pour repérer les réponses des élèves. Cet outil a l'avantage d'inciter fortement chaque élève à répondre aux questions et à participer à l'activité. De plus il permet de faire une évaluation diagnostique rapide et ludique.

## 2.2 Activité du Labyrinthe

Comme on l'a remarqué dans notre analyse théorique, c'est une bonne pratique d'introduire une problématique de logique d'abord dans un contexte non mathématique. Nous avons donc repris une activité présentée dans DURAND-GUERRIER (1999) [9] en la modifiant pour rendre l'enjeu des quantificateurs plus important. Voici ci-contre l'énoncé donné aux élèves de l'activité du labyrinthe modifiée.

## Le labyrinthe

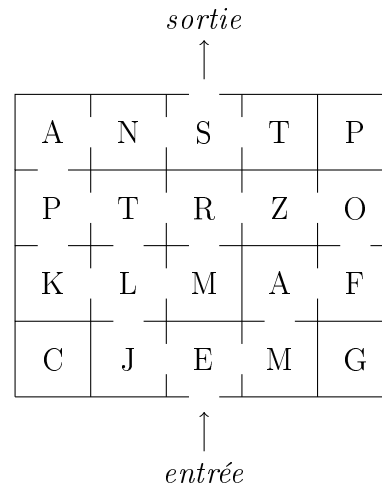
Voici un labyrinthe.

Lire attentivement les lignes ci-dessous avant de répondre aux questions.

Une personne, que nous appellerons X, a traversé ce labyrinthe de l'entrée à la sortie *sans jamais être passée* deux fois par la même porte.

En rentrant dans une salle, X voit une lettre qui est visible seulement une fois dans la salle. On peut retrouver une même lettre dans deux salles différentes.

La répartition des lettres est indiquée dans la figure ci-contre.



Il est possible d'énoncer des phrases qui aient un sens par rapport à la situation proposée et sur la vérité desquelles on puisse se prononcer (VRAI ou FAUX), ou qui peuvent être telles que les informations que l'on possède ne suffisent pas pour décider si elle sont vraies ou fausses (ON NE PEUT PAS SAVOIR).

Par exemple, la phrase "X a vu la lettre E" est une phrase VRAIE. En effet, on affirme que X a traversé le labyrinthe qui a une pièce d'entrée et dans laquelle il y a la lettre E. Pour chacune des six phrases suivantes, dire si elle est VRAIE, FAUSSE ou si ON NE PEUT PAS SAVOIR, et, dans chaque cas, expliquez votre réponse.

Étant donné un trajet quelconque, on peut affirmer que :

1. X a vu la lettre N
2. X a vu la lettre P
3. X a vu la lettre M
4. Si X a vu la lettre O, alors X a vu la lettre F
5. Si X a vu la lettre K, alors X a vu la lettre L
6. Si X a vu la lettre L, alors X a vu la lettre K

Les réponses que l'on considérera comme correctes sont :

**Phrase 1 :** VRAIE

**Phrase 2 :** VRAIE

**Phrase 3 :** FAUSSE

**Phrase 4 :** VRAIE

**Phrase 5 :** VRAIE

**Phrase 6 :** FAUSSE

### Formalisation de la situation en utilisant la variable *trajet* et la variable *lettre*

Pour pouvoir justifier les réponses que l'on estime correctes, comme dans l'activité originale du labyrinthe (DURAND-GUERRIER (1999) [9]), on va modéliser la tâche dans le langage du calcul des prédicats.

La lettre X n'est pas une variable d'un point de vue logique et avec le mot "trajet" on entend toujours une liste finie de lettres (éventuellement répétées) prises dans l'ensemble  $\{A, C, E, F, G, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T\}$  qui décrit le chemin permettant de traverser le labyrinthe.

Puisque l'on n'a pas apporté de modifications aux phrases 4, 5 et 6, on peut utiliser la même modélisation que DURAND-GUERRIER (1999) [9].

On note  $T$  l'ensemble de tous les trajets qui permettent de sortir du labyrinthe. Pour chaque lettre  $O, F, K$  et  $L$  on introduit un prédicat sur  $T$ , qu'on note généralement  $\mathcal{Z}^1$ , défini de la façon suivante :

pour tout trajet  $\tau$ ,  $\mathcal{Z}(\tau)$  est vrai si et seulement si la lettre  $Z$  apparaît dans  $\tau$

Si on note  $t$  la variable *trajet*, on obtient alors les formalisations suivantes :

$$F_4 \quad (\forall t)(\mathcal{O}(t) \rightarrow \mathcal{F}(t))$$

$$F_5 \quad (\forall t)(\mathcal{K}(t) \rightarrow \mathcal{L}(t))$$

$$F_6 \quad (\forall t)(\mathcal{L}(t) \rightarrow \mathcal{K}(t))$$

Ces formules sont des formules closes pour lesquelles la valeur de vérité ne dépend pas de l'interprétation de la variable  $t$  dans la structure  $(T, \mathcal{O}, \mathcal{F}, \mathcal{K}, \mathcal{L})$ . Les phrases 4 et 5

---

1. Avec un abus de notation, on utilise le même symbole pour le prédicat et pour son interprétation.

sont donc VRAIES dans cette structure et la phrase 6 est FAUSSE (pour tout trajet, si on voit la lettre O, alors on voit nécessairement la lettre F, de même, si on voit la lettre K on voit nécessairement la lettre L, par contre il existe un trajet dans lequel il apparaît la lettre L mais pas la lettre K).

Une modélisation différente est nécessaire pour les phrases 1, 2 et 3 si l'on veut rester dans le cadre de la logique du premier ordre. En fait, en faisant apparaître dans plusieurs pièces la même lettre on a plusieurs prédicats du même type ("on voit la lettre P dans le trajet", "on voit la lettre M dans le trajet") et la quantification se porte alors sur les prédicats et non plus sur les variables.

Pour cette raison on utilise un nouveau langage qui a un seul prédicat qu'on note  $\mathcal{V}$ . Si on note  $l$  la variable lettre, on obtient pour les phrases 1, 2 et 3 la même formalisation,  $F : (\exists l), \mathcal{V}(l)$ , qui est une formule du premier ordre close. La structure dans laquelle on va interpréter cette formule est par contre différente pour chaque phrase. Si  $\ell$  est une lettre parmi N, P et M, on considère  $I_\ell$  l'ensemble des pièces du labyrinthe qui contiennent la lettre  $\ell$  et  $\mathcal{V}^2$  la relation sur  $I_\ell$  définie de la façon suivante :

$\mathcal{V}(\ell)$  est vraie si tout trajet<sup>3</sup> passe par la pièce qui contient la lettre  $\ell$ .

Tout trajet passe par l'unique pièce qui contient la lettre N, donc on interprète la phrase 1 dans la structure  $(I_\ell = \{N\}, \mathcal{V} = \{N\})$ . La formule  $F$  est toujours satisfaite et donc la phrase 1 est VRAIE.

Dans le labyrinthe on a deux instances pour la lettre P, que l'on peut noter  $P_1$  et  $P_2$ <sup>4</sup>. Tout trajet passe par la pièce qui contient la première instance, mais aucun trajet ne passe par la pièce qui contient une deuxième fois la lettre P. Donc la structure considérée est  $(I_\ell = \{P_1, P_2\}, \mathcal{V} = \{P_1\})$  et la formule  $F$  est satisfaite seulement si l'on interprète la variable  $l$  avec  $P_1$ . La phrase 2 est donc VRAIE.

De même, pour la lettre M on a deux instances,  $M_1$  et  $M_2$ . Par contre aucune des deux instances n'est présente dans tout trajet (il existe un trajet qui passe par aucune des deux instances). La structure considérée est alors  $(I_\ell = \{M_1, M_2\}, \mathcal{V} = \emptyset)$  dans laquelle la formule  $F$  n'est jamais satisfaite. La phrase 3 est alors FAUSSE.

2. On utilise encore le même symbole pour le prédicat et pour son interprétation.

3. Avec le mot trajet on entend toujours un chemin qui permet de traverser le labyrinthe de l'entrée à la sortie.

4. On compte de l'entrée à la sortie.

## Analyse *a priori*

### Objectifs

- Faire prendre conscience aux élèves des ambiguïtés des quantificateurs implicites.
- Définir la vérité ou la fausseté d'une affirmation qui contient, ou pas, des quantificateurs.

### Compétence

- Raisonnement logique : quantificateurs et leur ensemble de définition.

### Choix de l'activité

Nous avons choisi de reprendre le premier exercice présent dans la brochure EVAPM2/91 publié par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP). L'exercice dit du Labyrinthe visait la maîtrise de l'implication et de la quantification implicite des énoncés conditionnels. Dans la version originale, à chaque pièce était associée une lettre différente et les phrases pouvaient être formalisées par des formules non closes du calcul des prédicats où la variable en jeu était la variable *trajet*.

En regardant les réponses données par les élèves, on a pu remarquer que le taux de réussite était assez élevé, sauf pour la phrase 6, qui est la réciproque de la phrase 5 (voir I.2 DURAND-GUERRIER (1999) [9] et voir table ci dessous). Il semble alors que les élèves reconnaissent qu'une expression conditionnelle sous-entend de manière quasi systématique une quantification universelle.

	Taux de réussite
<b>Phrase 1</b>	100%
<b>Phrase 2</b>	96%
<b>Phrase 3</b>	85%
<b>Phrase 4</b>	93%
<b>Phrase 5</b>	69%
<b>Phrase 6</b>	29%

TABLE 2.1 – Taux de bonnes réponses dans l'expérimentation de DURAND-GUERRIER (1999) [9]

On a alors décidé d'apporter des modifications à l'exercice. Premièrement, on a ajouté la phrase "étant donné un trajet quelconque" avec laquelle on marque la quantification universelle de la variable *trajet*. Deuxièmement, nous avons modifié le labyrinthe de manière à faire apparaître plusieurs fois la même lettre. On a ainsi introduit une deuxième variable, la variable *lettre*.

La phrase 1 ne fait pas encore intervenir de problèmes avec les quantificateurs. En effet tous les trajets passent par une pièce qui contient la lettre N, et donc que les élèves réfléchissent avec "pour tout" ou "il existe" ne changera pas la valeur de vérité de la phrase. De même il n'y a qu'une seule pièce qui contient la lettre N et donc la quantification ("pour tout", "il existe") de la variable *lettre* ne change pas la valeur de vérité de l'affirmation.

Lors des deux phrases suivantes la quantification des variables devient importante. Dans le premier cas, la quantification de la variable *lettre* modifie la valeur de vérité de la phrase et la quantification de la variable *trajet* n'a pas d'influence. Si l'élève comprend la quantification de la variable lettre de manière existentielle alors la phrase est VRAIE, et FAUSSE sinon. À l'inverse dans le second cas c'est la quantification de la variable *trajet* qui est déterminante. En effet si l'élève utilise une quantification existentielle la phrase est VRAIE, et FAUSSE sinon.

Sur les trois dernières phrases, on travaille l'implication sous la forme *si... alors*. Pour simplifier la tâche seulement la quantification de la variable *trajet* est utile, les pièces qui contiennent les lettres F, K, L et O étant uniques, les quantifications existentielle et universelle sont équivalentes.

### **Déroulement de l'activité**

On va effectuer cette activité dans deux séances différentes. Dans la première, où on sera en classe entière, les élèves répondront individuellement. Dans la deuxième les élèves seront répartis en petits groupes en fonction des réponses données lors de la séance 1 et ils vont rédiger une réponse et un explication commune. Pour favoriser la prise de paroles de chacun et une meilleure gestion de la classe la deuxième séance aura lieu pendant des heures de dédoublement dans lesquelles l'effectif de la classe est la moitié de celui habituel.

#### *Séance 1 (~ 15 min)*

- L'enseignant explique le déroulé de la séance aux élèves, explique l'activité et répond

aux éventuelles questions. Il précisera particulièrement aux élèves que cette activité n'est pas notée (2 min).

- Les élèves réfléchissent individuellement à chacune des questions, et ne doivent pas communiquer entre eux. L'enseignant a un rôle de garant du respect des règles et n'intervient pas dans les raisonnements des élèves. Les réponses sont récupérées à la fin du temps imparti. ( ~ 10 min)

*Séance 2* (50 min)

- L'enseignant forme des groupes de réflexion sur la base des réponses données lors de la première séance (La méthode de répartition sera détaillée plus tard). Chaque groupe est indépendant, c'est à dire qu'il ne doit pas y avoir de communication entre groupes différents. Les élèves d'un groupe pourront échanger sur les réponses données lors de la séance précédente. Le rôle de l'enseignant est donc le même que lors de la phase individuelle. (maximum 25 min)
- Après discussion les élèves peuvent confirmer ou modifier les réponses données dans la première séance, via une nouvelle feuille. (5 min)
- Avec une mise en commun en suivant les règles du débat scientifique, on pourra constater les divergences d'opinions. Ainsi on pourra tenter de reformuler les phrases en faisant apparaître des quantificateurs. Cela permettra de réaliser une institutionnalisation locale de l'activité, c'est-à-dire formalisé l'activité en utilisant des outils théoriques qui seront définies plus tard (20 min).

### **Institutionnalisation locale**

Comme on l'a déjà dit, une première chose à faire avec les élèves, c'est de réécrire les phrases en faisant apparaître explicitement les quantificateurs. On pourra ensuite donner différentes règles générales pour déterminer si une phrase est fausse.

Une phrase est fausse s'il existe un contre-exemple. Sinon elle est vraie.

### **Prévision des réponses et des difficultés**

Pour la phrase 1 on peut s'attendre à ce que tous les élèves répondent "VRAIE". On ne s'attend donc pas à des difficultés sur cette phrase.

Concernant la phrase 2, on s'attend à ce que la majorité des élèves quantifie la variable *lettre* de façon existentielle car c'est la quantification qui semble la plus naturelle. Il est

possible que certains élèves utilisent le quantificateur universel. On devrait donc avoir une majorité de réponse "VRAIE" car tous les trajets passent par une pièce qui contient la lettre P.

Ensuite, pour la phrase 3 on s'attend à une grande répartition entre les trois réponses possibles car il y a un trajet ne passant par aucune des pièces contenant la lettre M, un trajet qui passe par une seule pièce qui contient M et un trajet passant par les deux.

Enfin, pour les phrases 4, 5 et 6 on s'attend à avoir des résultats similaires à ceux obtenus dans l'article résumé dans le tableau précédent (voir Table 2.1).

En effet nous n'avons pas apporté de modification majeure par rapport à l'énoncé original. La difficulté, ici, est dû au fait que derrière la phrase 4 il y a une équivalence. Or ceci n'est plus vrai sur les phrases 5 et 6.

## ***Analyse a posteriori***

L'expérimentation a eu lieu lors des dates suivantes :

- seconde 1 (35 élèves), les 8 et 9 mars ;
- seconde 6 (24 élèves), les 9 et 12 mars ;
- seconde 10 (35 élèves), les 9 et 12 mars.

Globalement les différentes séances se sont bien déroulées malgré l'absence de quelques élèves pendant la phase individuelle.

### **Commentaires de la phase individuelle**

Nous avons commencé par présenter l'activité sans oublier de dire dès le départ que l'activité n'était pas notée. Ensuite nous avons précisé que cette phase était individuelle et qu'ils travailleraient en groupe lors de la prochaine séance. Nous avons lu dans les grandes lignes l'énoncé et expliqué les règles de déplacement dans le labyrinthe puis nous les avons laissés faire l'activité durant une quinzaine de minutes.

Beaucoup d'élèves sont restés perturbés dans un premier temps par l'activité car ils ne comprenaient pas bien ce qu'on leur demandait de faire. On suppose que certains élèves n'avaient pas lu assez attentivement l'énoncé de l'activité, il est aussi possible qu'ils aient eu besoin d'un temps d'adaptation à l'activité du fait qu'ils n'y soient pas habitués. Ainsi des questions telles que "Doit-on considérer un chemin en particulier ou pas ?" ou "Quelle

lettre P il faut considérer ?" ont été posées. On a alors répondu de manière neutre en leur demandant de faire un choix qu'ils devront expliquer.

Derrière la majorité de leurs questions se cache l'envie de connaître la quantification des variables, qui est implicite dans cette activité.

D'après les commentaires oraux des élèves durant cette première phase on a supposé que les élèves allaient quantifier existentiellement les variables. Mais après la lecture de leurs réponses écrites, aucune quantification réelle n'a été faite. Ceci s'est majoritairement traduit par la réponse ON NE PEUT PAS SAVOIR lors de l'apparition d'un contre-exemple.

De rares élèves sont restés complètement bloqués et perturbés par les ambiguïtés de l'exercice. Au point pour un élève de ne pas rendre de réponse. On a essayé de rassurer ces élèves en leur précisant bien que le travail n'était pas noté, qu'il n'y avait pas de réponse "juste" et qu'ils auraient l'occasion d'en discuter avec leurs camarades la prochaine fois.

Une fois bien lancés, les élèves se sont pris au jeu et sont restés concentrés pour trouver les réponses. Par contre beaucoup d'élèves n'ont pas pris la peine de justifier correctement leurs réponses.

Un problème non anticipé pour les questions 4, 5 et 6 fut que l'ordre d'écriture des lettres de la phrase a été interprété comme l'ordre de passage (Je passe d'abord par O puis après par F), ce qui a apporté une confusion pour quelques élèves.

Certains élèves ont répondu VRAI ET FAUX ce que l'on a interprété par ON NE PEUT PAS SAVOIR dans les résultats.

### **Commentaires de la phase de groupe**

Nous avons mis en groupe les élèves puis nous leur avons bien précisé les modalités de fonctionnement de cette seconde phase

Au départ nous avons décidé de former des groupes ayant des réponses hétérogènes lors de la phase individuelle. Cela n'a pas été simple à mettre en place du fait de l'homogénéité des réponses. Les échanges dans certains groupes ont donc été complètement stériles car tout le monde était d'accord, ou bien ont réussi à se mettre d'accord très rapidement. Nous leur avons alors demandé de bien rédiger les justifications de leurs réponses.

Lors de la mise en commun, le débat a été plus intéressant et productif. Il est probable qu'il aurait été plus constructif de modifier la construction de nos séances en éliminant la phase de groupe et en passant directement au débat. Il était intéressant d'assister au

débat car des élèves, qui habituellement ne sont pas très participatifs, avaient envie de donner leur avis et ils ne se laissaient pas faire par les commentaires des "bons élèves".

### Analyse des réponses

Dans la suite on va analyser plus en détail les réponses des élèves lors de la phase individuelle et de la phase de groupe.

Comme prévu, la première question n'a pas posé de problème particulier. Seulement 4 élèves sur toutes les classes n'ont pas répondu VRAIE.

Phrase 1	VRAI		FAUX		ONPPS	
	Ind	Groupe	Ind	Groupe	Ind	Groupe
Seconde 1	97,55%	100%	3,45%	0%	0%	0%
Seconde 6	95,23%	100%	0%	0%	4,76%	0%
Seconde 10	94,11 %	100%	0%	0%	5,88%	0%
Total	95,24%	100%	1,19%	0%	3,57%	0%

TABLE 2.2 – Taux de réponses à la phrase 1

Les justifications des quatre élèves s'étant trompé après la phase individuelle :

**Maléna :** Pas forcément car il peut également être passé par T. Donc on ne peut pas savoir.

**Laetitia :** Pas forcément ; on ne peut pas savoir, il peut passer ailleurs.

**Perrine :** On ne peut pas savoir, plusieurs choix possibles

Le quatrième élève, Yann, n'a pas justifié sa réponse.

La phase de groupe a été utile pour ramener ces quatre élèves vers la réponse attendue.

Voici un extrait du débat :

**Nicolas :** Peu importe le chemin, on passe par la lettre N.

**Tom :** Un seul passage possible pour la dernière ligne.

**Ugo :** X est obligé de passer par N

**Nicolas :** On ne peut pas accéder à P de la dernière ligne, donc Tom a faux.

La dernière remarque de Nicolas montre comme parfois on donne deux sens différents à la même expression. En fait, pour Nicolas dire "accéder à la ligne" veut dire accéder

à toutes les pièces de la ligne. Cette discussion était l'occasion de montrer aux élèves l'importance de se mettre d'accord sur le sens qu'on donne aux mots pour arriver tous à la même conclusion.

Avec la phrase 2, on peut remarquer qu'il commence à y avoir des disparités dans les réponses (par rapport à la phrase 1), même si la majorité des élèves ont répondu VRAIE comme on a pu le prévoir.

Phrase 2	VRAI		FAUX		ONPPS	
	Ind	Groupe	Ind	Groupe	Ind	Groupe
Seconde 1	82,76%	96,88%	17,24%	0%	0%	3,13%
Seconde 6	77,27%	100%	18,18%	0%	4,54%	0%
Seconde 10	67,64%	86,66%	26,47%	6,66%	5,88%	6,66%
Total	75,29%	93,98%	21,18%	2,41%	3,53%	3,61%

TABLE 2.3 – Taux de réponses à la phrase 2

Les élèves qui ont répondu VRAIE ont donner les justifications suivantes :

**Martin :** X a vu la lettre P car X doit forcément passer par la salle P pour sortir du labyrinthe.

**Flavien :** Vrai, car X est obligé de passer par là pour sortir.

Il semble qu'ils ont considéré seulement la pièce ouverte avec la lettre P. En revanche, il semble que les élèves qui ont répondu FAUSSE ont vu seulement la pièce fermée avec la lettre P d'après leur justifications :

**David :** Faux, car P est isolé et personne ne peut pas sortir ni entrer.

**Cyril :** Faux, car on ne peut pas aller sur P.

Les élèves ayant répondu ON NE PEUT PAS SAVOIR on bien considéré les deux pièces mais n'ont donc pas utilisé de quantification

**Luc :** 1ère possibilité oui, 2ème possibilité P est bloqué entre 4 murs donc impossible d'y passer.

La phase de groupe a une nouvelle fois été utile pour aller vers la réponse attendue même si il reste quelques doutes chez certains élèves.

La discussion suivante s'est produite.

**Nicolas :** On ne sais pas de quel P on parle.

**Tom :** Ce n'est pas important de quel P on parle du moment qu'on passe par une de deux.

**Paul :** On sait de quel P on parle parce que l'autre est fermée.

**Ugo :** La probabilité de passer la P non fermée est du 100%.

Avec l'affirmation de Tom on voit que il y a une première interprétation existentielle de la variable *lettre* dans cette phrase.

Pour la phrase 3, malgré une majorité des élèves qui ont répondu ON NE PEUT PAS SAVOIR lors de la phase individuelle, on peut tout de même remarquer une disparité des réponses (près de 40% des élèves ont répondu VRAIE ou FAUSSE).

Phrase 3	VRAI		FAUX		ONPPS	
	Ind	Groupe	Ind	Groupe	Ind	Groupe
Seconde 1	27,59%	0%	3,45%	12,5%	68,97%	87,5%
Seconde 6	23,8%	9,52%	14,28%	14,29%	61,9%	76,19%
Seconde 10	29,41%	13,33%	11,76%	3,33%	58,82%	83,33%
Total	27,38%	7,14%	9,52%	9,64%	63,10%	83,13%

TABLE 2.4 – Taux de réponses à la phrase 3

Voici quelques justifications intéressantes.

**Martin :** Vraie. X a vu la lettre M car il passe vers la droite de la salle E si il veut.

**Nellie :** Oui c'est possible mais pas obligatoire

**Lou-Anne :** Faux, car X n'est pas obligée de passer par cette lettre.

**Florian :** On ne peut savoir car au début X peut éviter la lettre M en passant par J puis en prennent le chemin le plus court il ne rencontre plus la lettre M mais il peut prendre à droite à la lettre L et donc passer par M.

**Colin :** On ne peut pas savoir car il y a des passages où il ne passe pas par M.

On voit que la *possibilité* de passer par M est interprétée à la fois comme une justification de la vérité pour Martin ou Nellie et comme une raison d'incertitude pour Florian

ou Colin. Lors de la phase de groupe une large majorité d'élèves ont répondu ON NE PEUT PAS SAVOIR, certainement à cause de la pression du groupe. À ce propos le cas de Lou-Anne est intéressant puisqu'elle avait bien répondu dans la phase individuelle en donnant la bonne argumentation puis elle a changé d'avis ensuite.

Les commentaires pendant le débat étaient les suivants :

**Nicolas :** Vraie, si on passe à droite en premier.

**Paul :** Ça dépend du chemin.

**Ugo :** Il y a une condition, donc on ne peut pas savoir.

Concernant la phrase 4, les résultats obtenus sont conformes à ceux prévus. On voit une large majorité de réponses VRAIE déjà dans la phase individuelle. Malheureusement on n'a pas eu beaucoup de justifications pour les autres réponses.

Phrase 4	VRAI		FAUX		ONPPS	
	Ind	Groupe	Ind	Groupe	Ind	Groupe
Seconde 1	93,10%	100%	0%	0%	6,90%	0%
Seconde 6	80%	95,24%	20%	4,76%	0%	0%
Seconde 10	88,23%	93,33%	5,88%	3,33%	14,70%	3,33%
Total	87,95%	96,39%	7,23%	1,20%	4,82%	2,41%

TABLE 2.5 – Taux de réponse à la phrase 4

Laetitia écrit "Faux, il faut passer par Z". La lettre Z vient "après" la lettre O dans le labyrinthe et on peut donc penser que Laetitia était parmi les élèves qui avaient interprété le *si.....alors* non pas comme une implication mais comme une relation temporelle et spatiale, c'est à dire qu'il faut d'abord passer par O puis après par F. Lucas a justifié que la réponse était fausse car "il voit d'abord F avant O", pour lui l'ordre était important.

On remarque une nouvelle fois que la phase de groupe amène les élèves vers la bonne réponse.

Le pourcentage de bonnes réponses diminue pour la phrase 5.

Les élèves ont justifié leur choix pour le faux ou la troisième option avec les argumentations suivantes pour la phase individuelle :

Phrase 5	VRAI		FAUX		ONPPS	
	Ind	Groupe	Ind	Groupe	Ind	Groupe
Seconde 1	89,66%	93,75%	0%	3,13%	10,34%	3,13%
Seconde 6	77,27%	95,24%	4,54%	4,76%	18,18%	0%
Seconde 10	73,53%	96,66%	11,76%	0%	14,70%	3,33%
Total	80%	95,18%	5,88%	1,20%	14,12%	3,61%

TABLE 2.6 – Taux de réponses à la phrase 5

**Martin :** Faux. X ne passe pas par K et il n'a pas vu la lettre L car X n'a pas emprunté ces salles.

Il existe en effet un trajet qui ne passe ni par la pièce avec la lettre K ni par celle avec la lettre L. En donnant un cas où l'hypothèse et la conclusion sont fausses, Martin pense avoir donné un contre-exemple pour l'implication. Dans la phase de groupe ce raisonnement a été corrigé. On lit en fait sur sa copie que la phrase est vraie car "X passe forcément sur la lettre L si il est sur la lettre K".

**Violette :** Peut être, cela dépend de quel chemin va choisir X.

**Julie :** On ne peut pas savoir car X peut aller tout droit et donc voir la lettre T et non K.

Cette fois la présence de chemin qui ne passe pas par les deux lettres s'est traduit avec la réponse ON NE PEUT PAS SAVOIR. Après la phase de groupe, Violette et Julie donnent VRAIE comme réponse mais ne justifient pas ce choix.

En regardant le tableau qui résume le pourcentage des réponses pour la phrase 6, on peut remarquer que, sauf pour la seconde 1, les élèves se sont équitablement répartis entre les trois réponses possibles lors de la phase individuelle.

Cette dernière phrase ne présente pas de différences structurelles avec les phrases 4 et 5, c'est pour cela qu'il est encore plus intéressant d'analyser les productions des élèves.

**Clotilde :** Vrai, car L est après K.

Une justification spatiale est alors donnée lors de la phase individuelle. Cette réponse est changée par ON NE PEUT PAS SAVOIR dans la phase de groupe en donnant comme justification la présence de chemins qui ne passent pas par K.

Phrase 6	VRAI		FAUX		ONPPS	
	Ind	Groupe	Ind	Groupe	Ind	Groupe
Seconde 1	6,90%	0%	37,93%	43,75%	55,17%	56,25%
Seconde 6	22,73%	0%	40,91%	66,67%	36,36%	33,33%
Seconde 10	21,88%	6,66%	37,5%	16,66%	40,62%	76,66%
Total	16,87%	2,41%	38,55%	39,76%	44,58%	57,83%

TABLE 2.7 – Taux de réponses à la phrase 6

Dans la Figure 2.3 on voit la réponse de Corentin. Lors de la phase individuelle il avait répondu correctement mais sans donner de justification. Ce qui est intéressant c'est que, après la phase de groupe, il reconnaît qu' « il n'a pas forcément vu K » mais cela ne le mène pas à la bonne conclusion (le *faux* est effacé).

FIGURE 2.3 – Réponse de Corentin pour la phrase 6

**Pierre :** On ne peut pas savoir car K est sur l'un des chemins que l'on peut prendre après L donc peut être oui, peut être non.

La possibilité d'avoir plusieurs chemins possibles se traduit par une incertitude de la réponse, ce qui est confirmé aussi dans la phase de groupe.

### Conclusion générale de l'activité

La phase de groupe a bien servi pour confirmer le vrai, mais les élèves ont eu beaucoup plus de mal lorsqu'ils ont dû étudier le faux. En effet ils interprètent dans la plupart de cas un contre-exemple non pas comme une preuve du faux mais comme un doute sur le vrai les menant donc vers la réponse ON NE PEUT PAS SAVOIR.

La réponse FAUSSE n'est pas une réponse naturelle des élèves, il faut donc que le faux prenne une part plus importante en classe pour habituer les élèves à la recherche de contre-exemple et surtout leur utilité pour infirmer une affirmation.

## 2.3 Activités d'entraînement et test final

Une fois introduite la problématique des quantificateurs avec l'activité du labyrinthe, on a prévu d'*entraîner* les élèves avec des exercices dont la thématique est celle du chapitre abordé au moment.

L'activité suivante est un exercice du manuel Odyssée [4] reformulé pour rendre la quantification implicite.

### Second degré

Soit  $f$  la fonction carré définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$ . Pour chacune de phrase suivantes, reformuler en faisant apparaître les quantificateurs appropriés, puis indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

- (a) Les nombres réels ont exactement une image par  $f$ .
- (b) Au moins un nombre réel n'a pas un antécédent par  $f$ .
- (c) Les nombres réels ont au plus un antécédent par  $f$ .
- (d) Les nombres réels ont au plus un antécédent par  $f$ .

Ce sont des questions typiques sur la fonction carré. On va présenter cette activité aux élèves après avoir montré de nombreux exemples de calcul d'antécédent et d'image pour chaque type de nombre (entier positif ou négatif). Avant de les laisser répondre, puis on va demander aux élèves de reformuler les affirmations en explicitant les quantificateurs. On pourrait demander à des volontaires d'écrire leurs propositions au tableau et les faire voter par le reste de la classe.

En suivant le même modèle, on va proposer aux élèves une activité sur la géométrie dans l'espace, qui est le chapitre suivant celui sur le second degré dans la progression du lycée en mathématiques. L'idée est de montrer aux élèves que la *problématique* des quantificateurs est présente dans tout contexte mathématique et qu'il faut toujours y prêter attention.

### Géométrie dans l'espace

Pour chacune des affirmations suivantes, reformuler en faisant apparaître les quantificateurs appropriés, puis indiquer si elle est vraie ou fausse.

1. Soit  $P$  et  $P'$  deux plans strictement parallèles.
  - (a) Une droite de  $P$  est toujours parallèle à  $P'$ .
  - (b) Une droite de  $P$  et une droite de  $P'$  sont toujours parallèles.
  - (c) Au moins une droite de  $P$  est parallèle à une droite de  $P'$ .
  - (d) Une droite de  $P$  et une droite de  $P'$  sont non coplanaires.
2. Soit  $d$  une droite strictement parallèle à un plan  $P$ .
  - (a) Une droite parallèle à  $d$  est parallèle à  $P$ .
  - (b) Une droite parallèle à  $P$  est parallèle à  $d$ .
  - (c) Étant donnée une droite  $d'$  de  $P$ , elle est parallèle à  $d$ .
  - (d) Une droite sécante  $d$  coupe le plan  $P$ .

Pour créer cette activité on a modifié le texte de deux exercices du manuel *Odyssée* [4]. On a aussi précisé que les deux plans de la première question et que la droite et le plan de la deuxième sont strictement parallèles. Sans cette précision on n'aurait pas pu donner une valeur de vérité à l'affirmation 1.(d) et 2.(d), celle-ci dépendant de la position relative des deux objets de l'espace.

Le dernier exercice que nous proposerons est en relation avec le dernier chapitre de la progression : la probabilité.

### Probabilité

On tire trois boules dans un sac contenant trois boules rouges et trois boules noires. On considère les deux événements suivants :

A « On tire au moins une boule noire »

B « On tire que des boules noires »

1. Reformuler les deux événements en faisant apparaître les quantificateurs appropriés.
2. Décrire les événements A et B.
3. Calculer leur probabilité.

Cette fois il ne s'agit pas d'un exercice Vrai/Faux pour montrer aux élèves que la détermination des quantificateurs est utile, voire nécessaire, dans tout problème mathématique.

À la fin de l'année scolaire on va proposer aux élèves un test récapitulatif. Les productions des élèves vont être gardées et analysées. On ne va pas donner une évaluation en terme de note, par contre une correction sera faite et donnée aux élèves.

Les questions vont aborder les principaux chapitres étudiés en classe de seconde. De cette manière le test pourra servir non seulement pour vérifier l'acquisition de la capacité à reconnaître des quantificateurs implicites et de savoir les expliciter, mais aussi comme révision finale.

Le test est le suivant.

## Test Final

**Exercice 1.** Pour chacune des affirmations suivantes, trouver la bonne reformulation avec l'explicitation des quantificateurs parmi celles proposées. Puis dire si les affirmations sont vraies ou fausses.

1. Le produit de deux nombres entiers relatifs est un nombre entier négatif.
  - (a) Pour tout  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{Z}$ ,  $x \times y < 0$ .
  - (b) Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{Z}$ , il existe un nombre  $y$  dans  $\mathbb{Z}$  tel que  $x \times y < 0$ .
  - (c) Il existe  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{Z}$  tels que  $x \times y < 0$ .
2. Un élément de l'ensemble  $A \cap B$  est un élément de l'ensemble  $A$  ou de l'ensemble  $B$ .
  - (a) Il existe un élément de l'ensemble  $A \cap B$  qui appartient à l'ensemble  $A$  ou à l'ensemble  $B$ .
  - (b) Pour tout élément  $x$  dans l'ensemble  $A \cap B$ ,  $x$  appartient à l'ensemble  $A$  ou à l'ensemble  $B$ .
  - (c) Tout élément de l'ensemble  $A$  ou de l'ensemble  $B$  appartient à l'ensemble  $A \cap B$ .

**Exercice 2.** On considère  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  pour laquelle on ne connaît pas son expression. Cependant on est intéressé à tracer une possible courbe représentative.

### Partie A

Les affirmations suivantes sont des propriétés de la fonction  $f$ . Reformuler chaque affirmation avec les quantificateurs appropriés.

1. L'équation  $f(x) = 5$  a au moins deux solutions dans l'intervalle  $[0; 3]$ .  
.....  $x$  et  $y$  (distincts) dans l'intervalle  $[0; 3]$  tels que  $f(x) = f(y) = 5$ .
2. La fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[3; 7]$ .  
.....  $a$  et  $b$  dans l'intervalle  $[3; 7]$ , si  $a < b$  alors  $f(a) \leq f(b)$ .
3. Un élément de l'ensemble  $[7; \infty[$  a comme image par la fonction  $f$  un nombre négatif.  
.....  $x$  dans l'intervalle  $[7; \infty[$  tel que  $f(x) < 0$ .

### Partie B

Donner une possible représentation de la fonction  $f$  en utilisant les affirmations précédentes.

#### Exercice 3.

" Soit  $A, B$  et  $C$  trois points du plan,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  "

1. Quel type de quantification implicite est cachée dans cette affirmation ? Universelle (pour tout) ou existentielle (il existe) ?
2. De quelle propriété vectorielle s'agit-il ?

**Exercice 4.** Soit  $f$  la fonction carré. On sait que  $f$  est décroissante sur l'intervalle  $] - \infty; 0]$  et croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

1. Expliciter cette propriété en utilisant la définition de croissance et de décroissance.
2. Donner une démonstration de cette propriété.

Dans le premier exercice on utilise la quantification pour déterminer la vérité. Dans le deuxième la quantification est utile pour obtenir des informations. Dans le troisième exercice on propose une formulation classique d'énoncé mathématique ou la quantification est caché dans le mot *soit*. Dans le quatrième on demande de donner une démonstration qui fait intervenir les quantificateurs. La variété dans la typologie des exercices va nous permettre d'évaluer globalement la compréhension du rôle de la quantification en mathématiques.

# Conclusion

Avec le sous-titre "La logique n'est pas toujours logique" nous jouons sur les différents sens du mot *logique*, en effet la logique mathématique diffère de la logique intuitive des élèves ce qui mène parfois à des conclusions divergentes.

Comment justifier aux élèves qu'une phrase, liste de mots, peut être traduite ou interprétée dans un langage différent de celui auquel ils ont l'habitude ? Comment leur faire comprendre qu'un langage n'est rien d'autre qu'une notation, un modèle, auquel on donne du sens qu'a posteriori ?

Dans notre mémoire nous avons essayé d'apporter notre contribution pour répondre à ces questions. Avec le Labyrinthe nous avons attaqué la surface de l'iceberg et maintenant nous pouvons aller plus en profondeur. nous avons quand même remarqué une ouverture positive des élèves, justifié par la grande participation manifestée aussi par les élèves qui normalement participent peu en classe. Les notions introduites avec le Labyrinthe commencent à s'installer, d'après ce qui sort de l'activité d'entraînement sur le second degré et nous pouvons nous attendre à une progression en continuant avec les autres exercices présentés dans la section 2.3.

Cependant, parler de conclusion ne paraît pas très adapté, en effet, nous sommes qu'au début de notre expérimentation. Une seule activité, dans notre cas le Labyrinthe, ne peut pas être suffisant pour résoudre la problématique très délicate de la quantification implicite.

# Bibliographie

- [1] Bulletin Officiel n°30 du 23 juillet 2009, *Mathématiques - classe de seconde*.
- [2] Eduscol (2009). Ressources pour la classe de seconde - Notations et raisonnement mathématiques. Repéré à [http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/18/0/Doc\\_ressource\\_raisonnement\\_109180.pdf](http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/18/0/Doc_ressource_raisonnement_109180.pdf)
- [3] Beltramone J.P., Giton F., Labrosse J., Merdy C., Silhol J., Truchan A. (2014) *Décllic 2nde*, Hachette.
- [4] Brisoux F., Brucker C., Monka Y., Sigward É. (2009) *Odyssée 2<sup>de</sup>-Mathématiques*, Hatier.
- [5] Dutarte P., Gustin H., Guillemet D., Le Yaouanq M.H. (2014) *Math'x 2nde*, Didier.
- [6] Chevassaus-au-Louis N. (2014) *Théories du complot*, First.
- [7] Cori R., Lascar D. (2003) *Logique mathématique tome 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats*, Dunod.
- [8] Dello Iacono U., Lombardi L. (2015), An artefact for deductive activities : a teaching experiment with primary school children, *Proceeding of CIEAEM 67*, Aosta.
- [9] Durand-Guerrier V. (1999) L'élève, le professeur et le labyrinthe, *Petit x*, 50, 5-34.
- [10] Glaeser Georges (1988) Racines historiques de la didactique des mathématiques, *IREM de Strasbourg*, brochure n° S132.
- [11] Hérault F., Huet C., Kel Notter G., Mesnil Z. (2016) À propos de quantification : quelques activités de logique dans nos classes, *Petit x*, 100, 35-65.
- [12] Legrand M. (1983) Les cosmonautes. Compte-rendu d'une recherche du groupe « Apprentissage du raisonnement » de l'IREM de Grenoble, *Petit x*, 1, 56-73.
- [13] Gandit M., Masse-Demongeot M. C. (1996, rééd 2001), Le vrai et le faux au collège et au lycée, *éd IREM de Grenoble*.

- 
- [14] Mercier A., Assude T. (2007) L'action conjointe professeur-élèves dans un système didactique orienté vers les mathématiques, *In G.Sensevy et A.Mercier. Agir ensemble ; L'action didactique conjointe du professeur et de l'élève ; Paideia*. Presses Universitaires de Rennes, 118-145.
- [15] Murphy C., Weima S., Durand-Guerrier (2016) Des activités pour favoriser l'apprentissage de la logique en classe de seconde, *Petit x*, 100, 7-34.
- [16] Million-Fauré K. (2011) Combien le cylindre a-t-il d'arêtes ? Ou...ce que peut apporter une analyse didactique à une préparation de séance, *Petit x*, 87, 5-28.
- [17] Tarski A. (1971) *Introduction à la logique* Gauthier-Villars.

# Table des matières

A Test des cosmonautes (LEGRAND (1983)[12])	41
B À propos de losanges (MURPHY, WEIMA, DURAND-GURRIER (2016) [15])	42
C Alternance des quantificateurs [11]	43
D QCM	44
E Le Labyrinthe	46
F Activités d'entraînement	48
G Test final	50

# Annexe A

## Test des cosmonautes (LEGRAND (1983)[12])

Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.

**Question 1** À l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge. Est-il cosmonaute américain ?

OUI                      NON                      ON NE PEUT PAS SAVOIR

**Question 2** À côté de lui il y a quelqu'un qui porte une chemise blanche. Est-il cosmonaute américain ?

OUI                      NON                      ON NE PEUT PAS SAVOIR

**Question 3** Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe. Porte-t-il une chemise rouge ?

OUI                      NON                      ON NE PEUT PAS SAVOIR

**Question 4** Dans le hall on voit un cosmonaute américain en manteau. Porte-t-il une chemise rouge ?

OUI                      NON                      ON NE PEUT PAS SAVOIR

## Annexe B

# À propos de losanges (MURPHY, WEIMA, DURAND-GURRIER (2016) [15])

Jerome a dessiné un quadrilatère ayant ses diagonales perpendiculaires. Est-ce un losange ?

Sarah a dessiné un parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires. Est-ce un losange ?

# Annexe C

## Alternance des quantificateurs [11]

### Activité 1 :

Dans les assertions suivantes, les lettres  $a, b, c$  désignent des entiers naturels.

Traduire les assertions en langage « naturel » et préciser pour chacune des assertions si elle est vraie ou fausse :

Première assertion :  $\forall a, \exists b, \exists c, a = bc$

Deuxième assertion :  $\forall b, \forall c, \exists a, a = bc$

Troisième assertion :  $\exists a, \exists b, \exists c, a = bc$

Quatrième assertion :  $\exists b, \forall a, \exists c, a = bc$

### Activité 2 :

Après avoir traduit en langage « naturel » chacune des deux phrases, dire, pour chacune, si elle est vraie ou fausse en justifiant son choix. Ces deux phrases sont-elles « synonymes » ?

Phrase 1 :  $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, a \geq b$

Phrase 2 :  $\exists b \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, a \geq b$

# Annexe D

## QCM

**Question 1** Soit  $f$  une fonction croissante. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

- A Si  $a < b$ , alors  $f(a) \leq f(b)$ .
- B Si  $f(a) = f(b)$ , alors  $a < b$ .
- C Si  $a < b$ , alors  $f(a) > f(b)$ .

**Question 2** Une seule des affirmations suivante est vraie.

- A Si  $a$  est un nombre naturel et  $b$  est un nombre entier, alors leur produit est un nombre naturel.
- B  $\frac{a}{b} = 0$  si et seulement si  $a = 0$ .
- C  $\frac{a}{b} = 1$  si et seulement si  $b = 1$ .

**Question 3** Soit  $(O; I, J)$  un repère. Une seule des affirmations suivantes est vrai.

- A Si  $OIJ$  est un triangle rectangle, alors le repère est orthonormé.
- B Si  $OIJ$  n'est pas un triangle rectangle isocèle, alors le repère n'est pas orthonormé.
- C Si  $OIJ$  est un triangle isocèle, alors le repère est orthonormé.

**Question 4** Soit  $f$  la fonction qui à tout réel  $x$  associe la moitié de  $x$ . Quelle est l'affirmation fausse ?

- A 5 est l'image de 10.
- B L'antécédent de 14 est 7.
- C L'antécédent de 7 est 14.

**Question5** On considère une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  et telle que  $f(-1) = 2$  et  $f(3) = 5$ .

Que peut-on dire des variations de  $f$  sur  $[-1; 3]$  ?

A  $f$  est croissante sur  $[-1; 3]$ .

B  $f$  est décroissante sur  $[-1; 3]$ .

C On ne peut rien dire.

# Annexe E

## Le Labyrinthe

---

### Le labyrinthe

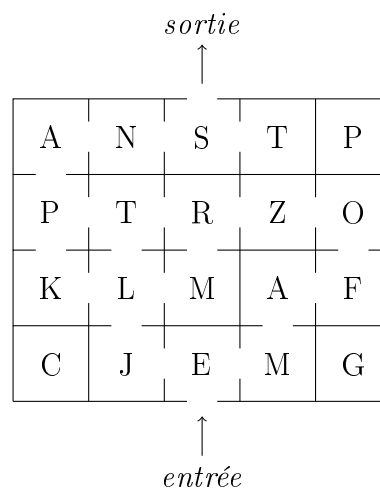
Voici un labyrinthe.

Lire attentivement les lignes ci-dessous avant de répondre aux questions.

Une personne, que nous appellerons X, a traversé ce labyrinthe de l'entrée à la sortie *sans jamais être passée* deux fois par la même porte.

En rentrant dans une salle, X voit une lettre qui est visible seulement une fois dans la salle. On peut retrouver une même lettre dans deux salles différentes.

La répartition des lettres est indiquée dans la figure ci-contre.



Il est possible d'énoncer des phrases qui aient un sens par rapport à la situation proposée et sur la vérité desquelles on puisse se prononcer (VRAI ou FAUX), ou qui peuvent être telles que les informations que l'on possède ne suffisent pas pour décider si elle sont vraies ou fausses (ON NE PEUT PAS SAVOIR).

Par exemple, la phrase "X a vu la lettre E" est une phrase VRAIE. En effet, on affirme que X a traversé le labyrinthe qui a une pièce d'entrée et dans laquelle il y a la lettre E. Pour chacune des six phrases suivantes, dire si elle est VRAIE, FAUSSE ou si ON NE PEUT PAS SAVOIR, et, dans chaque cas, expliquez votre réponse.

Étant donné un trajet quelconque, on peut affirmer que :

1. X a vu la lettre N
  2. X a vu la lettre P
  3. X a vu la lettre M
  4. Si X a vu la lettre O, alors X a vu la lettre F
  5. Si X a vu la lettre K, alors X a vu la lettre L
  6. Si X a vu la lettre L, alors X a vu la lettre K
-

# Annexe F

## Activités d'entraînement

### Exercice 1 - Second degré

Soit  $f$  la fonction carré définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$ . Pour chacune de phrase suivantes, reformuler en faisant apparaître les quantificateurs appropriés, puis indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

- (a) Les nombres réels ont exactement une image par  $f$ .
- (b) Au moins un nombre réel n'a pas un antécédent par  $f$ .
- (c) Les nombres réels ont au plus un antécédent par  $f$ .
- (d) Les nombres réels ont au plus un antécédent par  $f$ .

### Exercice 2 - Géométrie dans l'espace

Pour chacune des affirmations suivantes, reformuler en faisant apparaître les quantificateurs appropriés, puis indiquer si elle est vraie ou fausse.

1. Soit  $P$  et  $P'$  deux plans strictement parallèles.
  - (a) Une droite de  $P$  est toujours parallèle à  $P'$ .
  - (b) Une droite de  $P$  et une droite de  $P'$  sont toujours parallèles.
  - (c) Au moins une droite de  $P$  est parallèle à une droite de  $P'$ .
  - (d) Une droite de  $P$  et une droite de  $P'$  sont non coplanaires.
2. Soit  $d$  une droite strictement parallèle à un plan  $P$ .
  - (a) Une droite parallèle à  $d$  est parallèle à  $P$ .
  - (b) Une droite parallèle à  $P$  est parallèle à  $d$ .

(c) Étant donnée une droite  $d'$  de  $P$ , elle est parallèle à  $d$ .

(d) Une droite sécante  $d$  coupe le plan  $P$ .

### **Exercice 3 - Probabilité**

On tire trois boules dans un sac contenant trois boules rouges et trois boules noires.

On considère les deux événements suivants :

A « On tire au moins une boule noire »

B « On tire que de boules noires »

1. Reformuler les deux événements en faisant apparaître les quantificateurs appropriés.
2. Décrire les événements A et B.
3. Calculer leur probabilité.

# Annexe G

## Test final

**Exercice 1.** Pour chacune des affirmations suivantes, trouver la bonne reformulation avec l'explicitation des quantificateurs parmi celles proposées. Puis dire si les affirmations sont vraies ou fausses.

1. Le produit de deux nombres entiers relatifs est un nombre entier négatif.
  - (a) Pour tout  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{Z}$ ,  $x \times y < 0$ .
  - (b) Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{Z}$ , il existe un nombre  $y$  dans  $\mathbb{Z}$  tel que  $x \times y < 0$ .
  - (c) Il existe  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{Z}$  tels que  $x \times y < 0$ .
2. Un élément de l'ensemble  $A \cap B$  est un élément de l'ensemble  $A$  ou de l'ensemble  $B$ .
  - (a) Il existe un élément de l'ensemble  $A \cap B$  qui appartient à l'ensemble  $A$  ou à l'ensemble  $B$ .
  - (b) Pour tout élément  $x$  dans l'ensemble  $A \cap B$ ,  $x$  appartient à l'ensemble  $A$  ou à l'ensemble  $B$ .
  - (c) Tout élément de l'ensemble  $A$  ou de l'ensemble  $B$  appartient à l'ensemble  $A \cap B$ .

**Exercice 2.** On considère  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  pour laquelle on ne connaît pas son expression. Cependant on est intéressé à tracer une possible courbe représentative.

### Partie A

Les affirmations suivantes sont des propriétés de la fonction  $f$ . Reformuler chaque affirmation avec les quantificateurs appropriés.

1. L'équation  $f(x) = 5$  a au moins deux solutions dans l'intervalle  $[0; 3]$ .  
.....  $x$  et  $y$  (distincts) dans l'intervalle  $[0; 3]$  tels que  $f(x) = f(y) = 5$ .
2. La fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[3; 7]$ .  
.....  $a$  et  $b$  dans l'intervalle  $[3; 7]$ , si  $a < b$  alors  $f(a) \leq f(b)$ .
3. Un élément de l'ensemble  $[7; \infty[$  a comme image par la fonction  $f$  un nombre négatif.  
.....  $x$  dans l'intervalle  $[7; \infty[$  tel que  $f(x) < 0$ .

### Partie B

Donner une possible représentation de la fonction  $f$  en utilisant les affirmations précédentes.

#### Exercice 3.

" Soit  $A, B$  et  $C$  trois points du plan,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  "

1. Quel type de quantification implicite est cachée dans cette affirmation ? Universelle (pour tout) ou existentielle (il existe) ?
2. De quelle propriété vectorielle s'agit-il ?

**Exercice 4.** Soit  $f$  la fonction carré. On sait que  $f$  est décroissante sur l'intervalle  $] - \infty; 0]$  et croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

1. Expliciter cette propriété en utilisant la définition de croissance et de décroissance.
2. Donner une démonstration de cette propriété.



École supérieure  
du professorat  
et de l'éducation  
Académie de Grenoble



Année universitaire 2017-2018

**Diplôme Universitaire *Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation***

***Mention Second degré***

**Titre du mémoire : Une expérimentation didactique en logique – La logique n'est pas toujours logique**

**Auteur : Anna Carla RUSSO**

**Résumé :** Dans ce mémoire on s'interroge sur la place de la logique dans l'enseignement des mathématiques en seconde avec un regard particulier sur la problématique de la quantification implicite et son enseignement. On apporte une analyse des ressources à disposition des enseignants et des élèves. On présente aussi des notions théoriques sur la logique à destination des professeurs de mathématiques. On réalise une analyse a priori et a posteriori d'une activité pour introduire les quantificateurs implicites, effectuée dans plusieurs classes de secondes.

**Mots clés :** Mathématiques, quantificateurs implicites, lycée, seconde

**Summary :** We want to discuss the role of mathematical logic in high school. We are mostly interested on the problem of implicit quantification and on founding a good way to teach that. In a first place, we give to the lecture some formal notions on mathematical logic. In a second place, an analysis of the resources, already available both for pupils and teachers, is presented. Finally, we provide an activity to introduce the implicit quantification problem that we experiment in some classes and some exercises to develop the pupil capacity to recognize and to make explicit the quantification.

**Key words :** Mathematics, implicit quantification, high school