



HAL
open science

Privilégier les changements de cadres pour travailler les différents statuts de la lettre et introduire la distributivité

Anastasia Boisgard

► To cite this version:

Anastasia Boisgard. Privilégier les changements de cadres pour travailler les différents statuts de la lettre et introduire la distributivité. Education. 2020. dumas-02949257

HAL Id: dumas-02949257

<https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-02949257>

Submitted on 25 Sep 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année universitaire 2019-2020

Master MEEF

Mention 2nd degré- parcours Mathématiques

2^{ème} année

Privilégier les changements de cadres pour travailler les différents statuts de la lettre et introduire la distributivité

Présenté par Anastasia BOISGARD

Encadré par Jessica BRISAC, Professeure formatrice en mathématiques,
ESPE de l'académie de Paris - Université Paris-Sorbonne

Sommaire

Introduction	4
<u>Partie 1: Théorie</u>	5
I/ Les connaissances à développer en 5e sur le calcul littéral	5
II/ L'exemple du carré bordé	5
III/ Une analyse de certains manuels	9
IV/ Dialectique outil-objet et calcul littéral	11
V/ Analyse d'une proposition: "des maths ensemble et pour chacun - 5e"	12
VI/ Construction de l'activité d'introduction et méthodologie	12
<u>Partie 2: Pratique</u>	14
I/ <i>Première égalité rencontrée avec des lettres: $k(a+b)=ka+kb$</i>	14
1) Aspects théoriques et didactiques de cette égalité avec indéterminée	14
2) Méthodologie - Introduction de la distributivité	15
a) Sur un exemple numérique	15
b) Avec les lettres	15
• Analyse a priori	15
• Ce qui s'est passé pendant la séance	16
• Analyse a posteriori	18
c) Institutionnalisation de l'identité	19
II/ <i>Travail sur les différents statuts de la lettre</i>	19
1) Aspects didactiques et théoriques	19
2) Méthodologie: du cadre géométrique au cadre algébrique	20
• Analyse a priori	21
• Ce qui s'est passé pendant la séance	22
• Analyse a posteriori	28
III/ <i>Programmes de calcul "téléphonés": réinvestissement de la distributivité et de la notion de variable</i>	28
1) Aspects didactiques et construction de l'activité	28
2) Méthodologie	30
a) Sur un exemple numérique	30
b) Avec des lettres: programmes de calcul téléphonés	30
• Analyse a priori de l'activité	30
• Ce qui s'est passé pendant la séance	31
• Analyse a posteriori	33
Conclusion	35
Bibliographie	36

ANNEXES	37
Annexe n°1: Extraits d'introductions de manuels scolaires	37
Annexe n°2: HEPVS - Mémoire professionnel: Introduction à l'algèbre par des situations problèmes	41
Annexe n°3: Institutionnalisation du cours - Calcul littéral	42
Annexe n°4: Activité programme de calcul	47
Annexe n°5: Copies d'élèves sur les programmes de calcul	48

Introduction

Ce mémoire professionnel s'inscrit dans le cadre de mon année en tant que stagiaire de mathématiques au sein de l'académie de Paris. J'ai eu la chance d'avoir cette année en responsabilité deux classes de 5ème.

L'année de 5e constitue une année de bascule car elle représente le début d'un nouveau cycle. Cela s'illustre en mathématiques notamment avec l'approfondissement du travail déjà engagé en géométrie lors des cycles précédent et plus précisément en 6e, ainsi que celui sur les nombres au travers de la continuité du calcul avec les nombres décimaux, de la découverte des nombres rationnels ainsi que celle des nombres relatifs. Cette année marque également l'entrée dans l'algèbre avec la découverte du calcul littéral.

Le calcul littéral est l'un des chapitres de 5e qui représente pour moi une vraie rupture par rapport aux cycles précédents et constitue donc un enjeu majeur pour les enseignants. Ce chapitre, genèse de l'algèbre, va être l'occasion pour les élèves d'utiliser un outil de résolution dans différents cadres mathématiques. Cela peut représenter un saut conceptuel pour les élèves comme en témoignent de nombreux enseignants qui constatent que l'usage du calcul littéral n'est souvent pas encore acquis lors de l'entrée en classe de Seconde. Par ailleurs, lors de ce chapitre, les élèves sont confrontés à faire des calculs avec des lettres et c'est la première fois que le signe "=" va prendre de nouvelles significations pour eux: il ne va plus uniquement donner le résultat d'un calcul numérique tel qu'ils sont habitués à l'utiliser jusqu'à la fin du cycle 3.

L'appropriation de ces nouvelles notions liées au calcul littéral semble passer par la maîtrise des outils mathématiques utilisés dans différents cadres. Afin d'étudier cette maîtrise, j'ai choisi de développer une approche introductive sur la notion de distributivité et les différents statuts de la lettre dans un cadre géométrique, et de les réinvestir dans un cadre algébrique, notamment à l'aide des programmes de calcul. Je me suis ainsi intéressée à la problématique suivante :
Comment privilégier les changements de cadre pour améliorer la compréhension de la distributivité et des différents statuts de la lettre par les élèves ?

Je présenterai dans ce mémoire, dans un premier temps, une partie théorique qui s'appuie sur la littérature pour décrire l'analyse de cette problématique et les outils qui m'ont permis de construire une activité d'introduction visant à y répondre. Dans un second temps, je présenterai une partie pratique restituant l'implémentation de cette activité introductive avec les élèves de mes deux classes de 5e ainsi que les résultats de cette étude.

Partie 1: Théorie

I/ Les connaissances à développer en 5e sur le calcul littéral

Au niveau de la 5ème, première étape du cycle 4, les connaissances de calcul littéral à développer chez les élèves sont les suivantes: (source: repère de progressivité cycle 4 - Eduscol)

Expressions littérales:

“ Les expressions littérales sont introduites à travers des formules mettant en jeu des grandeurs ou traduisant des programmes de calcul. L’usage de la lettre permet d’exprimer un résultat général ou de démontrer une propriété générale. Les notations du calcul littéral sont progressivement utilisées, en lien avec les propriétés de la multiplication. Les élèves substituent une valeur numérique à une lettre pour calculer la valeur d’une expression littérale.”

Distributivité:

“Tôt dans l’année, sans attendre la maîtrise des opérations sur des nombres relatifs, la propriété de distributivité simple est utilisée pour réduire une expression littérale de la forme $ax+bx$ où a et b sont des nombres décimaux.”

Equation:

Les élèves sont amenés à tester si une égalité où figure une lettre est vraie lorsqu’on lui attribue une valeur numérique. Les élèves testent des égalités par essais erreurs, à la main ou à l’aide d’une calculatrice ou d’un tableur, des valeurs numériques dans des expressions littérales, ce qui constitue une première approche de la notion de solution d’une équation, sans formalisation à ce stade.

Ce chapitre constitue donc un enjeu majeur du programme de 5ème car il permettra une fois la technicité du calcul littéral acquise d’être capable de modéliser des problèmes et donc d’utiliser les mathématiques au service de nombreuses autres matières comme la physique-chimie ou les sciences de la Vie et de la Terre.

II/ L’exemple du carré bordé

L’un des exemples très largement utilisé pour l’introduction du calcul littéral en classe de 5ème est celui du “carré bordé” qui peut être décliné sous plusieurs formes.

Dans le petit x n°102, les auteurs, Coppe et al. s’interrogent sur les “conditions pour diffuser des situations issues de la recherche en didactique des mathématiques” à travers l’exemple du carré bordé.

Ils rappellent que l’enseignement de l’algèbre “doit favoriser un travail intelligent, c’est à dire utilisant des règles de calcul justifiées et valides, au service de la résolution de problèmes - problèmes de modélisation, de mise en équation, de généralisation et de preuve.

Ils partent du problème des carrés bordés ci-dessous qui provient du texte initial de Combier et al., 1996.

Le problème consiste à établir une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux hachurés d'une figure construite sur le modèle ci-contre, quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré.

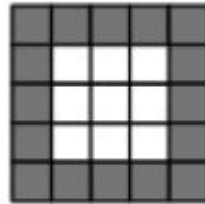


Figure 1. Le texte initial de la situation des carreaux colorés (Combier et al., 1996 p. 42)

Les enjeux didactiques initiaux de la situation des carrés bordés sont les suivants, ainsi que le rappelle les auteurs:

- produire différentes formulations
- produire les expressions littérales associées
- Les comparer pour montrer qu'elles sont équivalentes

L'exercice des carrés bordés semble bien répondre à ces objectifs car il va permettre aux élèves de passer d'une formulation à une formule et donc de rentrer dans l'algèbre.

Il y a plusieurs expressions littérales qui vont traduire le nombre de carrés nécessaires pour border la figure en fonction de la procédure que choisie l'élève pour dénombrer ces carrés. Les auteurs expliquent que ce problème, s'il n'est pas posé au bon moment peut se révéler trop complexe pour les élèves, ou au contraire trop simple si tous les outils pour le résoudre ont déjà été introduits aux élèves. Se pose alors la question de la place de ce problème dans la progression de l'enseignant.

Un des points soulevé par les auteurs est notamment la justification des équivalences entre formules produite par les élèves. Selon la procédure de comptage utilisée, les élèves peuvent produire jusqu'à 6 formules différentes:

- $4n - 4$
- $4(n - 1)$
- $n + 2(n - 1) + n - 2$
- $2n + 2(n - 2)$
- $4(n - 2) + 4$
- $n^2 - (n - 2)^2$

Comment travailler ensuite avec les élèves pour prouver que toutes ces formules sont équivalentes?

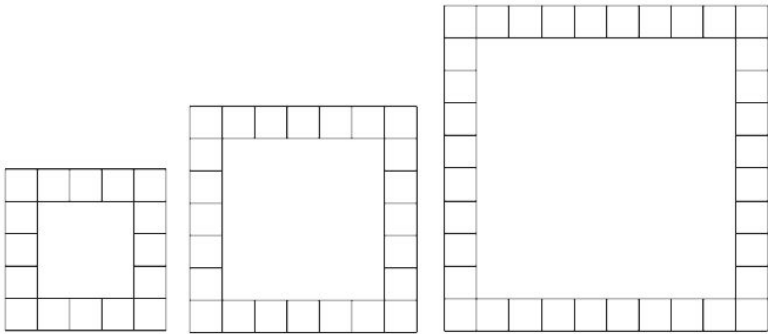
Les auteurs vont au travers de l'analyse de certains articles didactiques qui traitent des carrés bordés ainsi que l'étude de certains manuels montrer que la place laissée au travail de ces équivalences de formules est souvent passée sous silence ou peu travaillée avec les élèves.

Ils citent ainsi le texte de Combier et al., 1996, "Les débuts de l'algèbre au collège", dans lequel les consignes sont très explicitées et une aide supplémentaire est apportée: "les mathématiciens donnent un nom au nombre de carreaux sur le côté du carré, ils l'appellent par exemple "n" (n désigne un nombre). Avec cette consigne, un des enjeux de l'activité des carrés bordés qui était

de produire une expression littérale devient alors très limité. Il n'y a par ailleurs pas d'accent mis par ces auteurs pour prouver l'équivalence des formules. Ils mentionnent simplement que les formules sont équivalentes.

L'article de Denis et al., "n c'est un nombre ou c'est des nombres?" (Repères IREM N°54 - janvier 2004) est également étudié. Dans cet article, contrairement à celui de Combier et al., l'énoncé est moins guidé et l'activité va être travaillée en plusieurs phases (qui représentent en tout une dizaine d'heures de travail avec les élèves). Cette fois-ci, à l'inverse de l'article précédent les auteurs ne donnent pas le "n" pour désigner le nombre de carreaux. Ce problème est plus ouvert et va installer les élèves dans un problème de recherche. En voici l'énoncé:

Pierre joue avec des carreaux de mosaïque.
Il dispose ses carreaux pour obtenir des « carrés ».
En voici trois :



Il se demande en jouant, s'il peut savoir à l'avance combien de carreaux de mosaïque il lui faut pour fabriquer n'importe quel carré.

Pouvez-vous l'aider ?

Dans l'article "n c'est un nombre ou c'est des nombres", les auteurs expliquent dans un premier temps que faire entrer les élèves dans l'algèbre est une tâche complexe et que les professeurs peuvent alors être tentés d'apprendre aux élèves à pratiquer directement "le calcul littéral à vide" pour se libérer de l'obstacle lié à la technicité du calcul littéral. Cette pratique contient toutefois une perte de sens importante qui pourra plus tard bloquer les élèves lorsqu'il s'agira d'utiliser le calcul littéral pour résoudre des problèmes de modélisation. Pour pallier cette difficulté, les professeurs pourraient alors être tentés de se "lancer directement dans la tâche complexe de résolution de problèmes par la mise en équation". C'est alors le statut d'inconnue de la lettre et non celui de variable qui serait utilisée pour l'introduction. Les situations de mise en équation sont généralement bien trop complexes pour des élèves de 5e. C'est la raison pour laquelle les auteurs Denis et al. ("n c'est un nombre ou c'est des nombres"), vont également proposer une activité autour du carré bordé, car les "activités autour de la notion de formules peuvent constituer une alternative aux deux extrêmes" évoqués plus haut.

Lorsqu'il s'agit de généraliser à "n'importe quel carré", les élèves vont devoir écrire une formule. Les auteurs font alors une remarque importante : "au premier abord, la formule est un objet qui leur semble familier: il fait partie de leur univers mathématiques depuis l'école élémentaire (formules de périmètre, d'aire..)" mais jusqu'à présent ils voient la formule comme "une machine à produire un résultat numérique" et non pas comme une réponse en soi.

Les auteurs de ce texte ont vu le problème de l'équivalence des expressions mais passent rapidement sur ce point selon Coppe et al.

Les auteurs vont faire travailler les élèves sur l'équivalence des expressions suivantes:

- $a \times 4 + (a - 4) \times 4 = b$;
- $(a - 4) \times 8 + 16 = b$;
- $a + a + (a - 4) \times 2 + a + a + (a - 4) \times 2 = b$
- $(a - 2) \times 2 \times 4 = b$

Ils expliquent que l'argumentation des élèves pour montrer l'équivalence des expressions est de deux types: développer de nouvelles stratégies de comptage pour arriver à ces expressions ou "pratiquer le calcul algébrique" mais il n'est pas expliqué dans l'article comment et à quel moment ce calcul algébrique (notamment les propriétés de distributivité) a été enseigné aux élèves. On ne sait alors pas s'ils ont déjà institutionnalisé la distributivité dans le calcul littéral, et si tel est le cas, comment ont-ils choisi de l'introduire?

Les auteurs de l'article figurant dans le petit x n°102, Coppe et al., ont engagé un travail de collaboration avec des enseignantes expérimentées afin de pouvoir placer au mieux cette activité dans la progression de l'enseignant. Selon eux, et suite à une analyse de situations dans deux classes de quatrième et de troisième, les pré-requis pour donner cette activité sur le carré bordé sont les suivants:

- avoir déjà traité les programmes de calculs pour que les élèves soient capables à partir de la formulation de leur procédure de comptage de la traduire par une expression littérale
- avoir déjà rencontré et "constitué du savoir autour de la propriété de la distributivité" afin de pouvoir démontrer que les différentes expressions littérales trouvées sont équivalentes.

Voici les deux formulations d'énoncé qui ont été retenues (le dessin était donné):

Voici un carré quadrillé de côté 5. On hachure tous les carreaux qui sont le bord. Combien de carreaux sont hachurés ?

On refait avec un carré de côté 6, puis de côté 10, puis de côté 100, puis de côté 123. Combien de carreaux sont hachurés à chaque fois ?

Trouve une formule, une expression, un moyen de dire comment calculer ce nombre de carreaux.

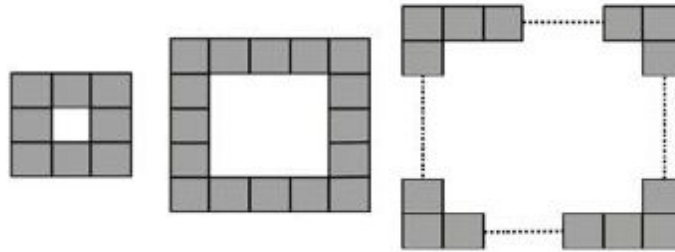
Énoncé donné en classe de 4e.

Cette formulation a été donnée dans une classe de 4e après quatre séances de travail sur les programmes de calcul qui ont permis un travail de préparation aux écritures d'expressions littérales ainsi qu'un travail sur les expressions littérales à l'aide d'un développement simple pour amorcer la tâche puis en intensifiant à l'aide d'un développement plus complexe.

L'institutionnalisation qui découle de ce travail est la suivante: "Il y a plusieurs solutions à ce problème. On a prouvé avec la distributivité que les formules sont égales entre elles. Une lettre peut remplacer un nombre et elle permet d'écrire des expressions."

La deuxième enseignante impliquée dans ce travail de recherche a proposé l'énoncé ci-dessous dans sa classe de 3e.

On considère un carré blanc entouré de carrés unités gris comme sur les figures ci-dessous. L'objectif est de calculer le nombre de carrés unités gris.



- 1) Si le carré blanc a un côté unité de 3 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.
- 2) Si le carré blanc a un côté unité de 10 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.
- 3) Si le carré blanc a un côté unité de 100 unités, calcule le nombre de carrés unités gris.
- 4) Ecris une formule qui donne le nombre de carrés gris en fonction du nombre de carrés unités sur le côté du carré blanc.

Énoncé donné en classe de 3e.

L'enjeu est ici différent car l'énoncé est donné dans une classe de 3e dans laquelle les élèves sont alors capables de mobiliser leurs connaissances du calcul littéral.

L'objectif n'est plus "d'introduire l'algèbre mais de reprendre son étude pour rappeler les raisons d'être des lettres et des expressions littérales dans une situation de généralisation et en remotivant la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition pour prouver l'équivalence d'expressions algébriques."

Suite à la lecture de cet article du petit x n°102 "condition pour diffuser des situations issues de la recherche en didactique des mathématiques: l'exemple du carré bordé" et des articles cités, je me suis réellement rendu compte de la difficulté de faire produire une formule aux élèves sans leur "faciliter la tâche".

Le travail sur l'équivalence des formules et l'enseignement de la distributivité m'a beaucoup questionnée.

III/ Une analyse de certains manuels

J'ai discuté avec quelques collègues et les ai interrogés sur leur manière d'introduire le calcul littéral. Les collègues interrogés m'ont répondu qu'ils utilisaient systématiquement les introductions du manuel.

Je suis alors allée regarder ce que proposaient certains manuels. En observant les activités d'introduction proposées par ces manuels (en annexe), je me suis rendue compte que la plupart segmentent en plusieurs petites activités en fonction de l'objectif visé (découvrir la notion de formule, tester une égalité, exprimer en fonction de, etc..).

Je trouve qu'il y a alors un risque de perdre les élèves si on ne produit pas une activité avec un fil conducteur qui servira d'introduction à différentes notions que l'on souhaite étudier dans le chapitre calcul littéral. Par ailleurs, les objectifs de chaque sous partie introductive sont souvent clairement énoncés en amont sous la forme suivante "j'écris une expression littérale, j'utilise une expression littérale, je calcule une expression littérale pour des valeurs données, je transforme une expression littérale...", ce qui selon moi installe tout de suite les élèves dans un objectif précis au lieu de leur faire découvrir et formuler à la fin de l'activité quel en était l'objectif.

Trois collègues ont choisi cette année l'activité n°2 du chapitre calcul littéral du manuel Transmaths (en annexe) comme introduction au chapitre. Cette activité consiste à produire une formule à partir d'une répétition d'un motif, à savoir exprimer le nombre de perles nécessaires à la réalisation d'un collier en fonction du nombre de disques. J'ai pour ma part trouvé que cette activité était trop guidée. En effet au lieu de laisser les élèves s'exprimer, elle propose en question n°2 des copies d'élèves sur lesquels figurent les formulations attendues:

- $3 \times (n + 4)$
- $3 \times x + 4$
- $4 + 3 \times \text{nombre de disques}$

A l'instar des auteurs Combier et al., cette activité va selon moi guider les élèves de manière trop importante. En effet en proposant ces copies d'élèves, elle force l'apparition de formules, ce que l'on souhaite justement observer chez les élèves et va donner un nom au nombre de disques en l'appelant "x" ou "n".

Je trouve dommage que cette question n°2 figure dans l'activité. Cette introduction me paraît intéressante mais il faudrait selon moi remplacer la question n°2 par une question ouverte et travailler ensuite à partir des réponses de nos élèves. Je suis convaincue que l'on trouvera dans nos copies d'élèves la même diversité de réponses que celle proposée dans l'exercice.

Par ailleurs Transmaths propose trois activités d'introduction au chapitre calcul littéral ("Utiliser une formule", "Produire une formule" et "Tester une égalité") mais aucune activité n'est proposée pour introduire la distributivité. Cette partie du programme est passée sous silence dans le manuel.

Il semble qu'une des démarches choisies pour l'introduction dans l'algèbre en classe de 5ème soit le passage par une modélisation d'une situation pour produire une expression littérale. On retrouve ainsi l'objectif qui était celui des carrés bordés "passage d'une formulation à une formule". Toutefois ces activités ne travaillent pas du tout la notion d'équivalence de formules, et donc de distributivité. Si cette notion est traitée dans l'institutionnalisation, elle peut alors être "imposée" aux élèves et non pas introduite car l'activité d'introduction ne fait pas intervenir cet aspect.

Ayant pris conscience de cet enjeu, j'ai souhaité construire une introduction pour le chapitre calcul littéral qui puisse à la fois faire écrire aux élèves des expressions littérales, tout en travaillant la notion d'équivalences de formules.

IV/ Dialectique outil-objet et calcul littéral

Afin de définir l'introduction qui allait pouvoir répondre à mes objectifs je me suis appuyée sur l'introduction de l'article de Régine DOUADY "Un exemple d'ingénierie didactique où sont à l'oeuvre jeux de cadres et dialectique outil objet" dans lequel elle rappelle les enjeux de la dialectique outil-objet et l'importance des jeux de cadre. Cette dialectique peut parfaitement s'illustrer sur le chapitre calcul littéral. "L'objet prend place dans la construction d'un savoir organisé alors que l'outil sera mis au service pour résoudre un problème". Beaucoup d'auteurs ont repris cette dialectique outil-objet. Ainsi dans leur "diagnostic cognitif en algèbre élémentaire à différents niveaux de la scolarité", les auteurs Chenevotot et al, expliquent que les connaissances algébriques sont structurées selon deux principales dimensions dépendantes l'une de l'autre et partiellement hiérarchisées, les dimensions outils et objet. Les auteurs précisent que "sur le plan outil, la compétence algébrique s'évalue à travers la capacité à produire des expressions et des relations algébriques pour traduire un problème, à les interpréter puis à mobiliser les outils algébriques adaptés à leur résolution. Cette dimension outil de l'algèbre s'exerce dans des contextes variés sur des problèmes de généralisation et de preuve, des problèmes de modélisation et des problèmes « d'arithmétique traditionnelle » visant la mise en équation. Cependant, parmi ces différents types de problèmes, l'utilisation de l'algèbre comme outil pour prouver des conjectures numériques revêt une importance toute particulière. Sur le plan objet, nous prenons en compte le double aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques afin que leur manipulation formelle redonne sa juste place à la dimension technique du traitement algébrique. C'est pourquoi la compétence algébrique s'évalue à travers des capacités techniques d'ordre syntaxique et des capacités interprétatives mettant en jeu dénotation, interprétation et sens des expressions."

Au sein du chapitre calcul littéral, l'objet serait alors l'entrée dans l'algèbre et l'outil serait la technicité du calcul littéral, mis au service pour résoudre des problèmes algébriques. Afin que les élèves puisse rentrer dans l'algèbre au sein de cette dialectique outil-objet, il semblerait utile de mettre en place des jeux de cadres pour faire évoluer les conceptions des élèves. L'objectif est de créer des déséquilibres pour qu'alors la rééquilibration participe à l'apprentissage. Régine DOUADY pointe dans l'article l'importance des changements de cadre spontanés ou provoqués pour faire évoluer les conceptions. Elle rappelle qu'un cadre est "constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets [...] et des images mentales associées à ces objets et ces relations". Selon Régine DOUADY, le changement de cadre est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalents, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en oeuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation".

A la lecture de cet article, je me suis posée la question sur le travail de ces changements de cadre, et notamment au vu des articles que j'avais lus, à la place que je souhaitais donner aux programmes de calcul au sein de ma progression du chapitre calcul littéral.

V/ Analyse d'une proposition: "des maths ensemble et pour chacun - 5e"

Je me suis alors penchée sur ce qui était proposé dans "Des maths ensemble et pour chacun - 5e". Les auteurs de ce livre ont choisi de proposer une séquence en dix étapes, l'objectif étant que "le littéral se détache progressivement des situations dans lesquelles il émerge pour devenir, petit à petit, un outil autonome auquel on pourra avoir recours pour résoudre certains problèmes". Dans les étapes 1 et 2, ils proposent aux élèves de se familiariser avec les programmes de calcul et d'utiliser le tableur. L'étape 3 fait travailler la distributivité numérique en faisant le lien avec la multiplication mentale par 9 ou 11 par exemple. L'étape 4 permet de continuer le travail sur tableur en proposant le travail sur une formule de la vie courante (distance d'arrêt). Dans les étapes 5 à 7, les élèves travaillent sur des situations de dénombrement à l'aide du carré bordé et vont alors fabriquer leurs premières formules pour se détacher progressivement des situations concrètes de dénombrement. Dans l'étape 8, à partir de laquelle je me suis inspirée pour construire mon introduction, les élèves découvrent l'apport du calcul littéral dans les programmes de calcul notamment à l'aide de l'énoncé suivant:

Voici un programme de calcul qui peut s'appliquer à n'importe quel nombre:

Double

Ajoute 3

Multiplie par 3

Ajoute le nombre de départ

Ecris un programme de calcul plus simple qui donne les mêmes résultats que le précédent pour n'importe quel nombre.

A l'issue de la mise en commun et de l'intérêt reconnu par tous les élèves d'utiliser une lettre pour désigner le nombre de départ et de retravailler l'expression littérale obtenue pour la simplifier, l'institutionnalisation qui en découle est la suivante: "Pour vous, c'est un nouvel outil de résolution de problème, il faudra prendre l'habitude d'y penser et voir, petit à petit, dans quelles situations il peut être efficace".

VI/ Construction de l'activité d'introduction et méthodologie

Pour travailler les jeux de cadre recommandés par Régine DOUADY, j'ai souhaité commencer par introduire le calcul littéral à l'aide de la géométrie pour ensuite passer au cadre algébrique avec un travail sur les programmes de calcul. Je me suis inspirée d'un mémoire professionnel réalisé par Xavier LARREA, qui propose "une introduction à l'algèbre par des situations problèmes" et notamment une situation-problème introductive à l'algèbre par la géométrie, figurant en annexe (inspirée de Vlassis et Demonty). L'objectif de cette activité est de donner du sens aux premières expressions algébriques. Les élèves vont construire leurs premières représentations algébriques sur des connaissances géométriques qui leur sont familières. Ils vont alors appréhender la notion d'expression algébrique, comme écriture de l'aire de figures géométriques. Mais également un concept important et difficile à maîtriser "l'égalité, comme relation existante entre deux expressions représentant le même objet". Au travers de cette activité, les élèves vont

rencontrer la réduction de termes semblables et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

J'ai choisi de commencer à faire travailler les élèves sur la distributivité à l'aide d'une situation connue: le calcul de l'aire d'un rectangle dont on connaît la longueur et la largeur qui seront désignés par les lettres. Les élèves sont en effet habitués à produire une formule pour le calcul de l'aire d'un rectangle, connaissant ses dimensions, souvent représentées par L et l, respectivement pour la longueur et la largeur. L'objectif était dans un premier temps qu'ils se familiarisent avec les lettres et la manipulation de celles-ci, avant d'être capable de produire une expression littérale pour modéliser un problème.

Une fois la distributivité maîtrisée à l'aide du cadre géométrique, je propose un changement de cadre avec l'utilisation des programmes de calcul pour mettre en place des outils qui ne s'imposaient pas dans le cadre géométrique (choisir un nombre: on l'appellera x), mais également pour vérifier les techniques de distributivité vues précédemment dans le cadre géométrique.

Cette introduction au calcul littéral aura pour but de répondre à la problématique suivante:

“Comment travailler les changements de cadre pour introduire les différents statuts de la lettre et la distributivité?”

Dans le cadre de ma progression, j'ai choisi de partager ce chapitre “calcul littéral” en deux parties. Une première partie réalisée au mois de janvier sur la découverte de la définition d'une expression littérale, les propriétés de distributivité d'une expression littérale ainsi que les convention d'écriture et de simplification. Puis dans un second temps au mois de mars, j'ai choisi de traiter la partie “tester une égalité” et “généralisation à l'aide d'une formule - modélisation”.

Partie 2: Pratique

I/ Première égalité rencontrée avec des lettres: $k(a+b)=ka+kb$

1) Aspects théoriques et didactiques de cette égalité avec indéterminée

Le signe “=” est introduit très tôt dans la scolarité des élèves avec plusieurs significations qui ne sont pas véritablement explicitées aux élèves.

Voici les différentes utilisations du signe “=” recensées à l'école élémentaire puis au collège.
(Source: *Eduscol, ressource d'accompagnement des anciens programmes - du numérique au littéral - 2016*)

❖ A l'école élémentaire:

- Le signe « = » est le plus souvent utilisé pour annoncer un résultat, comme par exemple dans $8+13 = 21$. Le signe « = » est alors lu comme signifiant « ça donne », « ça fait », et il apparaît comme étant orienté « gauche-droite », ce qui va installer une vraie conception chez les élèves et pourra les bloquer lors d'écritures d'égalité avec des lettres. Cette signification correspond à celle de la touche [=] des calculatrices ordinaires.
- Le signe « = » est encore utilisé pour communiquer la décomposition d'un nombre. C'est le cas lorsque l'élève décompose un nombre sous forme de produit ($36 = 4 \times 9$) ou, plus fréquemment lorsqu'il décompose un nombre, entier ou décimal, suivant les puissances de la base dans notre système de numération décimale. Ainsi l'égalité $2304 = 2 \times 1000 + 3 \times 100 + 4$ traduit que 2304 c'est deux milliers, 3 centaines et 4 unités. De même l'égalité $2,73 = 2 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100}$ traduit que 2,73 c'est 2 unités, 7 dixièmes et 3 centièmes.
- Enfin, mais plus rarement, le signe « = » est utilisé pour signifier que deux écritures représentent un même nombre. Ainsi, lorsque les élèves ont à placer le nombre $\frac{7}{4}$ sur une demi-droite graduée en quarts, ils peuvent voir $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}$ ou $\frac{7}{4} = \frac{8}{4} - \frac{1}{4}$, ce qui donne alors l'égalité suivante: $1 + \frac{3}{4} = 2 - \frac{1}{4}$, mais qui est rarement travaillée avec les élèves. Le signe d'égalité exprime alors une relation symétrique et transitive.

❖ Au collège:

- L'emploi du signe “=” est utilisé comme un symbole signifiant qu'on a affaire à deux expressions d'un même objet mathématique notamment avec les expressions littérales. C'est ce passage entre la perception du signe “=” à l'école primaire puis au collège qui sera difficile à appréhender.
- Le signe “=” va être utilisé pour traduire une identité. Il signifie que quelques soient les valeurs attribuées aux lettres les deux expressions évaluées de part et d'autre du signe “=” sont égales.
- Dans l'écriture d'une équation, le signe “=” prend un sens différent car l'égalité ne

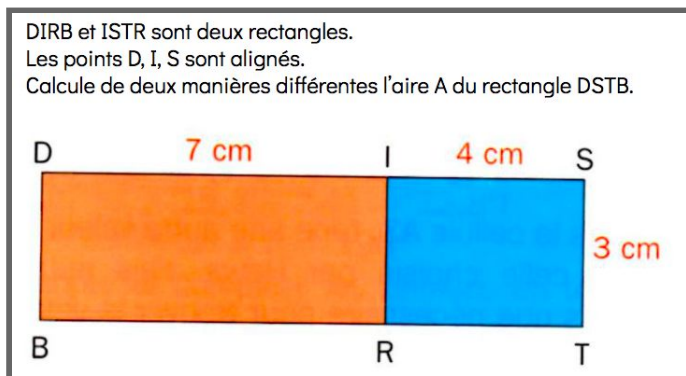
sera vraie que pour certaine(s) valeur(s) de x .

- Le signe “=” va également être utilisé comme symbole d’affectation, $3a+2b$ pour certaines valeurs de a et b .

2) Méthodologie - Introduction de la distributivité

a) Sur un exemple numérique

Lors du chapitre “Calcul numérique” enseigné au début de l’année, nous avons déjà travaillé sur le développement et la factorisation sur des exemples numériques. J’avais choisi une introduction géométrique pour montrer cette égalité.



A l’issue de cette activité, les élèves ont découvert que $(7 + 4) \times 3 = 7 \times 3 + 4 \times 3$.

b) Avec les lettres

Analyse a priori

Pour introduire cette identité $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$, j’ai choisi de nouveau le cadre géométrique pour donner du sens et lier avec la partie numérique déjà traitée en début d’année.

Ce choix m’a permis de rester proche de ce qu’ils avaient acquis au cycle 3 et notamment la capacité à exprimer l’aire d’un rectangle de longueur L et de largeur l par: $A = L \times l$

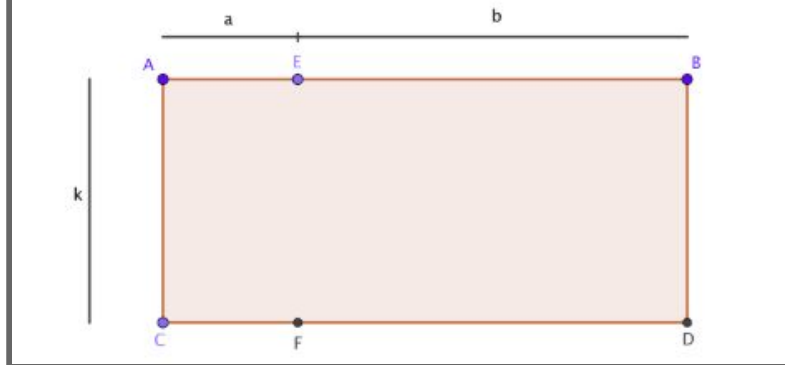
Voici ci-dessous la première partie de mon introduction pour introduire l’identité:

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b.$$

Cette partie a été distribuée à chaque élève avec une partie “Brouillon de recherche” afin qu’ils puissent écrire les traces de leur recherche en s’aidant de la figure à côté.

Exprimer l'aire du grand rectangle ci-dessous de deux manières différentes.

A partir des deux expressions de l'aire, en déduire une égalité.



La réponse attendue est la suivante:

Écrire l'aire du rectangle ABCD: $A_1 = AB \times BD = (a + b) \times k$

Écrire l'aire des deux rectangles AECF et EBCD:

- AECF: $A_2 = AE \times AC = a \times k$
- EBCD: $A_3 = EB \times AC = b \times k$

Écrire l'égalité: $A_1 = A_2 + A_3$ soit $(a + b) \times k = a \times k + b \times k$

Les élèves savent exprimer l'aire d'un rectangle en fonction de sa largeur et de sa longueur. Ils doivent donc être capable d'exprimer l'aire du grand rectangle en fonction des longueurs de segment. La difficulté est ensuite de traduire le fait que le segment [AB] mesure a+b. Une aide qui peut être apportée aux élèves est la suivante: si a=3 cm et b= 5 cm, que va mesurer [AB]?

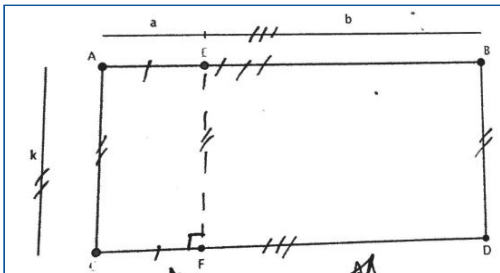
Il faudra peut-être leur donner un coup de pouce pour décomposer ensuite l'aire du grand rectangle en l'aire de deux autres rectangles, bien que nous ayons déjà travaillé ce type de raisonnement au début de l'année avec des exemples numériques.

Ce qui s'est passé pendant la séance

- 1) Certains élèves ont voulu mesurer les segments et n'ont donc pas compris que les longueurs étaient variables (les valeurs de a et b ne sont pas figées). Ils ont donc commencé par faire des calculs avec des nombres sans exploiter les lettres a, b et k qui apparaissent sur la figure. Pour les aider sur les problèmes de mesure qu'ils ont rencontrés, je leur ai précisé que la règle n'était pas autorisée et je leur ai demandé quelles étaient les données de l'énoncé qu'ils n'avaient pas exploitées.
- 2) Tous les élèves n'ont pas réussi à exprimer la longueur du segment [AB] comme "a+b", certains ont écrit "ab" comme en témoigne ci-dessous la copie de Paul.

$$\begin{aligned}
 AE &= CF = a \\
 EF &= BD \\
 BD &= AC \\
 AC &= BD = EF \\
 AB &= CD \\
 EB &= FD = b \\
 k &= AC = BD \\
 ab &= AB = CD
 \end{aligned}$$

3) Beaucoup d'élèves ont réussi à exprimer l'aire de deux façons différentes mais ils n'ont pas réussi à en déduire l'égalité. J'ai trouvé beaucoup de résultats similaires à la copie d'Ilyane ci-dessous:



Brouillon de recherche:

$$\begin{aligned}
 \text{Aire } n^{\circ 1} &= [AB] \times [AC] \\
 \text{Aire } n^{\circ 2} &= (AE + EB) \times AC \\
 \text{ou } L \times l \\
 AE &= a \\
 EB &= b \\
 AC &= k
 \end{aligned}$$

L'identification des deux sous-aires a bien été faite ainsi que le repérage des longueurs qui étaient égales. Puis les deux aires sont bien exprimées bien qu'on observe toujours une confusion entre le segment [AB] et la longueur AB qui intervient dans le calcul de l'aire.

Mais il n'a pas été plus loin dans la formulation de l'égalité. On sent ici qu'il a réussi à identifier et exploiter tous les éléments présents sur la figure mais qu'il se retrouve devant un vrai obstacle, à savoir écrire une égalité sans avoir un résultat numérique à exprimer. On dépasse ici l'utilisation du signe "=" que les élèves connaissent jusqu'ici.

En effet pour eux, une égalité exprime le résultat d'un calcul. Je leur demande d'écrire un signe "=" donc implicitement pour eux il y a un résultat numérique à exprimer. C'est la première fois que l'on rencontre ce type d'égalité (identité), il y a donc un vrai obstacle pour les élèves à lever.

La copie de Jean témoigne également de cette difficulté. Les deux aires sont bien exprimées mais le remplacement des longueurs de segment par les lettres n'a pas été effectué jusqu'au bout (dans l'expression de l'aire A_2) et l'identité n'est également pas écrite.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= AB \times BD = (a+b) \times k \\
 A_2 &= AC \times CF + EB \times BD
 \end{aligned}$$

La copie de Léonardo (ci-contre) montre de nouveau que la décomposition géométrique est bien comprise et chaque aire est correctement exprimée.

$$\begin{aligned}
 \text{1}^{\text{ère}} \text{ manière :} \\
 A_1 &= AC \times AB \\
 &= k \times (a+b) \\
 \text{2}^{\text{ème}} \text{ manière :} \\
 A_2 &= AE \times AC \\
 &= k \times a \\
 A_3 &= EB \times EF \\
 &= k \times b \\
 A_2 + A_3 &= A_1
 \end{aligned}$$

Toutefois, je ne retrouve pas l'identité attendue bien qu'il soit arrivé au stade: $A_2 + A_3 = A_1$

Deux élèves, Marin et Ludovic ont expliqué leur démarche à travers ce qui pourrait s'apparenter à une narration de recherche ainsi que l'illustre leur deux copies ci-dessous:

Marin est parvenu à écrire l'identité attendue:

Brouillon de recherche:
 la manière la plus simple pour calculer
 l'aire du rectangle AEB DFC est de faire
 $AC \times AB$ ou $BD \times BA$. Une autre manière
 de connaître l'aire de ABDC est
 de faire la longueur $AE \times AC + EB \times$
 BD . Car c'est l'aire des deux rectangles
 (AEFC) et (EBDF) qui compose AEB DFC.
 $AE = a$ et $EB = b$ et $AC = k$ donc l'aire de
 $AEB DFC = (a+b) \times k$.
 $k \times (a+b) = k \times a + k \times b$.

“La manière la plus simple pour calculer l'aire du rectangle AEBDFC est de faire $AC \times AB$ ou $BD \times BA$. Une autre manière de connaître l'aire de ABDC est de faire la longueur $AE \times AC + EB \times BD$. Car c'est l'aire des deux rectangles de AEFC et EBDF qui compose AEBDFC.
 $AE = a + b$ et $AC = k$ donc l'aire de $AEBDFC = (a+b) \times k$
 $k \times (a+b) = k \times a + k \times b$ ”

Ludovic n'est pas parvenu à l'identité attendue même s'il a bien expliqué sa décomposition des deux calculs de l'aire.

Brouillon de recherche:
 Pour trouver la longueur il faut faire
 $a + b$. Donc en sachant que la
 largeur est égale à k alors l'aire
 du rectangle est égale à
 $(a+b) \times k$. Il faut relier les points
 E et F pour former deux rectangles.
 Aire du rectangle AEFC = $a \times k$
 Aire du rectangle EBDF = $b \times k$
 donc l'aire du rectangle AEBDFC
 $ABDC = (a \times k) + (b \times k)$.

“Pour trouver la longueur il faut faire $a + b$. Donc en sachant que la longueur est égale à k alors l'aire du rectangle est égale à $(a+b) \times k$. Il faut relier les points E et F pour former deux rectangles.
 Aire du rectangle AEFC = axk
 Aire du rectangle EBDF = bxk
 donc l'aire du rectangle $ABDC = (axk) + (bxk)$ ”

Analyse a posteriori

- 1) Si c'était à refaire, je ne distribuerai pas l'énoncé sous format papier aux élèves mais je projeterai l'énoncé au tableau avec la figure réalisée sur Géogebra de manière à faire varier la taille de la figure et leur indiquer que [AE] mesurera toujours a, pourtant on voit bien sur la figure que la taille du segment [AE] change. La notion de variable prend alors plus de sens.

- 2) L'aide $a=3$ cm et $b=5$ cm a bien fonctionné pour les aider à déduire que la longueur du segment [AB] était $a+b$. Changer peut-être les noms des sommets car il peut y avoir une confusion entre A et a puis B et b.
- 3) Il est peut-être trop ambitieux d'attendre que les élèves soient capables d'écrire seuls cette égalité car il ne s'agit pas ici du résultat d'un calcul. Or c'est pour le moment la seule signification du signe "=" qu'ils ont eu à appréhender. Il aurait peut-être dans ce cas mieux fallu leur demander simplement d'explicitier clairement l'aire A_1 du grand rectangle puis les aires A_2 et A_3 et de travailler ensemble sur l'identité recherchée. C'est ce qui s'est passé d'ailleurs pendant la séance pour un grand nombre d'élèves qui n'avaient pas réussi à écrire l'identité. Lors de la mise en commun, nous avons écrit ensemble que $A_1 = A_2 + A_3$ puis remplacé pas à pas avec les expressions littérales trouvées pour chacune des aires.

$$\begin{array}{l} \text{AB} \times \text{BD} = (a+b) \times k \\ \text{AE} \times \text{EF} + \text{EF} \times \text{BD} = axk + bxk \end{array}$$

c) Institutionnalisation de l'identité

Nous aurons besoin pour la suite de l'introduction de l'identité $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$. Nous institutionnalisons donc cette première identité au tableau que les élèves écrivent sur leur brouillon de recherche comme résultat de la première partie de l'introduction. Cette partie sur la distributivité sera écrite plus tard dans le cours.

II/Travail sur les différents statuts de la lettre

1) Aspects didactiques et théoriques

Au cycle 3, la lettre est utilisée pour exprimer une unité de mesure d'une grandeur (m, L, ..), ou dans les formules comme une abréviation d'une grandeur (exemple L pour la longueur d'un rectangle, A pour l'aire d'une figure etc...). Dès la 5ème, la lettre va acquérir différents statuts qui vont complexifier la tâche des élèves même si chacun des statuts ne seront pas précisément définis aux élèves. Ils vont être alors confrontés à différents problèmes dans lesquels la ou les lettres utilisées n'auront pas le même statut.

Les différents statuts de la lettre (Source: Eduscol, ressource d'accompagnement des anciens programmes - du numérique au littéral - 2016)

Variable: "la valeur de certaines lettres dépend de la valeur attribuée à d'autres" - lorsqu'on va chercher à produire une formule pour généraliser, à différentes étapes on va exprimer par exemple par par "n" la grandeur qui évolue d'une étape à une autre. Cette grandeur et donc le "n" prendront des valeurs différentes à chaque étape: le "n" est une variable.

Indéterminée:

Une lettre a le statut d'indéterminée lorsqu'elle est utilisée dans une égalité "universelle", c'est à dire qui sera vérifiée quelque soit la valeur donnée à la lettre dans cette égalité, on parle alors d'identité.

C'est le cas pour la formule de distributivité simple de la multiplication sur l'addition:

$$k(a + b) = ka + kb$$

De même par exemple pour la généralisation de la formule d'addition de fraction de même dénominateur:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Inconnue: "Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs, qui substituées à l'inconnue donne une égalité vraie".

On va alors utiliser le signe égal entre deux expressions et cette égalité pourra ne pas être vérifiée pour certaines valeurs de x .

Il s'agit alors d'un obstacle pour les élèves car en arithmétique lorsqu'on utilise le signe "=", il a vraiment valeur d'égalité entre deux expressions, ainsi que nous l'avons évoqué plus haut:

$$25 = 10 + 15$$

Paramètre: la lettre représente une quantité connue par rapport à d'autres lettres (comme ce sera souvent le cas en physique), ou par exemple pour une fonction linéaire $f(x) = ax$, a est le coefficient directeur et x représente la variable.

2) Méthodologie: du cadre géométrique au cadre algébrique

La deuxième partie de l'introduction consistait à continuer de faire travailler les élèves sur les identités, en les faisant produire des formules équivalentes et en démontrant qu'elles sont égales grâce à l'institutionnalisation faite sur la distributivité en première partie. C'est justement cette partie qui est souvent passée sous silence dans la plupart des introductions au calcul littéral et que je souhaitais faire travailler à mes élèves.

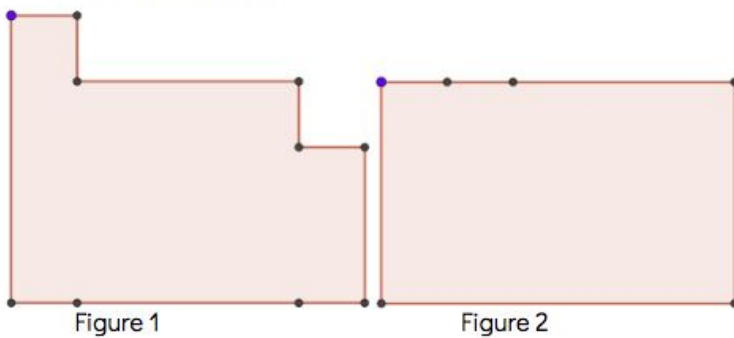
L'objectif de la suite de l'introduction était de les amener progressivement vers les différents statuts de la lettre: variable et paramètre. Le dernier statut de la lettre "inconnue" sera travaillée dans la deuxième partie de ma progression sur le chapitre calcul littéral.

Pour continuer à travailler sur les identités j'ai proposé les deux premières questions (a) et (b) ci-dessous:

Le périmètre des figures ci-dessous n'est constitué que des segments de longueur a et de longueur b .

\overline{a} \overline{b}

- Expliquer pourquoi les aires de ces deux figures sont égales.
- Exprimer l'aire de chacune des figures avec le plus de formules différentes possibles.
- Calculer l'aire des figures:
 - si $a=4$ cm et $b=2$ cm
 - si $a=1,5$ cm et $b=2,65$ cm
 - en fonction de a si $b=7$ cm
 - Avec les valeurs de votre choix pour a et pour b
- Léa dit que si $a=4$ cm et $b=10$ cm, l'aire de la figure sera égale à 200cm^2 . A-t-elle raison?



Analyse a priori

Cette première question permet de travailler les jeux de cadre. On part du cadre géométrique où les élèves sont dans la perception. En effet en déplaçant le petit carré en haut à gauche de la figure 1 et en l'insérant dans la partie en haut à droite les aires des deux figures sont égales. Puis on arrive au cadre algébrique avec la question b) où on est dans la déduction et la démonstration. On va en effet démontrer pourquoi ces deux aires sont égales grâce à l'identité $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ institutionnalisée dans la partie précédente.

La figure n°2 est la plus simple car très similaire à ce qui a déjà été travaillé dans la première partie.

On peut s'attendre à plusieurs expressions différentes pour l'expression de l'aire:

- $(a + a + b) \times b$, si on considère le rectangle de longueur " $a+a+b$ " et de largeur " b ".
- $(a + a) \times b + b \times b$, si on considère un rectangle de longueur " $a+a$ " et de largeur " b " et le carré de côté " b ".
- $a \times b + a \times b + b \times b$, si on considère deux rectangles identiques de longueur " b " et de largeur " a " et le carré de côté " b ".

En travaillant la distributivité simple institutionnalisée précédemment, les élèves doivent être en mesure de montrer pourquoi ces trois expressions sont équivalentes.

Pour la figure n°1, l'expression de l'aire peut s'avérer plus complexe car il va falloir trouver un découpages "astucieux".

On peut s'attendre aux expressions ci-dessous pour l'aire de la figure n°1:

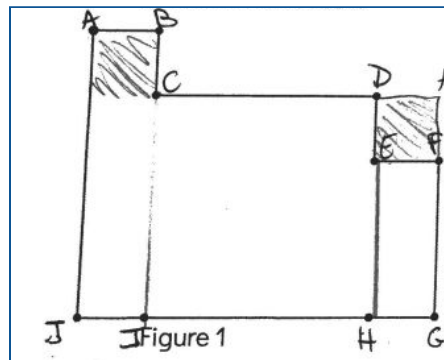
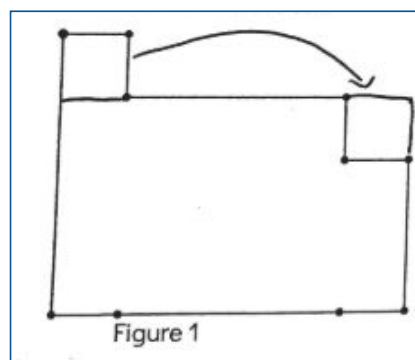
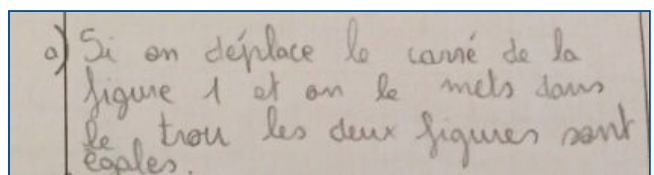
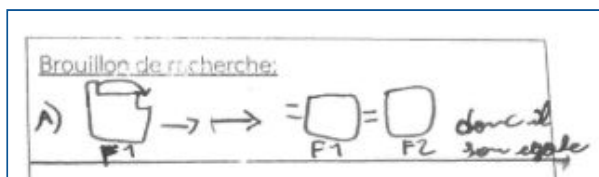
- $(a + a + b) \times b - a \times a + a \times a$, si on considère le grand rectangle de longueur " $a+a+b$ " et de largeur " b " auquel on a retiré le carré de côté " a " pour la partie "droite", et auquel on a rajouté le carré de côté " a " pour la partie "gauche".
- $a \times a + a \times b + b \times b + (b - a) \times a$, si on considère le carré de côté " a ", le rectangle de longueur " b " et de largeur " a ", le carré de côté " b " et le rectangle de longueur " $b-a$ " et de largeur " a ".
- $a \times (a + b) + b \times b + (b - a) \times a$, si on considère le rectangle de longueur " $a+b$ " et de largeur a , le carré de côté " b " et le rectangle de longueur " $b-a$ " et de largeur " a ".

Il y aurait encore d'autres découpages possibles et donc d'autres formulations pour les aires, que je ne vais pas citer ici pour alléger le propos.

L'objectif est ensuite après avoir récupéré les différentes expressions des élèves (que l'on espère variées), de les faire travailler sur les équivalences. On a "montré" d'un point de vue géométrique que les aires des figures 1 et 2 sont égales, pourtant on trouve des expressions littérales différentes. Comment montrer que ces expressions littérales sont en fait équivalentes? A l'aide de la distributivité travaillée précédemment.

Ce qui s'est passé pendant la séance:

Les élèves se sont très vite engagés dans la première question et tous ont réussi à la traiter rapidement et à rédiger une réponse correcte ainsi qu'en témoignent quelques extraits de copies ci-dessous:



Certains élèves ont dans un premier temps eu du mal à "reporter les mesures" a et b sur les deux figures. Pour certains la consigne "le périmètre des figures ci-dessous n'est constitué que des

segments de longueur a et de longueur b" signifiait que que chaque segment sur les figures mesurait soit "a" ou soit "b" et ne pouvait donc en l'occurrence pas mesurer (a+b) ou (b-a).

Par ailleurs une autre des difficultés que je n'avais pas prévue, est la confusion pour certains élèves entre périmètre et aire.

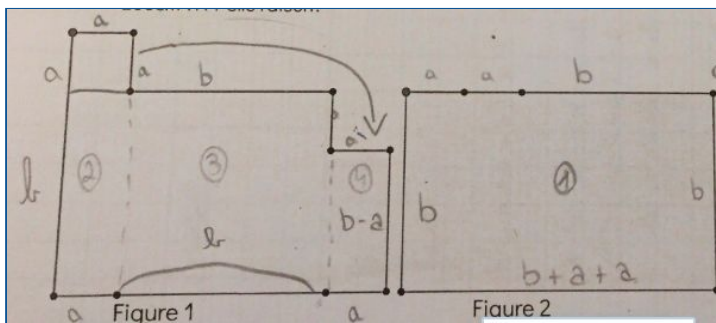
$$\begin{aligned} B) \quad f_2 &= a \times 2 + b \times 3 + (b + 2 \times a) \\ f_1 &= a \times 3 + b \times 3 \end{aligned}$$

Je me suis trompé car j'ai pas calculé l'aire mais le périmètre.

Il est vrai que dans le cadre de ma progression je n'avais pas inséré le chapitre "Aire et Périmètre" avant celui sur le calcul littéral car je pensais qu'en travaillant sur une figure simple comme le rectangle, il n'y aurait pas de difficulté particulière.

Une fois ces difficultés levées, la plupart des élèves se sont plutôt bien engagés dans l'écriture des différentes formules pour les aires des figures 1 et 2 mais toujours de manière décorrélée sans écrire d'égalité entre les formules des aires obtenues.

Par ailleurs le calcul de l'aire de la figure n°2 n'a pas posé de problème. Cela a été plus compliqué pour la figure n°1 où j'attendais plusieurs propositions de découpages dans le but de produire le plus de formules différentes et de pouvoir travailler sur leurs équivalences.



$$\begin{aligned} A_1 &= b \times (a + a + b) \\ A_2 &= a \times (a + b) \\ A_3 &= b \times b \\ A_4 &= a \times (b - a) \end{aligned}$$

+

La copie de Shaïma ci-dessus témoigne de sa compréhension sur le découpage des aires et de la méthodologie déjà employée lors de la première partie de l'introduction sur la démonstration de la distributivité.

$$\begin{aligned} b \times ((2 \times a) + b) &= \text{surface de la figure 2} \\ \text{surface de la figure 1} &= [b \times (2 \times a + b) - a \times a] + (a \times a) = b \times ((2 \times a) + b) \\ \therefore b \times (2 \times a + b) &= b \times (2 \times a + b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{fig 2}} &= (a + a + b) \times b \\ A_{\text{fig 1}} &= (a + a + b) \times b + a \times a - a \times a = (a + a + b) \times b \\ \text{donc} \\ A_{\text{fig 2}} &= A_{\text{fig 1}} \end{aligned}$$

Les deux copies ci-dessus ont adopté la même stratégie, à savoir exprimer la surface de la figure 2 dans un premier temps puis la surface de la figure 1, comme celle de la figure 2 à laquelle on enlève la surface du carré de côté "a", puis à laquelle on rajoute la surface de ce carré de côté "a", ce qui représente la première expression de l'aire que j'attendais comme indiqué dans l'analyse à priori. Toutefois le lien entre les deux formules ne semble ensuite pas clairement établi.

$A = b \times (a + b)$
 Air figure 1 $a \times (b + a) + (b \times b) + (a \times (b - a)) = \text{figure 1}$
 Air figure 1 $(a \times a) + (a + a + b) \times (b - a) + a \times (a + b) = \text{figure 1}$

La copie de Lucien ci-dessus est intéressante car il a procédé à deux découpages différents pour le calcul de l'aire de la figure n°1.

- Le premier que l'on pourrait qualifier de "vertical":
 $a \times (b + a) + (b \times b) + (a \times (b - a))$ et qui correspond à la troisième formule que j'avais proposé dans l'analyse à priori
- Le second que l'on pourrait qualifier d'"horizontal": $a \times a + (a + a + b) \times (b - a) + a \times (a + b)$

Ces deux expressions montrent que Lucien a lui bien aussi maîtrisé le calcul de l'aire par découpage de surfaces connues. Toutefois la deuxième expression qu'il propose ne pourra pas être exploitée en classe car elle fait appel à la double distributivité.

Les élèves n'ont pas réussi à démontrer algébriquement les égalités des aires à l'aide de l'identité sur la distributivité. C'est un travail que nous avons mené ensemble au tableau lors de la mise en commun.

J'ai dans un premier temps demandé aux élèves quelles étaient les formules qu'ils avaient écrites pour le calcul de l'aire de la surface n°2. Voici les trois expressions différentes obtenues.

- 1) $(a + a + b) \times b$
- 2) $a \times b + a \times b + b \times b$
- 3) $(a + a) \times b + b \times b$

Avant de passer au calcul de l'aire de la surface n°1, il faut dans un premier temps montrer que ces trois expressions sont équivalentes. Je formule alors de la manière suivante "vous m'avez proposé trois expressions différentes, je vous confirme que ces trois expressions sont correctes, pourtant tout le monde est d'accord pour dire que ce ne sont pas les mêmes expressions? Comment peut-on montrer qu'elles sont équivalentes? Que cela revient au même d'écrire l'une ou l'autre?".

Nous avons donc retravaillé la première expression en développant le b sur le facteur $(a + a + b)$ pour obtenir la deuxième expression.

Puis nous avons développé le b sur le facteur $(a + a)$ dans la dernière expression pour obtenir la deuxième également.

$$\begin{array}{l}
 1) \quad (a + a + b) \times b = \underline{a \times b} + \underline{a \times b} + \underline{b \times b} \\
 2) \quad \underline{a \times b} + \underline{a \times b} + \underline{b \times b} \\
 3) \quad (a + a) \times b + b \times b = \underline{b \times a} + \underline{b \times a} + \underline{b \times b}
 \end{array}$$

Cette partie sert à réactiver la distributivité démontrée précédemment dans la première partie de l'introduction.

Je demande ensuite aux élèves de me donner les expressions qu'ils ont obtenues pour l'aire de la surface n°1. Voici les deux expressions différentes qu'ils m'ont proposées:

- 1) $a \times a + a \times b + b \times b + a \times (b - a)$
- 2) $a \times a + (b + a) \times b + a \times (b - a)$

Avant de travailler sur les équivalences d'expressions sur les aires de la figure 1 et 2, il faut d'abord démontrer pourquoi les deux expressions différentes ci-dessous sont équivalentes. Cette fois-ci, je leur propose de factoriser par b dans la première expression pour ne pas avoir travaillé uniquement la partie "développer".

$$\begin{array}{l}
 1) \quad a \times a + a \times \underline{b} + \underline{(b)} \times \underline{b} + \underline{(a)} \times (b - a) = \underline{a \times a + b \times (a + b)} + a \times (b - a) \\
 2) \quad \underline{a \times a + (b + a) \times b + a \times (b - a)}
 \end{array}$$

Nous pouvons désormais travailler sur l'équivalence d'expressions entre une expression de l'aire de la figure n°1 et une expression de l'aire de la figure n°2. Je formule de nouveau de la manière suivante "Nous avons trois expressions différentes pour l'aire de la figure n°2 et deux pour l'aire de la figure n°1, or nous avons montré géométriquement que les deux aires étaient égales, nous devons donc obtenir des expressions qui sont toutes équivalentes. Est-ce le cas?".

Nous partons de la première expression de l'aire pour la figure n°1 et nous développons le "a" sur le facteur $(b - a)$, pour obtenir l'expression n°2 de l'aire de la figure n°2.

$$a \times a + a \times b + b \times b + a \times (b - a) = \cancel{a \times a} + a \times b + b \times b + \cancel{a \times b} - \cancel{a \times a} = a \times b + a \times b + b \times b$$

Dans la deuxième partie de l'égalité ci-dessus, on compare l'expression obtenue avec celle que l'on souhaite obtenir. Les élèves mentionnent alors qu'il y a des termes en trop. Je leur demande lesquels. Ils identifient rapidement que les termes en trop sont les termes en $a \times a$ et que ces termes vont s'annuler car ils sont opposés (nous avons déjà travaillé la première partie du cours sur les nombres relatifs et notamment la somme d'un nombre et son opposé est nulle).

Nous travaillons désormais sur les simplifications d'écritures possibles dans le cadre du calcul littéral. En effet nous avons remarqué ensemble que certaines expressions peuvent être "lourdes" à écrire. Je leur explique alors que certaines conventions ont été adoptées pour alléger les écritures et notamment les suivantes:

- supprimer le signe "×" entre deux lettres ou entre un nombre et une lettre
- $b \times b = b^2$
- $a \times a \times a = a^3$

Après avoir effectué ce calcul sur les identités où le statut de la lettre était celui d'indéterminée, il faut désormais travailler sur d'autres statuts de la lettre pour que les élèves puissent notamment donner du sens à la formulation "une expression littérale est une expression avec des nombres et des lettres où les lettres vont désigner des nombres" et comprendre la notion de variable.

Nous passons donc à la suite de l'activité:

- c) Calculer l'aire des figures:
- si $a=4$ cm et $b=2$ cm
 - si $a=1,5$ cm et $b= 2,65$ cm
 - en fonction de a si $b=7$ cm
 - Avec les valeurs de votre choix pour a et pour b
- d) Léa dit que si $a=4$ cm et $b= 10$ cm, l'aire de la figure sera égale à 200cm^2 . A-t-elle raison?

L'objectif est ici de vérifier dans un premier temps qu'ils ont bien compris que les expressions sur lesquelles nous avons travaillées précédemment étaient équivalentes et qu'ils peuvent choisir la plus simple pour calculer l'aire des figures.

Pour les deux premiers calculs, ils vont devoir substituer une valeur pour a et pour b, valeurs que j'ai choisies dans un premier temps entières, puis décimales. Puis je propose de calculer la valeur de l'aire si "b" est connu mais qu'on ne connaît pas la valeur de "a". "b" devient donc un paramètre et "a" est la variable.

Ces questions n'ont pas posé de difficultés aux élèves qui ont parfaitement réussi à substituer les valeurs de "a" et de "b".

c) l'aire de la figure 1 est 2 fois 20 cm²

a = 4 cm 2 × (4 + 4 + 2)

b = 2 cm b × (a + a + b)

l'aire de la figure 1 est 2 fois 14,9725 cm²

a = 1,5 2 × (1,5 + 1,5 + 2,65)

b = 2,65 b × (a + a + b)

c) Si a = 2 cm et b = 4 cm

A = (2 × 4) + (4 × 4) + (2 × 4)

= 8 + 16 + 8

A = 32 cm²

• Si a = 1,5 cm et b = 2,65 cm

= (1,5 cm × 2,65) + (2,65 + 2,65) + (1,5 × 2,65)

= 3,975 + 7,025 + 3,975

A = 14,9725 cm²

NB: certains élèves ont interverti les valeurs de a et b pour plus de cohérence avec le schéma donné (en effet sur le schéma le segment a est plus petit que le segment b), ce qui explique les valeurs différentes trouvées mais le raisonnement est correct dans les deux cas.

Dans la copie ci-dessous, on retrouve une bonne substitution mais un problème d'unités.

A₁ = 4 cm × (2 cm + 2 cm + 4 cm) = 32 cm

A₁ = 2,65 cm × (1,5 cm + 1,5 cm + 2,65 cm) = 14,9725

Je pensais que la question "calculer l'aire des figures en fonction de a si b=7cm" poserait plus de difficultés mais finalement les élèves ont d'eux mêmes répondu: "on remplace par ce qu'on connaît et ce qu'on ne connaît pas on le laisse. Ici b=7 cm donc on remplace mais on ne connaît pas a donc on laisse a". Ainsi que l'illustre la copie ci-dessous.

$$\begin{aligned} b &= 7 \text{ cm}, a = a \\ A &= (a \times 7) + (7 \times 7) + (a \times 7) \\ &= 7a + 49 + 7a \\ A &= 14a + 49 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

La dernière question (d) permettait de continuer le travail sur la substitution en utilisant une formulation différente que celle précédemment proposé. Cette question n'a pas posé de difficulté aux élèves.

Suite à cette activité d'introduction nous avons donc balayé toutes les notions que je souhaitais faire figurer dans la première partie du chapitre calcul littéral (partie cours en lien avec cette introduction en annexe):

- Production et définition d'une expression littérale
- Différents statuts de la lettre à travers des exemples
- Simplification d'écriture - conventions
- Distributivité

Analyse a posteriori:

- 1) Si on souhaite introduire le calcul littéral à l'aide d'un cadre géométrique, il faudra à l'avenir prévoir dans la progression d'insérer le chapitre "Périmètre et Aire" avant celui sur le calcul littéral. En effet même si les figures utilisées ne font appel qu'à des rectangles et des carrés, le maniement de la conception de la notion d'aire et de périmètre aura été faite en amont et sera mieux assimilée par les élèves, ce qui évitera les erreurs de certains d'entre eux au démarrage.
- 2) Le travail que nous avons mené sur les équivalences de formules s'est révélé très complexe et sûrement trop complexe pour certains élèves. Je me pose la question de simplifier l'énoncé de mon introduction en ne gardant que la figure n°2 pour laquelle la production de formules différentes pour le calcul de l'aire est déjà riche. La complexification avec la figure n°1 ne devrait peut-être être proposée qu'en option, ce qui permettrait également de pratiquer de la diversification.

III/ Programmes de calcul "téléphonés": réinvestissement de la distributivité et de la notion de variable

1) Aspects didactiques et construction de l'activité

L'objectif est ici de travailler sur la dialectique outil-objet mentionnée par Régine DOUADY. Après la première introduction dans le cadre géométrique, les élèves doivent être plus à l'aise avec le maniement d'expressions littérales. J'ai souhaité vérifier si les élèves avaient bien assimilé la notion de distributivité. J'ai alors choisi de changer de cadre en proposant à mes élèves de

travailler sur des programmes de calculs.

Mon objectif était double:

- Faire comprendre aux élèves l'apport du calcul littéral pour les programmes de calcul et faire travailler la notion de variable mais dans un nouveau cadre (notamment être capable de traduire le "choisir un nombre" par "on va désigner ce nombre par une lettre".)
- Réinvestir la distributivité dans un autre cadre.

Je me suis alors inspirée de la brochure "entrée en 5e et en 6e" publiée par l'IREM d'Aquitaine en 2007 qui propose différentes activités sur ces deux premières années de collège pour introduire progressivement le calcul littéral. Cette brochure propose notamment une situation en classe de 5e: "Échanger des programmes de calcul". Le but de cette activité est de faire travailler aux élèves une situation de communication. Des binômes sont formés et appariés à un autre binôme. Chacun ayant reçu un programme de calcul différent. Ils doivent traduire ce programme de calcul pour le binôme apparié avec un message ne contenant aucun mot. L'échange ne doit se faire que par l'intermédiaire du professeur. Chaque binôme est donc à la fois émetteur et récepteur. L'infinitif "choisir un nombre" a été privilégié dans l'intitulé des programmes de calcul, à "choisis un nombre" qui avait été expérimenté précédemment et paraît inciter plus les élèves à choisir une valeur.

Voici quelques exemples de copies d'élèves citées dans l'article sur le programme de calcul suivant:

Choisir un nombre

Ajouter 4

Multiplier le résultat obtenu par 5

Enlever 12

A) a) x ?
 $x + 4 \times 5 - 12$

C) ?
 $? + 4 = 1$

D) (1,2,3,4...etc.)
 $... + 4 = x$

B) $(c + 4) \times 5 - 12$

$1 + 5 = \bullet$
 $\bullet - 12 =$

$x \times 5 = b$
 $b - 12$

Lors de la mise en commun, les échanges avec les élèves permettent d'aboutir aux remarques suivantes:

- Le programme doit être valable pour n'importe quel nombre, il ne faut pas remplacer le nombre choisi par une valeur.
- Valider la position et le bon usage des parenthèses.
- Inutilité des listes de nombres qui ne pourront de toute façon pas être complètes. Par ailleurs, elles ne comportent que des nombres entiers et cela incite le groupe récepteur à traduire le programme de calcul par "choisir un nombre entre 1 et 10".

Les auteurs ont ensuite mis en place une nouvelle situation de communication sur deux nouveaux programmes de calcul avec la consigne suivante: "Traduire le programme de calcul par un message ne contenant aucun mot et comportant le moins de caractères possibles".

Cette consigne a ainsi pour but d'orienter les élèves vers la proposition B) mentionnée plus haut.

Le bilan et l'institutionnalisation de cette activité faite par les auteurs est la suivante: "une expression littérale traduit un programme de calcul. Le nombre variable est désigné par une lettre."

2) Méthodologie

a) Sur un exemple numérique

Avant de lancer les élèves sur l'activité programme de calcul inspirée par la brochure IREM, je les ai refait travailler sur des programmes de calcul numérique en questions flash.

En effet nous avons déjà travaillé sur cette notion en début d'année sur le chapitre n°2: "Calcul numérique", notamment pour la présentation d'un calcul sur une seule ligne et le placement des parenthèses.

Nous avons donc travaillé sur des programmes de calculs similaires à celui ci-dessous:

Quel est le résultat de ce programme de calcul si le nombre de départ est:

- 2 ?
- 3,5 ?

Choisir un nombre

Le multiplier par 3

Enlever 5

Multiplier par le nombre de départ

b) Avec des lettres: programmes de calcul téléphonés

Analyse a priori de l'activité

Après quelques séances de questions flash pour réactiver les programmes de calcul, j'ai proposé l'activité (en annexe) pour travailler les programmes de calcul dans le cadre algébrique.

La consigne était la suivante:

Chaque binôme reçoit un programme de calcul (noté n°1 ou n°2).

Vous devez traduire ce programme de calcul par un message ne contenant aucun mot.

Vous envoyez par l'intermédiaire du professeur ce message à votre binôme. Ils doivent retrouver votre programme de calcul, le réécrire en français et vous le renvoyer.

Vous vérifierez bien que c'est le même programme que vous avez au départ, éventuellement en le faisant fonctionner avec des nombres de votre choix.

Et voici les deux programmes de calculs proposés pour les échanges entre binômes:

Programme 1

Choisir un nombre

Ajouter 2

Multiplier par 6

Enlever 11

Programme 2

Choisir un nombre

Multiplier par 4

Ajouter 5

Diviser le résultat par 3

Au vu de l'étude faite par les chercheurs de l'IREM d'Aquitaine, je m'attendais au même type de propositions de la part de mes élèves. Les chercheurs suggèrent d'écrire le programme sous la forme d'une succession de phrases disposées horizontalement, pour éviter une disposition en colonne des calculs lors de la traduction du programme sans aucun mot. J'ai toutefois maintenu une disposition en colonne car je craignais que la disposition des parenthèses dans le calcul soit encore plus compliquée à appréhender.


Ce qui s'est passé pendant la séance

Voici quelques propositions d'élèves (copie d'élèves en annexe) et la traduction du programme de calcul en "français" par le groupe récepteur.

- Premier objectif: travailler sur la notion de variable

Programme 1	
<i>Proposition groupe émetteur</i>	<i>Proposition groupe récepteur</i>
$(x + 2) \times 6 - 11$	Choisir un nombre Ajouter 2 Multiplier par 6 Retirer 11
$C = (c + 2 \times 6) - 11$	Choisir un nombre (c) Ajouter 2 Multiplier par 6 Moins 11
$(1 + 2) \times 6 - 11$ $(2 + 3) \times 6 - 11$ $6 \times (4 + 2) - 11$	Le binôme récepteur n'a pas réussi à traduire le programme de calcul

Programme 2	
<i>Proposition groupe émetteur</i>	<i>Proposition groupe récepteur</i>
$(4x + 5) \div 3$	Choisir un nombre Multiplier par 4 Ajouter 5 Diviser par 3
$(2,5 \times 4 + 5) \div 3 = 5$	Choisir un nombre = 2,5

	Multiplier par 4 Ajouter 5 Diviser par 3
$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$  $(? \times 4 + 5) : 3$	Choisir un nombre sans leur dire Multiplier le par 4 Rajouter 5 Et diviser le par 3

Lors de la mise en commun, nous avons travaillé à partir des propositions des élèves pour arriver à l'institutionnalisation.

J'ai dans un premier temps recueilli leurs propositions au tableau sans leur indiquer si elles étaient correctes ou non.

- $(c + 2 \times 6) - 11$
- $2 + 2 = 4; 4 \times 6 = 24; 24 - 11 = 13$
- $(x + 2) \times 6 - 11$
- $(1 + 2) \times 6 - 11$
 $(2 + 3) \times 6 - 11$
 $6 \times (4 + 2) - 11$

Nous avons ensuite débattu ensemble sur la pertinence des expressions littérales.

Pour la première, nous avons rappelé quelles étaient les priorités opératoires. Un élève a en effet mentionné que cette expression n'était pas correcte car la multiplication par 6 allait agir avant l'addition du 2, les parenthèses ne sont donc pas placées au bon endroit. Pour la deuxième proposition, je leur ai demandé, "comment vous traduiriez ce programme de calcul avec des mots si vous l'aviez reçu?". Beaucoup ont commencé par "choisir un nombre". J'ai alors répliqué que ce n'était pas ce que je voyais au tableau. Un élève a alors répondu "choisir 2". Nous avons convenu ensemble que ce n'était pas le programme de calcul initial et qu'il ne fallait donc pas choisir un nombre quelconque pour traduire ce programme de calcul.

La dernière proposition reposait sur le même principe, plusieurs exemples qui ont pour but d'expliquer le programme de calcul par une sorte de "mimétisme".

La deuxième proposition qui est une bonne réponse a finalement été bien comprise de tous suite au débat qui venait d'avoir lieu. Nous avons toutefois convenu que si ce binôme avait choisi "x" pour le "choisir un nombre", toute lettre pouvait convenir. Et beaucoup d'élèves s'en sont donné à cœur joie lors des sessions de questions flash suivantes pour proposer un programme de calcul faisant intervenir une lettre quelconque de l'alphabet.

- Deuxième objectif: travailler la notion de distributivité

Nous avons continué l'activité programme de calcul avec un programme n°5 qui avait un tout autre objectif. Maintenant que les élèves avaient compris comment traduire un programme de

calcul à l'aide d'une variable, je souhaitais les faire retravailler sur la distributivité déjà institutionnalisée à l'aide du cadre géométrique.

J'ai proposé la consigne suivante:

Pour le programme suivant, écrire un programme de calcul plus simple qui donne les mêmes résultats quelque soit le nombre de départ choisi.

Programme 5:

Choisir un nombre

Doubler

Ajouter 3

Multiplier par 3

Ajouter le nombre de départ

La réponse attendue est la suivante:

$$(x \times 2 + 3) \times 3 + x = (2x + 3) \times 3 + x = 6x + 9 + x = 7x + 9$$

Ce programme de calcul est donc équivalent au programme suivant:

Choisir un nombre

Multiplier par 7

Ajouter 9

Les élèves ont bien vu "qu'il y avait un x dans la parenthèse et un x qui n'était pas dans la parenthèse". Ils avaient envie de mettre ensemble ces "x" car nous avons beaucoup travaillé dans les questions flash précédemment la réduction d'expressions littérales. Je leur ai donc indiqué qu'ils étaient sur la bonne voie, que c'était effectivement ce qu'il fallait faire, mais comment y arriver?

Il a fallu beaucoup d'essais erronés avant qu'un élève n'arrive à reconnaître la distributivité qui nous permettait de simplifier l'expression.

Analyse a posteriori

Le premier objectif a été bien rempli selon les attentes que je m'étais fixées. Les élèves ont rapidement assimilé comment utiliser une variable pour traduire un programme de calcul et cela à l'aide d'une seule expression numérique avec le bon usage des parenthèses.

Toutefois le second objectif qui était de mesurer l'impact du changement de cadre sur l'assimilation d'une notion n'a pas rempli mes attentes. Il y a sûrement eu un saut conceptuel trop important ici pour les élèves.

Une possibilité aurait été peut-être de rendre la consigne plus explicite. Je reformulerais plutôt de la manière suivante "écrire un programme de calcul avec moins d'étapes" au lieu de "écrire un programme de calcul plus simple" car les élèves n'ont pas perçu ce qui était sous-jacent aux termes "plus simple".

Une autre possibilité que je favoriserai à l'avenir serait de proposer le programme de calcul suivant:

Choisir un nombre

Ajouter 2

Multiplier par 3

Retrancher 6

Consigne: montrer que ce programme de calcul revient à multiplier par 3 le nombre de départ.

La consigne cette fois-ci est beaucoup plus explicite pour les élèves et nécessite de les faire travailler la distributivité de manière plus simple que le programme que j'ai proposé initialement.

Conclusion

Le travail autour de cette étude m'a permis de réinvestir une notion mathématique au sein de différents cadres et de tester l'impact que cela a pu avoir sur les élèves. Avoir choisi dans un premier temps une approche géométrique a permis de créer un vrai travail autour de la distributivité en lui donnant un sens concret plutôt qu'en énonçant simplement une règle à appliquer. Dans ce contexte, le travail sur les différents statuts de la lettre a pu être facilement mené par les élèves.

J'ai pu constater en réalisant ce travail que changer de cadre peut parfois se révéler un saut conceptuel important. Toutefois il me paraît essentiel ici. D'une part pour montrer aux élèves le champ des possibles ainsi que l'utilité du calcul littéral. D'autre part pour permettre à certains élèves de comprendre une notion dans un domaine qu'ils affectionnent plus particulièrement. Cela a par exemple été le cas avec certains de mes élèves, plus à l'aise en algèbre qu'en géométrie. Ces élèves sont très rapidement rentrés dans l'activité programmes de calcul, et n'ont eu aucun mal à comprendre la notion de variable, à savoir traduire le "choisir un nombre" par "on l'appellera x ". Par ailleurs, il apparaît que le réinvestissement de la distributivité dans le cadre des programmes de calcul reste compliqué pour l'ensemble des élèves. J'introduirai ainsi à l'avenir, afin d'adresser cette difficulté, les améliorations décrites dans la dernière partie.

Le choix de découper ma progression en deux parties dans l'année m'a par ailleurs permis de réinvestir les notions du calcul littéral lors de la deuxième partie du chapitre, à savoir tester une égalité et produire une formule dans un exercice de modélisation. J'ai en effet pu réactiver en amont les connaissances propres à la distributivité et à la traduction d'un programme de calcul et valider l'acquisition de ce chapitre notamment avec une évaluation de fin de chapitre constituée de deux exercices bilans qui ont été réussis à plus de 70%. Le contexte de crise sanitaire que nous vivons actuellement nous invite à nuancer l'impact effectif de cette approche puisque ces travaux ont été réalisés à la maison.

Plus généralement, ce travail approfondi m'a permis de m'interroger longuement sur mon approche de la pédagogie et sur la manière d'aborder de nouveaux concepts mathématiques. J'ai pu mettre à profit un travail similaire de recherche et de lecture pour enrichir la construction de certains autres chapitres comme par exemple sur la symétrie centrale ou les nombres relatifs. Le cheminement vers cette problématique et le questionnement sur la place de la distributivité dans ce chapitre ainsi que l'étude de l'impact des changements de cadres sur les élèves ont été très formateurs pour mon enseignement futur.

Je tiens enfin à remercier infiniment ma directrice de mémoire Jessica Brisac, qui m'a été d'une grande aide lors de nos nombreux échanges. Elle a su m'aider à me remettre en question, m'encourager durant les périodes de doute, et m'accompagner tout au long de cette année. Merci pour ton aide Jessica, ce fut, comme toujours, un vrai plaisir de travailler avec toi. J'espère que nous en aurons de nouveau l'occasion dans un futur proche.

Bibliographie

- “N c’est un nombre ou c’est des nombres?” Denis et al. - Repères IREM 92, 5-21
- Petit x 102 - COPPE et al - “Conditions pour diffuser des situations issues de la recherche en didactique des mathématiques: l’exemple du carré bordé.”
- “Un exemple d’ingénierie didactique où sont mis à l’oeuvre jeux de cadres et dialectique outil-objet”, Régine DOUADY, Publications de l’Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1987, fascicule, P1-17
- “Diagnostic cognitif en algèbre élémentaire à différents niveaux de la scolarité”. Françoise Chenevetot-Quentin, Brigitte Grugeon-Allys et Élisabeth Delozanne http://lutes.upmc.fr/delozanne/Publi/Publi2009/Didirem2009Chenevet_et_al.pdf
- HEPVS - Mémoire professionnel: “Introduction à l’algèbre par des situations problèmes”, Xavier LARREA, 2016
- Brochure IREM d’Aquitaine: “Des situations pour introduire le calcul littéral en 6e et 5e”. P107 - 110
- “Des maths ensemble et pour chacun 5e”, Jean-Philippe Rouquès et Hélène Staïner, 2010, SCEREN, [CNDP-CRDP]
- Manuels scolaires
 - Myriade 5e, programme 2016
 - Phare 5e, Mathématiques cycle 4
 - Kwyk, Maths 5e, Nouveau programme 2016
 - Transmaths 5e, Nouveau programme 2016

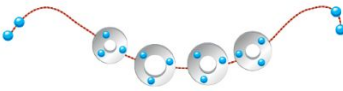
ANNEXES

Annexe n°1: Extraits d'introductions de manuels scolaires

- Transmaths

2 **Activité** **Produire une formule**

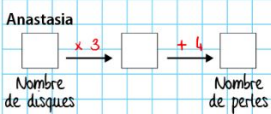
Une créatrice de bijoux réalise des colliers avec des disques en argent et des perles bleues. Elle fixe 3 perles bleues sur chaque disque et utilise 4 autres perles pour fermer le collier.



1 Combien de perles faut-il pour un collier qui comprend :

a. 4 disques ? b. 1 disque ? c. 2 disques ? d. 7 disques ?

2 On a demandé à 7 élèves d'expliquer comment calculer le nombre de perles en fonction du nombre de disques. Voici leurs copies.

Anastasia		Benoît	$3 \times (n + 4)$	Clémence	$4 \times \Delta + 3$	Djibril	$3 \times x + 4$
Émile	$\dots \times 3 + 4$	Flo	$3 + 4 \times y$	Gaïa	$4 + 3 \times \text{nombre de disques}$		

a. Quels sont les élèves dont le travail est correct ? Expliquer.
b. Combien de perles possède un collier qui compte 15 disques ?

- Myriade

2 **Utiliser une expression littérale** **OBJECTIF 2**

De nombreuses formules permettent de calculer approximativement la distance d'arrêt d'un véhicule en fonction de sa vitesse et de l'état de la route (sèche ou mouillée). En voici une : $Da = (v : 10) \times 3 + (v : 10) \times (v : 10) \times k$

Dans cette formule :

- Da est la distance (en mètre) nécessaire à la voiture pour s'arrêter ;
- v est la vitesse de la voiture en km/h ;
- k est un coefficient qui vaut 0,5 si la route est sèche, et 0,75 si elle est mouillée.


1 Calculer, pour chaque type de voie de circulation (sèche ou mouillée), la distance d'arrêt d'un véhicule roulant à la vitesse maximale autorisée.

2 a. Pierre dit : « En roulant à 130 km/h sur une route sèche, il faut à peu près la longueur d'un terrain de foot pour s'arrêter. » Vrai ou faux ?
b. Eva dit : « En roulant à 130 km/h au lieu de 110 km/h sous la pluie sur autoroute, la distance d'arrêt augmente de la longueur d'un terrain de handball. » Vrai ou faux ?

3 Léo dit : « Si je roule deux fois plus vite, ma distance d'arrêt sera deux fois plus longue. » Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?

Voie de circulation	Par	
	temps sec	temps de pluie
Autoroute	130 km/h	110 km/h
Route à deux chaussées séparées par un terreplein central	110 km/h	100 km/h
Route	90 km/h	80 km/h
Agglomération	50 km/h	50 km/h

D'après <http://vosdroits.service-public.fr>

 Un terrain de football mesure entre 90 et 120 m de long, un terrain de handball mesure 40 m de long environ.

1

Produire une expression littérale

OBJECTIF 1

Pour décorer des piscines carrées, on fabrique des motifs à l'aide de carreaux de faïence. Les carreaux du bord et d'une des diagonales sont gris, les autres sont bleus.

Une petite piscine carrée de 6 carreaux de côté est représentée ci-contre.



- 1 a. Combien y aurait-il eu de carreaux gris dans toute la piscine si on avait utilisé 8 carreaux pour le côté de la piscine ?
b. Et si on avait utilisé 15 carreaux gris pour le côté de la piscine ?
c. Même question pour 543 carreaux gris.
- 2 Expliquer comment trouver le nombre total de carreaux gris à utiliser en fonction du nombre de carreaux utilisés pour le côté de la piscine.
- 3 Julien affirme : « Sur ma figure, j'ai colorié 316 carreaux en gris. » Est-ce possible ? Expliquer.

- Phare

1 J'écris une expression littérale

Voici un programme de calcul :

- 1 On choisit le nombre 5.
 - Choisir un nombre.
 - Ajouter 4.
 - Multiplier le résultat par 3.
 - Enlever 7.
- a) Calculer le résultat obtenu.
- b) Noémie a écrit l'expression numérique suivante :

$$(5 + 4) \times 3 - 7$$

Vérifier que Noémie obtient le même résultat.

- 2 a) Choisir un autre nombre, écrire l'expression numérique correspondante, puis la calculer.
- b) Recommencer avec deux autres nouveaux nombres.
- 3 a) On veut écrire une expression que l'on peut utiliser pour n'importe quel nombre choisi. Parmi les étiquettes suivantes, laquelle correspond au programme de calcul ci-dessus.

(Nombre choisi \times 3 + 4) - 7

(Nombre choisi + 4) \times 3 - 7

Nombre choisi + 4 \times 3 - 7

- b) Pour simplifier, on décide de désigner le *nombre choisi* par une lettre, par exemple, par la lettre *n*. Écrire l'expression qui correspond au programme de calcul en utilisant la lettre *n*. Cette expression est appelée une **expression littérale**.

2 Je calcule une expression littérale pour des valeurs données

Pour cette activité, on utilise un logiciel de type tableur, par exemple OpenOffice ou LibreOffice.

Une fleuriste vend des roses à 2,80 € l'unité et des œillets à 0,95 € l'unité.

- 1 Calculer le prix d'un bouquet composé de 6 roses et 10 œillets.
- 2 a) On désigne par *x* le nombre de roses et par *y* le nombre d'œillets utilisés pour composer un bouquet. Que permet de calculer l'expression littérale $2,80 \times x + 0,95 \times y$?
- b) Calculer la valeur de cette expression littérale lorsque $x = 6$ et $y = 10$. Quel résultat retrouve-t-on ?



- 3 On veut utiliser le tableur du logiciel pour calculer le prix de différents bouquets.

	A	B	C
1	Nombre de roses	Nombre d'œillets	Prix du bouquet
2	6	10	
3	8	8	
4			

- a) Recopier le tableau ci-contre sur la feuille de calcul.
- b) Dans la cellule C2, on veut saisir une formule que l'on peut généraliser à la colonne C. Pour ce faire :
 - dans la cellule C2, taper « = » qui indique au logiciel que l'on entre une formule ;
 - taper ensuite « 2,80*A2 + 0,95*B2 » ;
 - valider en tapant sur « Entrer ».
- c) Généraliser cette formule à la colonne C.
- 4 Quel est le prix d'un bouquet :
 - a) de 8 roses et 8 œillets ?
 - b) de 4 roses et 12 œillets ?
 - c) de 10 roses et 6 œillets ?

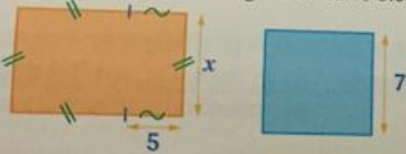


J'ai placé le curseur sur la cellule C2 et j'ai tiré vers le bas le petit carré noir.

3 Je teste une égalité

Les longueurs sont exprimées en centimètres. La lettre *x* désigne une longueur.

On considère ce rectangle orange et ce carré bleu :



- 1 a) Justifier que le périmètre du rectangle orange peut s'écrire : $4 \times x + 10$.
- b) Quel est le périmètre du carré bleu ?
- c) On veut que le périmètre du rectangle orange soit égal au périmètre du carré bleu. Traduire cette phrase par une égalité.



Cette égalité n'est vraie que pour certaines valeurs du nombre *x*.

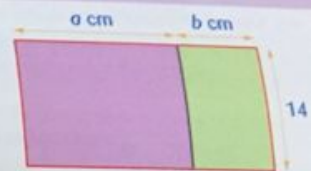
4 Je transforme une expression littérale

Expression numérique

- a) Calculer mentalement : 14×102 .
- b) Écrire les calculs effectués mentalement.

Expression littérale

Le rectangle violet et le rectangle vert ci-contre forment le rectangle de contour rouge.



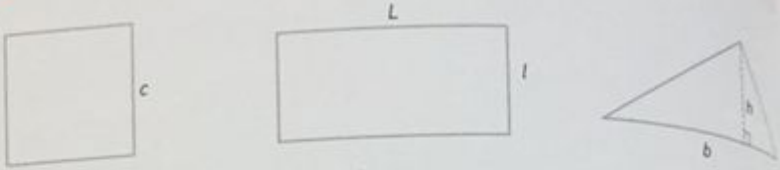
- 1 a) Exprimer en fonction de *a* et de *b* la longueur du rectangle rouge.
- b) En déduire une expression littérale permettant de calculer l'aire de ce rectangle.
- 2 a) Exprimer en fonction de *a* l'aire du rectangle violet.
- b) Exprimer en fonction de *b* l'aire du rectangle vert.
- c) En déduire une deuxième expression littérale permettant de calculer l'aire du rectangle de contour rouge.
- 3 Recopier et compléter : *a* et *b* désignent des nombres, on a :

$$\dots \times (\dots + \dots) = \dots \times \dots + \dots \times \dots$$

- KWYK

Je découvre

Activité 1




Voici quelques formules de géométrie déjà rencontrées :

Figure	Périmètre ou aire
Un carré de côté c	Périmètre : $4 \times c$
Un rectangle de longueur L et de largeur l	Périmètre : $2 \times L + 2 \times l$
Un triangle de base B ayant pour hauteur h	Aire : $\frac{b \times h}{2}$


1. Quelle est l'aire d'un triangle de base 9 cm et de hauteur 8 cm ?
2. Quel est le périmètre du carré de côté 10 m ?
3. Quel est le périmètre du rectangle de longueur 12 dm et de largeur 5 dm ?
4. Quelle est la formule de l'aire d'un carré ?
On écrira cette formule en précisant ce que les lettres utilisées représentent.
5. Quelle est la formule de l'aire d'un rectangle ?
On écrira cette formule en précisant ce que les lettres utilisées représentent.
On dit que ces formules sont des **expressions littérales**, car elles comportent des lettres qui représentent des nombres.

Activité 2

Les parents de Samuel lui ont offert un téléphone portable pour son anniversaire. Ils ne paient que ce qu'il consomme : 0,10 € par SMS et 0,20 € par minute de communication, en lui autorisant au maximum 20 € par mois. Samuel doit gérer correctement l'utilisation de son portable, sinon il devra régler les frais de dépassement avec son argent de poche.



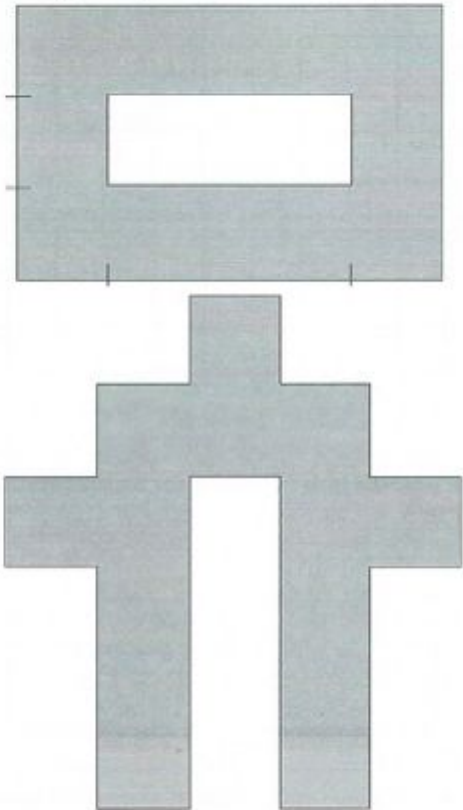
1.
 - a) Quel est le montant de la facture si Samuel envoie 10 SMS et téléphone pendant 45 minutes ?
 - b) Quel est le montant de la facture si Samuel envoie 20 SMS et téléphone pendant une heure ?
 - c) Quel est le montant de la facture si Samuel envoie x SMS et téléphone pendant y minutes ?
2. La facture s'élève à 20 €.
 - a) Samuel peut-il avoir envoyé 25 SMS et téléphoné pendant 1 heure et 30 minutes ? Pourquoi ?
 - b) Samuel peut-il avoir envoyé 50 SMS et téléphoné pendant 80 minutes ? Pourquoi ?
 - c) Samuel peut-il avoir envoyé 100 SMS et téléphoné pendant 50 minutes ? Pourquoi ?
3. Quel est l'intérêt de l'utilisation du calcul littéral dans cette situation, et de manière générale ?



Annexe n°2: HEPVS - Mémoire professionnel: Introduction à l'algèbre par des situations problèmes

Le périmètre des figures n'est constitué que de segments

de longueur b : $| \text{---} b \text{---} |$
de longueur a : $| \text{---} a \text{---} |$



Les parties ombrées des deux figures suivantes ont-elles la même aire ?
Expliquez votre raisonnement.

Figure 2: consigne de la situation-problème 1. Inspiré de Vlassis et Demonty (2002)

Annexe n°3: Institutionnalisation du cours - Calcul littéral (Parties 1 & 2)

Chapitre n°9: Calcul littéral (partie I)

Objectifs:

- Produire une expression littérale pour élaborer une formule
- Produire une expression littérale pour traduire un programme de calcul
- Substituer une valeur numérique à une lettre dans une expression littérale
- Comprendre le sens du signe “=”
- Utiliser la distributivité dans des expressions littérales

I/ Expressions littérales

a) *Des nombres et des lettres*

Définition: une expression littérale est une expression contenant une ou plusieurs lettres. Ces lettres vont désigner des nombres.

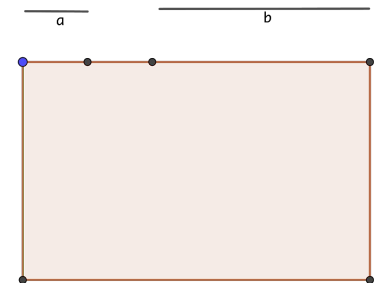
Exemple 1: l'aire de la figure est donnée par:

$$axb + axb + bxb$$

Pour $a=2$ cm et $b = 5$ cm, l'aire est égale à:

$$2 \times 5 + 2 \times 5 + 5 \times 5 = 45 \text{ cm}^2$$

statut de la lettre:
variable puis
paramètre lorsque l'on
substitue



Exemple 2: l'expression $2x(n+4)$ traduit le programme de calcul suivant: choisir un nombre, ajouter 4, doubler.

Pour $n=3$, le résultat de ce programme de calcul est: $2 \times (3+4) = 2 \times 7 = 14$

b) *Simplification d'écriture*

Règle: Le signe “x” peut être enlevé s'il est devant ou derrière une lettre, ou s'il est devant ou derrière une parenthèse.

Exemples:

- Le produit $3xa$ s'écrit plus simplement $3a$: $3xa=3a$
- La règle précédente ne s'applique pas pour le produit $3x5$!! On ne peut pas écrire $3x5=35$!!
- $ax4=4a$ et non pas $a4$
- Le produit $3x(a+1)$ s'écrit plus simplement $3(a+1)$: $3x(a+1)=3(a+1)$
- Le produit axb s'écrit plus simplement ab : $axb=ab$
- Pour calculer un produit de plusieurs facteurs on peut modifier l'ordre des facteurs:
 $2xbx5=2x5xb=10xb=10b$

Notations:

a désigne un nombre

$$axa = a^2$$

$$axaxa = a^3$$

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

$$2xaxa = 2a^2$$

statut de la lettre:
indéterminée
Égalité = Identité

II/ Distributivité

a) Développer

Définition (rappel): développer signifie transformer un produit en une somme ou une différence

Propriété:

k, a et b désignent des nombres. $a > b$

$$kx(a+b) = k(a+b) = kxa + kxb = ka + kb$$

$$Kx(a-b) = k(a-b) = kxa - kxb = ka - kb$$

statut de la lettre:
indéterminée
Égalité = Identité

Exemple:

Développer $3(x+2)$

b) Factoriser

Définition (rappel): factoriser signifie transformer une somme ou une différence en produit

Propriété:

k, a et b désignent des nombres.

$$kxa + kxb = kx(a+b) = k(a+b)$$

$$kxa - kxb = kx(a-b) = ka - kb$$

“On identifie le facteur commun”: k

statut de la lettre:
indéterminée
Égalité = Identité

Exemple:

Factoriser $5x+20, 4x+3x, 6a-a$

Chapitre n°9: Calcul littéral (partie II)

Objectifs:

- Tester une égalité
- Utiliser la lettre pour traduire ou démontrer une propriété générale

I/ Tester une égalité

a) Egalité

Vocabulaire: une égalité est constituée de deux membres séparés par le signe “=”

Exemple:

$$\underbrace{5 \times 4}_{\text{membre de gauche}} = \underbrace{12 + 8}_{\text{membre de droite}}$$

Propriété: une égalité où interviennent des expressions littérales peut être vraie pour certaines valeurs affectées aux lettres et fausse pour d'autres valeurs.

Exemple: On considère l'égalité $5n + 3 = 8$. Le membre de gauche est égal à $5n + 3$ et le membre de droite est égal à 8.

NB: On n'oublie pas que $5n + 3 = 5 \times n + 3$

- Cette égalité est vraie pour $n=1$.

Explication: on calcule le membre de gauche: on remplace le n par la valeur 1, $5 \times 1 + 3 = 8$. On trouve que le membre de gauche est égal à 8. Et le membre de droite est égal aussi à 8. Les deux membres de l'égalité sont égaux lorsque $n=1$ donc l'égalité est vraie pour $n=1$

- Cette égalité est fausse pour $n=2$.

Explication: on calcule le membre de gauche: on remplace le n par la valeur 2, $5 \times 2 + 3 = 13$. On trouve que le membre de gauche est égal à 13. Et le membre de droite est égal à 8. Les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux lorsque $n=2$ ($13 \neq 8$) donc l'égalité est fausse pour $n=2$.

b) Tester une égalité

Règle: Pour tester si une égalité est vraie pour des valeurs numériques attribuées aux lettres:

- 1) On calcule la valeur du membre de gauche en remplaçant chaque lettre par le nombre donné
- 2) On calcule la valeur du membre de droite en remplaçant chaque lettre par le nombre donné
- 3) On observe l'égalité ou non des deux valeurs obtenues et on conclut.

Exemple: On considère l'égalité: $5x + 6 = 3x + 18$

Cette égalité est-elle vraie pour $x = 6$?

- 1) On calcule le membre de gauche en remplaçant x par 6:
 $5x + 6 = 5 \times 6 + 6 = 30 + 6 = 36$
- 2) On calcule le membre de droite en remplaçant x par 6:
 $3x + 18 = 3 \times 6 + 18 = 18 + 18 = 36$
- 3) On trouve le même résultat pour le membre de gauche et le membre de droite donc l'égalité est vraie pour $x = 6$.

Cette égalité est-elle vraie pour $x = 3$?

- 1) On calcule le membre de gauche en remplaçant x par 3:
 $5x + 6 = 5 \times 3 + 6 = 15 + 6 = 21$
- 2) On calcule le membre de droite en remplaçant x par 3:
 $3x + 18 = 3 \times 3 + 18 = 9 + 18 = 27$
- 3) $21 \neq 27$ donc l'égalité n'est pas vraie pour $x = 3$.

Annexe n°4: Activité programme de calcul

Consigne:

Chaque binôme reçoit un programme de calcul (noté n°1 ou n°2).

Vous devez traduire ce programme de calcul par un message ne contenant aucun mot.

Vous envoyez par l'intermédiaire du professeur ce message à votre binôme devant ou derrière. Ils doivent retrouver votre programme de calcul, le réécrire en français et vous le renvoyer.

Vous vérifierez bien que c'est le même programme que vous avez au départ, éventuellement en le faisant fonctionner avec des nombres de votre choix.

Programme 1

Choisir un nombre
Ajouter 2
Multiplier par 6
Enlever 11

Programme 3

Choisir un nombre
Ajouter 8
Multiplier le résultat par 2
Enlever 3

Programme 2

Choisir un nombre
Multiplier par 4
Ajouter 5
Diviser le résultat par 3

Programme 4

Choisir un nombre
Diviser par 2
Ajouter 6
Multiplier le résultat obtenu par 5

Consigne:

Pour le programme suivant (programme 5), écrire un programme de calcul plus simple qui donne les mêmes résultats quelque soit le nombre de départ choisi.

Programme 5

Choisir un nombre
Doublé
Ajouter 3
Multiplier par 3
Ajouter le nombre de départ

Annexe n°5: Copies d'élèves sur les programmes de calcul

Choisir un nombre
ajouter 2
multiplier par 6
retirer 11

$$(x + 2) \times 6 - 11$$
$$C = (c + 2 \times 6) - 11$$

Choisir nombre (c)
Ajouter 2
multiplier par 6
Moins 11.

$$(4x + 5) \div 3$$

Choisir un nombre
Multiplier par 4
Ajouter 5
Diviser par 3

$$(2,5 \times 4 + 5) : 3 = 5$$

Choisir un nombre = 2,5
Ajouter 5
Multiplier par 4
Diviser par 3.

- $(1 + 2) \times 6 - 11$
- $(2 + 3) \times 6 - 11$
- $6 \times (4 + 2) - 11$

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$$(\ ? \times 4 + 5) \div 3$$

Programme 2:
choir un nombre sans leur dire
Multiplier le par 4
ajouter 5
et diviser le par 3