



HAL
open science

Le rôle de la manipulation en mathématiques et ses effets sur les apprentissages

Anne-Charlotte Quillet

► **To cite this version:**

Anne-Charlotte Quillet. Le rôle de la manipulation en mathématiques et ses effets sur les apprentissages. Education. 2019. dumas-02282094

HAL Id: dumas-02282094

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-02282094v1>

Submitted on 9 Sep 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École supérieure
du professorat
et de l'éducation
Académie de Paris



Année universitaire 2018-2019

Master MEEF

Mention 1^{er} degré

2^{ème} année

LE RÔLE DE LA MANIPULATION EN MATHÉMATIQUES ET SES EFFETS SUR LES APPRENTISSAGES

Présenté par : Anne-Charlotte QUILLET

Encadré par : Chantal TUFFERY-ROCHDI

Mots Clefs : manipulation, abstraction, mathématiques, école élémentaire

Remerciements

Je tiens à remercier Chantal Tufféry-Rochdi et Anne Duval pour leurs conseils tout au long de cette année. Je remercie mes élèves de CE2C sans qui je n'aurais pas pu réaliser ce travail et bien sûr mon mari et mes enfants qui ont fait preuve d'une grande patience durant cette année de stage si riche mais si chargée.

SOMMAIRE

| | |
|---|----|
| INTRODUCTION | 4 |
| I. La manipulation | 5 |
| 1. Une définition standard | 5 |
| 2. La place de la manipulation dans les textes officiels | 5 |
| 3. L'apport théorique de la recherche | 7 |
| a. Le rôle bénéfique de la manipulation | 7 |
| b. L'importance du matériel à manipuler | 10 |
| c. Les limites | 11 |
| II. Quelques situations de manipulations expérimentées dans ma classe de CE2 | 14 |
| 1. Situation n°1 : utilisation du matériel de base 10 pour calculer | 14 |
| a. Objectifs principaux | 14 |
| b. Déroulement | 15 |
| c. Résultats | 17 |
| 2. Situation n°2 : utilisation d'un jeu pour mettre en relation multiplication et addition itérée | 21 |
| a. Objectifs principaux | 21 |
| b. Déroulement | 22 |
| c. Résultats | 23 |
| 3. Situation n°3 : utilisation de gabarits pour identifier des angles droits | 25 |
| a. Objectifs principaux | 25 |
| b. Déroulement | 25 |
| c. Résultats | 26 |
| III. Analyse et bilan | 29 |
| 1. Rôle important de la manipulation indiscutable | 29 |
| 2. Difficultés liées à la manipulation | 30 |

| | |
|---|----|
| CONCLUSION | 33 |
| BIBLIOGRAPHIE | 35 |
| Annexes | 36 |
| 1. Tableau récapitulatif du matériel | 36 |
| 2. Situation n°1 | 39 |
| a. Exercice proposé en phase 3 | 39 |
| b. Tableau détaillé des résultats en phases 1 et 2 | 40 |
| c. Tableau détaillé des résultats en phase 3 | 41 |
| 3. Situation n°2 | 42 |
| a. Règles plastifiées du <i>Jeu des jetons bien placés</i> | 42 |
| b. Script des échanges lors de la découverte du jeu | 42 |
| c. Situation évaluée : traces écrites, tableau de suivi des résultats | 44 |
| 4. Situation n°3 | 46 |
| a. Phase concrète | 46 |
| b. Exercices d'entraînement | 46 |
| c. Résultats détaillés de l'évaluation | 47 |
| d. Quelques exemples de traces écrites d'élèves | 48 |

INTRODUCTION

Lorsque j'ai commencé à enseigner en école élémentaire, j'avais une vision parcellaire de la manière de gérer une classe et d'y mener des séquences en mathématiques. Scientifique de formation, j'ai suivi un cursus jusqu'en classes préparatoires où l'enseignement des mathématiques était prépondérant et devenait au fil des années de plus en plus abstrait. Autant que je me souvienne, il ne me semble pas avoir pâti de l'absence de manipulation pour progresser dans ce domaine... Pourtant, en devenant professeur des écoles, je me suis rapidement rendu compte que tous les élèves n'avaient pas la même capacité d'abstraction et, que le besoin de manipuler semblait essentiel pour bon nombre d'entre eux afin de calculer, étudier les nombres, les grandeurs et leurs mesures.

A mon arrivée dans la classe de CE2 dont j'ai la charge à mi-temps cette année, j'ai très vite souhaité m'appuyer sur des situations concrètes de manipulations. Je me suis notamment appuyée sur les programmes mis à jour en juillet 2018, ainsi que sur le rapport Villani-Torossian publié en février 2018 qui recommande, « *un apprentissage des mathématiques fondé sur la manipulation, la verbalisation, l'abstraction* ». J'ai, par conséquent, fait le choix des ressources Cap Maths¹ pour cette première année en responsabilité, car le recours à des situations expérimentales, des activités manipulatoires, à l'aide de matériels variés et pensés par des experts, est un axe fort du travail proposé.

Dès lors, de nombreuses questions se sont posées à moi en concevant mes séquences de mathématiques. Qu'est-ce que manipuler en mathématiques ? Comment et quand inclure des situations de manipulation ? Quel matériel privilégier ? Comment différencier selon les élèves ? Finalement, une problématique s'est progressivement dégagée en vue de cet écrit réflexif : **la manipulation est-elle toujours indispensable et systématiquement bénéfique dans les apprentissages en mathématiques ?**

Je présenterai ainsi dans une première partie ce qui est entendu par manipulation en mathématiques, tant dans les textes institutionnels que dans la recherche en didactique des mathématiques. J'effectuerai ensuite un retour sur les traces produites par mes élèves, les constats associés à l'utilisation ou non de matériel de manipulation. Enfin, j'effectuerai un bilan sur les situations de manipulation présentées.

¹ Manuel Cap Maths, édition Hatier conforme aux programmes de 2016, et ressources associées : guide pédagogique, fichier élève, ouvrage complémentaire *90 activités et jeux mathématiques (CE2)*.

I. LA MANIPULATION

1. UNE DEFINITION STANDARD

Avant d'explorer la façon dont la manipulation est considérée dans les textes officiels et en recherche, il me semble intéressant de rechercher la définition de la manipulation dans un dictionnaire généraliste. Le dictionnaire Larousse, par exemple, propose différentes définitions liées à la polysémie du mot. Deux d'entre elles sont intéressantes, en particulier dans le cadre de ma réflexion :

- « *Action de manipuler [tenir, manœuvrer, faire fonctionner avec ses mains] quelque chose, un objet, un appareil. »*
- « *Exercice au cours duquel des élèves, des étudiants ou des chercheurs réalisent une expérience ; l'expérience elle-même. »*

Si je m'intéresse maintenant au verbe manipuler, associé à la deuxième définition énoncée ci-avant, le Larousse fournit l'explication suivante : « *Soumettre quelque chose à divers traitements, divers exercices, en particulier dans un cadre d'apprentissage ou de recherche. »*

Ainsi, l'ouvrage de référence que représente le dictionnaire donne aujourd'hui une définition standardisée expliquant que l'activité manipulative est **une étape naturelle, intégrée à l'apprentissage ou à la recherche**, et pas uniquement dédiée aux jeunes enfants... Par ailleurs, notons que ce ne sont plus uniquement des objets ou des appareils qui sont manipulés mais aussi des chiffres et des mots, comme l'illustre l'exemple donné dans ce dictionnaire.

2. LA PLACE DE LA MANIPULATION DANS LES TEXTES OFFICIELS

Si le dictionnaire indique noir sur blanc que la manipulation peut être une étape, une aide pour apprendre, les instructions ou rapports officiels explicitent son rôle essentiel voire incontournable dans les processus cognitifs en mathématiques.

Le **rapport Villani-Torossian**, remis le 12 février 2018, lui donne une place prépondérante, puisqu'elle est classée en cinquième position sur les 21 mesures préconisées pour l'enseignement des mathématiques : « *Dès le plus jeune âge mettre en œuvre un*

apprentissage des mathématiques fondé sur la manipulation et l'expérimentation ; la verbalisation ; l'abstraction. » (Villani-Torossian, 2018, p.10). Le rapport souligne notamment que « *parmi les enjeux didactiques, celui des manipulations concrètes est essentiel pour favoriser l'apprentissage des élèves et les accompagner dans la construction d'abstractions.* » (ibid, p.13) ou encore « *enseigner les mathématiques aux plus jeunes ne peut se faire sans leur faire expérimenter des situations. Le vécu expérimental et manipulatoire des élèves favorise l'acquisition des connaissances et leur mémorisation* » (ibid, p.58).

Je n'ai pas, par conséquent, été étonnée de retrouver de nombreuses occurrences² du mot manipulation ou manipuler dans **le bulletin officiel du 26 juillet 2018**³, relatif aux nouveaux programmes du cycle 2 – cycle des apprentissages fondamentaux⁴, notamment dans le domaine 2 du socle commun de connaissances, de compétences et de culture, intitulé « *Méthodes et outils pour apprendre* ». En mathématiques, « *l'introduction et l'utilisation des symboles mathématiques sont réalisées au fur et à mesure qu'ils prennent sens dans des situations basées sur des manipulations, en relation avec le vocabulaire utilisé, assurant une entrée progressive dans l'abstraction* » (MEN, BO du 26/07/2018, p.22). Que ce soit pour étudier les nombres, les grandeurs ou les mesures, les programmes insistent sur le fait que les « *compétences et connaissances attendues en fin de cycle se construisent à partir de manipulations et de problèmes concrets, qui s'enrichissent tout au long du cycle en jouant sur les outils et les supports à disposition* » (ibid, p.28). Depuis 2016, l'enseignement des mathématiques au cycle 2 s'organise autour de six compétences essentielles : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer et communiquer. L'activité manipulatoire est référencée à de multiples reprises⁵, explicitement ou par l'intermédiaire d'activités d'observations d'objets, de jeux, etc., par exemple, et de façon non exhaustive :

- Chercher : « *s'engager dans une démarche de résolution de problèmes en observant, en posant des questions, **en manipulant, en expérimentant**, en émettant des hypothèses* » ;
- Modéliser : « *reconnaitre des formes **dans des objets réels** et les reproduire géométriquement* » ;

² 18 occurrences des mots manipulation et manipuler dans le BO du 26/07/2018 relatif au cycle 2.

³ Bulletin officiel n°30 de l'Éducation Nationale, publié le 26 juillet 2018.

⁴ Cycle sur lequel mon rapport se focalise étant donné le niveau de la classe dont j'ai la responsabilité cette année.

⁵ Tableau p.23 des six compétences essentielles.

- Raisonner : « *anticiper le résultat d'une manipulation, d'un calcul, ou d'une mesure* » ;
- Communiquer : « *utiliser l'oral et l'écrit, le langage naturel puis quelques représentations et quelques symboles pour expliciter des démarches, argumenter des raisonnements* ». Ainsi, trois langages sont à mettre en relation : celui des représentations imagées, celui des mots et celui des symboles mathématiques. Est ici retrouvé le triptyque **manipulation – verbalisation – abstraction** sur lequel s'appuie le rapport Villani-Torossian.

3. L'APPORT THEORIQUE DE LA RECHERCHE

a. Le rôle bénéfique de la manipulation

Une idée qui n'est pas neuve...

L'apport de la manipulation dans les apprentissages en mathématiques n'est pas une idée neuve : le rapport Villani-Torossian évoque les pédagogies actives **Montessori et Freinet**, nées au début du XXème siècle, reposant sur l'éducation sensorielle et kinesthésique de l'enfant : « *La manipulation [y] tient une place primordiale, mais elle est pensée en vue de l'abstraction et ceci dans une perspective de progressivité étendue sur le long terme. Ces méthodes s'appuient sur les sens et sur l'intuition de l'enfant, [...] tout en sachant que [le] passage du concret à l'abstrait est l'enjeu de différentes procédures selon les méthodes* ». Dans son ouvrage *Manipuler et expérimenter en mathématiques*, **Dias**, professeur en didactique des mathématiques à la Haute école pédagogique du canton de Vaud, évoque bien sûr Montessori pour illustrer ses propos, mais également un pédagogue et penseur suisse encore plus ancien, **Pestalozzi**, dont les principes éducatifs datant de la fin du XVIIIème siècle étaient, entre autres :

- De présenter l'**aspect concret** avant d'introduire les concepts abstraits ;
- De commencer par étudier l'**environnement proche** avant de s'occuper de ce qui est distant.

... mais particulièrement explorée et remise en avant actuellement

L'idée n'est donc pas neuve mais particulièrement explorée dans des écrits de recherche plus récents. Selon Dias, les mathématiques sont « *un défi, un jeu de l'esprit qui s'accompagne régulièrement d'une dimension perceptive : les yeux et les mains sont aussi au travail ! [...]* Expérimenter et manipuler c'est en quelque sorte entretenir des relations avec des phénomènes et des faits appartenant à la réalité objective. Faire des paquets, remplir des récipients, construire des cubes, reproduire des figures, classer des objets selon leur forme... sont autant de situations faisant appel à des connaissances mathématiques, dans un contexte bien réel. » (Dias, 2012, p.5). Il souligne, par ailleurs, qu'à l'école maternelle, les mathématiques sont présentées comme une science d'observation et de manipulation « *avant même d'en faire une science plus abstraite de réflexion* » (ibid, p.9). Cette idée que la perception, **la manipulation dès le plus jeune âge est un processus cognitif fondamental et préalable** à tout autre développement est également repris par **Barth** dans *L'apprentissage de l'abstraction*⁶ : « *Un nouveau-né a besoin des stimuli sensoriels sans lesquels son développement cognitif ne se poursuivra pas normalement. [...] Au départ de la perception, les sens sont stimulés par des sensations auxquelles l'individu est exposé* » (p.112 et 113). Pourquoi faudrait-il que, passé le stade de la petite enfance et du cycle 1, les manipulations soient subitement écartées des apprentissages fondamentaux ? Celles-ci doivent se poursuivre car les sensations amènent à construire « *souvenir mental* » selon Barth.

Cette idée que l'action est transformée en **image mentale** est repris dans l'introduction d'un ouvrage d'activités manipulatoires, *Construire les notions mathématiques : 55 activités de manipulation* (Raoul-Bellanger & Bellanger, 2016) : « *En mathématiques, la manipulation a une importance primordiale dans l'élaboration des concepts : elle aide les élèves à se construire des images mentales et facilite ainsi l'accès à l'abstraction, notamment pour les élèves en difficulté. Nous privilégions des activités qui proposent soit une mise en scène active et visuelle, soit l'utilisation de matériel. Ce qui, à notre avis, permet aux enfants de vivre des situations plus concrètement qu'à travers un dessin. En outre, la manipulation permet aux élèves de tester leur stratégie en procédant par essai / erreur et facilite, de par son côté pratique, certains actes (grouper, ranger ; par exemple, il est plus facile pour les enfants de grouper des pions par 10, que d'entourer des groupes de 10 points disséminés dans l'espace d'une feuille)* » (p.5).

⁶ Deuxième édition de 2004, après la première datant de 1987.

Il est intéressant ici de s'attarder **sur le concept d'essai / erreur** (positive !) que permet aussi la manipulation. Cela fait écho aux propos de **Alstofi**, spécialiste en didactique des sciences, dans son livre *L'erreur, un outil pour enseigner*, sur la typologie de l'erreur. Les erreurs peuvent notamment témoigner de conceptions alternatives (ou représentations résistantes) des élèves. Pour remédier à certaines erreurs, l'enseignant peut, lorsqu'il y a manipulation, observer plus facilement l'action et l'utilisation du matériel par les élèves, analyser leurs représentations et déceler les obstacles sous-jacents à la notion étudiée ou encore, déclencher un débat scientifique au sein de la classe et écouter leurs conversations. La manipulation rend donc l'erreur plus apparente pour l'enseignant et, par conséquent, plus facile à identifier et y remédier. Alstofi reprend dans son ouvrage un exemple en géométrie de Brissiaud⁷ : les essais-erreurs matérialisés par les élèves permettent à l'enseignant de comprendre que l'élève situe plus volontiers le sommet d'un triangle en partie haute du triangle et le côté en position latérale.

La capacité d'abstraction, essentielle si l'on veut progresser en mathématiques, ne peut se développer sans passer par certains stades. Pour exposer son raisonnement, Barth reprend les **trois modes de représentation de Bruner** pour appréhender l'information : enactif (ou sensorimoteur), iconique (ou visuel) et symbolique : « *Dans un premier temps, on apprend ainsi par l'action, par la manipulation. C'est le mode enactif [...]. L'information passe par l'action. Connaître, c'est d'abord agir. On connaît quelque chose parce qu'on « sait faire ». Pour apprendre, on a besoin de manipuler les données, de les percevoir par les sens. [...] Il y a des apprentissages qui en restent là, on sait faire, sans plus. Le mode cognitif suivant mène plus loin : il s'agit de représenter quelque chose sans l'avoir devant les yeux. L'action est transformée en image mentale. [...] Quand l'enfant est capable de distinguer un carré d'un rectangle mais sans arriver à formuler les raisons de cette distinction, il se trouve à ce niveau-ci. C'est le mode « iconique ». Une « traduction » de la représentation iconique en une représentation symbolique – des mots ou des codes divers – mène au troisième mode, le mode symbolique » (p.113 et 114). Barth conclut alors que **la croissance cognitive naît du conflit entre deux modes** : « *Quand un enfant est encouragé à expliquer ce qu'il fait ou ce qu'il voit, il est obligé de quitter l'action ou l'image qui sont souvent des représentations limitées [...]. Sa compréhension va alors s'approfondir »* (ibid, p.114). **Les concepts de manipulation et d'abstraction sont donc étroitement liés.** Le rapport *Stratégie de mathématiques au primaire*, issu d'une table ronde des experts en mathématiques et publié en*

⁷ Analyse de Brissiaud à l'occasion d'une évaluation en début de sixième.

2003 sur le site du Ministère de l'éducation du Canada, le confirme également : « *Devant un concept abstrait, l'enfant a besoin de participer à une activité physique pour saisir le concept, un peu comme font les adultes qui prennent des exemples, des illustrations pour mieux comprendre des concepts nouveaux* » (p.3).

La manipulation implique naturellement du matériel à manipuler, ce qui nous permet de faire le lien avec la partie suivante.

b. L'importance du matériel à manipuler

Les situations concrètes d'apprentissage facilitent le développement de la motivation et de la créativité des élèves. **Piaget** écrivait en 1973 : « *Les jeunes enfants apprennent en faisant, en parlant et en réfléchissant à leurs actions. Ils construisent leur propre connaissance des mathématiques en se servant de matériel concret et de situations naturelles* ».

Les objets mathématiques sont construits théoriquement, et sont par conséquent **abstrait**. En vue de cette abstraction, **l'importance du matériel**, souligné par Piaget, est également mise en évidence par **Servais**⁸ dans son article *L'importance du matériel concret dans l'enseignement mathématique* (1969) :

- « *La plus grande valeur pédagogique du matériel concret est de permettre à l'élève de se faire une expérience mentale à sa mesure, en dehors de l'autorité du maître.* »
- « *Afin que le matériel pour l'enseignement mathématique remplisse ses fonctions, il faut qu'il soit l'objet de la manipulation de l'élève, les aidant ainsi à élaborer, à coordonner et à organiser leurs idées. Pour cette raison, contempler un modèle complexe tout fait est de peu de rendement.* »

Là encore, on retrouve l'idée d'une image mentale créée par la manipulation du matériel. Par ailleurs, le deuxième point souligne que le matériel à manipuler peut être **très simple et, néanmoins, suffisamment riche pour faire des choses intéressantes en classe**. Nous pouvons effectivement faire référence à l'exposé de Brissiaud dans son ouvrage *Comment les enfants apprennent à calculer* : « *Pour enseigner la numération, l'enseignant peut faire utiliser les doigts ou un matériel structuré [...], le groupement de dix préexiste et permet la formation rapide d'une quantité donnée* », « *ou encore de faire utiliser des constellations [...]* de manière à ce que l'enseignant voie immédiatement s'il y a le bon compte » (p. 235). Selon

⁸ Professeur belge et membre influent de l'Association Mathématique du Québec.

lui, les progrès des enfants nécessitent l'usage de collections-témoins organisés simples, concrètes (telles que la configuration des doigts, les constellations) ou encore du matériel simple comme les réglettes avec caches. Ces modes de représentations des quantités facilitent la mise en relation directe qu'est le calcul.

Le rapport Villani-Torossian consacre une partie entière sur **les ressources matérielles** (§5.2 p. 58-59) et réaffirme la place centrale du matériel, support des manipulations et expérimentations. Sont explicitement listés des exemples de matériels pédagogiques pour l'apprentissage du calcul (jetons, cubes emboîtables, matériel de base 10, bouliers, réglettes colorées), de la géométrie dans le plan et dans l'espace (planches à clous avec élastiques ou géoplans, mosaïques de forme géométrique, tangrams, solides à manipuler et à remplir), des mesures (balances, mètres, verres doseurs, récipients et boîtes vides, horloges, chronomètres). Ce type de matériels semble plutôt accessible, et en phase avec les préconisations du rapport canadien ou du livre de Dias dont une partie entière est consacrée au matériel (2012, p.28).

Cap Maths s'appuie sur du matériel à manipuler, similaire à celui décrit ci-avant : matériel à photocopier, matériel à détacher dans les fichiers élèves (monnaie, timbres et groupement de timbres, gabarits divers, formes géométriques, règles cassées, etc.). Le guide pédagogique Cap Maths part du principe que le recours à un matériel de numération est indispensable afin que « *les élèves donnent du sens aux mots milliers, centaines, dizaines et unités* ». Cap Maths ne prétend pas être exhaustif, d'autres matériels peuvent être utilisés en complément, l'appropriation par l'enseignant et les élèves étant primordiale. Dans l'ouvrage de Raoul-Bellanger & Bellanger, des conseils pratiques sont, en outre, donnés comme celui de plastifier certains matériels et références collectives ou individuels (frises, étiquettes, jeux, etc.) afin de mieux les conserver. Il est vrai que les élèves sont théoriquement amenés à les manipuler régulièrement ou à leur demande, selon leurs besoins.

c. Les limites

En revanche, il faut bien garder en tête que **le recours aux activités manipulatoires et au matériel est nécessaire mais non suffisant**. Le rapport canadien cite, en ce sens, plusieurs chercheurs :

- « *Le matériel de manipulation ne fait pas comprendre à lui seul, comme par magie, les mathématiques aux enfants ; le matériel de manipulation offre cependant des*

moyens concrets par lesquels les enfants donnent un sens à de nouvelles connaissances » (p.22) ;

- *« Les enseignantes et enseignants ont également besoin d'orientation sur la meilleure façon d'utiliser le matériel de manipulation dans les programmes de mathématiques des premières années d'études. Sowell (1989) est d'avis que les attitudes des élèves à l'égard des mathématiques sont meilleures lorsque le personnel enseignant sait comment utiliser le matériel de manipulation dans leur enseignement » (p. 22).*

Ainsi, je retiens que l'accumulation de matériel et la succession d'activités de manipulation ne suffit pas pour construire des notions mathématiques. Les séquences et l'intégration de ces activités au sein des séquences sont à préparer avec soin et demandent beaucoup d'anticipation et de recul sur les objectifs didactiques visés. Ce sont des outils qui peuvent aider les élèves à construire leurs représentations mentales mais encore faut-il qu'ils soient confrontés à une véritable **situation-problème**. Dans le cas contraire, les élèves risquent de ne retenir que le côté ludique de la situation, génératrice, par ailleurs, de plus de bruits et d'agitation. Comme l'écrit Dias, *« donner des cubes ou des jetons à des élèves n'assure pas qu'ils vont acquérir les principes du dénombrement par leur seule manipulation. Il sera nécessaire de problématiser leur utilisation par des questionnements et les inclure dans des contextes qui ont du sens pour eux (un jeu, une énigme, un rituel, etc.) » (p.18).*

Le rapport canadien sur la stratégie à mettre en œuvre pour un enseignement fructueux des mathématiques en primaire préconise de :

- *« S'assurer que le matériel de manipulation appuie les concepts et les grandes idées en mathématiques qui seront enseignés ;*
- *Avoir suffisamment de matériel de manipulation pour que tous les élèves puissent participer à l'activité ;*
- *Donner la possibilité aux élèves de se familiariser avec le matériel de manipulation ;*
- *Expliquer les règles à respecter en classe » (p.22).*

De plus, les enseignants doivent :

- *« Utiliser le matériel de manipulation de façon à ce que les élèves le perçoivent comme un outil leur permettant de réfléchir à de nouvelles idées ;*
- *Reconnaître que les élèves peuvent utiliser le matériel de manipulation de différentes manières dans leur exploration des mathématiques ;*
- *Eviter les activités où l'élève n'est appelé qu'à imiter l'enseignante ou l'enseignant ;*

- *Permettre aux élèves d'utiliser le matériel de manipulation pour résoudre le problème et pour justifier leur solution ;*
- *Prendre le temps de se familiariser avec le matériel de manipulation choisi ;*
- *Choisir du matériel de manipulation qui permet aux élèves de représenter les mathématiques de façon concrète et d'établir des liens à partir de ces représentations*
- *Donner la possibilité aux élèves d'explorer le même concept en utilisant du matériel de manipulation varié » (p.23).*

La recommandation visant à varier les matériels utilisés permet à l'élève de ne pas se limiter à une seule représentation qui pourrait, de surcroît, générer de fausses représentations. Si je prends l'exemple du matériel de base 10 utilisé notamment dans ma classe, il faut veiller à ce que l'élève ne croit pas qu'une dizaine est uniquement une barre verte composée de 10 cubes empilés, mais aussi un sachet de 10 timbres (utilisé dans Cap Maths), ou encore un collier de 10 trombones, une rangée de 10 boules sur un boulier, une ronde de 10 enfants, etc. L'élève doit aussi pouvoir progressivement généraliser pour s'affranchir du matériel et conceptualiser. Comme le matériel, les activités proposées doivent être différenciées, les élèves n'ayant pas tous la même façon d'apprendre (certains sont davantage visuels, auditifs ou kinesthésiques).

Mais cette variété peut de nouveau faire prendre à l'enseignant le risque d'accumuler les expérimentations et de se disperser... C'est la raison pour laquelle, les rapports français et canadien insistent **sur l'accompagnement et la formation des enseignants.**

- Selon le rapport Villani-Torossian, « *la formation doit permettre aux enseignants de s'approprier des ressources avec toute la distance critique nécessaire, pour concevoir des situations d'enseignement riches* » (p.13).
- Selon les experts canadiens, il est primordial de fournir aux équipes des exemples de mises en œuvre de séances intégrant des ressources matérielles reconnues.

C'est la raison pour laquelle j'ai choisi de m'appuyer sur la nouvelle édition de Cap Maths CE2 pour mon année en tant que professeur des écoles stagiaire : le manuel, recommandé par ailleurs lors de ma formation à l'ESPE, a été conçu par des enseignants experts, dans le respect des programmes en vigueur et revu suite à des enquêtes réalisées auprès d'enseignants qui l'ont testé. La méthode accorde « *une place essentielle à la réflexion des élèves au travers de situations de recherche* »⁹ en s'appuyant notamment sur des activités manipulatoires et du

⁹ Citation de la démarche de Cap Maths en introduction du guide pédagogique.

matériel variés¹⁰. Bien sûr, il s'agit d'adapter et de s'appropriier les séquences et séances proposées mais le cadre est une bonne base pour cette première année d'expérience, en particulier ayant à cœur de concevoir et mettre en œuvre des situations de manipulation au service de l'enseignement des fondamentaux en mathématiques.

Enfin, il ne faut pas s'arrêter à l'étape de la manipulation : la manipulation doit être au service des grandes notions mathématiques à enseigner. On revient sur l'importance du triptyque **manipulation – verbalisation – abstraction** du rapport Villani-Torossian : l'activité manipulative est une étape nécessaire mais non suffisante pour arriver à raisonner de manière plus abstraite sur les nombres, les grandeurs et les mesures.

II. QUELQUES SITUATIONS DE MANIPULATIONS EXPERIMENTEES DANS MA CLASSE DE CE2

1. SITUATION N°1 : UTILISATION DU MATERIEL DE BASE 10 POUR CALCULER

a. Objectifs principaux

Dès la rentrée, j'ai commandé du matériel de base 10 (cf. annexe p. 36) car nous n'en disposions pas.

- Les unités (u) sont représentées sous forme de petits cubes jaunes et peuvent s'emboîter les uns sur les autres ;
- Les dizaines (d) sont représentées sous forme de barres vertes équivalentes à 10 cubes empilés ;
- Les centaines (c) sont représentées sous forme de plaques bleues équivalentes à 10 barres collées côte à côte ;



Figure 1: Matériel de base 10 manipulé au tableau dans pochettes transparentes, visibles par tous.

¹⁰ En faisant le même inventaire que sur le BO du 26/07/2108, les occurrences des mots « manipulation », « manipuler » et « matériel » sont très nombreuses dans le guide pédagogique Cap Maths CE2.

- Les milliers (m) sont représentées sous forme de grands cubes rouges équivalents à 10 plaques empilées les unes sur les autres.

Le matériel a, dès la première période de l'année scolaire, été utilisé pour le calcul réfléchi sur des nombres inférieurs à 1000 (dans un premier temps, puis supérieurs à 1000). Les objectifs d'apprentissage visés dans la situation n°1 sont les suivants :

- Décomposer et visualiser un nombre en centaines, dizaines et unités et connaître les égalités $1 \text{ centaine} = 10 \text{ dizaines} = 100 \text{ unités}$, $1 \text{ dizaine} = 10 \text{ unités}$;
- Utiliser ces décompositions pour déterminer le résultat d'un ajout, retrait d'unités, dizaines, centaines sur un nombre ;
- Mais aussi préparer et donner du sens aux techniques opératoires en colonnes (additions avec retenues et soustractions avec emprunt).

b. Déroulement

N'ayant pas reçu tout de suite le matériel commandé, j'ai préalablement travaillé avec le matériel détachable fourni par Cap Maths : des timbres à l'unité, des carnets de 10 timbres et des plaques de 10 carnets. Cette première représentation était intéressante mais finalement assez difficile à manipuler et moins visuelle que le matériel de base 10 (formes en 3D empilables). J'ai, en revanche, pu réexploiter ce matériel ultérieurement (au même titre que des sachets de 10 trombones, des paquets de 100 trombones pour varier le matériel utilisé).

Une fois le matériel de base 10 reçu, une première séance a été consacrée à sa présentation, la familiarisation et l'appropriation par les enfants. Des premiers petits calculs réfléchis (sur nombres inférieurs à 100) ont permis aux élèves de rapidement et assez naturellement faire le lien avec le matériel disponible devant eux.

Un jour après, la deuxième séance était consacrée à la résolution d'exercices proposés dans le fichier Cap Maths¹¹ ayant la même consigne de base : trouver le nombre obtenu après ajout ou retrait d'unités, dizaines et/ou centaines sur un nombre de départ. Notons qu'aucun matériel n'était préconisé dans le guide enseignant dans ce cas-ci.

¹¹ Fichier Cap Maths CE2 Nombres et Calculs p. 11 – Unité 1 / Séance 4.

Centaines, dizaines et unités

Dans les exercices 1 à 3, tu dois trouver le nombre obtenu après chaque ajout ou retrait.

1 Complète.

| nombre de départ | ajout | nombre obtenu |
|------------------|------------------------|---------------|
| 58 | 3 dizaines | |
| 47 | 5 unités | |
| 206 | 8 dizaines | |
| 250 | 5 dizaines | |
| 358 | 5 dizaines et 2 unités | |

2 Complète.

| nombre de départ | retrait | nombre obtenu |
|------------------|------------------------|---------------|
| 64 | 3 dizaines | |
| 52 | 5 unités | |
| 308 | 8 dizaines | |
| 140 | 5 dizaines | |
| 250 | 5 dizaines et 2 unités | |

3 Complète.

| nombre de départ | retrait | nombre obtenu |
|------------------|-------------------------------------|---------------|
| 264 | 5 dizaines et 5 unités | |
| 540 | 2 centaines et 4 unités | |
| 301 | 1 centaine et 8 unités | |
| 600 | 4 dizaines et 3 unités | |
| 460 | 2 centaines, 8 dizaines et 4 unités | |




Figure 2: Exercices proposés par Cap Maths sans matériel préconisé

Phase 1

Lors d'une première phase, l'exercice leur a été proposé tel quel, sans davantage d'explication. En circulant dans les rangs, je me suis rapidement rendu compte que l'exercice posait (comme je m'y attendais...) des difficultés. Toutefois, cette situation arrivant peu de temps après la présentation du matériel, certains élèves ont proposés d'eux-mêmes de s'aider du nouveau matériel présenté la veille... et laissé ostensiblement visible au tableau.

Phase 2

Une deuxième phase a donc été axée sur la manipulation du matériel comme aide au calcul. La manipulation a, dans ce cas précis, eu un rôle de **validation de la réflexion**. Le taux de réussite a été suivi en phase 1 (sans manipulation) et en phase 2 (avec manipulation).

Phase 3

Plusieurs semaines plus tard (pour laisser le temps faire son effet), le troisième exercice (cinq calculs de retrait sur nombres supérieurs à 100) a été de nouveau soumis (cf. annexe p. 39). La procédure n'était pas imposée (pour observer la méthode utilisée après plusieurs semaines, ou encore pour voir si certains utilisent la technique opératoire en colonnes) : les élèves pouvaient répondre en opérant uniquement sur les unités, dizaines et centaines mais aussi en soustrayant les nombres correspondants. Cette fois-ci, le matériel n'était plus manipulable par tous, mais visuellement disponible¹². J'ai circulé dans les rangs tout le long de la séance et ai procédé, pour chacun, à une première correction (binaire – résultat vrai ou faux, sans étayage)

¹² J'ai opté, comme cela est présenté en annexes, pour des pochettes plastiques transparentes au tableau (une pour les unités, une pour les dizaines, une pour les centaines) permettant aux élèves de visualiser le matériel, et occasionnellement, lorsque le besoin s'en ressent ou pour vérification, de manipuler au tableau à la vue de tous.

leur offrant la possibilité se corriger avec ou sans manipulation, les élèves disposant alors de *jokers* sous forme de jetons (5 maximum). Ces *jokers*, utilisés ou non selon leur gré, leur donnaient droit à réaliser ou vérifier leur calcul par la manipulation du matériel¹³. J'ai ensuite procédé à une correction finale une fois la séance terminée.

J'ai suivi :

- Le taux de réussite (noté sur 5) après la correction intermédiaire (« *après le passage intermédiaire du PE* » sur les graphiques) et après la correction finale ;
- Le nombre d'élèves ayant utilisés des *jokers* et combien ;
- La méthode utilisée.

Phases suivantes

Par ailleurs et pour des séquences ultérieures, nous avons fait régulièrement référence au matériel de base 10, sans avoir systématiquement à le manipuler, lors de séances de calculs, par exemple afin de matérialiser la retenue en addition en colonnes ou l'emprunt de dizaines / centaines lors de l'étude de la soustraction en colonnes.

c. Résultats

Phase 1 sans manipulation

Les résultats de la **phase 1 – sans manipulation** – ont été sans appel : **un seul élève sur 23¹⁴ a réussi à ne faire aucune erreur**. Ce dernier ne rencontre effectivement pas de difficultés en mathématiques et entre presque intuitivement dans l'abstraction (il présente néanmoins quelques difficultés à verbaliser son raisonnement). Notons, par ailleurs, que 10 élèves sur 23 (soit 43%) ont fait des erreurs sur l'exercice 2 ou 3 car n'ont pas bien tenu compte de la consigne : ils ont effectué un « *ajout* » (comme pour l'exercice 1) et non un « *retrait* » comme cela était indiqué dans les tableaux des exercices 2 et 3. De nombreux élèves n'ont pas réussi à terminer les exercices car se sont retrouvés bloqués ou inhibés dans leur recherche par peur de se tromper.

¹³ Matériel de base 10 le plus souvent, mais également les jetons de couleurs ou le boulier.

¹⁴ Deux élèves absents sur les 25 élèves de la classe lors de la phase 1

Phase 2 avec manipulation

J'ai noté un taux de réussite bien plus important lors de la **phase 2 : mêmes exercices avec, cette fois-ci, accès au matériel de base 10**.

| 23 élèves présents - 15 calculs au total | Phase 1 | | Phase 2 | |
|---|-------------------|-----|-------------------|-----|
| | sans manipulation | % | avec manipulation | % |
| Nombre d'élèves avec aucune erreur | 1 | 4% | 10 | 43% |
| Nombre d'élèves avec calculs erronés ou non faits | 22 | 96% | 13 | 57% |
| entre 1 et 3 calculs erronés ou non faits | 5 | 22% | 11 | 48% |
| entre 4 et 7 | 8 | 35% | 2 | 9% |
| entre 8 et 10 | 6 | 26% | 0 | 0% |
| plus de 10 | 3 | 13% | 0 | 0% |
| Nombres d'absents | 2 | | 2 | |

Figure 3: Tableau de synthèse des résultats en phase 1 et 2.

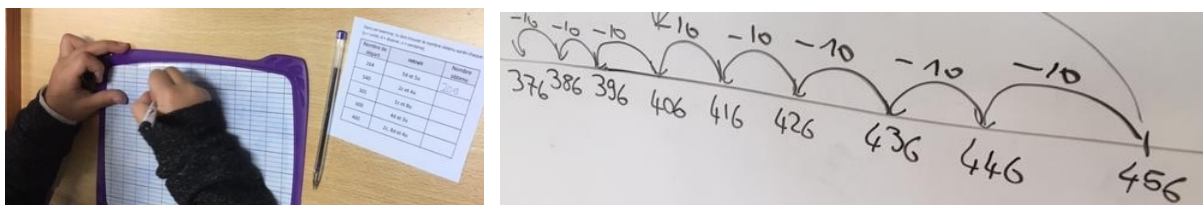
Le taux de réussite totale (i.e. 0 erreur sur 15 calculs) passe de 4% à 43% et aucun élève n'a plus de 7 erreurs sur 15. Le résultat est toutefois biaisé par la reformulation de la consigne qui avait posé des difficultés : « Attention, il faut faire un retrait de dizaines et/ou d'unités dans les exercices 2 et 3 » et qui expliquait en grande partie le taux d'échec au-delà de 7 erreurs (39% en phase 1). Le tableau des résultats détaillés se trouve en annexes p.40.

J'ai noté également que tous les élèves, qu'ils aient des erreurs ou non, ont terminé les trois exercices en phase 2 alors qu'il disposait du même temps qu'en phase 1. En présence du matériel, les élèves manipulent, agissent et sont, par conséquent, moins inhibés : ils osent essayer, calculer, recommencer... La peur de se tromper est moins présente.

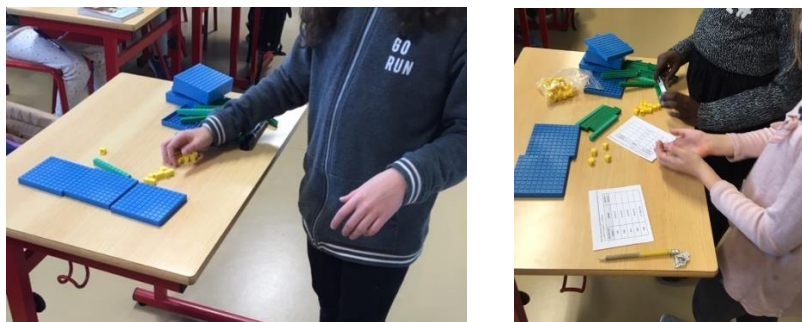
Phase 3 (plus espacé dans le temps) avec le choix de manipuler ou non

Contrairement à la phase 1, les difficultés liées à la consigne étaient moindres : il n'était ici question que de retraits. Aucun élève n'a donc effectué un ajout au lieu d'un retrait. En revanche, deux élèves ont retiré 4 centaines au lieu de 4 dizaines sur le calcul n°4.

Après ma correction intermédiaire, seuls **4 élèves sur 25** ont réussi à obtenir 5/5 sur un exercice pourtant déjà fait quelques semaines auparavant. J'ai remarqué qu'aucun élève n'a utilisé la technique opératoire de la soustraction en colonnes (non encore revue dans ma classe de CE2 à ce stade de l'année). Ces 4 élèves ont procédé à des **calculs réfléchis sur leur ardoise en manipulant mentalement les centaines, dizaines, unités** ou **en procédant par « sauts de puces » sur ligne graduée** comme sur la photo ci-dessous (exemple sur le calcul n°5 : retrait de 2c, 8d et 4u sur 460, traduit en $460 - 4 = 456$ puis $456 - (8 \times 10)$ avec 8 sauts en arrière successifs de 10 pour arriver à 376, et enfin $376 - 200 = 176$).



Après ma correction intermédiaire, **16 élèves sur 25 ont alors choisi d'utiliser au moins un joker** pour refaire ou vérifier leurs calculs – soit 16 élèves sur 21 qui n'avaient pas obtenu 5/5 à l'exercice. 5 élèves ont choisi de revoir leurs calculs sans utiliser leurs *jokers*.



Parmi les 16 élèves qui ont choisi de vérifier leur réflexion en manipulant, une majorité (13 élèves sur 16) n'a utilisé que 1 ou 2 jokers, pour les calculs leur posant le plus de difficultés.

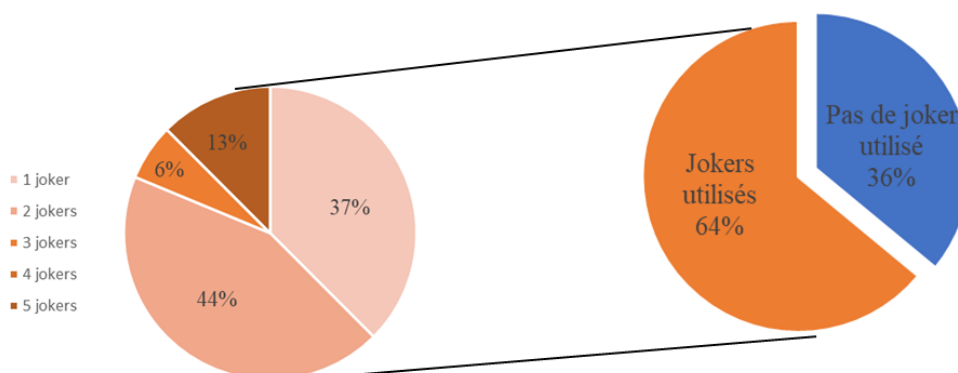


Figure 4: Répartition des 25 élèves selon l'utilisation ou non du matériel, et selon le nombre de jokers utilisés.

Le taux de réussite a bien progressé entre la première et deuxième correction comme en témoigne le graphique ci-après (en orange, les résultats de la correction finale vs en bleu, les résultats de la première correction).

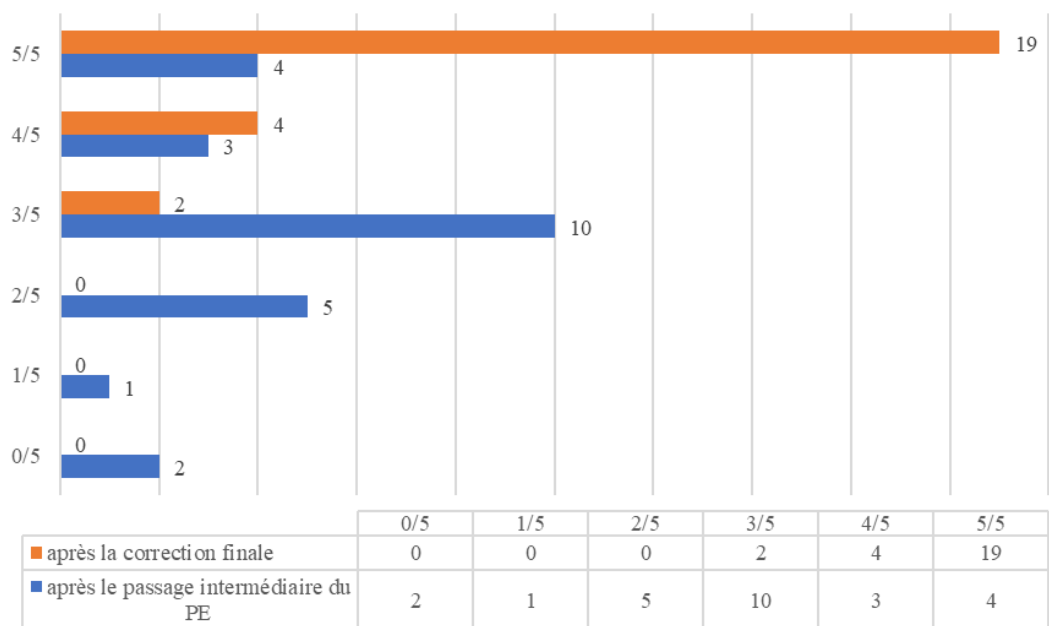


Figure 5: Nombre d'élèves selon les résultats obtenus sur l'exercice (5 calculs) et comparaison entre la correction intermédiaire et finale (après manipulation possible pour vérification)

L'amélioration de la performance est particulièrement visible sur les 16 élèves ayant opté pour la manipulation : **ils passent de 3 à 14 avec une ou aucune erreur.**

La manipulation semble avoir été bénéfique voire même indispensable pour de nombreux élèves, alors que l'exercice avait déjà été fait... Il faut néanmoins nuancer les résultats : l'amélioration des résultats est ici uniquement imputée à la manipulation du matériel, alors que la manipulation pouvait se faire à deux ou trois. J'ai pu observer en séance **l'aide ou l'étayage par les pairs au moment de la manipulation**, ce qui a certainement eu un effet tout aussi bénéfique sur les résultats mais n'a pas pu être quantifié.

Le tableau des résultats détaillés se trouve en annexe p.41.

Phases suivantes

Il est intéressant de souligner que l'apport du matériel a été d'une grande utilité dans les phases suivantes. A titre d'exemple, les élèves faisaient eux-mêmes référence au matériel lorsqu'ils **verbalisaient la procédure utilisée** dans une soustraction posée en colonnes (« *casser* » une dizaine pour emprunter 10 unités). Ils avaient ainsi créé un souvenir mental des manipulations réellement effectuées en classe. Par ailleurs, certains n'utilisant plus progressivement le matériel de base 10, il suffisait de l'évoquer ou de reprendre les cartes de timbres Cap Maths (cf. tableau matériel en annexe p. 36) indiquant 1 unité, 1 dizaine, 1

centaine (plus facile à aimanter au tableau et disponibles en plus grand nombre) pour les faire verbaliser ou justifier la technique opératoire en colonnes.

De même, lors de l'introduction des nombres entiers à 4 chiffres, **la découverte des milliers** et de l'égalité $1 \text{ millier} = 10 \text{ centaines} = 100 \text{ dizaines} = 1000 \text{ unités}$ a été grandement **facilitée** par l'utilisation en amont du matériel de base. Notons toutefois que j'ai trouvé regrettable que le gros cube représentant le millier ne puisse s'ouvrir pour y empiler les plaques de centaines, les barres de dizaines et les cubes d'unités : seules les 4 faces du cube sont visibles. Mais l'image mentale était, pour la plupart, suffisamment ancrée pour imaginer que le cube des milliers puisse contenir 10 centaines, 100 dizaines et 1000 unités.

2. SITUATION N°2 : UTILISATION D'UN JEU POUR METTRE EN RELATION MULTIPLICATION ET ADDITION ITEREE

a. Objectifs principaux

Le **jeu des jetons bien placés**, proposé par Cap Maths CE2, a été introduit dans ma classe en deuxième période pour déclencher une situation-recherche chez les élèves : ils sont confrontés à un jeu où, après avoir gagné des cartes en plusieurs exemplaires, ils doivent calculer le nombre de points obtenus à l'aide de l'addition itérée et/ou de la multiplication. Pour cela, ils doivent positionner un jeton numéroté sur une des neuf cases du plateau, ils gagnent alors la carte correspondante à la case du plateau en plusieurs exemplaires (la valeur du jeton) et doivent ensuite calculer le nombre de points obtenus (cf. règle du jeu en annexe p.42). Exemple : si je place le jeton 8 sur la case 4, j'ai gagné $4+4+4+4+4+4+4+4$ ou 8×4 soit 32 points. L'équipe ou l'élève qui gagne est celui qui obtient le plus de points cumulés.

L'objectif de ce jeu est de permettre aux élèves d'apprendre à :

- Mettre en relation la multiplication avec la réunion de quantités identiques et l'addition itérée ;
- Résoudre des problèmes posés dans une situation où des quantités sont regroupées à partir de quantités identiques.



Figure 6: appropriation du matériel de jeu

b. Déroulement

La première séance est consacrée à la familiarisation du jeu, de ses règles et du matériel. La manipulation devrait avoir, dans ce cas précis, **le rôle de déclencheur de réflexion** sur le sens de la multiplication (ou de réactivation pour certains qui s'en souvenaient, le sens de la multiplication ayant théoriquement été abordé en CE1). Lors de cette première séance introductive, une fois que chaque élève a pris connaissance individuellement des règles du jeu, la classe est divisée en deux groupes (équipe Jaune et équipe Bleu) et je fais jouer devant la classe deux membres de chaque équipe, tour à tour.

Le premier joueur de l'équipe Jaune retourne au hasard un jeton de la couleur de son équipe, le **3** et le positionne sur la case **4** du plateau de jeu, commun aux deux équipes. Le membre de l'équipe responsable des cartes points lui donne alors 3 cartes de **4** points. Les autres membres de l'équipe calculent alors le nombre de points obtenu : 12 dans ce cas précis. Il est intéressant de noter que, dès ce stade, on entend « $4+4+4$ » mais également « *3 fois 4* » (cf. script des échanges en annexe p.42).

Le joueur 1 de l'équipe Bleu procède de la même façon : il tire alors le jeton **2** et doit maintenant le positionner sur une autre case, la case **4** étant déjà occupée. Lors de ce premier essai, cet élève ne semble pas avoir de stratégie, il le place sur la case **5**. Son coéquipier lui donne alors 2 cartes de **5** points. C'est au moment de calculer les points, $5+5 = 2 \times 5 = 10$, que certains joueurs se rendent compte que leur partenaire n'a pas fait le meilleur choix !

Le principe compris, les trois passages suivants (4 au total pour occuper 8 cases sur 9) se révèlent intéressants en termes d'échanges au sein des équipes.

Une fois les élèves familiarisés avec le jeu, cette situation a pu être réutilisée à de nombreuses reprises, dans d'autres séances :

- Dans des contextes variés : phase d'entraînement, exercices différenciés (nombre de jetons différents, valeurs plus ou moins restreintes des cases et des jetons pour mobiliser certaines tables), phase d'évaluation ;
- Dans des modalités différentes : groupe classe divisée en deux équipes lors de la première fois, puis en équipes de 2, 3 ou 4, en autonomie ou avec le support de l'enseignant par exemple en APC¹⁵, ...).

¹⁵ Activités Pédagogiques Complémentaires mises en œuvre dans ma classe les mardis et vendredis de 11h30 à 12h les périodes où je suis responsable de la classe.

J'ai noté les principales remarques des élèves lors de la première séance de découverte du jeu en collectif. J'ai également suivi les résultats de l'exercice donné en évaluation.

c. Résultats

Résultats observés en séance de découverte du jeu

Les élèves **sont bien rentrés dans l'activité**. Ils ont été très attentifs à l'explication des règles dont il disposait individuellement sous forme de fiche plastifiée), la situation-jeu par équipe ayant vraisemblablement aiguisé leur curiosité. Rapidement, les élèves ont cherché à participer au sein de leur équipe, témoignant de leur motivation.

Dès la première phase du jeu en collectif (deux équipes dans la classe), les élèves ont été incités à expliciter les divers procédés utilisés pour calculer le nombre de points obtenus par chaque joueur (puis par chaque équipe au cumulé) :

- Une majorité a utilisé l'addition itérée : soit avec l'écrit en appui sur leur ardoise (arbre de calcul ou calculs mentaux successifs) soit à l'oral en comptant de n en n comme dans le jeu du furet (régulièrement joué en classe depuis le début d'année) ;
- Quelques élèves ont rapidement fait le rapprochement avec la multiplication et retrouvent par calcul mental les résultats connus de certaines tables apprises en CE1 (par exemple, « *il y a 3 fois 4 points et 3 fois 4, ça fait 12 !* »).

La situation-jeu a permis de :

- Faire le lien avec le mot « *fois* » qui est naturellement utilisé dans le contexte et faire le lien avec l'itération de l'un des facteurs ou encore avec l'évocation d'une collection d'objets (ici les cartes) répétée plusieurs fois ;
- Faire analyser les formes sous lesquelles les élèves présentent leurs calculs (par exemple : « *4+4+4, c'est 3 fois 4, cela s'écrit aussi 3x4 mais aussi 4x3* ») ;
- De montrer finalement l'équivalence entre une addition itérée et multiplication.



Figure 7: observation en séance découverte

D'autres remarques faites par les élèves pendant les échanges en phase de jeu ont été soulignées et sont de bonnes bases pour le travail ultérieur sur la multiplication :

- Certains ont commencé à expliciter le rôle de 0 et 1 dans le calcul d'un produit (même si cela est théoriquement une reprise des acquis du CE1) ;
- D'autres ont évoqué ce qui se passaient lorsqu'on multiplie un nombre par 10 (ce qui nous amènera ultérieurement à « la règle du 0 »).

Le jeu manipulatoire est ici déclencheur d'échanges, de verbalisation de procédés, et permet ainsi aux élèves de découvrir par eux-mêmes la procédure experte de la multiplication et ses caractéristiques. Les échanges m'ont aussi permis de mieux diagnostiquer le niveau de compréhension des élèves et déceler plus facilement les types d'erreurs :

- Erreur de la compréhension du calcul à effectuer pour obtenir les points (par exemple addition de la valeur du jeton et de la case du jeu au lieu de la multiplication ou addition itérée) : le retour à la règle du jeu et au matériel est alors nécessaire pour montrer l'origine de l'erreur ;
- Erreur dans le calcul de l'addition itérée (oubli d'un terme par exemple) : cette erreur permet de répéter qu'il faut bien avoir 8 termes si on gagne 8 fois la carte et de monter l'intérêt qu'il y a à recourir à la multiplication et à connaître les résultats des tables.

Résultats suivis en situation d'évaluation

Le jeu des jetons bien placés a notamment été réutilisé en évaluation : le jeu n'a pas été joué (pas de manipulation au sens strict du terme) mais a été présenté sous forme d'exercice : l'élève évalué individuellement devait **réinvestir un « souvenir mental »** des règles du jeu et du calcul des scores pour répondre aux questions (calcul des points des deux joueurs).

L'exercice a globalement été très bien réussi¹⁶ : seule une élève n'a pas réussi à réinvestir un souvenir mental et a récréé un score selon une autre logique, qui ne fait pas du tout intervenir les multiplications ou additions itérées (voir les résultats détaillés et des exemples de traces écrites en annexe p.44).

| Résultat de l'exercice (noté sur 2) | Nb élèves | % |
|-------------------------------------|-----------|-------------|
| Non évalué | 1 | 4% |
| 0 / 2 | 1 | 4% |
| 1 / 2 | 5 | 20% |
| 2 / 2 | 18 | 72% |
| | 25 | 100% |

5 élèves ont réussi à réinvestir le souvenir mental du jeu mais ont fait des erreurs de calculs, ne pouvant manipuler les cartes points, lors de cette évaluation sommative.

¹⁶ Une élève, en grandes difficultés, n'a pas été évaluée comme les autres sur cet exercice car elle n'arrive pas à s'affranchir du matériel pour calculer.

Les 18 autres ont réussi l'exercice : les règles étant bien mémorisés, ils ont pu raisonner et calculer de manière **abstraite** et écrire leurs calculs (ayant par ailleurs travaillé avec eux sur l'importance des phrases réponses en mathématiques).

3. SITUATION N°3 : UTILISATION DE GABARITS POUR IDENTIFIER DES ANGLES DROITS

a. Objectifs principaux

Les **gabarits d'angle droit**, proposés dans matériel détachable Cap Maths, ont été introduits en début d'année dans une situation-recherche puis réutilisés à plusieurs reprises lors d'exercices d'entraînement et d'évaluation. Les objectifs visés étaient :

- Utiliser un gabarit pour reconnaître et tracer des angles droits ;
- Prendre conscience que les rectangles et carrés ont quatre angles droits ;
- Utiliser les propriétés relatives aux côtés et aux angles pour reconnaître un carré, un rectangle.

b. Déroulement

Les gabarits ont été présentés à la classe : les formes et les couleurs différentes permettent d'éviter que les élèves associent une forme particulière à un gabarit d'angle droit. Nous les avons également comparés à des objets que les élèves connaissent bien : des pièces ou plaques de *Lego* de formes différentes mais comportant au moins un angle droit.



Figure 8 : Gabarits d'angle droit Cap Maths et pièces de Lego

Les élèves ont d'abord été mis en situation de jeu / recherche : les élèves devaient utiliser les gabarits pour partir à « *la chasse aux angles droits* » dans la classe. Les élèves pouvaient se déplacer dans la classe en binôme, chaque binôme disposant de gabarits différents pour comparer leurs découvertes.

Des exercices d'entraînement (cf. annexe p.46), avec les gabarits Cap Maths, ont ensuite été proposés sur différentes séances :

- Exercice 1 : reconnaître et coder des angles droits dans des polygones ;
- Exercice 2 : reconnaître des carrés et rectangles parmi plusieurs figures.

Enfin, les gabarits ont été mis à disposition lors d'une évaluation en géométrie, en fin de période 2, sur des exercices très similaires aux exercices d'entraînement.

J'ai suivi en particulier les résultats de deux exercices **en phase d'évaluation** et recensé les principales difficultés.

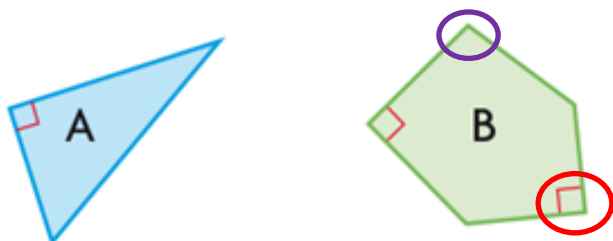
c. Résultats

Résultats de la phase concrète de découverte et d'appropriation des gabarits

La comparaison des gabarits avec les plaques *Lego*, ainsi que la « *chasse aux angles droits* » dans la classe a été très bénéfique : les situations et objets proposés ont suscité leur curiosité et leur adhésion dans la mise en activité. Ils ont été motivés et ont trouvé de nombreux angles droits dans la classe et j'étais sollicitée pour venir prendre en photo chaque exemple (cf. exemples non exhaustifs en annexes p.46). Cela a confirmé que, plus les situations d'apprentissages sont **concrètes, proches de leur quotidien, plus elles ont du sens pour les élèves**, et plus la majorité s'investit dans les apprentissages (que ce soit en mathématiques ou dans un autre domaine).

Résultats suivis en évaluation

Le premier exercice dont la compétence visée était d'utiliser un gabarit d'angle droit pour trouver les angles droits dans deux polygones (un triangle rectangle A et un pentagone B) et les coder, n'a pas posé de grandes difficultés aux élèves.



| Résultat exercice 1 | Nb élèves | % |
|---------------------|-----------|-----|
| A | 15 | 60% |
| PA | 9 | 36% |
| NA | 1 | 4% |
| Total général | 25 | |

A : atteint; PA: partiellement atteint; NA : non atteint

Seul un élève n'a pas du tout réussi l'exercice. Les 9 élèves qui ont partiellement atteint l'objectif se sont trompés sur le polygone B : ils n'ont pas réussi à identifier le deuxième angle droit de B, entouré en rouge sur la figure, et / ou ont identifié à tort l'angle, entouré en violet sur la figure, comme un angle droit.

Plusieurs explications sont possibles : **des difficultés à passer de l'espace (la classe) au plan** (travail sur feuille), un **manque de précision dans la manipulation du gabarit d'angle droit et le contrôle du geste**, et / ou **une représentation résistante des angles droits comme des angles dans les « coins » d'un carré** (le pentagone proposé « ressemblant » à l'association d'un carré et d'un triangle).

Le deuxième exercice a été nettement moins bien réussi. La compétence visée était l'utilisation combinée des gabarits d'angle droit et de la règle graduée pour trouver les carrés (partie a de l'exercice) et les rectangles (partie b) parmi six quadrilatères A, B, C, D, E, F (cf. traces écrites en annexe p.48).

| Résultat exercice 2 | Nb élèves | % |
|---------------------|-----------|-----|
| A | 9 | 36% |
| PA | 7 | 28% |
| NA | 9 | 36% |
| Total général | 25 | |

A : atteint; PA: partiellement atteint; NA : non atteint

Seuls 9 élèves sur 25 ont réussi à identifier la figure D comme unique carré et les figures B et C comme rectangles¹⁷.

Deux types d'erreurs ont été fournis en a) (identification du carré) :

- Les figures F et B ont été reconnues à tort comme un carré. F a bien quatre côtés égaux mais n'a pas quatre angles droits : l'erreur est liée à un **positionnement**

¹⁷ La compétence est évaluée atteinte (A) si l'élève n'a fait aucune erreur, partiellement atteinte (PA) si une erreur a été faite, non atteinte (NA) si plus de deux erreurs (oubli ou identification à tort) ont été faites.

imprécis du gabarit car la mesure des angles sont effectivement proches de 90° . Quant à B, il a bien quatre angles droits mais les longueurs des côtés ne sont pas égales¹⁸. L'erreur est cette fois liée à une **mesure imprécise avec la règle graduée** (5 mm d'écart).

- La figure D n'a pas été identifiée comme carré malgré l'existence des propriétés du carré. Après échanges avec les élèves, l'erreur est due à **représentation encore résistante à ce stade** : un carré est souvent représenté avec un côté parallèle au bord de la feuille ou du tableau ; ici, les élèves voyaient un losange.

Les principales erreurs recensées en partie b) (identification des rectangles) sont les suivantes :

- La figure B n'a pas été reconnue comme rectangle (assez logiquement pour ceux qui l'avaient identifié comme carré en partie a) ;
- Les figures A et E ont été reconnus à tort¹⁹ comme des rectangles, là encore à cause d'un **manque de précision** avec les gabarits d'angle droit, cartonné et surtout opaque.

Les exercices évalués étant très proches des exercices d'entraînement, j'ai été étonnée du faible taux de réussite. J'en ai conclu que les gabarits fournis par Cap Maths, pourtant pensés par des experts, n'étaient pas très bien conçus. Les gabarits d'angle droit sont sensés aider les élèves à construire une bonne image mentale de l'angle droit avant l'utilisation de l'équerre qui présente d'autres informations. Pourtant, de nombreux élèves se sont retrouvés confrontés à des difficultés liées à la **non transparence des gabarits**. Lorsqu'ils faisaient coïncider l'angle droit du gabarit avec l'angle à vérifier, ils ne voyaient pas, par transparence, que le côté des angles se trouvait couvert par le gabarit ou dépassait légèrement... Finalement, j'ai constaté moins d'erreurs d'imprécision avec l'introduction de l'équerre – translucide cette fois – quelques séances plus tard.



¹⁸ La largeur est de 4 cm et la longueur de 4cm et 5mm.

¹⁹ La figure A est en fait un parallélogramme et E un quadrilatère quelconque.

III. ANALYSE ET BILAN

1. ROLE IMPORTANT DE LA MANIPULATION INDISCUTABLE

Les manipulations utilisées dans les trois situations présentées ont été indiscutablement très bénéfiques et même indispensables pour la grande majorité des élèves de ma classe.

De nombreux élèves de ma classe sont particulièrement **kinesthésiques** : ils ressentent le besoin de bouger, de manipuler. J'ai donc multiplié les occasions cette année de manipuler différents matériels en mathématiques (mais également dans toutes les autres disciplines) : les jetons 3D ou 2D, les étiquettes à aimanter au tableau, les cartes, la monnaie, les formes géométriques (cf. tableau du matériel utilisé en annexe p.36), les rubans, et bien sûr **leur propre corps**, lors de séances croisées Mathématiques / EPS. Ces manipulations sont généralement sources de motivation et indispensables pour les mettre réellement en activité.

Dans la première situation, la manipulation a été bénéfique et a joué plusieurs rôles : elle nous a permis d'initier la recherche sur la décomposition et **la visualisation de la décomposition d'un nombre en unités, dizaines, centaines** ; puis a progressivement joué le rôle de **vérification ou contrôle du calcul**. Le matériel de base 10 est devenu très familier pour les élèves de la classe : ils y font référence d'eux-mêmes à l'oral, sert de **support à la verbalisation** de leur raisonnement (justification de leur réponse ou explication à leurs pairs en tutorat) ou lorsqu'il représente le calcul ou problème mathématique par un dessin. Par ailleurs, le **souvenir mental** des manipulations sur nombres inférieurs à 999 a permis un apprentissage plus rapide sur les nombres supérieurs à 1000, sans générer systématiquement des manipulations. Les manipulations étaient encore réservées aux élèves en plus grandes difficultés, les autres s'en affranchissaient ou l'employaient à des fins de vérification. La manipulation permet donc de **différencier les apprentissages** assez naturellement.

Dans la deuxième situation, la manipulation a servi de **déclencheur de la réflexion sur le sens de la multiplication et son lien avec l'addition itérée**. Le jeu, désormais familier pour les élèves de la classe, permet aux élèves d'automatiser les résultats des tables de multiplication. Ils essaient d'élaborer une stratégie gagnante (exemple : positionner un jeton de faible valeur sur une case de faible valeur pour optimiser ses chances au tour suivant de positionner un jeton de valeur plus élevée sur la case 8 ou 9...). Un autre jeu est régulièrement

pratiqué dans la classe : le jeu du furet. Il n'entraîne, certes, aucune manipulation de matériel, mais a l'avantage commun de générer des images mentales, en particulier lorsque nous ajoutons la règle du « *chut* » et « *double chut* » qui consiste à taire un ou deux résultats successifs du furet avant d'énoncer le troisième résultat. Ce jeu aide les élèves à mémoriser et progressivement automatiser les résultats des tables de multiplication. Ils l'évoquent d'ailleurs par eux-mêmes lorsqu'ils recherchent le résultat d'une multiplication non encore connue (exemple : « *7x9... euh... je ne connais pas encore ma table de 7... ah ! oui, on fait un furet [en comptant avec ses doigts le nombre d'itérations] 9... 18... 27... 36... 45... 54... 63... ça fait 63 !* »).

Les phases concrètes, notamment en géométrie, se sont révélées essentielles avant d'entrer dans l'abstraction, comme en témoigne la troisième situation analysée précédemment. Les élèves aiment manipuler **des objets de leur quotidien, exploiter l'espace qui les entourent et utiliser leur propre corps** pour imprimer véritablement un souvenir mental d'une notion abstraite (angle droit, points alignés, droite, segment, longueur, milieu de segment, etc.). Par ailleurs, les différentes formes de gabarits d'angle droit ont eu un effet bénéfique : les élèves n'ont pas associé l'idée de gabarit d'angle droit à une forme de pièce particulière. Les élèves se sont vite habitués à leur utilisation. Là encore, les gabarits leur servaient de **support à la verbalisation** : ils indiquaient plus facilement ce qui étaient difficiles pour eux ce qui permettaient de leur donner des conseils plus adaptés à leurs difficultés. En revanche, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, les gabarits Cap Maths n'étaient pas bien adaptés aux situations ambiguës et plus complexes à analyser.

2. DIFFICULTES LIEES A LA MANIPULATION

Si le matériel mis à disposition aide en général les élèves à avoir un meilleur taux de réussite dans la résolution des exercices (comme en situation n°1), de mauvaises surprises peuvent néanmoins être constatées, en particulier **quand le matériel n'est pas parfaitement pensé**. A titre d'exemple, les gabarits d'angle droit détachables dans les fichiers Cap Maths devaient permettre aux élèves d'identifier plus facilement les angles droits d'une figure, avant l'introduction de l'équerre. Pourtant, dans le cas de la situation n°3, les résultats analysés n'ont pas été très concluants. Les exercices soumis en évaluation présentaient des cas « *limites* », bien plus ambiguës que ceux des entraînements. Les gabarits en cartons opaques exigeaient une minutie dans le contrôle du geste trop importante pour la plupart des élèves. Il

aurait au moins fallu des gabarits moins opaques afin que les élèves voient que le gabarit couvre de peu (ou pas tout à fait) l'angle à identifier. Si je devais les réutiliser, je les adapterais en les reproduisant sur du plastique²⁰ de couleur translucide. J'ai constaté tout de même que le travail conduit avec ces gabarits a permis de construire une image mentale de l'angle droit, ce qui a aidé à faire abstraction de tout ce qui est superflu sur une équerre (la graduation) au moment de sa découverte.

Par ailleurs, il ne faut pas minimiser le **coût temps** que représente l'élaboration, la préparation, l'installation, le rangement du matériel et la durée des phases de recherche et de manipulation. J'ai passé un temps non négligeable, surtout en début d'année, à trouver et collecter du matériel²¹, à classer et ranger, à adapter le matériel disponible dans Cap Maths (par exemple en imprimant sur des papiers de différentes couleurs pour faciliter l'appropriation par les élèves), à plastifier du matériel détachable ou à photocopier afin de le préserver au mieux des manipulations répétées d'enfants de 8 ou 9 ans...

De même, les manipulations entraînent souvent plus de bruit et d'agitation dans la classe. Lorsque ce bruit est au service des apprentissages, c'est bénéfique. Il faut néanmoins être vigilant : le bruit est-il lié à la mise en activité des élèves ? Le bavardage est-il relatif aux échanges entre élèves sur la situation d'apprentissage ? Le rôle de l'enseignant pendant les phases d'observation de ses élèves en action est primordial pour maintenir l'engagement du groupe dans le respect des règles connues, au risque de devenir réticent à mettre en œuvre de prochaines séances de manipulation... Mais comme le souligne T. Dias dans son ouvrage *Expérimenter et manipuler en mathématiques* (p.26) : « *Bien qu'il soit légitime de penser que toute phase de recherche un peu expérimentale est assez chronophage, il faut relativiser l'investissement qu'elle représente. La durée et la fréquence d'une phase manipulative ne sont pas des constantes mais des variables qui s'ajustent en fonction de plusieurs critères.* ».

En effet, à force d'utiliser certains jeux ou activités manipulatoires, les élèves prennent progressivement des habitudes (par exemple, les règles des jeux régulièrement utilisés ne sont plus à rappeler dans le détail). La phase de découverte est souvent plus longue car il faut prendre le temps de présenter le matériel, son fonctionnement, d'établir les règles à respecter, etc. Par la suite, la durée des phases de manipulation peut être ajustée.

²⁰ Ou calque suffisamment rigide.

²¹ La classe dont j'ai la responsabilité à mi-temps cette année est une création de classe : il y avait donc peu voire quasiment pas de matériel disponible. Par ailleurs, l'absence de mon binôme dès le début d'année m'a obligé à prendre seule en charge la réflexion sur la manipulation et la constitution d'un stock de matériel.

La première séance est souvent une séance en groupe classe mais, ensuite, tous les élèves n'utilisent pas le matériel. Certains s'en affranchissent plus rapidement, ce qui permet à un effectif plus réduit de l'utiliser (par exemple, le matériel de base 10 est à disposition mais seuls les élèves en difficultés y ont accès, les autres peuvent tout simplement le visualiser au tableau ou, encore mieux, dans leur tête !).

Il faut néanmoins constater qu'il est difficile de faire manipuler dans toutes les situations, surtout si l'on tient à finir le programme dans les temps... Certaines séances prennent beaucoup plus de temps que ce que j'ai estimé au départ. L'expérience au fil des années devrait normalement grandement aider. Je le constate déjà au bout de quelques mois : le plus dur est de se lancer, mais une fois l'habitude prise, et l'organisation rôdée, la mise en œuvre est bien moins effrayante et le retour sur investissement payant lors des séances suivantes !

Enfin, la manipulation devrait constituer **une étape provisoire** avant de basculer vers l'abstraction (triptyque manipulation – verbalisation – abstraction du rapport Villani-Torossian). C'est effectivement le cas avec une majorité des élèves de la classe qui s'affranchissent progressivement du matériel à manipuler. En revanche, et en particulier pour une élève du groupe en grandes difficultés, l'activité manipulatoire reste encore en milieu d'année indispensable et, en outre, la seule qui puisse la mettre en situation de réussite. Elle n'arrive toujours pas à dénombrer, calculer sans matériel... C'est, par conséquent, assez frustrant de rester bloquée à l'étape de la manipulation (le matériel prend encore trop de choses en charge) et de ne pas avoir encore trouvé la clé pour passer à l'étape supérieure alors que les élèves sont en dernière année du cycle des apprentissages fondamentaux.

CONCLUSION

Mon parcours scientifique, la lecture du rapport Villani-Torossian avant ma première rentrée en tant que professeur des écoles ainsi que le choix des ressources Cap Maths pour enseigner cette discipline en CE2 m'ont rapidement orientée vers un écrit réflexif sur la place de la manipulation en mathématiques et ses effets sur les apprentissages. Mon expérience personnelle en tant qu'élève, collégienne, lycéenne puis étudiante en mathématiques avait tendance, je dois l'avouer, à minimiser son rôle. Mon entrée dans le métier a remis ce sujet au cœur de mes préoccupations ; je me posais alors les questions suivantes : la manipulation est-elle si indispensable que cela ? Pour tous ? Permet-elle à coup sûr de faire progresser tous les élèves dans les apprentissages en mathématiques ?

L'idée que la pratique manipulatoire joue un rôle bénéfique dans la compréhension des concepts mathématiques n'est pas récente, comme en témoigne les pédagogies actives nées au début du XX^{ème} siècle, mais est particulièrement explorée et remise en avant actuellement. Les écrits théoriques soulignent néanmoins que la manipulation n'est pas une fin en soi : elle doit être une source de motivation, un support à la verbalisation des procédures, une étape intermédiaire et provisoire génératrice d'images mentales. Ces dernières, une fois suffisamment ancrées chez les élèves, favorisent la conceptualisation nécessaire en mathématiques, afin de répondre aux attendus de fin de cycle 2. Le rapport Villani-Torossian préconise ainsi un apprentissage des mathématiques fondé sur le triptyque manipulation – verbalisation – abstraction. C'est dans ce cadre que j'ai souhaité analyser trois situations mises en œuvre sur la période de septembre à mars, dans ma classe de CE2 (école élémentaire 20 rue de la Saïda Paris 15).

L'activité manipulatoire a-t-elle été à chaque fois indispensable ? Oui, pour un très grand nombre de mes élèves : pour déclencher la mise en activité, la recherche ; pour susciter l'adhésion, la curiosité ; pour mettre les élèves en réussite. Sans elle, j'ai noté que les élèves restaient passifs voire inhibés par la peur de se tromper. L'erreur en manipulation est mieux acceptée par l'élève qui recommence, vérifie et plus facile à diagnostiquer pour l'enseignant. L'activité manipulatoire a-t-elle été systématiquement bénéfique ? Oui globalement, dans les trois situations, tout en jouant différents rôles complémentaires : déclencheur ou validation de réflexion, contrôle de calcul, aide à la création d'images mentales ou de références communes dans le groupe, support aux échanges entre pairs et avec l'enseignant... La pratique m'a confirmé que les phases concrètes d'exploitation de l'espace (en particulier en géométrie) et du matériel sont des étapes primordiales. Le choix d'un matériel varié, bien conçu et adapté

aux compétences en construction des élèves est un facteur clé de succès pour son appropriation et son exploitation. Mais ce bénéfice n'est réel que si la manipulation est intégrée de façon réfléchie à une séquence : elle est une condition nécessaire mais non suffisante à la progression dans les apprentissages. En d'autres termes, elle est utile et bénéfique si et seulement si (pour reprendre une notion d'équivalence en mathématiques) elle reste aux services des apprentissages et s'imbrique avec les autres étapes du processus cognitif : la verbalisation entre pairs, avec l'enseignant, la traduction en langage mathématique, l'entrée progressive dans l'abstraction grâce aux images mentales créées jusqu'à masquer en partie le matériel puis s'en affranchir totalement.

Les difficultés principales résident dans le coût temps qu'induisent les phases de manipulation en groupe classe et le risque de maintenir certains élèves dans des activités manipulatoires, lorsque le passage vers l'abstraction n'arrive pas à se faire naturellement. Ces difficultés peuvent devenir des freins à la pratique de la manipulation, en particulier lorsque l'on manque encore d'expérience dans le métier. Pourtant, le gain à long terme me semble suffisamment significatif pour poursuivre et entretenir, autant que possible, la manipulation dans la construction des objets mathématiques, y compris au-delà du cycle 2 que j'ai particulièrement exploré cette année.

BIBLIOGRAPHIE

MEN, B.O. du 26 juillet 2018.

ASTOLFI, J.-P. (12^{ème} édition 2017) *L'erreur, un outil pour enseigner*. ESF.

BARTH, B.-M. (2^{ème} édition 2004) *L'apprentissage de l'abstraction*. Retz.

BELLANGER, F. & RAOUL-BELLANGER, A. (édition 2016) *Construire les notions mathématiques : 55 activités de manipulation*. Retz.

BRISSIAUD, R. (édition 2005) *Comment les enfants apprennent-ils à calculer ?* Retz.

CHARNAY, R. / COMBIER, G. / DUSSUC, M.-P. / MADIER, D. (nouvelle édition 2016) *Guide de l'enseignant Cap Maths Cycle 2 CE2 ; Brochure 90 Activités et jeux mathématiques au CE2*. Hatier

DIAS, T. (2012) *Expérimenter et manipuler en mathématiques. Comprendre les difficultés des élèves pour mieux les résoudre*. Magnard.

PIAGET, J. (1973) *Le droit à l'éducation dans un monde actuel*. Organisation des Nations Unies pour l'Education, la Science et la Culture (UNESCO).

SERVAIS, W. (1969). *L'importance du matériel concret dans l'enseignement mathématique*. Bulletin de l'A.M.Q.

VILLANI-TOROSSIAN (rapport remis le 12 février 2018) *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. Site du ministère de l'éducation nationale et de la jeunesse : <https://www.education.gouv.fr/cid126423/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques.html>

Autres sources :

Site du ministère de l'éducation au Canada. *Stratégie de mathématiques au primaire – rapport de la table des experts en mathématiques* (2003). <http://www.edu.gov.on.ca/>.

Site éduscol (programmes, ressources, ...). <http://eduscol.education.fr/>.


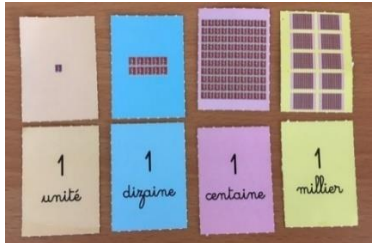

Site du réseau Canopé. <https://www.reseau-canope.fr/>.

Site des ressources Cap Maths. <https://www.editions-hatier.fr/collection/cap-maths>.

ANNEXES

1. TABLEAU RECAPITULATIF DU MATERIEL

Ci-dessous un tableau récapitulatif du matériel de manipulation utilisé dans la classe de CE2 :

| Matériel | Photographie du matériel |
|--|---|
| Matériel de base 10 |  |
| Etiquettes de numération Cap Maths <ul style="list-style-type: none">- Recto : timbre à l'unité, carnet de 10 timbres, plaque de 100 timbres, 10 plaques de timbres.- Verso : 1 unité, 1 dizaine, 1 centaine, 1 millier. Elles sont rangées dans des boîtes disponibles pour les élèves. Certaines sont aimantées pour les activités collectives au tableau. |   |
| Boulier utilisé pour notamment pour dénombrer, travailler les compléments à 100, les multiplications. |  |

Jetons à empiler, de différentes couleurs



Gommettes utilisées pour dénombrer, décomposer

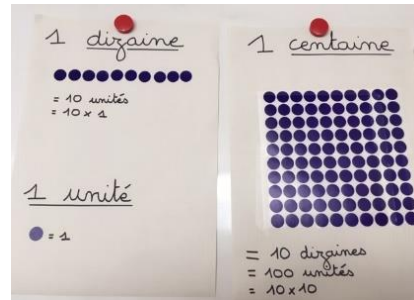
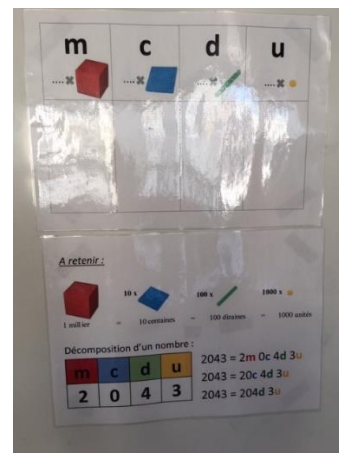


Tableau de numération plastifiée et fiche mémo :

- Affiche collective aimantée au tableau
- Fiche individuelle différenciée pour élèves en difficultés.

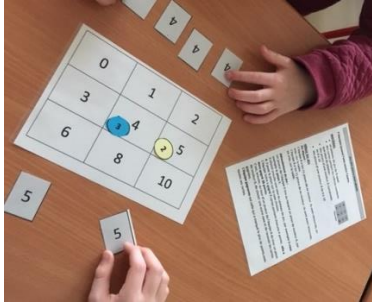
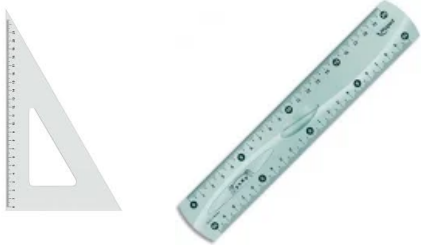
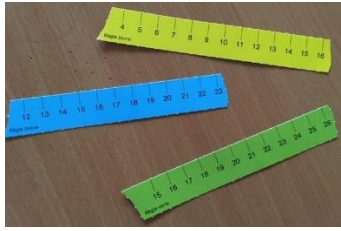





Etiquettes de couleur matérialisant des unités, des dizaines, des centaines afin de composer de différentes manières un nombre.



Gabarits d'angle droit, pièces Lego



| | |
|---|--|
| <p>Jeu des jetons bien placés plastifié : règles du jeu, plateaux de jeu, jetons, cartes points.</p> |  |
| <p>Equerre et règle individuelle (double ou triple décimètre)</p> |  |
| <p>Règles cassées</p> |  |
| <p>Ardoise individuelle et marqueurs</p> |  |
| <p>Fausse monnaie cartonnée</p> |  |
| <p>Horloge individuelle cartonnée</p> |  |

L'espace de la classe, du préau et de la cour et les corps en particulier en géométrie



En plus de ce matériel, les élèves de la classe utilisent, en particulier en géométrie : **du ruban, des cordes à sauter, de la ficelle, des bandes de papier**, enrouleur, ...

D'autres jeux sont régulièrement pratiqués : « *Trouve mon nombre !* », « *Nombres croisés* », « *Polygone mystère* », « *Jeu du portrait* », « *Compléments à 10 / à 100* », « *Loto des doubles et moitiés* », « *Loto des heures* », « *Mathador Flash* », etc.

2. SITUATION N°1

a. Exercice proposé en phase 3

L'exercice ci-dessous²² a été de nouveau soumis aux élèves plusieurs semaines plus tard :

*Dans cet exercice, tu dois trouver le nombre obtenu après chaque **retrait** ($u = \text{unité}$, $d = \text{dizaine}$, $c = \text{centaine}$).*

²² Exercice inspiré de Cap Maths CE2 2016, fichier Nombres et calculs, exercice 3 p.11 de l'unité 1 / séance 4.

| Nombre de départ | retrait | Nombre obtenu |
|------------------|--------------|---------------|
| 264 | 5d et 5u | |
| 540 | 2c et 4u | |
| 301 | 1c et 8u | |
| 600 | 4d et 3u | |
| 460 | 2c, 8d et 4u | |

b. Tableau détaillé des résultats en phases 1 et 2

| N° | nb erreurs phase 1 | nb calculs non faits P1 | nb erreurs ou calculs non faits P1 | nb erreurs phase 2 | nb calculs non faits P2 | nb erreurs ou calculs non faits P2 | commentaire |
|----|--------------------|-------------------------|------------------------------------|--------------------|-------------------------|------------------------------------|---|
| 1 | 0 | 4 | 4 | 1 | 0 | 1 | P1 non finie |
| 2 | 3 | 0 | 3 | 1 | 0 | 1 | |
| 3 | 4 | 5 | 9 | 0 | 0 | 0 | P1 non finie |
| 4 | 5 | 0 | 5 | 3 | 0 | 3 | a fait des ajouts en ex 2 et 3 au lieu de retrait en P1 |
| 5 | 4 | 0 | 4 | 1 | 0 | 1 | |
| 6 | abs | abs | #VALEUR! | abs | abs | #VALEUR! | absent |
| 7 | 11 | 0 | 11 | 2 | 0 | 2 | |
| 8 | 3 | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 | P1 non finie |
| 9 | 3 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | |
| 10 | 0 | 8 | 8 | 0 | 0 | 0 | P1 non finie |
| 11 | 4 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | |
| 12 | 14 | 0 | 14 | 4 | 0 | 4 | |
| 13 | 0 | 6 | 6 | 0 | 0 | 0 | P1 non finie |
| 14 | 3 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | |
| 15 | abs | abs | #VALEUR! | abs | abs | #VALEUR! | |
| 16 | 5 | 5 | 10 | 2 | 0 | 2 | P1 non finie |
| 17 | 0 | 3 | 3 | 1 | 0 | 1 | |
| 18 | 4 | 5 | 9 | 2 | 0 | 2 | a fait des ajouts en ex 2 au lieu de retrait en P1 |
| 19 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 20 | 1 | 5 | 6 | 0 | 0 | 0 | P1 non finie |
| 21 | 6 | 0 | 6 | 2 | 0 | 2 | |
| 22 | 13 | 0 | 13 | 5 | 0 | 5 | |
| 23 | 5 | 5 | 10 | 2 | 0 | 2 | P1 non finie |
| 24 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | Aucune erreur dès la P1 |
| 25 | 4 | 5 | 9 | 3 | 0 | 3 | P1 non finie |

3 exercices de 5 calculs chacun, soit 15 calculs

c. Tableau détaillé des résultats en phase 3

Les résultats détaillés (anonymisés) de l'exercice ci-avant ont été suivis dans le tableau ci-dessous et a permis de faire l'analyse quantitative en II.1.c.

| N° | nb "joker" utilisé | utilisation "joker" manipulation | usage manipulation | résultat 1 (passage de PE) | résultat 2 (correction finale) | méthode | commentaire |
|----|--------------------|----------------------------------|--------------------|----------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|---|
| 1 | 1 | OUI | vérification | 5 | 5 | calcul 1 avec manipulation puis sans | |
| 2 | 0 | NON | N/A | 4 | 5 | | |
| 3 | 1 | OUI | vérification | 5 | 5 | | |
| 4 | 0 | NON | N/A | 3 | 4 | calculs sur ardoise | confusion sur le calcul 4 : retrait de c au lieu de d |
| 5 | 1 | OUI | vérification | 3 | 4 | "sauts de puce" pour le calcul 5 | |
| 6 | 0 | NON | N/A | 5 | 5 | calculs sur ardoise | |
| 7 | 2 | OUI | vérification | 2 | 5 | | |
| 8 | 2 | OUI | vérification | 3 | 5 | manipulation pour validation | |
| 9 | 0 | NON | N/A | 3 | 5 | | |

| | | | | | | | |
|----|---|-----|--------------|---|---|--------------------------------------|---|
| 10 | 1 | OUI | vérification | 3 | 5 | | |
| 11 | 1 | OUI | vérification | 3 | 5 | calcul 1 avec manipulation puis sans | |
| 12 | 0 | NON | N/A | 1 | 5 | | |
| 13 | 5 | OUI | réalisation | 0 | 3 | calculs avec matériel | manque de temps pour terminer l'exercice |
| 14 | 1 | OUI | vérification | 4 | 5 | manipulation pour validation | |
| 15 | 3 | OUI | vérification | 3 | 5 | | |
| 16 | 2 | OUI | vérification | 3 | 5 | | |
| 17 | 0 | NON | vérification | 2 | 4 | | |
| 18 | 2 | OUI | vérification | 2 | 5 | | |
| 19 | 0 | NON | N/A | 5 | 5 | calculs directs | |
| 20 | 5 | OUI | réalisation | 0 | 3 | calculs avec matériel | manque de temps pour terminer l'exercice |
| 21 | 2 | OUI | vérification | 2 | 5 | manipulation pour validation | |
| 22 | 0 | NON | N/A | 2 | 4 | calculs sur ardoise | confusion sur le calcul 4 : retrait de c au lieu de d |
| 23 | 2 | OUI | vérification | 3 | 5 | | |
| 24 | 0 | NON | vérification | 4 | 5 | calculs directs | |
| 25 | 2 | OUI | vérification | 3 | 5 | calcul 1 avec manipulation puis sans | |

3. SITUATION N°2

a. Règles plastifiées du *Jeu des jetons bien placés*

Jeu des jetons bien placés

2 équipes jouent l'une contre l'autre.

MATÉRIEL

- un plateau de jeu de 9 cases
- des cartes portant les mêmes nombres que ceux du plateau
- des jetons d'une couleur A numérotés de 0 à 10
- des jetons d'une couleur B de 0 à 10

| | | |
|---|---|----|
| 0 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 5 |
| 6 | 8 | 10 |

Plateau de jeu

RÈGLE DU JEU

Au départ :
L'équipe A a les 11 jetons de sa couleur. Ils sont retournés, en vrac, sur la table.
L'équipe B a les 11 jetons de sa couleur. Ils sont aussi retournés, en vrac, sur la table.

Déroulement du jeu :
Un joueur de l'équipe A tire au hasard un jeton de couleur A, par exemple le **jeton 7**.
Il choisit ensuite une case du plateau de jeu, par exemple la **case 4**. Il pose le jeton sur la case choisie.
L'équipe noire a gagné **7** cartes portant chacune 4 points : **elle a donc gagné 28 points**.
C'est, ensuite, au tour d'un joueur de l'équipe B de tirer un jeton de couleur B, de choisir une autre case et de recevoir les cartes gagnées.
L'équipe gagnante est celle qui a marqué le plus de points avec toutes ses cartes.

b. Script des échanges lors de la découverte du jeu

Ci-dessous les premiers échanges lors de la première partie jouée en classe (divisée en deux équipes – bleu et jaune) :

[PE] : « Vous avez bien pris connaissance des règles du jeu. Maintenant, la classe est partagée en 2 équipes qui jouent l'une contre l'autre. Dans chaque équipe, un joueur tire un jeton, puis choisit une case du plateau et place le jeton dessus. Un autre membre de l'équipe vient chercher les cartes gagnées. Chaque équipe joue 4 fois et place donc 4 jetons. L'équipe gagnante est celle qui a obtenu le plus de points avec toutes ses cartes. C'est parti ! »

[Elève J1 – équipe Jaune] : il tire au sort le jeton 3 et le montre à la classe « j'ai le 3, je choisis de mettre sur la case 4 ».

[Elève J2] : « Il faut prendre 3 cartes de 4 points pour mon équipe. Ça fait $4+4+4$... 12 points ! »

[Elève J3] : « Mais oui, ça fait 3 fois 4... moi je sais que 3×4 ça fait 12 ! On a 12 points. »

[Elève B1 – équipe Bleu] : il tire au sort le jeton 2 « je peux aussi mettre sur la case 4 ? Ah non, il y a déjà le jeton jaune. Je le mets sur la case 5. »

[Elève B2] : « On a gagné 2 fois la carte 5 points. Ah non ! Ça fait que 10 points, les autres ont déjà 12 points. »

[Elève B3] : « T'aurais pas dû le mettre sur 5 ! T'aurais dû mettre sur 9... on aurait eu plus de points. »

[PE] : « Je vous rappelle que dans chaque équipe, vous pouvez conseiller l'élève avant qu'il choisisse une case du plateau pour placer son jeton. Le choix de la case 5 n'était peut-être pas le meilleur pour marquer des points... »

[Elève J3] : il tire au sort le jeton 0 : « j'ai le jeton 0. »

[Elèves J4] : « Oh non ! On n'a pas de point ! »

[Elève J3] : « Pourquoi ? »

[Elève J4] : « Tu vois, on prend zéro carte point... et 0 fois quelque chose, ça fait 0 ! »

[Elève J3] : « Alors, je mets le jeton où ? »

[Elève J5] : « Où tu veux, toute façon on a 0... euh non... mets sur le 10 pour ne pas qu'ils [les joueurs adverses] mettent leur jeton sur le 10 »

[Elève B4] : il tire le jeton 8.

[Elève B5] : « Oui ! Mets-le sur la case 8, sur la case 8 ! Attends, je prends 8 cartes de 8 points... ça fait 8 fois 8 points ». Il commence à vouloir calculer de tête, puis prend son ardoise et écrit : « $8+8+8+8+8+8+8+8$ »

[PE] : « Faites un furet de 8 en 8 pour vous aider ! »

[Elève B6] : « Ah oui ! 8... 16... 24... 32... 40... 48... 56... 64... ça fait 64, 8 fois 8 = 64 ! Super, on a 64 points ! »

[PE] : « Très bien ! Donc, en tout vous avez ? »

[Elève B5] : « On avait 10, donc $10 + 64 = 74$, on a 74 points ! »

Le jeu se poursuit, les élèves discutent de plus en plus de la stratégie et visent les cases avec le plus grand nombre de points pour placer leur jeton, soit pour maximiser leur score, soit pour

empêcher l'équipe adverse de prendre la case du plateau au prochain tour. A la fin, l'équipe Jaune obtient : $(3 \times 4) + (0 \times 10) + (7 \times 6) + (2 \times 2) = 58$ points alors que l'équipe Bleu obtient : $(2 \times 5) + (8 \times 8) + (1 \times 3) + (6 \times 1) = 83$ points. L'équipe B a donc gagné la première partie.

c. Situation évaluée : traces écrites, tableau de suivi des résultats

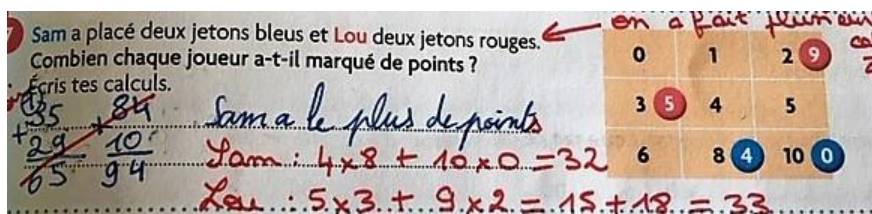
L'exercice suivant²³ a été soumis en évaluation sans avoir la possibilité, ni de manipuler le matériel, ni de consulter les règles. Les élèves devaient se remémorer les règles et la façon de calculer le score de chaque joueur :

Sam a placé deux jetons bleus et **Lou** deux jetons rouges. Combien chaque joueur a-t-il marqué de points. Ecris tes calculs.

| | | |
|-----|-----|------|
| 0 | 1 | 2 9 |
| 3 5 | 4 | 5 |
| 6 | 8 4 | 10 0 |

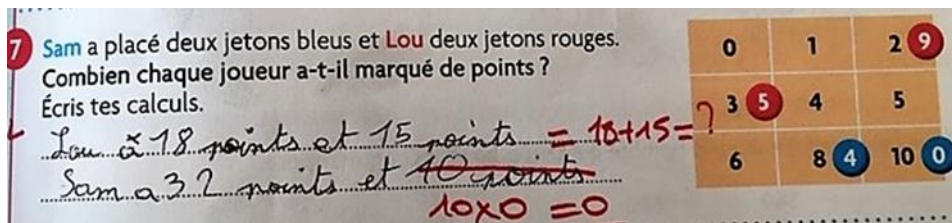
Ci-dessous quelques exemples de traces écrites d'élèves :

- Seule une élève n'a pas réussi à réinvestir un souvenir mental du jeu et a composé des scores en additionnant deux nombres, composés du chiffre de la case en dizaine et du chiffre du jeton (à droite) en unité.

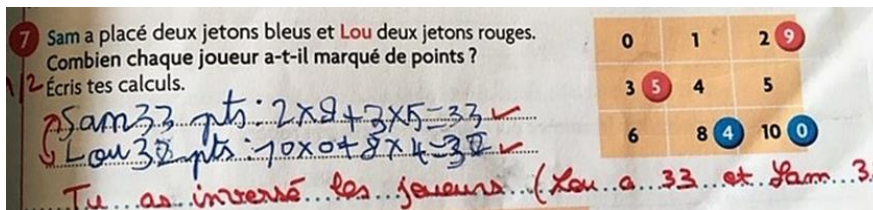


- Cinq élèves ont également compris la consigne, réinvesti un souvenir mental mais ont fait une erreur de calcul : une élève a oublié le rôle de 0 dans une multiplication et a additionné 10 au lieu de d'annuler le score (10×0), les quatre autres ont fait des erreurs de multiplications.

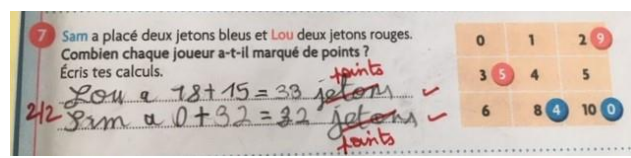
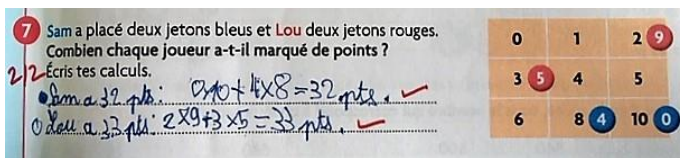
²³ Exercice 7 de l'évaluation de l'unité 2 Cap Maths.



- Quatre élèves ont compris la consigne, ont réussi à réinvestir un souvenir mental du jeu et ont correctement calculé les scores mais ont inversé les deux joueurs.



- Tous les autres élèves ont réussi l'exercice et écrit leurs calculs justifiant les résultats trouvés.



Les résultats détaillés sont consignés dans le tableau suivant :

| N° | résultat | commentaire |
|----|----------|--|
| 1 | 2 | a écrit jetons au lieu de points |
| 2 | 2 | OK mais a inversé les joueurs |
| 3 | 2 | |
| 4 | 2 | OK mais a inversé les joueurs |
| 5 | 2 | |
| 6 | 2 | |
| 7 | 2 | |
| 8 | 2 | |
| 9 | 1 | erreur mais n'a pas détaillé son calcul (multiplication? addition?) |
| 10 | 2 | |
| 11 | 2 | |
| 12 | 1 | a ajouté 10 au lieu de $10 \times 0 = 0$ (rôle du zéro en multiplication) |
| 13 | NE | Non évalué sur cet exercice |
| 14 | 1 | bon raisonnement mais calcul erroné $(9 \times 2) + (3 \times 5)$ (22 au lieu de 33) |
| 15 | 2 | |
| 16 | 1 | erreur sur 4×8 (36 au lieu de 32) |
| 17 | 2 | |
| 18 | 2 | OK mais a inversé les joueurs |
| 19 | 2 | |
| 20 | 2 | |
| 21 | 2 | |
| 22 | 2 | Il manque le nom des joueurs |
| 23 | 1 | erreur sur 3×5 |
| 24 | 2 | |
| 25 | 0 | n'a pas réussi à réinvestir un souvenir mental du jeu |

4. SITUATION N°3

a. Phase concrète

Ci-dessous quelques photographies d'exemples d'objets de la classe avec angles droits trouvés par les élèves pendant la « *chasse aux angles droits* » :



De gauche à droite et de haut en bas : étagère de la bibliothèque de la classe, plan de travail de l'évier de la classe, fenêtre, fichier de français, pied de bureau, porte de la classe, bureau d'élève, tableau blanc.

b. Exercices d'entraînement

Ci-dessous les exercices d'entraînement proposés aux élèves avant l'évaluation sommative²⁴.

²⁴ Source : Cap Maths 2016, fichier *Mesures et géométrie*, Unité 2 séances 8 et 9.

ENTRAINEMENT
CAHIER MESURES ET GÉOMÉTRIE p. 9

4 Trouver les angles droits.

1 Trouve les angles droits de chaque polygone et code-les. Puis écris combien il y en a.
A: _____ B: _____ C: _____ D: _____ E: _____ F: _____

2 La figure F est-elle un carré? Oui Non
Explique ta réponse: _____

ENTRAINEMENT
CAHIER MESURES ET GÉOMÉTRIE p. 11

5 Reconnaître certains quadrilatères

Pour les exercices 1 à 3, utilise les figures A à G.

1 Y a-t-il des carrés? Oui Non
Si Oui, écris la ou les lettres qui les désignent: _____

2 Y a-t-il des rectangles qui ne sont pas des carrés? Oui Non
Si Oui, écris la ou les lettres qui les désignent: _____

3 Y a-t-il des quadrilatères qui ont tous leurs côtés de même longueur, sans être des carrés? Oui Non
Si Oui, écris la ou les lettres qui les désignent: _____

c. Résultats détaillés de l'évaluation

Les résultats détaillés (anonymisés) des exercices 4 et 5 de l'évaluation en fin de période 2 ont été suivis dans le tableau ci-dessous et a permis de faire l'analyse quantitative en II.3.c.

| N° | usage manipulation | résultat ex 1 | ex1 | commentaire | Nb erreurs ex2 | ex2 |
|----|--------------------|---------------|-----|-------------|----------------|-----|
| 1 | gabarit | 2 | A | | 0 | A |
| 2 | gabarit | 2 | A | | 0 | A |
| 3 | gabarit | 0 | NA | | 2 | NA |
| 4 | gabarit | 2 | A | | | PA |
| 5 | gabarit | 1 | PA | | 0 | A |
| 6 | gabarit | 2 | A | | 0 | A |
| 7 | gabarit | 1 | PA | | 1 | PA |
| 8 | gabarit | 2 | A | | 0 | A |
| 9 | gabarit | 2 | A | | 2 | NA |
| 10 | gabarit | 2 | A | | 3 | NA |
| 11 | gabarit | 2 | A | | 2 | NA |
| 12 | gabarit | 1 | PA | | 1 | PA |

| | | | | | | |
|----|---------|---|----|-----------------------------|---|----|
| 13 | gabarit | 2 | A | avec aide | 2 | NA |
| 14 | gabarit | 2 | A | | 0 | A |
| 15 | gabarit | 2 | A | | 4 | NA |
| 16 | gabarit | 1 | PA | erreur sur le 2ème angle de | 4 | NA |
| 17 | gabarit | 1 | PA | | 0 | A |
| 18 | gabarit | 2 | A | | 0 | A |
| 19 | gabarit | 1 | PA | | 1 | PA |
| 20 | gabarit | 1 | PA | | 1 | PA |
| 21 | gabarit | 2 | A | | 0 | A |
| 22 | gabarit | 1 | PA | | 1 | PA |
| 23 | gabarit | 2 | A | | 3 | NA |
| 24 | gabarit | 1 | PA | | 1 | PA |
| 25 | gabarit | 2 | A | | 2 | NA |

d. Quelques exemples de traces écrites d'élèves

1) Trouve les angles droits de chaque polygone et code-les.
Puis écris combien il y en a : A : 1 B : 2

2) Parmi ces quadrilatères :

a) Y a-t-il des carrés ? Oui Non
Si Oui, écris la ou les lettres qui les désignent : D, F. F a la face la plus étroite.

b) Y a-t-il des rectangles qui ne sont pas des carrés ? Oui Non
Si Oui, écris la ou les lettres qui les désignent : C, B, E. A n'a pas les angles droits.

1) Trouve les angles droits de chaque polygone et code-les.
Puis écris combien il y en a : A : 1 angle droit B : 2 angles droits

2) Parmi ces quadrilatères :

a) Y a-t-il des carrés ? Oui Non
Si Oui, écris la ou les lettres qui les désignent : D. est carré (4 angles droits et 4 côtés de même longueur).

b) Y a-t-il des rectangles qui ne sont pas des carrés ? Oui Non
Si Oui, écris la ou les lettres qui les désignent : C, B, E et G.

1) Trouve les angles droits de chaque polygone et code-les.
Puis écris combien il y en a : A : 1 B : 2. V. mais non carré!

2) Parmi ces quadrilatères :

a) Y a-t-il des carrés ? Oui Non
Si Oui, écris la ou les lettres qui les désignent : D.

b) Y a-t-il des rectangles qui ne sont pas des carrés ? Oui Non
Si Oui, écris la ou les lettres qui les désignent : C, B.

1) Trouve les angles droits de chaque polygone et code-les.
Puis écris combien il y en a : A : 1 B : 2. Attention de garantir d'angle droit que tu avais en classe!

2) Parmi ces quadrilatères :

a) Y a-t-il des carrés ? Oui Non
Si Oui, écris la ou les lettres qui les désignent : D. 4 angles droits et 4 côtés de même longueur.

b) Y a-t-il des rectangles qui ne sont pas des carrés ? Oui Non
Si Oui, écris la ou les lettres qui les désignent : C, B, E.

1) Trouve les angles droits de chaque polygone et code-les.
Puis écris combien il y en a : A : 1 B : 2. Qui mais pas carré. Attention le gabarit!

2) Parmi ces quadrilatères :

a) Y a-t-il des carrés ? Oui Non
Si Oui, écris la ou les lettres qui les désignent : D, F. F a la face la plus étroite.

b) Y a-t-il des rectangles qui ne sont pas des carrés ? Oui Non
Si Oui, écris la ou les lettres qui les désignent : C, B, E et G.
D est un carré. A et E n'ont pas les angles droits.

RESUME

Mon parcours scientifique, ma lecture des programmes et du rapport Villani-Torossian, en préparation de ma première rentrée, m'ont rapidement amenée à m'interroger sur le rôle et l'impact de la manipulation en mathématiques. Dès la conception et surtout les premières mises en œuvre de séquences, j'ai pris conscience de l'importance de cette manipulation pour la majorité des élèves de ma classe de CE2. Ce mémoire est le résultat de recherches théoriques en parallèle des observations pratiques lors de situations concrètes d'apprentissage sur les nombres, les calculs et la géométrie. J'ai pu constater le rôle parfois indispensable et souvent très bénéfique de la pratique manipulative, permettant notamment de mettre en activité et de créer des images mentales utiles pour l'entrée progressive dans l'abstraction. Mais la pratique m'a permis également d'en tester les limites ou, du moins, la nécessité exigeante d'avoir un matériel spécifiquement conçu, d'y associer au maximum la verbalisation et de bien intégrer la phase manipulative au sein de séquences réfléchies et adaptées aux besoins des élèves.

EXECUTIVE SUMMARY

My curriculum in mathematics, my careful reading of programs and the Villani-Torossian's formal report, in preparation for my first school year as a trainee teacher, raised questions about the role and the impact of manipulation in mathematics. From conception to the teaching experiment, I realize the value of manipulation for most pupils in my CE2's class to develop their mathematics skills. This essay is the result of theoretical studies and practical observations during learning sessions about numbers, calculation and geometry. I was able to see the critical role and most of the time the benefits of manipulation, in particular, how this enhances the execution faculty of the pupils and creates useful mental images for progressively developing capability of abstraction. But the classroom experiments have also enlightened me on its limits or, at least, on the fact that training material must be well designed, easy to understand and intended to promote the verbalization. Above all, manipulating activities must be anticipated and integrated in adapted sequences to the pupils needs.